Tous les exercices

Table des matières

1 100.01 Logique

Exercice 1

Soient R et S des relations. Donner la négation de $R \Rightarrow S$. [000104]

Exercice 2

Démontrer que $(1=2) \Rightarrow (2=3)$.

Correction ▼ [000105]

Exercice 3

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0\,;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000106]

Exercice 4

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x<y$ alors $f(x)>f(y)$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Correction ▼ Vidéo ■ [000107]

Exercice 5

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2=4$ $\ldots\ldots$ $x=2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z=\bar{z}$ $\ldots\ldots$ $z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x=\pi$ $\ldots\ldots$ $e^{2ix}=1$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000108]

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles $F_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\leqslant 0\}$ et $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy\geqslant 1,\ x\geqslant 0\}$. On note M_1M_2 la distance usuelle entre deux points M_1 et M_2 de $\mathbb{R}^2$. Évaluer les propositions suivantes :

1. $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2<\varepsilon$
2. $\exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad \forall \varepsilon \in]0,+\infty[\qquad M_1M_2<\varepsilon$
3. $\exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2<\varepsilon$
4. $\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0,+\infty[\qquad M_1M_2<\varepsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000109]

Exercice 7

Nier la proposition : “tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.

Correction ▼ Vidéo ■ [000110]

Exercice 8

Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

Correction ▼ [000111]

Exercice 9

Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x+1$;
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x-7/5| < \alpha \Rightarrow |5x-7| < \varepsilon)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000112]

Exercice 10 Le missionnaire et les cannibales

Les cannibales d’une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ? (d’après Cervantès) [000113]

Exercice 11

La proposition $\big(P \wedge Q \Rightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle vraie ? [000114]

Exercice 12

On suppose que la proposition P est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1. $(\neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S$.
2. $S \Rightarrow (\neg P) \vee Q$.
3. $P \Rightarrow R \vee S$.
4. $S \wedge Q \Rightarrow \neg P$.
5. $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rightarrow T$.
6. $R \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ? [000115]

Exercice 13

Ecrire la négation des phrases suivantes :

1. $(\forall x)(\exists n)/(x \leqslant n)$.
2. $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leqslant M)$.

3. $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.
4. $(\forall x)(\exists y)/(yxy^{-1} = x)$.
5. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geqslant N)(|u_n| < \varepsilon)$.
6. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathscr{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

[000116]

Exercice 14

Comparer les différentes phrases (sont-elles équivalentes, contraires, quelles sont celles qui impliquent les autres...)

1. $(\forall x)(\exists y)/(x \leqslant y)$.
2. $(\forall x)(\forall y)(x \leqslant y)$.
3. $(\exists x)(\exists y)/(x \leqslant y)$.
4. $(\exists x)/(\forall y)(x \leqslant y)$.
5. $(\exists x)/(\forall y)(y < x)$.
6. $(\exists x)(\exists y)/(y < x)$.
7. $(\forall x)(\exists y)/(x = y)$.

[000117]

Exercice 15

Si $P(x)$ est une proposition dépendant de $x \in X$, on note $\overline{P} = \{x \in X / P(x) \text{ est vraie}\}$. Exprimer en fonction de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ les ensembles $\overline{\neg P}, \overline{P \wedge Q}, \overline{P \vee Q}, \overline{P \Rightarrow Q}, \overline{P \Leftrightarrow Q}$. [000118]

Exercice 16

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left(n \geqslant N \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon\right).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000119]

Exercice 17

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g.

Correction ▼ Vidéo ■ [000120]

Exercice 18 **IT

Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

1. (f étant une application du plan dans lui-même)
   (a) f est l'identité du plan.
   (b) f a au moins un point invariant (on dit aussi point fixe).
2. (f étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
   (a) f est l'application nulle.
   (b) L'équation $f(x) = 0$ a une solution.
   (c) L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.
3. ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite réelle)
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Correction ▼ [005103]

Exercice 19 *IT

Donner la négation des phrases suivantes

1. $x \geqslant 3$
2. $0 < x \leqslant 2$.

Correction ▼ [005104]

Exercice 20 **IT

Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

1. « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ et $g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».
2. « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».

Donner un exemple de fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux non nulles et dont le produit est nul.

Correction ▼ [005105]

2 100.02 Ensemble

Exercice 21

Montrer que $\emptyset \subset X$, pour tout ensemble X. [000121]

Exercice 22

Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000122]

Exercice 23

Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ et $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000123]

Exercice 24

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A,B \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000124]

Exercice 25

A et B étant des parties d'un ensemble E, démontrer les lois de Morgan :

$$\complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B) \quad \text{et} \quad \complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B).$$

[000125]

Exercice 26

Démontrer les relations suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

[000126]

Exercice 27

Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff \complement F \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F \cap \complement G = \emptyset).$$

[000127]

Exercice 28

Soit E et F des ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que $A \times B \subset E \times F$. [000128]

Exercice 29

Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Écrire le produit cartésien $A \times B$. Quel est le nombre de parties de $A \times B$? [000129]

Exercice 30

Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre d'éléments de E^p ? Quel est le nombre de parties de E^p ?
[000130]

Exercice 31

x, y, z étant des nombres réels, résoudre le système :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)z & = & 0 \\ (x-2)(y-3) & = & 0 \end{cases}$$

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions. [000131]

Exercice 32

Soit A une partie de E, on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1-f$.
2. fg.
3. $f+g-fg$.

[000132]

Exercice 33

Soit un ensemble E et deux parties A et B de E. On désigne par $A\triangle B$ l'ensemble $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. *Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*

1. Démontrer que $A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A\triangle X = X\triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A\triangle A' = A'\triangle A = X$.

[000133]

Exercice 34

1. Écrire l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques suivantes : $x\mapsto\sqrt{x}$, $x\mapsto\frac{1}{x-1}$, $x\mapsto\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$.
2. Simplifier $[1,3]\cap[2,4]$ et $[1,3]\cup[2,4]$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $n\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs multiples de n : $n\mathbb{Z} = \{np \mid p\in\mathbb{Z}\}$. Simplifier $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$.

[000134]

Exercice 35

On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y<1\right\} \\ A_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x+y|<1\right\} \\ A_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|+|y|<1\right\} \\ A_4 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y>-1\right\} \\ A_5 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x-y|<1\right\} \end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x+y|<1 \text{ et } |x-y|<1) \Leftrightarrow |x|+|y|<1.$$

[000135]

Exercice 36

Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\quad \text{et} \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right].$$

Correction ▼ [000136]

Exercice 37

Montrez que chacun des ensembles suivants est un intervalle que vous calculerez.

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\qquad \text{et} \qquad J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1+\frac{1}{n}, n\right]$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000137]

Exercice 38

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.
[000138]

Exercice 39

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$. [000139]

Exercice 40

Donner les positions relatives de $A, B, C \subset E$ si $A \cup B = B \cap C$. [000140]

Exercice 41

Est-il vrai que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$? Et $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$? [000141]

Exercice 42

Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C$. [000142]

Exercice 43

Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1,2\}))$. [000143]

Exercice 44

Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

Correction ▼ [000144]

Exercice 45

Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$. [000145]

Exercice 46

Soient E, F, G, H quatre ensembles. Comparer les ensembles $(E \times F) \cap (G \times H)$ et $(E \cap G) \times (F \cap H)$. [000146]

Exercice 47

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1,2,3\}$. Pour $i = 1,2,3$ on pose $A_i = \{f \in E / f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E. [000147]

Exercice 48 **T

A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $(A\Delta B = A\cap B) \Leftrightarrow (A = B = \varnothing)$.
2. $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) = (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$.
3. $A\Delta B = B\Delta A$.
4. $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
5. $A\Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$.
6. $A\Delta C = B\Delta C \Leftrightarrow A = B$.

Correction ▼ [005112]

Exercice 49 ***IT

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indéxée par un ensemble I et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble F indéxée par un ensemble I. Soit f une application de E vers F. Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ et $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$ (recommencer par $f(A\cup B)$ si on n'a pas les idées claires).
2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f(E\setminus A_i)$ et $F\setminus f(A_i)$.
4. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$ et $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
5. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$ et $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
6. $f^{-1}(F\setminus B_i)$ et $E\setminus f^{-1}(Bi)$.

Correction ▼ [005113]

Exercice 50 ***I Théorème de Cantor

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2. En considérant la partie $A = \{x\in E / x\notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas de bijection f de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Correction ▼ [005117]

Exercice 51

Soit E un ensemble et $\mathscr{O}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. On dit que $\mathscr{O}$ est une *topologie sur* E si les conditions suivantes sont vérifiées

— $\mathscr{O}$ est stable par intersection finie, autrement dit : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et toute famille $U_1,\cdots U_n$ d'éléments de $\mathscr{O}$, on a $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathscr{O}$.
— $\mathscr{O}$ est stable par union quelconque, autrement dit : pour tout ensemble I et toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{O}$, $\bigcup_{i\in I} U_i\in\mathscr{O}$.
— Les parties $\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathscr{O}$.

1. Montrer que $\mathscr{O}_1 = \{\emptyset, E\}$ et $\mathscr{O}_2 = \mathscr{P}(E)$ sont des topologies sur E.
2. Montrer que
$$\mathscr{O}_3 = \{U\in\mathscr{P}(E) \,|\, U = \emptyset \text{ ou } {}^cU \text{ est fini}\}$$
est une topologie sur E.

3. Combien de topologies différentes y a-t-il si E est l'ensemble vide ? S'il n'a qu'un seul élément ? Deux éléments ? Trois éléments ?

[007186]

Exercice 52

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, il existe une notion de *partie bornée* : c'est une partie qui est incluse dans un segment du type $[-M,M]$, pour un certain M. Cet exercice montre comment généraliser cette notion de *partie bornée* à un ensemble quelconque.

Soit E un ensemble et $\mathscr{B}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. On dit que $\mathscr{B}$ est une *bornologie sur E* si les conditions suivantes sont vérifiées

— Si $A \in \mathscr{B}$ et $B \subseteq A$, alors $B \in \mathscr{B}$.
— Si $A \in \mathscr{B}$ et $B \in \mathscr{B}$, alors $A \cup B \in \mathscr{B}$.
— Pour tout $x \in E$, on a $\{x\} \in \mathscr{B}$.

Les éléments de $\mathscr{B}$ sont dits *$\mathscr{B}$-bornés*, ou simplement *bornés* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la bornologie utilisée.

Dans la suite, on fixe un ensemble E.

1. Montrer que $\mathscr{B}_1 = \{\emptyset, E\}$ est une bornologie de E. On l'appelle la *bornologie triviale (ou : grossière).*
2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{B}_2$ des parties finies de E est une bornologie de E. On l'appelle la *bornologie discrète*.
3. Combien de bornologies différentes y a-t-il si E est vide ? S'il contient (exactement) un élément ? Deux ? Trois ?
4. On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}$. Soit $\mathscr{B}_3$ l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{R}$ bornées au sens classique, autrement dit
$$A \in \mathscr{B}_3 \iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, |a| \leqslant M$$
Montrer que $\mathscr{B}_3$ est une bornologie. On l'appelle la *bornologie usuelle sur* $\mathbb{R}$, et lorsqu'on parle de bornés de $\mathbb{R}$, il est implicite qu'on se réfère à cette bornologie (et non aux deux premières par exemple).

[007187]

Exercice 53

Soit E un ensemble et $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. On dit que $\mathscr{A}$ est une *algèbre de parties E* si les conditions suivantes sont vérifiées :

— $\mathscr{A}$ n'est pas vide.
— Si $X \in \mathscr{A}$, alors $E \setminus X$ aussi.
— $\mathscr{A}$ est stable par union finie, autrement dit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille $U_1, \cdots U_n$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \mathscr{A}$.

1. Montrer que $\mathscr{P}(E)$ est une algèbre de parties de E.
2. Montrer qu'une algèbre de parties de E est stable par intersection finie.
3. Combien d'algèbres de parties y a-t-il si E a (exactement) un, deux, ou trois éléments ?

[007188]

---

3 100.03 Absurde et contraposée

Exercice 54

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. [000148]

Exercice 55

Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$. [000149]

Exercice 56

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n)+1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000150]

Exercice 57

1. Soit $p_1, p_2, \dots, p_r$, r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000151]

4 100.04 Récurrence

Exercice 58

Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. (Indication : $1000 = 9 \times 111 + 1$). [000152]

Exercice 59

Montrer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000153]

Exercice 60

En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?

Soit $\mathscr{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

- $\mathscr{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons $\mathscr{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
  Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

[000154]

Exercice 61

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000155]

Exercice 62

1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un “vrai” triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $R_n = R_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

Correction ▼ [000156]

Exercice 63

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathscr{F}(X,X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000157]

Exercice 64

Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

[000158]

Exercice 65

Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$$

Démontrer que l'on a

$$S_n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

[000159]

Exercice 66

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la propriété suivante :

$$P_n : \quad 2^n > n^2$$

1. Pour quelles valeurs de n l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est-elle vraie ?
2. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est-elle vraie ?

[000160]

Exercice 67

Que pensez-vous de la démonstration suivante ?

1. Pour tout $n \geqslant 2$, on considère la propriété :

$$P(n): \quad n \text{ points distincts du plan sont toujours alignés}$$

2. Initialisation : $P(2)$ est vraie car deux points distincts sont toujours alignés.
3. Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie et on va démontrer $P(n+1)$.
   Soit donc $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ des points distincts. D'après l'hypothèse de récurrence, $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont alignés sur une droite d, et $A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite d'. Les deux droites d et d' ayant $n-1$ points communs $A_2, \dots, A_n$ sont confondues. Donc $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés, ce qui montre l'hérédité de la propriété.
4. Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

[000161]

Exercice 68

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, 9 divise $10^n - 1$.
2. Soit k un entier strictement positif. Étudier la propriété suivante : pour tout entier naturel n, k divise $(k+1)^n + 2$.

[000162]

Exercice 69

Démontrer que pour $n \geqslant 1$, le produit de n entiers impairs est un entier impair. [000163]

Exercice 70

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Démontrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

[000164]

Exercice 71

Soit $b \geqslant 2$ un entier fixé. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des entiers $a_0, a_1, \dots, a_n$ appartenant à $\{0, 1, \dots, b-1\}$ tels que ;

$$N = a_0 + a_1 b + \cdots + a_n b^n \quad \text{et} \quad a_n \neq 0$$

Démontrer que pour chaque N, le système $(n, a_0, a_1, \dots, a_n)$ est déterminé par la propriété ci-dessus.
On dit que $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les chiffres de l'écriture du nombre N suivant la base b. [000165]

Exercice 72

Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k!$ divise le produit de k entiers consécutifs :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ k! \mid n(n+1)\cdots(n-k+1)$$

[000166]

Exercice 73

Les propriétés

$$P_n\ :\ 3 \mid 4^n - 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

et

$$Q_n\ :\ 3 \mid 4^n + 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

sont-elles vraies ou fausses ? [000167]

Exercice 74

1. Calculer les restes de la division euclidienne de $1, 4, 4^2, 4^3$ par 3.
2. Formuler, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une hypothèse $\mathscr{P}(n)$ concernant le reste de la division euclidienne de 4^n par 3. Démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $16^n + 4^n + 3$ est-il divisible par 3.

[000168]

Exercice 75

Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. [000169]

Exercice 76

1. Démontrer par récurrence :
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. Calculer de deux manières différentes :
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3.$$
3. En déduire :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 3n).$$

[000170]

Exercice 77

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

[000171]

Exercice 78

Démontrer, en le déterminant qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ 2^n \geqslant (n+2)^2.$$

[000172]

Exercice 79

Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 2$ l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1 + nx]$$

est vraie. [000173]

Exercice 80

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a
$$n^k + kn^{k-1} \leqslant (n+1)^k.$$
2. Soit b un réel positif ou nul. Montrer par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$ on a
$$(1+b)^n \leqslant 1 + \frac{nb}{1!} + \frac{(nb)^2}{2!} + \ldots + \frac{(nb)^n}{n!}.$$

[000174]

Exercice 81

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$
pour tout réel a et b. [000175]

Exercice 82

On définit une suite (F_n) de la façon suivante :
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; \quad F_0 = 1, F_1 = 1 .$$
1. Calculer F_n pour $1 < n < 10$.
2. Montrer que l'équation $x^2 = x+1$ admet une unique solution positive a que l'on calculera.
3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a
$$a^{n-2} < F_n < a^{n-1} .$$

[000176]

Exercice 83

Montrer que :
$$2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}.$$

[000177]

Exercice 84

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, trouver une loi simplifiant le produit :
$$(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{n}).$$

[000178]

Exercice 85

Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels de même signe tel que $a_i > -1$, montrer que :
$$(1+a_0)\ldots(1+a_n) > 1 + a_0 + \ldots + a_n.$$

[000179]

Exercice 86

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. [007011]

Exercice 87

Montrer que pour tout entier n positif, l'entier $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11. [007012]

Exercice 88

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et pour tout n positif, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer que la suite est majorée par 4. [007013]

Exercice 89

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et pour tout n positif, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer u_n en fonction de n.

Indication ▼ [007014]

Exercice 90

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout n positif, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Calculer u_n en fonction de n.

Indication ▼ [007015]

Exercice 91

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n positif, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.

Indication ▼ [007016]

Exercice 92

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des n premiers entiers positifs impairs est toujours le carré d'un entier. [007017]

Exercice 93

Montrer : $\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nu)| \leqslant n|\sin(u)|$. [007018]

Exercice 94

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{3n}{3^n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{3n}{2n^2+1}$.

[007019]

Exercice 95

Soit $a \in]0, \pi/2[$, et définissons une suite réelle par $u_0 = 2\cos(a)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$. [007020]

Exercice 96

Définissons une suite par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, u_n est positif. En déduire que pour tout $n \geqslant 4$, on a $u_n \geqslant n - 2$. En déduire la limite de la suite.
2. Définissons maintenant la suite $v_n = 4u_n - 8n + 24$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, donner son premier terme et sa raison. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. Remarquer que u_n est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes. En déduire une formule pour la quantité $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de l'entier n.

[007021]

Exercice 97

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Montrer que pour tout réel $a \in]1;+\infty[$, on a $\frac{1}{\sqrt{a}+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En déduire la limite de la suite (u_n).

[007022]

Exercice 98 Récurrence de Cauchy et application

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$.

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.
En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels positifs, alors on a

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

[007023]

Exercice 99

Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de deux distinctes.

Indication ▼ [007024]

Exercice 100

Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $2^p(2q+1)$, avec p et q entiers.

Indication ▼ [007025]

Exercice 101

Montrer que pour tout $n > 0$ on a l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

[007035]

Exercice 102 Une récurrence descendante

Montrer que pour tout entier $N \geqslant 2$,

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\ldots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}}} < 3.$$

Indication ▼ [007036]

Exercice 103 Inégalité du binôme

Montrer que pour tous $a, b > 0$ distincts et tout $n > 1$, on a l'inégalité

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n.$$

[007037]

Exercice 104 Variantes du raisonnement par récurrence

Parmi les énoncés suivants, lesquels permettent d'en déduire que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

1. P_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1})$;
2. P_0, P_1 et $\forall n \geqslant 1, P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1})$;
3. P_0, P_1, P_2 et $\forall n \geqslant 2, P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1})$;
4. P_0, P_1 et $\forall n \geqslant 1, P_n \Rightarrow (P_{n-1} \wedge P_{n+1})$.

[007038]

Exercice 105 Conducteur d'un sous-monoïde

Soit P_n une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$ telle que :

1. P_0 est vraie ;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow (P_{n+3}$ et $P_{n+4})$.

La propriété est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? Pour n assez grand ? (Et si oui à partir de quel rang ?) Pour quels entiers est-elle vraie ?

Répondre aux deux premières questions en remplaçant dans l'énoncé les nombres 3 et 4 par des paramètres entiers positifs a et b quelconques.

Indication ▼ [007039]

Exercice 106 Nombres de Catalan

On définit une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $C_0 = 1$ et pour tout naturel n, $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite ;
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $C_n \geqslant 2^{n-1}$;
3. Montrer par récurrence forte que pour tout $n \geqslant 0$, $C_n \geqslant 3^{n-2}$;
4. Tenter de montrer par une récurrence similaire à la précédente que pour tout $n \geqslant 0$, $C_n \geqslant 4^{n-2}$. À quel endroit ceci échoue-t-il ? Pourquoi est-il heureux que cela échoue ?

[007040]

Exercice 107

Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier. [007041]

Exercice 108

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer u_n en fonction de n.

Indication ▼ [007042]

Exercice 109

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer u_n en fonction de n. [007043]

Exercice 110

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trace n cercles dans le plan. Montrer que l'on peut colorier chaque région du plan ainsi délimitée avec exactement deux couleurs, de manière à ce que deux régions séparées par un arc de cercle soient toujours de couleur différente. [007044]

Exercice 111

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On place $2n$ points dans l'espace, et on trace n^2+1 segments entre ces points. Montrer que l'on a tracé au moins un triangle. [007045]

Exercice 112

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le nombre

$$u_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

est entier.

Indication ▼ [007046]

5 100.05 Relation d'équivalence, relation d'ordre

Exercice 113

1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathscr{R}$ par : $(a,b)\mathscr{R}(a',b') \Leftrightarrow a+b' = b+a'$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier $E/\mathscr{R}$.
2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(p,q)\mathscr{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.

[000207]

Exercice 114

Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathscr{R}$ par :

$$(x,y)\mathscr{R}(x',y') \Leftrightarrow y = y'.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[000208]

Exercice 115

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathscr{R}$ par :

$$z\mathscr{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000209]

Exercice 116

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

"$x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$ car $\mathscr{R}$ est symétrique,
or $(x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x) \Rightarrow x\mathscr{R}x$ car $\mathscr{R}$ est transitive,
donc $\mathscr{R}$ est réflexive."

Indication ▼ Correction ▼ [000210]

Exercice 117

Étudier la relation Re définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) par :

$$f \,\mathrm{Re}\, g \Longleftrightarrow \exists A > 0, \forall x \in R, |x| > A \Rightarrow f(x) = g(x).$$

[000211]

Exercice 118

Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathscr{R}y \iff xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathscr{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000212]

Exercice 119

La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Si oui, est-ce une relation d'ordre total ? [000213]

Exercice 120

Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes ; dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale, si l'ensemble admet un plus petit ou plus grand élément.

1. Dans $\mathscr{P}(E)$: $A\mathscr{R}_1B \Leftrightarrow A \subset B$; $A\mathscr{R}_2B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
2. Dans $\mathbb{Z}$: $a\mathscr{R}_3b \Leftrightarrow a$ et b ont la même parité ; $a\mathscr{R}_4b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ a-b=3n$; $a\mathscr{R}_5b \Leftrightarrow a-b$ est divisible par 3.

[000214]

Exercice 121

Soient $(X,\leqslant)$ et $(Y,\leqslant)$ deux ensembles ordonnés (on note abusivement les deux ordres de la même façon). On définit sur $X\times Y$ la relation $(x,y)\leqslant(x',y')$ ssi $(x<x')$ ou $(x=x'$ et $y\leqslant y')$. Montrer que c'est un ordre et qu'il est total ssi X et Y sont totalement ordonnés. [000215]

Exercice 122

Un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie ?

[000216]

Exercice 123

Soit $(E,\leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathscr{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$ la relation $\prec$ par

$$X \prec Y \quad \text{ssi} \quad (X=Y \ \text{ ou } \ \forall x\in X\ \forall y\in Y\ x\leqslant y).$$

Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Correction ▼ Vidéo ■ [000217]

Exercice 124

Montrer que $a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$ est une l.c.i sur $]-1,1[$ et déterminer ses propriétés. [000218]

Exercice 125 Congruence des carrés modulo 5

On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ par $x\sim y \iff x^2\equiv y^2 \bmod 5$.

1. Déterminer l'ensemble quotient.

2. Peut-on définir une addition quotient ? une multiplication quotient ?

[003030]

Exercice 126 Produit cartésien

Soient deux relations d'équivalence : $\mathscr{R}$ sur E, et $\mathscr{S}$ sur F. On définit sur $E \times F$:

$$(x,y) \sim (x',y') \iff x\mathscr{R}x' \text{ et } y\mathscr{S}y'.$$

1. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi : E \times F \to (E/\mathscr{R}) \times (F/\mathscr{S}), (x,y) \mapsto (\dot{x},\dot{y})$
   Démontrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

[003031]

Exercice 127 $X \cup A = Y \cup A$

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit la relation sur $\mathscr{P}(E)$:

$$X \sim Y \iff X \cup A = Y \cup A.$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E \setminus A), X \mapsto X \setminus A$.
   Montrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

[003032]

Exercice 128 Équivalences sur E^E

Soit E un ensemble non vide. On considère les relations sur $F = E^E$:

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^n, \\ f \approx g &\iff \exists\, m,n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^m, \\ f \equiv g &\iff f(E) = g(E). \end{aligned}$$

1. Montrer que $\sim$, $\approx$, $\equiv$ sont des relations d'équivalence.
2. Pour $f \in F$, on note $f^{\sim}$, $f^{\approx}$, $f^{\equiv}$ les classes d'équivalence de f modulo $\sim$, $\approx$, $\equiv$.
   (a) Comparer $f^{\sim}$, $f^{\approx}$.
   (b) Montrer que toute classe d'équivalence pour $\approx$ est réunion de classes d'équivalence pour $\sim$.
   (c) Que pouvez-vous dire de f s'il existe $g \in f^{\approx}$ injective ? surjective ?
   (d) Même question avec $f^{\equiv}$.

[003033]

Exercice 129 Relation d'équivalence quotient

Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ deux relations d'équivalence sur un ensemble E, telles que :

$$\forall\, x,y \in E,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow x\mathscr{S}y.$$

On définit $\dot{\mathscr{S}}$ sur $E/\mathscr{R}$ par : $\dot{x}\dot{\mathscr{S}}\dot{y} \iff x\mathscr{S}y$.
Vérifier que $\dot{\mathscr{S}}$ est une relation d'équivalence, puis définir une bijection entre $(E/\mathscr{R})/\dot{\mathscr{S}}$ et $E/\mathscr{S}$. [003034]

Exercice 130 Complétion d'une relation réflexive et transitive

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E réflexive et transitive. On définit les deux relations :

$$\begin{aligned} x\mathscr{S}y &\iff (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x), \\ x\mathscr{T}y &\iff (x\mathscr{R}y \text{ ou } y\mathscr{R}x). \end{aligned}$$

Est-ce que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont des relations d'équivalence ? [003035]

Exercice 131 Parties saturées pour une relation d'équivalence

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit $s(A) = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$.

1. Comparer A et $s(A)$.
2. Simplifier $s(s(A))$.
3. Montrer que : $\forall\, x \in E$, on a $(x \in s(A)) \iff (\dot{x} \cap s(A) \neq \varnothing)$. En déduire $s(E \setminus s(A))$.
4. Démontrer que $s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} s(A_i)$ et $s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} s(A_i)$.
5. Donner un exemple d'inclusion stricte.

[003036]

Exercice 132 Ordre sur les fonctions

Soit X un ensemble et $E = \mathbb{R}^X$. On ordonne E par : $f \leqslant g \iff \forall\, x \in X,\ f(x) \leqslant g(x)$.

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. L'ordre est-il total ?
3. Comparer les énoncés : *"f est majorée"*, et *"$\{f\}$ est majoré"*.
4. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille majorée de fonctions de E. Montrer qu'elle admet une borne supérieure.

[003037]

Exercice 133 $\sup \circ \inf$ et $\inf \circ \sup$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit les fonctions :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sup\{f(t,y) \text{ tq } y \in \mathbb{R}\}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \inf\{f(x,t) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que g et h sont bornées, puis comparer $\sup h$ et $\inf g$. [003038]

Exercice 134 Ordre lexicographique

On note $E = [-1,1]^2$, et on définit sur E la relation :
$(x,y) \preceq (x',y') \iff \Big((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y')\Big)$ (*ordre lexicographique*).

1. Pour $(a,b) \in E$, représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (a,b).
2. Soit A une partie non vide de E. Montrer que A admet une borne supérieure.

[003039]

Exercice 135 Distance entre un point et une partie

Pour $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée, et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$d(x,A) = \inf\{|x-a| \text{ tq } a \in A\} \qquad (\textit{distance de } x \textit{ à } A).$$

Montrer que $\big|d(x,A) - d(y,A)\big| \leqslant |x-y|$. [003040]

Exercice 136 Parties adjacentes

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a \leqslant b \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B \text{ tq } b - a \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

(on dit que A et B sont *adjacentes*). Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$. [003041]

Exercice 137 borne sup $\Rightarrow$ borne inf

Soit E ordonné tel que toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Montrer que toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Correction ▼ [003042]

Exercice 138 Ordre sur $\mathbb{R}^2$

On définit sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \ll (x',y') \iff |x'-x| \leqslant y'-y$.

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple (a,b).
3. L'ordre est-il total ?
4. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Déterminer $\sup(A)$.

Correction ▼ [003043]

Exercice 139 Propriétés de sup et inf

Un treillis est un ensemble ordonné E dans lequel pour tous $x,y \in E$, $\sup(x,y)$ et $\inf(x,y)$ existent. Soit E un treillis.

1. Montrer que sup et inf sont des opérations associatives.
2. A quelle condition ont-elles des éléments neutres ?
3. Montrer que :

$$\begin{aligned}
&\forall\, x,y \in E, && \sup\big(x,\inf(x,y)\big) = \inf\big(x,\sup(x,y)\big) = x,\\
&\forall\, x,y,z \in E, && x \leqslant z \Rightarrow \sup\big(x,\inf(y,z)\big) \leqslant \inf\big(\sup(x,y),z\big),\\
&\forall\, x,y,z \in E, && \inf\big(x,\sup(y,z)\big) \geqslant \sup\big(\inf(x,y),\inf(x,z)\big).
\end{aligned}$$

[003044]

Exercice 140 Ordre déduit d'une loi idempotente

Soit $\cdot$ une opération commutative et associative sur E, telle que : $\forall\, x \in E,\ x \cdot x = x$.
On définit la relation $\leqslant$ sur E par : $x \leqslant y \iff x \cdot y = x$

1. Reconnaître $\leqslant$ quand $\cdot$ est $\cap$ sur $\mathscr{P}(X)$ (resp $\cup$).
2. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre.
3. Démontrer que : $\forall\, x,y \in E,\ x \cdot y = \inf(x,y)$.

[003045]

Exercice 141 Borne supérieure parmi les intervalles

Soit E l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ (y compris $\varnothing$) ordonné par l'inclusion.
Soient I,J deux intervalles. Qu'est-ce que $\inf(I,J)$? $\sup(I,J)$? [003046]

Exercice 142 Prolongement d'applications

Soit E un ensemble et $\mathscr{E} = \{(A,f) \text{ tq } A \subset E,\ A \neq \varnothing, \text{ et } f \in E^A\}$. On ordonne $\mathscr{E}$ par :

$$(A,f) \preceq (B,g) \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall\, x \in A,\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

(c'est-à-dire que la fonction g, définie sur B, prolonge la fonction f, définie seulement sur A).

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Soient (A,f) et (B,g) deux éléments de $\mathscr{E}$. Trouver une CNS pour que la partie $\{(A,f),(B,g)\}$ soit majorée. Quelle est alors sa borne supérieure ?
3. Même question avec minorée.

[003047]

Exercice 143 Point fixe d'une fonction croissante

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. On note $A = \{x \in [0,1] \text{ tq } f(x) \leqslant x\}$.

1. Démontrer que A n'est pas vide.
2. Démontrer que $f(A) \subset A$.
3. Soit $a = \inf(A)$. Montrer que $f(a)$ minore A.
4. En déduire que $f(a) = a$.

Cela prouve que toute application croissante de $[0,1]$ dans lui-même admet un point fixe. Montrer que c'est faux pour l'intervalle $[0,1[$. [003048]

Exercice 144 Relation d'ordre sur un ensemble quotient

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur E réflexive et transitive. On définit la relation : $x \sim y \iff x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
   Sur $E/\sim$ on pose : $\dot{x} \leqslant \dot{y} \iff x\mathscr{R}y$.
2. Montrer que cette définition est indépendante des représentants x et y choisis.
3. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $E/\sim$.

[003049]

Exercice 145 Pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$

Dans cet exercice, on admet que : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2$.

1. Soient $A = \{\, x \in \mathbb{Z}^{+*} \text{ tq } x^2 < 2 \,\}$ et $B = \{\, x \in \mathbb{Z}^{+*} \text{ tq } x^2 > 2 \,\}$. Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(B)$.
2. Soient $A = \{\, x \in \mathbb{Q}^{+*} \text{ tq } x^2 < 2 \,\}$ et $B = \{\, x \in \mathbb{Q}^{+*} \text{ tq } x^2 > 2 \,\}$. On veut démontrer que A n'admet pas de borne supérieure *dans* $\mathbb{Q}$. Pour cela, on suppose au contraire que $\alpha = \sup(A)$ existe ($\alpha \in \mathbb{Q}$), et on pose $\beta = \frac{2}{\alpha}$.
   (a) Montrer que $\beta = \inf(B)$.
   (b) Montrer que : $\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B$, ona $a \leqslant b$. Que pouvez-vous en déduire pour α et β ?
   (c) Obtenir une contradiction en considérant $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

[003050]

Exercice 146

Soit E l'ensemble des droites du plan. Le parallélisme et l'orthogonalité sont-elles des relations réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives ?

[007189]

Exercice 147

Soit E un ensemble fini, de cardinal n. Combien de relations binaires y a-t-il sur E ? De relations symétriques ? Réflexives ?

[007190]

Exercice 148

Soit $\leqslant$ une relation d'ordre sur un ensemble E, et $<$ la relation d'ordre strict associée, c'est-à-dire par définition : $x < y \iff x \leqslant y$ et $x \neq y$. Est-ce que le contraire de $x \leqslant y$ est $y < x$?

Indication ▼ Correction ▼ [007191]

Exercice 149

Soit E un ensemble fini et $f : E \to E$ une involution, c'est-à-dire une application vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}$. Montrer que si f n'a pas de points fixes, alors $|E|$ est pair. Plus généralement, montrer que la parité de $|E|$ est celle du nombre de points fixes de f.

Indication ▼ [007192]

Exercice 150

Soit $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence la plus fine sur $\{0,1,2\}$ vérifiant $0\mathscr{R}1$. Décrire le graphe de $\mathscr{R}$ (donner tous ses éléments).

[007193]

Exercice 151

(Coordonnées polaires) Soit $\sim$ la relation d'équivalence la plus fine sur $\mathbb{R}_+ \times [-\pi,\pi]$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \forall \theta, \theta' \in [-\pi,\pi], (0,\theta) \sim (0,\theta') \\ \forall r \in \mathbb{R}_+^*, (r,-\pi) \sim (r,\pi) \end{cases}$$

Décrire le graphe de $\sim$, ainsi que ses classes d'équivalence.

[007194]

Exercice 152

Soit $l > 0$ un réel et $X = [0,l] \times [-1,1]$, et $\sim$ la relation d'équivalence la plus fine sur X telle que $(0,y) \sim (l,-y)$ pour tout $y \in [-1,1]$. Décrire le graphe et les classes d'équivalence de la relation.

Note : l'ensemble quotient $\mathscr{M} = X/\sim$ est donc l'ensemble obtenu en recollant le rectangle $X = [0,l] \times [-1,1]$ le long de deux bords opposés, en suivant une orientation opposée. On l'appelle le *ruban de Möbius* (de longueur l).

[007195]

Exercice 153

Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ des relations binaires sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est plus fine que $\mathscr{S}$, ou encore que c'est est un raffinement, si $\forall x,y \in E, x\mathscr{R}y \implies x\mathscr{S}y$. De façon équivalente, $\mathscr{R}$ est plus fine que $\mathscr{S}$ si on a l'inclusion de graphes $\Gamma_{\mathscr{R}} \subseteq \Gamma_{\mathscr{S}}$.

1. Montrer que « être plus fine que » est une relation d'ordre sur l'ensemble des relations binaires sur E.
2. Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ des relations binaires sur E. Montrer qu'il existe une relation binaire sur E qui raffine à la fois $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$, et qu'il existe aussi une relation binaire sur E simultanément moins fine que $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$.

[007196]

Exercice 154

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}, t \mapsto e^{it}$, et soit $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathscr{R}y \iff x \equiv y \pmod{2\pi}$. On note $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathscr{R}$. Montrer que l'application f descend au quotient en une application $[f] : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{U}$ qui est une bijection.

Correction ▼ [007197]

Exercice 155

(Produit de deux relations) Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ deux relations sur E. Leur *produit*, noté $\mathscr{R}\mathscr{S}$, est la relation binaire définie par :

$$\forall x,y \in E, x\mathscr{R}\mathscr{S}y \iff \exists a \in E,\ (x\mathscr{R}a \text{ et } a\mathscr{S}y)$$

1. Prouver par un exemple qu'en général, les relations $\mathscr{R}\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}\mathscr{R}$ sont distinctes.
2. Montrer que le produit de relations est néanmoins associatif, autrement dit si $\mathscr{R}$, $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont trois relations, on a

$$(\mathscr{R}\mathscr{S})\mathscr{T} = \mathscr{R}(\mathscr{S}\mathscr{T})$$

[007198]

Exercice 156

(Clôture transitive. Cet exercice utilise la notion de produit de relations) Soit $\mathscr{R}$ une relation sur E. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{R}$ est une relation sur E, on définit alors par récurrence la relation $\mathscr{R}^n$ (en définissant $\mathscr{R}^0$ comme l'égalité, puis $\mathscr{R}^{n+1} = \mathscr{R}\mathscr{R}^n$).
Montrer que toutes les relations suivantes sont égales :

1. $\bigvee_{n\geqslant 0} \mathscr{R}^n$;
2. la relation dont le graphe est $\bigcup_{n\geqslant 0} \Gamma_{\mathscr{R}^n}$;
3. la relation dont le graphe est l'intersection de tous les graphes de relations transitives qui contiennent $\Gamma_{\mathscr{R}}$.
4. la plus fine relation parmi toutes les relations transitives moins fines que $\mathscr{R}$.

Cette relation binaire (qui est donc transitive) est appelée *clôture transitive* de $\mathscr{R}$. Montrer que si $\mathscr{R}$ est symétrique (resp. réflexive), sa clôture transitive l'est également. [007199]

Exercice 157

Soit E l'ensemble des couples de la forme (I, f), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$. La relation $\preceq$ sur E est définie par

$$(I, f) \ \preceq \ (J, g) \iff (I \subseteq J \text{ et } f = g|_I).$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. [007200]

Exercice 158

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f, g \in E$. On dit que f et g ont « même germe en zéro » et on note $f \underset{0}{=} g$ si :

$$\exists \varepsilon > 0, f|_{]-\varepsilon,\varepsilon[} = g|_{]-\varepsilon,\varepsilon[}$$

1. Montrer que $\underset{0}{=}$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Montrer que si $f \underset{0}{=} g$ alors $f(0) = g(0)$, mais que la réciproque est fausse.
3. Montrer également que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, il existe deux fonctions f et g avec $f \underset{0}{=} g$ et $f(a) \neq g(a)$.

La classe d'équivalence d'une fonction f pour cette relation d'équivalence s'appelle le *germe de f en zéro*. Attention, cette relation d'équivalence n'est **pas** « l'équivalence en zéro » qui sera par la suite introduite dans le cours d'analyse. [007201]

Exercice 159

Soit $f : E \to F$, soit $\equiv_f$ la relation d'équivalence sur E dont les classes d'équivalence sont les fibres de f, et soit $Q = E/\equiv_f$ l'ensemble quotient.

1. Montrer que f passe au quotient en une application $\bar{f} : Q \to F$ qui est injective.
2. Montrer qu'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur E est plus fine que $\equiv_f$ si et seulement si f passe au quotient par $\mathscr{R}$.
3. En déduire quelles sont les relations d'équivalence les plus et moins fines telles que f passe au quotient par $\mathscr{R}$.

[007202]

Exercice 160

(Coégalisateur) Soient A et B deux ensembles et f et g deux applications entre A et B. On définit sur B la relation binaire suivante : $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence la plus fine telle que $\forall a \in A, f(a)\mathscr{R}g(a)$. Le *coégalisateur de f et g* est par définition l'ensemble quotient $C = B/\mathscr{R}$. On note $\pi : B \to C$ la surjection canonique sur le quotient. On a alors $\pi \circ f = \pi \circ g$.
Montrer que C et π vérifient la propriété suivante (dite *propriété universelle du coégalisateur*) :
Pour tout ensemble X et application $\phi : B \to X$ vérifiant $\phi \circ f = \phi \circ g$, il existe une unique application $h : C \to X$ telle que $\phi = h \circ \pi$.

[007203]

Exercice 161

(Somme amalgammée d'ensembles. Cet exercice utilise la notion de coégalisateur.) Soient A, B et C des ensembles et $f : C \to A$, $g : C \to B$ des applications.
Soit AB l'union disjointe de A et B et i_A et i_B les injections canoniques de A et B dans AB.
Les deux applications $i_A \circ f$ et $i_B \circ g$ vont toutes deux de C dans AB. Leur coégalisateur est appelé *la somme amalgamée de A et B sous C*, est noté A_CB. La surjection canonique $AB \to A_CB$ est notée π et on note $j_A = \pi \circ i_A$ et $j_B = \pi \circ i_B$.
Montrer que A_CB vérifie la propriété universelle suivante :
Pour tout ensemble D muni d'applications $\phi : A \to D$ et $\psi : B \to D$, il existe une unique application $h : A_CB \to D$ telle que $\phi = h \circ j_A$ et $\psi = h \circ j_B$.

[007204]

Exercice 162

(Écrasement d'une partie d'un ensemble) Soit X un ensemble. Pour tout sous-ensemble $A \subseteq X$, on définit la relation binaire $\sim_A$ sur X comme suit :

$$\forall (x,y) \in X^2, x \sim_A y \iff (x = y \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in A)).$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur X. Quelles sont ses classes d'équivalence ?
2. Soit f une fonction de X dans un ensemble E, constante sur A. Montrer qu'elle descend au quotient en une application $[f] : X/\sim_A \to E$.
3. Montrer que pour tout ensemble E, l'application

$$\phi : \{f \in \mathscr{F}(X,E), \,|\, f \text{ est constante sur } A\} \to \mathscr{F}(X/\sim_A, E),$$

   qui à f associe $[f]$ est surjective.
4. Identifier, parmi les relations d'équivalence étudiées dans le cours et les exercices du chapitre, celles qui sont des cas particuliers d'écrasements de parties.

[007205]

Exercice 163

(Cône sur un ensemble) Soit X un ensemble et $Y = X \times [0,1]$. Soit $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence la plus fine sur Y telle que $\forall x, x' \in X, (x,0)\mathscr{R}(x',0)$.

1. Montrer que $(x,t)\mathscr{R}(x',t') \iff (t = t' = 0)$ ou $(x,t) = (x',t'))$.
2. Le cône sur X, noté $\mathrm{Cone}(X)$, est par définition $Y/\mathscr{R}$. Le nom de « cône » peut s'expliquer à l'aide de l'exemple suivant. Définir une bijection entre $\mathrm{Cone}(\mathbb{S}^1)$ et l'ensemble

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z^2 = x^2 + y^2, \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

   (qui est un vrai cône au sens usuel : faire un dessin).

[007206]

Exercice 164

(Suspension d'un ensemble) Soit X un ensemble. Sur l'ensemble $X\times[-1,1]$, on considère la relation d'équivalence la plus fine vérifiant :

$$\begin{cases}\forall x,x'\in X,(x,-1)\mathscr{R}(x',-1)\\ \forall x,x'\in X,(x,1)\mathscr{R}(x',1)\end{cases}$$

1. Montrer que
$$(x,t)\mathscr{R}(x',t')\iff \big(t=t'=-1 \text{ ou } t=t'=1 \text{ ou } (x,t)=(x',t')\big)$$
L'ensemble quotient est appelé *suspension de* X, et est noté $S(X)$.
2. Soit $X=\{-1,1\}$. Montrer que l'application $f:X\times[-1,1]\to\mathbb{R}^2$, $(x,t)\mapsto(t,x\sqrt{1-t^2})$ est à valeurs dans le cercle unité du plan, noté $\mathbb{S}^1$, et passe au quotient en application injective de $S(X)$ vers $\mathbb{R}^2$ dont l'image est $\mathbb{S}^1$. Ceci formalise la phrase « la suspension de deux points est un cercle. »

(Note : plus généralement, on peut montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suspension de la sphère $\mathbb{S}^n$ est en bijection naturelle avec la sphère $\mathbb{S}^{n+1}$. Cet exercice traite le cas $n=0$.) [007207]

Exercice 165

(Union/disjonction et intersection/conjonction de deux relations) Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ deux relations sur E. On définit la disjonction (ou union), notée $\mathscr{R}\vee\mathscr{S}$, par :

$$x(\mathscr{R}\vee\mathscr{S})y\iff(x\mathscr{R}y \text{ ou } x\mathscr{S}y)$$

De façon équivalente, le graphe de $\mathscr{R}\vee\mathscr{S}$ est l'union des graphes de $\mathscr{R}$ et de $\mathscr{S}$. De même, on définit la conjonction (ou intersection) $\mathscr{R}\wedge\mathscr{S}$ comme la relation dont le graphe est l'intersection des deux graphes de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$, c'est-à-dire

$$x(\mathscr{R}\wedge\mathscr{S})y\iff(x\mathscr{R}y \text{ et } x\mathscr{S}y).$$

Si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont des relations d'équivalence, montrer que $\mathscr{R}\wedge\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence, mais pas forcément $\mathscr{R}\vee\mathscr{S}$.
(Note : on peut définir la conjonction ou la disjonction d'un nombre quelconque de relations, à l'aide de l'union ou de l'intersection des graphes associés.) [007208]

6 100.99 Autre

Exercice 166

Quels sont les entiers n tels que $4^n\leqslant n!$? [000180]

Exercice 167

Montrer que :

$$\forall n\geqslant 2,u_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\notin\mathbb{N}.$$

Indication : montrer que

$$\forall n\geqslant 2,\exists(p_n,q_n)\in(\mathbb{N}^*)^2,u_n=\frac{2p_n+1}{2q_n}.$$

[000181]

Exercice 168

Soit $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ une application vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,f(n+1)>f(f(n)).$$

Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}^*}$. *Indications* : que dire de $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) = \inf\{f(n)|n \in \mathbb{N}\}$? En déduire que $\forall n > 0, f(n) > f(0)$. Montrer ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall m > n, f(m) > f(n)$ et $\forall m \leqslant n, f(m) \geqslant m$ (on pourra introduire k tel que $f(k)$ soit le plus petit entier de la forme $f(m)$ avec $m > n$). En déduire que f est strictement croissante et qu'il n'existe qu'une seule solution au problème. Laquelle ? [000182]

Exercice 169

Pour $p \in \{1,2,3\}$ on note $S_p = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. A l'aide du changement d'indice $i = n-k$ dans S_1, calculer S_1.
2. Faire de même avec S_2. Que se passe-t-il ?
3. Faire de même avec S_3 pour l'exprimer en fonction de n et S_2.
4. En utilisant l'exercice 59, calculer S_3.

[000183]

Exercice 170

Pour calculer des sommes portant sur deux indices, on a intérêt à représenter la zone du plan couverte par ces indices et à sommer en lignes, colonnes ou diagonales... Calculer :

1. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.
2. $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i(j-1)$.
3. $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i-1)j$.
4. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (n-i)(n-j)$.
5. $\sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} (p+q)^2$ (on posera $k = p+q$).

[000184]

---

7 101.01 Application

Exercice 171

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000185]

Exercice 172

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ et $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

[000186]

Exercice 173 Images directes et réciproques

Soit $f : E \to F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1. Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. Comparer $f(A \Delta A')$ et $f(A) \Delta f(A')$.
4. Comparer $f^{-1}(B \Delta B')$ et $f^{-1}(B) \Delta f^{-1}(B')$.

5. A quelle condition sur f a-t-on : $\forall\, A \subset E,\ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

[002889]

Exercice 174 $(X \cap A, X \cap B)$

Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E. Soit $\phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B), X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

1. Qu'est-ce que $\phi(\varnothing)$? $\phi(E \setminus (A \cup B))$?
2. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle injective ?
3. Est-ce que le couple $(\varnothing, B)$ possède un antécédent par ϕ ?
4. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle surjective ?

[002890]

Exercice 175 Partie stable par une application

Soit $f : E \to E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = \mathrm{id}_E$.

Soit $A \subset E$, $A_n = f^n(A)$, et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1. Montrer que $f(B) \subset B$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.

[002891]

Exercice 176 Factorisation d'une application

1. Soit $f : F \to E$ et $g : G \to E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \to F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si : $g(G) \subset f(F)$.
   A quelle condition h est-elle unique ?
2. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall\, x, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)\big)$.
   A quelle condition h est-elle unique ?

[002892]

Exercice 177 Propriétés des applications $A \mapsto f(A)$ et $B \mapsto f^{-1}(B)$

Soit $f : E \to F$. On considère les applications

$$\Phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F), A \mapsto f(A) \quad \text{et} \quad \Psi : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E), B \mapsto f^{-1}(B).$$

Montrer que :

1) f est injective $\iff$ Φ est injective $\iff$ Ψ est surjective. [002893]

2) f est surjective $\iff$ Φ est surjective $\iff$ Ψ est injective.

Exercice 178 $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ et $\varphi \mapsto \varphi \circ f$

Soit $f : E \to F$ une application, et G un troisième ensemble ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$f_* : E^G \to F^G, \varphi \mapsto f \circ \varphi \qquad \text{et} \qquad f^* G^F \to G^E, \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

Montrer que :

1. f est injective $\iff$ f_* est injective $\iff$ f^* est surjective.
2. f est surjective $\iff$ f_* est surjective $\iff$ f^* est injective.

[002894]

Exercice 179

[$h\circ g\circ f$, $g\circ f\circ h$ injectives et $f\circ h\circ g$ surjective] Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} E$ trois applications telles que $h\circ g\circ f$ et $g\circ f\circ h$ sont injectives et $f\circ h\circ g$ est surjective. Montrer que f,g,h sont bijectives. [002895]

Exercice 180 Parties saturées pour la relation d'équivalence associée à f

Soit $f : E \to F$ une application, et $\mathscr{S} = \{X \subset E \text{ tq } f^{-1}(f(X)) = X\}$.

1. Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathscr{S}$.
2. Montrer que $\mathscr{S}$ est stable par intersection et réunion.
3. Soient $X \in \mathscr{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \varnothing$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.
4. Soient X et $Y \in \mathscr{S}$. Montrer que $\overline{X}$ et $Y \setminus X$ appartienent à $\mathscr{S}$.
5. Montrer que l'application $\mathscr{S} \to \mathscr{P}(f(E)), A \mapsto f(A)$ est une bijection.

[002896]

Exercice 181 Conjugaison

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ bijective.
La conjugaison par f est l'application $\Phi_f : E^E \to E^E, \phi \mapsto f\circ\phi\circ f^{-1}$

1. Montrer que Φ_f est une bijection de E^E.
2. Simplifier $\Phi_f \circ \Phi_g$.
3. Simplifier $\Phi_f(\phi)\circ\Phi_f(\psi)$.
4. Soient $\mathscr{I}$, $\mathscr{S}$, les sous-ensembles de E^E constitués des injections et des surjections. Montrer que $\mathscr{I}$ et $\mathscr{S}$ sont invariants par Φ_f.
5. Lorsque ϕ est bijective, qu'est-ce que $\Big(\Phi_f(\phi)\Big)^{-1}$?

[002897]

Exercice 182 Ensembles équipotents

Soient E,F deux ensembles. On dit que :

E est moins puissant que F	s'il existe une injection	$f : E \to F$
E est plus puissant que F	s'il existe une surjection	$f : E \to F$
E et F sont équipotents	s'il existe une bijection	$f : E \to F$.

1. Démontrer que : (E est moins puissant que F) $\iff$ (F est plus puissant que E).
2. Montrer que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } n \text{ est divisible par } 3\}$, et $\mathbb{Z}$ sont deux à deux équipotents.
3. Démontrer que E est moins puissant que $\mathscr{P}(E)$.
4. Soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$ quelconque et $A = \{x \in E \text{ tq } x \notin f(x)\}$. Prouver que $A \notin f(E)$.
5. Est-ce que E et $\mathscr{P}(E)$ peuvent être équipotents ?
6. Soit G un troisième ensemble. Si E est moins puissant que F, démontrer que E^G est moins puissant que F^G.

[002898]

Exercice 183 Affirmations

Soit $f : E \to F$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. $\forall\, x \in E \quad \forall\, y \in F \quad f(x) = y$.
2. $\forall\, x \in E \quad \exists\, y \in F$ tel que $\quad f(x) = y$.
3. $\exists\, x \in E$ tel que $\quad \forall\, y \in F \quad f(x) = y$.

4. $\exists\, x \in E$ tel que $\quad \exists\, y \in F$ tel que $\quad f(x) = y$.
5. $\forall\, y \in F \quad \forall\, x \in E \quad f(x) = y$.
6. $\forall\, y \in F \quad \exists\, x \in E$ tel que $\quad f(x) = y$.
7. $\exists\, y \in F$ tel que $\quad \forall\, x \in E \quad f(x) = y$.
8. $\exists\, y \in F$ tel que $\quad \exists\, x \in E$ tel que $\quad f(x) = y$.

[002899]

8 101.02 Injection, surjection

Exercice 184

Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (puis de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) injective et non surjective, puis surjective et non injective. [000187]

Exercice 185

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.
f est-elle injective ? surjective ? Déterminer $f^{-1}([-1,1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$. [000188]

Exercice 186

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n \quad ; \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \quad ; \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2.$$

[000189]

Exercice 187

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$
4. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000190]

Exercice 188

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000191]

Exercice 189

L'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + 1/z$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Donner l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1.
Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$. [000192]

Exercice 190

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000193]

Exercice 191

Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective ssi $\forall A \subset X\ f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective ssi $\forall A \subset X\ f(\complement A) = \complement f(A)$.

[000194]

Exercice 192

Soit $f : X \to Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective.

ii. $\forall A, B \subset X\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

iii. $\forall A, B \subset X\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

[000195]

Exercice 193

Soit $f : X \to Y$.On note $\hat{f} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y), A \mapsto f(A)$ et $\tilde{f} : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X), B \mapsto f^{-1}(B)$. Montrer que :

1. f est injective ssi $\hat{f}$ est injective.
2. f est surjective ssi $\tilde{f}$ est injective.

[000196]

Exercice 194 Exponentielle complexe

Si $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $e^z = e^x \times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de e^z.
2. Calculer $e^{z+z'}, e^{\bar{z}}, e^{-z}, (e^z)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$, est-elle injective ?, surjective ?

Correction ▼ Vidéo ■ [000197]

Exercice 195 *IT

Montrer que : ($g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective) et ($g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective).

Correction ▼ [005110]

Exercice 196 ***IT

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (f est une application d'un ensemble E dans lui-même) :

1. f est injective.
2. $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ f^{-1}(f(X)) = X$.
3. $\forall (X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
4. $\forall (X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2,\ X \cap Y = \varnothing \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = \varnothing$.
5. $\forall (X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2,\ Y \subset X \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

Correction ▼ [005114]

9 101.03 Bijection

Exercice 197

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f_{a,b}(x) = ax + b$. Démontrer que $f_{a,b}$ est une permutation et déterminer sa réciproque.

Correction ▼ [000198]

Exercice 198

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000199]

Exercice 199

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}$. Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que (la restriction de) f devienne bijective.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000200]

Exercice 200

On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres complexes z tels que $\operatorname{Im} z > 0$, et *disque unité* l'ensemble $\mathscr{D}$ des nombres complexes z tels que $|z| < 1$. Démontrer que $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{D}$.

[000201]

Exercice 201

Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000202]

Exercice 202

Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f, g et h le sont également. [000203]

Exercice 203

Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A$. Montrer que si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ surjective alors f, g et h sont bijectives. [000204]

Exercice 204

Soit X un ensemble. Si $A \subset X$ on note χ_A la fonction caractéristique associée. Montrer que $\Phi : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{F}(X, \{0,1\}), A \mapsto \chi_A$ est bijective. [000205]

Exercice 205

Soit E un ensemble non vide. On se donne deux parties A et B de E et on définit l'application $f : \wp(E) \to \wp(E)$, $X \mapsto (A \cap X) \cup (B \cap X^c)$. Discuter et résoudre l'équation $f(X) = \emptyset$. En déduire une condition nécessaire pour que f soit bijective.
On suppose maintenant $B = A^c$. Exprimer f à l'aide de la différence symétrique Δ. Montrer que f est bijective, préciser f^{-1}. f est-elle involutive (i.e. $f^2 = id$) ? Quelle propriété en déduit-on ? [000206]

Exercice 206 **IT

Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis vérifier que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ puis préciser f^{-1} :

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty, 2]$.
2. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$, $I =]-2, +\infty[$.
3. $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$, $I = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.
4. $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $I = \mathbb{R}$.

Correction ▼ [005106]

Exercice 207 **IT

Pour $z \neq i$, on pose $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$. Montrer que f réalise une bijection de $D = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| < 1\}$ sur $P = \{z \in \mathbb{C} / \ \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Préciser f^{-1}.

Correction ▼ [005107]

Exercice 208 **T

Parmi $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ deux sont injectives et une est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Correction ▼ [005111]

Exercice 209 **** Une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \end{array}$. Montrer que f est une bijection. Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, le couple (x,y) dont il est l'image.

Correction ▼ [005118]

10 101.99 Autre

11 102.01 Binôme de Newton et combinaison

Exercice 210

Démontrer que si p est un nombre premier, p divise C_p^k pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$. [000219]

Exercice 211

En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000220]

Exercice 212

Démontrer que $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$ (pour $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$). En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p.$$

[000221]

Exercice 213

En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1. $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
2. $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000222]

Exercice 214

Démontrer que $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$. [000223]

Exercice 215

Montrer que, pour p et n entiers naturels non nuls tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}.$$

[000224]

Exercice 216

1. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p,$$
où p et n sont des entiers naturels avec $0 \leqslant p \leqslant n$.
2. Avec les mêmes notations, montrer que
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 0.$$

[000225]

Exercice 217

1. Soient n, p et q des entiers naturels tels que $0 \leqslant p, q \leqslant n$.
2. Montrer que l'on a $C_n^p = C_n^q$ si et seulement si $p = q$ ou $p + q = n$.
3. Résoudre l'équation
$$C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{n^2-2n+3}.$$

[000226]

Exercice 218

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme, démontrer que $m^{2p+1} + n^{2p+1}$ est divisible par $m + n$. [000227]

Exercice 219

En utilisant la formule du binôme montrer :

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0 \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}.$$

Correction ▼ [000228]

Exercice 220

Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots \\ S_2 &= C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \cdots \end{aligned}$$

Indication ▼ Correction ▼ [000229]

Exercice 221

Démontrer les formules suivantes :

1. $C_n^m = C_m^{n-m}$ (on pourra utiliser le fait que $\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E) A \mapsto A^c$ est une bijection.)
2. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$,
3. $C_n^m = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2}$.

Correction ▼ [000230]

Exercice 222

Soient E un ensemble non vide et X, Y une partition de E.

1. Montrer que l'application suivante est une bijection :

$$\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y)$$

$$A \mapsto (A \cap X, A \cap Y)$$

2. Montrer que pour $p, q, r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant p+q$ on a :

$$\sum_{i+j=r} C_p^i C_q^j = C_{p+q}^r.$$

3. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

[000231]

Exercice 223

Soit E un ensemble, $a \in E$ et $f : \begin{cases} \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E) \\ X \mapsto X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \mapsto X - \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases}$

1. Montrer que f est une bijection.
2. On suppose désormais que E est fini et $\mathrm{Card}(E) = n$. On pose $\mathscr{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathscr{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair. Montrer que $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_0(E)) = \mathrm{Card}(\mathscr{P}_1(E))$.

3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$.

[000232]

Exercice 224

En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$. En déduire la valeur de $\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k}$.

[000233]

Exercice 225

Soient $0 \leqslant p \leqslant n$.

1. Montrer par récurrence sur n que $\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$.
2. Écrire ces égalités pour $p=2$ et $p=3$.
3. En déduire les sommes

$$S_2' = 1.2+2.3+\ldots+(n-1).n \qquad S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$$

$$S_3' = 1^2.2+2^2.3+\ldots+(n-1)^2.n \qquad S_3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$$

[000234]

Exercice 226 Calcul de sommes

Calculer $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$ et $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$.

Correction ▼ [002900]

Exercice 227 Calcul de sommes

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant p$.

1. Vérifier que $C_n^k C_k^p = C_n^p C_{n-p}^{k-p}$ pour $p \leqslant k \leqslant n$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_k^p$.
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^p = 0$ si $p < n$.

Correction ▼ [002901]

Exercice 228 Calcul de sommes

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^k$.

Correction ▼ [002902]

Exercice 229 Sommes de cardinaux

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer $\sum_{A\subset E}\operatorname{Card}(A)$, $\sum_{A,B\subset E}\operatorname{Card}(A\cap B)$, $\sum_{A,B\subset E}\operatorname{Card}(A\cup B)$.

Correction ▼ [002903]

Exercice 230 Sommes d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} ij$ et $\displaystyle\sum_{i+j+k=n} ijk$.

Correction ▼ [002904]

Exercice 231 Combinaisons avec répétitions

Soient $n,p \in \mathbb{N}$. On note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1+\cdots+x_n = p$.

1. Déterminer Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_2^n.

2. Démontrer que $\Gamma_{n+1}^{p+1} = \Gamma_{n+1}^{p} + \Gamma_{n}^{p+1}$ (on classera les $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + \dots + x_{n+1} = p+1$ suivant que $x_1 = 0$ ou non).
3. En déduire que $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Correction ▼ [002905]

Exercice 232 Sommes de coefficients du binôme

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^{p} = C_{p+n+1}^{p+1}$. [002906]

Exercice 233 C_n^p maximal

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer pour quelle valeur de p le nombre C_n^p est maximal (on étudiera le rapport C_n^p / C_n^{p+1}).

Correction ▼ [002907]

Exercice 234 Parité de C_n^p

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $n = 2^p$.

1. Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Vérifier que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.
2. En déduire que : $\forall\, k \in \{1, \dots, n-1\}$, C_n^k est pair.
3. En déduire que : $\forall\, k \in \{0, \dots, n-1\}$, C_{n-1}^k est impair.

[002908]

Exercice 235 Formule de Vandermonde

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\sum_{k=0}^{c} C_a^k C_b^{c-k} = C_{a+b}^{c} \dots$

1. En calculant de deux manières $(1+x)^a(1+x)^b$.
2. En cherchant le nombre de parties de cardinal c dans $E \cup F$, où E et F sont des ensembles disjoints de cardinaux a et b.
3. Application : Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{q} C_q^k C_n^{p+k} = C_{n+q}^{p+q}$.

[002909]

Exercice 236 Formule d'inversion

Soit (x_n) une suite de réels. On pose $y_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_k$. Montrer que $(-1)^n x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k y_k$. [002910]

Exercice 237 Suite de Fibonacci

Soit $u_n = \sum_{p=0}^{n} C_{n-p}^{p}$. Montrer que $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (*suite de Fibonacci*). [002911]

Exercice 238 IT Identités combinatoires

La difficulté va en augmentant graduellement de facile à assez difficile sans être insurmontable.

1. Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.
2. Montrer que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$ et trouver la valeur commune des deux sommes.
3. Calculer les sommes $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$ et $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
5. Montrer que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).
6. Calculer les sommes $0.\binom{n}{0} + 1.\binom{n}{1} + \dots + n.\binom{n}{n}$ et $\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}$ (considérer dans chaque cas un certain polynôme astucieusement choisi).
7. Montrer que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} \dots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ où $0 \leqslant p \leqslant n$. Interprétation dans le triangle de PASCAL ?

8. (a) Soit $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$. Trouver une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1} et en déduire I_n en fonction de n (faire une intégration par parties dans $I_n - I_{n+1}$).

   (b) Démontrer l'identité valable pour $n \geqslant 1$: $1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} = \frac{2.4.....(2n)}{1.3...(2n+1)}$.

Correction ▼ [005137]

Exercice 239 **

Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$.

Correction ▼ [005138]

Exercice 240 **I

Développer $(a+b+c+d)^2$ et $(a+b+c)^3$.

Correction ▼ [005139]

Exercice 241 ***

Soit $(n,a,b) \in \mathbb{N}^* \times]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Quel est le plus grand terme du développement de $(a+b)^n$?

Correction ▼ [005140]

Exercice 242 *

Résoudre dans $\mathbb{N}*$ l'équation $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$.

Correction ▼ [005141]

Exercice 243 *I Inégalité de BERNOULLI

Montrer que, pour a réel positif et n entier naturel donnés, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Correction ▼ [005147]

Exercice 244 ****I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que $E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair (penser à $(2-\sqrt{3})^n$)).

Correction ▼ [005158]

Exercice 245 IT

1. (***) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $\sum C_n^{2k} = \sum C_n^{2k+1}$ ou encore démontrer directement qu'un ensemble à n éléments contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
2. (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.
3. (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$.

Correction ▼ [005278]

Exercice 246 ***

Combinaisons avec répétitions. Montrer que le nombre de solutions en nombres entiers $x_i \geqslant 0$ de l'équation $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ (k entier naturel donné) est C_{n+k-1}^k. (Noter $a_{n,k}$ le nombre de solutions et procéder par récurrence.)

Correction ▼ [005280]

---

12 102.02 Cardinal

Exercice 247

Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en utilisant l'application :

$$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \begin{cases} n \mapsto 2n-1 & \text{si } n > 0\,; \\ n \mapsto -2n & \text{sinon.} \end{cases}$$

[000235]

Exercice 248

Pour A, B deux ensembles de E on note $A\Delta B = (A\cup B) \setminus (A\cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer :

$$\operatorname{Card} A\Delta B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card} A\cap B.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000236]

Exercice 249

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000237]

Exercice 250

Déterminer le nombre de mots distincts que l'on peut former avec 6 voyelles et 20 consonnes, chaque mot étant composé de 3 consonnes et 2 voyelles, en excluant les mots qui renferment 3 consonnes consécutives. [000238]

Exercice 251

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000239]

Exercice 252

Soient A, A', B, B' quatre ensembles tels que :

$$\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(A') = a \text{ et } \operatorname{Card}(B) = \operatorname{Card}(B') = b.$$

1. Déterminer le nombre de bijections de $A\times B$ sur $A'\times B'$.
2. Supposons maintenant que $\{A, B\}$, $\{A', B'\}$ forment deux partitions de E, un ensemble. Déterminer le nombre de bijections $f : E \longrightarrow E$ telles que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

[000240]

Exercice 253

Soient A et B deux sous ensembles finis d'un ensemble E.

1. Montrer que : $\operatorname{Card}(A\cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A\cap B)$.

2. Montrer par récurrence que si $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de sous-ensembles finis de E alors :

$$\mathrm{Card}(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(F_i)$$

avec égalité si les F_i sont deux à deux disjoints.

[000241]

Exercice 254

Soient $1 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1,\dots,i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$. [000242]

Exercice 255 Permutations

Combien y a-t-il de bijections f de $\{1,\dots,12\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application*.

Correction ▼ Vidéo ■ [002912]

Exercice 256 Permutations de couples

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions ...

1. au total ?
2. en respectant l'alternance des sexes ?
3. sans séparer les couples ?
4. en remplissant les deux conditions précédentes ?

Correction ▼ [002913]

Exercice 257 Nombre d'opérations

1. Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?
2. Combien sont commutatives ?
3. Combien ont un élément neutre ?
4. Combien sont commutatives et ont un élément neutre ?

Correction ▼ [002914]

Exercice 258 Formule du crible

Soient $A_1,\dots,A_n$ n ensembles finis.

1. (a) Calculer $\mathrm{Card}\,(A_1\cup A_2\cup A_3)$ et $\mathrm{Card}\,(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$.
   (b) Suggérer une formule pour $\mathrm{Card}\,(A_1\cup\dots\cup A_n)$.
2. Démonstration de la formule : On note $E=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, et pour $x\in E$ on pose $f_i(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A_i\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$
   (a) Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$. Développer complètement $p=(1-x_1)\times\dots\times(1-x_n)$.
   (b) En considérant la somme $\sum_{x\in E}(1-f_1(x))\dots(1-f_n(x))$, démontrer la formule 1b.
3. Applications :
   (a) Déterminer le nombre d'applications $f:\{1,\dots,p\}\to\{1,\dots,n\}$ non surjectives.

(b) Déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ayant au moins un point fixe.

Correction ▼ [002915]

Exercice 259 Inégalités pour la formule du crible

Soient $A_1, \dots, A_n$ n ensembles finis, et $E = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

1. Montrer que $\operatorname{Card}(E) \leqslant \sum_{i=1}^n \operatorname{Card}(A_i)$. Cas d'égalité ?
2. Montrer que $\operatorname{Card}(E) \geqslant \sum_{i=1}^n \operatorname{Card}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{Card}(A_i \cap A_j)$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [002916]

Exercice 260 Couples (A,B) tels que $A \cup B = E$

Soit E un ensemble fini à n éléments, et $\mathscr{E} = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \text{ tq } A \cup B = E\}$. Chercher card($\mathscr{E}$).

Correction ▼ [002917]

Exercice 261 Parties ne contenant pas d'éléments consécutifs

1. Quel est le nombre de parties à p éléments de $\{1, \dots, n\}$ ne contenant pas d'éléments consécutifs ?
2. Soit t_n le nombre de parties de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal quelconque sans éléments consécutifs.
   (a) Montrer que $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$, $t_{2n+1} = t_n^2 + t_{n-1}^2$, et $t_{2n} = t_n^2 - t_{n-2}^2$.
   (b) Calculer t_{50}.

Indication ▼ Correction ▼ [002918]

Exercice 262 Nombre de relations d'équivalence

Soit R_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments.

1. Trouver une relation de récurrence entre R_n et les R_k, $k < n$
   (fixer un élément, et raisonner sur la classe d'équivalence de cet élément).
2. Calculer R_n pour $n \leqslant 6$.

Correction ▼ [002919]

Exercice 263 Equivalence entre fonctions

Soient E, F, deux ensembles non vides. On définit deux relations sur $X = F^E$ par :

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff \exists\, \phi : F \to F \text{ bijective tq } g = \phi \circ f, \\ f \equiv g &\iff \big(\forall\, x,y \in E,\ f(x) = f(y) \iff g(x) = g(y)\big). \end{aligned}$$

1. Montrer que ce sont des relations d'équivalence.
2. Montrer que $f \sim g \Rightarrow f \equiv g$.
3. On suppose $f \equiv g$. Montrer que $f \sim g$ dans les cas suivants :
   (a) F est fini et f est surjective.
   (b) F est fini et f est quelconque.
   (c) E est fini.
4. Chercher un contrexemple pour $E = F = \mathbb{N}$.

[002920]

Exercice 264 Très bon ordre

Soit E un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide possède un plus grand et un plus petit élément. Montrer que E est totalement ordonné et fini. [002921]

Exercice 265 Élément maximal

Soit E un ensemble ordonné. Un élément $a \in E$ est dit *maximal* s'il n'existe pas de $b \in E$ tq $b > a$.

1. Si E est totalement ordonné, montrer que : *maximal* $\Longleftrightarrow$ *maximum*.
2. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ ordonné par la divisibilité. Chercher les éléments maximaux.
3. Si E est fini, montrer qu'il existe un élément maximal.
4. Si E est fini et n'a qu'un seul élément maximal, montrer que cet élément est maximum.

[002922]

Exercice 266 Nombres de Catalan

Soient $x_1,\dots,x_n$ n réels. Pour calculer la somme $x_1+\dots+x_n$, on place des parenthèses de façon à n'avoir que des additions de deux nombres à effectuer. Soit t_n le nombre de manières de placer les parenthèses (on pose $t_1 = 1$).

1. Déterminer t_2, t_3, t_4.
2. Trouver une relation de récurrence entre t_n et $t_1,\dots,t_{n-1}$.

Correction ▼ [002923]

Exercice 267 ***

Combien y a-t-il de partitions d'un ensemble à pq éléments en p classes ayant chacune q éléments ? (Si E est un ensemble à pq éléments et si A_1,..., A_p sont p parties de E, A_1,..., A_p forment une partition de E si et seulement si tout élément de E est dans une et une seule des parties A_i. Il revient au même de dire que la réunion des A_i est E et que les A_i sont deux à deux disjoints.)

Correction ▼ [005279]

Exercice 268 *

Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?

Correction ▼ [005281]

Exercice 269 **I

On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [005284]

Exercice 270 ***I

De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

Correction ▼ [005285]

Exercice 271 ****

1. Soit E un ensemble fini et non vide. Soient n un entier naturel non nul et A_1,..., A_n, n parties de E. Montrer la « formule du crible » :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A_1\cup\ldots\cup A_n) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{card}(A_i) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\operatorname{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}) \\ +\ldots+(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}\operatorname{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}) \\ +\ldots+(-1)^{n-1}\operatorname{card}(A_1\cap\ldots\cap A_n).\end{aligned}$$

2. Combien y a-t-il de permutations σ de $\{1,...,n\}$ vérifiant $\forall i\in\{1,...,n\}$, $\sigma(i)\neq i$? (Ces permutations sont appelées dérangements (permutations sans point fixe)). Indication : noter A_i l'ensemble des permutations qui fixent i et utiliser 1).

On peut alors résoudre un célèbre problème de probabilité, le problème des chapeaux. n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité qu'aucune de ces personnes n'ait repris son propre chapeau est environ $\frac{1}{e}$ quand n est grand.

Correction ▼ [005286]

Exercice 272 **

Combien y a-t-il de surjections de $\{1,...,n+1\}$ sur $\{1,...,n\}$?

Correction ▼ [005287]

Exercice 273 ***

Soit (P) un polygone convexe à n sommets. Combien ce polygone a-t-il de diagonales ? En combien de points distincts des sommets se coupent-elles au maximum ?

Correction ▼ [005288]

Exercice 274 ***

1. On donne n droites du plan. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourantes. Déterminer le nombre $P(n)$ de régions délimitées par ces droites.
2. On donne n plans de l'espace. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourants en une droite, ni quatre qui soient concourants en un point. Déterminer le nombre $Q(n)$ de régions délimitées par ces plans.

Correction ▼ [005289]

Exercice 275 ***

Soit P_n^k le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k classes.
Montrer que $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
Dresser un tableau pour $1 \leqslant k,n \leqslant 5$.
Calculer en fonction de P_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.

Correction ▼ [005290]

13 102.99 Autre

Exercice 276

1. (*principe des bergers*) Soient E,F deux ensembles avec F ensemble fini, et f une surjection de E sur F vérifiant :
$$\forall y \in F,\ \mathrm{Card}(f^{-1}(y)) = p$$
Montrer que E est alors un ensemble fini et $\mathrm{Card}(E) = p\mathrm{Card}(F)$.
2. (*principe des tiroirs*) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, p élements distincts d'un ensemble E, répartis entre une famille de n sous-ensembles de E. Si $n < p$ montrer qu'il existe au moins un ensemble de la famille contenant au moins deux éléments parmi les α_i.(on pourra raisonner par l'absurde)

[000243]

Exercice 277

Montrer par récurrence sur n que si $A_1, \dots, A_n \subset E$ alors $\mathrm{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$.

[000244]

Exercice 278

Soit $p_n(k)$ le nombre de permutations de $\{1,...,n\}$ ayant k points fixes, montrer alors que :

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!.$$

Interpréter. [000245]

Exercice 279

Soit E un ensemble de cardinal $nm \in \mathbb{N}^*$, où $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et $P_{n,m}$l'ensemble des partitions de E en n parties à m éléments chacune. Montrer que :

$$N_{n,m} = card(P_{n,m}) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n}.$$

(*Indication* : on peut procéder par récurrence.) [000246]

Exercice 280

L'histoire : n personnes apportent chacune un cadeau à une fête, et chacun tire au sort un cadeau dans le tas formé par tous les présents apportés. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne reparte avec son cadeau ? Que devient cette probabilité quand le nombre de personnes devient très grand, i.e. : $n \to \infty$? (On remarquera que l'intuition met en évidence deux effets contradictoires : plus de personnes c'est plus de proba qu'une personne ait son cadeau car... il y a plus de personnes, mais c'est aussi plus de cadeaux, donc une proportion plus élevée de cadeaux “acceptables”).

Soit $S_n = \sigma(\{1,\dots,n\})$. On dit que $\sigma \in S_n$ est un dérangement si $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ $\sigma(i) \neq i$. On note $A_i = \{\sigma \in S_n / \sigma(i) = i\}$ et D_n l'ensemble des dérangements.

1. Calculer Card(A_i).
2. Exprimer $S_n - D_n$ en fonction des A_i.
3. En déduire Card(D_n) (on pourra utiliser l'exercice 277).
4. Déterminer la limite de $\frac{\mathrm{Card}D_n}{\mathrm{Card}S_n}$. (on rappelle que $\lim_{n\to+\infty}(1+x+\ldots+\frac{x^n}{n!}) = e^x$).

[000247]

Exercice 281

Soit E un ensemble de cardinal n, Re une relation d'équivalence sur E, avec k classes d'équivalences et r couples $(x,y) \in E^2$ tels que $x\mathrm{Re}\,y$. Montrer que $n^2 \leqslant kr$. [000248]

Exercice 282 Dénombrement de $\mathbb{N}^2$

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N}, \\ (p,q) &\mapsto \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)+p. \end{aligned}$$

1. Montrer pour $q > 0$: $f(p+1,q-1) = f(p,q)+1$ et $f(0,p+1) = f(p,0)+1$.
2. Montrer que : $f(0,p+q) \leqslant f(p,q) < f(0,p+q+1)$.
3. Montrer que $g : n \mapsto f(0,n)$ est strictement croissante.
4. Montrer que f est injective (on supposera $f(p,q) = f(p',q')$ et on montrera dans un premier temps que $p+q = p'+q'$).

5. Montrer que f est surjective.

[003051]

Exercice 283 Parties dénombrables

Soit (n_k) une suite d'entiers naturels. On dit que la suite est :
- presque nulle s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, k \geqslant p,\ n_k = 0$
- stationnaire s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, k \geqslant p,\ n_k = n_p$.
Montrer que les ensembles des suites presque nulles et des suites stationnaires sont dénombrables. [003052]

Exercice 284 Propriétés du pgcd et du ppcm

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On pose $m = \operatorname{ppcm}(a, b)$ et $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$.

1. Soit x un multiple commun à a et b. En écrivant la division euclidienne de x par m, montrer que $m \mid x$.
2. Soit x un diviseur commun à a et b. Montrer que $\operatorname{ppcm}(x, d)$ est aussi un diviseur commun à a et b. En déduire $x \mid d$.
3. Comment qualifier m et d pour la relation d'ordre de divisibilité ?

[003053]

Exercice 285 Bases de numération

Soit $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $n \in \{0, \ldots, b^p - 1\}$, il existe un unique p-uplet $(n_0, \ldots, n_{p-1})$ d'entiers naturels tel que :

$$\forall\, k < p,\ n_k \in \{0, \ldots, b-1\}, \quad \text{et} \quad n = \sum_{k=0}^{p-1} n_k b^k.$$

[003054]

Exercice 286 Bases de numération

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $n_0, n_1, \ldots, n_p \in \{1, 2\}$ uniques tels que $n = \sum_{k=0}^{p} n_k 2^k$. [003055]

Exercice 287 Bases de numération

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n < p!$. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(n_1, \ldots, n_p)$ d'entiers naturels tel que

$$\forall\, k \leqslant p,\ n_k \leqslant k, \quad \text{et} \quad n = \sum_{k=1}^{p} n_k k!.$$

[003056]

Exercice 288 Récurrence d'ordre 2

On note $a_n = 25^n + 2^{3n+4}$.

1. Trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a.a_{n+1} + b.a_n$.
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n$ est divisible par 17.

Correction ▼ [003057]

Exercice 289 Ordre sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Soit $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Pour $f, g \in E$ avec $f \neq g$, on note $n_{f,g} = \min\{k \text{ tq } f(k) \neq g(k)\}$.
On ordonne E par :

$$\forall\, f, g \in E,\ f \ll g \iff (f = g) \text{ ou } \big(f(n_{f,g}) < g(n_{f,g})\big).$$

1. Montrer que c'est une relation d'ordre total.

2. Montrer que toute partie de E non vide admet une borne inférieure et toute partie de E non vide et majorée admet une borne supérieure.

[003058]

Exercice 290 $f \circ f(n) = n + k$

On veut montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) = n + 1987$.
(*Olympiades 1987*)
Soit f une telle application. On pose :

$$E = \{0, \dots, 1986\}, \qquad F = \mathbb{N} \setminus E, \qquad G = f(\mathbb{N}) \cap E, \qquad H = E \setminus G.$$

Démontrer successivement :

1. f est injective,
2. $f(F) \subset F$,
3. $f^{-1}(F) = F \cup G$,
4. $f^{-1}(G) = H$,

puis obtenir une contradiction. [003059]

Exercice 291 $f(f(n)) < f(n+1)$

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) < f(n+1)$. On veut montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
(Olympiades 1977)

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geqslant n,\ f(x) \geqslant n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \geqslant n$ tel que $f(a) = \min\{f(x) \text{ tq } x \geqslant n\}$. Montrer que $a = n$.
3. En déduire que f est strictement croissante, puis conclure.

Correction ▼ [003060]

Exercice 292 ***I

Quelle est la probabilité p_n pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (on considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables). Montrer que pour $n \geqslant 23$, on a $p_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005282]

Exercice 293 ***

Montrer que le premier de l'an tombe plus souvent un dimanche qu'un samedi.

Correction ▼ [005283]

---

14 103.01 Divisibilité, division euclidienne

Exercice 294

Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000249]

Exercice 295

Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000250]

Exercice 296

Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000251]

Exercice 297

Soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$ des entiers ; montrer que :

1. $n-1 | n^m - 1$;
2. $(n-1)^2 | n^m - 1$ si et seulement si $n-1 | m$.

[000252]

Exercice 298

Soit a un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre $a(a^2-1)$ et, plus généralement, $a(a^{2n}-1)$ est divisible par 6. [000253]

Exercice 299

Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000254]

Exercice 300

Quel est le plus petit entier naturel qui, divisé par $8, 15, 18$ et 24, donne respectivement pour reste $7, 14, 17$ et 23 ? [000255]

Exercice 301

Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que x^2 divise y^2, alors x divise y. Application : démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. [000256]

Exercice 302

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000257]

Exercice 303

Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13. [000258]

Exercice 304

On considère le nombre $m = 2^n p$, dans lequel n désigne un entier naturel quelconque et p un nombre premier. Dresser la liste des diviseurs de m, y compris 1 et m lui-même, et calculer, en fonction de m et p, la somme S de tous ces diviseurs. [000259]

Exercice 305

Le diviseur d'une division est égal à 45 ; le reste est le carré du quotient. Calculer le dividende entier naturel. [000260]

Exercice 306

Trouver le plus petit entier naturel n telle que le développement décimal de $1/n$ admette une plus petite période de longueur 5, c'est-à-dire $1/n = 0,abcde\,abcde\,ab\ldots$ avec $a,b,\ldots,e \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. [000261]

Exercice 307

Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et c, alors $c^2 - 2b$ est multiple de a.
2. S'il existe u et v entiers tels que $au + bv = d$ alors $\operatorname{pgcd}(a,b) = |d|$.
3. Si a est premier avec b, alors a est premier avec b^3.
4. Si a divise $b+c$ et $b-c$, alors a divise b et a divise c.
5. Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
6. Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a+c$ est multiple de $b+d$.
7. Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
8. Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.
9. Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
10. Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
11. Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
12. Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.

[000262]

Exercice 308

On définit les trois ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & \{7n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \\ E_2 & = & \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \ n \text{ est multiple de } 4\} \\ E_3 & = & \{28n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

1. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, déterminer si on a l'inclusion $E_i \subset E_j$.
2. Ecrire $E_1 \cap E_2$ sous la forme $E = \{n \in \mathbb{N}\,,\ \mathscr{P}(n)\}$. Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_3$.

[000263]

Exercice 309

Montrer que si r et s sont deux nombres entiers naturels somme de deux carrés d'entiers alors il en est de même pour le produit rs. [000264]

Exercice 310

Soit n un entier relatif. Montrer que soit 8 divise n^2, soit 8 divise $n^2 - 1$, soit 8 divise $n^2 - 4$. [000265]

Exercice 311

Étant donnés deux nombres relatifs n et p montrer que soit np est pair, soit $n^2 - p^2$ est divisible par 8. [000266]

Exercice 312

Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Correction ▼ Vidéo ■ [000267]

Exercice 313

1. Soit n un entier naturel dont le reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3, montrer que n^2+1 est divisible par 5.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier n^5-n est divisible par 5.

[000268]

Exercice 314

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que parmi les trois entiers $n.(n+1)$, $n.(n+2)$ et $(n+1).(n+2)$, il y en a exactement deux qui sont divisibles par 3. [000269]

Exercice 315

1. Pour tout couple de nombres réels (x,y) montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la relation
$$(*)\ x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$
Indication : on pourra écrire de deux manières différentes la quantité $y(x^n-y^n)+(x-y)x^n$.
2. Soit (a,b,p) des entiers éléments de $\mathbb{N}$. En utilisant la formule $(*)$, montrer que s'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $b = a+pl$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $b^n = a^n + pm$.
3. Soient a,b,p des entiers éléments de $\mathbb{N}$, en utilisant la question 2, montrer que si $a-b$ est divisible par p,
$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$$
est aussi divisible par p. En déduire, à l'aide de la question 2 et de la formule $(*)$, que si $a-b$ est divisible par p^n i.e. il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $a-b = l.p^n$, alors $a^p - b^p$ est divisible par p^{n+1}.

Correction ▼ [000270]

Exercice 316

Calculer 2000^{2000} modulo 7 et 2^{500} modulo 3. [000271]

Exercice 317

Soit $a,b \in \mathbb{Z}^2$ dont les restes modulo 11 sont 7 et 2 respectivement. Donner le reste modulo 11 de a^2-b^2. [000272]

Exercice 318

1. Montrer que 7 divise $2222^{5555} + 5555^{2222}$;
2. montrer que que 11 divise
$$5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} + 10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}};$$
3. trouver un critère de divisibilité par 8 puis par 6.

[000273]

Exercice 319

Montrer que pour tout $n > 0$:

1. 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$
2. 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$
3. 6 divise $5n^3 + n$

4. 8 divise $5^n + 2.3^{n-1} + 1$.

[000274]

Exercice 320

1. Déterminer la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 3^{500}.
2. On se donne 51 nombres compris entre 1 et 100. Montrer que parmi ces nombres il y en a nécessairement au moins deux tels que l'un divise l'autre. Montrer que l'on peut toujours trouver un ensemble de 50 nombres compris entre entre 1 et 100 ne vérifiant pas la propriété de divisibilité ci-dessus.

[000275]

Exercice 321

Trouver les entiers positifs n tels que $n-1$ divise n^2+1. [000276]

Exercice 322

Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, 4 ne divise pas n^2+1. [000277]

Exercice 323

Montrer que pour chaque entier positif n, 49 divise $2^{3n+3} - 7n - 8$. [000278]

Exercice 324

Trouver tous les entiers positifs a tels que $a^{10}+1$ est divisible par 10. [000279]

Exercice 325

Quel est le chiffre des unités de 19971997^{10} ? [000280]

Exercice 326

Montrer que :

1. Si un entier est de la forme $6k+5$, alors il est nécessairement de la forme $3k-1$, alors que la réciproque est fausse.
2. Le carré d'un entier de la forme $5k+1$ est aussi de cette forme.
3. Le carré d'un entier est de la forme $3k$ ou $3k+1$, mais jamais de la forme $3k+2$.
4. Le carré d'un entier est de la forme $4k$ ou $4k+1$, mais jamais de la forme $4k+2$ ni de la forme $4k+3$.
5. Le cube de tout entier est de la forme $9k$, $9k+1$ ou $9k+8$.
6. Si un entier est à la fois un carré et un cube, alors c'est une puissance sixième, et il est de la forme $7k$ ou $7k+1$.

[000281]

Exercice 327

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n | n+8$.
2. $n-1 | n+11$.
3. $n-3 | n^3-3$.

[000282]

Exercice 328

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(n|2k+1$ et $n|9k+4)$. [000283]

Exercice 329

Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ il existe un unique $r(a) \in \{0,\dots,b-1\}$ tel qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ avec $a = bq + r(a)$.

1. En utilisant ceci pour $b = 13$, déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $13|n^2+n+7$.
2. Si $a \in \mathbb{N}$ et $b = 7$, déterminer les valeurs possibles de $r(a^2)$ (on rappelle que $r(a^2)$ doit appartenir à $\{0,\dots,b-1\}$).
   Montrer alors que $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$ $(7|x^2+y^2)$ ssi $(7|x$ et $7|y)$.
3. Montrer qu'un entier positif de la forme $8k+7$ ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

[000284]

Exercice 330

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0 \pmod 8$ ou $x^2 = 4 \pmod 8$.
3. Soient a,b,c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2+b^2+c^2$ et celui de $2(ab+bc+ca)$.
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab+bc+ca$ non plus.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000285]

Exercice 331 Sommes de nombres impairs

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que si N est la somme de n nombres impairs consécutifs, alors N n'est pas premier.
[003090]

Exercice 332 Petit théorème de Fermat

Soit $p \in \mathbb{N}$ premier. Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p divise C_p^k.
En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n (\bmod\, p)$. [003091]

Exercice 333 $(p-1)(p-2)\dots(p-n)/n!$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier et $n \in \mathbb{N}^*$, $n < p$. Montrer que $\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} - (-1)^n$ est un entier divisible par p.
[003092]

Exercice 334 $n^7 \equiv n(\bmod 42)$

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^7 \equiv n(\bmod 42)$. [003093]

Exercice 335 Puissances de 10 modulo 7

1. Vérifier $10^6 \equiv 1(\bmod 7)$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5(\bmod 7)$.

[003094]

Exercice 336 Puissances de 7

Quel est le dernier chiffre de $7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}}$?
Correction ▼ [003095]

Exercice 337 $3^x = 2^y + 1$

1. Soient $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geqslant 3$. Montrer par récurrence sur y que : $3^x \equiv 1 (\bmod 2^y) \iff 2^{y-2} \mid x$.
2. Trouver tous les couples d'entiers $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $3^x = 2^y + 1$.

Correction ▼ [003096]

Exercice 338 Suites récurrentes linéaires

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. [003097]

Exercice 339 Suites récurrentes linéaires

Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{10n-7} + 3^{5n-2}$ par 11.

Correction ▼ [003098]

Exercice 340 $a \equiv b (\bmod n) \Rightarrow a^n \equiv b^n (\bmod n^2)$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $a \equiv b (\bmod n) \Rightarrow a^n \equiv b^n (\bmod n^2)$. [003099]

Exercice 341 $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \not\equiv 0 (\bmod 8)$

Montrer que : $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \not\equiv 0 \bmod 8$. [003100]

Exercice 342 Cubes consécutifs

Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9. [003101]

Exercice 343 $n^2 + 3n + 5$ mod 121

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 3n + 5$ n'est pas divisible par 121.

Correction ▼ [003102]

Exercice 344 $n \in \mathbb{Z}$, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. [003103]

Exercice 345 $2^{32} + 1$ est divisible par 641

Montrer sans calculatrice que $2^{32} + 1$ est divisible par 641. [003104]

Exercice 346 $3^x.7^y$ mod 10

Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^x 7^y$ se termine par 1 en base 10.

Correction ▼ [003105]

Exercice 347 $a^3 = \ldots 123456789$

Soit $a \in \mathbb{N}$ premier à 10.

1. Montrer que $a^4 \equiv 1 (\bmod 10)$.
2. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a^{4 \times 10^k} \equiv 1 (\bmod 10^{k+1})$.
3. En déduire qu'il existe un nombre $x \in \mathbb{N}$ tel que x^3 se termine par 123456789 en base 10.

Correction ▼ [003106]

Exercice 348 $mn(m^{60} - n^{60})$ est divisible par 56786730

Montrer que pour tous entiers m et n, le nombre $mn(m^{60} - n^{60})$ est divisible par 56786730.

Correction ▼ [003107]

Exercice 349 $q \mid 2^p - 1$

Soient p, q premiers impairs tels que $q \mid 2^p - 1$. Montrer que $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2p)$.

Correction ▼ [003108]

Exercice 350 Divisibilité par 7

Infirmer ou justifier le critère de divisibilité par 7 suivant retrouvé dans un vieux grimoire : *Sépare en unités et dizaines puis cherche la différence entre le double des unités et les dizaines. Agis ainsi tant que tu as des dizaines et obtiens zéro ou sept. Ainsi 364 devient 28 puis 14 puis enfin 7.* [003109]

Exercice 351 *****

k est un entier impair. Montrer par récurrence que, pour $n \geqslant 1$, la somme $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ est un entier divisible par $\frac{n(n+1)}{2}$. [005115]

Exercice 352 ****

Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, H_n n'est jamais un entier (indication : montrer par récurrence que H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair en distingant les cas où n est pair et n est impair).

Correction ▼ [005116]

Exercice 353 ****

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $E(\frac{1}{3}(n+2-E(\frac{n}{25}))) = E(\frac{8n+24}{25})$.

Correction ▼ [005157]

15 103.02 Sous-groupes de Z

Exercice 354

Montrer qu'il est équivalent dans $\mathbb{Z}$ de dire m divise n, ou $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$. [000286]

Exercice 355

1. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Caractériser le sous-groupe $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Caractériser les sous-groupes suivants :
$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}\,; \quad 5\mathbb{Z} \cap 13\mathbb{Z}\,; \quad 5\mathbb{Z} \cap 25\mathbb{Z}.$$
2. Montrer que toute intersection de sous-groupes de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Caractériser l'intersection d'une famille finie de sous-groupes. Caractériser les sous-groupes suivants :
$$\bigcap_{n=1}^{17} 2^n\mathbb{Z}\,; \quad 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z} \cap 19\mathbb{Z} \cap 35\mathbb{Z}.$$

[000287]

Exercice 356

1. Déterminer $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$. Est-ce un sous-groupe de $\mathbb{Z}$?
2. Déterminer : $7\mathbb{Z} \cup 49\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z} \cup 45\mathbb{Z}$; $\bigcup_{n=1}^{28} 2^n\mathbb{Z}$. Ces ensembles sont-ils des sous-groupes de $\mathbb{Z}$?

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réunion de deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

[000288]

Exercice 357

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$; montrer que la famille des sous-groupes contenant A n'est pas vide. Soit H une partie contenant A. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
   i) H est l'intersection des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ qui contiennent A,
   ii) H est le plus petit sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient A,
   iii) H est l'ensemble des sommes finies d'éléments de A ou d'éléments dont l'opposé est dans A.

   Si ces conditions sont vérifiées on dit que H est le sous-groupe engendré par A.
2. Soient $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$ deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Montrer que

$$m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=\{mu+nv \mid u,v\in\mathbb{Z}\}$$

   a) est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$,
   b) contient $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$,
   c) est contenu dans tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$.
   d) Si $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}$, que peut-on dire de d ?
3. Déterminer les sous-groupes engendrés par : $14\mathbb{Z}\cup35\mathbb{Z}$; $4\mathbb{Z}\cup8\mathbb{Z}\cup6\mathbb{Z}\cup64\mathbb{Z}$; $2\mathbb{Z}\cup3\mathbb{Z}$; $4\mathbb{Z}\cup21\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z}\cup25\mathbb{Z}\cup7\mathbb{Z}$; $\{70,4\}$.

[000289]

---

16 103.03 Pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice 358

Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

Correction ▼ Vidéo ■ [000290]

Exercice 359

1. Calculer le ppcm des nombres : 108 et 144 ; 128 et 230 ; 6, 16 et 50.
2. Montrer que si $a\geqslant 1$ et $b\geqslant 1$ sont des entiers de pgcd d et, si on pose $a=da';b=db'$, le ppcm de a et b est $da'b'$.
3. Montrer que si a,b,c sont des entiers supérieurs à 1, on a :

$$\operatorname{ppcm}(a,b,c)=\operatorname{ppcm}(\operatorname{ppcm}(a,b),c).$$

[000291]

Exercice 360

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Correction ▼ Vidéo ■ [000292]

Exercice 361

Si a,b,c,d sont des entiers supérieurs à 1, montrer que l'on a :

$$(a,b,c,d) = ((a,b),(c,d))$$

où (,) désigne le pgcd . [000293]

Exercice 362

1. Soient a,b,c des entiers relatifs tels que $(a,b) \neq (0,0)$, montrer que pour que l'équation
$$ax + by = c$$
ait une solution (x,y) en entiers relatifs x et y, il faut et il suffit que le pgcd de a et b divise c.
2. Résoudre en entiers relatifs les équations suivantes :
$$7x - 9y = 1,$$
$$7x - 9y = 6,$$
$$11x + 17y = 5.$$

[000294]

Exercice 363

Soient a et b deux entiers tels que $a \geqslant b \geqslant 1$ et $\text{pgcd}(a,b) = 1$.

1. Montrer que $\text{pgcd}(a+b, a-b) = 1$ ou 2,
2. Si $\text{pgcd}(a,b) = 1$, montrer que $\text{pgcd}(a+b, ab) = 1$,
3. Si $\text{pgcd}(a,b) = 1$, montrer que $\text{pgcd}(a+b, a^2+b^2) = 1$ ou 2.

[000295]

Exercice 364

Calculer par l'algorithme d'Euclide : $\text{pgcd}(18480, 9828)$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Correction ▼ Vidéo ■ [000296]

Exercice 365

Déterminer le pgcd de 99 099 et 43 928. Déterminer le pgcd de 153 527 et 245 479. [000297]

Exercice 366

Déterminer l'ensemble de tous les couples (m,n) tels que

$$955m + 183n = 1.$$

Correction ▼ [000298]

Exercice 367

Calculer, en précisant la méthode suivie,

$$a = \text{pgcd}(720, 252) \qquad b = \text{ppcm}(720, 252)$$

ainsi que deux entiers u et v tels que $720u + 252v = a$. [000299]

Exercice 368

Démontrer :

$$a \wedge (b_1 b_2) = 1 \Leftrightarrow (a \wedge b_1 = 1 \text{ et } a \wedge b_2 = 1),$$

puis par récurence :

$$a \wedge (b_1 \dots b_n) = 1 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad a \wedge b_i = 1.$$

[000300]

Exercice 369

Démontrer pour $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^m \wedge b^n = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1.$$

[000301]

Exercice 370

Déteminer deux entiers naturels connaissant leur somme, 1008, et leur pgcd, 24. [000302]

Exercice 371

Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \mathrm{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000303]

Exercice 372

Soient m et n deux entiers $(m > n > 0)$ et $a \geqslant 2$ un entier. Montrer que le reste de la division euclidienne de $a^m - 1$ par $a^n - 1$ est $a^r - 1$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n, et que le pgcd de $a^m - 1$ et $a^n - 1$ est $a^d - 1$, où d est le pgcd de m et n. [000304]

Exercice 373

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $1665x + 1035y = 45$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000305]

Exercice 374

Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que

$$m + n = 101 \quad \text{et} \quad \mathrm{pgcd}(m, n) = 3$$

[000306]

Exercice 375

Soit m et n deux entiers positifs.

1. Si $\mathrm{pgcd}(m, 4) = 2$ et $\mathrm{pgcd}(n, 4) = 2$, montrer que $\mathrm{pgcd}(m + n, 4) = 4$.
2. Montrer que pour chaque entier n, 6 divise $n^3 - n$.
3. Montrer que pour chaque entier n, 30 divise $n^5 - n$.
4. Montrer que si m et n sont des entiers impairs, $m^2 + n^2$ est pair mais non divisible par 4.
5. Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 24.
6. Montrer que si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, alors
   — $\mathrm{pgcd}(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$,
   — $\mathrm{pgcd}(2a + b, a + 2b) \in \{1, 3\}$,

— $\operatorname{pgcd}(a^2+b^2, a+b) \in \{1,2\}$,
— $\operatorname{pgcd}(a+b, a^2-3ab+b^2) \in \{1,5\}$.

[000307]

Exercice 376

Trouver une CNS pour que $ax+b \equiv 0$ mod n ait une solution. [000308]

Exercice 377

1. Calculer $\operatorname{pgcd}(18,385)$ par l'algorithme d'Euclide, en déduire un couple $(u_0,v_0) \in \mathbb{Z}^2$ solution de l'équation $18u+385v=1$, avec $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Fournir enfin l'ensemble des solutions entières de

$$18u+385v=1; \quad 18u+385v=3; \quad 54u+1155v=3; \quad 54u+1155v=5.$$

[000309]

Exercice 378

Trouver a et b entiers naturels tels que

1. $a+b=2070$ et $\operatorname{ppcm}(a,b)=9180$;
2. $a^2+b^2=5409$ et $\operatorname{ppcm}(a,b)=360$ (on pourra commencer par montrer que $\operatorname{pgcd}(a,b)$ divise $\operatorname{pgcd}(5409,360)$ et considérer ensuite différents cas).

[000310]

Exercice 379

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $35x \equiv 7$ mod 4; 22x $\equiv 33$ mod 5 [000311]

Exercice 380

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S : \begin{cases} x & \equiv & 4 & \text{mod } 6 \\ x & \equiv & 7 & \text{mod } 9 \end{cases}$$

On recherchera d'abord une solution particulière. [000312]

Exercice 381

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $x^2 \equiv 2$ mod 6; x$^3 \equiv 3$ mod 9.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes : $5x^2+2xy-3=0$; $y^2+4xy-2=0$.

[000313]

Exercice 382

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

a) $17x+6y=1$	b) $27x+25y=1$
c) $118x+35y=1$	d) $39x+26y=1$

[000314]

Exercice 383

Montrer que si a divise $42n+37$ et $7n+4$, pour une valeur de n donnée, alors a divise 13. Quelles sont les valeurs possibles pour n ? [000315]

Exercice 384

Trouver $\text{pgcd}(-357, 629)$ et trouver des entiers x et y tels que

$$\text{pgcd}(-357, 629) = -357x + 629y$$

[000316]

Exercice 385

Trouver $\text{pgcd}(2183, 6313) = d$ et trouver des entiers x et y tels que

$$d = 2183x + 6313y$$

[000317]

Exercice 386

Supposons $\text{pgcd}(a,b) = d$ et soit x_0 et y_0 des entiers tels que $d = ax_0 + by_0$. Montrer que :

1. $\text{pgcd}(x_0, y_0) = 1$,
2. x_0 et y_0 ne sont pas uniques.

[000318]

Exercice 387

Soit a, b, c des entiers.

1. Montrer que $\text{pgcd}(ca, cb) = |c|\ \text{pgcd}(a,b)$.
2. Montrer que $\text{pgcd}(a^2, b^2) = (\text{pgcd}(a,b))^2$.
3. Montrer que si $\text{pgcd}(a,b) = 1$ et si c divise a, alors $\text{pgcd}(c,b) = 1$.
4. Montrer que $\text{pgcd}(a, bc) = 1 \iff \text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a,c) = 1$.
5. Montrer que si $\text{pgcd}(b,c) = 1$ alors $\text{pgcd}(a, bc) = \text{pgcd}(a,b)\text{pgcd}(a,c)$.
6. Montrer que $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a+b, \text{ppcm}(a,b))$.

[000319]

Exercice 388

En divisant un nombre par 8, un élève a obtenu 4 pour reste ; en divisant ce même nombre par 12, il a obtenu 3 pour reste. Qu'en pensez-vous ?

Le fort en calcul de la classe, qui ne fait jamais d'erreur, a divisé le millésime de l'année par 29, il a trouvé 25 pour reste ; il a divisé le même millésime par 69, il a trouvé 7 pour reste. En quelle année cela se passait-il ? [000320]

Exercice 389

Trouver deux nombres sachant que leur somme est 581 et que le quotient de leur PPCM par leur pgcd est 240. [000321]

Exercice 390

Trouver les solutions entières de l'équation :

$$102x - 18018y = 18.$$

Combien y a-t-il de solutions telles que x et y soient compris entre entre 0 et 4000 ? [000322]

Exercice 391

Le pgcd de deux nombres est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce pgcd par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7. Trouver ces deux nombres. [000323]

Exercice 392

Trouver les couples de nombres a et b, divisibles par 3, vérifiant les propriétés suivantes : leur ppcm est 7560, et si on augmente chacun de ces nombres d'un tiers de sa valeur, le pgcd des deux nombres obtenus est 84. [000324]

Exercice 393

Un terrain rectangulaire dont les dimensions en mètres a et b sont des nombres entiers, a pour aire 3024 m^2. Calculer son périmètre sachant que le pgcd de a et b est 6. Combien y a-t-il de solutions possibles ? [000325]

Exercice 394

1. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, écrire l'ensemble des multiples de $\bar{x}$, classe de x, pour x variant de 0 à $n-1$ dans chacun des cas suivants : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
2. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer l'équivalence des trois propositions :
   i) $\bar{x}$ est inversible ;
   ii) x et n sont premiers entre eux ;
   iii) $\bar{x}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est à dire que l'ensemble des multiples de $\bar{x}$ est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. La classe de 18 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ? (On pourra utiliser le théorème de Bézout).

[000326]

Exercice 395

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $91x-65y=156$.
2. $135x-54y=63$.
3. $72x+35y=13$.

[000327]

Exercice 396

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

1. $31x-13y=1$.
2. $31x-13y=-1$.

Application : Au bord d'une piscine pleine d'eau, on dispose d'une cuve fixe de 31 litres munie à sa base d'un robinet de vidange, et d'un seau de 13 litres. Expliquer comment opérer pour obtenir exactement 1 litre dans le seau. [000328]

Exercice 397

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $77x+105y=2401$. [000329]

Exercice 398

Dans un pays nommé ASU, dont l'unité monétaire est le rallod, la banque nationale émet seulement des billets de 95 rallods et des pièces de 14 rallods.

1. Montrer qu'il est possible de payer n'importe quelle somme entière (à condition bien sûr que les deux parties disposent chacune d'assez de pièces et de billets).

2. On suppose que vous devez payer une somme S, que vous avez une quantité illimitée de pièces et de billets, mais que votre créancier ne puisse pas rendre la monnaie. Ainsi, il est possible de payer si $S = 14$, mais pas si $S = 13$ ou si $S = 15\ldots$ Montrer qu'il est toujours possible de payer si S est assez grande. Quelle est la plus grande valeur de S telle qu'il soit impossible de payer S ?

[000330]

Exercice 399

Trouver tous les points à coordonnées entières du plan d'équation $6x+10y+15z = 1997$. Combien y a-t-il de solutions dans $\mathbb{N}^3$? [000331]

Exercice 400

1. Trouver tous les points à coordonnées entières de la droite de l'espace d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-2y-z-5 & = & 0 \\ x+3y-4z-7 & = & 0 \end{array}\right.$.
2. Même question avec la droite $\left\{\begin{array}{rcl} x+3y-5z-5 & = & 0 \\ 4x-2y+z+13 & = & 0 \end{array}\right.$.

[000332]

Exercice 401

Résoudre dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{15}$$

[000333]

Exercice 402

Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ? [000334]

Exercice 403

Soient a et b deux nombres entiers relatifs. On note d leur pgcd. Construisons les suites a_n et b_n $n \in \mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & a \\ b_0 & = & b \end{array}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = r$ où r est le reste de la division euclidienne de a_n par b_n.

1. Montrer que si d_n est le pgcd de a_n et b_n alors d_n est également le pgcd de a_{n+1} et b_{n+1}.
2. Déduire de la questionh précédente que d est le pgcd des nombres a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite b_n est strictement décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. Déduire de ce qui précède que pour tout couple d'entiers relatifs (a,b) il existe un couple d'entier relatifs (u,v) tel que :
$$d = au+bv.$$

[000335]

Exercice 404

Soient $a,b,c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge (bc) = a \wedge c$. [003110]

Exercice 405 pgcd$(a+b, ppcm(a,b))$

Soient a, b entiers, $d = a \wedge b$, $m = a \vee b$. Chercher $(a+b) \wedge m$.

Correction ▼ [003111]

Exercice 406 $\text{pgcd}((a-b)^3, a^3 - b^3)$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Chercher $(a-b)^3 \wedge (a^3 - b^3)$.

Correction ▼ [003112]

Exercice 407 $\text{pgcd}(n^3 + n, 2n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chercher $(n^3 + n) \wedge (2n+1)$.

Correction ▼ [003113]

Exercice 408 $\text{pgcd}(15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chercher $(15n^2 + 8n + 6) \wedge (30n^2 + 21n + 13)$.

Correction ▼ [003114]

Exercice 409 pgcd et ppcm imposés

Soient $d, m \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur d et m pour qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = d$ et $a \vee b = m$.
Résoudre ce problème pour $d = 50$ et $m = 600$.

Correction ▼ [003115]

Exercice 410 $\text{ppcm}(x,y) + 11\text{pgcd}(x,y) = 203$

Trouver les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $x \vee y + 11(x \wedge y) = 203$.

Correction ▼ [003116]

Exercice 411 $x^2 + y^2 = 85113$, $\text{ppcm}(x,y) = 1764$

Résoudre :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 85113 \\ x \vee y = 1764. \end{cases}$$

Correction ▼ [003117]

Exercice 412 $\text{ppcm}(x,y) = 210\ \text{pgcd}(x,y)$, $y - x = \text{pgcd}(x,y)$

Résoudre : $\begin{cases} x \vee y = 210(x \wedge y) \\ y - x = x \wedge y. \end{cases}$

Correction ▼ [003118]

Exercice 413 $\text{pgcd}(x,y) = x + y - 1$

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x \wedge y = x + y - 1$.

Correction ▼ [003119]

Exercice 414 $\text{ppcm}(x,y) = x + y - 1$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^*$: $x \vee y = x + y - 1$.

Correction ▼ [003120]

Exercice 415 $\text{pgcd}(x,y) = x - y$, $\text{ppcm}(x,y) = 300$

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$: $\begin{cases} x \wedge y = x - y \\ x \vee y = 300. \end{cases}$

Correction ▼ [003121]

Exercice 416 pgcd$(a^n - 1, a^m - 1)$

Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$, $a \geqslant 2$, et $d = (a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$.

1. Soit $n = qm + r$ la division euclidienne de n par m. Démontrer que $a^n \equiv a^r (\operatorname{mod} a^m - 1)$.
2. En déduire que $d = (a^r - 1) \wedge (a^m - 1)$, puis $d = a^{(n \wedge m)} - 1$.
3. A quelle condition $a^m - 1$ divise-t-il $a^n - 1$?

Correction ▼ [003122]

Exercice 417 pgcd multiple

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \prod_{j \neq i} a_j$. Montrer que $a_1, \ldots, a_n$ sont *deux à deux* premiers entre eux si et seulement si $b_1, \ldots, b_n$ sont premiers entre eux *dans leur ensemble*. [003123]

Exercice 418 Équations à coefficients entiers

Soient a, b, c trois entiers relatifs. On considère l'équation : $ax + by = c$, dont on recherche les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que cette équation admette une solution.
2. Soit (x_0, y_0) une solution du problème de Bézout : $ax_0 + by_0 = d$. Déterminer toutes les solutions de $ax + by = c$ en fonction de a, b, c, d, x_0 et y_0.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $2520x - 3960y = 6480$.

Correction ▼ [003124]

Exercice 419 Équations à coefficients entiers

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1. $95x + 71y = 46$.
2. $20x - 53y = 3$.
3. $12x + 15y + 20z = 7$.

Correction ▼ [003125]

Exercice 420 Congruences simultanées

1. Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ avec $b \wedge b' = 1$. Montrer que le système : $\begin{cases} x \equiv a (\operatorname{mod} b) \\ x \equiv a' (\operatorname{mod} b') \end{cases}$ possède des solutions et qu'elles sont congrues entre elles modulo bb'.
2. Généraliser.

[003126]

Exercice 421 Congruences simultanées

Résoudre :

1. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{140} \\ x \equiv -3 \pmod{99}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv -2 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{5}. \end{cases}$

Correction ▼ [003127]

Exercice 422 Congruences simultanées

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.
Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Correction ▼ [003128]

Exercice 423 Décomposition à coefficients positifs

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que : $\forall\, x \geqslant ab$, $\exists\, u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = x$. [003129]

17 103.04 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Exercice 424

Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$;
2. $2^p - 1$ premier $\Rightarrow$ p premier ;
3. $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000336]

Exercice 425

Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000337]

Exercice 426

Résoudre l'équation $29x - 11y = 1$ dans $\mathbb{Z}$.
On considère maintenant l'équation $29x - 11y = 5$. Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale. [000338]

Exercice 427

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :
$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$
2. Montrer par récurence que :
$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000339]

Exercice 428

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que :

$$x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow \exists (x',y',z') \in \mathbb{N}^3, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq} \\ \text{pgcd}(x',y',z')=1 \\ x'^2+y'^2=z'^2 \\ x=nx' \text{ et } y=ny' \text{ et } z=nz'.$$

2. Soit$(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x^2+y^2=z^2$. On suppose que $\text{pgcd}(x,y,z)=1$
   (a) Montrer que x et y ne sont pas de mêmes parité.
   (b) On suppose x pair et y impair. On pose :
   $$x=2u,\ z-y=2v,\ z+y=2w$$
   avec $(u,v) \in \mathbb{N}^*$. Montrer que v et w sont premiers entre eux.
   (c) Montrer que
   $$x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$$
   avec m et n entiers naturels de parité différentes.
   (d) Montrer que si
   $$x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$$
   alors
   $$x^2+y^2=z^2.$$

[000340]

Exercice 429

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant 1$ on a :
$$2^{2^{n+k}}-1=\left(2^{2^n}-1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}}+1).$$
2. On pose $F_n=2^{2^n}+1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000341]

Exercice 430

Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
2. Si a divise b et c, alors a divise $2b+3c$.
3. S'il existe u et v entiers tels que $au+bv=4$ alors $\text{pgcd}(a,b)=4$.
4. Si $7a-9b=1$ alors a et b sont premiers entre eux.
5. Si a divise b et b divise c et c divise a, alors $|a|=|b|$.
6. « a et b premiers entre eux » équivaut à « $\text{ppcm}(a,b)=|ab|$ ».
7. Si a divise c et b divise d, alors ab divise cd.
8. Si 9 divise ab et si 9 ne divise pas a, alors 9 divise b.
9. Si a divise b ou a divise c, alors a divise bc.
10. « a divise b » équivaut à « $\text{ppcm}(a,b)=|b|$ ».
11. Si a divise b, alors a n'est pas premier avec b.

12. Si a n'est pas premier avec b, alors a divise b ou b divise a.

[000342]

Exercice 431

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier. Montrer que si $a \in \mathbb{Z}$ n'est pas congru à 0 modulo p alors p ne divise pas a et donc $\mathrm{pgcd}(a, p) = 1$.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$ non congru à 0 modulo p avec p premier. Montrer en utilisant le a) qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ non congru à 0 modulo p vérifiant $au \equiv 1[p]$. (Remarquer que cela donne un inverse de a modulo p).
3. Montrer que si p n'est pas premier, il existe des éléments $a, u \in \mathbb{Z}$ non nuls modulo p tels que $au \equiv 0[p]$.

[000343]

Exercice 432

1. Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{pgcd}((n+1)^2, n+2) = 1$.

[000344]

Exercice 433

Prouver que pour vérifier qu'un entier p est premier, il suffit de vérifier qu'il n'a pas de diviseurs inférieurs ou égaux à $\sqrt{p}$. [000345]

Exercice 434 Théorème de Wilson

Démontrer que tout nombre premier p divise $(p-1)!+1$. [000346]

Exercice 435

Montrer que les nombres suivants ne sont pas premiers :

1. $n^4 - 20n^2 + 4$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$ pour $n \geqslant 2$.
3. $a^4 + 4b^4$ pour $a, b \geqslant 2$.

[000347]

Exercice 436

Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Correction ▼ Vidéo ■ [000348]

Exercice 437

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000349]

Exercice 438

Soit n un nombre premier et $p \in \{1,...,n-1\}$, montrer que $n$divise C_n^p. [000350]

Exercice 439

Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 premiers entre eux, montrer que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, n \in \left\{ax+by | (x,y) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

[000351]

Exercice 440 pgcd $\times$ ppcm

Soient $a,b,c \in \mathbb{N}^*$. Quand a-t-on $\text{pgcd}(a,b,c) \times \text{ppcm}(a,b,c) = abc$?

Correction ▼ [003130]

Exercice 441 pgcd $\times$ ppcm

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \prod_{j\neq i} a_j$.
Montrer que :
$\text{pgcd}(a_1,\dots,a_n) \times \text{ppcm}(b_1,\dots,b_n) = \text{ppcm}(a_1,\dots,a_n) \times \text{pgcd}(b_1,\dots,b_n) = \prod a_i$.

Correction ▼ [003131]

Exercice 442 ab est un carré parfait

Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que ab est un carré parfait. Montrer que a et b sont des carrés parfaits. [003132]

Exercice 443 $a^n = b^m$

Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$ et m,n premiers entre eux tels que $a^n = b^m$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^m$ et $b = c^n$. [003133]

Exercice 444 Valuation 2-adique de $5^{2^n} - 1$

Montrer que la plus grande puissance de 2 divisant $5^{(2^n)} - 1$ est 2^{n+2}.

Correction ▼ [003134]

Exercice 445 $a^r - 1$ premier ?

On suppose que $a^r - 1$ est un nombre premier. Montrez que r est premier, puis que a vaut 2. Réciproque ?

Correction ▼ [003135]

Exercice 446 Nombres de Mersenne

On note $M_n = 2^n - 1$ (n-ième nombre de Mersenne).

1. Montrer que : M_n est premier $\Rightarrow n$ est premier.
2. Vérifier que M_{11} n'est pas premier.

Correction ▼ [003136]

Exercice 447 $a^n + 1$ est premier

Soient $a,n \in \mathbb{N}$ tels que $a \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, et $a^n + 1$ est premier. Montrer que n est une puissance de 2. [003137]

Exercice 448 Nombre de diviseurs d'un nombre entier

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs positifs de n.

1. Montrer que si $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$, alors $d_n = d_a d_b$.
2. Montrer que n est un carré parfait si et seulement si d_n est impair.

3. Montrer que : $\prod_{d|n} d = \sqrt{n}^{d_n}$.

[003138]

Exercice 449 Nombres premiers congrus à 3 modulo 4

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv -1 (\bmod 4)$. [003139]

Exercice 450 Nombres premiers congrus à 1 modulo 4

On rappelle que si p est premier et $n \wedge p = 1$, alors $n^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 3$ un diviseur premier de n^2+1. Montrer que $p \equiv 1 (\bmod 4)$.
2. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$.

Correction ▼ [003140]

Exercice 451 Intervalle sans nombres premiers

Trouver 1000 entiers consécutifs non premiers. [003141]

Exercice 452 Factorisation de 1000!

Quelle est la plus grande puissance de 6 divisant 1000 ! ?

Correction ▼ [003142]

Exercice 453 $1/2+1/3+\cdots+1/n$ n'est pas entier

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ est de la forme : $\frac{p_n}{2q_n}$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$ et p_n impair.

Correction ▼ [003143]

---

18 103.99 Autre

Exercice 454

Résoudre en nombres entiers naturels l'équation :

$$(x+1)(y+2) = 2xy.$$

[000352]

Exercice 455

Montrer que $(0,0,0)$ est le seul triplet (x,y,z) d'entiers naturels tels que l'on ait :

$$x^2+y^2 = 3z^2.$$

[000353]

Exercice 456

Déterminer les solutions des équations :

$$x^2-5x-11 \equiv 0 \bmod 17; \quad \cos((\mathrm{n}^2-8\mathrm{n}+2)\pi/7) = 1$$

[000354]

Exercice 457

Un groupe de $N \geqslant 2$ personnes se réunit. Montrer qu'au moins deux personnes ont serré le meme nombre de mains. On pourra séparer les deux cas suivants : soit tout le monde a serré au moins une main, soit il existe quelqu'un qui n'a serré aucune main. [000355]

19 104.01 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 458

Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000001]

Exercice 459

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$:

$$\frac{5+2i}{1-2i} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

[000002]

Exercice 460

Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000003]

Exercice 461

Placer dans le plan cartésien, les points d'affixes suivantes : $z_1 = i$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = -2+2i$, $z_4 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
[000004]

Exercice 462

Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}, \frac{1}{(1+2i)(3-i)}, \frac{1+2i}{1-2i}, \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

[000005]

Exercice 463

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $z_1 = 3+3i$, $z_2 = -1-\sqrt{3}i$, $z_3 = -\frac{4}{3}i$, $z_4 = -2$, $z_5 = e^{i\theta}+e^{2i\theta}$.
2. Calculer $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2000}$.

[000006]

Exercice 464

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Correction ▼ [000007]

Exercice 465

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués :

1. $1+i(1+\sqrt{2})$.
2. $\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i(1-\sqrt{5})$.
3. $\frac{\tan\varphi-i}{\tan\varphi+i}$ où φ est un angle donné.

Correction ▼ [000008]

Exercice 466

Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

[000009]

Exercice 467

Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7)+i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84)+i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60)-i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Correction ▼ [000010]

Exercice 468

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000011]

Exercice 469

Écrire sous la forme partie réelle-partie imaginaire, puis sous la forme module-argument le nombre complexe :

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2.$$

[000012]

Exercice 470

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta}+e^{2i\theta}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000013]

Exercice 471

Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

Correction ▼ [000014]

Exercice 472

Calculer $Z = (1+i\sqrt{3})^{2000}$. [000015]

Exercice 473

Calculer $(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$ et $(1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$. [000016]

Exercice 474

Calculer le module et l'argument de $z = \frac{1}{1+i\tan\alpha}$. [000017]

Exercice 475

Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2 = 1+j \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}.$$

[000018]

Exercice 476

Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit un réel ? un imaginaire ? [000019]

Exercice 477

Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\bar{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\dots(z^n+\bar{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000020]

Exercice 478 partiel novembre 88

Soient α et β deux nombres réels. Mettre le nombre complexe $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\gamma}$ (indication : poser $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$).
En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha + (n-p)\beta].$$

Correction ▼ [000021]

Exercice 479

Écrire l'expression $(1+\cos\phi + i\sin\phi)$ sous forme trigonométrique. En déduire l'expression de $(1+\cos\phi + i\sin\phi)^n$. [000022]

Exercice 480

Mettre sous forme trigonométrique $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi,\pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Correction ▼ [000023]

Exercice 481

Montrer que si $|z| \leqslant k < 1$ alors $1-k \leqslant |1+z| \leqslant 1+k$. Faire un dessin et montrer qu'il peut y avoir égalité.
[000024]

Exercice 482

Montrer algébriquement et géométriquement que si $|z| = 1$ alors $|1+z| \geqslant 1$ ou $\left|1+z^2\right| \geqslant 1$.

[000025]

Exercice 483

Résoudre l'équation $\exp(z) = \sqrt{3}+3i$. [000026]

Exercice 484 $\sum z_i + z_j$

1. Soient $u,v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|+|u-v| \geqslant |u|+|v|$, et déterminer les cas d'égalité.
2. Soient $z_1,z_2,z_3,z_4 \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=k+1}^{4} |z_k + z_\ell|$.

Correction ▼ [002924]

Exercice 485

Soient $a,b \in \mathbb{U}$ distincts et $z \in \mathbb{C}$. On note $u = \frac{z+ab\bar{z}-a-b}{a-b}$. Montrer que $u^2 \in \mathbb{R}$.
Correction ▼ [002927]

Exercice 486 **IT

Calculer de deux façons les racines carrées de $1+i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
Correction ▼ [005119]

Exercice 487 **I

Déterminer les complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.
Correction ▼ [005127]

Exercice 488 **I

On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (z \in U \setminus \{-1\} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\ z = \frac{1+ix}{1-ix}).$$

Correction ▼ [005128]

Exercice 489 **IT

Forme trigonométrique de $\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ et de $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.
Correction ▼ [005129]

Exercice 490 *T

Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$.
Correction ▼ [005130]

Exercice 491

Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+\bar{z}-1=0$.
Indication ▼ Correction ▼ [007209]

Exercice 492

Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2+8|z|-3=0$.

Indication ▼ Correction ▼ [007210]

Exercice 493

Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2-2\bar{z}+2-i=0$. [007211]

20 104.02 Racine carrée, équation du second degré

Exercice 494

Calculer les racines carrées de $1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$, et $7+24i$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000027]

Exercice 495

Trouver les racines carrées de $3-4i$ et de $24-10i$.

Correction ▼ [000028]

Exercice 496

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000029]

Exercice 497

Montrer que les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Correction ▼ [000030]

Exercice 498

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\ ;\ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\ ;\ 4z^2-2z+1=0\ ;$$

$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000031]

Exercice 499

Trouver les racines complexes de l'équation suivante :

$$x^4-30x^2+289=0.$$

[000032]

Exercice 500

Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$, on pose

$$f(z)=\frac{2z-i}{z-2i}.$$

1. Résoudre l'équation $z^2=i$, $z\in\mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $f(z)=z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$.

[000033]

Exercice 501

On note $j = e^{\frac{2\pi}{3}}$.

1. Mettre j et j^2 sous forme algébrique.
2. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Factoriser le polynôme $z^3 - 8i$.

[000034]

Exercice 502

1. Calculer les racines carrées de $1+i$, $7+24i$, i, $5+12i$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $z^2 + z + 1 = 0$
   (b) $z^2 + z - 2 = 0$
   (c) $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$
   (d) $z^2 + 4z + 5 = 0$
   (e) $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$
   (f) $z^4 - (1-i)z^2 - i = 0$
   (g) $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$

[000035]

Exercice 503

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - (11-5i)z + 24 - 27i = 0$.
2. $z^3 + 3z - 2i = 0$.

Correction ▼ [000036]

Exercice 504

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$z^2 - (1+a)(1+i)z + \left(1+a^2\right)i = 0,$$

où a est un paramètre réel.

1. Calculer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ les solutions z_1 et z_2 de (E) (indication : on pourra déterminer les racines carées complexes de $-2i(1-a)^2$).
2. On désigne par Z_1 (resp. Z_2) les points du plan complexe d'affixe z_1 (resp. z_2) et par M le milieu de $[Z_1, Z_2]$. Tracer la courbe du plan complexe décrite par M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

[000037]

Exercice 505

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0, \text{ où } n \text{ est un entier naturel non nul.}$$

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1.$$

(a) Justifier la factorisation suivante de P_α :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + 1\right)\ldots\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right).$$

(b) Prouver, à l'aide des nombres complexes par exemple, la formule suivante :

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(c) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{n}\right)\ldots\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

2. Pour tout α appartenant à $]0,\pi[$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

(a) Montrer que, pour tout α non nul, on a :

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}.$$

(b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

[000038]

Exercice 506 Position des racines carrées

Soit $z \in \mathbb{C}$ et p,q ses racines carrées. A quelle condition z,p,q forment-ils un triangle rectangle en z ?

Correction ▼ [002945]

Exercice 507 Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$.

Correction ▼ [002946]

Exercice 508 Ensi P 91

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$.

Correction ▼ [002947]

Exercice 509

Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation : $z^2 - (2+im)z - (1+im) = 0$ admette deux racines imaginaires conjuguées ?

Correction ▼ [002948]

Exercice 510

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Vérifier que

$$\left(|u|^2 - |v|^2\right)^2 = \left(\frac{|u+v|^2 + |u-v|^2}{2}\right)^2 - 4|uv|^2.$$

2. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. CNS pour que les racines de $z^2+\alpha z+\beta = 0$ aient même module ?

Correction ▼ [002949]

Exercice 511 Moyennes géométrique et arithmétique

1. Soient $u,v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2|u|^2+2|v|^2$.
2. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $m = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha|+|\beta| = |m+\mu|+|m-\mu|$.

Correction ▼ [002950]

Exercice 512 **T

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1 = 0$
2. $2z^2+2z+1 = 0$
3. $z^2-2z\cos\theta+1 = 0$, θ réel donné.
4. $z^2-(6+i)z+(11+13i) = 0$
5. $2z^2-(7+3i)z+(2+4i) = 0$.

Correction ▼ [005120]

Exercice 513 **T

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12) = 0$.

Correction ▼ [005125]

Exercice 514

Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3-(1+i)z^2+(1-2i)z+6+8i = 0,$$

sachant qu'elle possède une solution réelle. [007212]

Exercice 515

Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2-2(1-i)z+a^2-2i = 0.$$

Pour quelles valeurs de a cette équation possède-t-elle au moins une racine réelle ? [007213]

21 104.03 Racine n-ieme

Exercice 516

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1+iz| = |1-iz|$.
   On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles. Trouver alors les solutions.
   Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

[000039]

Exercice 517

Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4-1$.

1. Factoriser $P(Z)$ et en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$.

2. Déduire de 1. les solutions de l'équation d'inconnue z :

$$((2z+1)/(z-1))^4 = 1$$

[000040]

Exercice 518

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $\quad z^4 = (1-i)/\left(1+i\sqrt{3}\right)$. [000041]

Exercice 519

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

Correction ▼ [000042]

Exercice 520

Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000043]

Exercice 521

Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.

Correction ▼ [000044]

Exercice 522

Trouver les racines quatrièmes de 81 et de -81.

Correction ▼ [000045]

Exercice 523

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a :
$$(z-1)\left(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}\right) = z^n - 1,$$
et en déduire que, si $z \neq 1$, on a :
$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1}.$$
2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) - 1 = 2i\exp\left(\frac{ix}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme :
$$Z_n = 1+\exp(ix)+\exp(2ix)+\ldots+\exp((n-1)ix),$$
et en déduire les valeurs de
$$\begin{aligned} X_n &= 1+\cos(x)+\cos(2x)+\ldots+\cos((n-1)x) \\ Y_n &= \sin(x)+\sin(2x)+\ldots+\sin((n-1)x). \end{aligned}$$

Correction ▼ [000046]

Exercice 524

Calculer la somme $S_n = 1+z+z^2+\cdots+z^n$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000047]

Exercice 525

---

1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1+j+j^2$ et en déduire les racines de $1+z+z^2=0$.
2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1,\varepsilon,\dots,\varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=0$. Calculer, pour $p\in\mathbb{N}$, $1+\varepsilon^p+\varepsilon^{2p}+\dots+\varepsilon^{(n-1)p}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000048]

Exercice 526

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^5 = 1$.
2. $z^5 = 1-i$.
3. $z^3 = -2+2i$.
4. $z^5 = \bar{z}$.

[000049]

Exercice 527

1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1+i$.
2. Résoudre $z^2-z+1-i=0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n}-z^n+1-i=0$.

[000050]

Exercice 528

Soit ε une racine n-ième de l'unité ; calculer

$$S = 1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\dots+n\varepsilon^{n-1}.$$

[000051]

Exercice 529

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$. [000052]

Exercice 530

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = \bar{z}$ où $n \geqslant 1$. [000053]

Exercice 531

Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad ; \quad z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}.$$

[000054]

Exercice 532

Résoudre $z^6+27=0$. ($z\in\mathbb{C}$) [000055]

Exercice 533

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
   Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

(Indication : poser $Z = z^3$; calculer $(9+i)^2$)

Correction ▼ Vidéo ■ [000056]

Exercice 534

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$. [000057]

Exercice 535

Déterminer les racines quatrièmes de $-7-24i$. [000058]

Exercice 536

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montrer

$$\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$$

[000059]

Exercice 537 Racines de l'unité

Résoudre :

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$.
2. $(z+1)^n = z^n = 1$.
3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
4. $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.
5. $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$.
6. $\overline{x} = x^{n-1}$.
7. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

Correction ▼ [002939]

Exercice 538 Sommes sur les racines de l'unité

Soit $\omega = \exp\frac{2i\pi}{n}$. Calculer :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.
2. $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=k}^{n-1} C_\ell^k \omega^{k+\ell}$.

Correction ▼ [002940]

Exercice 539 Somme des puissances p-èmes des racines de l'unité

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-èmes de 1.

1. Calculer $\sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^p$.
2. Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $M = \max\{|P(x)|,\ x \in \mathbb{U}_n\}$. Montrer que tous les coefficients de P sont bornés par M.

Correction ▼ [002941]

Exercice 540 $\sum \omega^{k^2}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$. On demande de calculer $|Z|^2$. Pour cela ...

1. Écrire $|Z|^2$ comme une somme double.
2. Regrouper les termes diagonalement en tenant compte de la périodicité de la fonction $k \mapsto \omega^k$.
3. Terminer le calcul.

Correction ▼ [002942]

Exercice 541 $e^{2i\pi/7}$

Soit $z = \exp\frac{2i\pi}{7}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u + v$ et u^2.
2. En déduire $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$.

Correction ▼ [002943]

Exercice 542 Calcul de produit

Simplifier $x = \prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}$ en utilisant $1, j, j^2$.

Correction ▼ [002944]

Exercice 543 ***

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Correction ▼ [005122]

Exercice 544 **

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n - (z-1)^{2n} = 0$.

Correction ▼ [005126]

Exercice 545 **T

Déterminer les racines quatrièmes de i et les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

Correction ▼ [005131]

Exercice 546 **I

On considère l'équation (E) : $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné.

1. Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2. Montrer que les solutions de (E) sont deux à deux opposées.
3. Résoudre (E).

Correction ▼ [005135]

Exercice 547 ***I

Calculer $a_n = \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$, $b_n = \prod_{k=1}^{n} \cos(a + \frac{k\pi}{n})$ et $c_n = \prod_{k=1}^{n} \tan(a + \frac{k\pi}{n})$ en éliminant tous les cas particuliers concernant a.

Correction ▼ [005313]

---

22 104.04 Géométrie

Exercice 548

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1,$$

2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000060]

Exercice 549

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) $(z-2)/(z-1) = i$. On donnera la solution sous forme algébrique.
2. Soit M, A, et B les points d'affixes respectives $z, 1, 2$. On suppose que $M \neq A$ et que $M \neq B$. Interpréter géométriquement le module et un argument de $(z-2)/(z-1)$ et retrouver la solution de l'équation (1).

[000061]

Exercice 550

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$M(x,y) \mapsto x+iy = z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $f : P \text{rg} P$ qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{z+i}$.

1. Sur quel sous ensemble de P, f est-elle définie ?
2. Calculer $|z'|$ pour z affixe d'un point M situé dans le demi plan ouvert

$$H := \{M(x,y) \in P \mid y > 0.\}?$$

3. En déduire l'image par f de H.

[000062]

Exercice 551

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et on identifie P à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$M(x,y) \mapsto x+iy = z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $g : P \text{rg} P$ qui à tout point M d'fixe $z \neq -1$ associe $g(M)$ d'affixe $z' = \frac{1-z}{1+z}$.

1. Calculer $z' + \bar{z'}$ pour $|z| = 1$.
2. En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées $(-1,0)$ par l'application g.

[000063]

Exercice 552

Soit C la courbe d'équation $x^2 - xy + y^2 = 0$ dans le plan P rapporté à un repère orthonormé.

1. La courbe C a-t-elle des points d'intersection avec le rectangle ouvert R dont les sommets sont :

$$\begin{array}{rcl} A &=& (-3,2) \\ B &=& (4,2) \\ C &=& (4,-1) \\ D &=& (-3,-1). \end{array}$$

2. Même question pour le rectangle fermé R' de sommets :

$$\begin{array}{rcl} A' &=& (-1,4) \\ B' &=& (2,4) \\ C' &=& (2,1) \\ D' &=& (-1,1). \end{array}$$

Exercice 553

Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$. Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

Correction ▼ [000065]

Exercice 554

Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$). Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.

Correction ▼ [000066]

Exercice 555

1. Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a + jb + j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral (j et j^2 sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). Réciproque ?
2. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

Correction ▼ [000067]

Exercice 556

Soit H une hyperbole équilatère de centre O, et M un point de H. Montrer que le cercle de centre M qui passe par le symétrique de M par rapport à O recoupe H en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral. *Indications :* en choisissant un repère adéquat, H a une équation du type $xy = 1$, autrement dit en identifiant le plan de H au plan complexe, $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$. En notant a l'affixe de M, le cercle a pour équation $|z-a|^2 = 4a\bar{a}$. On pose $Z = z - a$ et on élimine $\bar{Z}$ entre les équations du cercle et de l'hyperbole. En divisant par $Z + 2a$ pour éliminer la solution déjà connue du symétrique de M, on obtient une équation du type $Z^3 - A = 0$. [000068]

Exercice 557

Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. Donner une interprétation géométrique.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000069]

Exercice 558

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z') = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $z\overline{z'} + \bar{z}z' = 0$.
2. Montrer que $|z+z'|^2 = |z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2$.

[000070]

Exercice 559

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que : $\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1)$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que les images de 1, z, $1+z^2$ soient alignées.

[000071]

Exercice 560

Soit $s = (1-z)(1-iz)$.

1. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit imaginaire pur.

[000072]

Exercice 561

1. Soit A un point du plan d'affixe $\alpha = a + ib$. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z|^2 = \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z$.
2. Quelles conditions doivent vérifier les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit réel ?
3. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz, i forment un triangle équilatéral.
4. Soit $z = a + ib$, mettre l'expression $\frac{z-1}{z+1}$ sous forme $A + iB$, . Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z telle que l'argument de $\frac{z-1}{z+1}$ soit $\frac{\pi}{2}$.

[000073]

Exercice 562

Déterminer les nombres complexes z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes z, z^2, z^3 soit rectangle au point d'affixe z. [000074]

Exercice 563

Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O. [000075]

Exercice 564

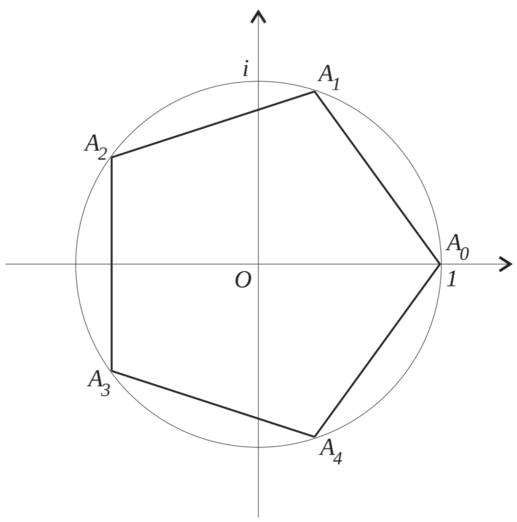
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :

$$|z-1| \leqslant 1, |z+1| \leqslant 1.$$

[000076]

Exercice 565

Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.



1. Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points $A_0, \dots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.

2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$).
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Correction ▼ Vidéo ■ [000077]

Exercice 566 Équations affines

1. Montrer que toute droite du plan admet pour équation complexe : $az + \overline{az} = b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{R}$.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, a, b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } az + b\overline{z} = c\}$.

Correction ▼ [002925]

Exercice 567 Transformation homographique

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}, z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$, $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Correction ▼ [002926]

Exercice 568 Triangle équilatéral

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.
2. j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
4. $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

[002928]

Exercice 569 Sommets d'un carré

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} a + ib &= c + id \\ a + c &= b + d. \end{cases}$$

Que pouvez-vous dire des points d'affixes a, b, c, d ?
En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $(z-a)^4 = (z-b)^4 = (z-c)^4 = (z-d)^4$.

Correction ▼ [002929]

Exercice 570 Configuration de points

Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que ...

1. z, z^2, z^4 sont alignés.
2. $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.
3. $z, \frac{1}{z}, -i$ sont alignés.

Correction ▼ [002930]

Exercice 571 $a + b + c = 1$

Trouver $a,b,c \in \mathbb{U}$ tels que $\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc=1. \end{cases}$

Correction ▼ [002931]

Exercice 572 $u+v+w=0$

Soient u,v,w trois complexes unitaires tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u=jv=j^2w$ ou $u=jw=j^2v$. [002932]

Exercice 573 $z+1/z=2$

Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2$.

Correction ▼ [002933]

Exercice 574 Symétrique par rapport à une droite

Les points A,B,M ayant pour affixes a,b,z, calculer l'affixe du symétrique M' de M par rapport à la droite (AB).

Correction ▼ [002934]

Exercice 575 Orthocentre

Soient $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que si deux des rapports $\frac{d-a}{b-c}, \frac{d-b}{c-a}, \frac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, alors le troisième l'est aussi.

Correction ▼ [002935]

Exercice 576 Similitudes dans un triangle

On donne un triangle ABC, un réel positif k et un angle θ. On note S_M la similitude directe de centre M, de rapport k et d'angle θ. Soit C_1 déduit de C par S_A, B_1 déduit de B par S_C, A_1 déduit de A par S_B. Montrer que les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ ont même centre de gravité. [002936]

Exercice 577 Centre du cercle circonscrit

Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$, affixes de points A,B,C non alignés. Calculer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC en fonction de a,b,c.

Correction ▼ [002937]

Exercice 578 Sphère de $\mathbb{R}^3$

Soient $u,v \in \mathbb{C}$ tels que $u+v \neq 0$. On pose $x=\frac{1+uv}{u+v}$, $y=i\frac{1-uv}{u+v}$, $z=\frac{u-v}{u+v}$.

1. CNS sur u et v pour que x,y,z soient réels ?
2. On suppose cette condition réalisée. Montrer que le point $M(x,y,z)$ dans l'espace appartient à la sphère de centre O et de rayon 1.
3. A-t-on ainsi tous les points de cette sphère ?

Correction ▼ [002938]

Exercice 579 **IT Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas

1. On pose $z=e^{2i\pi/5}$ puis $a=z+z^4$ et $b=z^2+z^3$. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. Le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point M d'affixe i recoupe (Ox) en deux points I et J. Montrer que $\overline{OI}+\overline{OJ}=\overline{OI}.\overline{OJ}=-1$ et en déduire une construction à la règle et au compas, du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un des sommets est le point d'affixe 1.

3. La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $(ABCDE)$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G. Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

Correction ▼ [005121]

Exercice 580 ****

1. Soit (ABC) un triangle dont les longueurs des côtés BC, CA et AB sont notées respectivement a, b et c. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle (ABC). Montrer que $I = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$.
2. Déterminer z complexe tel que O soit le centre du cercle inscrit au triangle (PQR) dont les sommets ont pour affixes respectives z, z^2 et z^3.

Correction ▼ [005123]

Exercice 581 ***I

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que :

$$ABC \text{ équilatéral} \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2+bz+c=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b} = 0.$$

Correction ▼ [005124]

Exercice 582 **T

Pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, on pose $Z = \frac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

1. $|Z| = 1$.
2. $|Z| = 2$.
3. $Z \in \mathbb{R}$.
4. $Z \in i\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005133]

Exercice 583 *T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1. $z' = z+3-i$
2. $z' = 2z+3$
3. $z' = iz+1$
4. $z' = (1-i)z+2+i$

Correction ▼ [005134]

Exercice 584 Théorèmes de Thébault et de Van Aubel

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe direct. On construit quatre carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les centres respectifs de ces carrés sont notés P, Q, R et S.

1. Montrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Démontrer des relations analogues pour les autres carrés.
2. Montrer le théorème de Van Aubel : $PQRS$ est un *pseudo-carré*, c'est-à-dire que ses diagonales sont de même longueur et se croisent à angle droit. Pour cela, calculer $\frac{s-q}{r-p}$.
3. (Théorème de Thébault) Dans le cas particulier où $ABCD$ est un parallélogramme, montrer que $PQRS$ est un carré.

Correction ▼ [007004]

Exercice 585 Point de Vecten

Soit ABC un triangle direct. On construit trois carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Les centres respectifs de ces carrés sont notés P, Q et R. Le but est de montrer que (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes. Le point de concours est appelé *point de Vecten* du triangle.

1. Montrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a $p = \frac{a-ib}{1-i}$.
   Démontrer des relations analogues pour les autres carrés.
2. Montrer que ABC et PQR ont même centre de gravité.
3. Montrer que (AQ) et (PR) sont perpendiculaires. Conclure.

Correction ▼ [007005]

Exercice 586 Théorème de Napoléon

Soit ABC un triangle direct. Soient P,Q,R tels que CBP, ACQ et BAR soient des triangles équilatéraux directs. On note U,V,W les centres de gravité respectifs de ces trois triangles équilatéraux. Montrer que UVW est équilatéral, de même centre de gravité que ABC, en utilisant la caractérisation des triangles équilatéraux.

Correction ▼ [007006]

Exercice 587 Théorème de Ptolémée

On admet le résultat suivant :
Quatre points distincts d'affixes a,b,c,d sont cocycliques ou alignés (resp. cocycliques ou alignés dans cet ordre) si et seulement si leur birapport

$$[a,b,c,d] := \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$$

est un réel (resp. réel positif).
Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Ptolémée dans sa version suivante :
Théorème (Ptolémée) *Soient A, B, C, D quatre points du plan non alignés. Alors on a*

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

avec égalité si et seulement si A,B,C,D sont cocycliques dans cet ordre.

1. (Échauffement) Montrer que pour tous $x,y,z \in \mathbb{C}$,
   $$|x| \cdot |y-z| \leqslant |y| \cdot |z-x| + |z| \cdot |x-y|.$$
2. Prouver le théorème si deux des points sont égaux.
3. Dans la suite on suppose les points distincts deux à deux. En utilisant les affixes a,b,c,d des points, prouver l'inégalité.
4. Étudier le cas d'égalité et conclure.

Correction ▼ [007007]

Exercice 588 Théorème des quatre cercles de Miquel

On admet le résultat suivant :
Quatre points distincts d'affixes a,b,c,d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport

$$[a,b,c,d] := \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$$

est réel.
Soient $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ quatre cercles du plan vérifiant la condition suivante :
$\mathscr{C}_1$ coupe $\mathscr{C}_2$ en deux points distincts z_1 et w_1, qui coupe $\mathscr{C}_3$ en deux points distincts z_2 et w_2, qui coupe $\mathscr{C}_4$ en deux points distincts z_3 et w_3, qui coupe $\mathscr{C}_1$ en deux points distincts z_4 et w_4.
On suppose les huit points ci-dessus tous *distincts*.

1. Démontrer que
$$\frac{[z_1,w_2,z_2,w_1]\cdot[z_3,w_4,z_4,w_3]}{[z_2,w_3,z_3,w_2]\cdot[z_4,w_1,z_1,w_4]}=[z_1,z_3,z_2,z_4]\cdot[w_1,w_3,w_2,w_4].$$
2. En déduire que si Z_1,Z_2,Z_3,Z_4 sont alignés ou cocycliques, alors il en est de même de W_1,W_2,W_3,W_4.

[007008]

Exercice 589

Déterminer une équation complexe de la droite

1. contenant les points d'affixes i et $1+2i$;
2. contenant le point d'affixe $1+i$ et de vecteur normal d'affixe $2+i$;
3. contenant le point d'affixe $1+i$ et de vecteur directeur d'affixe $2+i$.

[007009]

Exercice 590

Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b, et $\theta\in\mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que
$$\operatorname{Arg}\frac{z-b}{z-a}\equiv\theta[\pi].$$

Correction ▼ [007010]

Exercice 591

Déterminer les éléments caractéristiques des transformations représentées par :

1. $z\mapsto(1-i)z+i$;
2. $z\mapsto i\bar{z}+1-i$;
3. $z\mapsto 2i\bar{z}+3$;
4. $z\mapsto\bar{z}+1$.

Correction ▼ [007145]

Exercice 592

Écrire en coordonnée complexe :

1. la rotation d'angle $\pi/4$ et de centre d'affixe $2+3i$;
2. la réflexion d'axe d'équation $y=2x+1$.

Correction ▼ [007146]

Exercice 593

Écrire en coordonnée complexe les deux similitudes (directe et indirecte) envoyant les points d'affixes 2 et 3 sur ceux d'affixes i et $3i$ et trouver leurs éléments caractéristiques.

Indication ▼ Correction ▼ [007147]

Exercice 594

Soit $a\in\mathbb{C}^*$, et soit f la similitude directe du plan représentée par $z\mapsto a^2z+a-1$.
Déterminer l'ensemble des paramètres a pour lesquels f est :

1. une translation;
2. une homothétie de rapport -4;
3. une rotation d'angle $\pi/2$.

Correction ▼ [007148]

Exercice 595

Soit ABC un triangle tel que C soit l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$. Soit s une similitude envoyant A sur B et B sur C.

1. Que peut valoir $s(C)$?
2. On suppose que s est directe. Déterminer son centre Ω. On l'exprimera comme barycentre de A, B et C.
3. Si la similitude est indirecte, déterminer son centre et son axe.

Correction ▼ [007149]

Exercice 596

Fixons un repère orthonormé direct du plan. À quelle condition sur les réels a, b, c, d, e et f la transformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+cy+e \\ bx+dy+f \end{pmatrix}$ est-elle une similitude directe ? Indirecte ?
Application : écrire en coordonnée complexe les applications

$$\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x-y-1 \\ x-2y+1 \end{pmatrix} \text{ et } \psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y\sqrt{3} \\ x\sqrt{3}+y \end{pmatrix}$$

Correction ▼ [007150]

Exercice 597

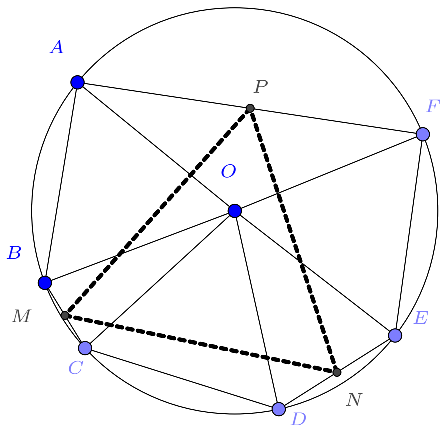
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note A et B les points d'affixes $z_A = 1-i$ et $z_B = 7+\frac{7}{2}i$.

1. Soit s l'application du plan dans lui-même qui envoie un point d'affixe z sur celui d'affixe
$$\frac{2}{3}iz+\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i.$$
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s.
2. On note $B_0 = B$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B_{n+1} = s(B_n)$.
   (a) Calculer la distance AB_{n+1} en fonction de AB_n.
   (b) Déterminer le plus petit entier N vérifiant la propriété suivante : pour tout $n \geqslant N$, le point B_n appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2}. On demande une formule exacte pour cet entier mais pas son écriture explicite en base 10.
   (c) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que les points A, B et B_n soient alignés.

Correction ▼ [007151]

Exercice 598

1. Soit ABC un triangle. Montrer qu'il est équilatéral direct ssi les affixes (un repère orthonormé direct ayant été fixé) des sommets vérifient $a+bj+cj^2 = 0$.
2. (Notations réinitialisées) Soit O un point du plan, $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et A, B, C, D, E et F des points distincts de $\mathscr{C}$ vérifiant (dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) l'égalité :
$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}) = \pi/3.$$
On note M (resp. N, P) le milieu de $[BC]$ (resp. $[DE]$, $[FA]$). Montrer que MNP est équilatéral direct.



Correction ▼ [007163]

Exercice 599

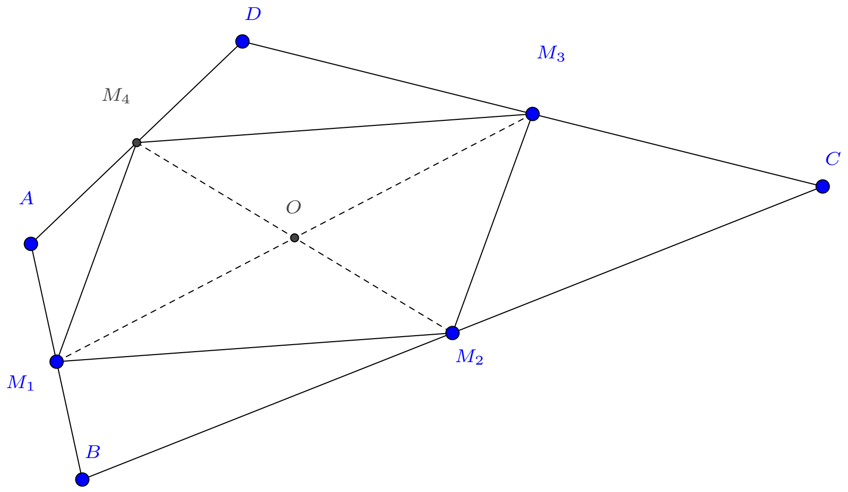
Soit ABC un triangle équilatéral direct, et M un point. On note A' (resp. B' et C') le symétrique orthogonal de M par rapport à la droite (BC) (resp. (CA) et (AB)). Le but de l'exercice est de démontrer que ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

1. Écrire en coordonnée complexe (relativement à un repère que l'on choisira judicieusement) la réflexion σ_{AB} par rapport à l'axe (AB).
2. Conclure.

Correction ▼ [007164]

Exercice 600

Soit $M_1M_2M_3M_4$ un parallélogramme direct du plan, de centre O, et A un point quelconque du plan. On considère B le symétrique de A par rapport à M_1, C le symétrique de B par rapport à M_2, D le symétrique de C par rapport à M_3 et E le symétrique de D par rapport à M_4.



1. Montrer que $E = A$.
2. Montrer que si z et z' sont deux complexes, alors $|z+z'|+|z-z'| \geqslant 2|z|$.
3. On fixe un repère orthonormé direct de centre O. Exprimer a, b, c et d puis le périmètre de $ABCD$ en fonction de m_1, m_2 et de $t = a - m_1 + m_2$.
4. On fait maintenant varier le point A. Montrer que le périmètre du quadrilatère $ABCD$ est minimal lorsque AM_1OM_4 est un parallélogramme.

Correction ▼ [007166]

23 104.05 Trigonométrie

Exercice 601

On rappelle la formule ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

1. Etablir les formules d'Euler ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

2. En utilisant les formules d'Euler, linéariser (ou transformer de produit en somme) ($a, b \in \mathbb{R}$) :

$$2\cos a\cos b \quad ; \quad 2\sin a\sin b \quad ; \quad \cos^2 a \quad ; \quad \sin^2 a.$$

3. A l'aide de la formule : $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ ($x, y \in \mathbb{R}$), retrouver celles pour $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ et $\tan(x+y)$ en fonction de sinus, cosinus et tangente de x ou de y ; en déduire les formules de calcul pour $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ et $\tan(2x)$ ($x, y \in \mathbb{R}$).
4. Calculer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ ($x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
5. Etablir la formule de Moivre ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

6. En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

[000078]

Exercice 602

1. Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction des lignes trigonométriques de l'angle θ.
2. Calculer $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, à l'aide des lignes trigonométriques des multiples entiers de θ.

[000079]

Exercice 603

En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000080]

Exercice 604

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de Moivre exprimer en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$:
   (a) $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
   (b) $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$. En déduire une équation du troisième degré admettant pour solution $\cos(\frac{\pi}{3})$ et la résoudre.
2. Linéariser les polynomes trigonométriques suivants : $1+\cos^2 x$, $\cos^3 x + 2\sin^2 x$.

[000081]

Exercice 605

Exprimer $(\cos 5x)(\sin 3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$. [000082]

Exercice 606

Soit x un nombre réel. On note $C = 1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx = \sum_{k=0}^{n}\cos kx$, et $S = \sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx = \sum_{k=0}^{n}\sin kx$. Calculer C et S. [000083]

Exercice 607

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$\sin x = \frac{1}{2},\ \cos x = -\frac{1}{2},\ \tan x = -1,$$

et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions ; résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$$

[000084]

Exercice 608

Calculer $\sin(25\pi/3), \cos(19\pi/4), \tan(37\pi/6)$. [000085]

Exercice 609

Résoudre l'équation : $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$, puis l'inéquation : $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 > 0$. [000086]

Exercice 610

Etudier le signe de la fonction donnée par $f(x) = \cos 3x + \cos 5x$. [000087]

Exercice 611

Simplifier, suivant la valeur de $x \in [-\pi, \pi]$, l'expression $\sqrt{1+\cos x} + |\sin x/2|$. [000088]

Exercice 612

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : (donner les valeurs des solutions appartenant à $]-\pi, \pi]$ et les placer sur le cercle trigonométrique).

1. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$,
2. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$,
3. $\cos(3x) = \sin(x)$.

Correction ▼ [000089]

Exercice 613

A quelle condition sur le réel m l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = m$ a-t-elle une solution réelle ? Résoudre cette équation pour $m = \sqrt{2}$.

Correction ▼ [000090]

Exercice 614

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\cos(5x) + \cos(3x) \leqslant \cos(x)$$
$$2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0.$$

Correction ▼ [000091]

Exercice 615

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.
2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

Correction ▼ [000092]

Exercice 616 Somme de coefficients binomiaux

A l'aide de formules du binôme, simplifier :

1. $\sum_{k=0}^{[n/3]} C_n^{3k}$.
2. $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}(-3)^k$.
3. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$.
4. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\big((k+1)\theta\big)$.
5. $\cos a + C_n^1 \cos(a+b) + C_n^2 \cos(a+2b) + \cdots + C_n^n \cos(a+nb)$.

Correction ▼ [002951]

Exercice 617 Sommes trigonométriques

Simplifier :

1. $\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$.
2. $\sum_{k=1}^{n} \sin^3(k\theta)$.

Correction ▼ [002952]

Exercice 618 Équation trigonométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre :

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0. \end{cases}$$

Correction ▼ [002953]

Exercice 619 $\sum \cos^{2p}(x + k\pi/2p)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Simplifier $\cos^4\theta + \cos^4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\theta + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)$.
2. Simplifier $\cos^6\theta + \cos^6\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cdots + \cos^6\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right)$.
3. Simplifier $\cos^{2p}\theta + \cos^{2p}\left(\theta + \frac{\pi}{2p}\right) + \cdots + \cos^{2p}\left(\theta + \frac{(2p-1)\pi}{2p}\right)$.

Correction ▼ [002954]

Exercice 620 $\sum \cos(kx)/\cos x^k = 0$

Résoudre : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$.

Correction ▼ [002955]

Exercice 621 $\sum C_n^k x^{n-k} \cos(k\alpha) = 0$

Résoudre en x : $x^n + C_n^1 x^{n-1}\cos\alpha + \cdots + C_n^n \cos(n\alpha) = 0$.

Correction ▼ [002956]

Exercice 622 $\sum 2^{-k}/\cos\theta \ldots \cos(2^k\theta)$

Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k \cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta \ldots \cos 2^{k-1}\theta}.$$

Correction ▼ [002957]

Exercice 623 Calcul de $\tan(nx)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\tan(nx)$ en fonction de $\tan x$.

Correction ▼ [002958]

Exercice 624 $z = (1+ia)/(1-ia)$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Peut-on trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = \frac{1+ia}{1-ia}$?

Correction ▼ [002959]

Exercice 625 *IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Correction ▼ [005063]

Exercice 626 *IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction ▼ [005064]

Exercice 627 **IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
2. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = [0, 4\pi]$,
3. $\tan(5x) = 1$, $I = [0, \pi]$,
4. $\cos(2x) = \cos^2 x$, $I = [0, 2\pi]$,
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, $I = [0, 2\pi]$,
6. $\cos(nx) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,
7. $|\cos(nx)| = 1$,
8. $\sin(nx) = 0$,
9. $|\sin(nx)| = 1$,

10. $\sin x = \tan x$, $I = [0, 2\pi]$,
11. $\sin(2x) + \sin x = 0$, $I = [0, 2\pi]$,
12. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2$, $I = [-\pi, \pi]$.

Correction ▼ [005065]

Exercice 628 **IT

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$, $I = [-\pi, \pi]$,
2. $\sin x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = \mathbb{R}$,
3. $\cos x > \cos \frac{x}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
4. $\cos^2 x \geqslant \cos(2x)$, $I = [-\pi, \pi]$,
5. $\cos^2 x \leqslant \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
6. $\cos \frac{x}{3} \leqslant \sin \frac{x}{3}$, $I = [0, 2\pi]$.

Correction ▼ [005066]

Exercice 629 *I

Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Correction ▼ [005067]

Exercice 630 *I

Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Correction ▼ [005068]

Exercice 631 ***

Montrer que $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

Correction ▼ [005069]

Exercice 632 ***I

1. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour a élément donné de $]0, \pi[$ (penser à $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$).
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right)$.

Correction ▼ [005070]

Exercice 633 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{4\cos^2 x+1} + 16.2^{4\sin^2 x-3} = 20$.

Correction ▼ [005071]

Exercice 634 ***

Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Correction ▼ [005072]

Exercice 635 ****

On veut calculer $S = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$.

1. Calculer $\tan(5x)$ en fonction de $\tan x$.
2. En déduire un polynôme de degré 4 dont les racines sont $\tan 9^\circ$, $-\tan 27^\circ$, $-\tan 63^\circ$ et $\tan 81^\circ$ puis la valeur de S.

Correction ▼ [005073]

Exercice 636 ***

Combien l'équation

$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$

possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

Correction ▼ [005074]

Exercice 637 **I

On veut calculer $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$. Pour cela, on pose $a = 2\cos \frac{2\pi}{5}$, $b = 2\cos \frac{4\pi}{5}$ et $z = e^{2i\pi/5}$.

1. Vérifier que $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.
2. Vérifier que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3. En déduire un polynôme de degré 2 dont les racines sont a et b puis les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$.

Correction ▼ [005075]

Exercice 638 **I

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos^2 x$,
2. $x \mapsto \cos^4 x$,
3. $x \mapsto \sin^4 x$,
4. $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$,
5. $x \mapsto \sin^6 x$,
6. $x \mapsto \cos x \sin^6 x$,
7. $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$,
8. $x \mapsto \cos^3 x$.

Correction ▼ [005076]

Exercice 639 **

Calculer $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx$ et $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx$.

Correction ▼ [005077]

Exercice 640 **

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$,
2. $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$,
3. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos(2x)}$,

4. $\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}$.

Correction ▼ [005078]

Exercice 641 ***

Soit k un réel distinct de -1 et de 1.

1. Etudier les variations de $f_k\ :\ x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}$.
2. Calculer $\int_0^{\pi} f_k(x)\, dx$.

Correction ▼ [005079]

Exercice 642 ***I

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
2. $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

Correction ▼ [005080]

Exercice 643 ***

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l}\cos a+\cos b+\cos c=0\\ \sin a+\sin b+\sin c=0\end{array}\right.$ où a, b et c sont trois réels.

Correction ▼ [005081]

Exercice 644 **

Montrer que $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

Correction ▼ [005082]

Exercice 645 ***

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour x élément de $\left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}\right\}$.

Correction ▼ [005083]

Exercice 646 ***

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geqslant \frac{n}{4}$ (remarquer que si $x \in [0;1]$, $x^2 \leqslant x$).

Correction ▼ [005162]

---

24 104.99 Autre

Exercice 647

Montrer que tout nombre complexe z non réel de module 1 peut se mettre sous la forme $\frac{1+ir}{1-ir}$, où $r \in \mathbb{R}$. [000093]

Exercice 648

Soit u, v des nombres complexes non réels tels que $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq -1$. Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel. [000094]

Exercice 649

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(kx).$$

[000095]

Exercice 650

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib \ ; \ a,b\in\mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta\in\mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta=1$.
3. Vérifier que quel que soit $\omega\in\mathbb{C}$ il existe $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega-\alpha|<1$.
4. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant :
$$\alpha=\beta q+r \qquad \text{avec} \qquad |r|<|\beta|.$$
(Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$)

Correction ▼ Vidéo ■ [000096]

Exercice 651

Montrer que $\forall z\in\mathbb{C}$ $\dfrac{|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$. Étudier les cas d'égalité.

[000097]

Exercice 652

Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $ad-bc=1$ et $c\neq 0$. Montrer que si $z\neq -\dfrac{d}{c}$ alors $\mathrm{Im}(\dfrac{az+b}{cz+d}) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|(cz+d)|^2}$.

[000098]

Exercice 653

Que dire de trois complexes a, b, c non nuls tels que $|a+b+c|=|a|+|b|+|c|$. [000099]

Exercice 654

1. Étudier la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $z_0=4$, $z_{n+1}=f(z_n)$ où f est l'application de $\mathbb{C}$ sur lui-même définie par :
$$\forall z\in\mathbb{C}, f(z)=i+\frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})z.$$
Indication : on commencera par rechercher les coordonnées cartésiennes de l'unique point α tel que $f(\alpha)=\alpha$, puis on s'intéressera à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N}, x_n=z_n-\alpha.$$
2. On pose $\forall n\in\mathbb{N}, l_n=|z_{n+1}-z_n|$. Calculer
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} l_k$$
et interpréter géométriquement.

[000100]

Exercice 655 Examen octobre 1999

On définit une fonction f de $\mathbb{C}-\{i\}$ dans $\mathbb{C}-\{1\}$ en posant

$$f(z)=\frac{z+i}{z-i}.$$

1. On suppose z réel. Quel est le module de $f(z)$?
2. Trouver les nombres complexes z tels que $f(z)=z$.

[000101]

Exercice 656 Examen novembre 2001

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$.

1. Calculer les points fixes de la fonction f, c'est à dire les nombres complexes z tels que $f(z)=z$.
2. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z)$ est réel.

[000102]

Exercice 657

1. Montrer que si $x+y+z=a$, $yz+zx+xy=b$, $xyz=c$, alors x, y et z sont solutions de l'équation $Z^3-aZ^2+bZ-c=0$. Trouver x, y et z si on suppose $a=b=0$ et $c=-8$.
2. Résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 4 \\ x^3+y^3+z^3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Correction ▼ [000103]

Exercice 658 ***

Montrer que les solutions de l'équation $1+z+z^2+...+z^{n-1}-nz^n=0$ sont de module inférieur ou égal à 1.

Correction ▼ [005132]

Exercice 659 ***T ESIM 1993

Pour $z\in\mathbb{C}$, on pose $\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$, $\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})$ et $\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

1. Quels sont les nombres complexes z pour lesquels $\operatorname{th} z$ existe ?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\operatorname{th} z=0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\left\{\begin{array}{l} |\operatorname{Im} z|<\frac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z|<1 \end{array}\right.$.
4. Montrer que la fonction th réalise une bijection de $\Delta=\{z\in\mathbb{C}/\ |\operatorname{Im} z|<\frac{\pi}{4}\}$ sur $U=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|<1\}$.

Correction ▼ [005136]

25 105.01 Division euclidienne

Exercice 660

Effectuer la division euclidienne du polynôme $P=X^5-X^4+2X^3+X^2+4$ par $Q=X^2-1$. Même exercice lorsque $P=X^4-2X\cos(2\varphi)+1$ et $Q=X^2-2X\cos(\varphi)+1$. [000356]

Exercice 661

Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est 1 et celui de la division de P par $X-b$ est -1, $(a \neq b)$, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$? [000357]

Exercice 662

Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n+X+1 par le polynôme $(X-1)^2$. [000358]

Exercice 663

Pour quelles valeurs de m le polynôme $P=(X+1)^m-X^m-1$ est-il divisible par le polynôme $Q=X^2+X+1$? [000359]

Exercice 664

Montrer que le polynôme $P(X)-X$ divise le polynôme $P(P(X))-X$. [000360]

Exercice 665

Déterminer $a,b \in \mathbb{Z}$ de façon à ce que le polynôme $aX^{n+1}-bX^n+1$ soit divisible par le polynôme $(X-1)^2$. Calculer alors le quotient des deux polynômes. [000361]

Exercice 666

Existe-t-il un polynôme P de degré 7 tel que $(X-1)^4$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^4$ divise $P(X)-1$? [000362]

Exercice 667

Effectuer les divisions par puissances croissantes de :

1. $P=1$ par $Q=1-X$, à l'ordre n,
2. $P=1+X$ par $Q=1+X^2$ à l'ordre 5,
3. $P=X-\frac{X^3}{6}+\frac{X^5}{12}$ par $Q=1-2X^2+X^4$ à l'ordre 5.

[000363]

Exercice 668

Effectuer les divisions euclidiennes de
$3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3,
$3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^3+X+2,
X^4-X^3+X-2 par X^2-2X+4.

Correction ▼ [000364]

Exercice 669

Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de
$X^2-3iX-5(1+i)$ par $X-1+i$,
$4X^3+X^2$ par $X+1+i$. [000365]

Exercice 670

Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4+X^3-2X+1 \text{ par } X^2+X+1 \text{ à l'ordre } 2.$$

Correction ▼ [000366]

Exercice 671

Soit a et b deux nombres complexes distincts, m et n deux entiers naturels. Montrer que si les polynômes $(X-a)^m$ et $(X-b)^n$ divisent un polynôme P, alors le polynôme $(X-a)^m(X-b)^n$ divise P. [000367]

Exercice 672

Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division de $X^n + X + b$ par $(X-a)^2$? [000368]

Exercice 673

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$. Trouver le quotient si $n = 2$. [000369]

Exercice 674

Chercher tous les polynômes P tels que $P+1$ soit divisible par $(X-1)^4$ et $P-1$ par $(X+1)^4$.

Indications. Commencer par trouver une solution particulière P_0 avec l'une des méthode suivantes :

1. à partir de la relation de Bézout entre $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$;
2. en considérant le polynôme dérivé P_0' et en cherchant un polynôme de degré minimal.

Montrer que P convient si et seulement si le polynôme $P - P_0$ est divisible par $(X-1)^4(X+1)^4$, et en déduire toutes les solutions du problème.

Correction ▼ Vidéo ■ [000370]

Exercice 675

Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$:

1. Suivant les puissances décroissantes.
2. À l'ordre 4 (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^5) suivant les puissances croissantes.

Correction ▼ [000371]

Exercice 676

Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$. [000372]

Exercice 677

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin aX + \cos a)^n$ par $X^2 + 1$. [000373]

Exercice 678

Soit P un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $X-1$ est 7 et par $X+5$ est 3. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 4X - 5$? [000374]

Exercice 679

Effectuer la division euclidienne de $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$.

Correction ▼ [000375]

Exercice 680

Soit $n \geqslant 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X-1)^2$. [000376]

Exercice 681

Soient $P, Q \in K[X]$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $P(X^3) + XQ(X^3)$. Montrer que $P(1) = Q(1) = 0$. Réciproque ? [000377]

Exercice 682

Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000378]

Exercice 683 Décomposition en puissances croissantes

Soit $A \in K[X]$ de degré > 0. Montrer que pour tout polynôme $P \in K_n[X]$, il existe des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ uniques vérifiant :

$$\begin{cases} \deg P_i < \deg A \\ P = P_0 + P_1 A + \dots + P_n A^n. \end{cases}$$

[003196]

Exercice 684 Linéarité du reste et du quotient

Soit $B \in K[X]$ de degré $n > 0$. On considère les applications :

$$\Phi : K[X] \to K_{n-1}[X], P \mapsto R$$

et

$$\Psi : K[X] \to K[X], P \mapsto Q \quad \text{avec } P = QB + R.$$

1. Montrer que Φ et Ψ sont linéaires. Chercher leurs noyaux et leurs images.
2. Simplifier $\Phi(P_1 P_2)$.

[003197]

Exercice 685 Endomorphisme $P \mapsto AP$ mod B

Soit $E = K_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$, et $\varphi : E \to E, P \mapsto$ reste de la div. euclid. de AP par B.
Chercher $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$.

Correction ▼ [003198]

Exercice 686 Congruences

Soient $P \in K[X]$, $a, b \in K$ distincts, et $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?
2. Trouver le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Correction ▼ [003199]

Exercice 687 Congruences

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{Q}_3[X]$ divisibles par $X+1$ et dont les restes des divisions par $X+2, X+3, X+4$ sont égaux.

Correction ▼ [003200]

Exercice 688 Calcul de pgcd

Calculer le pgcd de P et Q pour :

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$
   $Q = X^3 + X^2 - X - 1$
2. $P = X^4 - 10X^2 + 1$
   $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$
3. $P = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$
   $Q = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$

Correction ▼ [003201]

Exercice 689 Coefficients de Bézout

Montrer que les polynômes P et Q suivants sont premiers entre eux. Trouver $U,V \in K[X]$ tels que $UP+VQ=1$.

1. $P = X^4+X^3-2X+1$
   $Q = X^2+X+1$
2. $P = X^3+X^2+1$
   $Q = X^3+X+1$

Correction ▼ [003202]

Exercice 690 Division de $(X+1)^n - X^n - 1$ par X^2+X+1

Chercher le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par X^2+X+1.

Correction ▼ [003203]

Exercice 691 Ensi P 90

Pour quels $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $(1+X^4)^n - X^n$ est-il divisible par $1+X+X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$?

Correction ▼ [003204]

Exercice 692 Division de $(X-2)^2n + (X-1)^n - 1$ par $(X-1)(X-2)$

Soit $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

1. Montrer que P_n est divisible par $X-1$ et par $X-2$. On note Q_1 et Q_2 les quotients correspondant.
2. Montrer que P_n est divisible par $(X-1)(X-2)$ et que le quotient est $Q_2 - Q_1$.
3. Montrer que ce quotient est égal à :

$$\Big((X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + \cdots - (X-2) + 1\Big) + \Big((X-1)^{n-2} + (X-1)^{n-3} + \cdots + (X-1) + 1\Big).$$

Correction ▼ [003205]

Exercice 693 Calcul de restes

Trouver les restes des divisions euclidiennes :

1. de X^{50} par X^2-3X+2.
2. de $\big(X+\sqrt{3}\big)^{17}$ par X^2+1.
3. de $X^8 - 32X^2 + 48$ par $\big(X-\sqrt{2}\big)^3$.

Correction ▼ [003206]

Exercice 694 Divisibilité

Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que X^2+X+1 divise $X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$.

Correction ▼ [003207]

Exercice 695 Congruences

Soit $P \in K[X]$ tel que les restes des divisions de P par X^2+1 et X^2-1 valent respectivement $2X-2$ et $-4X$. Quel est le reste de la division de P par X^4-1 ?

Correction ▼ [003208]

Exercice 696 pgcd(X^n-1, X^m-1)

Soient $m,n \in \mathbb{N}^*$. Chercher pgcd(X^n-1, X^m-1).

Correction ▼ [003209]

Exercice 697 Degré minimal dans la formule de Bézout

Soient $P,Q \in K[X]$ non nuls et $D = \mathrm{pgcd}(P,Q)$.

1. Démontrer qu'il existe $U,V \in K[X]$ uniques tels que : $\begin{cases} UP+VQ = D \\ \deg U < \deg Q - \deg D \\ \deg V < \deg P - \deg D. \end{cases}$
2. Montrer que la méthode des divisions euclidiennes fournit U et V.

Correction ▼ [003210]

Exercice 698 Application $(U,V) \mapsto UA+VB$

Soient $A,B \in K[X]$, $p = \deg A$, $q = \deg B$. On considère l'application :

$$\Phi : K_{q-1}[X] \times K_{p-1}[X] \to K_{p+q-1}[X], (U,V) \mapsto UA+VB$$

Démontrer que : $A \wedge B = 1 \iff \Phi$ est bijective. [003211]

Exercice 699 $\mathrm{pgcd}(P(X),P(-X))$ et $\mathrm{ppcm}(P(X),P(-X))$

Soit $P \in K[X]$. Démontrer que $\mathrm{pgcd}(P(X),P(-X))$ et $\mathrm{ppcm}(P(X),P(-X))$ sont pairs ou impairs. [003212]

Exercice 700 $A \circ P | B \circ P \Rightarrow A|B$

Soient $A,B,P \in K[X]$ avec P non constant. Montrer que si $A \circ P$ divise $B \circ P$, alors A divise B. [003213]

Exercice 701 ***

Division euclidienne de $P = \sin aX^n - \sin(na)X + \sin((n-1)a)$ par $Q = X^2 - 2X\cos a + 1$, a réel donné.

Correction ▼ [005323]

Exercice 702

1. Effectuer la division euclidienne de A par B :
   (a) $A = 3X^5 + 4X^2 + 1,\ B = X^2 + 2X + 3$
   (b) $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1,\ B = X^3 + X + 2$
   (c) $A = X^4 - X^3 + X - 2,\ B = X^2 - 2X + 4$
   (d) $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9,\ B = X^2 - 5X + 4$
2. Effectuer la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre k (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^{k+1}) :
   (a) $A = 1 - 2X + X^3 + X^4,\ B = 1 + 2X + X^2,\ k = 2$
   (b) $A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6,\ B = 1 + X^2 + X^3,\ k = 4$

Correction ▼ Vidéo ■ [006955]

Exercice 703

À quelle condition sur $a,b,c \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Correction ▼ Vidéo ■ [006956]

26 105.02 Pgcd

Exercice 704

Calculer pgcd(P,Q) lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Correction ▼ [000379]

Exercice 705

Déterminer le pgcd des polynômes suivants :
$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$,
$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$,
$X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

Correction ▼ [000380]

Exercice 706

Déterminer $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3+1)A + (X^2+X+1)B = 1$. [000381]

Exercice 707

Montrer qu'il existe deux polynômes : U, V, vérifiant : $(\star)$ $(X-1)^n U + X^n V = 1$. Déterminer U_1 et V_1 de degré strictement inférieur à n, satisfaisant cette égalité. En déduire tous les polynômes U, V vérifiant $(\star)$. [000382]

Exercice 708

Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux.

1. Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux où n, m sont deux entiers positifs.
2. Montrer de même que $P+Q$ et PQ sont premiers entre eux.

[000383]

Exercice 709

Soit n un entier positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes $(X^n - 1)$ et $(X-1)^n$.
2. Pour $n = 3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que $(X^3-1)U + (X-1)^3 V = X - 1$. En donner un.

[000384]

Exercice 710

Montrer que les éléments $X^2 + X$, $X^2 - X$, $X^2 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux, mais ne sont pas premiers entre eux deux à deux. [000385]

Exercice 711

Trouver tous les polynômes U et V de $\mathbf{R}[X]$ tels que $AU + BV$ soit un pgcd de A et B avec $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$. [000386]

Exercice 712

Calculer le pgcd D des polynômes A et B définis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

1. $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
2. $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Correction ▼ [000387]

Exercice 713

Trouver le pgcd des trois polynômes :

$$\begin{aligned} A &= X^5+4X^4+6X^3+6X^2+5X+2 \\ B &= X^2+3X+2 \\ C &= X^3+2X^2+X+2. \end{aligned}$$

[000388]

Exercice 714

Soit les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} A &= (X+3)^2(X+1)(X^2+1)^3 \\ B &= (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1) \\ C &= (X+3)(X+2)(X^2+1)^2. \end{aligned}$$

1. Combien A possède-t-il de diviseurs normalisés ? et B ? et C ?
2. Écrire le pgcd et le ppcm de A et B.
3. Écrire le pgcd et le ppcm des trois polynômes A, B et C.

[000389]

Exercice 715

1. Trouver le pgcd de $X^{24}-1$ et $X^{15}-1$; le pgcd de $X^{280}-1$ et $X^{60}-1$.
2. Montrer que quels que soient les entiers positifs b et q, X^b-1 divise $X^{bq}-1$. En déduire que le reste de la division de X^a-1 par X^b-1 est X^r-1 où r est le reste de la division dans $\mathbb{N}$ de a par b. Quel est alors le pgcd de X^a-1 et X^b-1 ? Application : trouver le pgcd de $X^{5400}-1$ et $X^{1920}-1$.
3. P étant un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$, et a et b deux entiers naturels, quel est le pgcd de P^a-1 et P^b-1 ? Indication : utiliser le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

[000390]

Exercice 716

Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ et $B \in \mathbb{C}[X]$.

1. A-t-on $\mathrm{pgcd}(A,B)=1 \iff \mathrm{pgcd}(A+B,AB)=1$?
2. A-t-on $\mathrm{pgcd}(A,B)=\mathrm{pgcd}(A+B,AB)$?

[000391]

Exercice 717

Soit n un entier strictement positif.

1. Démontrer qu'il existe un unique couple de polynômes P et Q de degrés strictement inférieurs à n tels que $(1-X)^nP(X)+X^nQ(X)=1$.
2. Démontrer que $P(1-X)=Q(X)$ et $Q(1-X)=P(X)$.
3. Démontrer qu'il existe une constante a telle que

$$(1-X)P'(X)-nP(X)=aX^{n-1}.$$

En déduire les coefficients de P et la valeur de a.

Réponse : $a = -(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}$. [000392]

Exercice 718

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$, premiers entre eux, tels que $P^2+Q^2 = (X^2+1)^2$. En déduire que l'équation $x^2+y^2 = z^2$ a une infinité de solutions (non proportionnelles) dans $\mathbb{Z}$. [000393]

Exercice 719

1. Montrer que les polynômes $X-1$ et $X-2$ sont premiers entre eux et en déduire $d = \text{pgcd}((X-1)^2,(X-2)^3)$ et des U et V polynômes tels que
$$U(X-1)^2+V(X-2)^3 = d.$$
2. Déterminer le polynôme P, de degré minimal, tel que le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $2X$ et le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)^3$ est $3X$.

[000394]

Exercice 720

Montrer que les polynômes complexes $P = X^{1998}+X+1$ et $Q = X^5+X+1$ sont premiers entre eux. [000395]

Exercice 721 **IT

Déterminer le PGCD de $X^6-7X^4+8X^3-7X+7$ et $3X^5-7X^3+3X^2-7$.

Correction ▼ [005317]

Exercice 722

1. Déterminer les pgcd des polynômes suivants :
   (a) X^3-X^2-X-2 et $X^5-2X^4+X^2-X-2$
   (b) X^4+X^3-2X+1 et X^3+X+1
   (c) $X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$ et X^4+2X^3+X+2
   (d) $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et $X^n-nX+n-1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
2. Calculer le pgcd D des polynômes A et B ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $AU+BV = D$.
   (a) $A = X^5+3X^4+2X^3-X^2-3X-2$
   et $B = X^4+2X^3+2X^2+7X+6$
   (b) $A = X^6-2X^5+2X^4-3X^3+3X^2-2X$
   et $B = X^4-2X^3+X^2-X+1$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006957]

Exercice 723

1. Montrer que si A et B sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, alors le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B, ainsi que $\text{pgcd}(A,B)$, sont aussi à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
2. Soit $a,b,c \in \mathbb{C}^*$ distincts, et $0 < p < q < r$ des entiers. Montrer que si $P(X) = (X-a)^p(X-b)^q(X-c)^r$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}$, alors $a,b,c \in \mathbb{Q}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006958]

27 105.03 Racine, décomposition en facteurs irréductibles

Exercice 724

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.
2. Montrer que le polynôme $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

[000396]

Exercice 725

Soit $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers premiers entre eux (c'est à dire tels que les seuls diviseurs communs à tous les a_i soient -1 et 1). Montrer que si $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux est une racine rationnelle de P alors p divise a_0 et q divise a_n. [000397]

Exercice 726

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n.

1. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{Q}$ alors il n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P, de multiplicité strictement plus grande que $\frac{n}{2}$.Montrer que λ est rationnel.

[000398]

Exercice 727

Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple. Application : déterminer les racines du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

[000399]

Exercice 728

Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles : $P = X^4 + X^2 + 1$, $Q = X^{2n} + 1$, $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (on cherchera les racines doubles de S).

[000400]

Exercice 729

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.

Correction ▼ [000401]

Exercice 730

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $X - a$ divise $X^n - a^n$. [000402]

Exercice 731

Décomposer $X^{12} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. [000403]

Exercice 732

Prouver que B divise A, où :
$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$,
$A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$,
$A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$. [000404]

Exercice 733

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $n \in \mathbb{Z}$; notons $m = P(n)$; $(\deg(P) \geqslant 1)$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z}, m$ divise $P(n+km)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans $\mathbb{Z}[X]$, non constant, tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ soit premier.

[000405]

Exercice 734

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$ (on utilisera la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$). *Indications :*

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $ab = c^2 - d^2$, vérifier que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$.
2. Résoudre le problème pour P de degré 2.
3. Conclure.

[000406]

Exercice 735

Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on suppose $\sin n\theta \neq 0$. Déterminer les racines du polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin k\theta \, X^k$. Vérifier que ces racines sont toutes réelles. [000407]

Exercice 736

Soit $a \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$, premiers entre eux. On suppose que a est racine double de $P^2 + Q^2$. Montrer que a est racine de $P'^2 + Q'^2$. [000408]

Exercice 737

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

Correction ▼ [000409]

Exercice 738

Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Correction ▼ Vidéo ■ [000410]

Exercice 739

Montrer que le polynôme $X^3 + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$. [000411]

Exercice 740

Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. $X^3 - 3$.
2. $X^{12} - 1$.

Correction ▼ [000412]

Exercice 741

Quelle est la décomposition de X^6+1 en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$? [000413]

Exercice 742

Soit P le polynôme X^4+2X^2+1. Déterminer les multiplicités des racines i et $-i$, de deux façons différentes : soit en décomposant P dans $\mathbb{C}[X]$, soit en utilisant le polynôme dérivé de P. [000414]

Exercice 743

Soit le polynôme $P = X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

[000415]

Exercice 744

Soit E le polynôme du troisième degré : aX^3+bX^2+cX+d avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, et soit x_1, x_2, x_3 ses trois racines dans $\mathbb{C}$. Trouver un polynôme ayant pour racines x_1x_2, x_2x_3 et x_3x_1. [000416]

Exercice 745

Soient x_1,x_2,x_3 les racines de X^3-2X^2+X+3. Calculer $x_1^3+x_2^3+x_3^3$. [000417]

Exercice 746

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il y a un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers ayant toutes leurs racines de module inférieur ou égal à 1. [000418]

Exercice 747

Soit $n \geqslant 2$ et $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$. P_n a-t-il une racine double ? [000419]

Exercice 748

Résoudre les équations :

1. $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.

[000420]

Exercice 749

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme P^2+1 n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

[000421]

Exercice 750

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Quel est le degré de P ?

2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2p+1}) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

[000422]

Exercice 751

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. X^6+1.
2. $X^9+X^6+X^3+1$.

Correction ▼ [000423]

Exercice 752 Factorisation de X^n-1

Factoriser X^n-1 sur $\mathbb{C}$.

1. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Calculer également $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)$.
3. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\prod_{0\leqslant k,\ell<n, k\neq\ell}(\omega^k-\omega^\ell)$.

Correction ▼ [003214]

Exercice 753 Mines MP 1999

Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^{2k}-2\omega^k\cos\theta+1) = 2(1-\cos(n\theta))$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Correction ▼ [003215]

Exercice 754 Racines de j et j^2

Montrer que si $p \leqslant n$, alors $X^{2^p}+X^{2^{p-1}}+1$ divise $X^{2^n}+X^{2^{n-1}}+1$. [003216]

Exercice 755 $X^2-2X\cos\theta+1$ divise $X^{2n}-2X^n\cos(n\theta)+1$

Montrer que $X^2-2X\cos\theta+1$ divise $X^{2n}-2X^n\cos n\theta+1$. Pour $\sin\theta\neq 0$, chercher le quotient.

Correction ▼ [003217]

Exercice 756 $X^2-2X\cos\theta+1$ divise $X^{n+1}\cos(n-1)\theta-X^n\cos n\theta-X\cos\theta+1$

Montrer que $X^2-2X\cos\theta+1$ divise $X^{n+1}\cos(n-1)\theta-X^n\cos n\theta-X\cos\theta+1$, puis déterminer le quotient.

Correction ▼ [003218]

Exercice 757 X^8+X^4+1 divise $X^{8n}+pX^{4n}+q$

Donner une CNS sur $p,q\in\mathbb{C}$ pour que X^8+X^4+1 divise $X^{8n}+pX^{4n}+q$ ($n\in\mathbb{N}^*$ fixé).

Correction ▼ [003219]

Exercice 758 Racines rationnelles

Factoriser $P(X) = 3X^4+11X^3+20X^2+7X-5$, sachant qu'il existe des racines rationnelles.

Correction ▼ [003220]

Exercice 759 Équation de degré 4 tq $x_1x_2=5$

Trouver les racines de $P(X) = X^4-3X^3+6X^2-15X+5$ sachant que deux racines, x_1 et x_2, vérifient : $x_1x_2=5$ (on introduira le polynôme $Q = X^4P(5/X)$).

Correction ▼ [003221]

Exercice 760 Racines multiples

Factoriser $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ sachant qu'il admet une racine triple.

Correction ▼ [003222]

Exercice 761 Recherche d'une racine triple

Soit $P = X^5 + aX^2 + 15X - 6i$. Trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que P a une racine triple dans $\mathbb{C}$. Factoriser alors P.

Correction ▼ [003223]

Exercice 762 Ensi P 90

Donner une condition sur λ pour que l'équation : $x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 + 2x - 1 = 0$ ait une racine au moins triple.

Correction ▼ [003224]

Exercice 763 $x_1 + x_2 = 1$

Soient $p, q \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^5 + pX + q$. Donner une CNS sur p et q pour que deux des racines de P aient pour somme 1.

Correction ▼ [003225]

Exercice 764 Factorisation

Factoriser
$$1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!}.$$

Correction ▼ [003226]

Exercice 765 $X - 1 \mid P(X^n) \Rightarrow X - 1 \mid P$

Soient $P, Q \in K[X]$.

1. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$, alors P est divisible par $X - 1$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.
2. Montrer que si $P(X^3) + XQ(X^3)$ est divisible par $X^2 + X + 1$, alors P et Q sont divisibles par $X - 1$.

[003227]

Exercice 766 Racines de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin k\theta) X^k$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin n\theta \neq 0$. Démontrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin k\theta) X^k$ a toutes ses racines réelles.

Correction ▼ [003228]

Exercice 767

Démontrer que $1 + X + X^n$ n'a que des racines simples. [003229]

Exercice 768 P' divise P

Quels sont les polynômes $P \in K[X]$ tels que P' divise P ?

Correction ▼ [003230]

Exercice 769 Équations fonctionnelles

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que ...

1. $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.
2. $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

3. $P(X)P(X+2)+P(X^2)=0$.

Correction ▼ [003231]

Exercice 770 P à racines réelles simples $=>$ P^2+a^2 à racines simples

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles.

1. Démontrer que les racines de P' sont aussi réelles.
2. En déduire que : $\forall\ a\in\mathbb{R}^*$, les racines de P^2+a^2 sont simples.

[003232]

Exercice 771 P et Q ont même module

Soient $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ tels que : $\forall\ z\in\mathbb{C},\ |P(z)|=|Q(z)|$. Démontrer qu'il existe $u\in\mathbb{C},|u|=1$ tel que $P=uQ$.

Correction ▼ [003233]

Exercice 772 Valeur moyenne

Soient $z_0,z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ tels que : $\forall\ P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a $P(z_0)=\frac{P(z_1)+\dots+P(z_n)}{n}$.
On note $\Phi(X)=\prod_{i=1}^n(X-z_i)$.

1. Calculer $\frac{\Phi(z_0)}{z_0-z_k}$.
2. En déduire que $\Phi(X)=\frac{(X-z_0)\Phi'(X)}{n}+\Phi(z_0)$.
3. Démontrer que $z_1,\dots,z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0.
4. Réciproque ?

Correction ▼ [003234]

Exercice 773 $P(x)\neq 14$

Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x)=7$ pour au moins 4 valeurs distinctes $x\in\mathbb{Z}$.
Démontrer que : $\forall\ x\in\mathbb{Z}$, on a $P(x)\neq 14$. [003235]

Exercice 774 Nombre algébrique rationnel

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$. On dit que α est *algébrique* s'il existe un polynôme $P\in\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha)=0$.
Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant $P(\alpha)=0$ est appelé : *polynôme minimal de* α.

1. Soit α algébrique de polynôme minimal P. Démontrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que α est racine simple de P.
2. Soit α algébrique, et $P\in\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha)=0$. On suppose que la multiplicité de α dans P est strictement supérieure à $\frac{1}{2}\deg P$. Démontrer que $\alpha\in\mathbb{Q}$.

[003236]

Exercice 775 $P(\sqrt{2})=0$

Soit $P\in\mathbb{Q}[X]$ tel que $P\left(\sqrt{2}\right)=0$. Démontrer que $-\sqrt{2}$ est aussi racine de P avec la même multiplicité que $\sqrt{2}$.
[003237]

Exercice 776 Polynôme minimal de $2\cos(2\pi/7)$

Montrer que $x=2\cos\frac{2\pi}{7}$ est racine de X^3+X^2-2X-1. Quelles sont les autres racines ?

Correction ▼ [003238]

Exercice 777 Racines réelles simples

Soit $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles simples.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)P''(x) \leqslant P'^2(x)$.
2. Démontrer que : $\forall\, k \in \{1,\dots,n-1\}$, $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Correction ▼ [003239]

Exercice 778 Méthode de Ferrari

Soit $P = X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 18X - 8$.
Trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P - Q^2) = 2$, et $P - Q^2$ a une racine double. Factoriser alors P sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [003240]

Exercice 779 Pgcd $\neq 1 \Leftrightarrow$ racine commune

Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si P et Q n'ont pas de racine en commun dans $\mathbb{C}$. [003241]

Exercice 780 Mines MP 2001

Soit K un corps de caractéristique p.

1. Montrer que $\sigma\ :\ x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps.
2. Montrer que σ est surjectif si et seulement si tout polynôme $P \in K[X]$ irréductible vérifie $P' \neq 0$.

Correction ▼ [003242]

Exercice 781 Centrale MP 2001

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $V(x)$ le nombre de changements de signe dans la suite $(P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x))$ en convenant de retirer les termes nuls. Soient $\alpha < \beta$ deux réels non racines de P. Montrer que le nombre de racines de P dans $[\alpha, \beta]$, comptées avec leur ordre de multiplicité, a même parité que $V(\alpha) - V(\beta)$ et que $V(\alpha) - V(\beta) \geqslant 0$.

Correction ▼ [003243]

Exercice 782 X MP* 2004

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d dont toutes les racines sont de module strictement inférieur à 1. Pour $\omega \in \mathbb{U}$ on note $\overline{P}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P et $Q(X) = P(X) + \omega X^d \overline{P}(1/X)$. Montrer que les racines de Q sont de module 1.

Correction ▼ [003244]

Exercice 783 X MP* 2005

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $|a_0| + \dots + |a_{n-1}| < a_n$. Soit $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos(nx)$. Montrer que les zéros de f sont tous réels (cad. si $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $f(x) \neq 0$).

Correction ▼ [003245]

Exercice 784 Factorisation sur $\mathbb{R}$ de $X^8 + X^4 + 1$

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [003246]

Exercice 785 Polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$

Démontrer que $1 + (X-1)^2(X-3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Correction ▼ [003247]

Exercice 786 Polynômes positifs sur $\mathbb{R}$

Soit $\mathscr{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \exists\, Q, R \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = Q^2 + R^2\}$.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par multiplication.

2. Montrer que $\mathscr{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\}$.
3. (Centrale MP 2000, avec Maple) $P = 65X^4 - 134X^3 + 190X^2 - 70X + 29$. Trouver A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Correction ▼ [003248]

Exercice 787 Lemme de Gauss

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On appelle *contenu de* P le pgcd des coefficients de P (notation : cont(P)).

1. Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ avec $\mathrm{cont}(P) = 1$, et $R = PQ$. Soit p un facteur premier de cont(R).
   (a) Si p est premier avec le coefficient constant de P, Démontrer que p divise tous les coefficients de Q.
   (b) Si p divise le coefficient constant de P, se ramener au cas précédent.
   (c) En déduire que cont(Q) = cont(R).
2. Lorsque $\mathrm{cont}(P) \neq 1$, trouver cont(PQ).
3. Application : Soit $R \in \mathbb{Z}[X]$, et $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $R = PQ$. Montrer qu'il existe $P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ proportionnels à P et Q et tels que $R = P_1Q_1$.
   (*cad : un polynôme à coefficients entiers réductible sur* $\mathbb{Q}$ *est aussi réductible sur* $\mathbb{Z}$)

[003249]

Exercice 788 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$

Démontrer que $X^4 + X + 1$ et $X^6 + X^2 + 1$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$. [003250]

Exercice 789 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ distincts.

1. Montrer que $(X - a_1)\dots(X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Même question avec $(X - a_1)\dots(X - a_n) + 1$, n impair.

Correction ▼ [003251]

Exercice 790 Critère d'irréductibilité d'Eisenstein

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0X^0$ et p un nombre premier tel que :

$$a_0 \equiv 0 (\bmod p), \quad \dots, \quad a_{n-1} \equiv 0 (\bmod p), \quad a_0 \not\equiv 0 (\bmod p^2).$$

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Correction ▼ [003252]

Exercice 791 Irréductibilité de $X^p - a$

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, $a \in K$ et $p \in \mathbb{N}$ premier. Montrer que le polynôme $X^p - a$ est irréductible sur K si et seulement s'il n'a pas de racine dans K.

Indication ▼ Correction ▼ [003253]

Exercice 792 **T

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Correction ▼ [005318]

Exercice 793 ***

Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes R et S à coefficients réels tels que $P = R^2 + S^2$.

Correction ▼ [005319]

Exercice 794 ****I Théorème de LUCAS

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que les racines de P' sont barycentres à coefficients positifs des racines de P (on dit que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P). Indication : calculer $\frac{P'}{P}$.

Correction ▼ [005324]

Exercice 795 ***

Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.

Correction ▼ [005325]

Exercice 796 **T

Déterminer $a \in \mathbb{C}$ tel que $P = X^5 - 209X + a$ admette deux zéros dont le produit vaut 1.

Correction ▼ [005328]

Exercice 797 ***T

Soit $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant 5}$ la famille des racines de $P = X^5 + 2X^4 - X - 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{5} \frac{a_k+2}{a_k-1}$.

Correction ▼ [005329]

Exercice 798

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 - 2X^3 \cos a + 1$ où a est un réel donné dans $[0, \pi]$.

Correction ▼ [005342]

Exercice 799

Former une équation du sixième degré dont les racines sont les $\sin \frac{k\pi}{7}$ où $k \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ puis montrer que ces six nombres sont irrationnels.

Correction ▼ [005345]

Exercice 800

Déterminer λ et μ complexes tels que les zéros de $z^4 - 4z^3 - 36z^2 + \lambda z + \mu$ soient en progression arithmétique. Résoudre alors l'équation.

Correction ▼ [005349]

Exercice 801

Soient x_1, x_2, x_3 les zéros de $X^3 + 2X - 1$. Calculer $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Correction ▼ [005350]

Exercice 802

Soient x_1,..., x_8 les zéros de $X^8 + X^7 - X + 3$. Calculer $\sum \frac{x_1}{x_2 x_3}$ (168 termes).

Correction ▼ [005351]

Exercice 803

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :
$$a)\ X^3 - 3 \qquad b)\ X^{12} - 1 \qquad c)\ X^6 + 1 \qquad d)\ X^9 + X^6 + X^3 + 1$$
2. Factoriser les polynômes suivants :
$$a)\ X^2 + (3i - 1)X - 2 - i \qquad b)\ X^3 + (4 + i)X^2 + (5 - 2i)X + 2 - 3i$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006959]

Exercice 804

Trouver tous les polynômes P qui vérifient la relation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006960]

Exercice 805

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \qquad P\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

Montrer alors que toutes les racines de P sont réelles, simples, et appartiennent à l'intervalle $[-2,2]$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006961]

Exercice 806

1. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Démontrer que si P admet une racine dans $\mathbb{Z}$, alors celle-ci divise a_0.
2. Les polynômes $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$?

Correction ▼ Vidéo ■ [006962]

Exercice 807

Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i = 0, \ldots, n$, on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

(les L_i sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange*). Calculer $L_i(a_j)$.
Soient $b_0, \ldots, b_n$ des réels fixés. Montrer que $P(X) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(X)$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vérifie :

$$P(a_j) = b_j \quad \text{pour tout } j = 0, \ldots, n.$$

Application. Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006963]

28 105.04 Fraction rationnelle

Exercice 808

Décomposer les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3}{X^3+1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3}{X^3-1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^2} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ en remarquant que } F(jX) = F(X)$$

$$\frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{3X^5+2X^4+X^2+3X+2}{X^4+1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{X^{2n}+1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

[000443]

Exercice 809

1. Décomposer $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
2. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
3. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
4. Décomposer $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
5. Décomposer $\frac{X}{X^2-4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
6. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
7. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
8. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
9. Décomposer $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
10. Décomposer $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
11. Décomposer $\frac{X+i}{X^2+i}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
12. Décomposer $\frac{X}{(X+i)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
13. Décomposer $\frac{X^2+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
14. Décomposer $\frac{X}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
15. Décomposer $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
16. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
17. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
18. Décomposer $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
19. Décomposer $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
20. Décomposer $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Correction ▼

[000444]

Exercice 810

Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000445]

Exercice 811

Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000446]

Exercice 812

Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3}$.

Correction ▼ [000447]

Exercice 813

Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^nF(X)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$. [000448]

Exercice 814

Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = g'$. [000449]

Exercice 815

On appelle valuation une application $v : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ telle que : $\lambda \in \mathbb{C}^* \Rrightarrow v(\lambda) = 0, v(0) = \infty, \exists a \in \mathbb{C}(X) : v(a) = 1$

$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(fg) = v(f)+v(g)$$

$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(f+g) \geqslant \min(v(f),v(g))$$

(avec les convention évidentes $k+\infty = \infty, \forall k \geqslant 1 : k\infty = \infty, 0\infty = 0$, etc.) Déterminer toutes les valuations de $\mathbb{C}(X)$ et montrer la formule (la somme portant sur toutes les valuations) :

$$\forall f \in \mathbb{C}(X) - \{0\}, \sum_v v(f) = 0.$$

[000450]

Exercice 816 Substitution de fractions

Soit $F \in K(X)$ non constante et $P \in K[X]$, $P \neq 0$.

1. Montrer que $P \circ F \neq 0$.
2. Montrer que l'application$K(X) \to K(X), G \mapsto G \circ F$ est un morphisme injectif d'algèbre.
3. A quelle condition est-il surjectif ?
4. Montrer que tous les isomorphismes de corps de $K(X)$ sont de cette forme.

Correction ▼ [003270]

Exercice 817 Multiplicité des pôles

Soient $F, G_0, \dots, G_{n-1} \in K(X)$ telles que $F^n + G_{n-1}F^{n-1} + \dots + G_0 = 0$.
Montrer que l'ensemble des pôles de F est inclus dans la réunion des ensembles des pôles des G_i. [003271]

Exercice 818 Ensemble image d'une fonction rationelle

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Étudier $F(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles}\})$.

Correction ▼ [003272]

Exercice 819 $F \circ G$ est un polynôme

Trouver tous les couples $(F,G) \in \left(\mathbb{C}(X)\right)^2$ tels que $F \circ G \in \mathbb{C}[X]$ (utiliser l'exercice 818).

Correction ▼ [003273]

Exercice 820 Fractions invariantes

1. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(e^{2i\pi/n}X) = F(X)$. Montrer qu'il existe une unique fraction $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(X) = G(X^n)$.
2. Application : Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X+e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}}$.

Correction ▼ [003274]

Exercice 821 Fractions invariantes

Soit $H = \{F \in K(X) \text{ tel que } F(X)=F(\frac{1}{X})\}$.

1. Montrer que : $F \in H \Leftrightarrow \exists\, G \in K(X)$ tel que $F(X)=G\left(X+\frac{1}{X}\right)$.
2. Montrer que H est un sous-corps de $K(X)$.
3. Que vaut $\dim_H(K(X))$? Donner une base de $K(X)$ sur H.

Correction ▼ [003275]

Exercice 822 Formule de Taylor

Soit $F \in K(X)$ définie en $a \in K$. Démontrer qu'il existe une fraction G_n définie en a telle que :

$$F(X) = F(a) + (X-a)F'(a) + \cdots + (X-a)^{n-1}\frac{F^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (X-a)^n G_n(X).$$

[003276]

Exercice 823 Dérivée de $1/(x^2+1)$

Soit $F = \frac{1}{X^2+1}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{Z}_n[X]$ tel que $F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2+1)^n}$.
Montrer que les racines de P_n sont réelles et simples. [003277]

Exercice 824 Fractions de degré négatif

Soit $A = \{F \in K(X) \text{ tels que } \deg F \leqslant 0\}$. Démontrer que A est une sous-algèbre de $K(X)$.
Chercher ses idéaux.

Correction ▼ [003278]

Exercice 825 Décompositions pratiques des fractions rationnelles

Éléments de 1ère espèce

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2-1)^5} =& \frac{1}{32(x-1)^5} - \frac{5}{64(x-1)^4} + \frac{15}{128(x-1)^3} - \frac{35}{256(x-1)^2} + \frac{35}{256(x-1)} \\
& - \frac{35}{256(x+1)} - \frac{35}{256(x+1)^2} - \frac{15}{128(x+1)^3} - \frac{15}{64(x+1)^4} - \frac{1}{32(x+1)^5} \\
\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} =& \frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
\frac{x^3+x+1}{x^4(x-1)^3} =& -\frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^2} - \frac{17}{x} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{17}{x-1} \\
\frac{(x^2-x+1)^2}{x^2(x-1)^2} =& 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
\frac{x^2}{(x^2-1)^2} =& \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}
\end{aligned}$$

Du type x^2+1

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(x^2+1)^2} =& \frac{-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} \\
\frac{x}{(x^4-1)^2} =& \frac{1}{16(x-1)^2} - \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{16(x+1)^2} - \frac{1}{8(x+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{x}{4(x^2+1)} \\
\frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2} =& \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1-x}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{4(x^2+1)} \\
\frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2} =& 1 + \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+1/4}{x^2+1} \\
\frac{x^6}{(x^2+1)(x-1)^3} =& x+3 + \frac{x-1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{5}{2(x-1)^2} + \frac{19}{4(x-1)}
\end{aligned}$$

Du type x^2+x+1

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^4+x^2+1} =& \frac{1}{2(x^2-x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} \\
\frac{x^4+1}{x^4+x^2+1} =& 1 + \frac{x}{2(x^2+x+1)} - \frac{x}{2(x^2-x+1)} \\
\frac{x^4+1}{x^2(x^2+x+1)^2} =& \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+2}{x^2+x+1} \\
\frac{3x^5-5x^4+4x^2-11x+1}{(x^2+x+1)^6} =& -\frac{23x+6}{(x^2+x+1)^6} + \frac{13x+18}{(x^2+x+1)^5} + \frac{3x-11}{(x^2+x+1)^4}
\end{aligned}$$

Autres éléments de 2ème espèce

$$\frac{x^8}{x^6-1} = x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)$$
$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)$$
$$\frac{x}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)$$
$$\frac{1}{x^5+1} = \frac{1}{5(x+1)}-\frac{1}{5}\left(\frac{\omega x-2}{x^2-\omega x+1}+\frac{\omega' x-2}{x^2-\omega' x+1}\right), \quad \omega=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \omega'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Racines de l'unité

$$\frac{x^n+1}{x^n-1} = 1+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega^k}{n(x-\omega^k)}, \quad \omega=e^{2i\pi/n}$$
$$\frac{1}{x^n-1} = \sum_{k=1;2k\neq n}^{n-1}\frac{2x\cos\alpha_k-2}{n(x^2-2x\cos\alpha_k+1)}+\frac{1}{n(x-1)}\ \left[-\frac{1}{n(x+1)}\text{ si n est pair}\right], \quad \alpha_k=\frac{2k\pi}{n}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-\omega^k} = \frac{nx^{n-1}}{x^n-1}, \quad \omega=e^{2i\pi/n}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(x-\omega^k)^2} = \frac{nx^{2n-2}+n(n-1)x^{n-2}}{(x^n-1)^2}, \quad \omega=e^{2i\pi/n} \quad \text{(dérivée)}$$

Polynômes de Tchebychev

$$\frac{1}{\cos(n\arccos x)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\sin\beta_k}{x-\cos\beta_k}, \quad \beta_k=\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$
$$\tan(n\arctan x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0;2k\neq n-1}^{n-1}\frac{1}{\cos^2\beta_k(\tan\beta_k-x)}\left[+\frac{x}{n}\text{ si n est impair}\right], \quad \beta_k=\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Divers

$$\frac{x^{2n}}{(x^2+1)^n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^k}{(x^2+1)^k}$$
$$\frac{1}{(x^2-1)^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma_n^k}{2^{n+k}}\left(\frac{(-1)^k}{(x-1)^{n-k}}+\frac{(-1)^n}{(x+1)^{n-k}}\right)$$
$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n\Gamma_n^k}{2^{n+k}}\left(\frac{i^{k+n}}{(x-i)^{n-k}}+\frac{(-i)^{k+n}}{(x+i)^{n-k}}\right)$$
$$\frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}kC_n^k}{x+k}$$
$$\frac{x^2}{x^4-2x^2\cos\alpha+1} = \frac{1}{4\cos(\alpha/2)}\left(\frac{x}{x^2-2x\cos(\alpha/2)+1}-\frac{x}{x^2+2x\cos(\alpha/2)+1}\right), \quad \alpha\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\pi)$$

[003279]

Exercice 826 Ensi PC 1999

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$: $\frac{1}{(X^2+2X+1)(X^3-1)}$.

Correction ▼ [003280]

Exercice 827 Calcul de dérivées

Calculer les dérivées p-ièmes des fractions suivantes :

1. $\frac{1}{X(X+1)...(X+n)}$.
2. $\frac{1}{X^2-2X\cos\alpha+1}$ $(\alpha \not\equiv 0 (\operatorname{mod} \pi))$.
3. $\frac{1}{X^2-2X\operatorname{sh}\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Correction ▼ [003281]

Exercice 828 Sommation de séries

A l'aide de décomposition en éléments simples, calculer :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Correction ▼ [003282]

Exercice 829 Partie polaire pour un pôle d'ordre 2

Soit $F(X) = \frac{1}{R(X)} = \frac{1}{(X-a)^2 Q(X)}$ avec $Q(a) \neq 0$. Chercher la partie polaire de F en a en fonction de Q puis en fonction de R.

Correction ▼ [003283]

Exercice 830

Soient $a_1, \dots, a_n \in K$ distincts et $P = (X-a_1)\dots(X-a_n)$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{(1+X^2)^n}{P^2}$.
2. Montrer que les coefficients des $\frac{1}{X-a_i}$ sont tous nuls si et seulement si : $(1+X^2)P'' - 2nXP' + n(n+1)P = 0$.

Correction ▼ [003284]

Exercice 831 P à racines x_i simples $\Rightarrow \sum x_i^k / P'(x_i) = 0$

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ $(n \geqslant 2)$ ayant n racines distinctes : $x_1, \dots, x_n$.

1. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0$.
2. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{P'(x_i)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Correction ▼ [003285]

Exercice 832 Les racines de P' sont des barycentres des racines de P

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_n$.

1. Décomposer en éléments simples $\frac{P'}{P}$.
2. En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de $x_1, \dots, x_n$.

Correction ▼ [003286]

Exercice 833 $F'(X)/F(X) = \dots$

Soient $a_1, \dots, a_n \in K$ distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Existe-t-il $F \in K(X)$ telle que : $\frac{F'(X)}{F(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X-a_k}$? [003287]

Exercice 834 $F(X+1) - F(X) = \dots$

Trouver les fractions $F \in \mathbb{R}(X)$ telles que : $F(X+1) - F(X) = \frac{X+3}{X(X-1)(X+1)}$.

Correction ▼ [003288]

Exercice 835 Inversion de la matrice $(1/(a_i - b_j))$

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, et c des scalaires distincts. On note A la matrice carrée $\left(\frac{1}{a_i - b_j}\right)$ et B la matrice colonne $\left(\frac{1}{a_i - c}\right)$. Montrer que l'équation $AX = B$ possède une solution unique en considérant une fraction rationnelle bien choisie.

Correction ▼ [003289]

Exercice 836 Racines de $(X^2+1)PP' + X(P^2 + P'^2)$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant n racines positives distinctes (entre autres).
Factoriser le polynôme $Q = (X^2+1)PP' + X(P^2 + P'^2)$ en deux termes, faire apparaître $\frac{P'}{P}$, et Démontrer que Q admet au moins $2n-2$ racines positives.

Correction ▼ [003290]

Exercice 837 Inégalité

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n et $Q(X) = X(X-1)\dots(X-n)$.
Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i \neq k}(k-i)}$ et en déduire l'existence de $k \in [[0,n]]$ tel que $|P(k)| \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

Correction ▼ [003291]

Exercice 838 ENS MP 2002

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ admettant deux racines distinctes et tel que P'' divise P. Montrer que P est à racines simples.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant deux racines réelles distinctes, et tel que P'' divise P. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples.

Correction ▼ [003292]

Exercice 839 Division de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$ à l'ordre 3.
2. En déduire une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^3-1}{x^4(x^2+1)}$.

Correction ▼ [003293]

Exercice 840 Division de 1 par $(1-X)^2$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à un ordre n quelconque de 1 par $(1-X)^2$.
2. En déduire $1 + 2\cos\theta + 3\cos 2\theta + \cdots + n\cos(n-1)\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [003294]

Exercice 841 Division de $1 - X^2$ par $1 - 2X\cos t + X^2$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à un ordre queclonque de $1-X^2$ par $1-2X\cos\theta+X^2$.
2. En déduire la valeur de $1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$, $(\theta\not\equiv 0(\operatorname{mod} 2\pi))$.

Correction ▼ [003295]

Exercice 842 Coefficients de Bézout

Soient $P=1+2X+3X^2+3X^3+2X^4+X^5$ et $Q=X^5$.

1. Vérifier que P et Q sont premiers entre eux.
2. Trouver $U,V\in K[X]$ tels que $UP+VQ=1$ (utiliser une division suivant les puissances croissantes).

Correction ▼ [003296]

Exercice 843

Décomposer en éléments simples dans $C(X)$ les fractions rationnelles suivantes

$$\begin{array}{lll}
1)\ \frac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2} & 2)\ \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} & 3)\ \frac{1}{X(X-1)^2}\\
4)\ \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2} & 5)\ \frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3} & 6)\ \frac{X^6}{(X^3-1)^2}\\
7/\ \frac{1}{X^6+1} & 8)\ \frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2} & 9)\ \frac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}\\
10)\ \frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1} & 11)\ \frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3} & 12)\ \frac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}\\
13)\ \frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}. & &
\end{array}$$

Correction ▼ [005335]

Exercice 844

Décomposer en éléments simples dans $C(X)$ les fractions rationnelles suivantes

$$\begin{array}{lll}
1)\ \frac{1}{X^n-1} & 2)\ \frac{1}{(X-1)(X^n-1)} & 3)\ \frac{n!}{(X-1)(X-2)...(X-n)}\\
4)\ \frac{X^2}{X^4-2X^2\cos(2a)+1} & 5)\ \frac{1}{X^{2n}+1}. &
\end{array}$$

Correction ▼ [005336]

Exercice 845

Soit U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Ecrire sous forme d'une fraction rationnelle (ou encore réduire au même dénominateur) $F=\sum_{\omega\in U_n}\frac{\omega X+1}{\omega^2X^2+\omega X+1}$.

Correction ▼ [005337]

Exercice 846

Soit $F=\frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes tous deux non nuls et premiers entre eux. Montrer que F est paire si et seulement si P et Q sont pairs. Etablir un résultat analogue pour F impaire.

Correction ▼ [005338]

Exercice 847

Montrer que $(\frac{1}{X-a})_{a\in\mathbb{C}}$ est libre dans $K(X)$.

Correction ▼ [005339]

Exercice 848

Calculer la dérivée n-ième de $\frac{1}{X^2+1}$.

Correction ▼ [005340]

Exercice 849

On pose $P = a(X - x_1)\dots(X - x_n)$ où les x_i sont des complexes non nécessairement deux à deux distincts et a est un complexe non nul.
Calculer $\frac{P'}{P}$. De manière générale, déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ quand P est un polynôme scindé. Une application : déterminer tous les polynômes divisibles par leur dérivées.

Correction ▼ [005341]

Exercice 850

Existe-t-il une fraction rationnelle F telle que

$$\big(F(X)\big)^2 = (X^2+1)^3 \ ?$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006964]

Exercice 851

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible. On suppose qu'il existe une fraction rationnelle G telle que

$$G\left(\frac{P(X)}{Q(X)}\right) = X$$

1. Si $G = \frac{a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0}{b_nX^n+\cdots+b_1X+b_0}$, montrer que P divise $(a_0 - b_0X)$ et que Q divise $(a_n - b_nX)$.
2. En déduire que $F = \frac{P}{Q}$ est de la forme $F(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$.
3. Pour $Y = \frac{aX+b}{cX+d}$, exprimer X en fonction de Y. En déduire l'expression de G.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006965]

Exercice 852

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ (où les a_i sont des nombres complexes et où $c \neq 0$).

1. Exprimer à l'aide de P et de ses dérivées les sommes suivantes :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2} \qquad \sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant n\\ k\neq\ell}} \frac{1}{(X-a_k)(X-a_\ell)}$$
2. Montrer que si z est racine de P' mais pas de P, alors il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ et $z = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$. Si toutes les racines de P sont réelles, que peut-on en déduire sur les racines de P' ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006966]

Exercice 853

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, par identification des coefficients.

1. $F = \frac{X}{X^2-4}$
2. $G = \frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$
3. $H = \frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$
4. $K = \frac{X+1}{X^4+1}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006967]

Exercice 854

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, en raisonnant par substitution pour obtenir les coefficients.

1. $F = \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$
2. $G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$
3. $H = \frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$
4. $K = \frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006968]

Exercice 855

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

1. À l'aide de divisions euclidiennes successives :
$$F = \frac{4X^6-2X^5+11X^4-X^3+11X^2+2X+3}{X(X^2+1)^3}$$
2. À l'aide d'une division selon les puissances croissantes :
$$G = \frac{4X^4-10X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$$
3. Idem pour :
$$H = \frac{X^4+2X^2+1}{X^5-X^3}$$
4. A l'aide du changement d'indéterminée $X = Y+1$:
$$K = \frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006969]

Exercice 856

1. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
$$\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} \qquad \frac{X+i}{X^2+i} \qquad \frac{2X}{(X+i)^2}$$
2. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$.
$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1} \qquad \frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} \qquad \frac{X^2+1}{X^4+1}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006970]

Exercice 857

On pose $Q_0 = (X-1)(X-2)^2$, $Q_1 = X(X-2)^2$ et $Q_2 = X(X-1)$. À l'aide de la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}$, trouver des polynômes A_0, A_1, A_2 tels que $A_0Q_0 + A_1Q_1 + A_2Q_2 = 1$. Que peut-on en déduire sur Q_1, Q_2 et Q_3 ?

Correction ▼ Vidéo ■ [006971]

Exercice 858

Soit $T_n(x) = \cos\left(n \arccos(x)\right)$ pour $x \in [-1,1]$.

1. (a) Montrer que pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (b) Calculer T_0 et T_1.

(c) Montrer la relation de récurrence $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$, pour tout $n \geqslant 0$.

(d) En déduire que T_n une fonction polynomiale de degré n.

2. Soit $P(X) = \lambda(X - a_1)\cdots(X - a_n)$ un polynôme, où les a_k sont deux à deux distincts et $\lambda \neq 0$. Montrer que

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(a_k)}}{X - a_k}$$

3. Décomposer $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples.

Indication ▼ Correction ▼ [006972]

29 105.05 Définition, degré, produit

30 105.99 Autre

Exercice 859

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un polynôme P_n et un seul tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta.$$

Montrer que P_n est unitaire et que ses coefficients sont entiers. En déduire les r rationnels tels que $\cos r\pi$ soit rationnel. [000424]

Exercice 860

Déterminer, s'il en existe, tous les idéaux J de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $I(P) \subset J \subset \mathbb{R}[X]$, avec $I(P)$ idéal engendré par P dans les cas suivants :

$$P = X^2 + X + 1, \quad P = X^2 + 2X + 1, \quad P = X^3 + 3X - 4.$$

[000425]

Exercice 861

Trouver un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

Correction ▼ [000426]

Exercice 862

Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000427]

Exercice 863

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\int_k^{k+1} P(t)dt = k+1$ (on pourra utiliser le polynôme $Q(x) = \int_0^x P(t)dt$). [000428]

Exercice 864

Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ $\deg P_k = k$. Montrer à l'aide d'une récurrence soigneuse que cette famille est libre. [000429]

Exercice 865

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est linéaire, i.e. que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ $\Delta(aP+bQ) = a\Delta(P) + b\Delta(Q)$.
2. Déterminer $\ker(\Delta) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \Delta(P) = 0\}$.
3. Soient $H_0 = 1$ et pour $k \in \{1, \dots, n\}$ $H_k = \dfrac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1)$. Calculer $\Delta(H_k)$.
4. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comment trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$.
5. Déterminer P pour $Q = X^2$ tel que $P(1) = 0$.
6. En déduire la somme $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

[000430]

Exercice 866

Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$: $P(X+1)P(X) = -P(X^2)$. [000431]

Exercice 867

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ tels que $\exists (a,A) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall x \in]-a,a[, |P(x) - Q(x)| \leqslant A\left|x^{n+1}\right|$. Que dire de P et Q ? [000432]

Exercice 868

Soient $W_n = (X^2-1)^n$, $L_n = \frac{1}{2^n n!} W_n^{(n)}$.

1. Donner le degré de L_n, son coefficient dominant, sa parité, calculer $L_n(1)$. Donner L_0, L_1, L_2.
2. Démontrer : $\forall n \geqslant 1, (X^2-1)W_n' = 2nXW_n$, en déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2-1)L_n'' + 2XL_n' - n(n+1)L_n = 0.$$
3. Montrer ensuite : $\forall n \geqslant 1, L_n' = XL_{n-1}' + nL_{n-1}$, puis $nL_n = XL_n' - L_{n-1}'$.
4. Montrer enfin que les polynômes L_n peuvent être définis par la récurrence :
$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1)XL_n - nL_{n-1}.$$

[000433]

Exercice 869

Montrer que si $n \geqslant 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale (i.e. $xyz \neq 0$) dans $\mathbb{C}[X]$.
Indication : on peut supposer x, y, z, sans facteurs communs. Dériver la relation, la multiplier par z, étudier le degré. [000434]

Exercice 870

Soit $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, avec $P(0) = 1, P(1) = 0$, montrer :
$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

Indication : $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$, montrer $\sum_{k=0}^{n} P(w_k) = (n+1)a_0$. [000435]

Exercice 871

1. Lemme : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, $z_0 \in \mathbb{C}$, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z - z_0| \leqslant \varepsilon\}, |P(z)| > |P(z_0)|.$$

   Indications : Ecrire $P(z_0 + h) = P(z_0) + \sum_{m=k}^{\deg P} \frac{h^m}{m!} P^{(m)}(z_0)$où k est le plus petit entier strictement positif tel que $P^{(i)}(z_0) \neq 0$.

   On se propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.

2. Expliquer pourquoi le minimum de la fonction $z \to |P(z)|$ est atteint sur un disque centré en 0, mettons $D(0, \mathbb{R})$, et expliquer pourquoi :

$$\exists z_0 \in \mathbb{C}, |P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

3. Montrer avec le lemme que $P(z_0) = 0$.

[000436]

Exercice 872

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$. Quel est le degré de P ? Le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$. [000437]

Exercice 873

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont tous les zéros sont réels et distincts, montrer que $\phi = (P')^2 - PP''$ n'a pas de zéro réel. [000438]

Exercice 874

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un corps pour les lois usuelles sur $\mathbb{C}$ et $P \in K[X]$ non constant.

1. Montrer que si α est racine de P de multiplicité $m \in [1, +\infty[$ alors α est racine du polynôme P' avec la multiplicité $m-1$.
2. On suppose $K = \mathbb{R}$ et P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ (on utilisera le théorème de Rolle).

[000439]

Exercice 875

Soient $m, n \in [1, +\infty[$, $d = \text{pgcd}(m, n)$ et $P = X^m - 1, Q = X^n - 1, D = X^d - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. (a) Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est racine commune de P et Q alors x est racine de D (on pourra utiliser l'égalité de Bézout dans $\mathbb{Z}$).
   (b) Montrer que si $y \in \mathbb{C}$ est racine de D alors y est racine commune de P et Q (utiliser la définition de d).
2. (a) Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que toute racine de A est racine de B. Peut-on en déduire que A divise B ? Même question si les racines de A sont simples.
   (b) Montrer que les racines de D et P sont simples et en déduire que $\text{pgcd}(P, Q) = D$.

[000440]

Exercice 876

Soient les polynômes complexes $P_1 = X^3 - 2$, $P_2 = X^4 + 4$ et $P_3 = X^4 + 4X^3 + 8$.

1. Étudier leur irréductibilité sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que P_1 est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (on utilisera que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$).
3. Montrer que P_2 est réductible sur $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que P_3 est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

[000441]

Exercice 877

Soit $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18 \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer toutes les racines complexes de P sachant que deux d'entre elles ont 6 pour produit. [000442]

Exercice 878 Familles libres de polynômes

Soit $a, b \in K$, $a \neq b$. On pose $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre. [003164]

Exercice 879 Formule de Van der Monde

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [[0, n]]$ on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer les composantes dans $\mathscr{B}$ de $\frac{d^n}{dx^n}\big(X^n(1-X)^n\big)$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$. [003165]

Exercice 880 Famille libre de polynômes

Soient $U, V \in K[X]$ non constants. On pose $P_k = U^k V^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre ...

1. lorsque $U \wedge V = 1$.
2. lorsque (U, V) est libre.

[003166]

Exercice 881 Ensi PC 1999

Déterminer les polyômes $P \in \mathbb{R}_{2n-1}(X)$ tels que $P(X) + 1$ est multiple de $(X-1)^n$ et $P(X) - 1$ est multiple de $(X+1)^n$.

Correction ▼ [003167]

Exercice 882 Opérateur différence

On note $U_p = \frac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}$, $\quad p \in \mathbb{N}$, et $\Delta : K[X] \to K[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$

1. Démontrer que la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$.
2. Calculer $\Delta^n(U_p)$.
3. En déduire que : $\forall\, P \in K_n[X]$, ona $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$.
4. Soit $P \in K[X]$. Démontrer que :
$\big(\forall\, n \in \mathbb{Z}$, on a $P(n) \in \mathbb{Z}\big) \Leftrightarrow \big($ les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières$\big)$.
5. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $\Delta^n(f) = 0$.

[003168]

Exercice 883 Liberté de $P(X), \dots, P(X+n)$

Soit $P \in K[X]$ de degré n. Démontrer que la famille $\big(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n)\big)$ est une base de $K_n[X]$. (Utiliser l'opérateur Δ de l'exercice 882)

Correction ▼ [003169]

Exercice 884 $(X+z_0)^n, \dots, (X+z_k)^n$ (Centrale MP 2003)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $z_0, \dots, z_k$ des complexes. Soient les polynômes $P_0 = (X+z_0)^n, \dots, P_k = (X+z_k)^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P_0, \dots, P_k)$ soit une base de $C_n[X]$.

Correction ▼ [003170]

Exercice 885 $P - X \mid P \circ P - X$

1. Soit $P \in K[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

Correction ▼ [003171]

Exercice 886 $P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$

Soit $\Phi : K[X] \to K[X], P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$

1. Chercher $\deg(\Phi(P))$ en fonction de $\deg P$.
2. En déduire $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.
3. Montrer que : $\forall\, Q \in K[X],\ \exists!\, P \in K[X]$ tq $\begin{cases} \Phi(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0. \end{cases}$

[003172]

Exercice 887 $P \mapsto (X-a)(P'(X) + P'(a)) + P(X) - P(a)$

Soit $a \in K$ et $\Phi : K_n[X] \to K_n[X], P \mapsto (X-a)(P'(X) + P'(a)) + P(X) - P(a)$.
Chercher $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Correction ▼ [003173]

Exercice 888 $A^3 + B = C^3 + D$

Soient $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\begin{cases} \deg A = \deg C = m \\ \deg B < 2m,\ \deg D < 2m \\ A^3 + B = C^3 + D. \end{cases}$

Montrer que $A = C$ et $B = D$.
Trouver un contre-exemple avec des polynômes à coefficients complexes. [003174]

Exercice 889 $P(n) \mid P(n + P(n))$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X],\ n \in \mathbb{Z}$, et $p = P(n)$. Montrer que p divise $P(n+p)$.

Correction ▼ [003175]

Exercice 890 $P(a/b) = 0 \Rightarrow a - kb$ divise $P(k)$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a, b \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux tels que $P\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

1. Montrer que a divise le coefficient constant de P.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a - kb$ divise $P(k)$.

Correction ▼ [003176]

Exercice 891 Automorphismes des polynômes

Pour $A \in K[X]$ on note $\Phi_A : K[X] \to K[X], P \mapsto P \circ A$

1. Démontrer que les applications Φ_A sont les seuls endomorphismes d'algèbre de $K[X]$.
2. A quelle condition Φ_A est-il un isomorphisme ?

[003177]

Exercice 892 Sous anneau non principal des polynômes

Soit $A = \{P \in K[X]$ dont le coefficient de X est nul$\}$. Démontrer que A est un sous anneau non principal de $K[X]$.
[003178]

Exercice 893 Équation $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$

Trouver $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux tels que $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$.

Correction ▼ [003179]

Exercice 894 Équation $X(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X=0$

Trouver tous les polynômes $P \in K[X]$ tels que : $X(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X=0$.

Correction ▼ [003180]

Exercice 895 $P(X)+P(X+1)=2X^n$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in K[X]$ tel que $P_n(X)+P_n(X+1)=2X^n$.
2. Chercher une relation de récurrence entre P_n' et P_{n-1}.
3. Décomposer $P_n(X+1)$ sur la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer que $P_n(1-X)=(-1)^nP_n(X)$.

Correction ▼ [003181]

Exercice 896 $(1-X)^nP+X^nQ=1$

1. Démontrer qu'il existe $P,Q \in K_{n-1}[X]$ uniques tels que $(1-X)^nP+X^nQ=1$.
2. Montrer que $Q=P(1-X)$.
3. Montrer que : $\exists\, \lambda \in K$ tel que $(1-X)P'-nP=\lambda X^{n-1}$.
4. En déduire P.

Correction ▼ [003182]

Exercice 897 Endomorphismes qui commutent avec la dérivation

Soit $\Phi \in \mathscr{L}K[X]$ commutant avec la dérivation, c'est à dire : $\forall\, P \in K[X]$, on a $\Phi(P')=\Phi(P)'$.

1. Démontrer qu'il existe un unique suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de scalaires tels que :

$$\forall\, P \in K_n[X], \text{ on a } \Phi(P)=\sum_{k=0}^{n} a_kP^{(k)}.$$

   (On écrit *formellement* : $\Phi=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\mathrm{D}^k$ avec $\mathrm{D}(P)=P'$)
2. Décomposer ainsi l'endomorphisme $\Phi : P \mapsto P(X+1)$.

[003183]

Exercice 898 P est positif $\Rightarrow P+P'+P"+\dots$ aussi

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)\geqslant 0$. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $(P+P'+P''+\dots)(x)\geqslant 0$.

Correction ▼ [003184]

Exercice 899 $P(\tan\alpha)=Q\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Existe-t-il $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\, \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $P(\tan\alpha)=Q\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$?

Correction ▼ [003185]

Exercice 900 $X^n+1/X^n=P_n(X+1/X)$

1. Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ il existe un unique polynôme $P_n\in\mathbb{Z}[X]$ vérifiant :

$$\forall\, z\in\mathbb{C}^*,\ z^n+z^{-n}=P_n(z+z^{-1}).$$

2. Déterminer le degré, le coefficient dominant, et les racines de P_n.
3. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\tilde{P}$ le polynôme tel que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*,\ P(z) + P(z^{-1}) = \tilde{P}(z + z^{-1}).$$

Étudier l'application $P \mapsto \tilde{P}$.

Correction ▼ [003186]

Exercice 901 Polytechnique MP* 2000

1. Donner un isomorphisme f entre $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que $\sigma : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}, (a_0, \dots, a_n) \mapsto (a_n, a_0, \dots, a_{n-1})$ est linéaire.
3. Si $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$, on définit le produit $\overline{PQ}$ comme le reste de la division euclidienne de PQ par $X^{n+1} - 1$. Montrer que l'application induite par σ sur $\mathbb{C}_n[X]$ (c'est-à-dire $f \circ \sigma \circ f^{-1}$) est l'application qui à P associe $\overline{XP}$.
4. Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}^{n+1}$ stable par σ.
Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(F) = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}_n[X]\}$.

Correction ▼ [003187]

Exercice 902 Centrale MP 2002

Déterminer tous les polynômes P tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$ puis tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et enfin tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Correction ▼ [003188]

Exercice 903 Polytechnique MP 2002

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ distincts et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Trouver $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \text{ tq } \forall\, i,\ P^{-1}(\{y_i\}) = \{x_i\}\}$.

Correction ▼ [003189]

Exercice 904 ENS Ulm MP 2002

Soit $S \subset \mathbb{N}$ fini et $P = \sum_{s \in S} a_s X^s \in \mathbb{C}[X]$.

1. On suppose que les a_s sont réels. Montrer que P a moins de racines strictement positives distinctes que la suite (a_s) n'a de changement de signe.
2. On suppose que P vérifie : $\forall\, s \in S,\ P(s) = 0$. Montrer que P est nul.

Correction ▼ [003190]

Exercice 905 $\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geqslant 1$ (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geqslant 1$ est une réunion finie d'intervalles disjoints. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

Correction ▼ [003191]

Exercice 906 Polynôme positif (Ens Ulm MP* 2003)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer :
$(\forall\, x \geqslant 0,\ P(x) > 0) \Leftrightarrow (\exists\, \ell \in \mathbb{N} \text{ tq } (X+1)^\ell P(X)$ est à coefficients strictement positifs).

Correction ▼ [003192]

Exercice 907 Diviseurs premiers de la suite $(P(n))$ (Ens ULM-Lyon-Cachan MP* 2003)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant et E l'ensemble des diviseurs premiers d'au moins un $P(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que E est infini.

Correction ▼ [003193]

Exercice 908 Centrale MP 2004

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1+X-P_n^2$ est divisible par X^n.

Correction ▼ [003194]

Exercice 909 Polynômes à coefficients entiers, ULM-Lyon-Cachan MP* 2004

On donne un entier $n \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, \dots, P_n$ dans $\mathbb{Z}_n[X]$ tels que $\forall\, i,j \in [[0,n]]$, $\int_{t=0}^{1} t^i P_j(t)\,dt = \delta_{ij}$.

Correction ▼ [003195]

Exercice 910 $a/b+b/c+c/a$

Soient a,b,c les racines de X^3+pX+q, $q \neq 0$. Calculer : $\sum_{\sigma \in S_3} \left(\frac{\sigma(a)}{\sigma(b)} + \frac{\sigma(b)}{\sigma(c)} + \frac{\sigma(c)}{\sigma(a)}\right)$.

Correction ▼ [003254]

Exercice 911 $1/(x_i-1)$

Soient x_1,x_2,x_3,x_4 les racines de X^4+X+1. Calculer $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i-1}$.

Correction ▼ [003255]

Exercice 912 $x_i/(x_jx_k)$

Soient $x_1,\dots,x_8$ les racines de $X^8+X^7-X^2+3$. Calculer $\sum_{1\leqslant i\leqslant 8, 1\leqslant j<k\leqslant 8} \frac{x_i}{x_jx_k}$.

Correction ▼ [003256]

Exercice 913 x_i^7

Soient a,b,c les racines de X^3-X+1. Calculer $a^7+b^7+c^7$.

Correction ▼ [003257]

Exercice 914 $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $1/a+1/b+1/c$ donnés

Résoudre

$$\begin{cases} a+ \quad b+ \quad c = 0 \\ a^2+ \quad b^2+ \quad c^2 = 1 \\ \frac{1}{a}+ \quad \frac{1}{b}+ \quad \frac{1}{c} = -1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003258]

Exercice 915 Ensi P 90

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Correction ▼ [003259]

Exercice 916 $\int_{t=-1}^{1} P(t)\,dt = d\big(P(a)+P(b)+P(c)\big)$

Trouver $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\int_{t=-1}^{1} P(t)\,dt = d\big(P(a)+P(b)+P(c)\big)$.

Correction ▼ [003260]

Exercice 917 a,b,c en progression géométrique

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$.
Montrer que ces nombres sont en progression géométrique si et seulement si $(ab+ac+bc)^3 = abc(a+b+c)^3$.
[003261]

Exercice 918 Condition liant les racines

Soit $P = X^3 + pX + q$ de racines a, b, c.

1. CNS pour ces racines soient aux sommets d'un carré ?
2. CNS pour que $a^2 + b^2 = 1 + c^2$?

Correction ▼ [003262]

Exercice 919 Condition liant les racines

Soient A, B, C les points dont les affixes sont les racines de $X^3 + pX + q$, $p, q \in \mathbb{C}$. A quelle condition sur p et q a t-on $AB = AC = 2BC$?

Correction ▼ [003263]

Exercice 920 Condition liant les racines

Soit $P = X^4 + aX^2 + bX + c$ de racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. CNS pour ces racines soient en progression arithmétique ?

Correction ▼ [003264]

Exercice 921 Transformation d'équation

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + 2X^2 + 3X + 4$.
Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$ sont *les* racines.

Correction ▼ [003265]

Exercice 922 Transformation d'équation

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c$.
Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont x_1^2, x_2^2, x_3^2 sont *les* racines.

Correction ▼ [003266]

Exercice 923 $2X^3 + 5X^2 - X + \lambda$ a une racine de module 1

Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $2X^3 + 5X^2 - X + \lambda$ ait une racine de module 1.

Correction ▼ [003267]

Exercice 924 Polynômes dont les racines sont de module 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers, unitaires de degré n et dont toutes les racines sont de module 1.

1. Démontrer que $\mathscr{E}$ est fini.
2. Pour $P \in \mathscr{E}$ de racines $x_1, \dots, x_n$, on note $\widetilde{P}$ le polynôme unitaire de racines $x_1^2, \dots, x_n^2$.
   Démontrer que $\widetilde{P} \in \mathscr{E}$.
3. En déduire que : $\forall\, P \in \mathscr{E}$, les racines de P sont des racines de l'unité.

Correction ▼ [003268]

Exercice 925 Centrale MP 2001

Soit $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d réels. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour qu'il existe une droite coupant la courbe représentative de f en quatre points distincts M_1, M_2, M_3, M_4 tels que $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$.

Correction ▼ [003269]

Exercice 926 ***

On pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et $Q = 1 + 2X + ... + nX^{n-1}$. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k)$.

Correction ▼ [005314]

Exercice 927 **

Soit P un polynôme différent de X. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Correction ▼ [005320]

Exercice 928 ***

Soit P un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré supérieur ou égal à 1. Soit n un entier relatif et $m = P(n)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(n+km)$ est un entier divisible par m.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non constants à coefficients entiers tels que $P(n)$ soit premier pour tout entier n.

Correction ▼ [005321]

Exercice 929 *** Polynômes P vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

Soit E la partie de $\mathbb{C}[X]$ formée des polynômes P vérifiant $\forall a \in \mathbb{Z}$, $P(a) \in \mathbb{Z}$.

1. On pose $P_0 = 1$ et pour n entier naturel non nul, $P_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X+k)$ (on peut définir la notation $P_n = C_{X+n}n$). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \in E$.
2. Montrer que toute combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des P_n est encore un élément de E.
3. Montrer que E est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_n.

Correction ▼ [005322]

Exercice 930 ***T

Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X) + 10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P(X) - 10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Correction ▼ [005326]

Exercice 931 ***I

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ (penser aux racines de P).

Correction ▼ [005327]

Exercice 932 **

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ (resp. $\mathbb{C}^4$) le système :

$$1)\ \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=10 \\ x^3+y^3+z^3+t^3=0 \\ x^4+y^4+z^4+t^4=26 \end{array}\right. .$$

Correction ▼ [005330]

Exercice 933 **T

Trouver tous les polynômes P vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Correction ▼ [005331]

Exercice 934 **

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $12X^4+X^3+15X^2-20X+4$.

Correction ▼ [005332]

Exercice 935 ***

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^{2n}-X^{2n}+2X-1$ est divisible par $2X^3-3X^2+X$ puis déterminer le quotient.

Correction ▼ [005333]

Exercice 936 **I

Déterminer deux polynômes U et V vérifiant $UX^n+V(1-X)^m=1$ et $\deg(U)<m$ et $\deg(V)<n$.

Correction ▼ [005334]

Exercice 937

Soit $P=$ où n est un entier naturel non nul, les a_i sont des entiers relatifs et a_0 et a_n sont non nuls. Soient p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que $p\wedge q=1$.
Montrer que, si $r=\frac{p}{q}$ est une racine (rationnelle) de P alors p divise a_0 et q divise a_n.
Application. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $9z^4-3z^3+16z^2-6z-4=0$.

Correction ▼ [005343]

Exercice 938 Equations réciproques

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4+2z^3+3z^2+2z+1=0$ en posant $Z=z+\frac{1}{z}$ (ou autrement).
2. $z^6-5z^5+5z^4-5z^2+5z-1=0$.
3. $z^7-z^6-7z^5+7z^4+7z^3-7z^2-z+1=0$.

Correction ▼ [005344]

Exercice 939

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4.
Montrer que les images dans le plan complexe des racines de P forment un parallélogramme si et seulement si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune

Correction ▼ [005346]

Exercice 940

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $\left\{\begin{array}{l} y^2+yz+z^2=7\\ z^2+zx+x^2=13\\ x^2+xy+y^2=3 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005347]

Exercice 941

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $k\in\mathbb{Z}$, on pose $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$.

1. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{2}{2-\omega_k}\right)$.
2. Montrer que, pour tout réel a, $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k^2-2\omega_k\cos a+1)=2(1-\cos(na))$ (questions indépendantes.)

Correction ▼ [005348]

Exercice 942

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-21z+8=0$ sachant qu'il existe deux des solutions sont inverses l'une de l'autre.

Correction ▼ [005352]

31 106.01 Définition, sous-espace

Exercice 943

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-7y=z\}$
$E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-z^2=0\}$
$E_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=x+y+z=0\}$
$E_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2)=0\}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000886]

Exercice 944

Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\oplus$ définie par $a\oplus b=ab, \forall a,b\in\mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe $\otimes$ telle que $\lambda\otimes a=a^\lambda, \forall a\in\mathbb{R}_+^*, \forall\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que $E=(\mathbb{R}_+^*,\oplus,\otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. [000887]

Exercice 945

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$E_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+a=0 \text{ et } x+3az=0\right\}$
$E_2=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1)=0\}$
$E_3=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=1\}$
$E_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+\alpha y+1\geqslant 0\right\}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000888]

Exercice 946

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+y=0\}$; $E_1'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/xy=0\}$.
$E_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x=0,y=z\}$; $E_2'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=1\}$.
$E_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+xy\geqslant 0\}$; $E_3'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+xy+y^2\geqslant 0\}$. [000889]
$E_4=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}/f(1)=0\}$; $E_4'=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}/f(0)=1\}$;
$E_4"=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}/f \text{ est croissante}\}$.

Exercice 947

Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d); \lambda(a,b)=(a,\lambda b), \lambda\in\mathbb{R}$.
2. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d); \lambda(a,b)=(\lambda^2a,\lambda^2b), \lambda\in\mathbb{R}$.
3. $(a,b)+(c,d)=(c,d); \lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b), \lambda\in\mathbb{R}$.

[000890]

Exercice 948

Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ pour les mêmes opérations.

3. L'ensemble des solutions (x_1, x_2, x_3) du système : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 0. \end{cases}$
4. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.
5. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot x = x^\lambda$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.
6. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
7. L'ensemble des fonctions sur $[a,b]$ continues, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t)\,dt$.
8. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
9. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'une fonction nulle en 1 et d'une fonction nulle en 4. Identifier cet ensemble.
10. L'ensemble des polynômes de degré exactement n.
11. L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
12. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
13. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$.
14. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
15. L'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x+y) = 0$.
16. L'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.
17. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $\int_0^1 \sin x f(x)\,dx = 0$.
18. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.
19. L'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.

[000891]

Exercice 949

Montrer que l'ensemble $\mathscr{E} = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / (\exists (a,\varphi) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = a\cos(x - \varphi)\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
[000892]

Exercice 950

Soit E un espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G+H) = G + (F \cap H).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000893]

Exercice 951

On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition usuelle et de la loi externe $\lambda(x,y) = (\lambda x, y)$. Est-ce un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? [000894]

Exercice 952

Montrer que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. [000895]

Exercice 953

Montrer que
$$F = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \exists (A,\phi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x+\phi)\}$$

est un espace vectoriel. [000896]

Exercice 954

VRAI OU FAUX

1. L'ensemble $\{0\}$ est un espace vectoriel réel.
2. L'ensemble $\{0,1\}$ est un espace vectoriel réel.
3. Tout sous-espace vectoriel autre que $\{0\}$ possède un sous-espace strict.
4. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels (d'un même espace plus grand) est un espace vectoriel.
5. La réunion de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
6. La somme de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
7. Le produit cartésien $E \times F$ de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.

[002425]

Exercice 955

On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ de nombres réels ; $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels en la variable X ; $\mathbb{R}[X]_p$ le sous-ensemble des polynômes de degré $\leqslant p$; $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels en la variable X ; $\mathbb{R}(X)_p$ le sous-ensemble des fractions rationnelles de degré $\leqslant p$; $C^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et k fois continûment dérivables ($k \geqslant 0$ entier) ; $C^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Dotés des opérations d'addition et de multiplication usuelles, lesquels de ces ensembles sont des espaces vectoriels ?
2. Montrer que $\mathbb{R}[X]_p \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}(X)$ et que $C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$, et que ce sont des sous-espaces vectoriels.
3. Si l'on identifie les polynômes et les fractions rationnelles aux fonctions correspondantes, a-t-on $\mathbb{R}[X] \subset C^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}(X) \subset C^\infty(\mathbb{R})$?

[002427]

Exercice 956

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F,G deux sous-espaces de E. Montrer que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$. [002428]

Exercice 957

Soit $E = \mathbb{R}[X]_n$ (polynômes de degré $\leqslant n$), et $P \in E$.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de E multiples de P est un sous-espace vectoriel de E. Quelle en est la dimension en fonction du degré de P ?
2. Soit $Q \in E$ un polynôme sans racine commune avec P, et tel que $\deg P + \deg Q = n+1$. Montrer que $E = F_P \oplus F_Q$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U et V tels que $UP+VQ = 1$.

[002429]

Exercice 958

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les quatre fonctions définies par

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos t \cosh t, \\ x_2(t) &= \sin t \cosh t, \\ x_3(t) &= \cos t \sinh t, \\ x_4(t) &= \sin t \sinh t \end{aligned}$$

appartiennent à E et sont linéairement indépendantes.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par ces quatres vecteurs, et u l'endomorphisme de E défini par $u(f) = f'$. Montrer que F est stable par u et déterminer la matrice M de u dans la bae (x_1, x_2, x_3, x_4) de F.
3. Calculer M^n.

[002447]

Exercice 959

1. En utilisant les opérations d'addition $+$ et de multiplication $\cdot$ de deux nombres, définir, pour chaque ensemble E de la liste ci-dessous :
   — une addition $\oplus : E \times E \to E$;
   — une multiplication par un nombre réel $\odot : \mathbb{R} \times E \to E$.

   (a) $E = \mathbb{R}^n$;

   (b) $E =$ l'ensemble des trajectoires d'une particule ponctuelle dans l'espace $\mathbb{R}^3$;

   (c) $E =$ l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathscr{S}_1 : x - 2y + 3z = 0$;

   (d) $E =$ l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ du système d'équations.

   $$\mathscr{S}_2 : \left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y - 6z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right. ;$$

   (e) $E =$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 3y = 0$;

   (f) $E =$ l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que

   $$y''(x) \sin x + x^3 y'(x) + y(x) \log x = 0, \ \forall x > 0;$$

   (g) $E =$ l'ensemble des fonctions $\Psi(t,x)$, à valeurs complexes, solutions de l'équation de Schrödinger :

   $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t,x) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + x^2 \Psi(t,x)$$

   où $\hbar$ et m sont des constantes ;

   (h) $E =$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ;

   (i) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels ;

   (j) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 ;

   (k) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels divisibles par $(x-1)$;

   (l) $E =$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles ;

   (m) $E =$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles et d'intégrale nulle ;

   (n) $E =$ l'ensemble des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0,1[$ à valeurs réelles ;

   (o) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui s'annulent en $0 \in \mathbb{R}$.

   (p) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$;

2. Pour les opérations d'addition $\oplus$ construites, montrer que E possède un élément neutre (terme à définir), et que chaque élément de E possède un inverse.

[002778]

Exercice 960

Qu'est -ce qui empêche de définir les mêmes opérations que dans l'exercice précédent sur les ensembles suivants ?

(a) $E =$ l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathscr{S}_3 : x - 2y + 3z = 3$;

(b) $E =$ l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que $y''(x)\sin x + x^3 y^2(x) + y(x)\log x = 0, \forall x > 0$;

(c) $E = \mathbb{N}$;

(d) $E = \mathbb{Z}$;

(e) $E = \mathbb{R}^+$;

(f) $E = \mathbb{Q}^n$;

(g) $E =$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs ;

(h) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui prennent la valeur 1 en 0 ;

(i) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$;

[002779]

Exercice 961 Somme de sous-espaces

Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E. Comparer $F \cap (G + (F \cap H))$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

Correction ▼ [003298]

Exercice 962 $F \cap G = F' \cap G'$

Soient F, G, F', G' des sev d'un ev E.
Montrer que si $F \cap G = F' \cap G'$ alors $\big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big) = F$.

Correction ▼ [003299]

Exercice 963 E n'est pas union de sous-espaces stricts

Soit E un K-ev non nul et $F_1, \dots, F_n$ des sev stricts de E. On veut montrer que $E \neq F_1 \cup \dots \cup F_n$:

1. Traiter le cas $n = 2$.
2. Cas général : on suppose $F_n \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ et on choisit $\vec{x} \in F_n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{n-1})$ et $\vec{y} \notin F_n$.
   (a) Montrer que : $\forall\ \lambda \in K$, $\lambda\vec{x} + \vec{y} \notin F_n$.
   (b) Montrer que : $\forall\ i \leqslant n-1$, il existe au plus un $\lambda \in K$ tel que $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in F_i$.
   (c) Conclure.

[003300]

Exercice 964 Intersection et somme de sev

Soit E un ev de dimension finie et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E.
On note $H = \bigcap_{i\in I} F_i$ et $S = \sum_{i\in I} F_i = \mathrm{vect}\Big(\bigcup_{i\in I} F_i\Big)$.
Montrer qu'il existe une partie finie, J, de I telle que : $H = \bigcap_{i\in J} F_i$ et $S = \sum_{i\in J} F_i$. [003323]

Exercice 965 *T

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (muni de $f + g$ et $\lambda.f$ usuels) (ne pas hésiter à redémontrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel). Soit F l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

1) $f(0) + f(1) = 0$ 2) $f(0) = 0$ 3) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ 4) $\forall x \in [0,1],\ f(x) + f(1-x) = 0$
5) $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant 0$ 6) $2f(0) = f(1) + 3$

Dans quel cas F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Correction ▼ [005164]

Exercice 966 **T

On munit $\mathbb{R}^n$ des lois produit usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants F de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 = 0\}$ 2) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 = 1\}$
3) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 = x_2\}$ 4) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 + \dots + x_n = 0\}$
5) $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1.x_2 = 0\}$

Correction ▼ [005165]

Exercice 967 **

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

Correction ▼ [005166]

Exercice 968 **T

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 2, -5, 3)$ et $v = (2, -1, 4, 7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne à F.

Correction ▼ [005168]

Exercice 969 **T

Montrer que $a = (1, 2, 3)$ et $b = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous espace de $\mathbb{R}^3$ que $c = (1, 0, 1)$ et $d = (0, 1, 1)$.

Correction ▼ [005169]

Exercice 970 **

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces de E.

1. Montrer que : $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$.
2. A-t-on toujours l'égalité ?
3. Montrer que : $(A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + (A \cap C))$.

Correction ▼ [005172]

Exercice 971 **T

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère $V = \{(x, y, z, t) \in E / \ x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in E / \ x + z = y + t\}$.

1. Montrer que V et W sont des sous espaces vectoriels de E.
2. Donner une base de V, W et $V \cap W$.
3. Montrer que $E = V + W$.

Correction ▼ [005173]

Exercice 972 ***

Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[\times [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x \cos y, x \sin y) \end{array}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Soient a, b, α et β quatre réels. Montrer qu'il existe $(c, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $a \cos(x - \alpha) + b \cos(x - \beta) = c \cos(x - \gamma)$.

3. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \{u \in E / \exists (a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = a\cos(x-\alpha) + b\cos(2x-\beta)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Déterminer $\{\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), 1, \cos^2 x, \sin^2 x\} \cap F$.
5. Montrer que $(\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x))$ est une famille libre de F.

Correction ▼ [005174]

Exercice 973 **

Soit C l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur $\mathbb{R}$.

1. C est-il un espace vectoriel (pour les opérations usuelles) ?
2. Montrer que $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (g,h) \in C^2$ tel que $f = g - h\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Correction ▼ [005175]

Exercice 974 **

Montrer que la commutativité de la loi $+$ est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

Correction ▼ [005176]

Exercice 975 ***

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A) \subset (A+B)\cap(B+C)\cap(C+A).$$

Correction ▼ [005177]

Exercice 976 ** I

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $[(F\cup G$ sous-espace de $E) \Leftrightarrow (F \subset G$ ou $G \subset F)]$.

Correction ▼ [005563]

Exercice 977 ****

Généralisation de l'exercice 976. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 puis F_1, ... , F_n n sous-espaces de E où E est un espace vectoriel sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$. Montrer que $\Big[(F_1\cup\ldots\cup F_n$ sous-espace de $E) \Leftrightarrow$ (il existe $i \in [\![1,n]\!] / \bigcup_{j\neq i}$

Correction ▼ [005564]

Exercice 978

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels (sur $\mathbb{R}$) :

— $E_1 = \big\{f : [0,1] \to \mathbb{R}\big\}$: l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[0,1]$, muni de l'addition $f+g$ des fonctions et de la multiplication par un nombre réel $\lambda\cdot f$.
— $E_2 = \big\{(u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\big\}$: l'ensemble des suites réelles muni de l'addition des suites définie par $(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n)$ et de la multiplication par un nombre réel $\lambda\cdot(u_n) = (\lambda\times u_n)$.
— $E_3 = \big\{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \leqslant n\big\}$: l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n muni de l'addition $P+Q$ des polynômes et de la multiplication par un nombre réel $\lambda\cdot P$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006868]

Exercice 979

1. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$; puis de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006869]

32 106.02 Système de vecteurs

Exercice 980

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1}(1,1,0)$, $\vec{v_2}(4,1,4)$ et $\vec{v_3}(2,-1,4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$ est-elle libre ?

[000897]

Exercice 981

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1}(1,0,1)$, $\vec{v_2}(0,2,2)$ et $\vec{v_3}(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1}(1,0,0)$, $\vec{v_2}(0,1,1)$ et $\vec{v_3}(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1}(1,2,1,2,1)$, $\vec{v_2}(2,1,2,1,2)$, $\vec{v_3}(1,0,1,1,0)$ et $\vec{v_4}(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1}(2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v_2}(1,1,2,1,3,1)$ et $\vec{v_3}(0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1}(2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v_2}(-1,1,-2,2,-3,3)$ et $\vec{v_3}(1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

[000898]

Exercice 982

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1},2\vec{e_2},\vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1},\vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1},2\vec{e_1}+\vec{e_4},\vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1}+\vec{e_3},\vec{e_3},\vec{e_2}+\vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1}+\vec{e_2},\vec{e_1}-3\vec{e_2},\vec{e_4},\vec{e_2}-\vec{e_1})$.

[000899]

Exercice 983

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1=(1,2,3,4)$ et $v_2=(1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1)\in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$? Et pour que $(x,1,1,y)\in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000900]

Exercice 984

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000901]

Exercice 985

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1=(1,1,1,1)$, $V_2=(1,2,3,4)$, $V_3=(3,1,4,2)$, $V_4=(10,4,13,7)$, $V_5=(1,7,8,14)$. Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace. [000902]

Exercice 986

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (1,2,3,4)$, $V_3 = (3,1,4,2)$, $V_4 = (10,4,13,7)$, $V_5 = (1,7,8,14)$. À quelle(s) condition(s) un vecteur $B = (b_1,b_2,b_3,b_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ? Définir ce sous-espace par une ou des équations. [000903]

Exercice 987

Soient les vecteurs $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,-2,3,-4)$ de $\mathbb{R}^4$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}$? pour que $(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}$? [000904]

Exercice 988

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et x,y,z,t une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $x, 2y, z$.
2. x, z.
3. $x, 2x+t, t$.
4. $3x+z, z, y+z$.
5. $2x+y, x-3y, t, y-x$.

[000905]

Exercice 989

Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \mathrm{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

[000906]

Exercice 990

On suppose que $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \ldots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

[000907]

Exercice 991

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,3,-1)$ et $v_2 = (1,-1,-2)$ et F celui engendré par $w_1 = (3,7,0)$ et $w_2 = (5,0,-7)$. Montrer que E et F sont égaux.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000908]

Exercice 992

Prouver que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (2,3,-1)$ et $u_2 = (1,-1,-2)$ engendrent le même s.e.v. que les vecteurs $v_1 = (3,7,0)$ et $v_2 = (5,0,-7)$.
[000909]

Exercice 993

1. Montrer que les systèmes : $S_1 = (1;\sqrt{2})$ et $S_2 = (1;\sqrt{2};\sqrt{3})$ sont libres dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

2. Soient, dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ et $u_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Montrer que le système (u_1, u_2) est $\mathbb{Q}$-libre et $\mathbb{R}$-lié.
3. Soient les vecteurs $v_1 = (1-i, i)$ et $v_2 = (2, -1+i)$ dans $\mathbb{C}^2$.
   (a) Montrer que le système (v_1, v_2) est $\mathbb{R}$-libre et $\mathbb{C}$-lié.
   (b) Vérifier que le système $S = \{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$ est une base de l'e.v. $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et donner les composantes des vecteurs v_1, v_2 par rapport à cette base.

[000910]

Exercice 994

1. On définit les fonctions suivantes : $f_1 : t \mapsto \cos t.\mathrm{ch}t$, $f_2 : t \mapsto \cos t.\mathrm{sh}t$, $f_3 : t \mapsto \sin t.\mathrm{ch}t$, $f_4 : t \mapsto \sin t.\mathrm{sh}t$. Montrer que le système (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Même question pour la famille $\mathscr{F} = \{f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

[000911]

Exercice 995

Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les trois fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sin 2x$, $x \mapsto \sin 3x$, sont-elles linéairement indépendantes ? Généraliser. [000912]

Exercice 996

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $S_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ un système libre dans E, $n \geqslant 2$.

1. On considère le système $S_2 = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ défini par : $e'_j = \sum_{k=1}^{j} e_k$, $1 \leqslant j \leqslant n$. S_2 est-il libre ?
2. On considère le système $S_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ défini par : $\varepsilon_j = e_j + e_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et $\varepsilon_n = e_n + e_1$. Montrer les résultats suivants :
   (a) S_3 libre $\Rightarrow S_1$ libre.
   (b) n impair : S_3 libre $\Leftrightarrow S_1$ libre.
   (c) n pair : S_3 lié.

[000913]

Exercice 997

Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Correction ▼ [000914]

Exercice 998

Soient $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer $\mathrm{vect}(f, g, h)$. [000915]

Exercice 999

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = 1 & \text{si } x = \alpha \\ f_\alpha(x) = 0 & \text{si } x \neq \alpha \end{cases}.$$

Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Indication ▼ Correction ▼ [000916]

Exercice 1000

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000917]

Exercice 1001

Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et ce quelque soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$(x \to |x-a|)_{a=1,3,5,\dots,2N+1} ; (x \to \cos nx)_{n=1,2,\dots,N} ; (x \to e^{ax})_{a=1,\dots,N}$$

[000918]

Exercice 1002

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note δ_k l'élément de E dont les coordonnées sont toutes nulles, sauf $\delta_{k,k} = 1$. Montrer que la famille infinie $\mathscr{B} = \{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est libre (en ce sens que toute sous-famille finie est libre). Soit E_0 le sous-ensemble des suites qui convergent vers zéro. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\mathscr{B}$ est aussi une famille libre de E_0.

[002430]

Exercice 1003

Soit E un espace vectoriel réel et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = -I$.

1. Montrer que u est bijectif.
2. On suppose que les $2p-1$ vecteurs $x_1,\dots,x_p,u(x_1),\dots,u(x_{p-1})$ sont linéairement indépendants. Montrer que les $2p$ vecteurs $x_1,\dots,x_p$, $u(x_1),\dots,u(x_p)$ sont linéairement indépendants.
3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que E possède une base de la forme $x_1,\dots,x_p,u(x_1),\dots,u(x_p)$ et est de dimension paire. Donner la matrice de u dans cette base.

[002435]

Exercice 1004

Dans $\mathbb{R}^4$, on note $v_1 = {}^t(1,2,0,-1)$, $v_2 = {}^t(3,2,-1,-1)$, $v_3 = {}^t(-1,2,1,-3)$ et $v_4 = {}^t(1,-1,1,-1)$. Sont-ils linéairement indépendants ? Trouver une relation de dépendance linéaire entre eux. [002450]

Exercice 1005 $\mathbb{C}$ isomorphe à un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Montrer que les “vecteurs"

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   de E sont linéairement indépendants.
2. Montrer que tout élément $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de E s'écrit de façon unique sous la forme $X = x_1 I + x_2 J + x_3 K + x_4 L$ et calculer x_1,x_2,x_3,x_4 en fonction de a,b,c,d.
3. Vérifier la relation $J^2 = -I$. Calculer JX et XJ. Montrer que l'équation $XJ = JX$ est équivalente à $x_3 = x_4 = 0$. En déduire que le sous-espace de E engendré par I,J est isomorphe au corps des complexes $\mathbb{C}$.

[002459]

Exercice 1006

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1} = (1,1,0)$, $\vec{v_2} = (4,1,4)$ et $\vec{v_3} = (2,-1,4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$ est-elle libre ?

[002780]

Exercice 1007

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1} = (1,0,1)$, $\vec{v_2} = (0,2,2)$ et $\vec{v_3} = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1} = (1,0,0)$, $\vec{v_2} = (0,1,1)$ et $\vec{v_3} = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1} = (1,2,1,2,1)$, $\vec{v_2} = (2,1,2,1,2)$, $\vec{v_3} = (1,0,1,1,0)$ et $\vec{v_4} = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1} = (2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v_2} = (1,1,2,1,3,1)$ et $\vec{v_3} = (0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1} = (2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v_2} = (-1,1,-2,2,-3,3)$ et $\vec{v_3} = (1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

[002781]

Exercice 1008

On suppose que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

[002782]

Exercice 1009 Sev de K^3 engendrés par deux vecteurs

On considère les vecteurs de K^3 : $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1,3,2)$, $\vec{c} = (1,1,0)$, $\vec{d} = (3,8,5)$.
Soient $F = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et $G = \text{vect}(\vec{c}, \vec{d})$. Comparer F et G.

Correction ▼ [003297]

Exercice 1010 Étude de liberté

Étudier la liberté des familles suivantes :

1. $E = \{\text{fcts} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F} = (\sin, \cos)$.
2. $E = \{\text{fcts} : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F} = (f_a : x \longmapsto x^a)$, $a \in \mathbb{R}$.
3. $E = \{\text{fcts} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F} = (f_a : x \longmapsto |x-a|)$, $a \in \mathbb{R}$.

[003301]

Exercice 1011 Nombres algébriques

On considère que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que la famille $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ est libre.
2. Montrer que la famille $(\ln p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers positifs est libre.

[003302]

Exercice 1012 Modification des vecteurs d'une famille libre

Soit E un espace vectoriel, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires.
On pose $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, et $\vec{x}_i' = \vec{x}_i + \vec{y}$. Étudier à quelle condition la famille $(\vec{x}_1', \dots, \vec{x}_n')$ est libre.

Correction ▼ [003303]

Exercice 1013 Polynômes trigonométriques

Soit E l'ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F le sev engendré par les fonctions $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, et G le sev engendré par les fonctions $g_n : x \mapsto \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F = G$. [003304]

Exercice 1014 **T

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles). On considère les trois éléments de E suivants : $u = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (\cos(n\theta + a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (\cos(n\theta + b))_{n\in\mathbb{N}}$ où θ, a et b sont des réels donnés. Montrer que (u, v, w) est une famille liée.

Correction ▼ [005167]

Exercice 1015 ***T

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, étudier la liberté des familles suivantes A de vecteurs de E :

1. a, b et c étant trois réels donnés, $A = (f_a, f_b, f_c)$ où, pour tout réel x, $f_u(x) = \sin(x + u)$.
2. $A = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où, pour tout réel x, $f_n(x) = nx + n^2 + 1$.
3. $A = (x \mapsto x^{\alpha})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ (ici $E = (]0; +\infty[)^2$).
4. $A = (x \mapsto |x - a|)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction ▼ [005180]

Exercice 1016 **

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^4$ sont-elles libres ou liées ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

1. (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (3, 0, 1, -2)$, $e_2 = (1, 5, 0, -1)$ et $e_3 = (7, 5, 2, 1)$.
2. (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, -1)$, $e_3 = (1, 1, -1, 1)$ et $e_4 = (1, -1, 1, 1)$.
3. (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (0, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 0, 1)$, $e_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_4 = (0, 1, 0, 0)$.
4. (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (2, -1, 3, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (4, 1, 5, 3)$ et $e_4 = (1, -2, 2, 0)$.

Correction ▼ [005566]

Exercice 1017 ***

Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005567]

Exercice 1018 **

Soit $f(x) = \ln(1 + x)$ pour x réel positif. Soient $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$ et $f_3 = f \circ f \circ f$. Etudier la liberté de (f_1, f_2, f_3) dans $[0, +\infty[^{[0,+\infty[}$.

Correction ▼ [005568]

Exercice 1019 **

Soit $f_a(x) = |x - a|$ pour a et x réels. Etudier la liberté de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction ▼ [005569]

Exercice 1020 **I

On pose $f_a(x) = e^{ax}$ pour a et x réels. Etudier la liberté de la famille de fonctions $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction ▼ [005570]

Exercice 1021 **

Montrer que toute suite de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.
Montrer que toute suite de polynômes non nuls de valuations deux à deux distinctes est libre.

Correction ▼ [005571]

Exercice 1022 **

1. Calculer pour p et q entiers naturels donnés les intégrales suivantes :

   $J(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx$, $K(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)\,dx$ et $L(p,q) = \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,dx$.

2. Montrer que la famille de fonctions $(\cos(px))_{p\in\mathbb{N}} \cup (\sin(qx))_{q\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Correction ▼ [005574]

Exercice 1023

1. Soient $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,-1,2)$ et $v_3 = (3,3,6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, trouver trois réels non tous nuls α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.
2. On considère deux plans vectoriels

$$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

$$P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

   trouver un vecteur directeur de la droite $D = P_1 \cap P_2$ ainsi qu'une équation paramétrée.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006870]

33 106.03 Somme directe

Exercice 1024

Soient $v_1 = (0,1,-2,1), v_2 = (1,0,2,-1), v_3 = (3,2,2,-1), v_4 = (0,0,1,0)$ et $v_5 = (0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0) \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}$.
3. $\dim(\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}) = 1$ (c'est-à-dire c'est une droite vectorielle).
4. $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_2,v_3,v_4\} = \mathbb{R}^4$.
5. $\mathrm{Vect}\{v_4,v_5\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000919]

Exercice 1025

On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_4,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
3. $\mathrm{Vect}\{v_1,v_3,v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. $\mathrm{Vect}\{v_1,v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000920]

Exercice 1026

Si L, M, N sont trois sous-espaces vectoriels de E, a-t-on :

$$L \cap (M + N) = L \cap M + L \cap N \ ?$$

[000921]

Exercice 1027

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. On définit

$$E_a=\{P\in E;(X-a)/P\}$$

pour $a\in\mathbb{R}$. Montrer que si $a\neq b$ il existe un couple de réels (c,d) tels que $1=c(X-a)+d(X-b)$. En déduire que $E=E_a+E_b$, la somme est-elle directe ?

[000922]

Exercice 1028

Soit $E=\Delta^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F=\{f\in E\mid f(0)=f'(0)=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000923]

Exercice 1029

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires* dans E lorsque $F\cap G=\{0\}$ et $E=F+G$. On note $E=F\oplus G$.

1. Soient $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $e_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Posons $F=\text{Vect}\,\{e_1,e_2\}, G=\text{Vect}\,\{e_3,e_4\}, G'=\text{Vect}\,\{e_3,e_4,e_5\}$. Montrer que $E=F\oplus G$ et $E\neq F\oplus G'$.
2. Supposons que E est de dimension finie n, que $\dim\,(F)=p$ et $E=F\oplus G$.
   (a) Calculer $\dim\,(G)$.
   (b) Montrer que tout élément x de E se décompose d'une manière *unique* en une somme $x=y+z$ avec $y\in F$ et $z\in G$.
   (c) Soient $\mathscr{F}=\{f_1,\cdots,f_k\}$ une famille libre de F et $\mathscr{G}=\{g_1,\cdots,g_l\}$ une famille libre de G. Montrer que la famille $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ est libre.
   (d) Soit φ une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^q$, $q\in\mathbb{N}$. Construire deux applications linéaires ψ et ψ' de E dans $\mathbb{R}^q$ telles que : $\forall y\in F:\psi'(y)=0,\forall z\in G:\psi(z)=0$ et $\forall x\in E:\varphi(x)=\psi(x)+\psi'(x)$.

[000924]

Exercice 1030 Caractérisation de la somme directe de trois s.e.v.

Soient U,V,W des s.e.v. d'un e.v. E, vérifiant $(I):U\cap V=\{0\}=(U+V)\cap W$.

1. Démontrer que $V\cap W=\{0\}=U\cap(V+W)$.
2. Montrer que (I) équivaut à

$$(II):(\forall x\in U+V+W)(\exists!(u,v,w)\in U\times V\times W)(x=u+v+w).$$

[000925]

Exercice 1031

Soit

$$E=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid(u_n)_n\text{ converge }\right\}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000926]

Exercice 1032

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Correction ▼ Vidéo ■ [002433]

Exercice 1033 Supplémentaire commun, X MP* 2005

1. Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = (1-X)Q(X^2) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
   (a) Montrer que A est un $\mathbb{R}$-ev et que l'on a $R[X] = A \oplus \{$ polynômes pairs $\}$.
   A-t-on $R[X] = A \oplus \{$ polynômes impairs $\}$?
   (b) Que peut-on dire si l'on remplace $Q(X^2)$ par une fonction f paire ?
2. Soient E_1, E_2 deux sev d'un ev E tels que E_1 et E_2 sont isomorphes et $E = E_1 \oplus E_2$. Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.

Correction ▼ [003305]

Exercice 1034

Soit $E = K_3[X]$, $F = \{P \in E \text{ tq } P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E \text{ tq } P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

[003652]

Exercice 1035 Caractérisation des sommes directes

Soient F_1, F_2, F_3 trois sev de E. Montrer que $F_1 + F_2 + F_3$ est directe si et seulement si : $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{\vec{0}\}$.
Généraliser.

[003653]

Exercice 1036 Somme directe dans $E \Rightarrow$ somme directe dans $\mathscr{L}(E)$

Soit E un K-ev de dimension finie n et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
On note $F_i = \{u \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} u \subset \operatorname{vect}(\vec{e}_i)\}$.

1. Caractériser matriciellement les éléments de F_i.
2. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathscr{L}(E)$.

[003654]

Exercice 1037 Toute somme peut être rendue directe en réduisant les sev

Soit E un K-ev de dimension finie, F_1, F_2, …, F_n des sev de E tels que $F_1 + \cdots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sev $G_1 \subset F_1$, …, $G_n \subset F_n$ tels que $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = E$. [003655]

Exercice 1038 Somme et intersection

Soit E un K-ev, $E_1,\dots,E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$, F un autre sev de E, et $F_i = E_i \cap F$.

1. Montrer que la somme $G = F_1 + \dots + F_n$ est directe.
2. Comparer F et G.

[003656]

Exercice 1039 Somme directe d'endomorphismes

Soit E un K-ev, $E_1,\dots,E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. Soient $u_1 \in \mathscr{L}(E_1),\dots,u_n \in \mathscr{L}(E_n)$.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout i : $u_{|F_i} = u_i$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(u_n)$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(u_n)$.

[003657]

Exercice 1040 Somme de projecteurs

Soit E un K-ev de dimension finie et $p_1,\dots,p_n$ des projecteurs tels que $p_1 + \dots + p_n = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(p_i) = \mathrm{rg}(p_i)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.

[003658]

Exercice 1041 Projecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f_1,\dots,f_n$ n applications linéaires toutes non nulles. On suppose que : $\forall\ (i,j) \in [[1,n]]^2,\ f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i$. Montrer les f_i sont toutes de rang un.

Correction ▼ [003659]

Exercice 1042 **IT

Soient $u = (1,1,...,1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u)$ puis $G = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 + ... + x_n = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Correction ▼ [005178]

Exercice 1043 **

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $E = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$. Montrer que ces sommes sont directes.

Correction ▼ [005185]

Exercice 1044 ** I

$E = \mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Soient $F = \{(x_1,...,x_n) \in E / \ x_1 + ... + x_n = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,...,1))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Préciser le projeté d'un vecteur x de E sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F.

Correction ▼ [005565]

Exercice 1045

Par des considérations géométriques répondez aux questions suivantes :

1. Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont-elles supplémentaires ?
2. Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?
3. A quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006871]

34 106.04 Base

Exercice 1046

Montrer que les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Correction ▼ [000979]

Exercice 1047

Soient $\vec{v}_1(1,2,3,4), \vec{v}_2(2,2,2,6), \vec{v}_3(0,2,4,4), \vec{v}_4(1,0,-1,2), \vec{v}_5(2,3,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Soient $F = Vect\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ et $G = Vect\{\vec{v}_4, \vec{v}_5\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G$, F, G et $F+G$. [000980]

Exercice 1048

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $w = (1,1,1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ et $w = (1,2,-3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000981]

Exercice 1049

On considère dans $\mathbb{R}^4$, $F = \text{lin}\{a,b,c\}$ et $G = \text{lin}\{d,e\}$, avec $a = (1,2,3,4)$, $b = (2,2,2,6)$, $c = (0,2,4,4)$, $d = (1,0,-1,2)$ et $e = (2,3,0,1)$. Déterminer des bases des sous-espaces $F \cap G$, F, G, $F+G$. [000982]

Exercice 1050

Dans l'espace $\mathscr{P}_5$ des polynômes de degré $\leqslant 5$, on définit les sous-ensembles :
$E_1 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid P(0) = 0\}$
$E_2 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid P'(1) = 0\}$
$E_3 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid x^2+1 \text{ divise } P\}$
$E_4 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid x \mapsto P(x) \text{ est une fonction paire}\}$
$E_5 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid \forall x,\ P(x) = xP'(x)\}$.

1. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$.
2. Déterminer dans $\mathscr{P}_5$ des sous-espaces supplémentaires de E_4 et de $E_1 \cap E_3$.

[000983]

Exercice 1051

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base. [000984]

Exercice 1052

Vrai ou faux ? On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs x,y,z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x,y,z est libre.
2. Soit $x_1,x_2,\dots,x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Indication ▼ Correction ▼ [000985]

Exercice 1053

Étudier l'indépendance linéaire des listes de vecteurs suivantes, et trouver à chaque fois une base du sous-espace engendré.

1. $(1,0,1)$, $(0,2,2)$, $(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $(1,2,1,2,1)$, $(2,1,2,1,2)$, $(1,0,1,1,0)$, $(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $(2,4,3,-1,-2,1)$, $(1,1,2,1,3,1)$, $(0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $(2,1,3,-1,4,-1)$, $(-1,1,-2,2,-3,3)$, $(1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

[000986]

Exercice 1054

Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.

1. $v_1=(1,1,1), v_2=(3,0,-1), v_3=(-1,1,-1)$.
2. $v_1=(1,2,3), v_2=(3,0,-1), v_3=(1,8,13)$.
3. $v_1=(1,2,-3), v_2=(1,0,-1), v_3=(1,10,-11)$.

Correction ▼ [000987]

Exercice 1055

Dans $\mathbb{R}^3$, comparer les sous-espaces F et G suivants :
$F=\mathrm{lin}\{(2,3,-1),(1,-1,-2)\}$ et $G=\mathrm{lin}\{(3,7,0),(5,0,-7)\}$. [000988]

Exercice 1056

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes
$v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(0,1,2,-1)$, $v_3=(1,0,-2,3)$, $v_4=(2,1,0,-1)$, $v_5=(4,3,2,1)$.
$v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(0,1,2,-1)$, $v_3=(3,4,5,16)$.
$v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(0,1,2,-1)$, $v_3=(2,1,0,11)$, $v_4=(3,4,5,14)$.
Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

[000989]

Exercice 1057

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E, montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$. [000990]

Exercice 1058

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soient D_1, D_2, D_3 des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ distinctes deux à deux. Alors $\mathbb{R}^3$ est somme de D_1, D_2, D_3.
2. Soient F et G des hyperplans vectoriels de E. Alors $E \neq F \cup G$.
3. Soient P_1 et P_2 des plans vectoriels de E tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Alors $\dim E \geqslant 4$.
4. Soient F et G des sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Alors $F \cap G \neq \{0\}$.
5. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $F = \mathrm{lin}\{e_1, e_3\}$. Tout sous-espace vectoriel supplémentaire de F contient e_2.

[000991]

Exercice 1059

1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que toute famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ avec $\deg P_i = i$ (pour $i = 0, 1, \dots, n$) forme une base de E.
2. Écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1-X) + c(X - X^2) + d(X^2 - X^3)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ puis sous la forme $F = \alpha + \beta(1+X) + \gamma(1+X+X^2) + \delta(1+X+X^2+X^3)$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$.

Indication ▼   Correction ▼   Vidéo ■   [000992]

Exercice 1060

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{P}_2$ des polynômes de degré $\leqslant 2$, on considère les polynômes $P_1 = X^2 + X(1-X) + (1-X)^2$, $P_2 = X^2 + (1-X)^2$, $P_3 = X^2 + 1 + (1-X)^2$, $P_4 = X(1-X)$. Peut-on extraire de $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ des bases de $\mathscr{P}_2$? Si oui, les trouver toutes. [000993]

Exercice 1061

Soit E l'ensemble des fractions rationnelles F qui peuvent s'écrire

$$F = \frac{P}{(X-1)^3(X^2+1)^2}, \qquad P \text{ polynôme de degré } \leqslant 6.$$

Les fractions $\frac{1}{(X-1)}, \frac{1}{(X-1)^2}, \frac{1}{(X-1)^3}, \frac{1}{X^2+1}, \frac{X}{X^2+1}, \frac{1}{(X^2+1)^2}, \frac{X}{(X^2+1)^2}$ forment-elles une base de E ?
Que se passe-t-il si on suppose que P décrit l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant 9$? [000994]

Exercice 1062

Problème de l'interpolation : soit les cinq points $(x_1, y_1) = (-2, 3)$, $(x_2, y_2) = (0, -2)$, $(x_3, y_3) = (1, 5)$, $(x_4, y_4) = (5, 1)$, $(x_5, y_5) = (6, 7)$ de $\mathbb{R}^2$, et $\mathscr{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant 4$. On veut trouver un polynôme F dans $\mathscr{P}_4$ tel que pour $i = 1, \dots, 5$ on ait $F(x_i) = y_i$.

1. Sans effectuer les calculs, indiquer comment on pourrait calculer a, b, c, d, e exprimant $F = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$ selon la base $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ de $\mathscr{P}_4$.
2. Montrer que $\{1, X+2, (X+2)X, (X+2)X(X-1), (X+2)X(X-1)(X-5)\}$ est une base de $\mathscr{P}_4$. Calculer directement (indépendamment de la question précédente) les coordonnées de F dans cette base.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes $X(X-1)(X-5)(X-6), (X+2)(X-1)(X-5)(X-6), (X+2)X(X-5)(X-6), (X+2)X(X-1)(X-6), (X+2)X(X-1)(X-5)$ forment une base de $\mathscr{P}_4$. Calculer directement (indépendamment des questions précédentes) les coordonnées de F dans cette base.
4. Dans laquelle des diverses bases ci-dessus le calcul de F vous paraît-il le plus simple ?

[000995]

Exercice 1063

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\{(1,0,t), (1,1,t), (t,0,1)\}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000996]

Exercice 1064

Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F. [000997]

Exercice 1065

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A_p(X) = (X-a)^p$ et $B_p(X) = X^p$.

1. Montrer que $\varepsilon = \{A_0, \dots, A_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) A_k(X)$. (On pourra montrer que l'ensemble E des élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui satisfont à cette égalité est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et contient une base.)

[000998]

Exercice 1066

On munit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de la loi interne "addition" + : $(a,b)+(a',b') = (aa', b+b')$, et de la loi externe . à coefficients réels : $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \forall (a,b) \in E \lambda.(a,b) = (a^\lambda, \lambda b)$.

1. Vérifier que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.
2. Les systèmes suivants sont-ils libres ou liés : ((1,0),(1,1)) ? ((2,1),(8,3)) ? ((2,1),(6,3)) ?
3. Vérifier que le système $b = ((2,0),(2,1))$ est une base de E et déterminer les composantes du vecteur $v = (x,y) \in E$ par rapport à la base b.

[000999]

Exercice 1067

Pour $k = 2,3,4$ montrer que V_k est un s.e.v. de $\mathbb{C}^k$, et en donner une base :

$$V_2 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 / a+ib=0\}, V_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 / a+2b+3c=0\},$$

$$V_4 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 / a+ib=b+ic=c+id\}.$$

[001000]

Exercice 1068

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leqslant n$.

1. Soit $\beta = (P_0, P_1, ..., P_n)$ un système de $(n+1)$ polynômes tels que, $\forall k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\deg P_k = k$. Montrer que β est une base de E.
2. Soit P un polynôme de degré n. Montrer que : $\gamma = (P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de E et déterminer les composantes du polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+a)$, (a réel fixé), dans la base γ.
3. Démontrer que le système $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E, et déterminer, pour tout $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, les composantes du polynôme X^p dans la base S.

[001001]

Exercice 1069

Soient $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1), \mathbf{v}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,-1,1,-1), \mathbf{v}_4 = (7,2,0,-1)$ et $\mathbf{v}_5 = (-2,-3,1,0)$. Donner une base du sous-espace vectoriel $F =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 >$. Déterminer un supplémentaire de G dans F dans $\mathbb{R}^4$.

[001002]

Exercice 1070

Soient le triplet $\mathbf{v}_1 = (1,2,3,0), \mathbf{v}_2 = (-1,1,2,1), \mathbf{v}_3 = (1,5,8,1)$ et le triplet $\mathbf{w}_1 = (0,3,5,1), \mathbf{w}_2 = (1,-1,1,0), \mathbf{w}_3 = (0,0,3,1)$. On considère les sous-espaces vectoriels $F =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ et $G =< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 >$. Donner une base des sous-espaces suivants $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

[001003]

Exercice 1071

Soit

$$E = \left\{ f_{\alpha,A} \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); (\alpha, A) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{\alpha,A}(x) = A\cos(x+\alpha) \right\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en donner une base.

[001004]

Exercice 1072

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On définit le système

$$S = \{\mathbf{e}_1 = (1,1,1), \mathbf{e}_2 = (1,1,2), \mathbf{e}_3 = (1,2,3)\}$$

1. Montrer que S est une base de E.
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = (5,7,12)$ dans cette base.

[001005]

Exercice 1073

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,-1,i)$, $v_2 = (-1,i,1)$, $v_3 = (i,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les coordonnées de $v = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■

[001006]

Exercice 1074

1. Montrer que le système $\mathbf{s}_1 = (1,\sqrt{2})$ et $\mathbf{s}_2 = (1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ sont libres dans $\mathbb{R}$ considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
2. Soient dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ et $\mathbf{u}_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Montrer que le système $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est $\mathbb{Q}$–libre et $\mathbb{R}$–lié.
3. Soient dans $\mathbb{C}^2$, les vecteurs $\mathbf{r}_1 = (1+i, 1-2i)$ et $\mathbf{r}_2 = (3i-1, 5)$. Montrer que le système $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ est $\mathbb{R}$–libre et $\mathbb{C}$–lié.

[001007]

Exercice 1075

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les polynômes $X^2 + t/2$, $X - t$, $(X+t+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

[001008]

Exercice 1076

Etudier la liberté des familles

1. $(1,1), (1,2)$.

2. $(2,3),(-6,9)$.
3. $(1,3,1),(1,3,0),(0,3,1)$.
4. $(1,3),(-1,-2),(0,1)$.

[001009]

Exercice 1077

Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $(1,1),(3,1)$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $(1,0,2),(1,2,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

[001010]

Exercice 1078

On considère dans $\mathbb{R}^3$, $\Pi = \text{vect}\{(1,1,1),(1,1,-1)\}$ et $D = \text{vect}\{(0,1,-1)\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$.
[001011]

Exercice 1079

Déterminer une base de $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\right\}$. [001012]

Exercice 1080

Déterminer une base de $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0, x-y+z=0\right\}$. [001013]

Exercice 1081 Essai de bases

Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (-1,-1,2)$ et $\vec{c} = (-2,1,-2)$ forment une base, et calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $\vec{x} = (x,y,z)$.

Correction ▼ [003317]

Exercice 1082 Rang de vecteurs

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{a} = (3,2,1,0), \quad \vec{b} = (2,3,4,5), \quad \vec{c} = (0,1,2,3), \quad \vec{d} = (1,2,1,2), \quad \vec{e} = (0,-1,2,1).$$

Correction ▼ [003318]

Exercice 1083 Fonctions affines par morceaux

Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision de $[0,1]$ et F l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est affine.
Montrer que F est de dimension finie et trouver une base de F.

[003319]

Exercice 1084 Projection et symétrie dans K^3

Dans K^3, on donne les sous espaces : $\begin{cases} H = \{\overrightarrow{X} = (x,y,z) \text{ tq } x+y+z=0\} \\ K = \text{vect}(\overrightarrow{U} = (1,1,2)). \end{cases}$

1. Déterminer $\dim H$ et en donner une base.
2. Démontrer que $H \oplus K = K^3$.
3. Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_H et s_H.

Correction ▼ [003320]

Exercice 1085 Supplémentaires

Soit $E = H \oplus K$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ une base de K.

1. Montrer que pour tout $\vec{a} \in H$, $K_{\vec{a}} = \text{vect}(\vec{e}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{e}_k + \vec{a})$ est un supplémentaire de H.
2. Montrer que si $\vec{a} \neq \vec{b}$, alors $K_{\vec{a}} \neq K_{\vec{b}}$.

[003321]

Exercice 1086 ****

1. Soit n un entier naturel. Montrer que si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4\}$. Vérifier que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel puis déterminer une base de E.

Correction ▼ [005179]

Exercice 1087 **I

$E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E.

Correction ▼ [005572]

Exercice 1088 **I Polynômes d'interpolation de LAGRANGE

Soient a_0,..., a_n $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts et b_0,..., b_n $n+1$ nombres complexes.
Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]$, $L_i(a_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

Correction ▼ [005573]

35 106.05 Dimension

Exercice 1089

Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $V_1 = (0,1,2,3)$, $V_2 = (1,2,3,4)$ et $V_3 = (2,3,4,5)$. [001014]

Exercice 1090

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001015]

Exercice 1091

Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001016]

Exercice 1092

Soient P_0, P_1, P_2 et $P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ définis par

$$P_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2},$$

$$P_2(X) = 2X(X-2), \quad P_3(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{3}.$$

Exprimer 1, X, X^2 en fonction de P_0, P_1 et P_2. On note $F = Vect\{P_0, P_1\}$ et $G = Vect\{P_2, P_3\}$. Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$. Vérifier que

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

[001017]

Exercice 1093

Donner la dimension du sous-espace F de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $f_1(x) = \sin^2 x, f_2(x) = \cos^2 x, f_3(x) = \sin 2x$ et $f_4(x) = \cos 2x$. [001018]

Exercice 1094

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (1,1,1,3), \quad v_3 = (2,1,1,1), \quad v_4 = (-1,0,-1,2), \quad v_5 = (2,3,0,1).$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$. Calculer les dimensions respectives de F, G, $F \cap G$, $F + G$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001019]

Exercice 1095

Soient $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t = 0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y = z+t\}$. Déterminer $\dim E, \dim F, \dim(E+F), \dim(E \cap F)$. [001020]

Exercice 1096

Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (z, x-y, y+z)$ est un automorphisme. [001021]

Exercice 1097

Soit E un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{L}(E) / \mathrm{Im} f = \ker f$$

[001022]

Exercice 1098

Montrer qu'il existe une unique forme linéaire f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,2) = 2$ et $f(-2,1) = 5$. Déterminer le noyau et l'image de f. [001023]

Exercice 1099

Déterminer suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ le rang de la famille de vecteurs $e_1 = (1, x, -1), e_2 = (x, 1, x), e_3 = (-1, x, 1)$. [001024]

Exercice 1100

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $x_0 \in E / f^2(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base.
2. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de base (id, f, f^2).

[001025]

Exercice 1101

Soit E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés :

(i) $\ker f = \ker f^2$.

(ii) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

(iii) $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

[001026]

Exercice 1102

Soit E et F de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001027]

Exercice 1103

Soit $(f, g) \in (L(E))^2$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, montrer les inégalités :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \inf(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

(on pourra utiliser $g_{|\ker(f \circ g)} = h$ dont on déterminera le noyau) [001028]

Exercice 1104

Soit $(f, g) \in (L(E))^2$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, tel que : $(f+g)$ est inversible et $fg = 0$. Montrer que :

$$rg(f) + rg(g) = n.$$

[001029]

Exercice 1105

Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) | U \subset Ker(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. Si E est de dimension finie, quelle est la dimension de A ?
[001030]

Exercice 1106

Soient $E_0, E_1, \ldots, E_n$ $n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif K, de dimensions respectives $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, f_k \in L(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

— f_0 est injective ;
— $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, \mathrm{Im} f_{j-1} = Ker(f_j)$;
— f_{n-1} est surjective.

Montrer que
$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\alpha_j=0.$$

[001031]

Exercice 1107

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E, espace vectoriel de dimension n. Montrer que :
$$\dim(H_1\cap H_2)\geqslant n-2.$$
Généraliser. [001032]

Exercice 1108

Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis d'un endomorphisme surjectif et non injectif. [001033]

Exercice 1109

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f\in L(E)$, montrer l'équivalence :
$$E=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow \mathrm{Im}f=\mathrm{Im}f^2.$$
Donner un contre-exemple quand $\dim E=+\infty$. [001034]

Exercice 1110

Soit $(f,g)\in L(E,F)^2$ avec E,F de dimension finie. On suppose
$$\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g).$$
Montrer que :
$$E=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}f;$$
$$\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Im}g=\{0\}.$$

[001035]

Exercice 1111

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f,g)\in L(E)^2$ avec $E=\mathrm{Im}f+\mathrm{Im}g=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes. [001036]

Exercice 1112

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f_1,...,f_k)$ des projecteurs de E. Montrer l'équivalence :
$$\left[\forall (i,j)\in\{1,...,k\}^2, i\neq j\Rightarrow f_if_j=0\right]\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{k}f_i \text{ est un projecteur.}$$

[001037]

Exercice 1113

Soit $f\in L(E)$ où E est un K-espace vectoriel de dimension n, tel que :
$$f^2=-Id.$$

1. Montrer que f est inversible et que la dimension de E est paire, donc $n=2p$.

2. Soit $x \neq 0$, monter que x et $f(x)$ sont linéairement indépendants, et qu'ils engendrent un sous-espace stable de E.
3. Montrer qu'il existe p sous-espaces de dimension deux stables par f, $E_1 ... E_p$ tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. En déduire une "bonne" formule de calcul de f.

[001038]

Exercice 1114

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $f \in L(E)$ nilpotente. On note $q \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f, i.e. :

$$q = \inf\{j \in \mathbb{N}^* | f^j = 0\}.$$

1. Montrer que : $\exists x_0 \in E$ tel que $\{x_0, f(x_0), ..., f^{q-1}(x_o)\}$ soit libre. En déduire $q \leqslant n$.
2. Soit $r = \dim Ker(f)$. Montrer que $r > 0$ et que

$$\frac{n}{r} \leqslant q \leqslant n + 1 - r.$$

[001039]

Exercice 1115 $\dim H = \dim K \Leftrightarrow H$ et K ont un supplémentaire commun

Soient H, K deux sev d'un ev E de dimension finie. Montrer que $\dim H = \dim K$ si et seulement si H et K ont un supplémentaire commun (par récurrence sur codim$H$).

Correction ▼ [003322]

Exercice 1116 **IT

E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ (muni des opérations usuelles). On considère les vecteurs $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,1,1,3)$, $e_3 = (2,1,1,1)$, $e_4 = (-1,0,-1,2)$ et $e_5 = (2,3,0,1)$. Soient alors $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_4, e_5)$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$?

Correction ▼ [005183]

Exercice 1117 **IT

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(H_1 \cap H_2)$. Interprétez le résultat quand $n = 2$ ou $n = 3$.

Correction ▼ [005184]

Exercice 1118 ***I

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
Démontrer que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Correction ▼ [005575]

Exercice 1119 **

Soient F, G et H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
Montrer que : $\dim(F + G + H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(G \cap H) - \dim(H \cap F) + \dim(F \cap G \cap H)$.
Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

Correction ▼ [005576]

Exercice 1120 ***

Soient F_1, F_2,..., F_n n sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ ($n \geqslant 2$).
Montrer que $\dim(F_1 + ... + F_n) \leqslant \dim F_1 + ... + \dim F_n$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Correction ▼ [005577]

Exercice 1121 **I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 3$. Montrer que l'intersection de $n-1$ hyperplans de E est non nulle.

Correction ▼ [005578]

Exercice 1122 **

Soient $(x_1,..,x_n)$ une famille de n vecteurs de rang r et $(x_1,...,x_m)$ une sous famille de rang s ($m \leqslant n$ et $s \leqslant r$). Montrer que $s \geqslant r+m-n$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005579]

Exercice 1123 **

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soient f et g deux applications linéaires de E dans F. Montrer que $|\mathrm{rg} f - \mathrm{rg} g| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g$.

Correction ▼ [005580]

Exercice 1124 **

Soient E, F et G, trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels puis $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Montrer que $\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g - \dim F \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg} f, \mathrm{rg} g\}$.

Correction ▼ [005581]

36 106.99 Autre

37 107.01 Définition

Exercice 1125

Notations :
$\mathscr{C}$: ensemble des fonctions numériques continues sur $[0,1]$.
$\mathscr{C}_d$: ensemble des fonctions numériques ayant une dérivée continue sur $[0,1]$.
$\mathscr{C}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$: définis de façon analogue pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
$\mathscr{P}$: ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$.
$\mathscr{P}_n$: ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, de degré $\leqslant n$.

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x-3$.
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$.
5. $\mathscr{C} \to \mathscr{C} : f \mapsto \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$.
6. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(3/4)$.
7. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$.
8. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x+5y$.
9. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{3x^2+5y^2}$.
10. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sin(3x+5y)$.
11. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-x,y)$.
12. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy$.

13. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $x^2+y^2 \neq 0$ et0 sinon.
14. $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_d : f \mapsto \{x \mapsto e^{-x}\int_0^1 f(t)\,dt\}$.
15. $\mathscr{P} \to \mathscr{P}_n : A \mapsto$ quotient de A par B à l'ordre n selon les puissances croissantes (B et n fixés, avec $B(0) \neq 0$).
16. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : M \mapsto M'$ défini par : $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ si $\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{0}$ et 0 sinon.
17. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V} = (4,-1,1/2)$.
18. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
19. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t\in[0,1]} f(t)$.
20. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t\in[0,1]} f(t) - \min_{t\in[0,1]} f(t)$.
21. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto$ la solution du système d'équations en (u,v) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3u-v & = & x \\ 6u+2v & = & y. \end{array}\right.$$

22. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto$ le symétrique de (x,y) par rapport à la droite d'équation $x+y-a=0$ (discuter selon les valeurs de a).
23. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto$ la projection de (x,y,z) sur le plan $x+y+z-a=0$ parallèlement à Oz (discuter selon les valeurs de a).
24. $\mathscr{C}_d \to \mathscr{C} : f \mapsto f'$.
25. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (2x-3y+z, x-y+z/3)$.
26. $\mathbb{R} \to \mathscr{C}d : \lambda \mapsto$ la solution de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{x^2+1} = 0$ valant λ en $x_0 = 1$.
27. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 \ln(1+|f(t)|)\,dt$.
28. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto$ la 17-ième décimale de x (en écriture décimale).
29. $\mathscr{C}_d \to \mathbb{R} : f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t)\,dt$.
30. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$.
31. $\mathbb{R} \times \mathscr{C}(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}) : (\lambda, f) \mapsto$ la primitive de f qui vaut λ en $x_0 = \pi$.
32. $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto f'(x) + f(x) \cdot \sin x\}$.

[000927]

Exercice 1126

Soient f et g, applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \mathrm{Re}(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-e.v., et non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-e.v. [000928]

Exercice 1127

Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_5(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000929]

Exercice 1128

Soit E un espace vectoriel de dimension n et ϕ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000930]

Exercice 1129

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des formes linéaires sur $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$f \mapsto f(0), \quad f \mapsto f(1)-1, \quad f \mapsto f''(3), \quad f \mapsto (f'(2))^2, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)dt.$$

[002431]

Exercice 1130

1. On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
3. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
4. Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ et de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
5. Quelle est la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport k dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
6. Quelle est la matrice de la symétrie centrale de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
7. Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

[002740]

Exercice 1131

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y+z+t, x+y+z+t, 2x+2y+2z+2t).$$

1. Montrer que f est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Vérifier que les vecteurs $\vec{a} = (1,-1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,-1,0)$ et $\vec{c} = (0,0,1,-1)$ appartiennent à $\ker f$.
3. Vérifier que le vecteur $\vec{d} = (5,5,5,10)$ appartient à $\operatorname{Im} f$.

[002741]

Exercice 1132

Soit l'application $f\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+y+3z, -x-y-z).$$

1. Justifier que f est linéaire.
2. Donner la matrice de A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f, noté $\ker f$.
   (b) L'application f est-elle injective ?
4. (a) Donner le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$.
   (b) L'application f est-elle surjective ?

[002742]

Exercice 1133 Endomorphisme tel que tout vecteur non nul est propre

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $\big(\vec{x}, f(\vec{x})\big)$ est liée.

1. Montrer que si $\vec{x} \neq \vec{0}$, il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.
2. Comparer $\lambda_{\vec{x}}$ et $\lambda_{\vec{y}}$ lorsque $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre.
3. Montrer que f est une homothétie.

[003309]

Exercice 1134 Applications $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}$

On considère que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Donner une base de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ peut se mettre sous la forme : $f(z) = az + b\bar{z}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.
3. CNS sur a et b pour que f soit bijectif ?

Correction ▼ [003312]

Exercice 1135 **T

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f((1,0,0)) = (1,1)$ puis $f((0,1,0)) = (0,1)$ et $f((0,0,1)) = (-1,1)$. Calculer $f((3,-1,4))$ et $f((x,y,z))$ en général.
2. Déterminer $\text{Ker} f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\text{Im} f$.

Correction ▼ [005170]

Exercice 1136 ***I

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\text{Ker}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$.

Correction ▼ [005186]

Exercice 1137 **

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul. Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction ▼ [005188]

Exercice 1138 **

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f((x,y)) = (x', y')$.

1. Rappeler l'écriture générale de (x', y') en fonction de (x,y).
2. Si on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (où $i^2 = -1$), montrer que : $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 /\ \forall z \in \mathbb{C},\ z' = az + b\bar{z}$.
3. Réciproquement, montrer que l'expression ci-dessus définit un unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (en clair, l'expression complexe d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ est $z' = az + b\bar{z}$).

Correction ▼ [005189]

---

38 107.02 Image et noyau, théorème du rang

Exercice 1139

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, on définit l'application $f : F \times G \to \mathbb{R}^n$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

[000931]

Exercice 1140

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes.

(1) $$\mathbb{R}^n = Im(f) \bigoplus Ker(f)$$

(2) $$Im(f) = Im(f^2)$$

(3) $$Ker(f) = Ker(f^2)$$

[000932]

Exercice 1141

Soient : E, F et G trois sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. On rappelle que $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par $g \circ f(v) = g(f(v))$, pour tout vecteur v de E.

1. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire.
2. Montrer que $f\big(\mathrm{K}er(g \circ f)\big) = \mathrm{K}erg \cap \mathrm{I}mf$.

[000933]

Exercice 1142

Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f\colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000934]

Exercice 1143

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $p \leqslant n$ on note e_p le polynôme $x \mapsto x^p$. Soit f l'application définie sur E par $f(P) = Q$ avec $Q(x) = P(x+1) + P(x-1) - 2P(x)$.

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
2. Calculer $f(e_p)$; quel est son degré ? En déduire $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de $\operatorname{Im} f$; montrer qu'il existe un polynôme unique P tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

[000935]

Exercice 1144

Soit E, F, G trois espaces vectoriels, f et g deux applications linéaires $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$; montrer que :

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g \cap \operatorname{Im} f) = f^{-1}(\ker g).$$

[000936]

Exercice 1145

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et N deux sous-espaces vectoriels de E ; donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire f de E dans E vérifiant : $f(E) = F$ et $\ker f = N$.

[000937]

Exercice 1146

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions respectives n, p, q, f et g deux applications linéaires $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ telles que $g \circ f = 0$. Quelle relation existe-t-il entre le rang de f et celui de g ? [000938]

Exercice 1147

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f une application linéaire de E dans E ; montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes :

(1) $E = \mathrm{Im}\ f \oplus \ker f$,

(2) $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2$,

(3) $\ker f = \ker f^2$.

[000939]

Exercice 1148

Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
2. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
4. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
5. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$, alors $e_1, e_2, \dots, e_p$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Ker} u$.

[000940]

Exercice 1149

Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\mathrm{Ker}\ (\varphi) \cap \mathrm{Im}\ (\varphi) = \{0\}$. Montrer que, si $x \notin \mathrm{Ker}\ (\varphi)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi^n(x) \neq 0$.

Correction ▼ [000941]

Exercice 1150

Pour des applications linéaires $f : E \to F$, $g : F \to G$, établir l'équivalence

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g.$$

Soit f un endomorphisme d'un e.v. E, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2i_E = 0$. Etablir $\mathrm{Im}(f - i_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$; $\mathrm{Im}(f + 2i_E) \subset \mathrm{Ker}(f - i_E)$; $E = \mathrm{Ker}(f - i_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$. [000942]

Exercice 1151

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

(i) $\ker f = \mathrm{Im} f$

(ii) $f^2 = 0$ et $n = 2 \cdot \mathrm{rg}(f)$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000943]

Exercice 1152

Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1. Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
2. Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

[000944]

Exercice 1153

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
[000945]

Exercice 1154

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ une application linéaire de E dans lui-même. Posons $K_n = \mathrm{Ker}\ (\varphi^n)$ et $I_n = \mathrm{Im}\ (\varphi^n)$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $K_n = K_{n_0}$. Déduiser en que pour tout $n \geqslant n_0$ on a également $I_n = I_{n_0}$. [000946]

Exercice 1155

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont stables par g.
Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000947]

Exercice 1156

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ (on remarquera que $f \circ (f^2 - f - id) = 0$).
[000948]

Exercice 1157

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$.
Indication ▼ Correction ▼ [000949]

Exercice 1158

Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) | U \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. [000950]

Exercice 1159

Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $\mathrm{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Correction ▼ [000951]

Exercice 1160

Soit $(u, v) \in (L(E))^2$, tels que $u^2 = u$ et $vu = 0$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v).$$

[000952]

Exercice 1161

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, et λ un nombre réel. Démontrer que la donnée de

$$\begin{cases} \phi(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_2) &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_3) &= \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_3 \end{cases}$$

définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Ecrire l'image du vecteur $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ? surjective ? [000953]

Exercice 1162

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de $\begin{cases} \phi(e_1) &= e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) &= e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) &= e_1 + te_3 \end{cases}$ définit une application linéaire ϕ de E dans E. Écrire le transformé du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000954]

Exercice 1163

E étant un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, f une application linéaire de E dans E, construire dans les trois cas suivants deux applications linéaires bijectives u et v de E dans E telles que $f = u - v$.

— f est bijective.
— $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$.
— f est quelconque.

[000955]

Exercice 1164

Pour les applications linéaires suivantes, déterminer $\ker f_i$ et $\mathrm{Im}\, f_i$. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_4(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000956]

Exercice 1165

Soit $f \in L(E)$ non nul ; montrer que f est injective si et seulement si pour tout couple (E_1, E_2) de sous-espaces supplémentaires de E, la somme $f(E_1) + f(E_2)$ est directe (i.e. $f(E_1)$ et $f(E_2)$ sont supplémentaires). [000957]

Exercice 1166

Soit $f \in L(E)$ où E est un $K-$espace vectoriel. On suppose :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in K, f(x) = \lambda x.$$

Montrer :

$$\exists \mu \in K, f = \mu id.$$

[000958]

Exercice 1167

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A et B deux polynômes à coefficients réels de degré $n+1$. On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \iff A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux.}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000959]

Exercice 1168

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f + id$. Montrer que f est un automorphisme. [000960]

Exercice 1169

Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que $E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. Déduire de 2. que si E est de dimension finie n, il existe une base $\beta = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, telle que $\forall i, f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ avec $\lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 2$.

[000961]

Exercice 1170

Montrer que si $p < q$ il n'existe pas d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Montrer que si $q < p$ il n'existe pas non plus d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. [000962]

Exercice 1171

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et ϕ une application linéaire de E dans F. Montrer que ϕ est un isomorphisme si et seulement si l'image par ϕ de toute base de E est une base de F.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000963]

Exercice 1172

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et φ une application linéaire bijective de E dans F. Montrer que la bijection réciproque φ^{-1} est linéaire. Une telle application est dite un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels de E à valeurs dans F si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

[000964]

Exercice 1173

Soit E un espace vectoriel de dimension finie φ et ψ deux applications linéaires de E dans lui-même telles que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$. Montrer que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$. [000965]

Exercice 1174

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $u \circ v = 0$ si et seulement si l'image de v est contenue dans le noyau de u.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose dans cette question que u et v s'expriment dans cette base par

$$u(e_1) = e_1, \qquad u(e_i) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 1,$$

$$v(e_2) = e_2, \qquad v(e_i) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 2.$$

Trouver les matrices de u, v et $u \circ v$ dans cette base.

3. Si u est un endomorphisme quelconque non nul de E, quelle condition doit vérifier le noyau de u pour qu'il existe un endomorphisme non nul v tel que $u \circ v = 0$? Dans ce cas, u est-il bijectif ?

[002441]

Exercice 1175

1. Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
2. Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
3. Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

[002743]

Exercice 1176

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de A.
2. Déterminer une base de l'image de A.

[002744]

Exercice 1177

Soit la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de B.
2. Déterminer une base de l'image de B.

[002745]

Exercice 1178

Soit la matrice
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de C.
2. Déterminer une base de l'image de C.

[002746]

Exercice 1179

Pour chaque couple de matrices (A_i, b_i), $1 \leqslant i \leqslant 5$, ci-dessous

1. donner la nature de l'ensemble des solutions du système $A_i X = b_i$;
2. donner une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions de $A_i X = b_i$;
3. donner une base de l'image et une base du noyau de A_i.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; [002770]

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Exercice 1180

Calculer une base de l'image et une base du noyau de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+y+z, 2x+y+z, 2x+2y+z, y+z) \end{array}$$

Quel est le rang de f ? [002771]

Exercice 1181 $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.
2. Montrer que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

Correction ▼ [003310]

Exercice 1182 $f^3 = \mathrm{id}$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}) = E$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = \operatorname{Im}(f^2 + f + \mathrm{id})$ et $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$.

[003311]

Exercice 1183 Supplémentaire d'un hyperplan

Soit E un K-ev et $f : E \to K$ une forme linéaire non identiquement nulle. On note $H = \operatorname{Ker} f$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f = K$.
2. Soit $\vec{u} \in E \setminus H$ et $F = \operatorname{vect}(\vec{u})$. Montrer que $F \oplus H = E$.

[003313]

Exercice 1184 Commutants itérés

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose pour $v \in \mathscr{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, et on note $c_i = \operatorname{Ker} \varphi^i$ ($c_0 = \{0\}$, c_1 est le commutant de u, c_2 est l'ensemble des v tels que $v \circ u - u \circ v$ commute avec u,...).

1. Calculer $\varphi(v \circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.
2. Montrer que $c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} c_i$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

Correction ▼ [003316]

Exercice 1185 Applications du thm du rang

Soient E, F deux K-ev et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que si H est un sev de E, alors
   $\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \mathrm{Ker} f)$.
2. Montrer que si K est un sev de F, alors
   $\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f)$.

[003327]

Exercice 1186 Application du thm du rang

Soient E, F deux ev de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$.
Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u+v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker} u \cap \mathrm{Ker} v) + \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v)$.
(considérer $w = u_{|\mathrm{Ker}(u+v)}$)

[003328]

Exercice 1187 Rang de $f \circ g$

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Établir :

1. $\dim \mathrm{Ker}(f \circ g) \leqslant \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Ker} g$.
2. $\dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} g) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f)$.
3. $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim E \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

[003329]

Exercice 1188 CNS pour que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ soient supplémentaires

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$.
2. $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$.
3. $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = E$.
4. $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{\vec{0}\}$.
5. $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$.

[003330]

Exercice 1189 $fog = 0$

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Trouver une inégalité liant les rangs de f et de g. Peut-on avoir égalité ? [003331]

Exercice 1190 Rang de $f+g$

Soient E, F deux ev, E de dimension finie, et $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Démontrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im}\, g = \{\vec{0}_F\}$ et $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = E$.

Correction ▼ [003332]

Exercice 1191 $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, g = E$

Soient E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, g = E$.
Montrer que les sommes sont directes.

[003333]

Exercice 1192 $f^3 = 0$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} f^2 \leqslant \dim E$.
2. Montrer que $2\mathrm{rg} f^2 \leqslant \mathrm{rg} f$ (appliquer le théorème du rang à $f_{|\mathrm{Im} f}$).

[003334]

Exercice 1193 $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$

Soit E de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\begin{cases} f \circ g = 0 \\ f + g \in GL(E). \end{cases}$

Montrer que $\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g = \dim E$.

Correction ▼ [003335]

Exercice 1194 f tq $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont imposés

Soit E un K-ev de dimension finie et H, K deux sev fixés de E.

1. A quelle condition existe-t-il un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im} f = H$ et $\mathrm{Ker} f = K$?
2. On note $\mathscr{E} = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \mathrm{Im} f = H \text{ et } \mathrm{Ker} f = K\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un groupe pour $\circ$ si et seulement si $H \oplus K = E$.

Correction ▼ [003336]

Exercice 1195 Thms de factorisation

Soient E, F, G trois K-ev avec $\dim(G)$ finie.

1. Soient $u \in \mathscr{L}(F, E)$ et $v \in \mathscr{L}(G, E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(G, F)$ tel que $v = u \circ h$ si et seulement si $\mathrm{Im} v \subset \mathrm{Im} u$.
2. Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(G, F)$ tel que $u = h \circ v$ si et seulement si $\mathrm{Ker} v \subset \mathrm{Ker} u$.

[003337]

Exercice 1196 Noyaux itérés

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.
2. Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots = N_{p+k} = \ldots$
3. Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.
4. Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.
5. Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.

[003349]

Exercice 1197 Dimension des g tq $f \circ g = 0$ et/ou $g \circ f = 0$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $K = \mathrm{Ker} f$, $I = \mathrm{Im} f$, $\mathscr{K} = \{g \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } f \circ g = 0\}$ et $\mathscr{I} = \{g \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } g \circ f = 0\}$.

1. Montrer que $\mathscr{K}$ et $\mathscr{I}$ sont des sev de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que : $g \in \mathscr{K} \iff \mathrm{Im} g \subset K$, et : $g \in \mathscr{I} \iff \mathrm{Ker} g \supset I$.
3. (a) Montrer que l' application $\Phi : \mathscr{K} \to \mathscr{L}(E, K), g \mapsto g^{|K}$ est un isomorphisme d'ev. En déduire $\dim \mathscr{K}$.
   (b) Chercher de même $\dim \mathscr{I}$ en introduisant un supplémentaire I' de I.
   (c) Chercher aussi $\dim(\mathscr{K} \cap \mathscr{I})$.

Correction ▼ [003350]

Exercice 1198 Rang de $f \mapsto u \circ f \circ v$

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$: $f \mapsto u \circ f \circ v$.

Correction ▼ [003351]

Exercice 1199 Idéaux de $\mathscr{L}(E)$

Un idéal à gauche de $\mathscr{L}(E)$ est un sev $\mathscr{I}$ de $\mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall\, f \in \mathscr{I}$, $\forall\, g \in \mathscr{L}(E)$, $f \circ g \in \mathscr{I}$.
Soit $\mathscr{I}$ un idéal à gauche.

1. Montrer que si $f \in \mathscr{I}$ et $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$, alors $g \in \mathscr{I}$.
2. Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{I}$. Montrer qu'il existe $g_1, g_2 \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\operatorname{Im}(f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2) = \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2$.
3. Soit $f \in \mathscr{I}$ tel que $\operatorname{rg}(f)$ soit maximal. Montrer que $\mathscr{I} = \{g \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f\} = \{f \circ g \text{ tq } g \in \mathscr{L}(E)\}$.

[003353]

Exercice 1200 **I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un élément de $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $[\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}]$ et $[\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f]$ (où $f^2 = f \circ f$).
2. Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
   Montrer que
   $$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow Id - p \text{ projecteur}]$$
   puis que
   $$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(Id - p) \text{ et } \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(Id - p) \text{ et } E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p].$$
3. Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q \Leftrightarrow p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p]$.
4. p et q étant deux projecteurs vérifiant $p \circ q + q \circ p = 0$, montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\operatorname{Ker}(p+q)$ en fonction de $\operatorname{Ker} p$, $\operatorname{Ker} q$, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$.

Correction ▼ [005171]

Exercice 1201 ****

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$.

1. Montrer que $[\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E)/\ u = w \circ v]$.
2. En déduire que $[v \text{ injectif} \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E)/\ w \circ v = Id_E]$.

Correction ▼ [005181]

Exercice 1202 ***

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

— Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. f est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$.

— Mêmes questions avec $g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & \int_0^x P(t)\, dt \end{array}$.

Correction ▼ [005182]

Exercice 1203 **T

Soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Correction ▼ [005187]

Exercice 1204 **I

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et u et v deux applications linéaires de E dans F. Montrer que : $|\text{rg}u - \text{rg}v| \leqslant \text{rg}(u+v) \leqslant \text{rg}u + \text{rg}v$.

Correction ▼ [005190]

Exercice 1205 ****

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Montrer que, pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, on a :
$$(\text{Ker}f = \text{Im}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\text{rg}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists g \in \mathscr{L}(E)/\ f \circ g + g \circ f = Id_E).$$
2. On suppose $\text{Ker}f = \text{Im}f$. Montrer qu'il existe une base $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_p)$ de E telle que :
$$\forall i \in \{1, ..., p\},\ f(u_i) = 0 \text{ et } f(v_i) = u_i.$$

Correction ▼ [005191]

Exercice 1206 ***I Le théorème des noyaux itérés

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E non injectif. Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = \text{Ker}f^k$ et $I_k = \text{Im}f^k$ (avec la convention $f^0 = Id_E$).

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k)$.
2. (a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2})$.
   (b) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N}/\ \forall k \in \mathbb{N},\ (k < p \Rightarrow N_k \neq N_{k+1} \text{ et } k \geqslant p \Rightarrow N_k = N_{k+1})$.
   (c) Montrer que $p \leqslant n$.
3. Montrer que si $k < p$, $I_k = I_{k+1}$ et si $k \geqslant p$, $I_k = I_{k+1}$.
4. Montrer que $E = I_p \oplus N_p$ et que f induit un automorphisme de I_p.
5. Soit $d_k = \text{dim}I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées I_k décroît de moins en moins vite).

Correction ▼ [005192]

Exercice 1207 ***I

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$. Montrer que $E = \text{Ker}(f - 2Id) \oplus \text{Ker}(f - 3Id)$.

Correction ▼ [005194]

Exercice 1208 ***

Soient E un espace de dimension finie et F et G deux sous-espaces de E. Condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $F = \text{Ker}f$ et $G = \text{Im}f$.

Correction ▼ [005582]

Exercice 1209 ***

Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Montrer que :

1. $(f$ non injective$) \Leftrightarrow (f = 0$ ou f diviseur de zéro à gauche$)$.
2. $(f$ non surjective$) \Leftrightarrow (f = 0$ ou f diviseur de zéro à droite$)$.

Correction ▼ [005583]

Exercice 1210 **I Noyaux itérés

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ puis $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ et $I = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. ($N$ est le nilespace de f et I le cœur de f)

1. (a) Montrer que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.
   (b) Montrer que N et I sont stables par f.
   (c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})$.
2. On suppose de plus que $\dim E = n$ entier naturel non nul.
   (a) Soit $A = \{k \in \mathbb{N}/\ N_k = N_{k+1}\}$ et $B = \{k \in \mathbb{N}/\ I_k = I_{k+1}\}$. Montrer qu'il existe un entier $p \leqslant n$ tel que $A = B = \{k \in \mathbb{N}/\ k \geqslant p\}$.
   (b) Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.
   (c) Montrer que $f_{/N}$ est nilpotent et que $f_{/I} \in GL(I)$.
3. Trouver des exemples où
   (a) A est vide et B est non vide,
   (b) A est non vide et B est vide,
   (c) (****) A et B sont vides.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $d_k = \dim(I_k)$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction ▼ [005586]

Exercice 1211 ***

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. Montrer que $[(\forall g \in \mathscr{L}(F,E),\ f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0) \Rightarrow f \text{ bijective}]$.
2. On pose $\dim E = p$, $\dim F = n$ et $\mathrm{rg} f = r$. Calculer la dimension de $\{g \in \mathscr{L}(F,E)/\ f \circ g \circ f = 0\}$.

Correction ▼ [005601]

Exercice 1212 **I

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. u est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ u(P) = P(X+1) - P$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}u$ et $\mathrm{Im}u$.
2. Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005602]

39 107.03 Morphismes particuliers

Exercice 1213

Soient U et V deux ensembles non vides et f une application de U à valeurs dans V. Le *graphe* de f est le sous-ensemble de $U \times V$ défini par $\mathscr{G}_f = \{(x,y) \in U \times V \text{ tels que } y = f(x)\}$.

1. On suppose maintenant que U et V sont des espaces vectoriels. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel de $U \times V$.

2. Montrer qu'une partie H de $U \times V$ est le graphe d'une application linéaire de U dans V si et seulement si les trois conditions qui suivent sont satisfaites :
   i) La projection canonique $H \to U$ définie par $(x,y) \mapsto x$ est surjective.
   ii) H est un sous-espace vectoriel de $U \times V$.
   iii) $H \cap (\{0_U\}) \times V) = \{0_{U\times V}\}$. ($0_U$ et $0_{U\times V}$ sont les éléments neutres respectifs de U et $U \times V$.)
3. On identifie $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par l'isomorphisme $(x,y,z,t) \mapsto ((x,y),(z,t))$. Enoncer des conditions nécéssaires et suffisantes pour que E soit le graphe d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.
4. Montrer que E est le graphe d'une application linéaire φ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Déterminer sa matrice dans une base que l'on définira au préalabe.

[000966]

Exercice 1214 Projecteur et involution

Soit E un espace vectoriel ; on note i_E l'identité sur E. Un endomorphisme u de E est un **projecteur** si $u \circ u = u$.

1. Montrer que si u est un projecteur alors $i_E - u$ est un projecteur. Vérifier aussi que $\mathrm{Im} u = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et que $E = \mathrm{Ker} u \oplus \mathrm{Im} u$.
   Un endomorphisme u de E est appelé *involutif* si $u \circ u = i_E$.
2. Montrer que si u est involutif alors u est bijectif et $E = \mathrm{Im}(i_E + u) \oplus \mathrm{Im}(i_E - u)$.
   Soit $E = F \oplus G$ et soit $x \in E$ qui s'écrit donc de façon unique $x = f + g$, $f \in F$, $g \in$G. Soit $u : E \ni x \mapsto f - g \in E$.
3. Montrer que u est involutif, $F = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et $G = \{x \in E;\ u(x) = -x\}$.
4. Montrer que si u est un projecteur, $2u - i_E$ est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.

[000967]

Exercice 1215

Soient $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0\}$. On désigne par ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base $\{e_1, e_2\}$ de P et $\{e_3\}$ une base de D. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ puis que $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallélement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}(p, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $A = \mathrm{Mat}(p, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier $A^2 = A$.
3. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallélement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}(s, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $B = \mathrm{Mat}(s, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier $B^2 = I$, $AB = A$ et $BA = A$.

[000968]

Exercice 1216

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Montrer que l'intersection de deux hyperplans de E a une dimension supérieure ou égale à $n-2$. Montrer que, pour tout $p \leqslant n$, l'intersection de p hyperplans a une dimension supérieure ou égale à $n-p$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application e_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e_y(P(X)) = P(y)$ (i.e. l'application e_y est l'évaluation en y) est linéaire. Calculer la dimension de son noyau.
3. Même question avec l'application e'_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e'_y(P(X)) = P'(y)$ (en désignant par P' le polynôme dérivé de P).
4. Démontrer, à l'aide de ces deux résultats, qu'il existe dans $\mathbb{R}_6[X]$ un polynôme P non nul et ayant les propriétés suivantes : $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ et $P'(4) = P'(5) = P'(6) = 0$.

[000969]

Exercice 1217

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y,-2x+4y)$. Montrer que f est la bîîîp par rapport à bîîîp parallèlement à bîîîp. [000970]

Exercice 1218

E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \bigoplus G$. On pose $s(u) = u_F - u_G$ où $u = u_F + u_G$ est la décomposition (unique) obtenue grâce à $E = F \bigoplus G$. s est la symétrie par-rapport à F de direction G.

1. Montrer que $s \in L(E)$, que $u \in F \Leftrightarrow s(u) = u, u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u$, donner $\mathrm{Ker}(s)$ et calculer s^2.
2. Réciproquement si $f \in L(E)$ vérifie $f^2 = id_E$. On pose $p = \frac{f+id_E}{2}$. Calculer $f(u)$ en fonction de $p(u)$ et u. Vérifier que p est un projecteur, calculer son noyau et son image. Montrer que f est la symétrie par rapport à $F = \{u \in E | f(u) = u\}$ de direction $G = \{u \in E | f(u) = -u\}$.

[000971]

Exercice 1219

Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel, tels que $pq = qp$ (p et q commutent). Montrer que pq et $(p+q-pq)$ sont deux projecteurs de E, et que :

$$\mathrm{Im}(pq) = \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q,$$

$$\mathrm{Im}(p+q-pq) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q.$$

[000972]

Exercice 1220

Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel; donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur de E; donner alors $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$.
Indication : on montrera que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p \bigoplus \mathrm{Im}q$ et que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. [000973]

Exercice 1221

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000974]

Exercice 1222

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E,\ f(P)(X) = \frac{P(-X)-P(X)}{2}.$$

Montrer que $f \in L(E)$, que $E = \mathrm{Im}f \bigoplus \mathrm{Ker}(f)$ mais que $f^2 = -f$. Quel théorème cet exemple illustre t-il ?
[000975]

Exercice 1223

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1-X)P'.$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\ker f$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000976]

Exercice 1224

Soit $E = C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ et $U : E \to E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

et $U(f)(0) = f(0)$. Montrer que $U \in L(E)$, déterminer $\mathrm{Ker}(U)$ et $\mathrm{Im}(U)$. [000977]

Exercice 1225

On désigne par $\mathscr{P}_q$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à q, et $\mathscr{O}_q$ l'espace vectoriel des polynômes d'ordre supérieur ou égal à q, c'est-à-dire divisibles par x^q. P étant un polynôme, on note $T(P)$ le polynôme défini par :

$$T(P)(x) = xP(0) - \frac{1}{20}x^5 P^{(4)}(0) + \int_0^x t^2[P(t+1) - P(t) - P'(t)]\,dt.$$

1. Montrer que T est linéaire. Déterminer $T(e_i)$ où $e_0 = 1$, $e_1 = x$, $e_2 = x^2$, $e_3 = x^3$, $e_4 = x^4$, et vérifier que $T(\mathscr{P}_4) \subset \mathscr{P}_4$. Désormais, on considère T comme application linéaire de $\mathscr{P}_4$ dans $\mathscr{P}_4$. Écrire sa matrice par rapport à la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$.
2. Déterminer soigneusement les espaces $T(\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{O}_3)$ et $T(\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{O}_2)$.
3. La restriction T' de T à $\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{O}_2$ est-elle injective ? Sinon déterminer une base du noyau de T'.
4. Montrer que $\mathrm{Im}\, T = (\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{P}_1) \oplus (\mathscr{O}_3 \cap \mathscr{P}_4)$. Quel est le rang de T ?
5. Montrer que $\mathrm{Ker} T$ peut s'écrire sous la forme $(\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{P}_1) \oplus V$; expliciter un sous-espace V possible. Déterminer $\mathrm{Ker} T \cap \mathrm{Im}\, T$.
6. On cherche un vecteur non nul $u = ae_3 + be_4$ de $\mathscr{O}_3 \cap \mathscr{P}_4$, et un nombre réel λ, tels que $T(u) = \lambda u$. Écrire les équations que doivent vérifier a, b, λ. Montrer qu'il existe deux valeurs possibles de λ, λ_1 et λ_2, telles $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; les calculer. Trouver deux vecteurs non nuls u_3 et u_4 de $\mathscr{O}_3 \cap \mathscr{P}_4$ tels que $T(u_3) = \lambda_1 u_3$ et $T(u_4) = \lambda_2 u_4$.
7. On pose $u_0 = e_1$, $u_1 = e_2 - 4e_3 + 3e_4$, $u_2 = e_0$. Montrer que $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base de $\mathscr{P}_4$. Écrire la matrice de T dans cette base.

[000978]

Exercice 1226

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $C^\infty(\mathbb{R})$ ($\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ est fixé) :

$$f \mapsto f + \phi, \quad f \mapsto \phi f, \quad f \mapsto f \circ \phi, \quad f \mapsto \phi \circ f, \quad f \mapsto \int f, \quad f \mapsto f'.$$

Lesquelles sont des endomorphismes de $C^0(\mathbb{R})$?

Pour quelles valeurs de ϕ les endomorphismes $\Phi : f \mapsto f \circ \phi$ et $D : f \mapsto f'$ commutent-ils (c'est-à-dire vérifient $D(\Phi f) = \Phi(Df), \forall f$) ? [002432]

Exercice 1227 Image d'une somme, d'une intersection

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F. Que pouvez-vous dire de $f(E_1 + E_2)$, $f(E_1 \cap E_2)$, $f^{-1}(F_1 + F_2)$, $f^{-1}(F_1 \cap F_2)$? [003306]

Exercice 1228 Effet sur les familles libres et génératrices

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.

2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.

[003307]

Exercice 1229 $f(\mathrm{Ker}(g \circ f))$

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f$. [003308]

Exercice 1230 Permutation de coordonnées dans K^n

Soit $\sigma \in S_n$ (groupe symétrique) et $f_\sigma : K^n \to K^n, (x_1, \dots x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$
On munit K^n de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.

1. Montrer que f_σ est un automorphisme d'algèbre.
2. Soit φ un automorphisme d'algèbre de K^n.
   (a) Montrer que la base canonique de K^n est invariante par φ (étudier $\varphi(e_i^2)$ et $\varphi(e_i \times e_j)$).
   (b) En déduire qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\varphi = f_\sigma$.
3. Montrer que $\{0\}$, $K(1, \dots, 1)$, $\{(x_1, \dots, x_n) \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et K^n sont les seuls sev stables par tous les endomorphismes f_σ.

[003314]

Exercice 1231 Isomorphisme $\circ$ projecteur

Soient E en ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = g \circ p$.
2. Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = p \circ g$.

[003338]

Exercice 1232 Centre de $\mathscr{L}(E)$

Soit E un K-ev de dimension finie. Le centre de $\mathscr{L}(E)$ est : $Z = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\vec{x} \in E$. Si $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ telle que $g(\vec{x}) = \vec{x}$ et $g \circ f(\vec{x}) = -f(\vec{x})$.
2. En déduire que Z est l'ensemble des homothéties.
3. Déterminer $Z' = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in GL(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

[003339]

Exercice 1233 Éléments réguliers dans $\mathscr{L}(E)$

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que : (f est injectif) $\iff$ ($\forall\, g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$).
2. Montrer que : (f est surjectif) $\iff$ ($\forall\, g \in \mathscr{L}(F),\ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0$).

[003340]

Exercice 1234 $f^2 = -\mathrm{id}$

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}_E$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $\vec{u} \in E$, on pose : $z\vec{u} = x\vec{u} + yf(\vec{u})$.

1. Montrer qu'on définit ainsi une structure de $\mathbb{C}$-ev sur E.
2. En déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.

[003341]

Exercice 1235 $f \circ f = 0$ et $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}$

1. Soit E un K-ev et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\begin{cases} f^2 = 0 \\ f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E. \end{cases}$

   Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.
2. Réciproquement, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$, et F un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$. Montrer que
   (a) $f^2 = 0$.
   (b) $\forall \vec{x} \in E$, il existe $\vec{y}, \vec{z} \in F$ uniques tels que $\vec{x} = \vec{y} + f(\vec{z})$.
   (c) Il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Correction ▼ [003342]

Exercice 1236 Endomorphisme nilpotent

Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, *l'indice* de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Soit $\vec{u} \in E \setminus \mathrm{Ker} f^{p-1}$. Montrer que la famille $\left(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{p-1}(\vec{u})\right)$ est libre.
2. En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.
3. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E) \dots$
   (a) en dimension finie.
   (b) pour E quelconque.
4. Dans $\mathscr{L}(K^2)$, soient f, g de matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vérifier que f est nilpotent, $g \in GL(K^2)$, mais $f + g \notin GL(K^2)$.

Correction ▼ [003343]

Exercice 1237 Matexo

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E,\ \exists p_x \in \mathbb{N}^*,\ f^{p_x}(x) = \vec{0}$. Montrer que f est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie. [003344]

Exercice 1238 Mines P' 1995

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotente d'indice n.
Soit $\phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), g \mapsto f \circ g - g \circ f$.

1. Montrer que $\phi^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que ϕ est nilpotente.
2. Soit $a \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathscr{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de ϕ.

[003345]

Exercice 1239 Endomorphisme cyclique

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que la famille $\left(f^k(\vec{u})\right)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E.

1. Montrer que $\left(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{n-1}(\vec{u})\right)$ est une base de E. (Considérer p maximal tel que $\mathscr{F} = \left(\vec{u}, \dots, f^{p-1}(\vec{u})\right)$ est libre, et prouver que $f^k(\vec{u})$ est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ pour tout entier k)
2. Montrer qu'un endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f.

[003346]

Exercice 1240 $u^2 = 0$ en dimension 3

Soit E un ev de dimension 3 et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ et $\vec{a} \in E$ tels que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ u(\vec{x}) = f(\vec{x})\vec{a}$.

[003347]

Exercice 1241 $(u, x, f(x))$ liée

Soit E un ev de dimension supérieure ou égale à 3 et $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Trouver tous les endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\forall\, \vec{x} \in E,$ la famille $(\vec{u}, \vec{x}, f(\vec{x}))$ est liée.

Correction ▼ [003348]

Exercice 1242 Automorphismes de $\mathscr{L}(E)$

Soit E un ev de dimension n et $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ un automorphisme d'algèbre. On note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base fixée de E, (φ_{ij}) la base de $\mathscr{L}(E)$ associée $\big(\varphi_{ij}(\vec{e}_k) = \delta_{jk}\vec{e}_i\big)$ et $\psi_{ij} = \Phi(\varphi_{ij})$.

1. Simplifier $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell}$.
2. En déduire qu'il existe $\vec{u}_1 \in E \setminus \{\vec{0}\}$ tel que $\psi_{11}(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$.
3. On note $\vec{u}_i = \psi_{i1}(\vec{u}_1)$. Montrer que $\psi_{ij}(\vec{u}_k) = \delta_{jk}\vec{u}_i$ et en déduire que $(\vec{u}_i)$ est une base de E.
4. Soit $f \in GL(E)$ définie par : $f(\vec{e}_i) = \vec{u}_i$. Montrer que : $\forall\, g \in \mathscr{L}(E),\ \Phi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$.

Correction ▼ [003354]

Exercice 1243 $f^2 = 0 \Rightarrow f = g \circ h$ avec $h \circ g = 0$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g, h \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

Correction ▼ [003355]

Exercice 1244 Barycentre de projections

Soient p, q deux projections de même base H et de directions F, G. Soit $\lambda \in K$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est encore une projection de base H. [003485]

Exercice 1245 Valeurs propres d'une projection

Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection. Montrer que pour tout $\lambda \in K \setminus \{-1\}$, $\mathrm{id}_E + \lambda p$ est un isomorphisme de E. [003486]

Exercice 1246 Projections ayant même base ou même direction

Soit E un espace vectoriel et $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projections.

1. Montrer que p et q ont même base si et seulement si : $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. Donner une condition analogue pour que p et q aient même direction.

[003487]

Exercice 1247 Somme de deux projecteurs

Soient p, q deux projections. Montrer les équivalences :

$$p + q \text{ est une projection } \Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Base}(p) \subset \mathrm{Dir}(q) \\ \mathrm{Base}(q) \subset \mathrm{Dir}(p). \end{cases}$$

Chercher alors la base et la direction de $p + q$. [003488]

Exercice 1248 $f\circ g=f$ et $g\circ f=g$

Soit E un K-ev. Trouver tous les couples (f,g) d'endomorphismes de E tels que : $\begin{cases} f\circ g=f \\ g\circ f=g. \end{cases}$

Correction ▼ [003489]

Exercice 1249 $f\circ g=\mathrm{id}$

Soit E un espace vectoriel et $f,g\in\mathscr{L}(E)$ tels que $f\circ g=\mathrm{id}_E$. Montrer que $g\circ f$ est une projection et déterminer ses éléments.

Correction ▼ [003490]

Exercice 1250 Projection $p+q-q\circ p$

Soient p,q deux projections telles que $p\circ q=0$. Montrer que $p+q-q\circ p$ est une projection, et déterminer ses éléments.

Correction ▼ [003491]

Exercice 1251 Endomorphisme de rang 1

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un unique $\lambda\in K$ tel que $f^2=\lambda f$.
Montrer que : $\lambda=1\iff \mathrm{id}-f$ est non injective $\iff \mathrm{id}-f$ est non surjective (même en dimension infinie).

Correction ▼ [003492]

Exercice 1252 Relation d'ordre sur les projecteurs

On munit l'ensemble des projections d'un ev E de la relation : $p\ll q\iff p\circ q=q\circ p=p$.

1. Montrer que c'est une relation d'ordre.
2. Soient p,q deux projections permutables. Montrer que $\sup(p,q)=p+q-p\circ q$ et $\inf(p,q)=p\circ q$.

[003493]

Exercice 1253 Expressions analytiques

Soit $E=K^3$, $F=\{\vec{X}=(x,y,z)$ tq $x+2y+z=0\}$ et $G=\mathrm{vect}\big(\vec{U}=(1,1,1)\big)$.

1. Vérifier que $F\oplus G=E$.
2. Soit s la symétrie de base F de direction G et $\vec{X}=(x,y,z)$. Déterminer $s(\vec{X})$.

Correction ▼ [003494]

Exercice 1254 Trace nulle

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et A une partie finie de $GL(E)$ stable par composition. On pose $u=\sum_{f\in A}f$. Montrer que $\mathrm{tr}(u)=0\Rightarrow u=0$.

Correction ▼ [003495]

Exercice 1255 ***I

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée n. Soit u un endomorphisme de E. On dit que u est nilpotent si et seulement si $\exists k\in\mathbb{N}^*/\ u^k=0$ et on appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers k (par exemple, le seul endomorphisme u, nilpotent d'indice 1 est 0).

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x,\ u(x),\dots,\ u^{p-1}(x))$ soit libre.
2. Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n=0$.
3. On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice n. Déterminer $\mathrm{rg}u$.

Correction ▼ [005193]

Exercice 1256 *** I

Soient E un espace de dimension finie n non nulle et f un endomorphisme nilpotent de E. Montrer que $f^n = 0$.

Correction ▼ [005584]

Exercice 1257 ***I

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

Correction ▼ [005587]

Exercice 1258 ***I

Soit E un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de E qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de E.

Correction ▼ [005588]

Exercice 1259 **I

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
Montrer que $(p+q$ projecteur$) \Leftrightarrow (p \circ q = q \circ p = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p))$.
Dans le cas où $p+q$ est un projecteur, déterminer $\mathrm{Ker}(p+q)$ et $\mathrm{Im}(p+q)$.

Correction ▼ [005589]

Exercice 1260 **I

Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Correction ▼ [005590]

Exercice 1261 ****

Soient $p_1,..., p_n$ n projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie. Montrer que $(p_1 + ... + p_n$ projecteur$) \Leftrightarrow \forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$.

Correction ▼ [005591]

Exercice 1262 ***

Soit E un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie n. Soient $p_1,..., p_n$ n projecteurs non nuls de E tels que $\forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$.

1. Montrer que tous les p_i sont de rang 1.
2. Soient $q_1,..., q_n$ n projecteurs vérifiant les mêmes égalités. Montrer qu'il existe un automorphisme f de E tel que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ q_i = f \circ p_i \circ f^{-1}$.

Correction ▼ [005592]

Exercice 1263 ***

Soit E un espace vectoriel. Soit G un sous-groupe fini de $\mathscr{GL}(E)$ de cardinal n. Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de G et p un projecteur d'image F. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{g\in G} g \circ p \circ g^{-1}$ est un projecteur d'image F.

Correction ▼ [005593]

Exercice 1264 ***

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme g de E tel que $f = g \circ p$.

Correction ▼ [005598]

Exercice 1265 **I

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent.

Correction ▼ [005599]

Exercice 1266 ***

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient f et g deux projecteurs distincts et non nuls de E tels qu'il existe deux complexes a et b tels que :

$$fg - gf = af + bg.$$

1. Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ on a : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$. En déduire que $gf = f$ puis que $a + b = 0$ puis que $a = -1$.
2. Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, on a $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que si f et g sont deux projecteurs qui ne commutent pas et vérifient de plus $fg - gf = af + bg$ alors
   (a,b) est élément de $\{(-1,1),(1,-1)\}$. Caractériser alors chacun de ces cas.

Correction ▼ [005600]

40 107.99 Autre

Exercice 1267 $\mathscr{L}(E \times F)$, Chimie P 1996

Est-il vrai que $\mathscr{L}(E \times F)$ et $\mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(F)$ sont isomorphes ? (E et F espaces vectoriels de dimensions finies).

Correction ▼ [003315]

Exercice 1268 Centrale MP 2001

Soit f un endomorphisme donné de E de dimension n et $F = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$. Trouver la dimension de F.

Correction ▼ [003356]

Exercice 1269 X MP* 2001

Soit G un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{R}^n)$ et $F = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$. Montrer que $\mathrm{Card}\,(G) \times \dim F = \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g)$.

Correction ▼ [003357]

41 108.01 Propriétés élémentaires, généralités

Exercice 1270

Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [001040]

Exercice 1271

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5. [001041]

Exercice 1272

On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB puis $(AB)C$.
2. Calculer BC puid $A(BC)$.
3. Que remarque-t-on ?

[001042]

Exercice 1273

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB.
2. Calculer BA.
3. Que remarque-t-on ?

[001043]

Exercice 1274

Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. [001044]

Exercice 1275

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse. [001045]

Exercice 1276

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.
   (a) Calculer B^2, B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier n.
   (b) Développer $(B+I_3)^n$ par la formule du binome et simplifier.
   (c) En déduire A^n Pour tout entier n.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

[001046]

Exercice 1277

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Montrer que $AB = AC$, a-t-on $A = C$? A peut-elle être inversible ?
   (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $A \times F = O$ (O étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.
3. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.
   Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

[001047]

Exercice 1278

suivantes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[001048]

Exercice 1279

Soit A une matrice carrée d'ordre n ; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

1. Montrer que A^n est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que si β est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n.
3. Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geqslant 1$. Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

4. Application 2 : montrer que si $n = 2$, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2, et retrouver la formule donnant A^{-1} en utilisant 2.

[001049]

Exercice 1280

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}. [001050]

Exercice 1281

Rappeler la structure d'espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $M_n(\mathbb{R})$. Donner sa dimension. [001051]

Exercice 1282

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001052]

Exercice 1283

Déterminer deux éléments A et B de $M_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Correction ▼ [001053]

Exercice 1284

Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer dim (E).
2. Soit $M(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a,b et $c \in \mathbb{R}$ son rang. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a,b,c)^{-1}$ de $M(a,b,c)$.
3. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

[001054]

Exercice 1285

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On nomme commutant de A et on note $C(A)$ l'ensemble des $B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que $C(A)$ et un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, A^k \in C(A)$.

[001055]

Exercice 1286

Soit F et G les sous-ensembles de $M_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$F = \{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} a,b,c \in \mathbb{R} \} \quad G = \{ \begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix} a,b,c,d \in \mathbb{R} \}.$$

Montrer que ce sont des sous espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.

Correction ▼ [001056]

Exercice 1287

Montrer que $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}); tr(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $M_2(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [001057]

Exercice 1288

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.

1. Montrer (en calculant les coefficients) que AB est triangulaire supérieure.
2. Soit φ un endomorphisme bijectif de $\mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi(F) \subset F$. Montrer que que $\varphi^{-1}(F) \subset F$.
3. En déduire une nouvelle démonstration de 1. Montrer que si A est inversible, A^{-1} est triangulaire supérieure.

[001058]

Exercice 1289

Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Calculer $\det(I+N)$. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ commute avec N, montrer que $\det(A+N) = \det(A)$. (on pourra commencer par étudier le cas où A est inversible.) [001059]

Exercice 1290

Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que G est un groupe multiplicatif. [001060]

Exercice 1291

Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $\big(A(\theta)\big)^n$ pour $n \geqslant 1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001061]

Exercice 1292

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. A est-elle inversible ?

[001062]

Exercice 1293

Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001063]

Exercice 1294

Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\mathrm{tr}(A\,{}^t\!A) = 0$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001064]

Exercice 1295

Discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$. [001065]

Exercice 1296

Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. [001066]

Exercice 1297

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

[001067]

Exercice 1298

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M - I_n$ soit nilpotente (ie $\exists k \in \mathbb{N}, (M - I_n)^k = 0$). Montrer que M est inversible. [001068]

Exercice 1299

$A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001069]

Exercice 1300

Montrer que si $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$ et $AB = A + B$ alors $AB = BA$. [001070]

Exercice 1301

Soit $M = (a_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$, montrer :

$$\min_j \max_i a_{i,j} \geqslant \max_i \min_j a_{i,j}.$$

[001071]

Exercice 1302

Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que : $J^2 = I$ et

$$E = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2; A = aI + bJ\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel stable par multiplication (Est-ce une algèbre ?). En déduire que :

$$\forall A \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2; A^n = a_n I + b_n J$$

et calculer les coefficients a_n et b_n.

2. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Calculer (u_n, v_n) tel que $S_n = u_n I + v_n J$ en fonction de a et de b. Calculer les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $e^A = uI + vJ$ où $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, $v = \lim_{n\to\infty} v_n$. Calculer e^{-A} et le produit $e^{-A}\, e^A$.
3. Application :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Calculer e^A.

[001072]

Exercice 1303

Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $\forall X \in M_n(\mathbb{C}), AXB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$. [001073]

Exercice 1304

Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $AB = I + A + A^2$. Montrer que $AB = BA$ (*Indication* : voir d'abord que A est inversible). [001074]

Exercice 1305

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$une matrice triangulaire à éléments diagonaux nuls, montrer que :
$$A^n = 0.$$

[001075]

Exercice 1306

Calculer les puissances de :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[001076]

Exercice 1307

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on définit :
$$\exp A = \sum_{i\geqslant 0} \frac{A^i}{i!},$$
la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse. [001077]

Exercice 1308

Calculer l'inverse de :
$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[001078]

Exercice 1309

Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & 1 & a & \dots \\ \dots & 0 & 1 & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

[001079]

Exercice 1310 Examen

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n & +12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. Trouver une expression de U_n en fonction de A et de U_0.
3. Trouver le noyau de A, et en donner une base B_1. Calculer le rang de A.
4. Montrer que l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ? En donner une base, qu'on notera B_2.
5. Montrer que la réunion $B_1 \cup B_2$ forme une base B de $\mathbb{R}^2$. Soit P la matrice formée des composantes des vecteurs de B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que P est inversible, et que le produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D qu'on calculera.
6. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer D^n, et en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Donner les termes généraux x_n et y_n.

Correction ▼ [001080]

Exercice 1311

Pour toute matrice carrée A de dimension n, on appelle trace de A, et l'on note $\mathrm{tr}A$, la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrer que si A, B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Montrer que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, M sa matrice par rapport à une base e, M' sa matrice par rapport à une base e', alors $\mathrm{tr}M = \mathrm{tr}M'$. On note $\mathrm{tr}f$ la valeur commune de ces quantités.
3. Montrer que si g est un autre endomorphisme de E, $\mathrm{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$.

Correction ▼ Vidéo ■ [002442]

Exercice 1312

On rappelle qu'une matrice carrée A d'ordre n est dite *symétrique* si $a_{i,j} = a_{j,i}, \forall i, j$, et *antisymétrique* si $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

1. Combien y a-t-il de matrices antisymétriques diagonales ?
2. Montrer que $A\,{}^tA$ est symétrique pour toute matrice carrée A.
3. Montrer que si A, B sont symétriques, leur produit $C = AB$ est symétrique si et seulement si $AB = BA$. Que dire si elles sont antisymétriques ? Si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?
4. Soit P un polynôme. Montrer que si A est symétrique, $P(A)$ l'est aussi. Que dire si A est antisymétrique ?

[002443]

Exercice 1313

Soient A,B deux matrices semblables (i.e. il existe P inversible telle que $B=P^{-1}AP$). Montrer que si l'une est inversible, l'autre aussi ; que si l'une est idempotente, l'autre aussi ; que si l'une est nilpotente, l'autre aussi ; que si $A=\lambda I$, alors $A=B$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002444]

Exercice 1314

Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$

$$|a_{i,i}|>|a_{i,1}|+|a_{i,2}|+\ldots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\ldots+|a_{i,n}|.$$

Montrer que A est inversible. [002445]

Exercice 1315

Une matrice carrée réelle A est dite *stochastique* si $0\leqslant a_{i,j}\leqslant 1, \forall i,j$ et $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}=1, \forall j$.

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastique est aussi une matrice stochastique.
2. Soit $B=A^2$, $A_i=\sup_j a_{i,j}$, $a_i=\inf_j a_{i,j}$. Montrer que $a_i\leqslant b_{i,j}\leqslant A_i, \forall j$.

[002446]

Exercice 1316

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&4\\1&0&-2\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}2&-2\\1&1\\3&1\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix};\qquad E=\begin{pmatrix}0&1&2\end{pmatrix}.$$

Calculer *lorsque cela est bien défini* les produits de matrices suivants : AB, BA, AC, CA, AD, AE, BC, BD, BE, CD, DE. [002747]

Exercice 1317

Soient les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&5&-1\\0&1&3\\0&-2&4\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\2&3&4\\0&0&0\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Calculer : $(A-2B)C$, C^TA, C^TB, $C^T(A^T-2B^T)$, où C^T désigne la matrice transposée de C. [002748]

Exercice 1318

Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{Z}$, avec successivement

$$A=\begin{pmatrix}\cos(a)&-\sin(a)\\\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\cosh(a)&\sinh(a)\\\sinh(a)&\cosh(a)\end{pmatrix}.$$

[002749]

Exercice 1319

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002750]

Exercice 1320

Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002751]

Exercice 1321

L'*exponentielle* d'une matrice carrée M est, par définition, la limite de la série

$$e^M = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}.$$

On admet que cette limite existe en vertu d'un théorème d'analyse.

1. Montrer que si $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A e^B$. On est autorisé, pour traiter cette question, à passer à la limite sans précautions.
2. Calculer e^M pour les quatre matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Chercher un exemple simple où $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

[002752]

Exercice 1322

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = AC$. La matrice A peut-elle être inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices F de taille $(3,3)$ telles que $AF = 0$, (où 0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

[002772]

Exercice 1323

Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse. [002773]

Exercice 1324

Soit a et b deux réels et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Correction ▼ Vidéo ■ [002774]

Exercice 1325

Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[002775]

Exercice 1326 Matrices en damier

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$. On dit que M est *en damier* si $a_{ij} = 0$ pour $j - i$ impair. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices $n \times n$ en damier. Montrer que $\mathscr{D}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$. Quelle est sa dimension ?

[003358]

Exercice 1327 Matrices stochastiques

Soit
$\mathscr{D} = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall\, i, j,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall\, i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1\right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est stable par multiplication.
2. Déterminer les matrices $A \in \mathscr{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathscr{D}$.

Correction ▼ [003359]

Exercice 1328 Matrices centrosymétriques

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$. On dit que A est *centro-symétrique* si pour tous i, j : $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$. Montrer que si A et B sont centro-symétriques, il en est de même de AB. Montrer aussi que si A est centro-symétrique et inversible alors A^{-1} est aussi centro-symétrique. [003360]

Exercice 1329 Équation $AX = B$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'équation en X : $AX = B$, $X, B \in \mathscr{M}_{3,n}(K)$, a des solutions si et seulement si les colonnes de B sont des progressions arithmétiques (traiter d'abord le cas $n = 1$).
2. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003393]

Exercice 1330 Équation $AX = B$

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice B telle que $BC = A$?

Correction ▼ [003394]

Exercice 1331 Calcul de A^n par la formule du binôme

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $A = I + J$, calculer A^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [003395]

Exercice 1332 Calcul de A^n par polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que
$$P(6) = 6^n, \quad P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^n, \quad \text{et } P(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^n.$$
Montrer que $A^n = P_n(A)$.
3. Même question pour $n \in \mathbb{Z}$.

[003396]

Exercice 1333 Calcul de A^k

Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003397]

Exercice 1334 **

Pour x réel, on pose :
$$A(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

Déterminer $(A(x))^n$ pour x réel et n entier relatif.

Correction ▼ [005258]

Exercice 1335 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Calculer A^n pour n entier relatif.

Correction ▼ [005262]

Exercice 1336 **

Montrer que $\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in]-1,1[\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

Correction ▼ [005263]

Exercice 1337 **

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices carrées de format n telles que $a_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r-1$ et $b_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+s-1$ où r et s sont deux entiers donnés entre 1 et n. Montrer que si $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ alors $c_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r+s-1$.

Correction ▼ [005611]

---

42 108.02 Noyau, image

Exercice 1338

Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chercher le noyau et l'image de u. Calculer son rang de deux manières. Calculer la matrice de u^2 dans la base e. Montrer que $u^2 - 3u = 0$.

[002436]

Exercice 1339

Calculer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[002449]

Exercice 1340 **T

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $u(2i - 3j + 5k)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}u$ et $\mathrm{Im}u$.
3. Calculer M^2 et M^3.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}u^2$ et $\mathrm{Im}u^2$.
5. Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$ et en déduire que $I - M$ est inversible. Préciser $(I - M)^{-1}$.

Correction ▼ [005257]

Exercice 1341 **

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P & \mapsto & Q = e^{X^2}(Pe^{-X^2})' \end{array}$.

1. Vérifier que $f \in (\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.
2. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{rg} f$.

Correction ▼ [005260]

Exercice 1342 ***T

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 4) $(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

5) $(\sin(i+j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 6) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005269]

Exercice 1343 ***

Rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) \\ \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) & \cos(6a) \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005603]

Exercice 1344 **

Rang de la matrice $(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Correction ▼ [005607]

Exercice 1345 ***

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et B l'élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $B = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.

Correction ▼ [005622]

Exercice 1346 ***

Soit H un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists \lambda_A \in \mathbb{C} / HAH = \lambda_A H$. Montrer que $\mathrm{rg} H \leqslant 1$.

Correction ▼ [005623]

Exercice 1347 ***

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ M^2 = 0 \text{ et } (2)\ \mathrm{rg}M \leqslant 1 \text{ et } \mathrm{tr}M = 0.$$

Correction ▼ [005624]

43 108.03 Matrice et application linéaire

Exercice 1348

Soit h l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :
$$e_1' = e_2 + e_3, \quad e_2' = e_3 + e_1, \quad e_3' = e_1 + e_2.$$
Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?
2. On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :
$$f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$
en conservant la base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

[001081]

Exercice 1349

Soit h une application linéaire de rang r, de E, espace vectoriel de dimension n, dans F, espace vectoriel de dimension m.

1. Préciser comment obtenir une base $(e_i)_{i=1}^n$ de E, et une base $(f_j)_{j=1}^m$ de F, telles que $h(e_k) = f_k$ pour $k = 1, \dots, r$ et $h(e_k) = 0$ pour $k > r$. Quelle est la matrice de h dans un tel couple de bases ?
2. Déterminer un tel couple de bases pour l'homomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ défini dans les bases canoniques par :
$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_1 &= 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 &= x_2 + x_3 - 2x_4 \\ y_3 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$$
3. Même question pour l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :
$$f(x, y, z) = (2x + y + z, -y + z, x + y).$$

[001082]

Exercice 1350

On désigne par $\mathcal{P}_2$ l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2. On désigne par (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathcal{P}_2$ et on pose

$$p_0 = e_0, \quad p_1 = e_1 - \frac{1}{2}e_0, \quad p_2 = e_2 - e_1 + \frac{1}{2}e_0.$$

1. Montrer que tout polynôme de $\mathcal{P}_2$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $p = b_0 p_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2$.

2. Écrire sous cette forme les polynômes : p_0', p_1', p_2', p', Xp', p''.
3. Montrer que l'application $\varphi : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ définie par $\varphi(p) = Xp' - \frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p''$ est une application linéaire. Préciser le noyau et l'image de cette application. Écrire les matrices de cette application par rapport à la base canonique (e_i) et par rapport à la base (p_i). Écrire la matrice de passage de la base (e_i) à la base (p_i) ; quelle relation lie cette matrice aux deux précédentes ?

[001083]

Exercice 1351

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on fixe la base $\varepsilon = \{1, i\}$.

1. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Calculer $A = \operatorname{Mat}(f, \varepsilon, \varepsilon)$.
3. Existent-ils x et $y \in \mathbb{C} - \{0\}$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = -y$? Si c'est le cas déterminer un tel x et un tel y.
4. Décrire géométriquement f.
5. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto e^{i\rho}\bar{z}$. Calculer $A = \operatorname{Mat}(g \circ f, \varepsilon, \varepsilon)$ et décrire géométriquement $g \circ f$.

[001084]

Exercice 1352

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(f^2 + I) = \{0\}$, $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$ et $\operatorname{Ker}(f^2 + I) \neq \{0\}$.
2. Soit x un élément distinct de 0 de $\operatorname{Ker}(f^2 + I)$. Montrer qu'il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$. En déduire que $\{x, f(x)\}$ est libre.
3. Calculer $\dim(\operatorname{Ker}(f))$ et $\dim(\operatorname{Ker}(f^2 + I))$.
4. Déterminer une base ε de $\mathbb{R}^3$ telle que : $\operatorname{Mat}(f, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[001085]

Exercice 1353

Soient E un espace vectoriel de dimension n, f une application linéaire de E dans lui-même et x un élément de E tel que la famille $f(x), ..., f^n(x)$ soit libre.

1. Montrer que la famille $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ est une base de E. Déduiser-en que f est bijective.
2. On suppose maintenant que $f^n(x) = x$. Déterminer la matrice de f dans la base $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$.

[001086]

Exercice 1354

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Même question avec $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$ où $\mathscr{B}'$ est la base $(\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$. Même question avec $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001087]

Exercice 1355

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $1, X, \ldots, X^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soient f, g et h les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par :
$$\begin{aligned} f(P(X)) &= XP(X), \\ g(P(X)) &= P'(X), \\ h(P(X)) &= (P(X))^2. \end{aligned}$$
Montrer que les applications f et g sont linéaires, mais que h ne l'est pas. f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Déterminer la dimension de leurs noyaux respectifs. Déterminer l'image de f.
3. On désigne par f_n et g_n les restrictions de f et de g à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'image de g_n est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ et celle de f_n est incluse dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Déterminer la matrice de g_n dans la base $1, X, ..., X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de f_n de la base $1, X, ..., X^n$ dans la base $1, X, ..., X^{n+1}$. Calculer les dimensions respectives des images de f_n et de g_n.

[001088]

Exercice 1356

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même $M \mapsto AM$. Montrer que f est linéaire. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. [001089]

Exercice 1357

Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$.

1. Construire des exemples de telles applications.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

[001090]

Exercice 1358

Soit E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$. Soit $p \geqslant 1$ et $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^p)$. Montrer que $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^{p-1})$. En déduire que $\mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ pour tout $p \geqslant 1$.
2. Montrer de même que si $\mathrm{Ker}(\varphi^2) = \mathrm{Ker}(\varphi^3)$ alors $\mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$ pour tout $p \geqslant 2$.
3. On suppose désormais que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même telle que $\varphi^2 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

[001091]

Exercice 1359

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et φ une application linéaire de E dans E telle que $\varphi^2 = 0$ et $\varphi \neq 0$. Posons $r = \mathrm{rg}(\varphi)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\ (\varphi) \subset \mathrm{Ker}\ (\varphi)$. Déduiser-en que $r \leqslant 3 - r$. Calculer r.
2. Soit $e_1 \in E$ tel que $\varphi(e_1) \neq 0$. Posons $e_2 = \varphi(e_1)$. Montrer qu'il existe $e_3 \in \mathrm{Ker}\ (\varphi)$ tel que la famille $\{e_2, e_3\}$ soit libre. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

[001092]

Exercice 1360

Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^2 = f$.

1. Montrer que $E = f \oplus \mathrm{Im} f$.

2. Supposons que E soit de dimension finie n. Posons $r = \dim \operatorname{Im} f$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : $f(e_i) = e_i$ si $i \leqslant r$ et $f(e_i) = 0$ si $i > r$. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathscr{B}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001093]

Exercice 1361

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \dots, X^n$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leur dimension respective.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001094]

Exercice 1362

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de l'espace E à trois dimensions sur un corps K. I_E désigne l'application identique de E. On considère l'application linéaire f de E dans E telle que :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Étudier le sous-espace $\ker(f - I_E)$: dimension, base.
2. Étudier le sous-espace $\ker(f^2 + I_E)$: dimension, base.
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? et celle de f^2 ?

[001095]

Exercice 1363

Soit E un espace à n dimensions et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que la condition $f^2 = 0$ est équivalente à $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. Quelle condition vérifie alors le rang de f ? On suppose dans le reste de l'exercice que $f^2 = 0$.
2. Soit E_1 un supplémentaire de $\ker f$ dans E et soit $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base de E_1. Montrer que la famille des vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_r, f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_r))$ est libre. Montrer comment on peut la compléter, si nécessaire, par des vecteurs de $\ker f$ de façon à obtenir une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\operatorname{Im} f = \ker f$?
4. Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $f^2 = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question 2).

[001096]

Exercice 1364

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

1. Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de cette application.

2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de ϕ dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application ϕ.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Correction ▼ Vidéo ■ [001097]

Exercice 1365

Soit $M_{\alpha,\beta}$ la matrice : $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. Déterminer pour quelles valeurs de α et de β l'application linéaire qui lui est associée est surjective.

Correction ▼ [001098]

Exercice 1366

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B.

Correction ▼ Vidéo ■ [001099]

Exercice 1367

Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans E. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0$. (On pourra utiliser le fait que $\mathscr{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$.)

Correction ▼ [001100]

Exercice 1368

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ & & \iddots & & \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001101]

Exercice 1369

Même chose avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. [001102]

Exercice 1370

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base

$(1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1)$. [001103]

Exercice 1371

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3} y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2} x_n - \dfrac{2}{3} y_n \end{cases}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001104]

Exercice 1372

Soit $E = \mathrm{vect}(AB - BA, (A,B) \in M_n(\mathbb{Q})^2)$.

1. Montrer que $E = \ker \mathrm{tr}$ (pour l'inclusion non triviale, on trouvera une base de $\ker \mathrm{tr}$ formée de matrices de la forme $AB - BA$).
2. Soit $f \in M_n(\mathbb{Q})^*$ telle que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{Q})^2$ $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \mathrm{tr}$.

[001105]

Exercice 1373

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$. Montrer que Φ est linéaire, déterminer sa matrice dans la base canonique et calculer $\ker \Phi$ et $\mathrm{Im} \Phi$. [001106]

Exercice 1374

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée $n \times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. Montrer le résultat pour $n = 2$.
2. Soit B, la matrice obtenue en remplaçant, pour $j \geqslant 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne

   $$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$

   Calculer les b_{ij} en fonction des a_{ij}. Montrer que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i \geqslant 2$, on a

   $$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j \neq i}^{n} |b_{ij}|.$$

3. Démontrer le résultat de Hadamard pour n quelconque.

Correction ▼ [002565]

Exercice 1375

Soient A et B des matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A.B = 0$.

1. Démontrer que $\mathrm{Im}\, B \subset \ker A$.

2. On suppose que le rang de A est égal à $n-1$, déterminer le rang de B.

Correction ▼ [002585]

Exercice 1376

On désigne par $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. À une permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$, on associe l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$u_\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Soit $\tau = (i\,j)$ une transposition. Écrire la matrice de u_τ dans la base canonique. Montrer que $\det(u_\tau) = -1$.
2. Montrer que $\forall \sigma, \sigma' \in \mathscr{S}_n$, $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma'\circ\sigma}$.
3. En déduire que $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n$, $\det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ où ε désigne la signature.

[002776]

Exercice 1377 Coefficients du binôme

Soit $A \in \mathscr{M}n+1(\mathbb{Q})$ telle que $a_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme simple de $\mathbb{Q}_n[X]$. En déduire la matrice A^{-1}. [003406]

Exercice 1378 Coefficients du binôme

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $a_{ij} = (-1)^{n-j}C_{n-j}^{i-1}$.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $K_{n-1}[X]$.
2. En déduire A^3.

Correction ▼ [003407]

Exercice 1379 ***I

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, nilpotent d'indice 2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005261]

---

44 108.04 Exemples géométriques

Exercice 1380 Homographies

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on note $f_M : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}, x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

Montrer que $M \mapsto f_M$ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

[003364]

---

45 108.05 Inverse, méthode de Gauss

Exercice 1381 Conservation de l'inverse sur un sous-corps

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$. Comparer les énoncés :

1 : M est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$.
2 : M est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

[003361]

Exercice 1382 Algèbre de matrices

On note $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A} = \{aU + bI,\ a,b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geqslant 2)$.

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = aU + bI \in \mathscr{A}$. Montrer que M possède un inverse dans $\mathscr{A}$ si et seulement si $b(b+na) \neq 0$, et le cas échéant, donner M^{-1}.
3. Montrer que si $b(b+na) = 0$, alors M n'est pas inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Trouver les matrices $M \in \mathscr{A}$ vérifiant : $M^n = I$.

Correction ▼ [003362]

Exercice 1383 Opérations par blocs

1. Soient $A_1 \in \mathscr{M}_{n,p_1}(K)$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n,p_2}(K)$, $B_1 \in \mathscr{M}_{p_1,q}(K)$, $B_2 \in \mathscr{M}_{p_2,q}(K)$.
   On pose $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p_1+p_2}(K)$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p_1+p_2,q}(K)$. Montrer que $AB = A_1B_1 + A_2B_2$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A, B, 0, C$ sont des matrices de tailles $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$, $q \times q$ (matrice triangulaire par blocs). Montrer que M est inversible si et seulement si A et C le sont. Le cas échéant, donner M^{-1} sous la même forme.
3. En déduire une nouvelle démonstration de la propriété : *L'inverse d'une matrice triangulaire est triangulaire.*

Correction ▼ [003365]

Exercice 1384 Décomposition d'une matrice en matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe $U, V \in GL_n(K)$ telles que $A = U + V$.

[003366]

Exercice 1385 Tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ contient une matrice inversible

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ $(n \geqslant 2)$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $H = \{M \text{ tq } \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.
2. En déduire que H contient une matrice inversible.

Correction ▼ [003376]

Exercice 1386 M antisymétrique $\Rightarrow I + M$ est inversible

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $I + M$ est inversible (si $(I+M)X = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).
2. Soit $A = (I-M)(I+M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [003380]

Exercice 1387 Équation $X^2 + X = A$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation dans $\mathscr{M}_2(K)$: $X^2 + X = A$.

Soit X une solution et ϕ_A, ϕ_X les endomorphismes de K^2 de matrices A et X dans la base canonique.

1. Montrer que X ou $X + I$ n'est pas inversible.
2. Si X n'est pas inversible, montrer que X est proportionnelle à A (on montrera que $\mathrm{Ker}\phi_X = \mathrm{Ker}\phi_A$ et $\mathrm{Im}\,\phi_X = \mathrm{Im}\,\phi_A$).
3. Résoudre l'équation.

Correction ▼ [003381]

Exercice 1388 Groupes de matrices

Soit $\mathscr{G} \subset \mathscr{M}_n(K)$ tel que pour la multiplication, $\mathscr{G}$ soit un groupe. On note J l'élément neutre et pour $M \in \mathscr{G}$, ϕ_M l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M.

1. Montrer que ϕ_J est une projection.
2. Montrer que : $\forall\, M \in \mathscr{G}$, $\phi_{M|\mathrm{Ker}\phi_J} = 0$ et $\phi_{M|\,\mathrm{Im}\,\phi_J}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\,\phi_J$.
3. En déduire que $\mathscr{G}$ est isomorphe à un groupe $GL_k(K)$.

Correction ▼ [003382]

Exercice 1389 Inversion de matrices

Inverser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & (0) & & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
5. $\begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \cdots & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\lambda_1} & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+\frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003398]

Exercice 1390 Effet des arrondis

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} et B^{-1}.

Correction ▼ [003399]

Exercice 1391 ***

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ $(n \geqslant 2)$ définie par

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ a_{i,j} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i > j \\ 0 \text{ si } i < j \end{cases}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Correction ▼ [005267]

Exercice 1392 ***I Théorème de HADAMARD

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in \{1,...,n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Correction ▼ [005272]

Exercice 1393 ***I Matrice de VANDERMONDE des racines n-ièmes de l'unité

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$, $(n \geqslant 2)$. Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (calculer d'abord $A\bar{A}$).

Correction ▼ [005274]

Exercice 1394 ***I

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $a_{i,j} = C_{j-1}^{i-1}$ si $i \leqslant j$.

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse. (Indication : considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1)$).

Correction ▼ [005276]

Exercice 1395 ****

Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient des matrices inversibles.

Correction ▼ [005597]

Exercice 1396 ***

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = j$, j si $i = j-1$ et 0 sinon. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction ▼ [005604]

Exercice 1397 ***

Soient a_1,..., a_n n réels tous non nuls et $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$.

Inverse de A en cas d'existence ?

Correction ▼ [005610]

Exercice 1398 **I

Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005612]

Exercice 1399 ***I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\omega = e^{2i\pi/n}$.
Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction ▼ [005613]

Exercice 1400 ***I Théorème de HADAMARD

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. (Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.)

Correction ▼ [005617]

Exercice 1401

Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbb{C}) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006872]

46 108.06 Changement de base, matrice de passage

Exercice 1402 Conjugaison

1. Soit $P \in GL_n(K)$. Montrer que l'application $\phi_P : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K), M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme d'algèbre.
2. Soit $\phi : A = (a_{ij}) \longmapsto A' = (a_{n+1-i,n+1-j})$.
   (a) Montrer que ϕ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$.
   (b) Trouver une matrice $P \in GL_n(K)$ telle que $\phi = \phi_P$.

[003367]

Exercice 1403 Chimie P' 1996

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & ? \\ 2 & -1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une autre base. Donner la matrice de passage.

Correction ▼ [003368]

Exercice 1404 Changement de base

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, $(\vec{I},\vec{J},\vec{K},\vec{L})$ et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit deux nouvelles bases : $\mathscr{B} = (\vec{I},\vec{J},4\vec{I}+\vec{J}-3\vec{L},-7\vec{I}+\vec{K}+5\vec{L})$ et $\mathscr{B}' = (4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\vec{k})$.
Quelle est la matrice de f relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?

Correction ▼ [003400]

Exercice 1405 Matrices semblables

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables.
(On cherchera P inversible telle que $PB = AP$)

Correction ▼ [003401]

Exercice 1406 Matrices semblables

Montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Correction ▼ [003402]

Exercice 1407 Matrices non semblables

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Correction ▼ [003403]

Exercice 1408 Matrices non semblables

Soient $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A et B ont même rang, même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A-I)^2$ et $(B-I)^2$). [003404]

Exercice 1409 Ensi Physique P 1995

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Correction ▼ [003405]

Exercice 1410 Comatrice

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Si A et B sont inversibles, démontrer que $\mathrm{com}\,(AB) = (\mathrm{com}\,A)(\mathrm{com}\,B)$.
2. Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires λ tels que $A-\lambda I$ et $B-\lambda I$ soient inversibles.
3. En déduire que si A et B sont semblables, alors $\mathrm{com}\,A$ et $\mathrm{com}\,B$ le sont.

[003433]

Exercice 1411 Matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$: Il existe $P, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} P+iQ \in GL_n(\mathbb{C}) \\ (P+iQ)A = B(P+iQ). \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ (P+\lambda Q)A = B(P+\lambda Q)$.
2. En déduire que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

[003577]

Exercice 1412 ***T

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer u^{-1}.
2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$.
3. Déterminer P la matrice de passage de (i, j, k) à (e_1, e_2, e_3) ainsi que P^{-1}.
4. En déduire $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$ pour n entier relatif.

Correction ▼ [005259]

Exercice 1413 **

Soient $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$. $M(a)$ et $N(a)$ sont-elles semblables ?

Correction ▼ [005626]

Exercice 1414 ***I

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [005627]

---

47 108.99 Autre

Exercice 1415

Soit A une matrice carrée qui commute avec toutes les matrices carrées. Montrer que c'est une matrice scalaire.

[002434]

Exercice 1416

Soit A une matrice carrée.

1. Montrer que $A^2 = I$ si et seulement si $(I-A)(I+A) = 0$. Montrer que dans ce cas A est inversible.
2. Montrer que si A est idempotente ($A^2 = A$), alors $B = I - A$ l'est aussi et que $AB = BA = 0$.
3. Montrer que I est la seule matrice idempotente inversible.

[002437]

Exercice 1417

Trouver toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

1. $M^2 = 0$;
2. $M^2 = M$;
3. $M^2 = I$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002475]

Exercice 1418

Un train qui ralentit avec une décélération constante met 20s pour parcourir le premier km et 30s pour parcourir le deuxième km. On veut calculer la distance qu'il devra parcourir pour parvenir à l'arrêt.

— En prenant pour origine la position initiale du train, écrire l'équation générale d'un mouvement uniformément décéléré.
— En déduire un système de deux équations dont les inconnues sont la décélération et la vitesse initiale du train, et résoudre ce système.
— Conclure.

[002693]

Exercice 1419 Quaternions

Montrer que $\mathscr{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

Montrer que $\mathscr{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \right\}$ est un corps non commutatif.

[003363]

Exercice 1420 Centre de $GL_n(K)$

On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$.

1. Montrer que $F_{ij} = I + E_{ij}$ est inversible.
2. En déduire que $\operatorname{vect}\big(GL_n(K)\big) = \mathscr{M}_n(K)$.
3. Quel est le centre de $GL_n(K)$?

[003369]

Exercice 1421 Centre de $GL_n(K)$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E. Montrer que f est une homothétie.

[003370]

Exercice 1422 Centre des matrices triangulaires unipotentes

On note $\mathscr{G} = \{A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K) \text{ tq } a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 1\}$.

1. Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-groupe de $GL_n(K)$.
2. En utilisant la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$, déterminer le centre de $\mathscr{G}$, et montrer que c'est un groupe commutatif isomorphe à $(K,+)$.

Correction ▼ [003371]

Exercice 1423 Équation $aX+(trX)A=B$

Soit $\alpha \in K$, et $A,B \in \mathscr{M}_n(K)$. Étudier l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(K)$: $\alpha X + (\operatorname{tr} X)A = B$.

Correction ▼ [003372]

Exercice 1424 Commutant d'une matrice diagonale

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $\mathscr{C}_A = \{M \in \mathscr{M}_n(K) \text{ tq } AM = MA\}$ (*commutant de A*).

1. Montrer que $\mathscr{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$.
2. Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les λ_i sont distincts.
   (a) Chercher $\mathscr{C}_A$.
   (b) Soit $\phi : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K), M \mapsto MA - AM$
   Montrer que $\operatorname{Im}\phi$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

[003373]

Exercice 1425 Matrices de trace nulle

Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$ *non scalaire* telle que $\operatorname{tr}M = 0$.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne X_1 telle que MX_1 ne soit pas colinéaire à X_1.
2. En déduire que M est semblable à une matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$ où $M_1 \in \mathscr{M}_{n-1}(K)$ et $\operatorname{tr}M_1 = 0$.
3. Montrer que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.
4. Montrer qu'il existe $A,B \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que $M = AB - BA$.

[003374]

Exercice 1426 Forme bilinéaire trace

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ non nulle. Montrer que l'application $f_A : \mathscr{M}_{p,n}(K) \to K, X \mapsto \operatorname{tr}(AX)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_{p,n}(K)$.
2. Réciproquement : Soit $\phi : \mathscr{M}_{p,n}(K) \to K$ une forme linéaire quelconque. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ telle que $\phi = f_A$ (on pourra considérer l'application $A \mapsto f_A$).
3. Soit $\phi : \mathscr{M}_n(K) \to K$ une forme linéaire vérifiant : $\forall\, X,Y \in \mathscr{M}_n(K),\ \phi(XY) = \phi(YX)$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\phi = \lambda \operatorname{tr}$.

[003375]

Exercice 1427 Matrices magiques

Une matrice carrée M est dite *magique* si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes. On note $s(M)$ leur valeur commune.

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{M} = \{\text{matrices } n \times n \text{ magiques}\}$.

1. Montrer que $\mathscr{M}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$ et $s : \mathscr{M} \to K$ est un morphisme d'algèbre (calculer MU et UM).
2. Si M est magique inversible, montrer que M^{-1} est aussi magique.
3. Montrer que $\mathscr{M}$ est la somme directe du sev des matrices magiques symétriques et du sev des matrices magiques antisymétriques.

4. Pour $M \in \mathscr{M}_n(K)$, on note ϕ_M l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M.
   Soit $\mathscr{H} = \{(x_1,\dots,x_n) \in K^n \text{ tq } x_1+\dots+x_n = 0\}$ et $\mathscr{K} = \{(x,\dots,x) \in K^n\}$.
   (a) Montrer que : $M \in \mathscr{M} \iff \mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ sont stables par ϕ_M.
   (b) En déduire $\dim(\mathscr{M})$.

[003377]

Exercice 1428 Matrices triangulaires nilpotentes

1. Soit A une matrice triangulaire à diagonale nulle. Montrer que A est nilpotente.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice nilpotente d'indice n et ϕ l'endomorphisme de K^n associé.
   On note $E_i = \mathrm{Ker}\phi^i$, et $\vec{e}_i$ un vecteur quelconque choisi dans $E_i \setminus E_{i-1}$ ($\vec{e}_1 \in E_1 \setminus \{\vec{0}\}$).
   (a) Justifier l'existence de $\vec{e}_i$.
   (b) Montrer que la famille $(\vec{e}_i)$ est une base de K^n.
   (c) En déduire que A est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

[003378]

Exercice 1429 Matrice vérifiant $A^k = I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $A^k = I$ ($k \neq 0$). On pose $B = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$. Soient u, v les endomorphismes de K^n matrices A et B dans la base canonique.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}\, v$, $\quad \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker} v$, $\quad \mathrm{Ker} v \oplus \mathrm{Im}\, v = K^n$.
2. En déduire : $\mathrm{tr} B = k \mathrm{rg} B$.

Correction ▼ [003383]

Exercice 1430 $A > 0, X > 0$ et $A^k X = X$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que A est positive si tous ses coefficients sont strictement positifs.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ positive. On suppose qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positif et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^k X = X$. Montrer qu'il existe $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positif tel que $MY = Y$. [003384]

Exercice 1431 Suite récurrente linéaire matricielle

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Exprimer en fonction de k le terme général de la suite (M_k) de matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ définie par : $\begin{cases} M_0 \text{ est donnée,} \\ M_{k+1} = AM_k + B. \end{cases}$

Correction ▼ [003385]

Exercice 1432 A, A^2, A^3 données $\Rightarrow A^p$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\lambda, \mu \in K$ et $U, V \in \mathscr{M}_n(K)$ tels que : $\begin{cases} A = \lambda U + \mu V \\ A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \\ A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V. \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$ (chercher une relation linéaire entre A, A^2, A^3).
2. On suppose ici $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. Soit X un vecteur propre de A. Montrer que X est vecteur propre de U et de V avec les valeurs propres $0, 0$ ou $1, 0$, ou $0, 1$.

Correction ▼ [003386]

Exercice 1433 Idéaux de $\mathscr{M}_n(K)$

Une partie $\mathscr{I} \subset \mathscr{M}_n(K)$ est appelée *idéal à droite de* $\mathscr{M}_n(K)$ si c'est un sous-groupe additif vérifiant :

$$\forall A \in \mathscr{I},\ \forall B \in \mathscr{M}_n(K),\ AB \in \mathscr{I}.$$

Pour $A \in \mathscr{M}_n(K)$, on note $\mathscr{H}_A$ le sev de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$ engendré par les colonnes de A, et $\mathscr{I}_A$ l'idéal à droite engendré par A : $\mathscr{I}_A = \{AM \text{ tq } M \in \mathscr{M}_n(K)\}$.

1. Soient $A, M \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que : $M \in \mathscr{I}_A \iff \mathscr{H}_M \subset \mathscr{H}_A$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $\mathscr{H}_A + \mathscr{H}_B = \mathscr{H}_C$. Simplifier $\mathscr{I}_A + \mathscr{I}_B$.
3. Soit $\mathscr{I}$ un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(K)$. Montrer que $\mathscr{I}$ est un sev de $\mathscr{M}_n(K)$, puis qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $\mathscr{I} = \mathscr{I}_A$.
4. Que peut-on dire des idéaux *à gauche* de $\mathscr{M}_n(K)$?

[003387]

Exercice 1434 Classes d'équivalence dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det M| = 1$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ et d le pgcd de $x_1, \dots, x_n$. Montrer qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (par récurrence sur n).
3. Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. CNS pour qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = Y$?

[003388]

Exercice 1435 Rayon spectral d'une matrice à coefficients positifs

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec : $\forall\, i, j,\ a_{ij} > 0$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la relation d'ordre :

$$(X \geqslant Y) \iff (\forall\, i,\ x_i \geqslant y_i),$$

et on pose pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \geqslant 0$, $X \neq 0$:

$$\begin{cases} R(X) &= \sup\{r \geqslant 0 \text{ tq } AX \geqslant rX\}, \\ R &= \sup\{R(X) \text{ tq } X \geqslant 0, X \neq 0\}. \end{cases}$$

1. Montrer que R est fini et qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $R(X_0) = R$.
2. Montrer que toutes les coordonnées de X_0 sont strictement positives.
3. On pose $AX_0 = RX_0 + Y$. Montrer que $Y = 0$.
4. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant R$, et $(|\lambda| = R) \Leftrightarrow (\lambda = R)$.

Correction ▼ [003389]

Exercice 1436 INT ingénieurs 93

Soit $E = \{\text{matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ antisymétriques}\}$ et $f : E \to E, M \mapsto {}^tAM + MA$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Quelle est la trace de f ?

Correction ▼ [003390]

Exercice 1437 Ensam PSI 1998

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(K)$ et $\mathscr{C}(A)$ son commutant.

Montrer que pour $M,N \in \mathscr{C}(A)$ on a : $M = N \Leftrightarrow M$ et N ont la même dernière colonne.

En déduire que $\mathscr{C}(A) = K_{n-1}[A]$. [003391]

Exercice 1438 ENS MP 2002

Que dire des morphismes de groupe $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Correction ▼ [003392]

Exercice 1439 ***

1. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
2. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matirce triangulaire inférieure.

Correction ▼ [005264]

Exercice 1440 ***

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $E = \{M(x,y) = xI + yJ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $(E,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de E et sa dimension.
2. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
3. Quels sont les inversibles de E ?
4. Résoudre dans E les équations suivantes :
$$a)\ X^2 = I \quad b)\ X^2 = 0 \quad c)\ X^2 = X.$$
5. Calculer $(M(x,y))^n$ pour n entier naturel non nul.

Correction ▼ [005265]

Exercice 1441 ****

Soit $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer l'existence d'au moins un couple (A,B) vérifiant les conditions de l'énoncé puis calculer BA. (Indication. Calculer $(AB)^2$ et utiliser le rang.)

Correction ▼ [005266]

Exercice 1442 ***I

Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (utiliser les matrices élémentaires).

Correction ▼ [005268]

Exercice 1443 ****

Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 2)$ contient au moins une matrice inversible.

Correction ▼ [005270]

Exercice 1444 ***

Soit f qui, à $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = X(X+1)P' - 2kXP$. Trouver k tel que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$ puis, pour cette valeur de k, trouver tous les polynômes P non nuls tels que la famille $(P, f(P))$ soit liée. [005271]

Exercice 1445 ***I

Calculs par blocs.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ avec $(A, A') \in (\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K}))^2$, $(B, B') \in (\mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K}))^2$, $(C, C') \in (\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}))^2$ et $(D, D') \in (\mathscr{M}_{q,s}(\mathbb{K}))^2$. Calculer $M+N$ en fonction de A, B, C, D, A', B', C' et D'.
2. Question analogue pour MN en analysant précisément les formats de chaque matrice.

Correction ▼ [005273]

Exercice 1446 ***

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

1. Déterminer une base de $\mathbb{C}^4$ formée de vecteurs colinéaires à leurs images.
2. Ecrire les formules de changement de base correspondantes.
3. En déduire le calcul de A^n pour n entier naturel.

Correction ▼ [005275]

Exercice 1447 ***I

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Justifier l'existence de A et B puis calculer BA.

Correction ▼ [005585]

Exercice 1448 ***

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(M) = 0$. Montrer que $\sum_{M \in G} M = 0$.

Correction ▼ [005594]

Exercice 1449 ***

Soit G un sous-groupe de $GL(E)$ avec $\dim E = n$ et $\mathrm{card} G = p$. Soit $F = \{x \in E / \forall g \in G,\ g(x) = x\}$.
Montrer que $\dim F = \frac{1}{p} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr} g$.

Correction ▼ [005595]

Exercice 1450 ***I

Soient $A_1, ..., A_p$ p matrices distinctes et inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $G = \{A_1, ..., A_p\}$ soit stable pour la multiplication. Soit $A = A_1 + ... + A_p$. Montrer que $\mathrm{Tr} A$ est un entier divisible par p.

Correction ▼ [005596]

Exercice 1451 ***

Soient n un entier naturel non nul puis $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice X associe $AX + XA$. Calculer $\text{Tr}(f)$.

Correction ▼ [005605]

Exercice 1452 **

Soient a un réel non nul et A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M : $aM + \text{Tr}(M)A = B$.

Correction ▼ [005606]

Exercice 1453 **

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(x,y) = xI + yJ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
3. Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(E,+,\times)$?
4. Résoudre dans E les équations :
   (a) $X^2 = I$
   (b) $X^2 = 0$
   (c) $X^2 = X$.
5. Calculer $(M(x,y))^n$ pour n entier naturel et x et y réels.

Correction ▼ [005608]

Exercice 1454 ***

On appelle idéal bilatère de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ tout sous-ensemble I de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

a) $(I,+)$ est un groupe et b) $\forall A \in I$, $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AM \in I$ et $MA \in I$.

Déterminer tous les idéaux bilatères de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Correction ▼ [005609]

Exercice 1455 *I

Existe-t-il deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

Correction ▼ [005618]

Exercice 1456 **I

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe a tel que $f = a\text{Tr}$.

Correction ▼ [005619]

Exercice 1457 ***

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$ (a réel donné). Calculer $\lim_{n\to+\infty} A_n^n$.

Correction ▼ [005620]

Exercice 1458 **

Soient A une matrice carrée de format n et f l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à une matrice M associe MA. Trouver la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (ordonnée par l'ordre lexicographique).

Correction ▼ [005621]

Exercice 1459 ***I

Soient A et B deux matrices carrées de format n telles que $AB-BA=A$. Calculer la trace de A^{2010}.

Correction ▼ [005625]

Exercice 1460 **I Exponentielle d'une matrice nilpotente

Pour A matrice nilpotente donnée, on pose $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1. Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $A+B$ est nilpotente et $\exp(A+B) = \exp A \times \exp B$.
2. Montrer que $\exp A$ est inversible.
3. Calculer $\exp A$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005628]

---

48 120.01 Les rationnels

Exercice 1461

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r+x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000451]

Exercice 1462

Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?
$a = 1/3, \quad b = 1/15, \quad c = 1/25, \quad d = 1/125, \quad e, \quad f = 0,333\cdots 3\cdots, \quad g = \sqrt{2}$,
$h = 0,123\,456\,789\,123\,456\,789\,123\cdots, \quad i = 0,123\,456\,789\,101\,112\,131\,4\cdots, \quad j = \pi, \quad k = 13/7, \quad l = 27/17$.
[000452]

Exercice 1463 Un procédé géométrique d'approximation de $\sqrt{2}$

Dans le plan xOy, on porte sur Ox une suite de points $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ et sur Oy une suite de points $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, construites de la manière suivante :

(i) $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$,

(ii) $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$,

(iii) $a_n b_n = 2$ (le rectangle de côtés a_n et b_n a pour aire 2).

1. Représentez cette suite de rectangles de côtés a_n et b_n.
2. Démontrez successivement que : $\forall n,\ b_n < a_n$; $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroissante ; $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croissante.
3. Calculez $a_n - b_n$ en fonction de $a_{n-1} - b_{n-1}$ et a_n. Montrez que l'on a l'inégalité :

$$a_n - b_n < \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4}.$$

4. Calculez les premiers termes de la suite $a_1, a_2, \dots, a_6$. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtenez-vous à chaque pas ? Utilisez l'inégalité précédente pour montrer que le nombre de décimales exactes obtenues double *grosso modo* à chaque pas.

[000453]

Exercice 1464

Calculer avec une calculette : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ et $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$. Expliquer le résultat. [000454]

Exercice 1465

On considère les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$. Y a-t-il un nombre rationnel juste avant $\sqrt{2}$, plus grand que tous les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$?
Une suite de nombres rationnels a-t-elle pour limite un nombre rationnel ?
Une suite de nombres décimaux a-t-elle pour limite un nombre décimal ? [000455]

Exercice 1466

Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.
[000456]

Exercice 1467

Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ (avec α et β premiers entre eux) alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000457]

Exercice 1468

Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les dévelopements décimaux périodiques sont donnés par :

$3,14\overset{\frown}{14}\ldots$; $0,99\overset{\frown}{9}\ldots$; $3,149\overset{\frown}{9}\ldots$ [000458]

Exercice 1469

1. Soit $N_n = 0,1997\,1997\ldots1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p,q \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $M = 0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec : $P = 0,11111\ldots+0,22222\ldots+0,33333\ldots+0,44444\ldots+0,55555\ldots+0,66666\ldots+0,77777\ldots+0,88888\ldots+0,99999\ldots$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000459]

Exercice 1470

Montrer que l'ensemble $\{r^3 \ ; \ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. [000460]

Exercice 1471

Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000461]

Exercice 1472

Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer :

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; \left| a - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Indication : considérer les parties fractionnaires de $0, a, 2a, \dots, qa$ et la partition $[0, \frac{1}{q}[, [\frac{1}{q}, \frac{2}{q}[, \dots [\frac{q-1}{q}, 1[$ de $[0,1[$.

[000462]

Exercice 1473

Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques :

$$\left\{ \frac{a}{2^k}, (a,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$. [000463]

Exercice 1474

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000506]

Exercice 1475

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000507]

Exercice 1476

Étudier la suite $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, a et b étant donnés dans $\mathbb{R}_+^*$.

[000508]

Exercice 1477

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
3. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
4. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

[000509]

Exercice 1478

Soit l un nombre réel. Peut-on dire qu'une suite qui vérifie

$$\forall \varepsilon \in]0,1[, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; \forall n > N, \; |u_n - l| < \varepsilon$$

converge vers l ? [000510]

Exercice 1479

Construire une suite $u_n = v_n w_n$ (resp. $v_n + w_n$) convergente et telle que l'une au moins des suites (v_n) et (w_n) diverge. [000511]

Exercice 1480 Nombres irrationnels

Soit $a \in \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, on a : $\left|r - \sqrt{a}\right| \geqslant \frac{C}{q^2}$.

Correction ▼ [003066]

Exercice 1481 Nombres irrationnels

Soient $a, b \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$. Montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ si et seulement si $a^2 - b$ est un carré dans $\mathbb{Q}$.

Correction ▼ [003067]

Exercice 1482 Parties fractionnaires

Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ avec p, q entiers, $q \geqslant 1$, $p \wedge q = 1$. Calculer $\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{frac}(kx)$.

Correction ▼ [003144]

Exercice 1483 Dénominateurs dans un sous-anneau

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. On écrit les éléments de A sous forme irréductible ; soit P l'ensemble des dénominateurs. Montrer que $A = \left\{\frac{m}{p} \text{ tels que } m \in \mathbb{Z},\ p \in P\right\}$.

Correction ▼ [003145]

Exercice 1484 Les sous-anneaux de $\mathbb{Q}$ sont principaux

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Montrer que A est principal (si I est un idéal de A, considérer $I \cap \mathbb{Z}$). [003146]

Exercice 1485 Décomposition en inverses

Soit $x \in \mathbb{Q}$, $0 < x < 1$. On définit une suite (x_n) de rationnels par récurrence :

— $x_0 = x$,
— Si x_n existe et est non nul, soit $k_n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\frac{1}{k_n} \leqslant x_n$. On pose $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{k_n}$,
— Si $x_n = 0$, on s'arrête. Dans ce cas, $x = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}}$.

1. Montrer que la suite est toujours finie.
2. Montrer que si k_{i+1} existe, alors $k_{i+1} > k_i(k_i - 1)$.
3. Réciproquement, soit une décomposition : $x = \frac{1}{n_0} + \cdots + \frac{1}{n_p}$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $n_{i+1} > n_i(n_i - 1)$. Montrer que pour tout i, on a $n_i = k_i$.

Correction ▼ [003147]

Exercice 1486 Combinaison de fractions

Soient $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ deux rationnels avec $a, c \in \mathbb{Z}$, et $b, d \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que tout rationnel s'écrit : $x = \frac{ma+nc}{mb+nd}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, et $mb + nd \neq 0$.
2. Étudier l'unicité d'une telle écriture.
3. Montrer que $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ est compris entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ si et seulement si m et n ont même signe.

Correction ▼ [003148]

Exercice 1487 Équations algébriques

Déterminer $x \in \mathbb{Q}$ sachant que :

1. $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$.
2. $6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0$.
3. $2x^3 - x - 4 = 0$.

Correction ▼ [003149]

Exercice 1488 $x^y = y^x$

On cherche les couples $(x,y) \in (\mathbb{Q}^{+*})^2$ tels que $x < y$ et $x^y = y^x$ ($x^y, y^x \in \mathbb{R}$).
On pose $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{p'}{q'}$ (formes irréductibles), $d = pq' \wedge p'q$, $\quad pq' = ad$ et $p'q = bd$.

1. Montrer qu'il existe $m,n \in \mathbb{N}^*$ tels que : $p = m^a$, $p' = m^b$, $q = n^a$ et $q' = n^b$.
2. En déduire : $b - a = m^{b-a} - n^{b-a}$.
3. Montrer que $b - a \leqslant 1$ et conclure.

Correction ▼ [003150]

Exercice 1489 I

Montrer que les nombres suivants sont irrationnels.

1. (**) $\sqrt{2}$ et plus généralement $\sqrt[n]{m}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2 et m est un entier naturel supérieur ou égal à 2, qui n'est pas une puissance n-ième parfaite.
2. (**) $\log 2$.
3. (****) π (LAMBERT a montré en 1761 que π est irrationnel, LEGENDRE a démontré en 1794 que π^2 est irrationnel, LINDEMANN a démontré en 1882 que π est transcendant).
   Pour cela, supposer par l'absurde que $\pi = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Considérer alors $I_n = \int_0^{p/q} \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \sin x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que I_n vérifie
   (a) I_n est un entier relatif ;
   (b) $I_n > 0$;
   (c) $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (voir devoir).
4. (***) e (HERMITE a démontré en 1873 que e est transcendant. C'est historiquement le premier « vrai » nombre dont on a réussi à démontrer la transcendance).
   Pour cela, établir que pour tout entier naturel n, $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$, puis que **pour tout** entier naturel non nul n, $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.
5. (***) $\cos(\frac{2\pi}{7})$. Pour cela trouver une équation du troisième degré à coefficients entiers dont les solutions sont $\cos(\frac{2\pi}{7})$, $\cos(\frac{4\pi}{7})$ et $\cos(\frac{6\pi}{7})$, puis vérifier que cette équation n'a pas de racine rationnelle (supposer par l'absurde qu'il y a une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$ et montrer que p divise 1 et q divise 8). (On rappelle le théorème de GAUSS : soient a, b et c trois entiers relatifs tous non nuls. Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c).
6. (***) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Correction ▼ [005209]

Exercice 1490 ****

Soit u_n le chiffre des unités de C_n^k, k entier naturel fixé non nul et n entier naturel supèrieur ou égal à k. Montrer que le nombre $0,u_k u_{k+1} u_{k+2} \ldots$ est rationnel.

Correction ▼ [005214]

Exercice 1491 ****

Soit $(u_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel x. Montrer que les suites $(|p_n|)$ et (q_n) tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005243]

49 120.02 Maximum, minimum, borne supérieure

Exercice 1492

Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des deux nombres x, y. Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000464]

Exercice 1493

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000465]

Exercice 1494

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \quad]0,1[\cap \mathbb{Q}\,, \quad \mathbb{N}\,, \quad \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000466]

Exercice 1495

Soit

$$I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leqslant 2\right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

[000467]

Exercice 1496

Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément, dans $\mathbb{D}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$, (si la question se pose) ?

1. $[0,3[$,
2. $\{0\} \cup]1,2]$,
3. $\mathbb{D} \cap [0,1/3]$,
4. $\{x \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x = 1/n\}$,
5. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

[000468]

Exercice 1497

On considère l'ensemble des nombres de la forme $1 + \frac{1}{n}$, où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses. [000469]

Exercice 1498

Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A,
2. m est un minorant de A,
3. P n'est pas un majorant de A,
4. A est majoré,
5. A n'est pas minoré,
6. A est borné,
7. A n'est pas borné.

[000470]

Exercice 1499

Soit E l'ensemble des réels de la forme $\frac{n-1/n}{n+1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure, un plus grand élément, un plus petit élément ? [000471]

Exercice 1500

Soit $E = \{\frac{1}{n}\cos n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; calculer $\inf E$ et $\sup E$. [000472]

Exercice 1501

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait $x \leqslant y$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$. [000473]

Exercice 1502

Soit $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide et bornée de réels ; comparer :

$$\inf_i(\sup_j a_{ij}) \quad \text{avec} \quad \sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

[000474]

Exercice 1503

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.
2. Montrer que si $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$, alors $x = \sup A$.

[000475]

Exercice 1504

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000476]

Exercice 1505

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,

5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A+B)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000477]

Exercice 1506

Donner la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de l'ensemble :

$$D = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} | n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Cet ensemble admet-il un maximum, un minimum ? [000478]

Exercice 1507

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, n nombres réels. Calculer :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} |x - a_i|.$$

[000479]

Exercice 1508

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Tracer les graphes des fonctions $f, |f|, f_+, f_-$ où : $f_+ = \max(f, 0), f_- = \min(f, 0)$. [000480]

Exercice 1509

Si $a = \sup A$, montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. Réciproque. [000481]

Exercice 1510

Soit $A = \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$. On considère les applications suivantes de A dans $\mathbb{R}_+$:

$$f : \frac{p}{q} \mapsto \frac{q-p}{q+p} ; \qquad g : \frac{p}{q} \mapsto \frac{aq+bp}{p+q}$$

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $f(A)$ et de $g(A)$. [000482]

Exercice 1511

Soit A l'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire $x = \frac{2p^2-3q}{p^2+q}$ pour p et q entiers vérifiant $0 < p < q$.

1. Montrer que A est minorée par -3 et majorée par 2.
2. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$ (pour la borne supérieure on pourra prendre $q = p+1$).

[000483]

Exercice 1512

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose $A_p = \sup_{n>p} u_n$ et $B_p = \inf_{n>p} u_n$. Montrer que $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante bornée et que $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante bornée. Soit $L = \lim_{p \to \infty} A_p$ et $l = \lim_{p \to \infty} B_p$.

1. Dans le cas particulier où $u_n = \frac{n+2}{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$, calculer L et l.
2. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\ u_n > l - \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant p,\ u_n < l + \varepsilon$$
3. Interpréter ces propriétés. Énoncer des propriétés analogues pour L. Démontrez-les.

4. Que peut-on dire de (u_n) si $L = l$?

[000484]

Exercice 1513

Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad g = \sqrt{xy} \qquad h = \frac{2xy}{x+y} \qquad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Montrer que a, g, h, q sont rangés dans un ordre indépendant de x et y. [000485]

Exercice 1514

Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Qu'en est-il pour $A \cap B$?

[000486]

Exercice 1515 **IT

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées. Montrer que $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A+B)$, $\inf A$, inf B, $\inf\,(A+B)$ existent et que l'on a $\sup\,(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf\,(A+B) = \inf A + \inf B$. ($A+B$ désigne l'ensemble des sommes d'un élément de A et d'un élément de B).

Correction ▼ [005210]

Exercice 1516 **

Soit $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Correction ▼ [005211]

Exercice 1517 **IT

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A$.

Correction ▼ [005212]

Exercice 1518 ***IT

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A \cap B)$, $\sup(A \cup B)$, $\sup(A+B)$ et $\sup(AB)$? ($A+B$ (resp. AB) désigne l'ensemble des sommes (resp. des produits) d'un élément de A et d'un élément de B).

Correction ▼ [005213]

---

50 120.03 Propriétés des nombres réels

51 120.04 Intervalle, densité

52 120.99 Autre

Exercice 1519

Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 2$ l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1+nx]$$

est vraie. [000487]

Exercice 1520

Soient $a_1,\dots,a_n,\ b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$, les a_i n'étant pas tous nuls. Soit $p(x)=\sum_{i=1}^n (a_i+xb_i)^2$. Montrer que le discriminant de cette équation du second degré est $\leqslant 0$. En déduire que :

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2},$$

et que

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}.$$

[000488]

Exercice 1521

Deux entiers naturels distincts peuvent-ils vérifier la relation $a^b=b^a$? [000489]

Exercice 1522

Résoudre l'équation $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=4$, x étant un réel positif. [000490]

Exercice 1523

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000491]

Exercice 1524

Soient $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. On note $\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$ et $\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$.
Montrer que dans les deux cas on a :

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

[000492]

Exercice 1525

Pout tout $x\in\mathbb{R}$ on note $E(x)$ sa partie entière et $\{x\}$ sa partie décimale.

1. Tracer les graphes des fonctions $x\mapsto E(x)$ et $x\mapsto\{x\}$.
2. Montrer les relations suivantes : $E(x)+E(y)\leqslant E(x+y)$, $E(x+n)=E(x)+n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Déterminer $\lim E(x)$ et $\lim\{x\}$ lorsque $x\to-1_+$ et $x\to-1_-$. Ces fonctions ont-elles une limites lorsque $x\to-1$?

[000493]

Exercice 1526

Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ et $\lambda>0$ montrer que :

$$2xy\leqslant\frac{x^2}{\lambda}+\lambda y^2.$$

[000494]

Exercice 1527

Soit deux nombres réels a et b vérifiant : $-1 < a < 4$ et $-3 < b < -1$. Donner un encadrement de $a-b$ et de a/b.

[000495]

Exercice 1528

On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; E(x)+E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x)+E(y)+1$.
2. Calculer $E(x)+E(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R} \; E(x) = E(\frac{E(nx)}{n})$.

[000496]

Exercice 1529

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)+f(y).$$

Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = n \cdot f(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = n \cdot f(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \qquad f(q) = q \cdot f(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x \cdot f(1)$ si f est croissante.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000497]

Exercice 1530

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$. Montrer que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = 1.$$

[000498]

Exercice 1531

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$, montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n} (1-x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

[000499]

Exercice 1532

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$A \neq \emptyset,$$

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0,]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[\subset A,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in A.$$

Montrer que $A = \mathbb{R}$. [000500]

Exercice 1533

Montrer :

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = E(nx).$$

[000501]

Exercice 1534

Soient A et B deux parties denses de $\mathbb{R}$, AB et $A+B$ sont-elles denses ? Étude de la réciproque. [000502]

Exercice 1535

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2}).$$

[000503]

Exercice 1536 Morphismes de $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.
2. Montrer que f est une application croissante.
3. En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

[003061]

Exercice 1537 Parties denses

Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, a,b \in A \text{ tq } a < x < b \\ \forall\, a,b \in A,\ \frac{a+b}{2} \in A. \end{cases}$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$. [003062]

Exercice 1538 Parties denses

Soir A un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A \cap]0,1[\neq \varnothing$. [003063]

Exercice 1539 Sous-groupes de $\mathbb{R}$

Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $H \neq \{0\}$. On pose $H^{+*} = H \cap \mathbb{R}^{+*}$, et $\alpha = \inf(H^{+*})$.

1. Si $\alpha \in H^{+*}$, montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
2. Si $\alpha \notin H^{+*}$, montrer que $\alpha = 0$ et en déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

[003064]

Exercice 1540 Partie entière

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a+1}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{a+b-1}{b}\right] = a$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a+1}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{a+b-1}{b}\right] = [a]$.

Correction ▼ [003065]

Exercice 1541 **I Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \frac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ (moyenne harmonique). Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Correction ▼ [005146]

Exercice 1542 ***

Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Correction ▼ [005151]

Exercice 1543 **I

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x)+1$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x)+E(y) \leqslant E(x+y)$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

Correction ▼ [005152]

Exercice 1544 **I

Tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^p a_p,$$

où p est un entier naturel et les a_i sont des entiers éléments de $\{0,\ldots,9\}$, a_p étant non nul. Déterminer p en fonction de n.

Correction ▼ [005153]

Exercice 1545 **I

Soient n un entier naturel et x un réel positif.

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 1 et n ? entre 1 et x ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n ? entre 0 et x ?
3. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ? Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs entre 0 et x ?
4. Combien y a-t-il de multiples de 3 entre 0 et x ?
5. Combien l'équation $x+2y = n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?
6. De combien de façons peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros ?
7. (***) Combien l'équation $2x+3y = n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?

Correction ▼ [005155]

Exercice 1546 ****

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = E(nx)$ (poser la division euclidienne de $E(nx)$ par n).

Correction ▼ [005156]

Exercice 1547 **

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Correction ▼ [005159]

Exercice 1548 ***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in [-1,1]^n$ tels que $x_1+x_2+\ldots+x_n = 0$.
Montrer que $|x_1+2x_2+\ldots+nx_n| \leqslant E(\frac{n^2}{4})$.

Correction ▼ [005160]

Exercice 1549 ** Identité de CATALAN

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Correction ▼ [005215]

Exercice 1550 **I Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et de MINKOWSKI

Soient $a_1,..., a_n$, $b_1,..., b_n$ des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n}(a_k + xb_k)^2$, montrer que $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).
2. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.
   (l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de MINKOWSKI est l'inégalité triangulaire).

Correction ▼ [005216]

Exercice 1551 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 1$.

Correction ▼ [005217]

Exercice 1552 **** Sous groupes de $(\mathbb{R},+)$

1. Montrer que les sous groupes du groupe $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, a réel donné, soit denses dans $\mathbb{R}$.
   Indication : pour G sous-groupe donné de $(\mathbb{R},+)$, non réduit à $\{0\}$, considérer $a = \text{Inf}\ (G\cap]0;+\infty[)$ puis envisager les deux cas $a = 0$ et $a > 0$.
   (Definition : G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in G/\ |y-x| < \varepsilon)$.
2. Application 1. Montrer que $\{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Application 2 (groupe des périodes d'une fonction).
   (a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ (ce sous-groupe est réduit à $\{0\}$ si f n'est pas périodique).
   (b) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes, est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005218]

Exercice 1553 **

Montrer que $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005219]

Exercice 1554

Soit x un réel.

1. Donner l'encadrement qui définit la partie entière $E(x)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}$.
   Donner un encadrement simple de $n^2 \times u_n$, qui utilise $\sum_{k=1}^{n} k$.
3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [005982]

Exercice 1555

Soient a et b deux réels. Montrer
$$ab \leqslant \frac{a^2}{4} + b^2.$$
Généraliser.

Indication ▼ Correction ▼ [007169]

Exercice 1556

On considère deux réels positifs dont le produit vaut 100. Leur somme a-t-elle une valeur minimale et si oui laquelle et dans quel(s) cas ?

Indication ▼ Correction ▼ [007170]

Exercice 1557

Soit $n > 0$ un entier. On considère n réels positifs dont le produit vaut 1. Leur somme a-t-elle une valeur minimale et si oui laquelle et dans quel(s) cas ?

Indication ▼ Correction ▼ [007171]

Exercice 1558

Un magasin vend au même prix deux lots de trois cristaux. Le premier lot comporte trois cristaux cubiques de côté a, b et c respectivement. Le second lot comporte trois cristaux identiques en forme de parallélépipède de dimensions $a \times b \times c$. Quel lot est-il préférable d'acheter ?

Indication ▼ Correction ▼ [007172]

Exercice 1559

Soient a, b et c des réels positifs. Montrer que
$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geqslant 3.$$

Indication ▼ Correction ▼ [007173]

Exercice 1560

Soient a_1, ... a_n des réels strictement positifs et b_1, ... b_n les mêmes n réels mais numérotés dans un ordre différent. Montrer que
$$\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n.$$

Indication ▼ Correction ▼ [007174]

Exercice 1561

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que
$$(1+a^2)(1+b^2) \geqslant 4ab.$$

Indication ▼ Correction ▼ [007175]

Exercice 1562

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geqslant 9a^2b^2c^2$$

Indication ▼ Correction ▼ [007176]

Exercice 1563

Soient a et b deux réels positifs tels que $a + b = 8$. Déterminer la valeur minimale de
$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)$$

et préciser pour quelles valeurs elle est atteinte.

Indication ▼ Correction ▼ [007177]

Exercice 1564 Cauchy-Schwarz

Soient a, b, c et d quatre réels. Montrer que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2.$$

Indication ▼ Correction ▼ [007178]

Exercice 1565

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$2^x+x^2 = 2-\frac{1}{2^x}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [007179]

Exercice 1566

Résoudre le système

$$\begin{cases} 4x & + & \frac{18}{y} & = & 14 \\ 2y & + & \frac{9}{z} & = & 15 \\ 9z & + & \frac{16}{x} & = & 17 \end{cases}$$

Indication ▼ Correction ▼ [007180]

Exercice 1567

Soient a et b deux réels positifs. Montrer que

$$2a^3+b^3 \geqslant 3a^2b.$$

Indication ▼ Correction ▼ [007181]

Exercice 1568

Soient a, b et c trois réels. Montrer que

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a.$$

Indication ▼ Correction ▼ [007182]

Exercice 1569

Soient a, b et c trois réels. Montrer que

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c).$$

Indication ▼ Correction ▼ [007183]

Exercice 1570

Soient a, b et c trois réels non nuls. Montrer que

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [007184]

Exercice 1571

Soient a, b et c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c} \geqslant 2.$$

Indication ▼ Correction ▼ [007185]

53 121.01 Convergence

Exercice 1572

1. Dessiner les suites suivantes :
   (a) $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$ (prendre 2 cm comme unité sur Oy)
   (b) $u_n = (-1)^n$
   (c) $u_n = \dfrac{1}{n}\cos n \qquad v_n = \dfrac{1}{n}|\cos n|$ (n en radians)
   (d) $u_n = \cos n$
   (e) $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = -1$; $u_n = 2$ pour $n \geqslant 5$.
   (f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ (prendre 10 cm comme unité sur Oy)
   (g) $u_n = \cos \dfrac{n\pi}{6}$
   (h) $u_n = \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (prendre 1 cm comme unité sur Oy)
   (i) $u_n = n^2+1$
   (j) $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ (pour $n \geqslant 2$)
2. Classer les dessins par paquets en précisant vos critères.
3. Pour chaque suite, pouvez-vous trouver l et n tels que $|u_n - l| < \frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}$? Mettre en relation avec le classement précédent.
4. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?
   (a) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
   (b) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Réciproque ?

[000504]

Exercice 1573

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000505]

Exercice 1574

Vrai ou faux : il existe une suite (u_n) telle que $(u_{n+1}-u_n)$ tend vers 0 et qui diverge. [000512]

Exercice 1575

Encadrer la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$. Que peut-on en déduire ? [000513]

Exercice 1576

1. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$?
2. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$?
3. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$?

[000514]

Exercice 1577

Étant donné $k \in \mathbb{R}_+$, que peut-on dire d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$? *Application* : Étudier $u_n = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 4\cdots(3n-2)}$. [000515]

Exercice 1578

Montrer qu'une partie D est dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite de points de D. [000516]

Exercice 1579

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ et x un réel.

1. Montrer que $x = \sup(A)$ ssi (x majore A et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x).
2. Énoncer un résultat analogue pour $\inf(A)$.

[000517]

Exercice 1580

Étudier la convergence des suites :

$$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n} \qquad \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \qquad \frac{1}{n}+(-1)^n \qquad n\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

Correction ▼ [000518]

Exercice 1581

Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000519]

Exercice 1582

Soit $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que pour tout $n>0$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n)+1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000520]

Exercice 1583

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente. [000521]

Exercice 1584

Montrer que (u_n) converge ssi $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales).
[000522]

Exercice 1585

Etudier la convergence de la suite $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$. [000523]

Exercice 1586

Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \frac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000524]

Exercice 1587

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle prenant toute les valeurs rationnelles. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. [000525]

Exercice 1588

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty} u_n^2 = \lambda$. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? [000526]

Exercice 1589

1. Donner un exemple de suite bornée divergente, puis de suite divergente telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} x_{n+k} - x_n = 0.$$
2. Donner un exemple de suite divergente qui a une seule valeur d'adhérence (i.e. telle qu'il existe une seule extraction ϕ telle que $x_{\phi(n)}$ converge).
3. Donner un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente telle que $\forall k \geqslant 2, (x_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

[000527]

Exercice 1590

Que peut-on dire des nombres réels a et b si
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a - \frac{1}{n} \leqslant b \leqslant a + \frac{1}{n} \ ?$$

[000528]

Exercice 1591

Étudier la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si n est premier} \\ 67 + 1/n & \text{sinon .} \end{cases}$$

Si cette suite converge, montrer que sa limite est inférieure à 72. Étudier la convergence de cette suite. [000529]

Exercice 1592

On donne la suite (u_n) définie par :
$$u_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$

En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer que la suite (u_n) est convergente. [000530]

Exercice 1593

1. Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites telles que pour n assez grand on ait $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$. On suppose que (v_n) et (w_n) sont convergentes, et on note $v = \lim v_n$ et $w = \lim w_n$. Montrer que pour tout ε positif, on a $v - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant w + \varepsilon$ pour n assez grand (*théorème d'encadrement*). Que peut-on en déduire si $v = w$?
2. Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Montrer que la suite
$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$
est convergente et a pour limite l. Pour cela, encadrer u_n à ε près pour n assez grand, et en déduire un encadrement de v_n.

[000531]

Exercice 1594

Soit α un nombre irrationnel positif et (p_n) et (q_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telles que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} p_n = +\infty.$$

[000532]

Exercice 1595

Étudier la suite $u_n = \ln(1 + \ln(2 + \ln(3 + \cdots + \ln(n - 1 + \ln n) \cdots)))$. [000533]

Exercice 1596

Montrer que pour $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$ admet une unique racine positive ; on la note u_n. Étudier la suite (u_n). [000534]

Exercice 1597

Un ivrogne part à un instant donné d'un point donné. À chaque seconde, il fait un pas dans une direction inconnue (et qui peut changer de façon arbitraire à chaque pas). Comme il se fatigue, ses pas sont de plus en plus courts. Peut-on prévoir qu'au bout d'un certain temps il restera à moins d'un mètre d'une certaine position si on admet que la longueur de son n-ième pas est :

1. $1/n$ mètre ?
2. $1/n^2$ mètre ?

[000535]

Exercice 1598

Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k})$ et $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

[001193]

Exercice 1599

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un intervalle de $\mathbb{R}$. [001194]

Exercice 1600

On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n + v_n}, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent. En déduire qu'elles convergent vers ℓ et ℓ' respectivement. Montrer que l'on a $\ell\ell' = 0$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire ℓ et ℓ'.

[001195]

Exercice 1601

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $0 < u_1 < v_1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Montrer qu'elles convergent vers la même limite. [001196]

Exercice 1602

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls convergeant vers une limite ℓ différente de zéro. Montrer que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs convergeant vers une limite ℓ différente de zéro. Montrer que la suite $(\sqrt{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\ell}$.

[001197]

Exercice 1603

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ converge.

[001198]

Exercice 1604

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ. La réciproque est elle vraie ?
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2nk+k}$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = \ell$. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \ell$.
4. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement positive telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \ell$.

[001199]

Exercice 1605

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. On rapelle que $e = \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. En déduire une valeur approchée de e à $\dfrac{1}{1000}$.
2. Démontrer que e est irrationnel.

[001200]

Exercice 1606

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $m, n \geqslant N$ alors $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2^p} \geqslant \frac{p+2}{2}$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait au critère $\mathscr{C}'$ lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $|u_n - u_{n+1}| < \varepsilon$. Une suite satisfaisant au critère $\mathscr{C}'$ est-elle de Cauchy ?
4. Montrer que les trois assertions qui suivent sont équivalentes :
   (a) Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.
   (b) Toute suite de Cauchy est convergente.
   (c) Deux suites adjacentes sont convergentes.

[001201]

Exercice 1607 Limite de la partie entière d'une suite

Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $([u_n])$ est-elle convergente ?

[004668]

Exercice 1608 Limites doubles différentes

Comparer $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$ et $\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$. [004669]

Exercice 1609 Suites convergeant vers 0

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\frac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Même question avec $\begin{cases} \frac{u_n}{1+u_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (u_n) \text{ est bornée.} \end{cases}$

[004670]

Exercice 1610 $u_n v_n \to 1$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant : $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \\ u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \end{cases}$ Que pouvez-vous dire de ces suites ?

[004671]

Exercice 1611 Série alternée

On pose $u_n = \frac{96\times(-1)^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ et $v_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Étudier les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) et montrer que la suite (v_n) est convergente.
2. Calculer $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$ à 10^{-5} près.

Correction ▼ [004672]

Exercice 1612 Croissance comparée

Montrer que l'ensemble des entiers n tels que $2^{n^2} < (4n)!$ est fini.

[004673]

Exercice 1613 Limite de $n^{1/n}$

Démontrer, sans utiliser la fonction ln, que $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
Chercher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$. [004674]

Exercice 1614 Croissance logarithmique comparée

Soient (a_n), (b_n) deux suites strictement positives telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
Montrer que si $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

[004675]

Exercice 1615 Somme de parties entières

Soit $x \in \mathbb{R}$. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$.

Correction ▼ [004676]

Exercice 1616 Divergence de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\theta \not\equiv 0 (\operatorname{mod} \pi)$, les suites $(\cos(n\theta))$ et $(\sin(n\theta))$ sont toutes les deux divergentes (montrer que si l'une converge, alors l'autre aussi, puis obtenir une contradiction).

[004677]

Exercice 1617 Somme des $1/k^{1/2}$

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Chercher $\lim_{n\to\infty}(u_{2n} - u_n)$, puis $\lim_{n\to\infty} u_n$.
2. Comparer $\frac{1}{2\sqrt{k}}$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, et $\sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. En déduire que la suite $\left(u_n - 2\sqrt{n}\right)$ est convergente.

[004678]

Exercice 1618 Limite de $(1+1/n)^n$

1. On pose $u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   (b) Calculer le nombre $e = \lim_{n\to\infty} u_n$ à 10^{-7} près.
2. On note $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n}$.
   (a) Développer v_n et montrer que $v_n \leqslant e$.
   (b) On fixe $p \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour n suffisament grand, $v_n \geqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} - \varepsilon$.
   (c) Que pouvez-vous en déduire ?

[004679]

Exercice 1619 Étude de $C_{2n}^n/4^n$

On pose $u_n = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}$.

1. Exprimer u_n à l'aide de factorielles.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. Soit $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que la suite (v_n) converge. Que pouvez-vous en déduire pour $\lim_{n\to\infty} u_n$?
4. On note $\alpha = \lim_{n\to\infty} v_n$. En étudiant la suite (nu_n^2), montrer que $\alpha > 0$.

Correction ▼ [004680]

Exercice 1620 Suite $a^n/\prod(1+a^k)$

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Étudier la suite de terme général : $u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$.

Correction ▼ [004681]

Exercice 1621 Lemme de Césaro

Soit (u_n) une suite réelle. On pose $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$.

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$)
3. Donner un exemple où (v_n) converge mais (u_n) diverge.

[004682]

Exercice 1622 Lemme de Césaro

1. Soit (b_n) une suite réelle strictement croissante tendant vers $+\infty$, et (a_n) une suite réelle telle que : $\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
2. Application : Quelle est la limite de $\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ $(k \in \mathbb{N})$?

[004683]

Exercice 1623 Césaro généralisé

Soit (u_n) une suite réelle convergente, et $S_n = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p$. Étudier la suite (S_n).

Correction ▼ [004684]

Exercice 1624 Produit de Cauchy

Soient (a_n), (b_n) deux suites convergeant vers a, b. Montrer que $\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$.

[004685]

Exercice 1625 $x_n - ax_{n-1} \to 0$

Soit (x_n) une suite réelle et $\alpha \in]0,1[$. On pose

$$\begin{cases} y_0 = & x_0 \\ y_n = & x_n - \alpha x_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que : $(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0) \Leftrightarrow (y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$.

[004686]

Exercice 1626 $x_n + x_{2n}/2 \to 1$

Soit (x_n) une suite bornée telle que $x_n + \frac{x_{2n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$. [004687]

Exercice 1627 Approximation d'un irrationnel

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et (r_n) une suite de rationnels convergeant vers x. On écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si l'une des suites (p_n), (q_n) est bornée, alors l'autre l'est aussi, et $x \in \mathbb{Q}$.
2. En déduire que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $|p_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

[004688]

Exercice 1628 Somme des chiffres de n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Encadrer $S(n+1)$ en fonction de $S(n)$. En déduire que la suite $\left(\frac{S(n+1)}{S(n)}\right)$ est bornée.
2. Chercher $\inf\left\{\frac{S(n+1)}{S(n)} \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*\right\}$, et $\sup\left\{\frac{S(n+1)}{S(n)} \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3. La suite $\left(\frac{S(n+1)}{S(n)}\right)$ est-elle convergente ?

Correction ▼ [004689]

Exercice 1629 Équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$

On considère l'équation : $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

1. Prouver qu'il existe une unique racine positive, a_n.
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
3. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ (calculer $a_n^{n+1} - 1$).

[004690]

Exercice 1630 Suite n'ayant qu'une valeur d'adhérence

Soit (u_n) une suite réelle. On appelle *valeur d'adhérence* toute limite d'une sous-suite convergente extraite de (u_n).

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?
2. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\pi/3))$?
3. Montrer que si la suite (u_n) est bornée et diverge, elle a au moins deux valeurs d'adhérence.

[004691]

Exercice 1631 Limites sup et inf

Soit (x_n) une suite bornée de réels. On pose : $\begin{cases} y_n = \sup\{x_p \text{ tq } p \geqslant n\} \\ z_n = \inf\{x_p \text{ tq } p \geqslant n\}. \end{cases}$

1. Montrer que les suites (y_n) et (z_n) convergent.
2. Montrer que (x_n) converge si et seulement si (y_n) et (z_n) ont même limite.

[004692]

Exercice 1632 Convergence vers 0 et monotonie

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0.

1. Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n = \max(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$.
2. Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n = \min(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Correction ▼ [004693]

Exercice 1633 Convergence vers 0 et monotonie

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Montrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\sigma(n)})$ converge vers 0 en décroissant.

[004694]

Exercice 1634 Fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Montrer que $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. [004695]

Exercice 1635 Fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Montrer que $\frac{f(1)}{1^2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Correction ▼ [004696]

Exercice 1636 Radicaux itérés

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{1}}}$.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty}(u_n - \sqrt{n})$.

Correction ▼ [004697]

Exercice 1637 Ensae MP* 2000

Soit (a_n) une suite de réels supérieurs ou égaux à 1 telle que pour tous n,m, $a_{n+m} \leqslant a_n a_m$. On pose $b_n = \frac{\ln a_n}{n}$. Montrer que (b_n) converge vers $\inf\{b_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Correction ▼ [004698]

Exercice 1638 Polytechnique MP* 2000

Soit h croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, et telle que $h(x+1)-h(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Soit V l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $e^{ih(n)}$ Montrer que V est exactement le cercle trigonométrique (i.e. $\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$).

Correction ▼ [004699]

Exercice 1639 $u_n^2 + u_n - u_{n+1} \to 0$ (X MP* 2000)

Soit u_n une suite réelle bornée. On suppose que $u_n^2 + u_n - u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que $u_n \to 0$.

Correction ▼ [004700]

Exercice 1640 Point fixe (Ensae MP* 2003)

Soit une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si la suite (x_n) admet une unique valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Correction ▼ [004701]

Exercice 1641 Suite récurente

Soit $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrer qu'il exitste $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = [a^{2^n}]$ pour tout n où [ ] désigne la partie entière.

Correction ▼ [004702]

Exercice 1642 ***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de CÉSARO et est monotone, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction ▼ [005221]

Exercice 1643 **IT

Pour n entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (série harmonique).

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} H_n$.

2. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un réel $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (γ est appelée la constante d'EULER). Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Correction ▼ [005222]

Exercice 1644 ***

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$ puis, pour n entier naturel donné, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est égale à $\frac{b\sin(\arccos(\frac{a}{b}))}{\arccos(\frac{a}{b})}$.

Correction ▼ [005225]

Exercice 1645 **

Limite quand n tend vers $+\infty$ de

1. $\frac{\sin n}{n}$,
2. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
3. $\frac{n!}{n^n}$,
4. $\frac{E\left((n+\frac{1}{2})^2\right)}{E\left((n-\frac{1}{2})^2\right)}$,
5. $\sqrt[n]{n^2}$,
6. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,
7. $\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3}$,
8. $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^{2k}}$.

Correction ▼ [005226]

Exercice 1646 **

Etudier la suite (u_n) définie par $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$.

Correction ▼ [005227]

Exercice 1647 ***

Soit u une suite complexe et v la suite définie par $v_n = |u_n|$. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ converge vers un réel positif l. Montrer que si $0 \leqslant \ell < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 et si $\ell > 1$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$. Montrer que si $\ell = 1$, tout est possible.

Correction ▼ [005232]

Exercice 1648 ***

1. Soit u une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel ℓ, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge et a même limite.
2. Etudier la réciproque.
3. Application : limites de
   (a) $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$,
   (b) $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,
   (c) $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$.

Correction ▼ [005233]

Exercice 1649 *

Soient u et v deux suites de réels de $[0,1]$ telles que $\lim_{n\to+\infty} u_nv_n = 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Correction ▼ [005234]

Exercice 1650 **

Montrer que si les suites (u_n^2) et (u_n^3) convergent alors (u_n) converge.

Correction ▼ [005235]

Exercice 1651 ***T

Etudier les deux suites $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Correction ▼ [005236]

Exercice 1652 **T

Etudier les deux suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

Correction ▼ [005237]

Exercice 1653

Etudier les deux suites $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$.

Correction ▼ [005238]

Exercice 1654 ***

Montrer que, pour $n \geqslant 2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux}) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux}).$$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ (n radicaux).

Correction ▼ [005241]

Exercice 1655 ***

1. Montrer que pour x réel strictement positif, on a : $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$.
2. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ et en déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Correction ▼ [005242]

Exercice 1656 **

Donner un exemple de suite (u_n) divergente, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la suite (u_{kn}) converge.

Correction ▼ [005244]

Exercice 1657 ***I

Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Correction ▼ [005245]

Exercice 1658 ****I

Etude des suites $(u_n) = (\cos na)$ et $(v_n) = (\sin na)$ où a est un réel donné.

1. Montrer que si $\frac{a}{2\pi}$ est rationnel, les suites u et v sont périodiques et montrer dans ce cas que (u_n) et (v_n) convergent si et seulement si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose dans cette question que $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel .

(a) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge .

(b) En utilisant différentes formules de trigonométrie fournissant des relations entre u_n et v_n, montrer par l'absurde que (u_n) et (v_n) divergent.

3. On suppose toujours que $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel. On veut montrer que l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) (ou (v_n)) est dense dans $[-1,1]$, c'est-à-dire que $\forall x \in [-1,1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}/ \ |u_n - x| < \varepsilon$ (et de même pour v).

(a) Montrer que le problème se ramène à démontrer que $\{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $E = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (par l'absurde en supposant que $\inf(E \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$ pour en déduire que $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$).

(c) Conclure.

Correction ▼ [005247]

Exercice 1659 **I

Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

Correction ▼ [005250]

Exercice 1660 ***

Soit (u_n) une suite de réels éléments de $]0,1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$. Montrer que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005251]

Exercice 1661 ****I

1. Soient p un entier naturel et a un réel. Donner le développement de $(\cos a + i \sin a)^{2p+1}$ puis en choisissant astucieusement a, déterminer $\sum_{k=1}^{p} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}$. En déduire alors $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$.
2. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (pour majorer u_n, on remarquera que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$).
3. Montrer que pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\text{cotan}\, x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.
4. En déduire un encadrement de u_n puis la limite de (u_n).

Correction ▼ [005316]

Exercice 1662 **

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$1)\ u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \arcsin^n x\,dx \quad 2)\ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \quad 3)\ \int_0^{\pi} \frac{n \sin x}{x+n}\,dx.$$

Correction ▼ [005459]

54 121.02 Suite définie par une relation de récurrence

Exercice 1663

Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
2. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif ℓ qui
vérifie $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et calculer ℓ.

[000536]

Exercice 1664

Etudier la suite (u_n) définie par
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(u_n^2 - 3u_n + 4) \ \forall n \geqslant 0.$$

[000537]

Exercice 1665

Étudier les suites :

1. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

[000538]

Exercice 1666

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$
et on définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leqslant x_n < 1/2$ pour tout $n \geqslant 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers α.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000539]

Exercice 1667

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$ pour $n \geqslant 0$.

1. Étudier cette suite si $a = 0$.
2. Étudier cette suite si $a = -10$.
3. Étudier cette suite si $a = 3$.
4. Généraliser en discutant selon la valeur de a.

[000540]

Exercice 1668

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{10}$ dans les cas suivants :

1. $u_0 = -4$.
2. $u_0 = -2$.
3. $u_0 = 2$.
4. $u_0 = 3$.

[000541]

Exercice 1669

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{(u_n-3)^2}{4}$. [000542]

Exercice 1670

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = e^{-u_n}$ et $u_0 = 0$. [000543]

Exercice 1671

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \cos u_n$ et $u_0 = -8$. [000544]

Exercice 1672

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n^3+7}{3(u_n^2+1)}$ et $u_0 = 2$. En déduire une valeur approchée à 10^{-8} près de la racine réelle du polynôme X^3+3X-7. [000545]

Exercice 1673

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{-u_n^2-u_n+24}{6}$ pour $n \geqslant 0$. [000546]

Exercice 1674

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{3}{13}u_n^2 - \frac{1}{9}u_n + 3$ pour $n \geqslant 0$. [000547]

Exercice 1675

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n^2 - \frac{1}{6}u_n + \frac{33}{10}$ pour $n \geqslant 0$. [000548]

Exercice 1676

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(e-1+u_n)$. [000549]

Exercice 1677

Discuter suivant les valeurs de u_0 la nature de la suite $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$. [000550]

Exercice 1678

Soient a et b deux réels strictement positifs ; on définit une suite (u_n) par :

$$u_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{au_n+b}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle cette suite est stationnaire.
2. Montrer que si u_0 est distinct de cette valeur, (u_n) est monotone et bornée. Trouver $\lim_{n\to\infty} u_n$.

[000551]

Exercice 1679

Étudier suivant les valeurs données à u_0 appartenant à $\mathbb{C}$ les suites :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n-2}{u_n+4} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n+2}{u_n+1} \\ u_{n+1} &= \frac{-1}{u_n+1} \end{aligned}$$

[000552]

Exercice 1680

Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$. On considère $a \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.
3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.
4. Si (u_n) converge vers une limite l, alors l est point fixe de f.
5. Si f est dérivable, alors (u_n) est bornée.
6. Si le graphe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.
7. Si (u_n) converge vers un point fixe l de f, alors f est continue en l.

[000553]

Exercice 1681

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = (1-u_n)^2$ (discuter suivant les valeurs de u_0). [000554]

Exercice 1682

Soit $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ et $a \in [0,1]$. Étudier la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. [000555]

Exercice 1683

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n + \mathrm{E}(u_n))$ où E désigne la fonction « partie entière ». [000556]

Exercice 1684

1. Étudier la suite définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \cos u_n$, où a est un nombre réel donné.
2. Étudier la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \underbrace{\cos(\cos(\cos(\cdots(\cos}_{n \text{ fois } \cos} n)\cdots)))$.

[000557]

Exercice 1685

1. Étudier dans $\mathbb{C}$ une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n^2$. Discuter suivant u_0.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ une suite (v_n) telle que $\forall n,\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{A}{v_n}\right)$ où A est un nombre complexe non nul donné. Étudier l'existence et la convergence de cette suite suivant les valeurs de v_0. On pourra noter a une des racines carrées de A et poser $w_n = \frac{v_n - a}{v_n + a}$.

[000558]

Exercice 1686

1. On donne $A \geqslant 0, B \geqslant 0, u_0 \geqslant 0$; étudier la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{A}{n+1} + Bu_n$.
2. Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{\frac{4n}{n+1} - u_n}{2 + u_n}$ (on pourra utiliser la question précédente pour terminer).

Exercice 1687

On considère la suite réelle définie par :

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}.$$

1. Montrer que x_n est supérieur ou égal à 1 pour tout n.
2. Montrer que si (x_n) converge, sa limite l vérifie
$$l = \sqrt{2l+1}.$$
3. l étant définie par l'égalité de 2), est-il possible de trouver $k \in]0,1[$ tel que
$$|x_n - l| \leqslant k|x_{n-1} - l|.$$
Si oui en déduire que $|x_n - l| \leqslant k^n|x_0 - l|$. Conclure.

[000560]

Exercice 1688

En utilisant les méthodes de l'exercice précédent, étudier les suites définies par :

$$y_0 = 3\,; \quad y_{n+1} = \frac{4+3y_n}{3+2y_n},$$
$$z_0 = 1\,; \quad z_{n+1} = 1 + \frac{1}{z_n}.$$

[000561]

Exercice 1689

Soit une suite qui vérifie une relation de récurrence

$$u_n \quad = \quad \frac{au_{n-1}+b}{cu_{n-1}+d} \tag{1}$$

1. Montrer que si la transformation homographique : $x \mapsto y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a deux points fixes distincts, α et β, on peut écrire la relation (E_1) sous la forme : $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k\frac{u_{n-1}-\alpha}{u_{n-1}-\beta}$. Calculer $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ en fonction de $\frac{u_1-\alpha}{u_1-\beta}$.
2. Montrer que si la transformation homographique a un seul point fixe γ, on peut mettre la relation (E_1) sous la forme : $\frac{1}{u_n-\gamma} = \frac{1}{u_{n-1}-\gamma} + k$. Calculer $\frac{1}{u_n-\gamma}$ en fonction de u_1.
3. Utiliser la méthode précédente pour étudier les suites (u_n) définies par :
$$\text{a) } u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+3}, \qquad \text{b) } u_{n+1} = \frac{-3u_n-1}{u_n-3},$$
$$\text{c) } u_{n+1} = \frac{5u_n-3}{u_n+1}, \qquad \text{d) } u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n+4}.$$
Discuter suivant les valeurs de u_1 ; préciser pour quelles valeurs de u_1 chaque suite est définie.

[000562]

Exercice 1690 Étude de suites

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

1. $u_0 = a > 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.
2. $0 < u_0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

3. $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
4. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$.
5. $u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n}$.
6. $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{1-u_n}}$.
7. $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.
8. $u_{n+1} = \sqrt{4-3u_n}$.
9. $u_{n+1} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2}$.
10. $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2+1}$.
11. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n^\alpha$.
12. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \alpha^{u_n}$.

Correction ▼ [004703]

Exercice 1691 Convergence quadratique

Soit $k \in \mathbb{C}$ fixé. Étudier la convergence de la suite (a_n) définie par : $a_0 \in \mathbb{C}$, $a_{n+1} = ka_n^2$.

Correction ▼ [004704]

Exercice 1692 $u_{n+1}(1-u_n) > 1/4$

Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier n : $u_n \in [0,1]$ et $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$.
Montrer que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.

[004705]

Exercice 1693 Radicaux itérés

Trouver $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$ (n radicaux).

Correction ▼ [004706]

Exercice 1694 Radicaux itérés

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_0+\cdots+u_n}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Correction ▼ [004707]

Exercice 1695 Radicaux itérés

On pose $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ et $v_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}}}$.

1. Montrer que ces suites sont convergentes.
2. On note $\lambda = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que $\lambda - u_n \leqslant \frac{n}{2^n\sqrt{n!}}$.

Indication ▼ [004708]

Exercice 1696 Suites homographiques

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n}. \end{cases}$
On suppose u_0 choisi de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

1. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
2. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ possède deux racines réelles α, β avec $|\alpha| > |\beta|$.
   Étudier la suite $(v_n) = \left(\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)$ et en déduire $\lim u_n$.

[004709]

Exercice 1697 Système d'ordre 1

Soient $0 < x_0 < y_0$ et (x_n), (y_n) les suites définies par : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n+y_n} \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n+y_n}. \end{cases}$

Montrer qu'elles sont convergentes et calculer leurs limites.

Correction ▼ [004710]

Exercice 1698 Système d'ordre 1

Étudier la convergence des suites (x_n), (y_n) définies par : $0 < x_0 < y_0$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{2x_n+y_n}{3} \\ y_{n+1} = \frac{2y_n+x_n}{3}. \end{cases}$

Correction ▼ [004711]

Exercice 1699 Système d'ordre 1

Étudier la convergence des suites (x_n), (y_n) définies par : $0 < y_0 < x_0$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}. \end{cases}$

Correction ▼ [004712]

Exercice 1700 Système d'ordre 1

Soient $0 < a < b$ et $(x_n), (y_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}. \end{cases}$

1. Montrer que ces suites convergent vers la même limite.
2. On pose $a = b\cos\varphi$. Exprimer cette limite en fonction de b et φ.

Correction ▼ [004713]

Exercice 1701 Moyennes arithmétique, géométrique, harmonique

1. Soient $x, y, z \geqslant 0$. Montrer que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geqslant 0$ (mettre $x+y+z$ en facteur).
2. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n) définies par :

$$0 < a_0 < b_0 < c_0, \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{3}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_nb_nc_n} \\ 3c_{n+1} = a_n + b_n + c_n. \end{cases}$$

Correction ▼ [004714]

Exercice 1702 Centrale MP 2000

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ et la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ Étudier la suite (u_n), puis la série $\sum u_n$.

Correction ▼ [004715]

Exercice 1703 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue et la suite (u_n) définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$ alors la suite (u_n) converge.

Correction ▼ [004716]

Exercice 1704 **T Récurrences homographiques

Déterminer u_n en fonction de n quand la suite u vérifie :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4(u_n-1)}{u_n}$ (ne pas se poser de questions d'existence).

Correction ▼ [005228]

Exercice 1705 **

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}.$$

Etudier les suites u et v puis déterminer u_n et v_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u et v. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Correction ▼ [005229]

Exercice 1706 **

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies par la donnée de u_0, v_0 et w_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{v_n+w_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{u_n+w_n}{2} \text{ et } w_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}.$$

Etudier les suites u, v et w puis déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u, v et w. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$, $\lim_{n\to+\infty} v_n$et $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Correction ▼ [005230]

Exercice 1707 ***

Montrer que les suites définies par la donnée de u_0, v_0 et w_0 réels tels que $0 < u_0 < v_0 < w_0$ et les relations de récurrence :

$$\frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt[3]{u_nv_nw_n} \text{ et } w_{n+1} = \frac{u_n+v_n+w_n}{3},$$

ont une limite commune que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Correction ▼ [005231]

Exercice 1708 ****

On pose $u_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005240]

Exercice 1709 **I

On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n. En déduire u_n et v_n en fonction de n.
2. En utilisant deux combinaisons linéaires intéressantes des suites u et v, calculer directement u_n et v_n en fonction de n.

Correction ▼ [005277]

Exercice 1710 ***I

Etudier la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $u_0 \geqslant -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, 2) $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$
3) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$, 4) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$,
5) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(2u_n)$, 6) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

Correction ▼ [005425]

Exercice 1711 ***I

Soit $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer brièvement que la suite u est strictement positive et converge vers 0.
2. (a) Déterminer un réel α tel que la suite $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite finie non nulle.

   (b) En utilisant le lemme de CESARO, déterminer un équivalent simple de u_n.

Correction ▼ [005435]

Exercice 1712 **I

Soit u la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Equivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005436]

55 121.03 Suites équivalentes, suites négligeables

Exercice 1713

Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000563]

Exercice 1714

Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :

$u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ $\quad u_n = \sqrt{n(n+a)} - n$ $\quad u_n = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ $\quad u_n = \dfrac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$. [000564]

Exercice 1715

Montrer que les suites définies pour $n \geqslant 1$ par :

$u_n = \dfrac{n+1}{n}$ $\quad u_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ $\quad u_n = \frac{n}{n^2+1}$

admettent toutes des limites que l'on calculera. [000565]

Exercice 1716

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie en posant $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. [000566]

Exercice 1717

Etudier la limite des suites suivantes : $a_n = \cos\left(\dfrac{2^n}{n!}\right)$; $b_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$; $c_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{3^n}$; $d_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}$; $e_n = (\cos n)\sin\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. [000567]

Exercice 1718

Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\ldots\,;\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,;\,\ldots$
2. $2/1\,;4/3\,;6/5\,;\ldots;2n/(2n-1)\,;\ldots$
3. $0{,}23\,;\,0{,}233\,;\,\ldots\,;\,0{,}233\cdots 3\,;\,\ldots$
4. $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}$
5. $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right]$
7. $\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
9. $\left(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\right)$ puis $\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2\sqrt{2}}\,;\,\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,;\,\ldots$
10. $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
12. $\frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
13. Démontrer la formule $1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000568]

Exercice 1719

Soit $a>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0>0$ et par la relation

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2-a=\frac{(u_n{}^2-a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que si $n\geqslant 1$ alors $u_n\geqslant\sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2-a=(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1}-\sqrt{a}$ en fonction de $u_n-\sqrt{a}$.
5. Si $u_1-\sqrt{a}\leqslant k$ et pour $n\geqslant 1$ montrer que
$$u_n-\sqrt{a}\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$
6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0=3$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000569]

Exercice 1720

On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \; ; \; n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \; ; \; n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000570]

Exercice 1721

Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ supposée continue et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a,b] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. *Application.* Calculer la limite de la suite définie par :
$$u_0 = 4 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$
3. On suppose maintenant que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. *Application.* Soit
$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$
Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000571]

Exercice 1722

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$
3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000572]

Exercice 1723

Soit x un réel.

1. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

[000573]

Exercice 1724

Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution, notée a_n, dans $[0,1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000574]

Exercice 1725

Calculer suivant les valeurs de x :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}[\cos(n!\pi x)]^{2m}\right].$$

[000575]

Exercice 1726

Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par $a_{n+1} = \dfrac{2a_n+b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+2b_n}{3}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant a_n+b_n, montrer qu'elles convergent vers $\dfrac{a_0+b_0}{2}$.

[000576]

Exercice 1727

Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. On pose $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que (x_n) converge vers 0 (on pourra fixer ε puis séparer la somme en deux et enfin choisir N...). [000577]

Exercice 1728

Déterminer les limites de $\dfrac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$ et $\sqrt[n]{n^2}$. [000578]

Exercice 1729

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont non nuls et telle que :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. [000579]

Exercice 1730

Étudier la suite définie par récurrence :

$$u_0 = a > 0, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

[000580]

Exercice 1731

Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2}).$$

[000581]

Exercice 1732

Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}.$$

[000582]

Exercice 1733

Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = \ell$. Calculer ℓ. [000583]

Exercice 1734

Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective ; montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(n) = +\infty$. [000584]

Exercice 1735

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$, et on suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, puis que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. [000585]

Exercice 1736

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ et ϕ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. (pas nécessairement strictement croissante !). Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = \ell$. [000586]

Exercice 1737

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = \lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

[000587]

Exercice 1738

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$

Montrer que

$$E = \{u_n - v_m | (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$. [000588]

Exercice 1739

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 1.$$

[000589]

Exercice 1740

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ et L. Étudier la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

[000590]

Exercice 1741

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que :

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+\frac{u_{2n}}{2}) = 1.$$

Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? [000591]

Exercice 1742

Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ f(z) = \frac{z+|z|}{2}.$$

Étudier la suite définie par :

$$z_0\in\mathbb{C}, \forall n\in\mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n).$$

Indication : on écrira $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$,où $(\rho_n,\phi_n)\in\mathbb{R}^{+*}\times]-\pi,\pi[$ et on utilisera :

$$\sin\phi = 2^n \sin\frac{\phi}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\phi}{2^i}.$$

[000592]

Exercice 1743 ***I

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1) $\arccos\frac{n-1}{n}$ 2) $\arccos\frac{1}{n}$ 3) $\mathrm{ch}(\sqrt{n})$ 4) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 5) $\frac{\mathrm{argch}\, n}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$
6) $(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$ 7) $\ln(\cos\frac{1}{n})(\ln\sin\frac{1}{n})$ 8) $(\frac{\pi}{2})^{3/5}-(\arctan n)^{3/5}$ 9) $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$

Correction ▼ [005252]

Exercice 1744 ***I

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

Correction ▼ [005253]

Exercice 1745 ***I

1. Soient u et v deux suites réelles strictement positives. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, alors $U_n \sim V_n$.
2. Application. Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

Correction ▼ [005254]

Exercice 1746 ****

Soit (u_n) une suite réelle de limite nulle. Montrer que si $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$, alors $u_n \sim \frac{1}{n}$. A-t-on : si $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$, alors $u_n \sim \frac{1}{n}$?

Correction ▼ [005255]

Exercice 1747 ***I

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite u est strictement positive, décroissante de limite nulle.
2. On admet que si u est une suite de limite nulle, alors, quand n tend vers $+\infty$, $\sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. Déterminer un réel α tel que la suite $v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite réelle non nulle. En appliquant le lemme de CÉSARO à la suite (v_n), en déduire un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005256]

56 121.04 Suite récurrente linéaire

Exercice 1748

Que penser-vous de l'énoncé suivant : si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(e^{u_n}) \sim (e^{v_n})$. Donner un énoncé correct. [000593]

Exercice 1749

1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \neq 0$ et si $(u_n) \to 0$ alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
2. Soit a un réel. Déterminer la limite de $(1+\dfrac{a}{n})^n$.

[000594]

Exercice 1750

Comparer les suites suivantes :

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

[000595]

Exercice 1751

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$. [000596]

Exercice 1752

Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$. [000597]

Exercice 1753

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [0,1], u_{n+1} = u_n^2.$$

Donner un équivalent de u_n quand $n \to \infty$. [000598]

Exercice 1754

Montrer la réciproque du théorème de Césaro (i.e. $\lim_{n\to\infty} u_n = l$) :

1. dans le cas où $\lim_{n\to\infty} v_n = l$ et
$$u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n}),$$
2. dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

[000599]

Exercice 1755

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$. En utilisant $v_n = \frac{u_n^2}{4}$, donner un équivalent de u_n. *Indication* : on montrera que $\lim_{n\to\infty} v_{n+1} - v_n = 1$, on en déduira un équivalent de v_n puis de u_n. [000600]

Exercice 1756

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. L'étudier et, en utilisant $v_n = \frac{1}{u_n}$, en donner un équivalent dans le cas $u_0 \in]-1;0]$. Que dire dans le cas $u_0 \in]0;\infty[$? (On étudiera $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.) [000601]

Exercice 1757

Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E telles que $fg = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2}$. En étudiant $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$, en donner un équivalent. [000602]

Exercice 1758

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[, u_{n+1} = \sin u_n.$$
Donner $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$,(réponse : $\frac{1}{3}$) en déduire un équivalent de u_n^{-2} donc de u_n. [000603]

Exercice 1759

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in [n, n+1[$ solution de $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$. Donner un équivalent de x_n puis faire un développement asymptotique de $x_n - n$ à l'ordre 5 en fonction de $\frac{1}{n}$. [000604]

Exercice 1760

Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ldots - \frac{1}{n^2}.$$
On montrera préalablement que :
$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$
quand $n \to \infty$. [000605]

Exercice 1761

Soit (u_n) définie par u_0 et u_1 strictement positifs et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?

2. Soit $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Montrer que a_{2n} et a_{2n+1} sont adjacentes.
4. Déterminer un rationnel r tel que $\left|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < 10^{-3}$.

Correction ▼ [001202]

Exercice 1762

Déterminer (u_n) telle que

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = i$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

[001203]

Exercice 1763

Déterminer les suites bornées qui vérifient $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Correction ▼ [001204]

Exercice 1764

Déterminer les suites convergentes qui vérifient $2u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n$. [001205]

Exercice 1765

Montrer que la suite $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ est bien définie et la déterminer. [001206]

Exercice 1766

Déterminer les suites (u_n) et (v_n) qui vérifient $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$ [001207]

Exercice 1767 Ensi Chimie P' 93

1. Résoudre $\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \\ u_0 = a, \ u_1 = b. \end{cases}$
2. Si $a = 0$, trouver $\lim u_n$.
3. Résoudre : $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}v_n}$.

Correction ▼ [003068]

Exercice 1768 Équations de récurrence linéaire

1. Résoudre :
$$\begin{cases} u_{n+2} - u_n = n - 1 \\ u_0 = u_1 = 0. \end{cases}$$
2. Résoudre : $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n$.

Correction ▼ [003069]

Exercice 1769 Système récurrent

On donne u_0, v_0. Résoudre le système : $\begin{cases} 5u_n = 2u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ 5v_n = 2v_{n-1} + 3u_{n-1}. \end{cases}$

Correction ▼ [003070]

Exercice 1770 Caractérisation des suites polynomiales

Soit (u_n) une suite de réels. On définit les suites dérivées de (u_n) :

$$\begin{cases} (u'_n) = (u_{n+1} - u_n) \\ (u''_n) = (u'_{n+1} - u'_n) \\ \dots \\ \left(u_n^{(k+1)}\right) = \left(u_{n+1}^{(k)} - u_n^{(k)}\right). \end{cases}$$

1. Exprimer $u_n^{(k)}$ en fonction de $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est polynomiale si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(u_n^{(k)}\right) = (0)$.

Correction ▼ [003071]

Exercice 1771 Nombre de nombres ne comportant pas 13

Soit T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 en numération décimale.

1. Montrer que $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$.
2. Calculer T_n en fonction de n.

Correction ▼ [003072]

Exercice 1772 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$

On note $x_n = (\sqrt{3}+1)^{2n+1}$, $y_n = (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$, et $z_n = [x_n]$.

1. Montrer que $z_n = x_n - y_n$.
2. En déduire que 2^{n+1} divise z_n.

[003073]

Exercice 1773 **T

Déterminer u_n en fonction de n et de ses premiers termes dans chacun des cas suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
5. $\forall n \geqslant 2,\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + n^3$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$.
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^5$.

Correction ▼ [005239]

57 121.05 Suite de Cauchy

Exercice 1774

Montrer que la suite $\left(\frac{\sin n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et que la suite $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas. [001208]

Exercice 1775

Montrer que la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{\cos 1}{1!} + \frac{\cos 2}{2!} + \cdots + \frac{\cos n}{n!}$$

est une suite de Cauchy. En déduire sa convergence. [001209]

Exercice 1776

Montrer que toute sous-suite extraite d'une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.
Montrer que si (u_n) est une suite de Cauchy, on peut trouver une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) telle que :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall q \geqslant p,\ |u_{n_p} - u_{n_q}| \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

[001210]

Exercice 1777

Une suite (x_n) est définie par une relation de récurrence $x_{n+1} = a\sin x_n + b$ où a est un nombre réel de $]0,1[$ et b un nombre réel quelconque. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $|x_{p+1} - x_p| \leqslant a^p |x_1 - x_0|$. En déduire que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.
Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de $\lim x_n$ à 10^{-10} près si on suppose $a = 1/2$, $b = 5$, $x_0 = 1$? [001211]

58 121.06 Suite dans Rn

Exercice 1778

Soit x_n une suite de $\mathbb{R}^d$. Montrer que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de x_n est fermé. Indication : prouver que le complément de A est ouvert. [001901]

Exercice 1779

Soit x_n une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Montrer que x_n converge si et seulement si A est un singleton. Indication : pour prouver la convergence, utiliser qu'une suite bornée de $\mathbb{R}^d$ a au moins une valeur d'adhérence. [001902]

Exercice 1780

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit x_n la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$. Montrer que si $a \in A$ alors $f(a) = a$.
Indication : appliquer la définition de la continuité de f en a en termes de limites. [001903]

Exercice 1781

Soit x_n une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Supposons que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$. Montrer que l'ensemble A est non-vide, compact, connexe.
Indication : pour la connexité, supposer que $A = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 non-vides, disjoints, fermés.
Si $d = 1$ conclure que $A = [a,b]$ avec $a \leqslant b$.

[001904]

Exercice 1782

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit x_n la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que x_n est bornée. Montrer que x_n converge si et seulement si

$$||x_n - x_{n+1}|| \to 0.$$

Indication. Montrer qu'il suffit de prouver que $a = b$ dans $[a,b] = A$. Si $a < b$ montrer que la suite est stationnaire. [001905]

Exercice 1783

Soit $s_n = \Sigma_{k=1}^n 1/k$ et $x_n = \cos(s_n)$. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Indication : montrer que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$ mais que x_n ne converge pas. [001906]

59 121.99 Autre

Exercice 1784 I

1. (*) Calculer $\prod_{k=1}^n (1+\frac{1}{k})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (***) Calculer $\prod_{k=1}^n \cos\frac{a}{2^k}$, $a \in]0,\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ [005145]

Exercice 1785 ***

On veut montrer de manière élémentaire (c'est-à-dire en se passant du logarithme népérien et en ne travaillant qu'avec les deux opérations $+$ et $\times$) que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n < 3$.
Pour cela développer, puis majorer $u_k = \frac{C_n^k}{n^k}$ en commençant par majorer $v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$ par $\frac{1}{2}$.
Correction ▼ [005148]

Exercice 1786 **I

Soient x un réel. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2}$.
Correction ▼ [005154]

Exercice 1787 ***IT

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_0+u_1+...+u_n}{n+1}$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ. Réciproque ?
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Réciproque ?
3. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Correction ▼ [005220]

Exercice 1788 ***I

Soit u_n l'unique racine positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Etudier la suite (u_n).
Correction ▼ [005246]

Exercice 1789 ****

Montrer que l'ensemble E des réels de la forme $u_n = \sin(\ln(n))$, n entier naturel non nul, est dense dans $[-1,1]$.
Correction ▼ [005248]

Exercice 1790 ***

Calculer $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|))$.

Correction ▼ [005249]

60 122.01 Série à termes positifs

Exercice 1791

Soient, pour $n>0$, $u_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $v_n=\ln u_n$.

1. Etudier la serie de terme général w_n où, pour $n\geqslant 2$, $w_n=v_n-v_{n-1}$ et $w_1=v_1$.
2. En déduire, en utilisant la convergence de la suite des sommes partielles de w_n, que la suite u_n converge vers $\lambda>0$.
3. Déterminer λ en utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{\pi}$. En déduire un équivalent de $n!$.

   Indication : Exprimer $n!$ (respectivement $(2n)!$) en fonction de u_n (resp. de u_{2n}) et remplacer-les dans la formule de Wallis.

[001930]

Exercice 1792

Etudier la série de terme général

$$u_n=\frac{a^n2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}\text{ où }a>0,\ b>0.$$

Indication : Chercher un équivalent suivant les valeurs de b. [001932]

Exercice 1793 Comparaison à des séries de Riemann et équivalent

Etudier les séries de termes généraux

1. $$u_n=\cos\left(\frac{\pi n^2}{2n^2+an+1}\right)\text{ avec }a>0$$
2. $$v_n=e^{-\sqrt{n}}$$
3. $$w_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

[001934]

Exercice 1794

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n})=1$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^\beta}\right),\text{ où }\alpha>0\ \ \beta>1.$$

On pose $v_n=n^\alpha u_n$. Etudier $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et montrer que (v_n) a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général

$$u_n=\sqrt{n!}\sin 1\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

[001935]

Exercice 1795

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{n!}{n^n}$ 2. $(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n})^{-2}$ 3. $n^{-(1+(1/n))}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 5. $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ 6. $n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}}$

Correction ▼ [001936]

Exercice 1796

Étudier, suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$, la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}.$$

Correction ▼ [001937]

Exercice 1797

Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1. $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{n^4+n^2+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}$

Indication ▼ Correction ▼ [001938]

Exercice 1798

Soit (u_n) une suite réelle positive et $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$. Comparer la nature des séries $(\sum u_n)$ et $(\sum \dfrac{u_n}{S_n})$. [001939]

Exercice 1799 Utilisation d'une série

Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$. Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}.$$

Par un changement de variable, transformer u_n en

$$u_n = \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(n\pi+x)^4\sin^2 x}$$

Encadrer ensuite u_n par les termes de la suite v_n où

$$v_n = \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}$$

Calculer explicitement l'intégrale v_n et en déduire un équivalent de u_n. Conclure. [001941]

Exercice 1800

Soit u_n une suite décroissante à termes positifs. On suppose $(\sum u_n)$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}(nu_n) = 0.$$

Indication : Encadrer $\sum_{p+1}^{n} u_k$ pour $n > p$. Puis revenir aux définitions des limites avec les epsilons. [001942]

Exercice 1801

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+2}}{v_n}.$$

Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge. [001943]

Exercice 1802 Examen 2000

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3-k}$et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
4. L'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

[001945]

Exercice 1803

Soit $0 < a < b$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ défini par $u_0 = 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ pour $n \geqslant 0$. Montrer que la limite de la suite $W_n = \log(n^{b-a}u_n)$ existe et est finie. En déduire les valeurs de a et b telles que la série $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ converge. Calculer alors sa somme : pour cela expliciter sa somme partielle s_n, en montrant d'abord que pour tout n on a

$$\sum_{j=0}^{n}[(j+1)+b-1]u_{j+1} = \sum_{j=0}^{n}[j+a]u_j.$$

Correction ▼ [001949]

Exercice 1804

Par un calcul direct, montrer que les sommes partielles de la série harmonique

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}, \qquad n \geqslant 1$$

ne forment pas une suite de Cauchy. En déduire que cette série diverge. [002718]

Exercice 1805

En discutant éventuellement selon la valeur des paramètres réels α et β, étudier les séries de termes généraux positifs ($n \geqslant 2$) :

$\dfrac{n+\alpha}{n+\beta}$,

$\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+\alpha n}, \quad \alpha \leqslant 2$,

$\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$,

$\dfrac{n^n\alpha^n}{n!}$,

$n^\alpha(\ln n)^\beta$,

$\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+k)!}, \quad k\in\mathbb{Z}$,

$\displaystyle\int_1^\infty \exp(-x^n)\,dx$ (indication : changer de variable $t=x^n$).

$\dfrac{1}{n(n^2-1)}$,

$\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)+\ln n^2+\dfrac{\sqrt{n}}{n^2-n}$,

$\dfrac{1}{(1+1/\sqrt{n})^{n\sqrt{n}}}$,

$\sqrt[n]{n}-1$,

$\displaystyle\int_n^{n+1/2}\frac{1}{\sqrt{t^4+1}}dt$,

$n^\alpha\left[(n+1)^{(n+1)/n}-(n-1)^{(n-1)/n}\right]$,

[002719]

Exercice 1806

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général n^α est de ce type ; rappeler pour quelles valeurs de α elle converge.
2. Montrer que si $\alpha>-1$, la série de terme général a_n diverge, et que si $\alpha<-1$ elle converge.
3. Application : étudier la série
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n+2)}.$$
4. Montrer que si l'on a au voisinage de $+\infty$,
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),$$
alors la série de terme général a_n diverge.
5. Application : étudier la série
$$\sum_{n\geqslant 1}(1-\exp(-1/n)).$$

[002720]

Exercice 1807

Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in]0,1[$ donné et $u_{n+1}=u_n-{u_n}^2$. Montrer que cette suite converge et en donner la limite. Montrer que la série de terme général ${u_n}^2$ converge et en donner la limite. Montrer que les séries de terme généraux u_n et $\ln(u_{n+1}/u_n)$ divergent. [002721]

Exercice 1808

Montrer qu'il existe deux réels α, β, tels que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}.$$

En déduire la valeur de

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Correction ▼ [002722]

Exercice 1809

Soit (a_n) un suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. Étudier les séries

$$\sum a_n^2, \qquad \sum \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad \sum a_n a_{2n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

[002723]

Exercice 1810

Justifier la convergence et calculer les sommes des séries suivantes

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+k)} \quad (k\in\mathbb{N}^*), \quad \sum \frac{9}{(3n+1)(3n+4)},$$
$$\sum \frac{n^2+n-3}{n!}, \qquad \sum_{n\geqslant 2} \ln \frac{n^2}{n^2-1}.$$

[002725]

Exercice 1811 **T

Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Trouver une démonstration directe.

Correction ▼ [005108]

Exercice 1812 ***I

1. Montrer par récurrence que, pour tout naturel non nul n, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. En calculant la différence $(k+1)^2-k^2$, trouver une démonstration directe de ce résultat.
2. Calculer de même les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et $\sum_{k=1}^{n} k^4$ (et mémoriser les résultats).
3. On pose $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer les S_p de proche en proche.

Correction ▼ [005109]

Exercice 1813 Sommes télescopiques

Calculer les sommes suivantes :

1. (**) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2. (***) Calculer $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\{1,2,3,4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p+1$ tel que $P_p(x+1)-P_p(x) = x^p$).
3. (**) Calculer $\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1}$ (aller relire certaines formules établies dans une planche précédente).
4. (**) Calculer $\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2}{k^2}$.

Correction ▼ [005143]

Exercice 1814 I

Calculer les sommes suivantes :

1. (**) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$.
2. (**) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ et $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j$.
3. (*) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.

4. (***) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4)$. Déterminer$\lim_{n\to+\infty} u_n$ (utiliser les résultats de l'exercice 1813, 2)).

Correction ▼ [005144]

Exercice 1815 ***I

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, n réels strictement positifs.
Montrer que $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}) \geqslant n^2$ (développer et penser à $f(x) = x + \frac{1}{x}$).

Correction ▼ [005149]

Exercice 1816 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$.

Correction ▼ [005223]

Exercice 1817 **

Calculer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+...+k^2}$.

Correction ▼ [005224]

Exercice 1818 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Correction ▼ [005697]

Exercice 1819 ***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Trouver la nature de la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{(1+u_1)...(1+u_n)}$, $n \geqslant 1$, connaissant la nature de la série de terme général u_n puis en calculer la somme en cas de convergence.

Correction ▼ [005698]

Exercice 1820 ****

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + ... + u_n$. Etudier en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

Correction ▼ [005699]

Exercice 1821 *

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0, +\infty[$.

Correction ▼ [005704]

Exercice 1822 **

Déterminer un équivalent simple de $\frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$ quand n tend vers l'infini (a réel positif donné).

Correction ▼ [005705]

61 122.02 Convergence absolue

Exercice 1823 Utilisation des règles de Cauchy et d'Alembert

Etudier les séries de termes généraux

1.
$$u_n = \sqrt{n!}\sin x \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdots\sin\frac{x}{\sqrt{n}} \text{ avec } x > 0.$$

2.
$$v_n = e^{an^2}(1-\frac{a}{n})^{n^3}$$

[001933]

Exercice 1824 Séries à termes quelconques

Etudier les séries de termes généraux

1.
$$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$$

2.
$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0$$

3.
$$w_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \text{ où } \alpha > 0$$

Indication : Des calculs de D.L. peuvent etre fructueux ... [001940]

Exercice 1825 Examen 2000

En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories
- GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
- ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
- AC : celles qui convergent absolument ;
- SC : celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right];\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

[001944]

Exercice 1826

Déterminer, en fonction des paramètres réels α, β, la nature des séries de termes généraux ($n \geqslant 2$)

$$\begin{array}{ll}
(-1)^n n^\alpha, & n^\beta\left(1-(-1)^n n^\alpha\right), \\
\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}, & \exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{n}}-1\right), \\
\ln\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n}\right), & \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \\
\sin\left(2\pi\dfrac{n!}{e}\right) & \text{(on pourra utiliser que } : 1/e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}).
\end{array}$$

[002724]

62 122.03 Séries semi-convergentes

Exercice 1827 Examen 2000

En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories

— GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0;

— ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;

— AC : celles qui convergent absolument;

— SC : celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right];\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

[001944]

63 122.04 Séries alternées

Exercice 1828

Soit $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

[001931]

Exercice 1829 Examen 2000

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\log 2.$$
Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}$et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
4. L'intégrale impropre $\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

[001945]

Exercice 1830 Permutation dans la série harmonique alternée : Pringsheim (1883)

Pour tout entier $n>0$, soit $u(n)=(-1)^n/n$. Soit σ une permutation des entiers >0 et soit τ la permutation réciproque. On suppose de plus que

(1) pour tout entier $p>0$ on a $\tau(2p-1)<\tau(2p+1)$ et $\tau(2p)<\tau(2p+2)$.

(2) Notant par $p(n)$ le nombre d'entiers k tels que $1\leqslant k\leqslant n$ et $\sigma(k)$ est pair, alors $\alpha=\lim_{n\infty}p(n)/n$ existe et est dans $]0,1[$.

1. Dans le cas particulier où σ est définie par

$$\sigma(3p) = 2p,\ \sigma(3p+1) = 4p+1,\ \sigma(3p+2) = 4p+3$$

pour tout entier $p > 0$, calculer explicitement τ, et vérifier que σ satisfait (1) et (2), en calculant $p(n)$ pour tout n ainsi que α.

2. On note $f(n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \log n$, et on rappelle le fait, vu en cours, que $\lim_{n\infty} f(n) = \gamma$ existe (Constante d'Euler). On revient au cas général pour σ, on considère la série de terme général $v_n = u(\sigma(n))$ et on note $s_n = v_1 + \cdots + v_n$.

3. Montrer par récurrence que $s_n = \sum_{k=1}^{p(n)} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-p(n)} \frac{1}{2k-1}$ et que

$$s_n = \frac{1}{2} f(p(n)) + \frac{1}{2} f(n-p(n)) - f(2n-2p(n)) + \frac{1}{2} \log \frac{p(n)}{n-p(n)} - \log 2.$$

En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge et calculer sa somme en fonction de α.

[001948]

Exercice 1831 **

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Correction ▼ [005710]

---

64 122.05 Familles sommables

Exercice 1832 Dénombrabilité

A étant un ensemble infini dénombrable, les ensembles suivants sont-ils dénombrables :

1. $\mathscr{P}(A)$?
2. $\{$parties finies de $A\}$?
3. $\{$suites périodiques à valeurs dans $A\}$?
4. $\{$suites ultimement périodiques à valeurs dans $A\}$?
5. $\{$relations d'ordre total sur $A\}$?

[004487]

Exercice 1833 Discontinuités d'une fonction monotone

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable (pour $[a,b] \subset \mathbb{R}$, considérer la famille $(f(x^+) - f(x^-))_{x\in[a,b]}$).
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante ayant une infinité dénombrable de discontinuités.
3. ($**$) Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *strictement* croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est égal à $\mathbb{Q}$.

Correction ▼ [004488]

Exercice 1834 Ensemble non vide ?

Soit $(r_n)_{n\geqslant 1}$ une énumération des rationnels. On note $I_n = \left]r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}\right[$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ et $F = \mathbb{R} \setminus E$. Montrer que $F \neq \varnothing$ (ceci est choquant vu que les éléments de F sont, par définition, "loin" de chaque rationnel, pourtant c'est vrai) .

Correction ▼ [004489]

Exercice 1835 Étude de convergence

Étudier la finitude des sommes suivantes :

1. $\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(i+j)^\alpha}$.
2. $\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^\alpha+j^\alpha}$.
3. $\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}$.
4. $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{a^p+b^q}$, $a>1, b>1$.

Correction ▼ [004490]

Exercice 1836 Série des restes

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Correction ▼ [004491]

Exercice 1837 Série des restes

Calculer $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$ en fonction de $\zeta(3)$.

Correction ▼ [004492]

Exercice 1838 Non interversion des sommations

On pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n\neq p$ et $a_{n,n}=0$.

1. Expliquer simplement pourquoi la suite double $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Correction ▼ [004493]

Exercice 1839 Identité remarquable

Montrer que pour $x\in\mathbb{C}$, $|x|<1$, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Correction ▼ [004494]

Exercice 1840 Calcul de somme

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)z^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n. [004495]

Exercice 1841 Centrale MP 2000

Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$.

1. Pour quelles valeurs de t $S(t)$ a-t-elle un sens ?
2. Montrer que $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{1-t^k}$.
3. Soit $F_m(t) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{t^k(1-t)}{1-t^k}$. Montrer que $(F_m(t))$ converge uniformément vers $(1-t)S(t)$ sur $[0,1]$. En déduire la limite en 1 de $(1-t)S(t)$. On rappelle que $\ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}$.
4. Calculer le développement en série entière de $S(t)$. Donner une interprétation arithmétique des coefficients de ce développement et préciser leur signe en fonction de n.

Correction ▼ [004496]

Exercice 1842 Centrale MP 2002

Soient $a,b,c\in\mathbb{N}^*$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}}$.

1. Étudier la convergence de la série et montrer qu'on peut intervertir b et c dans la formule.
2. Développer en série entière : $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{2m}}{1-z^m}$.

Correction ▼ [004497]

Exercice 1843 Calcul de sommes

Calculer les sommes suivantes : $A = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2}$, $B = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2;p|q} \frac{1}{p^2q^2}$ et $C = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2;p\wedge q=1} \frac{1}{p^2q^2}$.

Correction ▼ [004498]

Exercice 1844 Série harmonique alternée

On réordonne les termes de la série harmonique alternée en prenant tour à tour p termes positifs puis q termes négatifs, $p,q \geqslant 1$. Calculer la somme de la série correspondante.

Correction ▼ [004499]

Exercice 1845 Familles de carrés sommable

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que : $\int_{t=-1}^{1} P(t)\,dt + i\int_{\theta=0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta = 0$.
   En déduire : $\int_{t=0}^{1} P^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_{\theta=-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2\,d\theta$.
2. Soient $2n$ réels positifs $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_kb_\ell}{k+\ell} \leqslant \pi\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2}$.
3. Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes de carrés sommables.
   Montrer que la suite double $\left(\frac{a_kb_\ell}{k+\ell}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

[004500]

Exercice 1846 Associativité générale

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de I, non nécéssairement finies, telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$. Montrer que $\sum_{i\in I_n} a_i \to \sum_{i\in I} a_i$ lorsque $n\to\infty$. En déduire que si $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition dénombrable de I alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\in J_n} a_i$. [004501]

Exercice 1847 Mines MP 2001

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine et la développer en série entière.

Correction ▼ [004502]

65 122.06 Fonction exponentielle complexe

Exercice 1848 $\cos z$

Quels sont les complexes z tels que $\cos z \in [-1,1]$?

Correction ▼ [004403]

Exercice 1849 $\lim((1+z/n)^n)$

Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to e^z$ lorsque $n\to\infty$.

Correction ▼ [004404]

Exercice 1850 Inégalité

Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que $|e^z-1| \leqslant e^{|z|}-1 \leqslant |z|e^{|z|}$.

Correction ▼ [004405]

Exercice 1851 Inégalité, Polytechnique MP* 2006

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$. Montrer que $\left|\frac{e^z-1}{z}\right| \leqslant \left|\frac{e^x-1}{x}\right|$. Que dire en cas d'égalité ?

Correction ▼ [004406]

Exercice 1852 Morphismes $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}, *)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ telle que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. Si f est dérivable, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{\lambda x}$.
2. Obtenir le même résultat si f est seulement supposée continue (prendre une primitive, F, de f et montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$).

[004407]

Exercice 1853 $e^z = z$

Montrer qu'il existe une infinité de complexes z tels que $e^z = z$ (on calculera x en fonction de y, et on étudiera l'équation obtenue).

Correction ▼ [004408]

Exercice 1854 Équations trigonométriques

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $\cos z = 2$.
2. $\operatorname{ch} z = -1$.
3. $\sin z + \sin jz + \sin j^2 z = 0$.
4. $8\cos z + 4i \sin z = 7 + 5i$.

Correction ▼ [004409]

Exercice 1855 $|\cos|$ et $|\sin|$ sur le cercle unité

Calculer $\sup\{|\cos z|$ tel que $|z| \leqslant 1\}$ et $\sup\{|\sin z|$ tel que $|z| \leqslant 1\}$.

Correction ▼ [004410]

Exercice 1856 Courbes

Soient M, M' deux points du plan d'affixes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. On suppose que z et z' sont liés par la relation : $z' = e^z$. Étudier la courbe décrite par M' lorsque M décrit :
   (a) une droite $x =$ cste.
   (b) une droite $y =$ cste.
   (c) une droite quelconque.
2. Reprendre les questions 1a et 1b avec $z' = \cos z$.

[004411]

Exercice 1857 Centrale MP 2002

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\exp(M) = \begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [004412]

66 122.99 Autre

Exercice 1858 Examen 2000

Soit $a > 0$ fixé. Pour n entier positif ou nul on définit $P_n(a)$ par $P_0(a) = 1$, $P_1(a) = a$, $P_2(a) = a(a+1)$ et, plus généralement $P_{n+1}(a) = (n+a)P_n(a)$. Montrer que

$$L(a) = \lim_{n\infty} \frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$$

existe et est un nombre strictement positif. Méthode : considérer la série de terme général pour $n > 0$: $u_n = \log(n+a) - a\log(n+1) + (a-1)\log n$, comparer sa somme partielle d'ordre $n-1$ avec $\log \frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$, et, ... l'aide d'un développement limité en $1/n$ d'ordre convenable, montrer que, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. [001946]

Exercice 1859

Soit α et β deux nombres réels ou complexes tels que $\alpha\beta = -1$ et $|\alpha| > 1 > |\beta|$. Pour n dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers positifs ou négatifs on pose $F_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)$ et $L_n = \alpha^n + \beta^n$ (si $\alpha + \beta = 1$ ces nombres sont appelés entiers de Fibonacci (1225) et de Lucas (1891)).

1. Montrer par le critère de D'Alembert que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+1}$ converge et calculer la limite de $Q_n = L_n/F_n$ si $n \to +\infty$. .
2. On admet (identité de Backstrom (1981)) que pour tous n et k de $\mathbf{Z}$ on a
$$\frac{1}{F_{4n-2k-1} + F_{2k+1}} + \frac{1}{F_{4n+2k+1} + F_{2k+1}} = \frac{1}{2L_{2k+1}} \left(Q_{2n+2k+1} - Q_{2n-2k-1}\right).$$
En faisant $k = 0$ dans cette identité, calculer la somme partielle d'ordre $2n$ de la série initiale, c'est à dire $s_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{F_{2j+1}+1}$ en montrant par récurrence sur n que $s_{2n} = \frac{1}{2L_1}(Q_{2n+1} - Q_1)$. En déduire la somme de la série en termes de α et β. Donner une expression simple du terme général de la série et de sa somme si $\alpha = \exp t$ et $\beta = -\exp(-t)$ si t est réel.
3. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+F_3}$ converge et calculer sa somme.

[001947]

Exercice 1860

Indiquer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \alpha^n$$

converge, et calculer sa somme.
En déduire l'écriture en base 10 des nombres $1/9$ et $1/11$ et plus généralement en base k, du nombre $1/(k-1)$ et du nombre $1/(k+1)$.

[002656]

Exercice 1861

En comparant avec les intégrales de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt,$$

déterminer la nature et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n 2^{-2n} C_{2n}^n.$$

[002726]

Exercice 1862 Étude de convergence

Étudier la convergence des séries de terme général :

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$.
2. $\operatorname{ch}^\alpha n - \operatorname{sh}^\alpha n$.
3. $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.
4. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
5. $\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
6. $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$.
7. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.
8. $\frac{(-1)^n}{\ln n}$.
9. $\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$.
10. $\frac{2.4.6\dots(2n)}{n^n}$.
11. $\frac{1!+2!+\dots+n!}{(n+2)!}$.
12. $\frac{1!-2!+\dots\pm n!}{(n+1)!}$.
13. $\frac{(-1)^n}{\ln n+\sin(2n\pi/3)}$.
14. $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.
15. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
16. $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.
17. $\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$.
18. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Correction ▼ [004413]

Exercice 1863 Centrale PC 1999

Soit la suite de terme général : $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ où P est un polynôme. A quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Correction ▼ [004414]

Exercice 1864 Ensi PC 1999

Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$?

Correction ▼ [004415]

Exercice 1865 Mines MP 2000

Soit $\alpha > 0$. Étudier la série $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$.

Correction ▼ [004416]

Exercice 1866 Mines MP 2003

Si $\alpha > 0$, donner la nature des séries $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$, $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$.

Correction ▼ [004417]

Exercice 1867 Ensi PC 1999

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \to a$ et $\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \to b$ lorsque $n \to \infty$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Correction ▼ [004418]

Exercice 1868 Encadrement

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout n. Montrer que $\sum v_n$ converge. [004419]

Exercice 1869 Calcul approché

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\sin(0.4/n)\right)^n$ converge. Calculer à la machine une valeur approchée à 10^{-8} près de sa somme.

Correction ▼ [004420]

Exercice 1870 Ensi MP 2002

On suppose que la série à termes positifs de terme général u_n est divergente et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue décroissante. Comparer les énoncés :
1. f est intégrable
2. La série de terme général $u_n f(S_n)$ converge.

Correction ▼ [004421]

Exercice 1871 Centrale P' 1996

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ converge. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de sa somme.

Correction ▼ [004422]

Exercice 1872 $C_{2n}^n/n4^n$

L'une au moins des deux séries : $\sum \frac{C_{2n}^n}{n4^n}$ et $\sum \frac{n4^n}{C_{2n}^n}$ diverge. Dire pourquoi et dire laquelle.

[004423]

Exercice 1873 $1/(1+n^2u_n)$, Mines-Ponts MP 2005

Soit (u_n) une suite réelle positive et $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge. Étudier le cas où $\sum u_n$ diverge.

Correction ▼ [004424]

Exercice 1874 $a_n/(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$

Soit (a_n) une suite réelle positive. On pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ lorsque $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction ▼ [004425]

Exercice 1875 $1/a^{\text{nb de chiffres de } n}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n (sans zéros inutiles). Soit $a > 0$. Étudier la convergence et déterminer la somme éventuelle de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}}$.

Correction ▼ [004426]

Exercice 1876 Cauchy-Schwarz

Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

1. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
2. Montrer que $\sum (u_n+v_n)^2$ converge et : $\sqrt{\sum (u_n+v_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum u_n^2} + \sqrt{\sum v_n^2}$.

[004427]

Exercice 1877 $(-1)^n/(n^{3/4}+\cos n)$

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. En écrivant $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + v_n$, étudier la convergence de $\sum u_n$.

Correction ▼ [004428]

Exercice 1878 Reste d'une série alternée

On pose $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Correction ▼ [004429]

Exercice 1879 Calcul de sommes

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.
6. $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
7. $\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)$.
8. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\tan(2^{-k}\alpha)$.
9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^3-3k^2+1}{(k+3)!}$.
10. $\sum_{n=p}^{\infty} C_n^p x^n$.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$.
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-n[k/n]}{k(k+1)}$.

Correction ▼ [004430]

Exercice 1880

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

Correction ▼ [004431]

Exercice 1881 Chimie P 90

1. Résoudre les équations différentielles : $y''+2y'+2y=0$, $y''+4y'+4y=2e^{-x}\cos x$.
2. Soit f la solution commune. On définit la série de terme général $u_n = \int_{x=n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx$. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Correction ▼ [004432]

Exercice 1882 $1/n^2(n+1)^2$

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Correction ▼ [004433]

Exercice 1883 $1/(1^2+2^2+\ldots+n^2)$

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}$ est convergente et calculer sa somme.

Correction ▼ [004434]

Exercice 1884 $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$

Pour quelles valeurs de $a,b \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer alors la somme de la série.

Correction ▼ [004435]

Exercice 1885 $\arctan(1/(k^2+k+1))$

Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}$. (On pourra calculer $\tan s_n$)

Correction ▼ [004436]

Exercice 1886 $\arctan(n+a)-\arctan n$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la série de terme général $\arctan(n+a)-\arctan n$ est convergente.
2. On pose $S(a) = \sum_{k=0}^{\infty}(\arctan(k+a)-\arctan k)$. Trouver $\lim_{a\to+\infty} S(a)$.

Correction ▼ [004437]

Exercice 1887 Pile en porte à faux

Peut-on empiler 100 pièces de 1F de sorte que la dernière soit complètement en porte à faux ? (c'est-à-dire que sa projection sur un plan horizontal ne rencontre pas la projection de la première pièce)

Correction ▼ [004438]

Exercice 1888 Recherche d'équivalents

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :

1. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
2. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.

Correction ▼ [004439]

Exercice 1889 $\ln^2(k)$

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Correction ▼ [004440]

Exercice 1890 $k^{-2/3}$

Trouver la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$.

Correction ▼ [004441]

Exercice 1891 $(-1)^k\sqrt{k}$

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n quand $n\to\infty$. (Regrouper les termes deux par deux puis comparer à une intégrale)

Correction ▼ [004442]

Exercice 1892 Constante d'Euler

Soit $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante. On pose $u_n = f(n)$ et $s_n = u_0 + \cdots + u_n$.
Montrer que la suite de terme général $s_n - \int_{t=0}^{n+1} f(t)\,dt$ est convergente. Donner une interprétation graphique de ce fait.
Application : On pose $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$. Justifier l'existence de γ et montrer que $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$.
[004443]

Exercice 1893 Constante d'Euler (Centrale MP 2003)

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln n$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln n$. Les suites (S_n) et (T_n) sont-elles adjacentes ?

Correction ▼ [004444]

Exercice 1894 Constante d'Euler, Mines-Ponts MP 2005

Soit $u_{n,k}$ le reste de la division du n par k. Quelle est la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{n,k}}{k}$?

Correction ▼ [004445]

Exercice 1895 Mines MP 2003

Soit la suite de terme général $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n}$.

1. Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.
2. Montrer que la suite de terme général : $v_n = u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.
3. Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$. Donner un équivalent de $v_n - \ell$.

Correction ▼ [004446]

Exercice 1896 Centrale MP 2001

Donner un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2-k^2}$.

Correction ▼ [004447]

Exercice 1897 $1/n\ln^2(n)$

1. Prouver la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$.
2. On note $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=2}^{\infty} u_k$. Montrer que $\frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant S - S_n \leqslant \frac{1}{\ln n}$ pour $n \geqslant 2$.
3. Montrer que si S_n est une valeur approchée de S à 10^{-3} près alors $n > 10^{434}$.
4. On suppose disposer d'une machine calculant un million de termes de la série par seconde avec 12 chiffres significatifs. Peut-on obtenir une valeur approchée de S à 10^{-3} près ? (Remarque : 1 an $\approx$ 32 millions de secondes)
5. Donner une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

Correction ▼ [004448]

Exercice 1898 $(x-1)\zeta(x) \to 1$

Pour $x > 1$ on note $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale, trouver $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\zeta(x)$.

Correction ▼ [004449]

Exercice 1899 $u_n/(1+u_n)$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Correction ▼ [004450]

Exercice 1900 Série des restes

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\sum |u_n|$ et $\sum n|u_n|$ convergent. On note $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.
   (a) Montrer que $nv_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
   (b) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} nu_n$.
2. Application : Calculer lorsque c'est possible : $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$.

Correction ▼ [004451]

Exercice 1901 X MP* 2001

Soit (u_n) une suite réelle positive, $U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ et $\alpha > 0$ un réel donné. On suppose $\frac{U_n}{nu_n} \to \alpha$ lorsque $n \to \infty$. Étudier la suite de terme général $\frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=0}^{n} ku_k$.

Correction ▼ [004452]

Exercice 1902 $\sum nu_n$ converge

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} n\,u_n$ converge. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Correction ▼ [004453]

Exercice 1903 (u_n) décroit

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $nu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. $\left(\text{considérer } \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\right)$
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
3. Application : calculer pour $0 \leqslant r < 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k$.

Correction ▼ [004454]

Exercice 1904 u_n/S_n

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs convergeant vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Si la série $\sum u_n$ converge, que dire de la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$?
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, montrer que la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge aussi. On pourra considérer $p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{u_k}{S_k}\right)$.

Correction ▼ [004455]

Exercice 1905 Polytechnique MP* 2000

On donne une suite de réels strictement positifs (a_n), décroissante et de limite nulle. Montrer que la série de terme général $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge.

Correction ▼ [004456]

Exercice 1906 $(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1})/n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $v_n = \frac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}}{n}$. Montrer que $\sum v_n$ a même nature que $\sum u_n$.

Correction ▼ [004457]

Exercice 1907 $\sum ku_k/n(n+1)$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive. On pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et éventuellement même somme.

Correction ▼ [004458]

Exercice 1908 $\sum k u_k/n^2$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k u_k$.

Correction ▼ [004459]

Exercice 1909 Principe d'accumulation

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
Applications : Retrouver la convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
Étudier la convergence des séries de Bertrand : $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Correction ▼ [004460]

Exercice 1910 $u_{n+1} = 1/ne^{u_n}$. Ensi P 90

Soit (u_n) définie par : $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{ne^{u_n}}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Correction ▼ [004461]

Exercice 1911 $x_{n+1} = x_n + x_n^2$

Soit (x_n) une suite définie par : $x_0 > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

1. Montrer que $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.
2. On pose $u_n = 2^{-n}\ln x_n$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On étudiera la série $\sum u_{n+1} - u_n$)
3. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

[004462]

Exercice 1912 $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

On considère la suite (u_n) définie par : $0 < u_0 < 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.
3. Montrer que les séries de termes généraux $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n divergent.
4. Montrer que $u_n < \frac{1}{n+1}$ et que la suite (nu_n) est croissante. On note ℓ sa limite.
5. On pose $u_n = \frac{\ell - v_n}{n}$. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.
6. En déduire que u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$.

[004463]

Exercice 1913 $u_{n+1}/u_n = (n+a)/(n+b)$

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ où a, b sont deux constantes réelles ($-a, -b \notin \mathbb{N}$).

1. Montrer que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.
2. On pose $v_n = (n+b-1)u_n$. Étudier la convergence de la suite (v_n) (on introduira la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$).
3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - b + 1 < 0$ et calculer sa somme en fonction de a, b, u_0.

Correction ▼ [004464]

Exercice 1914

On se donne u_1 et a deux réels strictement positifs et l'on définit par récurrence la suite (u_n) par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^a u_n}$. Étudiez la limite de la suite (u_n), et, quand $a \leqslant 1$, en donner un équivalent.

Correction ▼ [004465]

Exercice 1915 $1/k^\alpha(n-k)^\alpha$

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha(n-k)^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Correction ▼ [004466]

Exercice 1916 Produit de Cauchy de trois séries

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ trois séries absolument convergentes de sommes A, B, C.
On pose $u_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$. Montrer que $\sum u_n = ABC$.

[004467]

Exercice 1917 Produit de séries géométriques

Soient $a \in [0,1[$. Écrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries. En déduire la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k$. Calculer par la même méthode $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a^k$.

Correction ▼ [004468]

Exercice 1918 Produit de séries géométriques

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note T_n le nombre de manières de décomposer n francs avec des pièces de 1, 2, 5 et 10 francs ($T_0 = 1$). Montrer que :

$$\forall\, x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{\infty} T_k x^k = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}.$$

[004469]

Exercice 1919 $\sum u_k/2^{n-k}$

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On pose $v_n = \frac{u_n}{1} + \frac{u_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{u_0}{2^n}$.

1. Montrer que $v_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que $\sum v_n$ converge et donner sa valeur.

Correction ▼ [004470]

Exercice 1920 $\sum a_n/n^p = 0$

Soit (a_n) une suite bornée telle que pour tout entier $p \geqslant 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p} = 0$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0$.

Correction ▼ [004471]

Exercice 1921 $\sum x_{kn} = 0$

Soit $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ une série absolument convergente telle que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a $\sum_{n=1}^{\infty} x_{kn} = 0$.
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 0$.

Correction ▼ [004472]

Exercice 1922 Césaro

1. Soient $k, p \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant p$. Montrer que $\sum_{n=k}^{p} \frac{C_n^k - C_n^{k+1}}{2^n} = \frac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p}$.

2. Soit (u_n) une série convergente. On pose $v_n = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p$. Montrer que la série (v_n) est convergente.

Correction ▼ [004473]

Exercice 1923 $nu_n \to 0$

Soit (u_n) une série convergente à termes positifs décroissants.

1. Montrer que $nu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que $\sum_{u_k \geqslant 1/n} \frac{1}{u_k} = \mathrm{o}(n^2)$.

Correction ▼ [004474]

Exercice 1924 u_n/R_n^p

Soit (a_n) une série positive convergente, $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $p \in]0,1[$.

1. Montrer qu'il existe $C_p \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} \leqslant C_p A^{1-p}$.
2. Trouver la meilleure constante C_p.

Correction ▼ [004475]

Exercice 1925 $u_{n+1} = u_n + a_n/u_n$

Soit (a_n) une suite réelle positive et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ avec $u_0 > 0$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Correction ▼ [004476]

Exercice 1926 Raabe-Duhamel

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.

[004477]

Exercice 1927 Stirling++

Montrer que $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$. [004478]

Exercice 1928 Développement factoriel

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites croissantes d'entiers (q_i) telles que $q_0 \geqslant 2$.

1. Si $s = (q_i) \in \mathscr{S}$, montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_0 \cdots q_k}$ converge. On note $\Phi(s)$ sa somme.
2. Montrer que l'application $\Phi : \mathscr{S} \to]0,1]$ est bijective.
3. Soit $s = (q_i) \in \mathscr{S}$. Montrer que $\Phi(s) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si s est stationnaire.

[004479]

Exercice 1929 Développement asymptotique

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + o(1)$.
2. Prouver : $\frac{\ln 2}{2} - \int_{t=1}^{3} \frac{\ln t}{t}\,dt \leqslant C \leqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} - \int_{t=1}^{3} \frac{\ln t}{t}\,dt$.
3. Prouver : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

[004480]

Exercice 1930

Soit (u_n) une suite de complexes telle que $\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \to \ell \in \mathbb{C}$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $\frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{u_1}{1} + \cdots + \frac{u_n}{n}\right) \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004481]

Exercice 1931

Soit (u_n) une suite de complexes qui converge au sens de Césaro vers zéro.
Étudiez la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+k+1}$.

Correction ▼ [004482]

Exercice 1932 Centrale MP 2000

Soient deux suites de termes généraux u_n et v_n définies par la donnée de u_1 et v_1, tous deux réels, et les relations :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{v_n}{n(n+1)}, \qquad v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{n(n+1)}.$$

Montrer que ces suites sont définies et bornées.

Correction ▼ [004483]

Exercice 1933 Produits infinis, Polytechnique 2000

On considère une suite (a_n) de réels et on définit $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.

1. On suppose que pour tout n, $a_n \geqslant 0$.
   (a) Montrer que, pour tout N, $1+S_N \leqslant P_N \leqslant e^{S_N}$.
   (b) Comparer les convergences respectives des suites (S_N) et (P_N).
2. On suppose maintenant que pour tout n, $-1 \leqslant a_n \leqslant 0$.
   (a) La relation précédente est-elle encore vérifiée ?
   (b) Discuter de la convergence des suites (S_N) et (P_N).
3. On suppose que (a_n) est de signe quelconque et que pour tout n, $1+a_n > 0$. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que (P_N) a une limite et que cette limite est nulle si et seulement si $\sum a_n^2$ diverge.
4. Complément. On suppose que la suite (a_n) est complexe, que pour tout n $|a_n| < 1$ et que la série $\sum |a_n|$ est convergente.
   (a) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ existe, puis que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ existe $\left(\text{on pourra démontrer et utiliser l'inégalité } \left|\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)-1\right| \leqslant \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|)-1\right)$.
   (b) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ n'est pas nul.

Correction ▼ [004484]

Exercice 1934 Polytechnique MP 2002

Trouver les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall\, x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Correction ▼ [004485]

Exercice 1935 ENS Cachan MP* 2005

Soit $P(n) = \max\{p \text{ premier},\ p \mid n\}$. Montrer que $\sum_n \frac{1}{nP(n)}$ converge.

Correction ▼ [004486]

Exercice 1936 IT

Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

1. (*) Calculer $\sum_{i=3}^{n} i$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.
2. (*) Calculer le nombre $1,1111\ldots = \lim_{n\to+\infty} 1,\underbrace{11\ldots1}_{n}$ et le nombre $0,9999\ldots = \lim_{n\to+\infty} 0,\underbrace{99\ldots9}_{n}$.

3. (*) Calculer $\underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.
4. (*) Calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$.
5. (**) Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.
6. (**) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.
7. (***) Pour $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$. Déterminer$\lim_{n\to+\infty}S_n$.
8. (**) On pose $u_0=1$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n-3$.
   (a) Calculer la suite $(u_n-3)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{n}u_k$.

Correction ▼ [005142]

Exercice 1937 ***I Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,..., b_n$, $2n$ réels. Montrer que

$$|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|.|b_k|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}.$$

(Indication. Considérer le polynôme $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_kx)^2$, développer puis ordonner suivant les puissances décroissantes puis utiliser, dans le cas général, les connaissances sur le second degré). Retrouver alors le résultat de l'exercice 1815.

Correction ▼ [005150]

Exercice 1938 **

Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$.

Correction ▼ [005458]

Exercice 1939

Nature de la série de terme général

1) (*) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ **2)** (*) $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ **3)** (**) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ **4)** (**) $\frac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch}\,n)}$
5) (**) $\arccos\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$ **6)** (*) $\frac{n^2}{(n-1)!}$ **7)** (**) $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{e}}$ **8)** (**) $\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{n^2+1}{n}\right)$
9) (*) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2x}{n^2+\cos^2x}\,dx$ **10)** (**) $n^{-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$ **11)** (**) $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Correction ▼ [005688]

Exercice 1940

Nature de la série de terme général
1) (***) $\sqrt[4]{n^4+2n^2}-\sqrt[3]{P(n)}$ où P est un polynôme. **2)** (**) $\frac{1}{n^\alpha}S(n)$ où $S(n)=\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$.
3) (**) u_n où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$.
4) (****) $u_n=\frac{1}{p_n}$ où p_n est le n-ème nombre premier
(indication : considérer $\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)=\sum_{n=1}^{N}\ln(1+p_n+p_n^2+\ldots)$).
5) (***) $u_n=\frac{1}{n(c(n))^\alpha}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n en base 10.
6) (*) $\frac{(\prod_{k=2}^{n}\ln k)^a}{(n!)^b}$ $a>0$ et $b>0$. **7)** (**) $\arctan\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\right)-\arctan\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^a\right)$.
8) (**) $\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}k^{3/2}$. **9)** (***) $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)\right)-1$.

Correction ▼ [005689]

Exercice 1941

Nature de la série de terme général
1) (***) $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$ **2)** (**) $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ **3)** (**) $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **4)** (***) $\frac{e^{in\alpha}}{n}$, $\frac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\frac{\sin(n\alpha)}{n}$
5) (**) $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

$(-1)^n\frac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls
7) (****) $(\sin(n!\pi e))^p$ p entier naturel non nul.

Correction ▼ [005690]

Exercice 1942

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

1) (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$ **2)** (**) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n}$ **3)** (***) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$
4) (*) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ **5)** (**) $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ **6)** (***) $\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$ $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
textbf7) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\text{th}\,\frac{a}{2^n}}{2^n}$

Correction ▼ [005691]

Exercice 1943 *** I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Correction ▼ [005692]

Exercice 1944 ***

Soit σ une injection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même. Montrer que la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Correction ▼ [005693]

Exercice 1945 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ et $\int_0^{u_n}\frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Correction ▼ [005694]

Exercice 1946 ***

Trouver un développement limité à l'ordre 4 quand n tend vers l'infini de $\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\times(n+1)!$.

Correction ▼ [005695]

Exercice 1947 ***

Nature de la série de terme général $u_n=\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Correction ▼ [005696]

Exercice 1948 **

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n=\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, $n\geqslant 1$.

Correction ▼ [005700]

Exercice 1949 ****

On sait que $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2$.
A partir de la série précédente, on construit une nouvelle série en prenant p termes positifs, q termes négatifs, p termes positifs ... (Par exemple pour $p=3$ et $q=2$, on s'intéresse à $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$).
Convergence et somme de cette série.

Correction ▼ [005701]

Exercice 1950 ***

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^{\alpha}}$.

Correction ▼ [005702]

Exercice 1951

Convergence et somme éventuelle de la série de terme général

$$\textbf{1) (**)}\ u_n = \frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!} \qquad \textbf{2) (***)}\ u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)},\ n \geqslant 1,\ a \in \mathbb{R}^{+*} \text{ donné.}$$

Correction ▼ [005703]

Exercice 1952 *

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0,+\infty[$.

Correction ▼ [005706]

Exercice 1953 *** I

Développement limité à l'ordre 4 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers l'infini.

Correction ▼ [005707]

Exercice 1954

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de

$$\textbf{1) (***)}\ \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p} \qquad \textbf{2) (**)}\ \sum_{p=1}^{n} p^p.$$

Correction ▼ [005708]

Exercice 1955 ***

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\, n\neq p} \frac{1}{n^2-p^2}\right)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\, p\neq n} \frac{1}{n^2-p^2}\right)$. Que peut-on en déduire ?

Correction ▼ [005709]

Exercice 1956 **

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Correction ▼ [005710]

Exercice 1957 ****

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$. Montrer que si la série de terme général $(u_n)^2$ converge alors la série de terme général $(v_n)^2$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} (v_n)^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^2$ (indication : majorer $v_n^2 - 2u_nv_n$).

Correction ▼ [005711]

Exercice 1958 ***

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geqslant 0$.

Correction ▼ [005712]

67 123.01 Continuité : théorie

Exercice 1959

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :
$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$
2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\sup(f,g)$ est continue sur I.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000639]

Exercice 1960

Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[a,b]$ on ait : $|f(x)-f(x')| < |x-x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a,b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

[000640]

Exercice 1961

1. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ telle que $f(]a,b[) \subset [a,b]$. Montrer, par considération de $\phi(x) = f(x) - x$, qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0,\frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$.
3. Un mobile parcours, à vitesse continue, une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$.

[000641]

Exercice 1962

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t+\frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a,\frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Correction ▼ Vidéo ■ [000642]

Exercice 1963

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

Correction ▼ [000643]

Exercice 1964

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

[000644]

Exercice 1965

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000645]

Exercice 1966

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000646]

Exercice 1967

Soient f et g continues sur $[0,1]$ telles que $\forall x \in [0,1]\ f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]\ f(x) + m < g(x)$. [000647]

Exercice 1968

Soit f croissante sur $[a,b]$ et prenant toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer que f est continue. [000648]

Exercice 1969

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante. [000649]

Exercice 1970

Soit f périodique croissante. Que dire de f ? [000650]

Exercice 1971

Donner un exemple de fonction continue sur $[0,1]$ non lipschitzienne, puis de fonction continue en un seul point, puis de fonction discontinue sur les rationnels et continue sur les irrationnels, enfin de fonction continue telle que $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou si $x = 0$, et $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) - f(x-h) = 0$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Donner un exemple de bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$ discontinue en tout point. [000651]

Exercice 1972

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. Que dire de f ? [000652]

Exercice 1973

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante, montrer qu'elle a un point fixe.
Indication : étudier

$$E = \left\{x \in [0,1] \mid \forall t \in [0,x], f(t) > t\right\}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000653]

Exercice 1974

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $x \to \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante ; montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. [000654]

Exercice 1975

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x)e^{f(x)} = x.$$

Donner les variations de f puis comparer f et ln au voisinage de $+\infty$. [000655]

Exercice 1976

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ croissante. Construire $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leqslant g$. [000656]

Exercice 1977

Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non constante telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

On suppose f continue en 0 et en 1, montrer que f est constante. [000657]

Exercice 1978

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in [0,1], f(a_n) = a_n^n.$$

On suppose f strictement décroissante. Montrer que a_n est unique et étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. [000658]

Exercice 1979

Existe-t-il une bijection continue de $[0,1[$ sur $\mathbb{R}$? [000659]

Exercice 1980

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f \circ f = f$. On note $E_f = \{x \in [0,1] | f(x) = x\}$. Montrer que $E_f \neq \varnothing$ puis que c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ f = f$.

Correction ▼ [000660]

Exercice 1981

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, évaluer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

[000661]

Exercice 1982

Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?

Indication ▼ Correction ▼ [000662]

Exercice 1983

Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\forall x \geqslant 0$, la suite $(f(xn))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Montrer $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. [000663]

Exercice 1984

Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$, montrer qu'alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. [000664]

Exercice 1985

Soit f continue sur $[a,b]$, montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in [a,b]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| + \varepsilon.$$

[000665]

Exercice 1986

Soit $(f,g) \in C([0,1],[0,1])^2$, tel que : $fg = gf$. On veut montrer que $f-g$ s'annule par deux méthodes :

— par l'absurde, utiliser le fait que $(f-g)([0,1])$ est un segment ne contenant pas 0.

— par l'absurde, en examinant, si $f-g>0$ par exemple, $\min\{x \in [0,1] | f(x) = x\}$.

Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $[0,1]$ par $\mathbb{R}$? [000666]

Exercice 1987

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right], f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n).$$

[000667]

Exercice 1988

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que : $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow$ l'image réciproque de toute partie bornée est bornée. [000668]

Exercice 1989

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

1. Montrer que
$$\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$
2. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Montrer que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0 = a, x_0 = b, x_0 \in]a,b[$.
3. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $g(x) = 1$ si $x = 1$. Montrer que
$$\sup_{0<x<1} g(x) \neq \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$
Quelle hypothèse est essentielle dans la propriété démontrée auparavant ?

Indication ▼ Correction ▼ [000669]

Exercice 1990 Fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T-périodique cad : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

1. Si f possède une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.
2. Si f est continue non constante, montrer que f a une plus petite période.
3. Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

[003845]

Exercice 1991 Fonction ayant des limites à l'infini

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet un maximum ou un minimum absolu, mais pas nécéssairement les deux.

3. Montrer que f est uniformément continue.

[003846]

Exercice 1992 Permutation de décimales

Pour $x \in [0,1[$, on note $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$ le développement décimal propre de x.

1. Soit $f : [0,1[\to [0,1[$ définie par : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{10^k}$. Montrer que f est continue par morceaux.
2. Soit $g : [0,1[\to [0,1[$ définie par : $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_{2k}}{10^{2k-1}} + \frac{x_{2k-1}}{10^{2k}}\right)$. Déterminer les points où g est continue.

[003847]

Exercice 1993 $\max(f,g)$

Soient $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \max\big(f(x),g(x)\big)$. Montrer que h est continue.

[003849]

Exercice 1994 Prolongement d'inégalités

1. Soient $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x,y \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) Montrer que $f \leqslant g$.
   (b) Montrer qu'on n'a pas nécéssairement : $\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ f(x) < g(x)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

[003850]

Exercice 1995 Étude d'un sup

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. On pose $g(x) = \sup\big(f([x,x+1])\big)$. Montrer que g est continue.
Même question en supposant seulement f continue. [003851]

Exercice 1996 Weierstrass

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. On pose $h(t) = \sup\{f(x)+tg(x) \text{ tq } x \in [a,b]\}$.
Montrer que h est continue.

[003852]

Exercice 1997 Weierstrass

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\sup\limits_{[a,b]} f = \sup\limits_{]a,b[} f$. [003853]

Exercice 1998 Weierstrass

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\, x \in [a,b],\ f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que $f > kg$.

[003854]

Exercice 1999 TVI à l'infini

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclu).

[003855]

Exercice 2000 $f(x) = g(x)$

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).

Correction ▼ [003856]

Exercice 2001 f continue décroissante $\Rightarrow$ point fixe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $f(x) = x$. [003857]

Exercice 2002 Mines MP 2002

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle qu'existe a vérifiant $f \circ f(a) = a$. f a-t-elle des points fixes ? Généraliser.

Correction ▼ [003858]

Exercice 2003 Cordes de longueur $1/n$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, montrer qu'il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.
3. Trouver une fonction f telle que : $\forall\, x \in \left[0, \frac{3}{5}\right]$, $f(x) \neq f(x + \frac{2}{5})$.
4. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall\, b \in]0,a]$, $\exists\, x \in [0, 1-b]$ tq $f(x) = f(x+b)$.

[003859]

Exercice 2004

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\, x \in [a,b]$, $\exists\, y \in [a,b]$ tq $f(x) = g(y)$.
Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

[003860]

Exercice 2005 TVI + injective $\Rightarrow$ continue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b, \forall\, y \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b),\ \exists\, x \in [a,b] \text{ tq } f(x) = y.$$

1. Montrer que si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective, alors elle est continue.
2. Trouver une fonction discontinue ayant la propriété des valeurs intermédiaires.

Correction ▼ [003861]

Exercice 2006 f uc $\Rightarrow f$(intervalle borné) $=$ intervalle borné

Soit I un intervalle borné et $f : I \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $f(I)$ est un intervalle borné. [003862]

Exercice 2007 f uc $\Rightarrow |f(x)| \leqslant a + b|x|$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a + b|x|$.
(prendre $\varepsilon = 1$ et majorer $|f(x) - f(0)|$)

[003863]

Exercice 2008 Composition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ uniformément continue bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue. [003864]

Exercice 2009 $\sin(t^2)$

Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

[003865]

Exercice 2010 f uc et $f(n) \to +\infty$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to \infty$.

[003866]

Exercice 2011 $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$. On pose $a = f(1)$.

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) = ax$.
2. On suppose f continue. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.
3. On suppose que f est bornée au voisinage de 0. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

[003867]

Exercice 2012 $f(x^2) = f(x)$

Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x \in [0,1],\ f(x^2) = f(x)$.

[003868]

Exercice 2013 $f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$.

Correction ▼ [003869]

Exercice 2014 Polytechnique MP* 2000

Soit f continue sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et δ un réel positif. On note $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \text{ tq } |x-y| \leqslant \delta\}$. Montrer que $\omega(\delta)$ tend vers 0 quand δ tend vers 0, puis que ω est continue.

Correction ▼ [003870]

Exercice 2015 Ensae MP* 2003

Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Correction ▼ [003871]

Exercice 2016 Plus grande fonction lipschitzienne minorant f (Ens Lyon MP* 2003)

1. Existe-t-il toujours φ lipschitzienne telle que $\varphi \leqslant f$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application continue donnée ?
2. Soit $k > 0$. Trouver une CNS sur f pour qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-lipschitzienne minorant f.
3. On suppose cette CNS vérifiée pour $k_0 > 0$. Montrer que si $k \geqslant k_0$ alors il existe φ_k, k-lipschitzienne minorant f et maximale pour l'ordre usuel des fonctions.

Correction ▼ [003872]

Exercice 2017 Suite $(f(nx))$ ENS Cachan MP* 2004

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que pour tout $x > 0$ la suite $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Que peut-on dire de f ?

Correction ▼ [003873]

Exercice 2018 ***I

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie et continue sur un voisinage de $+\infty$. On suppose que la fonction $f(x+1)-f(x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Etudier l'existence et la valeur eventuelle de $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Correction ▼ [005382]

Exercice 2019 ***

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$. (Indication. Considérer $g(x) = \frac{f(2x)-f(x)}{x}$.)

Correction ▼ [005383]

Exercice 2020 **I

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Min}\{f,g\}$ et $\mathrm{Max}\{f,g\}$ sont continues en x_0.

Correction ▼ [005384]

Exercice 2021 ***I Distance d'un point à une partie

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \mathrm{Inf}\{|y-x|,\ y \in A\}$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005385]

Exercice 2022 **T

Montrer en revenant à la définition que $f(x) = \frac{3x-1}{x-5}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Correction ▼ [005386]

Exercice 2023 **IT

Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en chacun de ses points.

Correction ▼ [005387]

Exercice 2024 ****

Etudier l'existence d'une limite et la continuité éventuelle en chacun de ses points de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = \frac{1}{p+q}$ si x est rationnel égal à $\frac{p}{q}$, la fraction $\frac{p}{q}$ étant irréductible.

Correction ▼ [005388]

Exercice 2025 **IT

Etudier en chaque point de $\mathbb{R}$ l'existence d'une limite à droite, à gauche, la continuité de la fonction f définie par $f(x) = xE(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

Correction ▼ [005389]

Exercice 2026 **

Trouver f bijective de $[0,1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

Correction ▼ [005390]

Exercice 2027 ***

Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est constante.

Correction ▼ [005391]

Exercice 2028 **I

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose $f(x) = d(x,A) = \text{Inf}\{|y-x|,\ y \in A\}$. Montrer que f est Lipschitzienne.

Correction ▼ [005392]

Exercice 2029 ***

Soit f croissante de $[a,b]$ dans lui-même. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [005395]

Exercice 2030 ****

Soit f croissante sur $[a,b]$ telle que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005396]

Exercice 2031 ***IT

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Correction ▼ [005398]

Exercice 2032 ***

Soit f périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005401]

68 123.02 Continuité : pratique

Exercice 2033

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ déterminer δ tel que, $(x \neq 1/3 \text{ et } |x| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x)+3| \leqslant \varepsilon$.
Que peut-on en conclure ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000670]

Exercice 2034

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000671]

Exercice 2035

Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Indication ▼ Correction ▼ [000672]

Exercice 2036

1. Soit la fonction réelle définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f n'admet pas de limite en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction réelle définie par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1-x$ sinon. En quels points de $\mathbb{R}$ f est elle continue ?

[000673]

Exercice 2037

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$.

1. Montrer que $x \mapsto \sin x$ est continue en 0 puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. En déduire que $x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

[000674]

Exercice 2038

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$;
4. $f_4(x) = E(x) \sin(\pi x)$.

[000675]

Exercice 2039

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante puis que pour tout $y \in \ ]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

[000676]

Exercice 2040

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}\ ; \quad b)\ g(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

$$c)\ h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000677]

Exercice 2041

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = E(x) \sin(x)$,
2. $g(x) = E(x) \sin(\pi x)$.

[000678]

Exercice 2042

Etudier la continuité de

1. $f(x) = x + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.
2. $g(x) = \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.

[000679]

Exercice 2043

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000680]

Exercice 2044

La fonction $\dfrac{1}{x}$ est-elle lipschitzienne sur $]0,+\infty[$? sur $[1,+\infty[$? [000681]

Exercice 2045

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$, $f(x) = 1/2 - x$ si $x \in]0,1/2[$, $f(1/2) = 1/2$, $f(x) = 3/2 - x$ si $x \in]1/2,1[$ et $f(1) = 1$.

1. Tracer le graphe de f. Étudier sa continuité.
2. Démontrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1-2x)$.

[000682]

Exercice 2046

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$ sur $\mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = [x - E(x)]^2$ et $f_5(x) = E(x) + f_4(x)$.

[000683]

Exercice 2047

En étudiant la suite $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$, déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de l'unique réel solution de $\cos(x) = x$. [000684]

Exercice 2048

Soit f définie par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$, où E désigne la partie entière. Donner le domaine de définition de f, puis une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$. f est-elle monotone ? f est-elle $k-$lipschitzienne sur $[a,1] (a > 0)$? Et sur $[0,1]$? Étudier la continuité de f sur $[0,1]$ en utilisant la définition. Déduisez en la continuité sur $\mathbb{R}$. [000685]

Exercice 2049

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et pour tout couple (x,y) de $[0,1] \times [0,1]$ on ait $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

1. Soit x un élément de $[0,1]$. On pose $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
2. En déduire que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $f(0) = 0$?

[001212]

69 123.03 Limite de fonctions

Exercice 2050

Écrire les définitions des limites suivantes : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
(On précisera sur quel type d'intervalle la fonction f doit être définie.) [000606]

Exercice 2051

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = u > 0$. Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geqslant \frac{u}{2}$. [000607]

Exercice 2052

Montrer que si une fonction f définie sur $E \subset \mathbb{R}$ est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est, elle aussi, continue en x_0. Montrer que la réciproque est fausse. [000608]

Exercice 2053

1. Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient m,n des entiers positifs. Étudier $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1) = \frac{1}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000609]

Exercice 2054

Soit f une fonction de variable réelle telle que $\frac{f(x)}{|x|} \to \infty$ quand $x \to \infty$. Montrer que pour tout réel α il existe X_α tel que $f(x) - |\alpha x| \geqslant |x|$ si $|x| \geqslant X_\alpha$. En déduire que pour tout α réel $f(x) - \alpha x \to \infty$ quand $x \to \infty$. [000610]

Exercice 2055

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que si $L > 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

[000611]

Exercice 2056

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000612]

Exercice 2057

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions de la variable réelle à valeurs réelles définies sur $\dot{I} := I - \{x_0\}$. Montrer que si f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et que de plus ces deux limites coïncident, alors f admet une limite en x_0 dont la valeur est la valeur commune des limites à droite et à gauche. [000613]

Exercice 2058

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels de degré respectif d et d'. Etudier suivant les valeurs de d et d', et éventuellement de certains des coefficients de P et Q,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)/Q(x).$$

[000614]

Exercice 2059

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. (on pourra utiliser des ε, sommer des inégalités et utiliser la monotonie de f pour montrer qu'elle est bornée sur un segment). Comment généraliser ce résultat ? [000615]

Exercice 2060

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$a)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $\quad$ $b)$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $\quad$ $c)$ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

$d)$ $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $\quad$ $e)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $\quad$ $f)$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

$g)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $\quad$ $h)$ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000616]

Exercice 2061

1. Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x^2+x-2| < \varepsilon.$$
2. En déduire :
$$\lim_{x\to 1} x^2+x-1 \ \text{ et } \ \lim_{x\to 1} (x^2+x-2)\cos x.$$

[000617]

Exercice 2062

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout couple de nombres réels (x,y) appartenant à $]-\infty,-a]$ ou à $[a,\infty[$, on a :
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \leqslant \frac{1}{a^2}|x-y|.$$
2. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$|x-x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

[000618]

Exercice 2063

1. Pour tout n entier naturel et tout couple de réels (x,y), établir la formule :

$$x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

2. Déduire de la question précédente que pour tout entier n tout réel strictement positif a et tout couple de réels (x,y) tel que $|x| \leqslant a$ et $|y| \leqslant a$,

$$|x^n - y^n| \leqslant na^{n-1}|x-y|.$$

3. Déduire de ce qui précède que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \;\Rightarrow\; |x^n - x_0^n| < \varepsilon.$$

   Conclure.

4. Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$, la fonction de la variable réelle f donnée par

$$f(x) := \frac{1-x^n}{1-x}$$

   est-elle définie ? Calculer les limites de f aux bornes de D.

[000619]

Exercice 2064

1. Rappeler que pour tout nombre réels $\varepsilon > 0$ il existe un entier n tel que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n\pi} &< \varepsilon \\ \frac{1}{(2n+1)\pi} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que :

$$|\sin\frac{1}{x} - l| > \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.
4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$.

[000620]

Exercice 2065

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$

[000621]

Exercice 2066

On rappelle les limites : $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.
Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}.\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin 2x}{x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to0}x\frac{\tan x}{\cos^2 x-1}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})}$

[000622]

Exercice 2067

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x+2}{x^2\ln x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+}(x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$
9. $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(x-2)^2\ln(x^3-8)$
10. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x\ln x-x\ln(x+2))$
12. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\ln x}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\big(\ln(1+x)\big)^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{(x^x-1)}}{x^{(x^x)}}$
19. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

20. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

Correction ▼ [000623]

Exercice 2068

Soient a,b des réels positifs. $E(x)$ désigne la partie entière de x. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}E(\frac{b}{x}) = \frac{b}{a} \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}E(\frac{x}{a}) = 0.$$

[000624]

Exercice 2069

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1};\ \lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^p-a^p}\ (a>0, m,p\in\mathbb{N}^*);\ \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n-x^n}{h}\ (x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1});\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\sin x}{4x+\pi};\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}.$$

[000625]

Exercice 2070

En utilisant la définition d'une limite, montrer que :

$$a)\ \lim_{x\to -\frac{2}{3}} (3x+2)\sin\left(\frac{1}{3x+2}\right) = 0\ ; \quad b)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = 2.$$

[000626]

Exercice 2071

Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x})\ ;\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} xE(\frac{1}{x})\ ;\quad c)\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}E(\frac{1}{x})\ ;$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\ ;\quad e)\ \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}).$$

[000627]

Exercice 2072

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},$$

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \qquad (\alpha>0)$$

$$\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x},\text{ en fonction de }\alpha\in\mathbb{R}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000628]

Exercice 2073

Déterminer les limites suivantes :

$$\frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})}\quad\text{en }0$$

$$\frac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6}\quad\text{en }1$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}\quad\text{en }0$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2}\quad\text{en }0$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2}\quad\text{en }0$$

$$\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}\quad\text{en }\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})}\quad\text{en }0$$

[000629]

Exercice 2074

Étudier les asymptotes de $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$. [000630]

Exercice 2075

Montrer que

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha}<\frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}}\text{ où }\alpha>0.$$

En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}=0,\quad \alpha>0.$$

[000631]

Exercice 2076

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x^6-1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ $n,m\in\mathbb{N}^*$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ $a,b>0$ h) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ i) $\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$.

[000632]

Exercice 2077

Calculer :

$$\lim_{x\to\infty} \ln(1+e^{-x})^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

[000633]

Exercice 2078

Calculer :

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{(\sinh x)^2}\right).$$

Correction ▼ [000634]

Exercice 2079

Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000635]

Exercice 2080

Trouver :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$$

Correction ▼ [000636]

Exercice 2081

Trouver pour $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000637]

Exercice 2082

Trouver pour $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000638]

Exercice 2083 $f(x+1)-f(x)\to a$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(x+1)-f(x)\to a\in\overline{\mathbb{R}}$ lorsque $x\to+\infty$.

1. Montrer que $\frac{f(n)}{n}\to a$ lorsque $n\to\infty$.
2. Montrer que $\frac{f(x)}{x}\to a$ lorsque $x\to\infty$.

[003848]

Exercice 2084 **

Trouver $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Correction ▼ [005101]

70 123.04 Etude de fonctions

Exercice 2085

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}\ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2-2x-5}\ ; \quad h(x) = \ln(4x+3)\,.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000686]

Exercice 2086

Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1,1[$. Même question pour l'équation $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$. [000687]

Exercice 2087

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{R}^+$. Démontrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme $P(X) = X^n - d$ a au moins une racine dans $\mathbb{R}$. [000688]

Exercice 2088

En étudiant les variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, trouver le plus grand élément de l'ensemble $f(\mathbb{N}^*)$.
En déduire que quels soient m et n appartenant à $\mathbb{N}^*$, l'un des nombres $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ est inférieur ou égal à $\sqrt[3]{3}$.
[000689]

Exercice 2089

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Correction ▼ [000690]

Exercice 2090

1. Soit la fonction $f : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Montrer que f admet une réciproque que l'on explicitera.
2. Trouver un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction $g(x) = \tan(x^3)$ admette une fonction réciproque (on précisera alors le domaine de définition de cette réciproque et son image).

[000691]

Exercice 2091

Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes :

$$x \to e^x, \quad x \to \ln x, \quad x \to \sqrt{x^2+1}, \quad x \to \cos x.$$

[000692]

Exercice 2092 f croissante et $f \circ f = \mathrm{id}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$. [003874]

Exercice 2093 f croissante et $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ croissante telle que $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue. [003875]

Exercice 2094 Étude de $x(2+\sin(1/x))$

On pose :

$$\begin{cases} f(x) = |x|\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue, minimale en 0, mais pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ n'est pas monotone. [003876]

Exercice 2095 Borne supérieure de fonctions croissantes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On note $\mathscr{E} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ croissantes tq } g \leqslant f\}$, et pour $x \in \mathbb{R}$: $\tilde{f}(x) = \sup\{g(x) \text{ tq } g \in \mathscr{E}\}$.

1. Montrer que $\tilde{f} \in \mathscr{E}$.
2. On suppose f continue. Montrer que $\tilde{f}$ est aussi continue.
   (S'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to x_0^-} \tilde{f}(x) < \lim_{x\to x_0^+} \tilde{f}(x)$, construire une fonction de $\mathscr{E}$ supérieure à $\tilde{f}$)

[003877]

Exercice 2096 L'ensemble des points de discontinuité est dénombrable

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone. Pour $x \in]a,b[$, on pose $\delta(x) = \left|\lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-} f(y)\right|$ (saut de f en x).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $E_n = \left\{x \in]a,b[\text{ tq } \delta(x) > \frac{1}{n}\right\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

[003878]

Exercice 2097 Fonction localement croissante

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est localement croissante si : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $f_{|]x-\varepsilon,x+\varepsilon[}$ est croissante.
Montrer que : (f est localement croissante) $\Rightarrow$ (f est croissante).
(Étudier $E = \{x \geqslant 0 \text{ tq } f_{|[0,x]} \text{ est croissante}\}$ et $F = \{x \leqslant 0 \text{ tq } f_{|[x,0]} \text{ est croissante}\}$)

[003879]

Exercice 2098 Prolongement d'une fonction uniformément continue

Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Pour $x \in]0,1]$ on pose : $\begin{cases} g(x) = \sup\big(f(]0,x])\big) \\ h(x) = \inf\big(f(]0,x])\big). \end{cases}$

1. Montrer que g et h sont monotones.
   On note $\ell = \lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $m = \lim_{x\to 0^+} h(x)$.
2. En utilisant la continuité uniforme de f, montrer que $\ell = m$.
3. En déduire que $f(x) \to \ell$, si $x \to 0^+$.

[003880]

Exercice 2099 f continue, croissante sur $\mathbb{Q}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f_{|\mathbb{Q}}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante. [003881]

Exercice 2100 Morphismes de $\mathbb{R}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que : $\forall\, x,y\in\mathbb{R},\ \begin{cases} f(x+y) &= f(x)+f(y)\\ f(xy) &= f(x)f(y).\end{cases}$

Montrer que f est croissante, puis $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. [003882]

Exercice 2101 Point fixe pour une application croissante

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ croissante. Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=x$.
(Étudier $A=\{x\in[0,1] \text{ tq } f(x)\leqslant x\}$)

Correction ▼ [003883]

Exercice 2102 Fonction localement monotone à droite

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \exists\, \delta>0,\ \text{tq}\ \forall\, y\in[x,x+\delta],\ f(y)\geqslant f(x)$. Montrer que f est croissante.

Correction ▼ [003884]

Exercice 2103 Fonction affine

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R},\ |x-y|<|x-z|\Rightarrow|f(x)-f(y)|<|f(x)-f(z)|$. Montrer successivement que f est injective, monotone, continue, et enfin affine.

Correction ▼ [003885]

Exercice 2104 Calcul de limite

Montrer que : $\forall\, x>0,\ x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.
En déduire $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

[003886]

Exercice 2105 Dérivées de $\exp(-1/x)$

On pose $f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\frac{P_n(x)}{x^{2n}}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$ ($n\geqslant 1$).
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0^+.
3. Montrer que le polynôme P_n possède $n-1$ racines dans $\mathbb{R}^{+*}$.

[003887]

Exercice 2106 $(1+1/t)^t$

1. Montrer que : $\forall\, t>1,\ \left(1+\frac{1}{t}\right)^t<e<\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$.
2. Montrer que : $\forall\, x,y>0,\ \left(1+\frac{x}{y}\right)^y<e^x<\left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Correction ▼ [003888]

Exercice 2107 $\ln(1+ax)/\ln(1+bx)$

Soient $0 < a < b$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ est croissante.

Correction ▼ [003889]

Exercice 2108 Inégalité

Soient $0 < a < b$. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$.

[003890]

Exercice 2109 Formules d'addition pour les fonctions hyperboliques

Calculer $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{th}(a+b)$ en fonction de $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{sh} a$, $\operatorname{th} a$, $\operatorname{ch} b$, $\operatorname{sh} b$, $\operatorname{th} b$. [003891]

Exercice 2110 Simplification de $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls.

1. Peut-on trouver $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x) = A \operatorname{ch}(x+\varphi)$?
2. Peut-on trouver $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x) = A \operatorname{sh}(x+\varphi)$?

Correction ▼ [003892]

Exercice 2111 Somme de ch

Calculer $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

Correction ▼ [003893]

Exercice 2112 Somme de sh

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre : $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+x) + \operatorname{sh}(a+2x) + \operatorname{sh}(a+3x) = 0$.

Correction ▼ [003894]

Exercice 2113 Somme de th

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que $\operatorname{th} x = 2 \coth 2x - \coth x$. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\frac{1}{2^n} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Correction ▼ [003895]

Exercice 2114 Somme de $1/\operatorname{sh}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que $\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \coth \frac{x}{2} - \coth x$. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\frac{1}{\operatorname{sh}(2^n x)}$.

Correction ▼ [003896]

Exercice 2115 $\operatorname{ch}(nx)$ et $\operatorname{sh}(nx)$

Montrer que les fonctions : $x \mapsto \operatorname{ch}(n \operatorname{argch}(x))$ et $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(n \operatorname{argch}(x))}{\sqrt{x^2-1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont polynomiales. [003897]

Exercice 2116 $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a$, $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence de solutions pour le système : $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y & = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y & = b. \end{cases}$

Correction ▼ [003898]

Exercice 2117 Relation entre les fonctions hyperboliques et circulaires

Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Montrer que $\operatorname{th}\frac{x}{2}=\tan\frac{y}{2}, \quad \operatorname{th}x=\sin y, \quad \operatorname{ch}x=\frac{1}{\cos y}$. [003899]

Exercice 2118 $\operatorname{argth}((1+3\operatorname{th}x)/(3+\operatorname{th}x))$

Simplifier $\operatorname{argth}\left(\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}\right)$.

Correction ▼ [003900]

Exercice 2119 Équations diverses

Résoudre $\operatorname{argch}x=\operatorname{argsh}(x-\frac{1}{2})$.

Correction ▼ [003901]

Exercice 2120 Calcul de primitives

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
2. $f(x)=\frac{1}{x^2+x-1}$.

Correction ▼ [003902]

Exercice 2121 Racine d'une somme d'exponentielles

Soient $0<a_1<a_2<\cdots<a_p$ des réels fixés.

1. Montrer que pour tout réel $a>a_p$ il existe un unique réel $x_a>0$ solution de l'équation : $a_1^x+\cdots+a_p^x=a^x$.
2. Pour $a<b$, comparer x_a et x_b.
3. Chercher $\lim_{a\to+\infty}x_a$ puis $\lim_{a\to+\infty}x_a\ln a$

Correction ▼ [003903]

Exercice 2122 Centrale MP 2000

Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}$ telle que : $\forall\, x,y>0,\ f(xf(y))=yf(x)$ et $f(x)\to+\infty$ lorsque $x\to0^+$

1. Montrer que f est involutive.
2. Montrer que f conserve le produit. Que peut-on dire de la monotonie de f, de sa continuité ?
3. Trouver f.

Correction ▼ [003904]

Exercice 2123 Équations trigonométriques

Résoudre les équations suivantes :

1. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos\theta+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\theta=2$.
2. $\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\sin4\theta=0$.
3. $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta=0$.
4. $\cos\theta-\cos2\theta=\sin3\theta$.
5. $\cos\theta+\cos7\theta=\cos4\theta$.
6. $\cos2\theta+\cos12\theta=\sqrt{3}\cos5\theta$.
7. $\sin7\theta-\sin\theta=\sin3\theta$.
8. $\cos^3\theta\sin3\theta+\cos3\theta\sin^3\theta=\frac{3}{4}$.
9. $\sin\theta\sin3\theta=\sin5\theta\sin7\theta$.
10. $3\tan\theta=2\cos\theta$.

11. $\tan 4\theta = 4\tan\theta$.
12. $\text{cotan}\theta - \tan\theta = \cos\theta + \sin\theta$.
13. $\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \tan(x+y) = 4/3. \end{cases}$

Correction ▼ [003905]

Exercice 2124 Inéquations

1. Résoudre : $\cos\theta + \cos(\theta + \pi/3) > 0$.
2. Résoudre : $2\cos\theta + \sin\theta < 2$.

Correction ▼ [003906]

Exercice 2125 Linéarisation

$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$.
$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$.
$4\cos^3\theta = 3\cos\theta + \cos 3\theta$.
$4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$.

$8\cos^4\theta = 3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta$.
$8\sin^4\theta = 3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta$.
$32\cos^6\theta = 10 + 15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta + \cos 6\theta$.
$32\sin^6\theta = 10 - 15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta - \cos 6\theta$.

$32\cos^4\theta\sin^2\theta = 2 + \cos 2\theta - 2\cos 4\theta - \cos 6\theta$.
$32\sin^4\theta\cos^2\theta = 2 - \cos 2\theta - 2\cos 4\theta + \cos 6\theta$.
$16\cos\theta\sin^4\theta = \cos 5\theta - 3\cos 3\theta + 2\cos\theta$.
$16\sin\theta\cos^4\theta = \sin 5\theta + 3\sin 3\theta + 2\sin\theta$.

$4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \sin 3\theta$. [003907]

Exercice 2126 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

1. Démontrer que : $1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
2. Simplifier $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$.

Correction ▼ [003908]

Exercice 2127 $\sin^2(\theta - \alpha), \sin^2\theta, \sin^2(\theta + \alpha)$ en progression arithmétique

Montrer qu'il existe $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les nombres $\sin^2(\theta - \alpha), \sin^2\theta, \sin^2(\theta + \alpha)$ soient en progression arithmétique. [003909]

Exercice 2128 Calcul de somme

Calculer $\tan p - \tan q$. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [003910]

Exercice 2129 Calcul de somme

Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right)$.

Correction ▼ [003911]

Exercice 2130 Calcul de somme

Calculer $\text{cotan}x - 2\text{cotan}2x$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \tan \frac{\alpha}{2^k}$.

Correction ▼ [003912]

Exercice 2131 Heptagone régulier

Soit $ABCDEFG$ un heptagone (7 côtés) plan régulier. On pose $\alpha = AB$, $\beta = AC$, $\gamma = AD$ (distances). Montrer que $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

Correction ▼ [003913]

Exercice 2132 **I

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire, f' est impaire et si f est impaire, f' est paire.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $f^{(n)}$ désignant la dérivée n-ième de f, montrer que si f est paire, $f^{(n)}$ est paire si n est pair et impaire si n est impair.
3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. A-t-on des résultats analogues concernant les primitives de f ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la condition « f est paire (ou impaire) » par la condition « f est T-périodique ».

Correction ▼ [005097]

Exercice 2133 **

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ [005098]

Exercice 2134 **I

1. Etudier brièvement la fontion $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.
2. Trouver tous les couples (a,b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Correction ▼ [005099]

Exercice 2135

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $(**)$ $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$,
2. $(*)$ $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,
3. $(**)$ $2\,\text{argsh}\,x = \text{argch}\,3 - \text{argth}\,\frac{7}{9}$,
4. $(**)$ $\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0$,
5. $(**)$ $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Correction ▼ [005100]

Exercice 2136

Construire le graphe des fonctions suivantes :

1. (*) $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.
2. (**) $f_2(x) = \ln(\text{ch}\,x)$.
3. (***) $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.

4. (**) $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$.
5. (***) $f_5(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0,+\infty[$).
6. (**) $f_6(x) = \log_2(1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6))$.

Correction ▼ [005102]

Exercice 2137 **

Soit f de $[0,1]$ dans lui-même telle que $\forall (x,y) \in ([0,1])^2$, $|f(y)-f(x)| \geqslant |x-y|$. Montrer que $f = Id$ ou $f = 1-Id$.

Correction ▼ [005404]

Exercice 2138

Etude complète des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \frac{1+x^2}{x^3}(\arctan x - \frac{x}{1+x^2})$.
2. $f_2(x) = |\tan x| + \cos x$.
3. $f_3(x) = x - \ln\left|\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}\right|$.
4. $4_(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.
5. $f_5(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.
6. $f_6(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
7. $f_7(x) = e^{/\ln x}$.
8. $f_8(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
9. $f_9(x) = \log_2(1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6))$.
10. $f_{10}(x) = E(x) + (x-E(x))^2$.
11. $f_{11}(x) = \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-x} + \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}+x}$.
12. $f_{12}(x) = \frac{\arcsin x}{x}$.
13. $f_{13}(x) = e^{1/x}\sqrt{x+4}$.
14. $f_{14}(x) = \arccos(\frac{1}{\operatorname{ch} x})$.
15. $f_{15}(x) = \ln(y+\sqrt{y^2-1}) - \ln(\frac{1+x}{1-x})$ où $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.
16. $f_{16}(x) = \ln|\operatorname{sh} x - 1|$.
17. $f_{17}(x) = x^{(x^x)}$.
18. $f_{18}(x) = (\cos x + \sin x)^{1/x}$.
19. $f_{19}(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2-1}$.
20. $f_{20}(x) = \arcsin(2x-1) + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
21. $f_{21}(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.
22. $f_{22}(x) = 3^{2x-1} - 5.3^{x-1} - x\ln 3$.
23. $f_{23}(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$.

Correction ▼ [005443]

71 123.05 Fonction continue par morceaux

Exercice 2139

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in CM([a,b],\mathbb{R}), \forall x \in [a,b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

Montrer que l'on peut choisir $\phi \in E([a,b],\mathbb{R})$, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in E([a,b],\mathbb{R}), \forall x \in [a,b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

NB : CM pour continue par morceaux et E pour escalier. [000693]

Exercice 2140

Donner un exemple de fonction qu'on ne puisse approcher à ε près par des fonctions en escaliers. [000694]

Exercice 2141

On dit qu'un ensemble A de fonctions définies sur un intervalle $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$ est dense dans un ensemble B si :

$$\forall f \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A, \forall x \in I, |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Le cours dit par exemple que l'ensemble des fonctions en escaliers est dense dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux si $I = [a,b]$. Montrer que l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $I = [a,b]$. [000695]

Exercice 2142

On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $I = [a,b]$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathbb{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a,b]$, et que toutes les f_n sont continues. Montrer que $\forall x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donner sa limite. Montrer que f est bornée et continue.

On ne suppose plus que $(f_n)_n$ converge uniformément mais seulement point par point (ie, $\forall x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(x)$) ; de plus toutes les f_n sont lipschitziennes de rapport k ; montrer que f est lipschitzienne de rapport k et qu'il y a converge uniforme. [000696]

Exercice 2143

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}^+, \forall d = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \text{ subdivision de } [a,b], \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sigma(d) \leqslant \mu.$$

On appelle alors $V(a,b) = \sup_{d \text{ subdivision}} \sigma(d)$ et on définit une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$: $x \to V(a,x)$.

Montrer que toute fonction monotone est à variation bornée puis que $x \to V(a,x)$ est croissante ainsi que $x \to V(a,x) - f(x)$. En déduire que toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes (d'où la nature de ses discontinuités). Une fonction continue, une fonction lipschitzienne sont-elles à variation bornée ? [000697]

72 123.06 Fonctions équivalentes, fonctions négligeables

Exercice 2144

À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$? [001213]

Exercice 2145

Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ différente de 1 alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$. [001214]

Exercice 2146

Montrer que si f tend vers 0 en a alors $\ln(1+f) \underset{a}{\sim} f$ et $e^f - 1 \underset{a}{\sim} f$. [001215]

Exercice 2147

Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Correction ▼ [001216]

Exercice 2148

Calculer les limites de

1. $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0.
2. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0.
3. $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Correction ▼ [001217]

Exercice 2149

Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x})^x - 1$. [001218]

Exercice 2150

$$\text{Limite en } +\infty \text{ de } \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$$

$$\text{Limite en 0 de } \frac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \frac{\cos(x)-\sin(x)}{(4x-\pi)\tan(x)}$$

$$\text{Équivalent en 0 de } \frac{\tan(x-x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$$

$$\text{Équivalent en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(\tan(2x)+\tan(x+\frac{\pi}{4})\right)\left(\cos(x+\frac{\pi}{4})\right)^2$$

$$\text{Limite en 0 de } x^{\frac{1}{1+2\ln(x)}}$$

$$\text{Limite en } \frac{1}{2} \text{ de } \left(2x^2-3x+1\right)\tan(\pi x)$$

$$\text{Limite en 0 de } \frac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1})$$

Correction ▼ [001219]

Exercice 2151

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles. Montrer qu'il existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, f_n(t)=o(f(t))$ si $t\to\infty$. [001220]

73 123.99 Autre

Exercice 2152 ***I

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant 3\Rightarrow \sqrt{n}<\sqrt[n]{n!})$.
(commencer par vérifier que pour $k=2,3,\ldots,n$, on a : $(n-k+1)k>n$).

Correction ▼ [005161]

Exercice 2153 **I

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ |\sin(nx)|\leqslant n|\sin x|$.

Correction ▼ [005163]

Exercice 2154 **I

Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [005393]

Exercice 2155 **I

Soit f définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite réelle $\ell\in[0,1[$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [005394]

Exercice 2156 ***

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout réel positif x, on ait $f(x^2)=f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$. Trouver un exemple où f n'est pas constante.

Correction ▼ [005397]

Exercice 2157 ***I

Trouver tous les morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$.

Correction ▼ [005399]

Exercice 2158 ***

Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$. Montrer que $\bigcup_{k\geqslant 1}]ka,kb[$ contient un intervalle de la forme $]A,+\infty[$ puis déterminer la plus petite valeur possible de A.

Correction ▼ [005400]

Exercice 2159 *** Théorème d'homéomorphie

Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est injective si et seulement si f est strictement monotone et que dans ce cas $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert, fermé).

Correction ▼ [005402]

Exercice 2160 ***

Trouver un exemple de fonction pèriodique dont le groupe des pèriodes est dense dans $\mathbb{R}$ mais pas $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005403]

Exercice 2161 ***

Trouver les fonctions bijectives de $[0,1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x \in [0,1],\ f(2x - f(x)) = x$.

Correction ▼ [005405]

Exercice 2162 ***I

Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0) = f(1)$.

1. Soit n un entier naturel non nul et soit $a = \frac{1}{n}$. Montrer que l'équation $f(x+a) = f(x)$ admet au moins une solution.
2. Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si a est un réel de $]0,1[$ qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation $f(x+a) = f(x)$ n'ait pas de solution.
3. Application. Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
   (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement un intervalle de temps de durée 45 min pendant lequel il a parcouru 15 km.

Correction ▼ [005406]

74 124.01 Calculs

Exercice 2163

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1 \qquad ; \qquad f_3(1) = 1.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000698]

Exercice 2164

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000699]

Exercice 2165

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000700]

Exercice 2166

Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000701]

Exercice 2167

Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions :

$$f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)(x-3)} \qquad g(x) = \ln(1+x).$$

[000702]

Exercice 2168 Formule de Leibnitz

Étant données u et v des fonctions dérivables à l'ordre n sur l'intervalle I, montrer par récurrence que la dérivée d'ordre n du produit uv sur cet intervalle est :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

En déduire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

[000703]

Exercice 2169

Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \qquad h : \mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

[000704]

Exercice 2170

Calculer les dérivées des fonctions :

1. $x \mapsto \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}$, $\qquad x \mapsto \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$.
2. $x \mapsto \log\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$, $\qquad x \mapsto (x(x-2))^{1/3}$.

[000705]

Exercice 2171

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et de $x \mapsto \sin(f(x^2))$.
2. On suppose $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \log(|f(x)|)$.

[000706]

Exercice 2172

Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilté de

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

[000707]

Exercice 2173

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$

Déterminer a, b, c pour que f soit C^2 (et C^3 ?). [000708]

Exercice 2174

Soit $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est C^∞ et que $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(0) = 0$.

Correction ▼ [000709]

Exercice 2175

Soient a et b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$. [000710]

Exercice 2176

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, f(0) = 0.$$

Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer ses dérivées en 0. [000711]

Exercice 2177

Calculer la dérivée de $x \to \ln\cos(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1})$. [000712]

Exercice 2178

La fonction $x \to \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? [000713]

Exercice 2179

En quels points la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, f(x) = 0,$$

est-elle dérivable ? [000714]

Exercice 2180

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leqslant x$. [001221]

Exercice 2181

Pour tout $x \in]1,+\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-1,+\infty[$. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$. [001222]

Exercice 2182

Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour les applications suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. $g : x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
3. $h : x \mapsto x^2\sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

[001223]

Exercice 2183

Soit g une fonction 2 fois dérivable sur $[a,b]$ telle que $g(a) = g(b) = 0$ et $g''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Montrer que pour tout $x \in]a,b[, g(x) \geqslant 0$. [001224]

Exercice 2184

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$ et $f''(x) \geqslant 0$. Étudier $\lim_{x\to\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. [001225]

Exercice 2185

Soit f une application continue de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $]a,b]$. Montrer que si $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe, f est dérivable en a. [001226]

Exercice 2186

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction bornée deux fois dérivable et telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait $\alpha f(x) \leqslant f''(x)$.

1. (a) Montrer que f' a une limite en $+\infty$. Quelle est la valeur de cette limite ?
   (b) Montrer que f est décroissante et que $\lim_{+\infty} f(x) = 0$.
2. (a) Soit $g : x \mapsto \alpha f^2(x) - (f'(x))^2$. Montrer que g est croissante et a pour limite 0 en ∞.
   (b) En posant $f(x) = h(x)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : f(x) \leqslant f(0)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$.

[001227]

Exercice 2187

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin x| \leqslant |x|,$$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad 1 - \cos x \leqslant x\sin x,$$

$$\forall x \in [-1,1], \qquad |\arcsin x| \leqslant \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|.$$

[002689]

Exercice 2188 **

Déterminer dans chacun des cas suivants la dérivée n-ème de la fonction proposée :

$$1)\ x\mapsto x^{n-1}\ln(1+x)\ 2)\ x\mapsto \cos^3 x\sin(2x)\ 3)\ x\mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\ 4)\ x\mapsto (x^3+2x-7)e^x.$$

Correction ▼ [005413]

75 124.02 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 2189

Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples, et appartiennent à $[-1,1]$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000715]

Exercice 2190

Etudier la fonction $f : x\mapsto x^5-5x+1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5-5x+1=0$ a trois solutions réelles. [000716]

Exercice 2191

Montrer que le polynôme X^n+aX+b, (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000717]

Exercice 2192

Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0)=0$.

Indication ▼ Correction ▼ [000718]

Exercice 2193

Étant donné y un réel positif et n un entier naturel pair, montrer que $(x+y)^n = x^n+y^n$ si et seulement si $x=0$. Cas n impair ? [000719]

Exercice 2194

Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a,+\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$. [000720]

Exercice 2195

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$$

sur l'intervalle $[a,b]$ préciser le nombre "c" de $]a,b[$. Donner une interprétation géométrique.

Correction ▼ Vidéo ■ [000721]

Exercice 2196

Appliquer la formule des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = a + bx + ce^{\alpha x}$$

(où a, b, c, α sont réels, et c et α sont non nuls) sur l'intervalle $[0, X]$.

1. Calculer "θ" en fonction de X.
2. En déduire que
$$x \mapsto \frac{1}{\alpha x} \ln \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x}$$
est bornée sur $\mathbb{R}$.

[000722]

Exercice 2197

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, a+2h]$. Par introduction de la fonction

$$g(t) = f(a+t+h) - f(a+t)$$

montrer qu'il existe α dans $]0,2[$ tel que

$$f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h) = h^2 f''(a+\alpha h).$$

[000723]

Exercice 2198

Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha) \ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0,1[$
$$\alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000724]

Exercice 2199

Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Indication ▼ Correction ▼ [000725]

Exercice 2200

Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geqslant (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \geqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^{\alpha}}.$$

[000726]

Exercice 2201

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|e^x-1-x|\leqslant\frac{x^2}{2}e^{|x|}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000727]

Exercice 2202

Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=f(a).$$

Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$. [002688]

Exercice 2203 *** Formule de Taylor-Lagrange

Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et n un entier naturel. Soit f une fonction élément de $C^n([a,b],\mathbb{R})\cap D^{n+1}(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indication. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(x)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k-A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

Correction ▼ [005408]

Exercice 2204 *** Formule des trapèzes

Soit $f\in C^2([a,b],\mathbb{R})\cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b))-f^{(3)}(c).$$

Indication. Appliquer le théorème de Rolle à g' puis g où $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a))-A(x-a)^3$ où A est intelligemment choisi.

Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$? Interprétez géométriquement.

Correction ▼ [005409]

Exercice 2205 ***I Polynômes de Legendre

Pour n entier naturel non nul donné, on pose $L_n=((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. En étudiant le polynôme $A_n=(X^2-1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $]-1;1[$.

Correction ▼ [005412]

Exercice 2206 **

Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Correction ▼ [005415]

Exercice 2207 **

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain a non nul. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Correction ▼ [005416]

Exercice 2208 ** Généralisation du théorème des accroissements finis

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

Soit $\Delta : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$.

1. Montrer que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que $(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$.

Correction ▼ [005421]

76 124.03 Applications

Exercice 2209

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction $x \mapsto f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$.

1. On suppose $g_n(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1-\frac{1}{n}[$. Montrer que $f(1) > f(0)$.
2. On suppose désormais que $f(0) = f(1)$. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n s'annule en au moins un point de l'intervalle $[0, 1-\frac{1}{n}]$.

[001228]

Exercice 2210

Pour tout n entier supérieur où égal à 2, on considère le polynôme de degré n à coefficients réels :

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^2 + X - 1$$

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que P_n a une unique racine réelle positive que l'on nommera λ_n. (On pourra étudier l'application $X \mapsto P_n(X)$.)
2. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ.
3. Montrer que ℓ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire sa valeur.

Correction ▼ [001229]

Exercice 2211

Soit f une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est strictement croissante sur I.
2. f' est positive ou nulle sur I et $\{x \in I; f'(x) > 0\}$ est dense dans I.

[001230]

Exercice 2212

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0. Montrer qu'il existe une application ε de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donner une interprtation géométrique de ce résultat.
2. En déduire les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n$ et $v_n = (1 + \frac{\alpha}{n})^{\frac{1}{n}}$.
3. Construire un exemple de suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ avec, $u_n < 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et telle que $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$. (On pourra s'inpirer de l'exemple de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ ci-dessus.)

[001231]

Exercice 2213

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\log(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} < 1 + \log(n)$.
3. Posons $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n)$ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroisante et convergente.

[001232]

Exercice 2214

1. Soit f une application continue d'un intervalle $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe une (unique) application continue ε de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(c) = 0$ et, pour tout $x \in]a,b[$ distinct de c, on ait :
$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)\varepsilon(x)$$
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$$
est décroissante et qu'elle converge vers une limite que l'on nommera S.
3. Pourquoi peut on dire, *a priori*, que $\dfrac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1$?
4. Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer que la suite $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$$
converge vers $f'(0)S$ (utiliser 1.).
5. Montrer que $\sigma_n(f) = \log\,(2)$ lorsque f est l'application $x \mapsto \log\,(1+x)$ et en déduire la valeur de S.
6. Calculer la limite de la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$\sigma_n = \sin\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n+1} + \cdots + \sin\frac{1}{2n}.$$
7. Plus généralement, quelle est la valeur pour $p \in \mathbb{N}^*$ donné, de la limite S_p de la suite $(\sigma_n(p))_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$\sigma_n(p) = \sum_{k=0}^{pn} \frac{1}{n+k}?$$

Correction ▼ [001233]

Exercice 2215

Soit f une fonction dérivable et a un réel. Soit $h > 0$ un nombre réel strictement positif fixé.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que
$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h).$$
2. Pour tout $h \neq 0$ on note : $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$. Montrer que si $f''(a)$ existe, alors $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = f''(a)$.

[001234]

Exercice 2216

Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et 1 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $p = f(1) - f(0)$.

1. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = f'(0)$ et $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ sinon. Montrer que si u est un réel compris entre $f'(0)$ et p alors il existe $a \in [0,1]$ tel que $u = f'(a)$.
2. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(1) = f'(1)$ et $h(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ sinon. Montrer que si v est un réel compris entre $f'(1)$ et p alors il existe $b \in [0,1]$ tel que $v = f'(b)$.
3. Soit w un réel compris entre $f'(0)$ et $f'(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $w = f'(c)$.

[001235]

Exercice 2217

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré 3 ayant trois racines distinctes. Montrer que les racines de P' sont dans le triangle ayant pour sommet les racines de P [001236]

---

77 124.04 Fonctions convexes

Exercice 2218 Déterminant

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $x < y < z$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0$. [003981]

Exercice 2219 Somme de fractions

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

Correction ▼ [003982]

Exercice 2220 Monotonie

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'on a :
– soit f est croissante sur $\mathbb{R}$.
– soit f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
– soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, a]$, puis croissante sur $[a, +\infty[$.

[003983]

Exercice 2221 Fonction convexe bornée

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

[003984]

Exercice 2222 f convexe majorée par g affine

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ affine. On suppose : $\begin{cases} \forall\, x > 0,\ f(x) \leqslant g(x), \\ f(1) = g(1). \end{cases}$

Montrer que $f = g$. [003985]

Exercice 2223 Position par rapport à une asymptote

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $+\infty$.
Montrer que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.

[003986]

Exercice 2224 Fonction convexe dérivable

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer que f' est continue.

[003987]

Exercice 2225 Étude à l'infini

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que : $f \geqslant 0,\ f' \geqslant 0,\ f'' \geqslant 0$.

1. Étudier l'existence des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en $+\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, $\frac{f(x)}{x}$.
2. Même question pour les limites en $-\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, et $xf'(x)$.

Correction ▼ [003988]

Exercice 2226 Zéro de f''

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(x) \to f(0)$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $f''(c) = 0$.

[003989]

Exercice 2227 $f((x+y)/2) \leqslant (f(x)+f(y))/2$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x,y \in [a,b],\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer que f est convexe.

[003990]

Exercice 2228 Suites adjacentes

Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ convexe, bijective, croissante. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$a \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n) + f(v_n)}{2}\right).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

[003991]

Exercice 2229 Polygone inscrit dans un cercle de périmètre maximum

Soit $n \geqslant 3$ et $A_1 A_2 \dots A_n$ un polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle fixé.
Montrer que le périmètre de ce polygone est maximal si et seulement si le polygone est régulier. [003992]

Exercice 2230 Fonctions logarithmiquement convexe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : ($\ln f$ est convexe) $\iff$ ($\forall\, \alpha > 0$, f^α est convexe). [003993]

Exercice 2231 Limite de $f(x) - xf'(x)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $p = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - xf'(x))$ existe.
2. On suppose p fini. En utilisant le fait que $f(x) - xf'(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$, montrer que $\frac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite m finie en $+\infty$.
3. Montrer alors que $f(x) - mx - p \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction ▼ [003994]

Exercice 2232 Fonction positive concave

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ concave.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que : $\forall\, x,y \geqslant 0,\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Correction ▼ [003995]

Exercice 2233 Constante d'Euler

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ concave, dérivable, croissante.

1. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 1,\ f(x+1) - f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x) - f(x-1)$.
2. On pose : $\begin{cases} u_n = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(n) - f(n) \\ v_n = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(n) - f(n+1). \end{cases}$ Montrer que ces suites convergent.
3. On prend $f(x) = \ln x$. Soit $\gamma = \lim_{n\to\infty} u_n$ (constante d'Euler). Calculer γ à 10^{-2} près.

[003996]

Exercice 2234 Tangentes passant par un point

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, et $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier le nombre maximal de tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par A.

[003997]

Exercice 2235 Caractérisation des fonctions convexes ou concaves par le TAF

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$, $\exists !\ c \in]a,b[$ tq $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $b \longmapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est monotone sur $]-\infty,a[$ et sur $]a,+\infty[$.
2. En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.

[003998]

Exercice 2236 Pseudo-dérivée seconde

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ D^2 f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe.

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, calculer $D^2 f(x)$.
2. Soit f quelconque et $a < b < c$ tels que $f(a) = f(b) = f(c)$.
   Montrer qu'il existe $x \in]a,c[$ tq $D^2 f(x) \leqslant 0$.
   On suppose à présent que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, D^2 f(x) \geqslant 0$.
3. Soient $a < b < c$ et P le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 coïncidant avec f aux points a,b,c. Montrer que $P'' \geqslant 0$.

4. Calculer P'' en fonction de a,b,c et $f(a),f(b),f(c)$. En déduire que f est convexe.

Correction ▼ [003999]

Exercice 2237 Fonction convexe non dérivable sur un sous ensemble dénombrable

Soit (a_n) une suite bornée de réels. On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-a_n|}{3^n}$.
Montrer que f est convexe, et n'est pas dérivable aux points a_n.

Correction ▼ [004000]

Exercice 2238 Convergence simple + convexité => convergence uniforme sur un compact

Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur $[a,b]$ convergeant simplement vers une fonction f supposée continue.
Soit $\varepsilon>0$.

1. Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\, x,y\in[a,b],\ |x-y|\leqslant\frac{b-a}{p}\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$.
   On choisit un tel p, et on fixe une subdivision (a_k) de $[a,b]$ telle que $a_k=a+k\frac{b-a}{p}$.
2. Soit $t\in[0,1]$. Encadrer $f_n\big(ta_k+(1-t)a_{k+1}\big)$ par deux fonctions affines de t en utilisant la convexité de f_n.
3. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

[004001]

Exercice 2239 DL d'une fonction convexe

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(x)=a+bx+\frac{cx^2}{2}+o_{x\to0}(x^2)$.
Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0)=c$
(encadrer $f'(x)$ par les taux d'accroissements de f entre $x-\varepsilon x$, x et $x+\varepsilon x$). [004002]

Exercice 2240 DL d'une fonction convexe

Soit f continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F(x)=\int_0^x f$, et l'on suppose que $F(x)=x^2+o(x)$. Montrer que $f(x)=2x+o(\sqrt{x})$.

Correction ▼ [004003]

78 124.99 Autre

Exercice 2241

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=(1-k)^3x^2+(1+k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine est un extremum local de f.

Correction ▼ [000728]

Exercice 2242

Appliquer la règle de l'Hôpital aux calculs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\lim_{x\to0}\ (1-\cos x)\mathrm{cotan}\, x.$$

[000729]

Exercice 2243

Calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4)-1}{x^4 e^x};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx};$$
$$\lim_{x\to 0} x^2\left(\exp\frac{1}{x}-\exp\frac{1}{x+1}\right).$$

[000730]

Exercice 2244

Soit $f\in C^2(\mathbb{R})$ telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ f(x+y)f(x-y)\leqslant f(x)^2$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)f''(x)\leqslant f'(x)^2$.
[000731]

Exercice 2245

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{+\infty} f'=l$. Montrer qu'alors $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=l$. [000732]

Exercice 2246

Déterminer les extremums de $f(x)=x^4-x^3+1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000733]

Exercice 2247

Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums locaux) de f_λ quand λ décrit $\mathbb{R}$, où :
$$f_\lambda: x\mapsto \lambda e^x+x^2.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000734]

Exercice 2248

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :
$$\exists\lambda\in\mathbb{R}^+-\{1\},\forall x\in\mathbb{R}, f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

[000735]

Exercice 2249

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\omega)=\omega$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de x_0 et la récurrence $x_{n+1}=f(x_n)$. Montrer que si $|f'(\omega)|<1,\exists\varepsilon>0,\forall x_0\in]\omega-\varepsilon,\omega+\varepsilon[,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w, et que si $|f'(\omega)|>1$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w si et seulement si elle est stationnaire (i.e. $x_n=\omega$ à partir d'un certain rang). Que dire dans le cas $|f'(\omega)|=1$? [000736]

Exercice 2250

Soit $f\in C^1([0;1],\mathbb{R})$,telle que $f(0)=0$. Calculer :
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

[000737]

Exercice 2251

Soient $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$.
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. *Application.* Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000738]

Exercice 2252

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :
$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :
$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a
$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n+y^n).$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000739]

Exercice 2253

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
   où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.

Correction ▼ Vidéo ■ [000740]

Exercice 2254 Limite double

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0, et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tq } \forall\, h,k \in]0,\delta[,\ \left|\frac{f(h)-f(-k)}{h+k} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

[003932]

Exercice 2255 Propriétés de parité et de périodicité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?
2. Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?
3. Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'a pas de période (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

[003933]

Exercice 2256 Propriété de parité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que la fonction $t \mapsto 2f(t) - tf'(t)$ est paire. f est-elle paire ?

Correction ▼ [003934]

Exercice 2257 Injectivité locale

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall\, x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.
2. Si f' est continue au point a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective.

[003935]

Exercice 2258 Dérivabilité de $|f|$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.
[003936]

Exercice 2259 $f'(x) \to \ell$ et f est bornée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que $\ell = 0$. [003937]

Exercice 2260 $\lim_\infty f'(x) = \lim_\infty f(x)/x$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$. Chercher un contrexemple pour la réciproque.

[003938]

Exercice 2261 Centrale MP 2006

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x)\int_{t=0}^{x} f^2(t)\,dt \to \ell \in \mathbb{R}^*$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(x) \sim \frac{\alpha}{x^\beta}$ en $+\infty$.

Correction ▼ [003939]

Exercice 2262 Propriété des valeurs intermédiaires pour f'

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que : $\forall\, x \in [a,b],\ f'(x) \neq 0$. Montrer que f' est de signe constant.
2. Dans le cas général, montrer que $f'([a,b])$ est un intervalle.

[003940]

Exercice 2263 Propriété des valeurs intermédiaires pour f'

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On note $E = \{(x,y) \in [a,b]^2 \text{ tq } x < y\}$ et pour $(x,y) \in E$: $\varphi(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Montrer que $\varphi(E)$ est un intervalle.
2. En déduire que $f'([a,b])$ est un intervalle.

[003941]

Exercice 2264 Règle de l'Hospital

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables avec : $\forall\, x \in]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
   (Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$, où λ est un réel bien choisi)
2. En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ lorsque $x \to a^+$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \to \ell$ lorsque $x \to a^+$ (règle de l'Hospital).
3. Application : déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

[003942]

Exercice 2265 Recherche de limite

Trouver $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}$.

Correction ▼ [003943]

Exercice 2266 $f(a) = f(b) = 0,\ f'(a)f'(b) > 0 \Rightarrow$ il existe un autre zéro

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$, et $f'(c) \leqslant 0$. [003944]

Exercice 2267 $f'(a) = f'(b)$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

[003945]

Exercice 2268 Tangentes passant par un point donné

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, il existe une tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point $(d,0)$. [003946]

Exercice 2269 Rolle itéré

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable.

1. Si f s'annule en $n+1$ points distincts dans $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. Si $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

[003947]

Exercice 2270 Rolle à l'infini

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \to f(a)$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer qu'il existe $x \in]a,+\infty[$ tel que $f'(x) = 0$.

[003948]

Exercice 2271 Formule des accroissements finis avec $\theta = 1/2$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Correction ▼ [003949]

Exercice 2272 Fonction $\mathscr{C}^\infty$ bornée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ bornée.

1. Montrer que si une dérivée, $f^{(k)}$, $k \geqslant 2$, admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes, $f^{(p)}$, $1 \leqslant p < k$, tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2. En déduire que pour tout $k \geqslant 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

[003950]

Exercice 2273 Distance à la corde

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :
$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$
(Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$)
2. Cas général : Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :
$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

[003951]

Exercice 2274 Écart à un polynôme interpolateur

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$, $a_1, \dots, a_n$ n points distincts dans $\mathbb{R}$, et P le polynôme de Lagrange prenant les mêmes valeurs que f aux points a_i. On pose $Q(x) = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^n (x - a_i)$.
Montrer que : $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $f(b) = P(b) + Q(b) f^{(n)}(c)$
(considérer $g(t) = f(t) - P(t) - \lambda Q(t)$ où λ est choisi de sorte que $g(b) = 0$).

[003952]

Exercice 2275 Polynômes de Legendre

On pose $f(t) = (t^2 - 1)^n$.

1. Montrer que : $\forall\, k \in \{0, \dots, n-1\},\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.
2. Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.
3. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

Correction ▼ [003953]

Exercice 2276 Racines de $x^n + ax + b$

Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, et $a,b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles distinctes si n est pair, et plus de trois racines réelles distinctes si n est impair.

[003954]

Exercice 2277 Racines de $P(x)-e^x$

Soit P un polynôme. Montrer qu'il existe au plus un nombre fini de réels x tels que $P(x)=e^x$.

[003955]

Exercice 2278 Limite de $1/(n+1)+\cdots+1/2n$

On veut calculer $\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

1. Montrer l'existence de ℓ.
2. Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0)=0$. Montrer que $f\left(\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2n}\right)\to\ell f'(0)$ lorsque $n\to\infty$.
3. On prend $f(x)=\ln(1+x)$. Déterminer ℓ.

[003956]

Exercice 2279 Calcul de limite

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0)=0$. Chercher $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Correction ▼ [003957]

Exercice 2280 Somme $1/k\ln k$

Pour $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$, appliquer le théorème des accroissements finis à $x\mapsto\ln(\ln x)$ sur $[k,k+1]$. En déduire que la série de terme général $\frac{1}{k\ln k}$ est divergente. [003958]

Exercice 2281 $f'(x)f'(f(x))=1$

Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que : $\begin{cases}\forall\, x\in\mathbb{R},\ f'(x)f'(f(x))=1\\ f(0)=0 \text{ et } f'(0)>0.\end{cases}$

Correction ▼ [003959]

Exercice 2282 $f\circ f=f$

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ dérivable telle que $f\circ f=f$. Montrer que f est constante ou bien $f=\mathrm{id}_{[0,1]}$. [003960]

Exercice 2283 Dérivabilité uniforme

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que :

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0 \text{ tq } \forall\,x,y\in[a,b],\ \text{si } 0<|x-y|<\delta,\ \text{alors } \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x)\right|\leqslant\varepsilon.$$

[003961]

Exercice 2284 Formes indéterminées

Soient $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions telles que : $\begin{cases}\forall\,x\in\mathbb{R},\ u(x)\neq v(x)\\ \lim_{x\to 0}u(x)=\lim_{x\to 0}v(x)=a>0.\end{cases}$

1. Chercher $\lim_{x\to 0}\frac{u^v-v^v}{u-v}$.
2. Chercher $\lim_{x\to 0}\frac{u^v-v^u}{u^u-v^v}$.

Correction ▼ [003962]

Exercice 2285 $(1+k)(1+k^2)\dots(1+k^n)$

1. Montrer que : $\forall\, x \geqslant -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Soit $k \in]-1,1[$. On pose $u_n = (1+k)(1+k^2)\dots(1+k^n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente (traiter séparément les cas $k \geqslant 0$, $k < 0$).

Correction ▼ [003963]

Exercice 2286 Dérivée n-ème de $\cos^3 x$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

[003964]

Exercice 2287 Dérivée n-ème de $\arctan x$ et e^{x^3}

Établir une formule de récurrence pour les dérivées successives des fonctions :
$f : x \mapsto \arctan x$ et $g : x \mapsto e^{x^3}$.

Correction ▼ [003965]

Exercice 2288 Dérivée n-ème de $(x^3+2x^2-5)e^{-x}$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto (x^3+2x^2-5)e^{-x}$.

Correction ▼ [003966]

Exercice 2289 Ensi Chimie P 94

Soit $f(x) = e^{x\sqrt{3}}\sin x$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [003967]

Exercice 2290 Dérivée n-ème de $x^n(1-x)^n$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^n(1-x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$.

Correction ▼ [003968]

Exercice 2291 Dérivées n-èmes de $t^{n-1}\ln(t)$ et $t^{n-1}e^{1/t}$

Calculer $\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n-1}\ln t\right)$, et $\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n-1}\exp(1/t)\right)$ (essayer $n = 1,2,3$).

Correction ▼ [003969]

Exercice 2292 Dérivée n-ème de $f(x^2)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. On pose $g(x) = f(x^2)$.

1. Montrer qu'il existe des entiers $a_{n,k}$ tels que : $\forall\, x,\ g^{(n)}(x) = \sum_{k=[(n+1)/2]}^{n} a_{n,k} f^{(k)}(x^2)(2x)^{2k-n}$.
2. Calculer $a_{n,k}$ en fonction de n et k.

Correction ▼ [003970]

Exercice 2293 Dérivée n-ème de $f(1/x)$

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I ne contenant pas 0, et $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
Établir : $g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{x^{2n-p}} C_n^p f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

[003971]

Exercice 2294 Dérivées de e^{-1/x^2}

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x \neq 0 & f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0$.

[003972]

Exercice 2295 $(f(2t)-f(t))/t$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\frac{f(2t)-f(t)}{t} \to a$ (si $t \to 0$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = a$.

[003973]

Exercice 2296 $\sin x - 3x/\pi + 4x^3/\pi^3 \geqslant 0$

On pose $f(x) = \sin x - \frac{3x}{\pi} + \frac{4x^3}{\pi^3}$. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0$ (chercher le signe de $f^{(4)}$).

[003974]

Exercice 2297 Courbes homothétiques

Soit $a > 0,\ a \neq 1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation : $y = \ln x$, et $\mathscr{C}'$ celle d'équation : $y = a \ln x$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont une et une seule tangente commune.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont homothétiques.

Correction ▼ [003975]

Exercice 2298 Matexo

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x)f'(x) \geqslant 0$. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle.

Correction ▼ [003976]

Exercice 2299 Mines MP 2000

Montrer que pour tout x réel, il existe $a(x)$ unique tel que $\int_{t=x}^{a(x)} e^{t^2}\,dt = 1$. Montrez que a est indéfiniment dérivable, et que son graphe est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice.

Correction ▼ [003977]

Exercice 2300 $\varphi(2x) = 2\varphi(x)$ (Centrale MP 2003)

Trouver toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(2x) = 2\varphi(x)$.

Correction ▼ [003978]

Exercice 2301 $f' = f^{-1}$ (Ens Cachan MP* 2003)

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ bijectives de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ telles que $f' = f^{-1}$.

1. Trouver un élément de E du type $x \mapsto cx^m$, où c et m sont réels.
2. Quelle est la limite en 0 de f ?
3. Montrer que f est un $\mathscr{C}^\infty$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que f admet un unique point fixe.
5. Soit g un deuxième élément de E. Montrer que g admet le même point fixe que f.

Correction ▼ [003979]

Exercice 2302 $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$, Polytechnique MP* 2006

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$. Montrer que f est nulle.

Correction ▼ [003980]

Exercice 2303 ***

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$. Montrer que f est affine.

Correction ▼ [005407]

Exercice 2304 **

Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur I et même dérivable à droite et à gauche en tout point de I.

Correction ▼ [005410]

Exercice 2305 *** Inégalités de convexité

1. Soient $x_1, x_2,..., x_n$, n réels positifs ou nuls et $\alpha_1,..., \alpha_n$, n réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$. Montrer que $x_1^{\alpha_1}..x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$. En déduire que $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1+...+x_n}{n}$.
2. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   (a) Montrer que, pour tous réels a et b positifs ou nuls, $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.
   (b) Soient $a_1,..., a_n$ et $b_1,..., b_n$, $2n$ nombres complexes. Montrer que :
   $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q} \text{ (Inégalité de HÖLDER).}$$
   (c) Montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe et retrouver ainsi l'inégalité de HÖLDER.
   (d) Trouver une démonstration directe et simple dans le cas $p = q = 2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

Correction ▼ [005411]

Exercice 2306 ***I

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005414]

Exercice 2307 **** Toute fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points distincts de I vérifiant $f'(a) < f'(b)$ et soit enfin un réel m tel que $f'(a) < m < f'(b)$.

1. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.
2. Montrer qu'il existe y dans $[a,b]$ tel que $m = \frac{f(y+h)-f(y)}{h}$ puis qu'il exsite x tel que $f'(x) = m$.

Correction ▼ [005417]

Exercice 2308 *IT

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $f\ :\ x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

Correction ▼ [005419]

Exercice 2309 **

Soit P un polynôme réel de degré supèrieur ou égal à 2.

1. Montrer que si P n'a que des racines simples et réelles, il en est de même de P'.
2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de P'.

Correction ▼ [005420]

Exercice 2310 **

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Correction ▼ [005422]

Exercice 2311 ***

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante puis déterminer f.

Correction ▼ [005423]

Exercice 2312 ***I

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to +\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. (Indication. Considérer $g(x) = e^x f(x)$).

Correction ▼ [005424]

79 125.01 Formule de Taylor

Exercice 2313

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001267]

Exercice 2314

Soit a un nombre réel et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On suppose f et f'' bornées ; on pose $M_0 = \sup\limits_{x>a} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x>a} |f''(x)|$.

1. En appliquant une formule de Taylor reliant $f(x)$ et $f(x+h)$, montrer que, pour tout $x > a$ et tout $h > 0$, on a : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{h}{2} M_2 + \dfrac{2}{h} M_0$.
2. En déduire que f' est bornée sur $]a, +\infty[$.
3. Établir le résultat suivant : soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 à dérivée seconde bornée et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = 0$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001268]

Exercice 2315

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que : $ae^2 + be + c = 0$.

1. En appliquant la formule de Taylor sur $[0, 1]$ à l'application $\varphi : x \mapsto ae^x + ce^{-x}$ démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\theta_n \in]0, 1[$ tel que :
$$-b = \frac{ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a + (-1)^k c}{k!}.$$
2. En déduire que pour n assez grand $ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n} = 0$ puis que $a = b = c = 0$. (On rappelle que $e = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$.)

[001269]

Exercice 2316

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ et $f^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ avec $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right| = o(\frac{n!}{a^n}), a$ constante fixée. Montrer que $\forall x \in [-a, a], f(x) = 0$, puis que $f = 0$. [001270]

Exercice 2317

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P \geqslant 0$. On pose $Q = P + P' + ... + P^{(n)}$. Montrer que $Q \geqslant 0$. [001271]

Exercice 2318

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in C^3([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$ (on pourra utiliser Taylor-Lagrange entre $a, \frac{a+b}{2}, b$). [001272]

Exercice 2319

Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrer que

$$\forall x \in [-a,a], \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2a}|f(a) - f(-a)| + \frac{a^2+x^2}{2a} \sup_{t\in[-a,a]} |f''(t)|.$$

Application : montrer que si $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, on a $\sin x \geqslant x\cos x - x^2$.

[002690]

Exercice 2320 Déterminant

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable en a. Étudier $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4} \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [004004]

Exercice 2321 Dérivées nulles en 0

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0,$$
$$\exists\, \lambda > 0 \text{ tq } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sup_{\mathbb{R}} \left|f^{(n)}\right| \leqslant \lambda^n n!.$$

Montrer que f est nulle sur l'intervalle $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, puis sur $\mathbb{R}$.

[004005]

Exercice 2322 Fonctions absolument monotones

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x) > 0$.
Montrer que pour tout entier n, $\frac{f(x)}{x^n} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

[004006]

Exercice 2323 Fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = 1$, et : $\forall\, x \geqslant \frac{1}{2},\ f(x) = 0$.

1. Montrer que $\sup_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| \geqslant 2^n n!$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\sup_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| > 2^n n!$.

Correction ▼ [004007]

Exercice 2324 Formule de Simpson

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^5$, impaire, telle que $f'(0) = 0$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f^{(5)}(x)| \leqslant M$.
Montrer qu'il existe une constante λ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left|f(x) - \frac{x}{3}f'(x)\right| \leqslant \lambda M |x^5|$.

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^5$ telle que :

$$f'(a) = f'(b) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \qquad \text{et} \quad \forall x \in [a,b],\ |f^{(5)}(x)| \leqslant M.$$

Montrer que $\left|f(b) - f(a)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^5}{2880}$.

Correction ▼ [004008]

Exercice 2325 $f'(x) - (f(b) - f(a))/(b-a)$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On note $M = \sup|f''|$ et on suppose $M > 0$.

1. Montrer que : $\forall x \in]a,b[$, on a $\left|f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| < M\frac{b-a}{2}$.
2. Si $\left|f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = M\frac{b-a}{2}$, montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Correction ▼ [004009]

Exercice 2326 Matexo

Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que :

$$\forall x \in [-a,a],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2a}|f(a) - f(-a)| + \frac{a^2+x^2}{2a}\sup|f''|.$$

Application. Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ on a $\sin x \geqslant x\cos x - x^2$.

Correction ▼ [004010]

Exercice 2327 Limite de θ

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Pour a fixé, on écrit la formule de Taylor-Lagrange :

$$f(a+h) = f(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + h\theta_h).$$

Montrer que si $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, alors pour h suffisament petit, θ_h est unique et $\theta_h \to \frac{1}{n+1}$ lorsque $h \to 0$.

Correction ▼ [004011]

Exercice 2328

Différences finies Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $h > 0$. On pose :

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h} \qquad \text{et} \quad \Delta_h^p = \underbrace{\Delta_h \circ \Delta_h \circ \cdots \circ \Delta_h}_{p \text{ fois}}.$$

Par exemple, $\Delta_h^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$.

1. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, \theta \in]-1,1[$ tq $\Delta_h f(x) = f'\left(x + \frac{\theta h}{2}\right)$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, \theta' \in]-1,1[$ tq $\Delta_h f(x) = f'(x) + \frac{h^2}{24}f^{(3)}\left(x + \frac{\theta' h}{2}\right)$.
2. Montrer par récurrence sur p que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, \theta_p \in]-p,p[\text{ tq } \Delta_h^p f(x) = f^{(p)}(x) + \frac{ph^2}{24}f^{(p+2)}\left(x + \frac{\theta_p h}{2}\right).$$

[004012]

Exercice 2329 f et f'' sont bornées

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant \alpha$ et $|f''(x)| \leqslant \beta$.

1. Montrer que : $\forall\, h > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \frac{2\alpha}{h} + \frac{h\beta}{2}$.
2. Pour quelle valeur de h obtient-on la meilleure inégalité ?

Correction ▼ [004013]

Exercice 2330 Inégalité sur f'

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f''(x)| \leqslant M$.

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M \geqslant 0$.
2. En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}$.
3. On suppose que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| = \sqrt{2Mf(x)}$. Que pouvez-vous dire de f ?

Correction ▼ [004014]

Exercice 2331 Majoration des dérivées de f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. On veut montrer que les dérivées intermédiaires sont aussi bornées sur $\mathbb{R}$.

1. Cas $n = 2$: Utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.
2. Cas général : Utiliser l'exercice 2328.

[004015]

Exercice 2332 $f''(x) \geqslant -\frac{k}{x^2}$

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to 0^+$, et : $\forall\, x > 0,\ f''(x) \geqslant -\frac{k}{x^2}$.
Montrer que $xf'(x) \to 0$ lorsque $x \to 0^+$ (écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x + \varepsilon x$).

Correction ▼ [004016]

Exercice 2333 Ens PC* 2001

Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels, non constants, de coefficients dominants positifs.
On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ les racines de P' de multiplicités $m_1, \ldots, m_p$ et $y_1 < y_2 < \cdots < y_q$ celles de Q' de multiplicités $n_1, \ldots, n_q$. Montrer qu'il existe f, $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, tel que $P \circ f = Q$ si et seulement si :

$$p = q, \qquad \forall\, i,\ P(x_i) = Q(y_i), \qquad \forall\, i,\ m_i = n_i.$$

Correction ▼ [004017]

Exercice 2334 ****

Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) \leqslant (f(x))^2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f''(x) \leqslant (f'(x))^2$ (Indication. Appliquer la formule de TAYLOR-LAPLACE entre x et $x+y$ puis entre x et $x-y$).

Correction ▼ [005418]

Exercice 2335 ***

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{(n+k)^2}$.

Correction ▼ [005457]

80 125.02 Calculs

Exercice 2336

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).
2. $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 7).
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 7).
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
6. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Correction ▼ [001237]

Exercice 2337

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f en 0. Quelles conclusions en tirer ?
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$: $g(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$. Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

[001238]

Exercice 2338

Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

Correction ▼ [001239]

Exercice 2339

Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de :

1. $\ln\cos x$ $n = 6$ $a = 0$.
2. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ $n = 2$ $a = 0$.
3. $\ln\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ $n = 3$ $a = 0$.
4. $\ln\sin x$ $n = 3$ $a = \frac{\pi}{4}$.
5. $\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$ $n = 4$ $a = +\infty$.
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $n = 3$ $a = 0$.
7. $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$ $n = 2$ $a = +\infty$.

Correction ▼ [001240]

Exercice 2340

Développements limités en 0 de :

1. $\cos x . \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
3. $\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right)$ à l'ordre 6.
4. $\dfrac{\sinh x - x}{x^3}$ à l'ordre 4.
5. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

[001241]

Exercice 2341

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les conditions sur $\varepsilon(x)$ pour que ces fonctions soient des développements limités au voisinage d'un point et à un ordre que vous préciserez.

1. $f_1(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^2\varepsilon(x)$
2. $f_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x)$
3. $f_3(x) = (x-2) + \frac{(x-2)^2}{5} + (x-2)^3\varepsilon(x)$
4. $f_4(x) = x^2 - x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$
5. $f_5(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1 + (x-1)^2\varepsilon(x)$
6. $f_6(x) = (x-2)^2 + (x-2) - 2 + (x-2)\varepsilon(x)$
7. $f_7(x) = \{2x + x^2 + 1 + x^2\varepsilon(x)\}\{-x + 3 + x^2 - x^3\varepsilon(x)\}$

[001242]

Exercice 2342

1. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$.
2. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
3. Développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x) = \ln(\sin x)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001243]

Exercice 2343

Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ en 0. En déduire un développement à l'ordre 2 en $+\infty$. Calculer un développement à l'ordre 1 en $-\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001244]

Exercice 2344

Donner un développements limité en 0 à l'ordre 10 de :

1. $x \longmapsto \int_0^x \cos t^2 dt$.
2. $x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = F(x^2) - F(x)$ où F est une primitive de $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

[001245]

Exercice 2345

Donner le DL2 en $+\infty$ de :

$$x \to \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} e^{\frac{x}{x-1}}.$$

[001246]

Exercice 2346

Calculer

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x.$$

Donner un équivalent de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - \ell$$

lorsque $x \to +\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002657]

Exercice 2347

A

1. Soient a et z deux réels. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur le segment d'extrémités a et z et ϕ un polynôme de degré n. Prouver que pour tout t compris dans l'intervalle $[0,1]$,

$$\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))$$

$$= -(z-a)\phi^{(n)}(t)f'(a+t(z-a)) + (-1)^n(z-a)^{n+1}\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))$$

2. (a) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est prolongeable par continuité en zéro, que son prolongement est indéfiniment dérivable et admet des développements limités en zéro de la forme :

$$1 - t/2 + \frac{b_1t^2}{2!} + \frac{b_2t^4}{4!} + \cdots + \frac{b_nt^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1}),$$

où les b_i sont des réels qu'on ne cherchera pas à déterminer.
Montrer que la dérivée $n^{ième}$ en zéro, notée $\phi_n(z)$, de la fonction $t \mapsto t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}$ est un polynôme en z de degré n et que

$$\phi_n(z) = z^n - \frac{1}{2}nz^{n-1} + C_n^2b_1z^{n-2} + C_n^4b_2z^{n-4} + \cdots + C_n^{2N}b_Nz^{n-2N}$$

où $N = E(\frac{n-1}{2})$, E désignant la fonction partie entière.

(b) Prouver que $nz^{n-1} = \phi_n(z+1) - \phi_n(z)$

3. Prouver que

(i)	$\phi_n^{(n-k)}(1) = \phi_n^{(n-k)}(0)\ \ (2 \leqslant k \leqslant n)$	(ii)	$\phi_n^{(n-2k-1)}(0) = 0\ \ (1 \leqslant k \leqslant N)$
(iii)	$\phi_n^{(n-2k)}(0) = \frac{n!b_k}{(2k)!}\ \ (1 \leqslant k \leqslant N)$	(iv)	$\phi_n^{(n-1)}(0) = -\frac{1}{2}n!$
(v)	$\phi_n^{(n-1)}(1) = +\frac{1}{2}n!$	(vi)	$\phi_n^{(n)} = n!$

4. (a) On suppose f de classe C^{2n+1}. Prouver que

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & f(z) - f(a) - \frac{z-a}{2}\left[f'(z)+f'(a)\right] \\ & + \sum_{m=1}^{n-1} b_m\frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\left[f^{(2m)}(z) - f^{(2m)}(a)\right] \\ & - \frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t)f^{(2n+1)}\Big(a+(z-a)t\Big)dt \end{aligned}$$

(b) En déduire que si F est de classe C^{2n} sur $[a, a+r\omega]$ où $r \in \mathbb{N}$ et $\omega > 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_a^{a+r\omega} F(x)dx \quad = \quad & \omega\left[\frac{1}{2}F(a) + F(a+\omega) + \cdots + F(a+(r-1)\omega) + \frac{1}{2}F(a+r\omega)\right] \\ & - \sum_{m=1}^{n-1} b_m\frac{\omega^{2m}}{(2m)!}\left[F^{(2m-1)}(a+r\omega) - F^{(2m-1)}(a)\right] + R_n \end{aligned}$$

où

$$R_n = \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t)\sum_{m=0}^{r-1}F^{(2n)}(a+m\omega+\omega t)dt\ .$$

B

1. Soit $u_k : x > 0 \mapsto \ln(x+k) - \ln(k) + x\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$
   Montrer que pour tout x strictement positif, la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k(x)$ est convergente. On pose pour la suite $G(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$
2. Prouver que G vérifie l'équation fonctionnelle
$$\forall x > 0 \quad G(x+1) = G(x) - \ln(x).$$
3. En déduire que $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exp(-G(m+1)) = m!$
4. Soit x et y deux réels strictement positifs. Montrer que la série
$$\sum_{k\geqslant 1}\left[\ln(y+k) - \ln(x+k) + (y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]$$
   est convergente et que sa somme est $G(y) - G(x) - \ln y + \ln x$.
5. Prouver à l'aide de A que pour tous entiers strictement positifs n et p
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \ln(y+k) - \ln(x+k) \quad &= \quad \int_0^n f(t)dt + \frac{1}{2}\big(f(0)+f(n)\big)\\ &+ \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n) - f^{(2h-1)}(0)\big) + T_{p,n}(x,y)\end{aligned}$$
   où $f : t \mapsto \ln(y+t) - \ln(x+t)$ et $T_{p,n}(x,y)$ est une expression que l'on précisera.
6. Prouver que $R_p(x,y) = \lim_{n\to+\infty} T_{p,n}(x,y)$ existe.
7. On pose $g(z) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)(2h-1)} \frac{1}{z^{2h-1}}$. Montrer que $G(y) + g(y) = G(x) + g(x) + R_p(x,y)$
8. Montrer que $R_p(x,y) = O\left(\frac{1}{\left[\inf(x,y)\right]^{2p-1}}\right)$ quand $\inf(x,y) \to +\infty$.
9. Prouver à l'aide de la formule de Stirling que $G(m) + g(m) \to \frac{1}{2}\ln 2\pi$ quand $m \to +\infty$.
10. Montrer que
$$G(y) = -y\ln y + y + \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)(2h-1)} \frac{1}{y^{2h-1}} + O\left(\frac{1}{y^{2p-1}}\right)$$
11. Donner un développement asymptotique de $\ln(m!)$ quand m tend vers $+\infty$ à un $O(\frac{1}{m^7})$ près.

Correction ▼ [002683]

Exercice 2348 Calculs de DL

Fonctions trigonométriques

$$x/\sin x = 1 + x^2/6 + 7x^4/360 + o(x^4)$$
$$1/\cos x = 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$$
$$\ln(\sin x/x) = -x^2/6 - x^4/180 - x^6/2835 + o(x^6)$$
$$\exp(\sin x/x) = e(1 - x^2/6 + x^4/45) + o(x^4)$$
$$\sqrt{\tan x} = 1 + h + h^2/2 + o(h^2), h = x - \pi/4$$
$$\sin(x + x^2 + x^3 - x^4) = x + x^2 + 5x^3/6 - 3x^4/2 + o(x^4)$$
$$\ln(x\tan(1/x)) = x^{-2}/3 + 7x^{-4}/90 + o(1/x^4)$$
$$(1 - \cos x)/(e^x - 1)^2 = 1/2 - x/2 + x^2/6 + o(x^2)$$
$$\sin((\pi\cos x)/2) = 1 - \pi^2x^4/32 + \pi^2x^6/192 + o(x^6)$$
$$\cos x\ln(1 + x) = x - x^2/2 - x^3/6 + o(x^4)$$
$$(\sin x - 1)/(\cos x + 1) = -1/2 + x/2 - x^2/8 + o(x^2)$$
$$\ln(2\cos x + \tan x) = \ln 2 + x/2 - 5x^2/8 + 11x^3/24 - 59x^4/192 + o(x^4)$$
$$e^{\cos x} = e(1 - x^2/2 + x^4/6) + o(x^5)$$

Fonctions circulaires inverses

$$\arcsin^2 x = x^2 + x^4/3 + 8x^6/45 + o(x^6)$$
$$1/\arcsin^2 x = x^{-2} - 1/3 - x^2/15 + o(x^2)$$
$$\arctan\sqrt{(x+1)/(x+2)} = \pi/4 - x^{-1}/4 + 3x^{-2}/8$$
$$\arccos(\sin x/x) = |x|/\sqrt{3}(1 - x^2/90) + o(1/x^3)$$
$$1/\arctan x = x^{-1} + x/3 - 4x^3/45 + 44x^5/945 + o(x^5)$$
$$\arcsin\sqrt{x} = \pi/6 + 1/\sqrt{3}(2h - 4h^2/3 + 32h^3/9) + o(h^3), h = x - 1/4$$
$$\arcsin(\sin^2 x) = x^2 - x^4/3 + 19x^6/90 - 107x^8/630 + o(x^8)$$
$$\arctan(1 + x) = \pi/4 + x/2 - x^2/4 + x^3/12 + o(x^4)$$
$$\arcsin x/(x - x^2) = 1 + x + 7x^2/6 + o(x^2)$$
$$e^{\arcsin x} = e^{\pi/6}(1 + 2h/\sqrt{3} + 2(1+\sqrt{3})h^2/(3\sqrt{3})) + o(h^2), h = x - 1/2$$
$$e^{1/x}\arctan x = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - 1)x^{-1} + (\frac{\pi}{4} - 1)x^{-2} + (\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6})x^{-3} + o(1/x^3)$$

Exponentielle et logarithme

$$x/(e^x - 1) = 1 - x/2 + x^2/12 + o(x^2)$$
$$\ln x/\sqrt{x} = h - h^2 + 23h^3/24 + o(h^3), h = x - 1$$
$$\ln((2 - x)/(3 - x^2)) = \ln(2/3) - x/2 + 5x^2/24 + o(x^2)$$
$$\ln(1 + x)/(1 - x + x^2) = x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^3)$$
$$\mathrm{ch}\, x/\ln(1 + x) = x^{-1} + 1/2 + 5x/12 + o(x)$$
$$\ln(\ln(1 + x)/x) = -x/2 + 5x^2/24 - x^3/8 + o(x^3)$$
$$\ln(a^x + b^x) = \ln 2 + x\ln\sqrt{ab} + x^2\ln^2(a/b)/8 + o(x^2)$$
$$\exp(1/x)/x^2 = e(1 - 3h + 13h^2/2 - 73h^3/6) + o(h^3), h = x - 1$$

Fonctions hyperboliques inverses

$$\operatorname{argth}(\sin x) = x + x^3/6 + x^5/24 + o(x^5)$$
$$\operatorname{argsh}(e^x) = \ln(1+\sqrt{2}) + 1/\sqrt{2}(x + x^2/4) + o(x^2)$$

Formes exponentielles

$$(1-x+x^2)^{1/x} = e^{-1}(1 + x/2 + 19x^2/24) + o(x^2)$$
$$((1+x)/(1-x))^{\alpha} = 1 + 2\alpha x + 2\alpha^2 x^2 + 2\alpha(2\alpha^2+1)x^3/3 + o(x^3)$$
$$(\sin x/x)^{2/x^2} = e^{-1/3}(1 - x^2/90) + o(x^3)$$
$$(\sin x/x)^{3/x^2} = e^{-1/2}(1 - x^2/60 - 139x^4/151200) + o(x^4)$$
$$(1+\sin x)^{1/x} = e(1 - x/2 + 7x^2/24) + o(x^2)$$
$$(1+\sin x+\cos x)^x = 1 + x\ln 2 + x^2(\ln^2 2 + 1)/2 + o(x^2)$$
$$(\sin x)^{\sin x} = 1 - h^2/2 + 7h^4/24 + o(h^4), h = x - \pi/2$$
$$(\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}(1 + 2h^2/3 + 4h^4/5) + o(h^4), h = x - \pi/4$$
$$\text{Développer d'abord } \ln((1+x)/(1-x))$$

Radicaux

$$x\sqrt{(x-1)/(x+1)} = 1/\sqrt{3}(2 + 5h/3 + h^3/54) + o(h^3), h = x-2$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}(1 - x/8 - 5x^2/128 - 21x^3/1024) + o(x^3)$$
$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} = |x|/\sqrt{2}(1 + x^2/8 + 7x^4/128) + o(x^5)$$
$$e^x - \sqrt{1+2x} = x^2 - x^3/3 + 2x^4/3 - 13x^5/15 + o(x^5)$$
$$(\sqrt[3]{x^3+x^2} + \sqrt[3]{x^3-x^2})/x = 2 - 2x^{-2}/9 + o(1/x^3)$$

[004018]

Exercice 2349 EIT 1999

Calculer le développement limité de $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ en 0 à l'ordre 3.

Correction ▼ [004019]

Exercice 2350 IT

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

1. $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{1/(2x-\pi)}$
2. $\lim_{x\to\pi/2}|\tan x|^{\cos x}$
3. $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos(\frac{n\pi}{3n+1}) + \sin(\frac{n\pi}{6n+1})\right)^n$
4. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|}$
5. $\lim_{x\to\pi/2}\cos x.e^{1/(1-\sin x)}$
6. $\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1}$
7. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right)^{1/\sin x}$
8. $\lim_{x\to e,\, x<e}(\ln x)^{\ln(e-x)}$

9. $\lim_{x\to 1,\, x>1} \frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$
10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(\operatorname{ch} x-1)}{x^2+1}$
11. $\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}$
12. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$
13. $\lim_{x\to 1/\sqrt{2}} \frac{(\arcsin x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$
14. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cos(a+\frac{1}{x})}{\cos a}\right)^x$ (où $\cos a \neq 0$)

Correction ▼ [005426]

Exercice 2351 IT

Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

1. $\frac{1}{1-x^2-x^3}$ (ordre 7 en 0)
2. $\frac{1}{\cos x}$ (ordre 7 en 0)
3. $\arccos\sqrt{\frac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0)
4. $\tan x$ (ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$)
5. $(\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$ (ordre 2 en 0)
6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)$ (ordre 8 en 0)
7. $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1)
8. $\arctan(\cos x)$ (ordre 5 en 0)
9. $\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ (ordre 2 en 0)
10. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\arcsin^2 x}$ (ordre 5 en 0)
11. $\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ (ordre 10 en 0)
12. $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0)
13. $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$ (ordre 3 en π)

Correction ▼ [005427]

Exercice 2352 ***

Soit $0<a<b$. Etude complète de la fonction $f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

Correction ▼ [005428]

Exercice 2353 **

Etude au voisinage de $+\infty$ de $\sqrt{x^2-3}-\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1}$.

Correction ▼ [005429]

Exercice 2354 **

Soit $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 10 secondes puis $f^{(n)}(x)$ pour $|x|\neq 1$ en à peine plus de temps).

Correction ▼ [005430]

Exercice 2355 IT

1. Equivalent simple en $+\infty$ et $-\infty$ de $\sqrt{x^2+3x+5}-x+1$.
2. Equivalent simple en 0, 1, 2 et $+\infty$ de $3x^2-6x$

3. Equivalent simple en 0 de $(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x}$.
4. Equivalent simple en $+\infty$ de $x^{\operatorname{th} x}$.
5. Equivalent simple en 0 de $\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$.

Correction ▼ [005431]

Exercice 2356 **IT

Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de $u_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!$.

Correction ▼ [005432]

Exercice 2357 **IT

1. Développement asymptotique à la précision x^2 en 0 de $\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}$.
2. Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$ de $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$.

Correction ▼ [005433]

Exercice 2358 **

Soient $a>0$ et $b>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

1. Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)$.
2. Même question pour $e^{-a}f_n(a)-1+\frac{a^2}{2n}$.

Correction ▼ [005434]

Exercice 2359 ***I

1. Montrer que l'équation $\tan x=x$ a une unique solution dans l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$ pour n entier naturel donné. On note x_n cette solution.
2. Trouver un développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Correction ▼ [005437]

Exercice 2360

1. Montrer que l'équation $x+\ln x=k$ admet, pour k réel donné, une unique solution dans $]0,+\infty[$, notée x_k.
2. Montrer que, quand k tend vers $+\infty$, on a : $x_k=ak+b\ln k+c\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ où a, b et c sont des constantes à déterminer.

Correction ▼ [005438]

Exercice 2361 **

Soit $f(x)=1+x+x^2+x^3\sin\frac{1}{x^2}$ si $x\neq 0$ et 1 si $x=0$.

1. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Correction ▼ [005439]

Exercice 2362 **IT

Etude au voisinage de 0 de $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}$ (existence d'une tangente ?)

Correction ▼ [005440]

Exercice 2363 **I

---

1. La fonction $x \mapsto \arccos x$ admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
2. Equivalent simple de $\arccos x$ en 1.

Correction ▼ [005441]

Exercice 2364 ***

1. Développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.
2. Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p+2q=k$.

Correction ▼ [005442]

Exercice 2365

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $\cos x \cdot \exp x$ à l'ordre 3
2. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4
3. $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ à l'ordre 6
4. $\exp\big(\sin(x)\big)$ à l'ordre 4
5. $\sin^6(x)$ à l'ordre 9
6. $\ln\big(\cos(x)\big)$ à l'ordre 6
7. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4
8. $\tan x$ à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)
9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3
10. $\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big)$ à l'ordre 6

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006888]

81 125.03 Applications

Exercice 2366

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001247]

Exercice 2367

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (\cos(x)+x)}{x^2}, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3\arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}$.

Correction ▼ [001248]

Exercice 2368

Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001249]

Exercice 2369

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$. [001250]

Exercice 2370

Établir pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ l'inégalité :

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} < (x+1)^{3/2} - x^{3/2} < \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$

[001251]

Exercice 2371

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x^2}{2} \leqslant e^x - x - 1 \leqslant \frac{x^2}{2} e^x$. [001252]

Exercice 2372

Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[- \{0\}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Etudier la dérivabilité du prolongement de f.

[001253]

Exercice 2373

Étudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
2. $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

[001254]

Exercice 2374

Soit (1) l'équation $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $x_n \in [n, n+1[$ solution de (1).
2. Déterminer un équivalent de x_n.
3. Faire un DAS de $x_n - n$ en $+\infty$ en fonction de $\frac{1}{n}$ à l'ordre 5.

[001255]

Exercice 2375

Calculer pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}, \lim_{n \to \infty} (3(2)^{\frac{1}{n}} - 2(3)^{\frac{1}{n}})^n$$

[001256]

Exercice 2376

Calculer :

$$\ell = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)^{x \ln x}$$

et donner un équivalent de $\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{x \ln x} - \ell$ quand $x \to 0$. [001257]

Exercice 2377

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $(u_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x)+v_n(x)}{2}, v_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x)v_n(x)}, u_0(x) = 1, v_0(x) = x.$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite ℓ_x.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ell_x$. Calculer $f(1), f(0)$, donner $f(\frac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$ si $x > 0$. Montrer que f est croissante, en déduire le sens de variations de $x \to \frac{f(x)}{x}$.
3. Montrer que f est dérivable en 1 (on utilisera $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1+x}{2}$) puis que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est continue en 0.
5. Donner l'allure du graphe de f, préciser la tangente en 0 ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.

[001258]

Exercice 2378

Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$, on définit :

$$u_n(x) = \left(\frac{1^x + 2^x + \ldots + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Déterminer $\ell_n = \lim\limits_{x\to 0} u_n(x)$. [001259]

Exercice 2379

Déterminer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}.$$

[001260]

Exercice 2380

Soient u, v, f définies par :

$$u(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}},\ v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1},\ f(x) = u(x) - v(x).$$

1. Donner un équivalent de f au voisinage de $-\infty$, en déduire $\lim\limits_{-\infty} f$.
2. Déteminer $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) - x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) + x$. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par-rapport à cette asymptote.
3. Même étude en $+\infty$.

[001261]

Exercice 2381

Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Correction ▼ [001262]

Exercice 2382

Soient $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$ et $g : x \mapsto (x+1)\exp(\dfrac{1}{x-1})$ deux fonctions. Déterminer si leurs graphes respectifs ont des asymptotes puis la position de ces graphes par rapport à celles-ci. [001263]

Exercice 2383

Montrer que, pour tout x réel vérifiant $|x| \leqslant 1$:

$$\left|\frac{x+\sin 2x}{x^9+x^2-3}\right| \leqslant 2.$$

[001264]

Exercice 2384

Déterminer :

1. (a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x$
   (b) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x$
2. $\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001265]

Exercice 2385

1. Soit g la fonction définie par :
$$g(x) = \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan x.$$
   (a) Quel est le domaine de définition de g ?
   (b) Etudier ses variations.
   (c) Montrer que g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un point α compris entre -1 et 0 (on ne demande pas de préciser la valeur de α).
   (d) Dessiner le graphe de g.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x+1)\arctan x.$$
   (a) Calculer la dérivée de f et établir son tableau de variation.
   (b) Le graphe de f a-t-il des points d'inflexion ? Si oui, donner les coordonnées de ce (ou ces) point(s).
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abcisse $x = 0$ au graphe de f et la position de ce graphe par rapport à cette tangente (au voisinage de ce point).
4. En utilisant les résultats de l'exercice **???**, montrer que :
   (a) $\dfrac{f(x)}{x} = (1+\dfrac{1}{x})(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x})$ si $x > 0$.
   (b) $\dfrac{f(x)}{x} = (1+\dfrac{1}{x})(-\dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x})$ si $x < 0$.
5. En déduire l'existence d'une fonction ε telle que $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$ et, pour tout $x > 0$, on ait :
$$f(x) = \frac{\pi}{2}x + (\frac{\pi}{2}-1) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$
   Etablir un résultat analogue pour $x < 0$.

6. Quelles sont les asymptotes au graphe de f ? Préciser la position de ce graphe par rapport à ces asymptotes.
7. Dessiner le graphe de f.

[001266]

Exercice 2386 Fonctions circulaires et hyperboliques

1. $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \to \frac{2}{3}$ lorsque $x \to 0$.
2. $\frac{\sin x \operatorname{sh} x - \tan x \operatorname{th} x}{\operatorname{sh}^4 x - \operatorname{th}^4 x} \to - > -\frac{1}{12}$ lorsque $x \to 0$.
3. $(\operatorname{ch} x)^\alpha - (\operatorname{sh} x)^\alpha \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 2, \\ 1 & \text{si } \alpha = 2, \\ 0 & \text{si } \alpha < 2. \end{cases}$ lorsque $x \to +\infty$
4. $\frac{\exp(x^2) - \operatorname{ch}(x\sqrt{2})}{(\operatorname{ch} x - \cos x)(\operatorname{ch} 2x - \cos 2x)} \to \frac{1}{12}$ lorsque $x \to 0$.
5. $(2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x \to \frac{1}{\pi}$ lorsque $x \to 1/2$.
6. $\frac{\cos \pi x}{4x^2 - 9} \to - > \frac{\pi}{12}$ lorsque $x \to 3/2$.
7. $\frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} \to -\sqrt{3}$ lorsque $x \to \pi/3$.
8. $\frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} \to 1$ lorsque $x \to 0$.
9. $\frac{1}{x} \ln \operatorname{ch} x \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

[004020]

Exercice 2387 Logarithme et exponentielle

1. $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \to \frac{1}{2}$. lorsque $x \to 0$
2. $\frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} \to \pm\infty$ lorsque $x \to 1$.
3. $\frac{x^a - a^x}{\log_a(x) - \log_x(a)} \to \frac{a^{a+1} \ln a (1 - \ln a)}{2}$ lorsque $x \to a$.
4. $\left(\frac{a^x + b^x}{1 + c^x}\right)^{1/x} \to \exp\left(\frac{a + b - c}{2}\right)$ lorsque $x \to 0$.
5. $\frac{x^{x^x}}{x^x - 1} \to 0$ lorsque $x \to 0^+$.

[004021]

Exercice 2388 Exposants variables

1. $x^{\arcsin x} \to 1$ lorsque $x \to 0^+$.
2. $\frac{(\sin x)^{\sin x} - 1}{x^x - 1} \to 1$ lorsque $x \to 0^+$.
3. $(2 - x)^{\tan(\pi x/2)} \to e^{2/\pi}$ lorsque $x \to 1$.
4. $(2 - x)^{\tan(\pi x/2)} \to - > 1$ lorsque $x \to 2^-$.
5. $(\sin x + \cos x)^{1/x} \to e$ lorsque $x \to 0$.
6. $(\cos 2x - 2\sin x)^{1/x} \to e^{-2}$. lorsque $x \to 0$
7. $(\sin x)^{\tan x} \to 1$. lorsque $x \to \pi/2$
8. $(\tan x)^{\cos x/\cos 2x} \to e^{-1/\sqrt{2}}$ lorsque $x \to \pi/4$.
9. $(\tan x)^{\cos x/\cos 2x} \to 1$ lorsque $x \to (\pi/2)^-$.
10. $(\sin x)^{1/\ln x} \to e$ lorsque $x \to 0^+$.
11. $(\ln x)^{x-1} \to 1$ lorsque $x \to 1^+$.

12. $(\ln x)^{\ln(e-x)} \to -> 1$ lorsque $x \to e^-$.

[004022]

Exercice 2389 Radicaux

1. $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan(\pi x/4)} \to 0$ lorsque $x \to 1$.
2. $\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2-x} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.
3. $\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin x} \to 1$ lorsque $x \to 0$.

[004023]

Exercice 2390 Sommes de cotangentes

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. CNS pour que $\sum_{k=1}^n a_k \operatorname{cotan}(kx)$ ait une limite finie en 0 ?

Correction ▼ [004024]

Exercice 2391 $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$

On pose $u_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$. Trouver : $v_p = \lim_{n\to\infty} u_{n,p}$, $v = \lim_{p\to\infty} v_p$, $w_n = \lim_{p\to\infty} u_{n,p}$ et $w = \lim_{n\to\infty} w_n$.

Correction ▼ [004025]

Exercice 2392 Ensi P 91

Calculer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \sin\frac{k}{n^2}$ puis $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

Correction ▼ [004026]

Exercice 2393 Recherche de tangentes

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer la tangente pour $x = 0$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

1. $y = \frac{e^{\sin x}-1}{x}$.
2. $y = \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}$.
3. $y = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$.
4. $y = (2e^x - e^{-x})^{1/x}$.
5. $y = \frac{2}{e^{2x}-1} - \frac{1}{x}$.
6. $y = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

Correction ▼ [004027]

Exercice 2394 Comparaison de fonctions

On pose : $f(x) = 1/(1+x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-2\sin x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$.
Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$, $\mathscr{C}_k$ au voisinage de 0.

Correction ▼ [004028]

Exercice 2395 Recherche d'asymptotes

Rechercher si les courbes suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

1. $y = \sqrt{x(x+1)}$.

2. $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
3. $y=(x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
4. $y=(x+1)\arctan(1+2/x)$.
5. $y=x.\arctan x.e^{1/x}$.
6. $y=e^{2/x}\sqrt{1+x^2}\arctan x$.
7. $y=\sqrt{x^2-x}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Correction ▼ [004029]

82 125.04 Développements limités implicites

Exercice 2396 $\tan(x)=x$

1. Montrer que l'équation $\tan x=x$ possède une unique solution x_n dans $\left]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$ $(n\in\mathbb{N})$.
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Donner un DL de x_n en fonction de n à l'ordre 0 pour $n\to\infty$.
4. En reportant dans la relation trouvée en 2, obtenir un DL de x_n à l'ordre 2.

Correction ▼ Vidéo ■ [004037]

Exercice 2397 maximum de $x\cos^n x$

On note $f_n(x)=x\cos^n x$. Soit $x_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f_n(x_n)$ soit maximal.

1. Existence et unicité de x_n ?
2. Chercher $\lim_{n\to\infty}x_n$.
3. Montrer que $x_n^2\sim\frac{1}{n}$ $(n\to\infty)$.
4. Trouver un équivalent de $f_n(x_n)$.

Correction ▼ [004038]

Exercice 2398 Développement asymptotique

Soit $f:x\mapsto\frac{x+1}{x}e^x$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.
2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}^+$. Si λ est assez grand, la droite d'équation $y=\lambda$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points d'abscisses $a<b$.
   (a) Montrer que $a\sim\frac{1}{\lambda}$, et $e^b\sim\lambda$ pour $\lambda\to+\infty$.
   (b) Chercher la limite de b^a quand λ tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [004039]

Exercice 2399 Polytechnique MP* 2000

Soit $f(x)=\frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique x_n vérifiant $f(x_n)=1-\frac{1}{n}$. Trouver la limite et un équivalent de la suite (x_n) en $+\infty$.

Correction ▼ [004040]

Exercice 2400

Soit u_n une suite réelle telle que pour tout n on ait $u_n^5+nu_n-1=0$. Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Correction ▼ [004041]

Exercice 2401 Mines MP 2001

Montrez que pour n entier ($n>0$) l'équation $e^x = n-x$ admet une unique solution positive x_n. Déterminer les trois premiers termes du développement asymptotique de x_n en fonction de n.

Correction ▼ [004042]

Exercice 2402 Centrale MP 2001

Pour tout n entier naturel non nul, on donne $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$.

1. Montrer que f_n admet une unique racine positive notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ et trouver un équivalent de $x_n - \ell$.

Correction ▼ [004043]

83 125.05 Equivalents

Exercice 2403 Recherche d'équivalents

Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1. $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$, en 0
2. $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$, en 0
3. $\arctan x + \arctan\frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$, en $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$
5. $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, en 0

Correction ▼ Vidéo ■ [004044]

Exercice 2404 Approximation de cos

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit un $o(x^n)$ en 0 avec n maximal.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [004045]

Exercice 2405 Approximation de sin

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\sin x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}$ soit infiniment petit d'ordre maximal.

Correction ▼ [004046]

Exercice 2406 Equivalent de $\arccos x$ en 1

Simplifier $\arccos(1-2x^2)$, en trouver un équivalent pour $x \to 0$, puis donner un équivalent de $\arccos(u)$ pour $u \to 1^-$.

[004047]

Exercice 2407 $\arcsin\circ\arctan - \arctan\circ\arcsin$

1. Soient $P(X) = X + aX^3 + bX^5 + cX^7$ et $Q(X) = X + \alpha X^3 + \beta X^5 + \gamma X^7$. Chercher la partie de degré inférieur ou égale à 7 de $P \circ Q - Q \circ P$.
2. Application : Donner le DL à l'ordre 7 en 0 de $\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)$.

Correction ▼ [004048]

Exercice 2408 $(u^v - v^u)/(u - v)$

Soient u, v deux fonctions positives, $u \sim v$, $u \to 0$. Montrer que $\frac{u^v - v^u}{u - v} \sim -\ln(v)$.
(Écrire $u = v + w$ avec $w/v \to 0$)

[004049]

Exercice 2409 Développement asymptotique d'une réciproque

Soit $f : [-1, +\infty[\to [-e^{-1}, +\infty[, x \mapsto xe^x$. Montrer que f est bijective et $f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

[004050]

Exercice 2410 Équivalent de $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}$

Chercher un équivalent simple en 0^+ de $f_k(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}$ (k fois x).

Correction ▼ [004051]

Exercice 2411 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\alpha}}$

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\alpha}} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$ pour $n \to \infty$.

[004052]

Exercice 2412 $(1 + a_n/n)^n$

1. Soit $f(x) = \ln(1 + x) - x$.
   (a) Étudier f.
   (b) Chercher un équivalent simple de f en 0.
   (c) Soit (x_n) une suite de réels telle que $f(x_n) = o(1/n)$. Montrer que $nx_n^2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Application : Soit (a_n) une suite de réels. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $a_n = o(\sqrt{n})$.
   (b) $\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \sim e^{a_n}$.

[004053]

84 125.99 Autre

Exercice 2413 DL de $(\mathrm{ch}\, x)^(1/x)$

1. Montrer que $\frac{1}{x} \ln(\mathrm{ch}\, x)$ admet en $+\infty$ un développement limité généralisé à tout ordre.
2. En déduire le développement limité de $(\mathrm{ch}\, x)^{1/x}$ en $+\infty$ à un ordre n quelconque.

Correction ▼ [004030]

Exercice 2414 Théorème de division

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. On pose $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. On suppose que $f(x) = o(x^n)$.
   (a) Démontrer que : $\forall\, p \leqslant n,\ f^{(p)}(x) = o(x^{n-p})$, et : $\forall\, p < n,\ g^{(p)}(x) = o(x^{n-p-1})$.
   (b) En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ en 0.
2. Démontrer le même résultat dans le cas général.
3. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$. Montrer que f/g se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

[004031]

Exercice 2415 DL de f^{-1}

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de valuation 1. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes Q_n et R_n uniques tels que :

$$\begin{cases} X = Q_n \circ P + R_n \\ \deg Q_n \leqslant n < \mathrm{v}(R_n). \end{cases}$$

Application : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective telle que $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, avec $a_1 \neq 0$. Démontrer que f^{-1} admet un développement limité en 0 à l'ordre n, et donner les deux premiers termes.

Correction ▼ [004032]

Exercice 2416 DL de $(1-e^x)^n$

Développer de deux manières $(1-e^x)^n$ en 0 à l'ordre $n+2$.
En déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^p$ pour $p = 0, 1, \ldots, n+2$.

Correction ▼ [004033]

Exercice 2417 Approximation de f''

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Chercher $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}$.

[004034]

Exercice 2418 Dérivation d'un DL d'ordre 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h^2)$.
Démontrer que f est deux fois dérivable en a et $f''(a) = 0$ (comparer $f'(a+h)$ aux taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, et entre $a+h$ et $a+2h$).
Étudier le cas où $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{Lh^2}{2} + o(h^2)$.

[004035]

Exercice 2419 $f(x+y)f(x-y) \leqslant f^2(x)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) \leqslant f^2(x)$.
Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t)f''(t) \leqslant f'^2(t)$. [004036]

---

85 126.01 Fonctions circulaires inverses

Exercice 2420

Écrire sous la forme $\frac{m}{n}\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $|m|$ et n premiers entre eux, $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ et $\arctan(\tan\alpha)$ dans les cas : $\alpha = \frac{59}{5}\pi$; $\alpha = \frac{84}{5}\pi$; $\alpha = \frac{76}{5}\pi$. [000741]

Exercice 2421

Résoudre les équations suivantes :

1. $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

[000742]

Exercice 2422

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

[000743]

Exercice 2423

Soient les fonctions $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g.

[000744]

Exercice 2424

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p.

1. À quelle distance x_0 doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal α_0 ?
2. Vérifier que $\alpha_0 = \arctan \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.
3. Application à la statue de la liberté : haute de 46 mètres avec un piédestal de 47 mètres.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000745]

Exercice 2425

Démontrer les inégalités suivantes :

$$\arcsin a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$

$$\arctan a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000746]

Exercice 2426

Écrire sous forme d'expression algébrique

1. $\sin(\arccos x), \quad \cos(\arcsin x), \quad \cos(2\arcsin x)$.
2. $\sin(\arctan x), \quad \cos(\arctan x), \quad \sin(3\arctan x)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000747]

Exercice 2427

Tracer les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto f(x) = \sin(\arcsin x), \qquad x \mapsto f(x) = \arcsin(\sin x).$$

[000748]

Exercice 2428

Résoudre les équations suivantes :

1. $\arccos x = 2\arccos \frac{3}{4}$.
2. $\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$.
3. $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000749]

Exercice 2429

Calculer

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}.$$

[000750]

Exercice 2430

Simplifier les expressions suivantes :

$$\arctan(\tan x) \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}), \quad \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$\arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

[000751]

Exercice 2431

Vérifier

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000752]

Exercice 2432

Montrer que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ (on montrera que $0 \leqslant \arctan(\frac{1}{5}) \leqslant \frac{\pi}{8}$ et $0 \leqslant \arctan(\frac{1}{239}) \leqslant \frac{\pi}{2}$).
[000753]

Exercice 2433

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2-k+1}.$$

On montrera qu'elle converge (vers ℓ) et on évaluera $\lim_{n\to\infty} n(u_n - \ell)$.
Indication : que vaut $\arctan a - \arctan b$? [000754]

Exercice 2434

Étudier la fonction :

$$\phi : x \to \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

[000755]

Exercice 2435

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}.$$

[000756]

Exercice 2436 arcsin et arccos à partir de arctan

Le langage “Pascal” ne dispose pas des fonctions arcsin et arccos. Définir $\arcsin x$ et $\arccos x$ à l’aide de la fonction arctan.

Correction ▼ [003914]

Exercice 2437 Formules d’addition

Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Simplifier $\arctan a + \arctan b$.

Correction ▼ [003915]

Exercice 2438 $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$

Résoudre l’équation : $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$.

Correction ▼ [003916]

Exercice 2439 $\arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Soit $x = \arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calculer $\cos 4x$ et en déduire x.

Correction ▼ [003917]

Exercice 2440 arctangentes

1. Simplifier $\arctan \frac{1-x}{1+x}$.
2. Simplifier $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
3. Simplifier $\arctan \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.
4. Simplifier $\arctan \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} + \arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.
5. Simplifier $\arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x-1} + \arctan \frac{x+1}{x}$.

Correction ▼ [003918]

Exercice 2441 $2\arcsin x + \arcsin f(x) = \frac{\pi}{6}$

Existe-t-il une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x \in D,\ 2\arcsin x + \arcsin f(x) = \frac{\pi}{6}$?

Correction ▼ [003919]

Exercice 2442 $\cos(3\arctan x)$ et $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$.

Simplifier $\cos(3\arctan x)$ et $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$.

Correction ▼ [003920]

Exercice 2443 $\arccos(\cos x) - \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$

Simplifier $\arccos(\cos x) - \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

Correction ▼ [003921]

Exercice 2444 Équation

Résoudre : $2\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Correction ▼ [003922]

Exercice 2445 $\frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$

Simplifier $\frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

Correction ▼ [003923]

Exercice 2446 $\cos(\arctan(\sin(\arctan\frac{1}{x})))$

Simplifier $\cos(\arctan(\sin(\arctan\frac{1}{x})))$.

Correction ▼ [003924]

Exercice 2447 Équations aux arctan

Résoudre :

1. $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
3. $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.
4. $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}$.

Correction ▼ [003925]

Exercice 2448 Sommes remarquables

1. Montrer que : $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.
2. Montrer que : $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

[003926]

Exercice 2449 Sommes remarquables

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que : $\forall x \in]0,1]$, $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$.

[003927]

Exercice 2450 $\arctan((x-\sin a)/\cos a)$

Soit $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $f(x) = \arcsin\left(\frac{2(x-\sin a)\cos a}{x^2-2x\sin a+1}\right)$ et $g(x) = \arctan\left(\frac{x-\sin a}{\cos a}\right)$.
Vérifier que f est bien définie, calculer $\sin\big(2g(x)\big)$ et comparer $f(x)$ et $g(x)$.

Correction ▼ [003928]

Exercice 2451 Polynômes de Chebicheff

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n\arccos x)$ et $g_n(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales. [003929]

Exercice 2452 Équivalent de $\arccos(1-x)$

A l'aide d'un changement de variable judicieux, trouver $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$. [003930]

Exercice 2453 Matexo

Montrer que : $\forall x \in]-1,1[$, $|\arcsin(x)| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$. [003931]

Exercice 2454 ***IT

Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(\arcsin x)$,
2. $x \mapsto \arcsin(\sin x)$,
3. $x \mapsto \cos(\arccos x)$,
4. $x \mapsto \arccos(\cos x)$,
5. $x \mapsto \tan(\arctan x)$,
6. $x \mapsto \arctan(\tan x)$.

Correction ▼ [005084]

Exercice 2455 ***IT

1. Calculer $\arccos x + \arcsin x$ pour x élément de $[-1,1]$.
2. Calculer $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour x réel non nul.
3. Calculer $\cos(\arctan a)$ et $\sin(\arctan a)$ pour a réel donné.
4. Calculer, pour a et b réels tels que $ab \neq 1$, $\arctan a + \arctan b$ en fonction de $\arctan \frac{a+b}{1-ab}$ (on étudiera d'abord $\cos(\arctan a + \arctan b)$ et on distinguera les cas $ab < 1$, $ab > 1$ et $a > 0$, $ab > 1$ et $a < 0$).

Correction ▼ [005085]

Exercice 2456 ***I

Existence et calcul de $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, dt$.

Correction ▼ [005087]

Exercice 2457 **

Simplifier les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
2. $f_2(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.
3. $f_3(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} - \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.
4. $f_4(x) = \arctan\frac{1}{2x^2} - \arctan\frac{x}{x+1} + \arctan\frac{x-1}{x}$.

Correction ▼ [005088]

Exercice 2458 **I

Calculer $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.

Correction ▼ [005089]

Exercice 2459 ***I

Calculer $u_n = \arctan\frac{2}{1^2} + \arctan\frac{2}{2^2} + \ldots + \arctan\frac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$. (Utiliser l'exercice 2455 4))

Correction ▼ [005090]

Exercice 2460 ** Mines de DOUAI 1984

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2-1)\arctan\frac{1}{2x-1},$$

et on appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?
2. Exprimer, sur $\mathscr{D}\setminus\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Correction ▼ [005092]

Exercice 2461 **

Simplifier les expressions suivantes

1. $\sin(2\arcsin x)$,
2. $\cos(2\arccos x)$,
3. $\sin^2\left(\frac{\arccos x}{2}\right)$,
4. $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,
5. $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$,
6. $\operatorname{argch}(2x^2-1)$,
7. $\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{ch} x+1}}\right)$,
8. $\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}$.

Correction ▼ [005095]

Exercice 2462 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\operatorname{ch} x = 2$,
2. $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$,
3. $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

Correction ▼ [005096]

Exercice 2463 ***

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}) = n(n-1)$. (Indication. Poser $x_k = \operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n})$ puis trouver un polynôme dont les x_k sont les racines.)

Correction ▼ [005315]

Exercice 2464 *** I

Donner un développement à la précision $\frac{1}{n^2}$ de la n-ième racine positive x_n de l'équation $\tan x = x$.

Correction ▼ [005852]

Exercice 2465 *** I

Soit z un nombre complexe. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Correction ▼ [005853]

Exercice 2466

Montrer que pour tout $x > 0$, on a

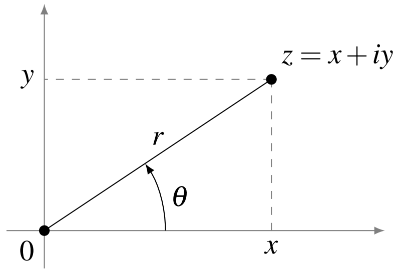
$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

En déduire une expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006973]

Exercice 2467

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe, où $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. On sait que si z est non nul, on peut l'écrire de façon unique sous la forme $z = x+iy = re^{i\theta}$, où $\theta \in]-\pi,\pi]$ et $r = \sqrt{x^2+y^2}$.



1. Montrer que si $x > 0$, alors $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.
2. Montrer que si $\theta \in]-\pi,\pi[$, alors $\theta = 2\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$.
3. En déduire que si z n'est pas réel négatif ou nul, on a l'égalité

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006974]

86 126.02 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Exercice 2468

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\cos x + \operatorname{ch} y, \cos x \operatorname{ch} y).$$

Discuter et déterminer selon $p \in \mathbb{R}$ l'image réciproque de $(4,p)$. On exprimera y à l'aide d'un logarithme. Déterminer numériquement cette image réciproque si $p = -2$. [000757]

Exercice 2469

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\operatorname{ch} x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions; y a t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}^+$?

Indication ▼ Correction ▼ [000758]

Exercice 2470

Calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

Indication ▼ Correction ▼ [000759]

Exercice 2471

Donner un expression plus simple de :

$$y = \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}; \quad y = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}); \quad y = \operatorname{argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

[000760]

Exercice 2472

Calculer pour $(n,a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+bk), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+bk).$$

[000761]

Exercice 2473

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, résoudre le système $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} y = b \end{cases}$. [000762]

Exercice 2474

Montrer que : $\operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y + \operatorname{argth} z = \operatorname{argth} u$ et déterminer u. [000763]

Exercice 2475

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \arctan(\operatorname{sh} x)$.

1. Établir les relations
$$\tan t = \operatorname{sh} x \qquad \frac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x \qquad \sin t = \operatorname{th} x$$
2. Montrer que $x = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000764]

Exercice 2476

Montrer que $\operatorname{ch} nx$ et $\operatorname{sh} nx$ peuvent s'exprimer comme polynômes en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. Calculer $\operatorname{ch} 3x$ et $\operatorname{sh} 3x$ en fonctions de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. En déduire $\operatorname{th} 3x$ en fonction de $\operatorname{th} x$. [000765]

Exercice 2477

Exprimer $\operatorname{ch}^n x$ et $\operatorname{sh}^n x$ au moyen de $\{\operatorname{sh} px, \operatorname{ch} px\ ;\ 1 \leqslant p \leqslant n\}$. Expliciter $\operatorname{ch}^5 x$ et $\operatorname{sh}^5 x$. [000766]

Exercice 2478

Calculer les sommes

$$1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \cdots + \operatorname{ch} nx \quad \text{et} \quad 1 + \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx.$$

[000767]

Exercice 2479

Simplifier

$$\operatorname{argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

[000768]

Exercice 2480

Vérifier les égalités

$$2\operatorname{argth}\tan x=\operatorname{argth}\sin 2x,\qquad \operatorname{argsh}(3x+4x^3)=3\operatorname{argsh}x.$$

[000769]

Exercice 2481

Expliciter au moyen de la fonction logarithme $\operatorname{argch}\frac{1}{x}$ et $\operatorname{argsh}\frac{1}{x}$. [000770]

Exercice 2482

Résoudre

$$x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{x};$$

$$xy=a^2 \text{ et } \ln^2 x+\ln^2 y=\frac{5}{2}\ln^2 a.$$

[000771]

Exercice 2483

Préciser les comportements

de $x\mapsto\dfrac{x^2-e^x}{x-e}$ quand $x\to e$,

de $x\mapsto\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln x}$ quand $x\to+\infty$,

de $x\mapsto\dfrac{a^x-b^x}{x}$ quand $x\to 0$. [000772]

Exercice 2484

Démontrer les inégalités :

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x) \text{ pour } x>0 \quad \text{et} \quad 1+x\leqslant e^x \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Correction ▼ [000773]

Exercice 2485

Déterminer $\lim\limits_{+\infty}(x-\ln(\operatorname{ch}x))$. [000774]

Exercice 2486

Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ $\operatorname{ch}(2x)=1+2\operatorname{sh}^2 x$. En déduire un équivalent de $\operatorname{ch}x-1$ en 0. [000775]

Exercice 2487

Résoudre l'équation $x^y=y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000776]

Exercice 2488

Résoudre l'équation $\tan(3\arcsin x) = 1$. On exprimera les trois solutions au moyen de radicaux. [000777]

Exercice 2489 *IT

Etablir pour ch, sh et th les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

Correction ▼ [005086]

Exercice 2490 *

Etudier $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x) - x$.

Correction ▼ [005091]

Exercice 2491 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{sh}(2+x) + \operatorname{sh}(2+2x) + \ldots + \operatorname{sh}(2+100x) = 0$.

Correction ▼ [005093]

Exercice 2492 **I

1. Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$.
2. En déduire la valeur de $u_n = 2^0 \operatorname{th}(2^0 x) + 2^1 \operatorname{th}(2^1 x) + \ldots + 2^{n-1} \operatorname{th}(2^{n-1} x)$ pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de (u_n).

Correction ▼ [005094]

Exercice 2493

Simplifier l'expression $\dfrac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2}$ et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006975]

Exercice 2494

Soit x un réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(kx) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sh}(kx).$$

Calculer C_n et S_n.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006976]

Exercice 2495

Soit a et b deux réels positifs tels que $a^2 - b^2 = 1$. Résoudre le système

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 2a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2b \end{cases}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006977]

Exercice 2496

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$, $\quad \operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$, $\quad \operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x)$.
2. $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)$, $\quad \operatorname{th}(\operatorname{argch} x)$, $\quad \operatorname{ch}(3\operatorname{argch} x)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [006978]

Exercice 2497

Étudier le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

et simplifier son expression lorsqu'elle a un sens.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006979]

Exercice 2498

Montrer que l'équation $\operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x = 1$ admet une unique solution, puis la déterminer.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006980]

87 126.99 Autre

88 127.01 Théorie

Exercice 2499

Déterminer les fonctions f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{[a,b]}|f|$. [000778]

Exercice 2500

Soient $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ et $I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n \to 0$.
2. Montrer que ceci est encore vrai si f est en escalier.
3. En déduire que le résultat subsiste pour f continue par morceaux.

[000779]

Exercice 2501

Soient $0 < a \leqslant b$. Montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. [000780]

Exercice 2502

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$. [000781]

Exercice 2503

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$.

[000782]

Exercice 2504

Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$. [000783]

Exercice 2505

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que :

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

[000784]

Exercice 2506

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, n'admettant qu'un nombre fini de zéros sur $[0,1]$, et telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 e^{nt} f(t)dt \right| = +\infty.$$

[000785]

Exercice 2507 Irrationnalité de π

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2, n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $P_n = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}$ et ses dérivées successives prennent, en 0 et $\frac{a}{b}$, des valeurs entières.
2. Montrer que :
$$I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)dt \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$
3. Montrer par l'absurde que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

[000786]

Exercice 2508

Soit f continue sur $[0,\pi]$ telle que $\int_0^\pi f(u)\cos(u)du = \int_0^\pi f(u)\sin(u)du = 0$, montrer que f s'annulle au moins deux fois sur $]0,\pi[$. [000787]

Exercice 2509

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall g \in E\left([0,1],\mathbb{R}\right), \int_0^1 fg = 0.$$

Montrer que $f = 0$. [000788]

Exercice 2510

Soit f une fonction C^1 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(a) = 0$. Montrer que :

$$\int_a^b f^2(u)du \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)du.$$

[000789]

Exercice 2511

Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[a,b]$. On suppose $a < 0 < b$ et $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 f^2(t)dt \leqslant -ab.$$

[000790]

Exercice 2512

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ($a<b$), et f continue positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

[000791]

Exercice 2513

Calculer sans utiliser de primitive, pour $a<b$:

$$\int_a^b e^t dt.$$

[000792]

Exercice 2514

Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f^n(u)du$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs quand n décrit $\mathbb{N}$. Montrer que $f=-1$ ou $f=0$ ou $f=1$. [000793]

Exercice 2515

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt.$$

Éventuellement, en donner un DL en $\frac{1}{n}$. [000795]

Exercice 2516

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx.$$

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue ; calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx.$$

[000796]

Exercice 2517

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue par morceaux, continue en 0, trouver une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers telle que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)g_n(t)dt = f(0).$$

[000797]

Exercice 2518

Dire (avec justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est continue.
2. Si f est intégrable sur $[a,b]$, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ pour tout x de $[a,b]$.
3. Soit f une fonction sur $[a,b]$ vérifiant la propriété : pour tout $\varepsilon>0$, il existe g_ε intégrable sur $[a,b]$ telle que $\forall x\in[a,b],\ |f(x)-g_\varepsilon(x)|\leqslant\varepsilon$; alors f est intégrable.

4. Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$.
5. Si $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$.
6. Si f et g sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors la fonction fg est intégrable sur $[a,b]$.
7. Si f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$, alors la fonction fg est continue sur $[a,b]$, et $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt \cdot \int_a^b g(t)\,dt$.
8. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par
$$\begin{cases} f \equiv \lambda_n & \text{sur }]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \text{ pour tout entier } n \geqslant 1 \\ f(0) = \mu \end{cases}$$
où (λ_n) est une suite bornée de nombres réels, et μ un nombre réel. Alors f est intégrable.
9. Soit f bornée sur $[0,1]$, continue sauf au point $1/3$; alors f est intégrable sur $[0,1]$.
10. Il existe $f \geqslant 0$ continue sur $[0,1]$, avec $f(1/2) > 0$, et telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
11. Soit f intégrable sur $[a,b]$. Si $\int_a^b f(t)\,dt > 0$ alors $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$.
12. Si f est croissante sur $[a,b]$, elle est intégrable sur $[a,b]$ et de plus $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante.
13. Si $f \leqslant 0$ est continue sur $[a,b]$, alors $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b]$.
14. Si f est continue sur $[0,1]$, $H(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,1]$, et $\forall x \in [0,1],\ H'(x) = f(x^2)$.

[000798]

Exercice 2519

Soit φ une fonction bornée sur $[a,b]$; comparer les assertions suivantes [1] :

1. φ a une primitive sur $[a,b]$.
2. φ est intégrable sur $[a,b]$.
3. φ est continue sur $[a,b]$.
4. φ est dérivable sur $[a,b]$.

[000799]

Exercice 2520

Soit f une fonction continue et strictement croissante de $[a,b]$ sur $[\alpha,\beta]$. On note g la fonction réciproque de f. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx = b\beta - a\alpha$$

[000800]

Exercice 2521

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose que f est monotone sur $[a,b]$ et que g est positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt + f(b)\int_c^b g(t)\,dt$$
(considérer $\varphi(x) = f(a)\int_a^x g(t)\,dt + f(b)\int_x^b g(t)\,dt$). [000801]

Exercice 2522

Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$, vérifiant :

1. L'une des implications à étudier est très difficile ; on pourra admettre après avoir traité toutes les autres que celle qui reste est fausse.

i) $0 \leqslant f' \leqslant 2$;

ii) f' est décroissante ;

iii) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Trouver le plus grand nombre m et le plus petit nombre M tels qu'on soit sûr d'avoir $m \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant M$. Peut-il y avoir égalité ? [000802]

Exercice 2523

Soit f définie et continue sur $[0,+\infty[$, vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = l$ (étant donné $\varepsilon > 0$, choisir A assez grand pour que sur $[A,+\infty[$ on ait $l-\varepsilon \leqslant f(t) \leqslant l+\varepsilon$; puis encadrer $\frac{1}{x}\int_A^x f(t)\,dt$, pour $x > A$; estimer l'erreur... et faire un dessin !).

Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{1+t^2}}\,dt$. Étudier la branche infinie du graphe de F quand $x \to +\infty$. [000803]

Exercice 2524 Méthode des trapèzes

1. Soit f deux fois dérivable sur $[a,b]$, vérifiant $|f''| \leqslant M$ sur $[a,b]$. Soit
$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - (t-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - A(b-t)(t-a)$$
Soit $x \in]a,b[$; on choisit $A = A(x)$ pour que $\varphi(x) = 0$ (dessiner !). Montrer qu'il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que $c_1 < c_2$ et $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$, puis qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\varphi''(c) = 0$. En déduire une majoration de $|A|$ pour $x \in [a,b]$. On convient de poser $A(a) = A(b) = 0$.
2. On note E l'erreur commise en remplaçant $\int_a^b f(x)\,dx$ par l'aire du trapèze défini par l'axe des x, les droites $x = a$ et $x = b$ et la corde du graphe joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (dessiner !). Montrer que $E = \int_a^b A(x)(b-x)(x-a)\,dx$, et vérifier que l'intégrale a un sens. En déduire que $|E| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12}$ (utiliser 1)).
3. Pour $n \geqslant 1$ on pose $I_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right]$ où $x_p = a + p\frac{b-a}{n}$ pour $p = 1,2,\ldots,n-1$. Montrer que I_n est la somme des aires des trapèzes construits sur les points d'abscisses $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ et les cordes correspondantes du graphe de f (dessiner !). Montrer que
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - In\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$
4. On prend $[a,b] = [0,1]$ et $f(x) = e^{-x^2}$. Calculer $M = \sup_{[0,1]} |f''|$. Déterminer n pour que la méthode des trapèzes avec n intervalles donne un nombre qui approche $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à moins de 10^{-2} près. En déduire un encadrement de cette intégrale.

[000804]

Exercice 2525

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

Correction ▼ Vidéo ■ [002081]

Exercice 2526

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x\ ,\ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ et $\int_0^x h(t)dt$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002082]

Exercice 2527

Calculer l'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ comme limite de sommes de Riemann-Darboux dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sin x$ et $f(x) = \cos x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0,1,\ldots,n$,
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x_k = aq^k$, $k = 0,1,\ldots,n$ (q étant à déterminer),
3. $h(x) = \alpha^x$ sur $[a,b]$, $\alpha > 0$, et $x_k = a + (b-a).\frac{k}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Indication ▼ Correction ▼ [002083]

Exercice 2528

Les fonctions suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?

1. $f(x) = [x]$ sur $[0,2]$
2. $g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right] & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $h : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $k : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad k_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Correction ▼ [002084]

Exercice 2529

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$.

1. On suppose que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$, et que $f(x_0) > 0$ en un point $x_0 \in [a,b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que : «si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle».
2. On suppose que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application : on suppose que f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002085]

Exercice 2530

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, positive ; on pose $m = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = m.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002086]

Exercice 2531

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002087]

Exercice 2532

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Correction ▼ Vidéo ■ [002091]

Exercice 2533

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002092]

Exercice 2534

Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$

1. Quel est l'ensemble de définition de F. F est-elle continue, dérivable sur son ensemble de définition ?
2. Déterminer $\lim_{x\to 1^+} F(x)$ en comparant F à $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt$.

Indication ▼ Correction ▼ [002093]

Exercice 2535

1. Soit f une fonction continue définie sur un intervalle borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$, telle que
$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a) \min_{x\in[a,b]} f(x).$$
Montrer que f est constante.
2. Soient u, v, deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\int_a^b |u(t)v(t)|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |u(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |v(t)|^2\right)^{1/2}.$$
Indication : poser, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitraire, $f_\lambda(t) = |\lambda u(t) + v(t)|^2$ et appliquer la question précédente.

3. Dans quels cas cette inégalité est-elle une égalité ?
4. Soit $C([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Montrer que

$$u \in C([a,b]) \mapsto \left(\int_a^b u(t)^2 \, dt \right)^{1/2}$$

est une norme sur $C([a,b])$.

[002315]

Exercice 2536

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,+\infty[$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt \geqslant (b-a)^2.$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ? (On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

[002316]

Exercice 2537

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. En utilisant la formule de la moyenne, montrer que

$$\forall a \in [0,1[, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^a f(t^n)\,dt = af(0).$$

2. Montrer qu'il existe $M > 0$, tel que

$$\forall a \in [0,1[, \qquad \left| (a-1)f(0) + \int_a^1 f(t^n)\,dt \right| \leqslant 2M(1-a).$$

En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt = f(0).$$

[002317]

Exercice 2538

Soient f et g deux fonctions réelles périodiques de période T continues sur $\mathbb{R}$. On appelle *produit de convolution* de f et g la fonction h notée $f \star g$ et définie par

$$h(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(x-t)\,dt.$$

1. Montrer que h est une fonction périodique de période T.
2. Montrer

$$h(x) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)g(x-t)\,dt, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire que $f \star g = g \star f$.

[002324]

Exercice 2539 Densité des fonctions en escalier

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, $\int_{t=a}^b f(t)g(t)\,dt = 0$. Démontrer que $f = 0$.

[004220]

Exercice 2540 Changements de signe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue non identiquement nulle, telle que : $\forall\, k \in \{0,1,\dots,n-1\},\ \int_{t=a}^{b} t^k f(t)\,dt = 0$.
Démontrer, par récurrence, que f change au moins n fois de signe sur $]a,b[$ (raisonner par l'absurde).

[004221]

Exercice 2541 Formule de la moyenne généralisée

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive.

1. Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$.
2. Si f ne s'annule pas, montrer que $c \in]a,b[$.
3. Application : Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_{t=0}^{x} t f(t)\,dt$.

Correction ▼ [004222]

Exercice 2542 Inégalité de Jensen

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue convexe.
Démontrer que $g\left(\frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} g(f(t))\,dt$. [004223]

Exercice 2543 $\sqrt{1+f^2}$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue positive. On pose $A = \int_{t=0}^{1} f(t)\,dt$.
Montrer que $\sqrt{1+A^2} \leqslant \int_{t=0}^{1} \sqrt{1+f^2(t)}\,dt \leqslant 1+A$.

[004224]

Exercice 2544 Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to 0^+} \int_{t=x}^{2x} \frac{\cos t \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \operatorname{sh} t}\,dt$. [004225]

Exercice 2545 Calcul de limite

Pour $0 < a < b$, déterminez $\lim_{x\to 0^+} \int_{t=ax}^{bx} \frac{1-\cos u}{u^3}\,du$.

Correction ▼ [004226]

Exercice 2546 $\int f + \int f^{-1}$

Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ continue, bijective, strictement croissante.
Calculer $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt + \int_{u=c}^{d} f^{-1}(u)\,du$ (faire un dessin, et commencer par le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$).

[004227]

Exercice 2547 Maximum-minimum

Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n) définies par :

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \min(x,b_n)\,dx,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \max(x,a_n)\,dx.$$

Correction ▼ [004232]

Exercice 2548 Intégrale de $|f|$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{t=a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt\right|$ où $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

Montrer que $I_n \to \int_{t=a}^{b} |f(t)|\, dt$ lorsque $n \to \infty$.

[004234]

Exercice 2549 Usage de symétrie

Soit $I = \int_{t=0}^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t}\, dt$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$, et en déduire la valeur de I.

Correction ▼ [004235]

Exercice 2550 Usage de symétrie

Calculer $I = \int_{t=0}^{\pi} \frac{t}{1+\sin t}\, dt$.

Correction ▼ [004236]

Exercice 2551 Usage de symétrie

Calculer $\int_{t=0}^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\, dt$. On remarquera que $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$. [004237]

Exercice 2552 ****

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a,b]$. Pour n entier naturel non nul donné, on pose $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\, dx\right)^{1/n}$.

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite (commencer par le cas $g = 1$).

Correction ▼ [005444]

Exercice 2553 ***T

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a,b]$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left(\int_a^b f(t)\, dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\, dt\right) \end{array}$.

1. Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.
2. Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m = \mathrm{Inf}\{\varphi(f),\ f \in E\}$. Montrer que cette borne infèrieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f) = m$.

Correction ▼ [005449]

Exercice 2554

En utilisant la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann, montrer les propriétés suivantes :

1. Si f et g sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$, alors $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
2. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
3. Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt$.
4. Une limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005917]

Exercice 2555

Montrer qu'une fonction *monotone* sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005918]

Exercice 2556

Montrer qu'une fonction *continue* sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005919]

Exercice 2557

1. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

2. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$

est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Correction ▼ [005920]

Exercice 2558

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *négligeable* si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n =]a_n, b_n[$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n) \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable.
2. Montrer qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si l'ensemble des points où f n'est pas continue est *négligeable*.

Correction ▼ [005921]

Exercice 2559

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{R}}$ converge simplement vers une fonction f sur $]0,1]$ mais que

$$\int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, dx \quad \neq \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Vérifier que la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f n'est pas *uniforme* sur $]0,1]$.

Correction ▼ [005922]

Exercice 2560

Montrer que, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, on a :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

En déduire les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tan \frac{k}{n} \qquad b) \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} \qquad c) \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \log \left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Correction ▼ [005923]

Exercice 2561

1. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx.$$

2. Calculer (en utilisant 1.) les intégrales suivantes :

$$a) \quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad\qquad b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx.$$

$$\textit{Rappel :} \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Correction ▼ [005924]

89 127.02 Somme de Riemann

Exercice 2562

Soient f et g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ croissantes. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \left(\int_0^x f\right)\left(\int_0^x g\right) \leqslant x\int_0^x fg.$$

Indication : on établira d'abord que, si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, alors :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Remarquer que :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (a_i{-}a_j)(b_i{-}b_j) \geqslant 0.$$

[000794]

Exercice 2563

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}, \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

[000840]

Exercice 2564

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \; ; \; \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} \; ; \; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} \; ; \; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$$

et donner un équivalent de $u_n - \ell$. [000841]

Exercice 2565

Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

[000842]

Exercice 2566

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

[000843]

Exercice 2567

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+p^2}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n}\ln\dfrac{(3n+6p-4)(n+2p)^2}{3n^3}$.

[000844]

Exercice 2568

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n=n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k^2+n^2}$
2. $v_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002100]

Exercice 2569 Sommes de Riemann

1. Trouver $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.
2. Trouver $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)}+\sqrt{2(n-2)}+\cdots+\sqrt{(n-1)1}\right)$.
3. Trouver $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.
4. Trouver $\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}$.
5. Donner un équivalent pour $n\to\infty$ de $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.
6. Soit $A_1A_2\ldots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Chercher $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}A_1A_k$.

Correction ▼ [004228]

Exercice 2570 Calcul de limite

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)$.

[004229]

Exercice 2571 Moyenne géométrique

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right)\to\exp\int_{t=0}^{1}f(t)\,dt$ lorsque $n\to\infty$.
(On pourra utiliser : $\forall\, x\geqslant-\frac{1}{2},\ x-x^2\leqslant\ln x\leqslant x$) [004230]

Exercice 2572

1. Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Trouver $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2+n^2}\right)^n$.

Correction ▼ [004231]

Exercice 2573 Intégrale de $\ln|x-e^{it}|$

Pour $x\in\mathbb{R},\ x\neq\pm1$, on pose $I=\int_{t=0}^{2\pi}\ln|x-e^{it}|\,dt$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer I.

[004233]

Exercice 2574 ***IT

Limites de

1) $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\frac{k\pi}{n}$ 2) $(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k))^{1/n}$ ($a>0$ donné) 3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$ 4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$
5) $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}E(\sqrt{k})$ 6) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$ 7) $\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$ 8) $n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n/k}}{k^2}$

Correction ▼ [005446]

Exercice 2575 ***I

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n}) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n}+o(\frac{1}{n}).$$

Correction ▼ [005447]

90 127.03 Longueur, aire, volume

Exercice 2576

Construire la courbe paramétrée $C\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\cos t}{1+\lambda\cos t}\\ y=\frac{\sin t}{1+\lambda\cos t}\end{array}\right.$ où λ est un paramètre appartenant à $[0,1[$.
Calculer l'aire S limitée par C de deux façons :

— En se ramenant au calcul de $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\lambda\cos t)^2}$.
— En reconnaissant la nature géométrique de C.

Correction ▼ [000805]

Exercice 2577

Représenter la courbe définie par son équation polaire $\rho=a\sin^3\frac{\theta}{3}$. Calculer sa longueur L et les aires A_1 et A_2 limitées par les deux boucles qu'elle forme.

Correction ▼ [000806]

Exercice 2578

On appelle *tore* la figure obtenue par révolution d'un cercle de rayon r autour d'une droite de son plan passant à distance R de son centre (on suppose $r<R$). Calculer l'aire A du tore, et son volume V.

Correction ▼ [000807]

Exercice 2579

On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur une droite en restant dans plan fixe. Montrer que dans un repère bien choisi, la cycloïde admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = R(t-\sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{cases}$ Représenter la cycloïde et calculer : la longueur L d'une arche, l'aire A de la surface S comprise entre cette arche et la droite fixe (Ox), les volumes V_1 et V_2 obtenus par révolution de S autour de Ox et Oy respectivement, les aires A_1 et A_2 obtenues par révolution d'une arche de la cycloïde autour de Ox et Oy respectivement.

Correction ▼ [000808]

Exercice 2580

On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur un cercle de rayon R en restant tangent extérieurement à ce dernier, et dans son plan. On pose $n = R/r$. Montrer que dans un repère que l'on précisera, l'épicycloïde admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= r\big((n+1)\cos t - \cos(n+1)t\big) \\ y &= r\big((n+1)\sin t - \sin(n+1)t\big) \end{cases}$$

Représenter la courbe pour $n = 1,2,3$. En supposant n entier, calculer la longueur L de la courbe et l'aire A limitée par celle-ci. Dans le cas $n = 1$ (*cardioïde*), calculer de plus l'aire S de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe autour de son axe de symétrie, ainsi que le volume V limitée par cette surface.

Correction ▼ [000809]

Exercice 2581

Soit C un cercle fixe de rayon R. Un cercle C' de même rayon roule sans glisser sur C en restant dans un plan (variable) perpendiculaire à celui de C. Un point M lié au cercle C' décrit une courbe Γ. Montrer que suivant un repère convenablement choisi, Γ admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= R(\cos t + \sin^2 t) \\ y &= R\sin t(1-\cos t) \\ z &= R(1-\cos t) \end{cases}$. En déduire la longueur L de Γ. Représenter les projections de Γ sur chacun des trois plans de coordonnées.

Correction ▼ [000810]

Exercice 2582

Calculer $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx$ (on posera $\theta = \arcsin\frac{x}{R}$) et en déduire l'aire d'un disque de rayon R.

Correction ▼ [002098]

Exercice 2583

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ et $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002099]

Exercice 2584 Approximation des rectangles pour une fonction lipchitzienne

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, K-lipchitzienne.

Montrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{K(b-a)^2}{2n}$.

[004241]

Exercice 2585 Approximation des tangentes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note : $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $a_{k+\frac{1}{2}} = \frac{a_k+a_{k+1}}{2}$.

Soit $I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+\frac{1}{2}})$.

1. Donner une interprétation géométrique de I_n.
2. Montrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt - I_n\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$ où $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$.

[004242]

Exercice 2586 Approximation des trapèzes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_{t=a}^{b} \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,dt$.
2. Application : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $I = \int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$, et I_n la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes avec n intervalles. Démontrer que $|I - I_n| \leqslant \frac{\sup|f''|(b-a)^3}{12n^2}$.

[004243]

Exercice 2587 Aire sous une corde

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M' = \|f'\|_\infty$.

1. En majorant f par une fonction affine par morceaux, démontrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt\right| \leqslant M'\frac{(b-a)^2}{4}$.
2. Quand y a-t-il égalité ?

[004245]

Exercice 2588

Calculer l'aire intérieure d'une ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Indications. On pourra calculer seulement la partie de l'ellipse correspondant à $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Puis exprimer y en fonction de x. Enfin calculer une intégrale.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006863]

91 127.04 Intégration à l'aide d'une fonction auxiliaire

Exercice 2589

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^2+5} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} \quad ; \quad \int e^x \sin(e^x)dx \quad ; \quad \int \tan^3 x dx \quad ;$$

$$\int \frac{1}{\tan^3 x}dx \quad ; \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m}dx,\ m \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x}dx \quad ; \quad \int \frac{\mathrm{ch}\, x\, dx}{\mathrm{sh}^5 x}.$$

[000811]

92 127.05 Changement de variables

Exercice 2590

Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.

Résultat : $I = 2 - \pi/2$. [000812]

Exercice 2591

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t)\,dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt$.

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2.
3. Calculer I_2 en fonction de I_1.
4. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1}, et interpréter ce résultat géométriquement.

[000813]

Exercice 2592

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x}) ;$$

$$\int \frac{1}{((x-1)^2-4)^2}dx, \quad (\frac{x-1}{2} = \operatorname{th} u \text{ ou } \coth u) ;$$

$$\int (\arcsin x)^2 dx \quad ; \quad \int x^2\sqrt{1+x^3}dx.$$

[000814]

Exercice 2593

Sans calculer les intégrales, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

[002318]

Exercice 2594

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$
$$\int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\,dt,$$
$$\int_0^\pi t^2 \sin t\,dt,$$
$$\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos\sqrt{1-t}\,dt.$$

[002321]

Exercice 2595

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(2+\cos^2 t)^2},$$
$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 t \cos 3t \sqrt{\cos 2t}\,dt,$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}.$$

[002322]

Exercice 2596

Soit f une fonction continue dans $[0,\pi]$. Montrer, en utilisant un changement de variables, que l'on a

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

[002323]

Exercice 2597

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e t^n \ln^4 t\,dt, \qquad n \neq 1,$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2},$$
$$\int_a^b \sqrt{(t-a)(t-b)}\,dt,$$
$$\int_0^1 2^t\cdot 3^{2t}\cdot 5^{3t}\,dt,$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+2x+5}},$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos t}\,dt,$$
$$\int_0^1 t^7 \arctan t\,dt.$$

[002326]

Exercice 2598

Soit $x>0$ un réel. Calculer les valeurs de

$$I(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^2}dt \qquad \text{et} \qquad J(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{(1+t)^2}dt.$$

Quelles sont leurs limites quand $x \to +\infty$? [002329]

Exercice 2599

Trouver les primitives des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad (4x^2+4x+5)^{-1/2}, \qquad \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}, \qquad \frac{\arctan x}{1+x^2}, \qquad \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}.$$

[002335]

Exercice 2600

Calculer les intégrales suivantes (a, b réels donnés, p et q entiers naturels donnés)

1) $\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{x^2+1}\ (0<a)$ 2) $\int_0^\pi 2\cos(px)\cos(qx)\,dx$ et $\int_0^\pi 2\cos(px)\sin(qx)\,dx$ et $\int_0^\pi 2\sin(px)\sin(qx)\,dx$
3) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$ 4) $\int_{-2}^2 (|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|)\,dx$
5) $\int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$ 6) $\int_{-1}^1 \sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx$
7) $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$ 8) $\int_1^x (\ln t)^n\,dt$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

Correction ▼ [005470]

Exercice 2601

Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

1. $\int (\cos x)^{1234} \sin x\,dx$
2. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}\,dx$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006865]

---

93 127.06 Intégration par parties

Exercice 2602

Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \; n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \operatorname{Arctan} x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

[000815]

Exercice 2603

Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

[000816]

Exercice 2604

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(a-x)(b-x)dx$.
2. En déduire un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$ si $\forall x \in [a,b]\; m \leqslant f''(x) \leqslant M$.

[000817]

Exercice 2605 Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Correction ▼ [000818]

Exercice 2606

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

[000819]

Exercice 2607

Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

[000820]

Exercice 2608

Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e \log(u)^n du.$$

[000821]

Exercice 2609

Pour tous n, p dans $\mathbb{N}$, on définit

$$J_{n,p} = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^p t\, dt.$$

Trouver des relations de récurrence liant $J_{n,p}$ et $J_{n,p-2}$, ainsi que $J_{n,p}$ et $J_{n-2,p}$. En déduire la valeur de $J_{n,p}$. [002336]

Exercice 2610

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x\, dx$
2. $\int x \arctan x\, dx$
3. $\int \ln x\, dx$ puis $\int (\ln x)^2\, dx$
4. $\int \cos x \exp x\, dx$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006864]

---

94 127.07 Polynôme en sin, cos ou en sh, ch

Exercice 2611

Calculer les primitives suivantes :

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x) dx \quad ; \quad \int \cos x \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \cos^6 x dx \quad ;$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx \quad ; \quad \int \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad ;$$

$$\int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^2 x dx \quad ; \quad \int \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}^3 x dx \quad ; \quad \int \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}^3 x dx.$$

[000822]

Exercice 2612

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$x\cos^2 x$$

$$\cos(2x)\cos^2 x$$

[000823]

Exercice 2613

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\displaystyle\int \sin^8 x\cos^3 x dx$ **b)** $\displaystyle\int \cos^4 x dx$ **c)** $\displaystyle\int \cos^{2003} x\sin x dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ **g)** $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{7+\tan x}dx$

Correction ▼ [002090]

Exercice 2614 Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. Expliciter I_n. En déduire $\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n dx$.
2. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$
3. Simplifier $I_n \cdot I_{n+1}$. Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002096]

Exercice 2615 Intégrales de WALLIS

Pour n entier naturel, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$.

1. Calculer W_0 et W_1. Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2} et en déduire W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n.
2. Etudier les variations de la suite (W_n) et en déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$.
3. Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. En déduire $\lim_{n\to+\infty} W_n$, puis un équivalent simple de W_n. En écrivant $\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi} 2$, retrouver directement $\lim_{n\to+\infty} W_n$.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1.3....(2n-1)}{2.4....(2n)}\right)^2 = \frac{1}{\pi}$. (Formule de WALLIS)

[005474]

Exercice 2616

Pour n entier naturel, on pose $In = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_n en fonction de n.
2. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

Correction ▼ [005475]

95 127.08 Fraction rationnelle

Exercice 2617

Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2+2t-1)^2}$.
7. $\dfrac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$.
8. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.
9. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
11. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.
14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$.
15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

Correction ▼ [000824]

Exercice 2618

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.
5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx$.
6. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.
8. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.
9. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.
10. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx$.
11. $\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx$ pour $a \in \mathbb{R}$. Y a-t-il une limite quand $a \to +\infty$?
12. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^4+1}$.

Correction ▼ [000825]

Exercice 2619

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x^4+1)^2} \quad ; \quad \int \frac{xdx}{x^4+x^2+1} \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-2x-2)^2}.$$

[000826]

Exercice 2620

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

$$\frac{2x}{(1-x+x^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

$$\frac{1}{(1+x^3)^3}$$

[000827]

Exercice 2621

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002097]

Exercice 2622 Fractions rationnelles

$\frac{1}{x^3-1}$	$\frac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$
$\frac{1}{(x^3-1)^2}$	$-\frac{2}{9}\ln\lvert x-1\rvert+\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{x}{3(x^3-1)}$
$\frac{1}{x^3(1+x^3)}$	$-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6}\ln\left[\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$
$\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$	$-\frac{3}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}$
$\frac{1}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right]+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan(1+x\sqrt{2})-\arctan(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x^2}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right]+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan(1+x\sqrt{2})-\arctan(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x}{(x^4+1)^2}$	$\frac{\arctan x^2}{4}+\frac{x^2}{4(x^4+1)}$
$\frac{x^2+x+1}{x^3-2x-4}$	$\frac{7}{10}\ln\lvert x-2\rvert+\frac{3}{20}\ln(x^2+2x+2)-\frac{1}{10}\arctan(x+1)$
$\frac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2}$	$\frac{4}{x}+\frac{3x}{2(x^2-1)}+\frac{11}{4}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert$
$\frac{1}{x^{20}-1}$	$\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}\left[\frac{1}{2}\cos k\alpha\ln(x^2-2x\cos k\alpha+1)-\sin k\alpha\arctan\left(\frac{x-\cos k\alpha}{\sin k\alpha}\right)\right]+\frac{1}{20}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert,\quad \alpha=\frac{\pi}{10}$
$\frac{1}{(x-a)^n(x-b)}$	$\frac{1}{(b-a)^n}\ln\left\lvert\frac{x-b}{x-a}\right\rvert+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(b-a)^{n-k}(x-a)^k}$

[004263]

---

96 127.09 Fraction rationnelle en sin, cos ou en sh, ch

Exercice 2623

Calculer les primitives suivantes :

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx\quad;\quad\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx\quad;\quad\int\frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}\quad;\quad\int\frac{\cos x}{1+\sin 2x}dx\quad;$$

$$\int\frac{\tan x-\tan a}{\tan x+\tan a}dx\quad;\quad\int\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}dx.$$

[000828]

Exercice 2624

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{1+\tan x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}$$

[000829]

Exercice 2625

Calculer les primitives suivantes :

$$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx\quad\text{et}\quad\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002089]

Exercice 2626

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002095]

Exercice 2627 Fonctions trigonométriques

$\frac{1}{\sin x \sin 4x}$	$-\frac{1}{4\sin x}+\frac{1}{8}\ln\left\lvert\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right\rvert-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\lvert\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{1+\sqrt{2}\sin x}\right\rvert$
$\frac{\tan x}{1+\tan x}$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\lvert\cos x+\sin x\rvert$
$\cos x\sqrt{\cos 2x}$	$\frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$
$\frac{1}{\sin x+\sin 2x}$	$\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)+\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\frac{2}{3}\ln\lvert 1+2\cos x\rvert$
$\frac{1}{\cos x\cos 2x}$	$\sqrt{2}\,\mathrm{argth}(\sqrt{2}\sin x)-\mathrm{argth}(\sin x)$
$\frac{1}{\sin x\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}$	$-2\sqrt{\frac{1-\sin x}{\sin x}}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{1-\sin x}{2\sin x}}$ (poser $u=1/\sin x$)
$\frac{a\sin x}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-a^2\sin^2 x}}$	$-\arctan\left(\frac{\sqrt{\cos^2 x-a^2\sin^2 x}}{a}\right)$

[004264]

97 127.10 Intégrale abélienne

Exercice 2628

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^4}}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x+2}dx \quad ; \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}dx.$$

[000830]

Exercice 2629

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$$

$$\sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4}$$

[000831]

Exercice 2630 Radicaux

$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$	$\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{5}{2}\ln\left\|2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right\|$
$\frac{4x-3}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}$	$-\sqrt{-4x^2+12x-5}+\frac{3}{2}\arcsin(x-3/2)$
$\frac{1}{2x-x^2+\sqrt{2x-x^2}}$	$\frac{1-\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$
$\frac{1}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$	$\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}-\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$ (poser $x=1+2\cos\varphi$)
$\frac{2+\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+4}}$	$(\sqrt{x+3}+4)(\sqrt{x+4}-2)-4\ln(1+\sqrt{x+4})+\ln(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4})$
$x+\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^2}{4}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$(x+\sqrt{a^2+x^2})^n$	$\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n+1}}{2(n+1)}+a^2\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n-1}}{2(n-1)}$ $(n\neq 1)$
$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$\frac{1}{6}\ln\left[\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}, u=\sqrt[3]{1+1/x^3}$ (poser $v=1/x^3$)

[004265]

98 127.11 Primitives diverses

Exercice 2631

Calculer les primitives suivantes.

1. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$.
2. $\int \cos^5 t\,dt$; $\int \cosh^3 t\,dt$; $\int \cos^4 t\,dt$; $\int \sinh^4 t\,dt$.
3. $\int x^3 e^x\,dx$.
4. $\int \ln x\,dx$; $\int x\ln x\,dx$; $\int \arcsin x\,dx$.
5. $\int \cosh t\sin t\,dt$.
6. $\int \frac{dx}{\sin x}$.
7. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.
8. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$.
9. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$; $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.
10. $\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,dx$ pour $0<x<1$.
11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
12. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.
13. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$ avec $0<x<a$.
14. $\int \frac{\cosh x}{\cosh x+\sinh x}\,dx$.

Correction ▼

[000832]

Exercice 2632

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}x\sqrt{\operatorname{ch}2x}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad ; \quad \int \frac{1+\cos 2x}{1-\tan^2 x}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sin ax + \cos bx}{e^x} dx \quad ; \quad \int \frac{x(2+\cos x)}{\sin^2 x} dx.$$

[000833]

Exercice 2633

Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\mathrm{ch}x \sin(2x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$$

$$(x^2+2x+2)\cos(2x)$$

$$x^2 \cos x \text{ et } x^2 \sin x \text{ en utilisant les complexes}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^3} \text{ et } \frac{1}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$$

[000834]

Exercice 2634

Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2)$. [000835]

Exercice 2635

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2})$.

[000836]

Exercice 2636

Calculer $\lim_{n\to+\infty} (\frac{(2n)!}{n!n^n})^{\frac{1}{n}}$.

[000837]

Exercice 2637

Soient $I = \int_0^\pi x\cos^2 x dx$ et $J = \int_0^\pi x \sin^2 x dx$.

1. Calculer I et $I+J$.
2. En déduire J.

[000838]

Exercice 2638

Soit $a_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

1. Calculer $a_0, \dots, a_4$.
2. Etudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[000839]

Exercice 2639

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\displaystyle\int \arctan x\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

e) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$ **g)** $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp x}}dx$ **j)** $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$ **k)** $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx$ **l)** $\displaystyle\int \cos x \exp x\,dx$

Correction ▼ [002088]

Exercice 2640

Calculer les intégales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **b)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arccos x)^2\,dx$ **e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ **f)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

g) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x\,dx$ **h)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}dx$ **i)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$

Correction ▼ [002094]

Exercice 2641

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
t &\mapsto t^2\exp(t^3),\\
t &\mapsto \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t},\\
t &\mapsto \frac{1}{1-t^2+2\sqrt{1-t^2}},\\
t &\mapsto \frac{\sinh^2 t}{\cosh t},\\
t &\mapsto \frac{\cos t}{\cos 2t},\\
t &\mapsto \frac{1}{1+\mathrm{th}^2 t}.
\end{aligned}$$

[002319]

Exercice 2642

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
t &\mapsto \frac{\sin t}{\sin^2 t-\cos t},\\
t &\mapsto \frac{t^2}{(\cos t+t\sin t)^2},\\
t &\mapsto \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}},\\
t &\mapsto \frac{1}{t^8+t^4+1}.
\end{aligned}$$

[002320]

Exercice 2643

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
t &\mapsto \tan t,\\
t &\mapsto \arg\sinh t,\\
t &\mapsto \frac{\tan^3 t}{\cos^6 t},\\
t &\mapsto \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}},\\
t &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}+\sqrt{t+2}},\\
t &\mapsto t\sqrt[n]{1+t},\\
t &\mapsto \cosh^3 t,\\
t &\mapsto \frac{t^3}{(a^2-t^2)^{3/2}},\\
t &\mapsto \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{t}}}{\sqrt{t}},\\
t &\mapsto \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}},\\
t &\mapsto \frac{1}{t^2}\sqrt[4]{\frac{t+1}{t-1}}.
\end{aligned}$$

[002325]

Exercice 2644

Fonction Gamma - Pour tout $x>0$, on pose

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

(on admettra que l'intégrale converge). Montrer que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Calculer la valeur de $\Gamma(1)$. En déduire celle de $\Gamma(n)$, pour tout entier $n>0$.

Soit $a>0$ un réel, et $n>0$ un entier. Montrer que

$$\int \frac{dt}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2}\theta d\theta \qquad \text{où} \qquad \theta=\arctan\frac{x}{a}.$$

En déduire la primitive de $\dfrac{x+4}{(x^2+2x+2)^3}$.

Soient x et y deux réels vérifiant $1>y>x>0$. Calculer

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\int_x^y \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Soit f une fonction continue et positive sur $[0,+\infty[$. On pose pour tout $x>0$ et tout entier $n>0$

$$u_n(x)=\left[\int_0^x f(t)^n\, dt\right]^{1/n}$$

et

$$M(x)=\sup_{t\in[0,x]}|f(t)|.$$

1. Montrer que $u_n(x)\leqslant M(x)x^{1/n}$.

2. En utilisant la continuité de f, montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $u_n(x) \geqslant \delta^{1/n}[M(x) - \varepsilon]$.
3. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = M(x).$$

[002330]

Exercice 2645 Diverses primitives

$x^k \ln x$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x - \frac{1}{k+1}\right)$
$\ln(1+x^2)$	$x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$
$\frac{x^2+a}{x^2+1}\arctan x$	$\frac{1}{2}\big((2x+(a-1)\arctan x)\arctan x - \ln(1+x^2)\big)$
$\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{1/x}$	$xe^{1/x}$
$\frac{x}{\cos^2 x}$	$x\tan x + \ln\lvert\cos x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$	$2\arctan\sqrt{e^x-1}$
$\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$	$(x+2)\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} - \ln\big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\big)$
$\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$	$x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x}$
$e^{\arcsin x}$	$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\arcsin x}$
$x(\cos^2 x)e^{-x}$	$\frac{e^{-x}}{50}\big((3-5x)\cos 2x + (4+10x)\sin 2x - 25(x+1)\big)$
$(x^2+x+1)e^{2x}\cos x$	$(\frac{2x^2}{5}+\frac{4x}{25}+\frac{39}{125})e^{2x}\cos x + (\frac{x^2}{5}-\frac{3x}{25}+\frac{27}{125})e^{2x}\sin x$

[004266]

Exercice 2646 Intégrales définies

$\int_{t=0}^{\pi/2} \cos^4 t\,dt = \frac{3\pi}{16}$

$\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t\cos^3 t\,dt = \frac{4}{15}$

$\int_{t=0}^{\pi/2} t^2\cos t\,dt = \frac{\pi^2}{4} - 2$

$\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} t^2\sin t\cos^2 t\,dt = 0$

$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \frac{\pi}{4}$

$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin t} = 1$

$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\sin t+\cos t}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$

$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{\sqrt{1-a\sin t}}\,dt = \frac{4(2-(a+2)\sqrt{1-a})}{3a^2}$

$\int_{t=0}^{1} t\ln t\,dt = -\frac{1}{4}$

$\int_{t=0}^{1} \arcsin t\,dt = \frac{\pi}{2} - 1$

$\int_{t=0}^{3} \frac{2t}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

$\int_{t=0}^{1} \frac{t^2\arctan t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \ln\sqrt{2}$

$\int_{t=0}^{\ln 2} \sqrt{e^t-1}\,dt = 2 - \frac{\pi}{2}$

$\int_{t=4}^{9} \frac{dt}{\sqrt{t}-1} = 2 + 2\ln 2$

$\int_{t=0}^{1} \frac{te^t}{\sqrt{e^t+1}}\,dt = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{e+1} + 4\ln\left[\frac{\sqrt{e+1}+1}{\sqrt{2}+1}\right] - 2$

$\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(1-a^2t^2)}{t^2}\,dt = a\ln\left|\frac{1-a}{1+a}\right| - \ln(1-a^2)$

$\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{2+\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{6}(3 - \frac{4}{\sqrt{3}})$

$\int_{t=-1}^{1} \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+1}} = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

$\int_{t=-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\,dt = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

[004267]

Exercice 2647 ***

Etude complète de la fonction $f(x)=\frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt$.

Correction ▼ [005450]

Exercice 2648 ***

Pour x réel, on pose $f(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Montrer que f est impaire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'+2xy=1$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} 2xf(x)=1$.
4. Soit $g(x)=\frac{e^{x^2}}{2x}f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et que g admet sur $]0,+\infty[$ un unique zéro noté x_0 vérifiant de plus $0<x_0<1$.
5. Dresser le tableau de variations de f.

Correction ▼ [005451]

Exercice 2649 ****

Soit $f(t)=\frac{t^2}{e^t-1}$ si $t\neq 0$ et 0 si $t=0$.

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que F a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$ puis que $\ell = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.

Correction ▼ [005465]

Exercice 2650

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1) $\frac{1}{x^3+1}$ 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$ 3) $\frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}$ 4) $\frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}$ 5) $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$
6) $\frac{x^2+x}{x^6+1}$ 7) $\frac{1}{x^4+1}$ 8) $\frac{1}{(x^4+1)^2}$ 9) $\frac{1}{x^8+x^4+1}$ 10) $\frac{x}{(x^4+1)^3}$
11) $\frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}$

Correction ▼ [005466]

Exercice 2651

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1) $\frac{1}{\cos x}$ et $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ 2) $\frac{1}{\sin x}$ et $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ 3) $\frac{1}{\tan x}$ et $\frac{1}{\operatorname{th} x}$ 4) $\frac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}$ 5) $\frac{1}{2+\sin^2 x}$
6) $\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$ 7) $\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}$ 8) $\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}$ 9) $\frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}$ 10) $\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}$
11) $\frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}$ 12) $\frac{\sin x}{\cos(3x)}$ 13) $\frac{1}{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}$ 14) $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x}$ 15) $\sqrt{\operatorname{ch} x-1}$
16) $\frac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{ch} x}$ 17) $\frac{1}{\operatorname{sh}^5 x}$ 18) $\frac{1}{1-\operatorname{ch} x}$

Correction ▼ [005467]

Exercice 2652

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1) $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ et $\sqrt{x^2+2x+5}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ 3) $\frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ 5) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
6) $\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$ 7) $\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$ 8) $\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$ 9) $\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}$ et $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
10) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

Correction ▼ [005468]

Exercice 2653

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1) $\frac{1}{x\ln x}$	2) $\arcsin x$	3) $\arctan x$	4) $\arccos x$	5) $\operatorname{argsh} x$
6) $\operatorname{argch} x$	7) $\operatorname{argth} x$	8) $\ln(1+x^2)$	9) $e^{\arccos x}$	10) $\cos x \ln(1+\cos x)$
11) $\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$	12) $\frac{xe^x}{(x+1)^2}$	13) $(\frac{x}{e})^x \ln x$	14) $x^n \ln x$ $(n\in\mathbb{N})$	15) $e^{ax}\cos(\alpha x)$ $((a,\alpha)\in(\mathbb{R}^*)^2)$
16) $\sin(\ln x)$ et $\cos(\ln x)$	17) $\frac{\sqrt{x^n+1}}{x}$	18) $x^2e^x\sin x$		

Correction ▼ [005469]

Exercice 2654

Condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que les primitives de $\frac{(x-a)(x-b)}{x-c)^2(x-d)^2}$ soient rationnelles (a, b, c et d réels donnés).

Correction ▼ [005471]

Exercice 2655

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx$
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$
3. $\int \sin^8 x\cos^3 x\,dx$
4. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$
5. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}\,dx$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006866]

Exercice 2656

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ (intégration par parties)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ (à l'aide d'un changement de variable simple)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ (changement de variable $x=\tan t$)
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$ (décomposition en éléments simples)
5. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$ (changement de variable $u=\frac{1}{x}$)

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006867]

99 127.12 Intégrale impropre

Exercice 2657

Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$$

$$\int_1^{\infty} x^x dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}dx.$$

Nature et calcul des intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}dx.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(bile)}d(bile).$$

Correction ▼ [001280]

Exercice 2658

1. Montrer que $\forall x > -1 \ \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0,n] \ (1-\frac{x}{n})^n \leqslant e^{-x} \leqslant (1+\frac{x}{n})^{-n}$.
3. En déduire que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}dt.$$
Rappel (intégrales de Wallis) : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
4. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n}du$ existe et vaut I_{2n-2}.
5. Montrer que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[001281]

Exercice 2659

Étude de :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}dt.$$

Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$. [001282]

Exercice 2660

Soit f une application C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f+f'' \geqslant 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)+f(x+\pi) \geqslant 0.$$

[001283]

Exercice 2661

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et F de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors F a aussi la limite ℓ en $+\infty$.
2. Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ mais où F tend vers 0.

3. Montrer que si $f \to \infty$ quand $x \to \infty$, alors $F \to \infty$ quand $x \to \infty$.

[001284]

Exercice 2662

Étudier la fonction :

$$h : x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$

Domaine de définition, continuité et dérivabilité, variations, limites aux bornes de ce domaine, et $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x}, \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}$, éventuellement convexité.

[001285]

Exercice 2663

Donner un exemple d'une fonction continue positive telle que :

$$\int_0^\infty f(u)du$$

existe mais telle qu'on n'ait pas :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Donner un exemple de fonction continue positive telle que :

$$\int_0^\infty f(u)du$$

existe mais telle que :

$$\int_0^\infty f^2(u)du$$

n'existe pas.

[001286]

Exercice 2664

Soit f une fonction positive décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\int_0^\infty f$ existe. Montrer que :

$$f(x) = o(\frac{1}{x})$$

quand $x \to \infty$.

[001287]

Exercice 2665

Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ possédant une limite ℓ en $+\infty$, telle que $\int_0^\infty f$ existe ; montrer que $\ell = 0$.
Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f$ existe. Montrer que :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

[001288]

Exercice 2666

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f^2$ existe. Montrer que quand $x \to \infty$:

$$\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x}).$$

[001289]

Exercice 2667

Étudier la nature de

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

selon $\alpha \in \mathbb{R}$. [001290]

Exercice 2668

Convergence et calcul de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)dt}{t^2}, \qquad \int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt, \qquad \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^n} dt.$$

Correction ▼ [001291]

Exercice 2669

Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que

$$\int_1^\infty f(t)dt$$

converge. Montrer que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_1^x t f(t)dt = 0.$$

[001292]

Exercice 2670

Soit $f \in C([1,\infty[,\mathbb{R}^+)$ décroissante, on pose :

$$x_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)dt.$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ a une limite quand $n \to \infty$ si et seulement si $\int_1^\infty f$ converge, et que dans ce cas :
$$\int_{n+1}^\infty f \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^m f(k) \leqslant \int_n^\infty f.$$
3. Montrer que si $\int_1^\infty f$ diverge on a : $S_n \backsim \int_1^n f$ quand $n \to \infty$.

[001293]

Exercice 2671

Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ continue et monotone, telle que $\int_0^1 f$ existe. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

[001294]

Exercice 2672

Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors

$$\int_0^\infty \exp(if(t))dt$$

n'existe pas. [001295]

Exercice 2673

Nature de :

$$\int_0^\infty \sin t \sin\frac{1}{t}dt,\ \int_0^\infty \frac{e^{\sin t}}{t}dt,\ \int_2^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}dt,\ \int_0^1 \cos\ln t dt, \int_0^\infty \cos\exp t dt.$$

[001296]

Exercice 2674

Nature et calcul de :

$$\int_0^\infty \ln t \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt, a>0\ ;\ \int_0^\infty \exp\left(-t^{\frac{1}{n}}\right)dt, n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \int_0^1 \left(\frac{1}{t}-E(\frac{1}{t})\right)dt.$$

[001297]

Exercice 2675

Convergence et calcul de :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+\cosh^2 x},\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sinh x},\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\cosh t}.$$

[001298]

Exercice 2676

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f\geqslant 0, g\geqslant 0, g=o(f)$ en $+\infty$, et $\int_0^\infty f$ n'existe pas. Montrer alors :

$$\int_0^x g(u)du = o\left(\int_0^x f(u)du\right)$$

quand $x\to\infty$. [001299]

Exercice 2677

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue, tendant vers ℓ en $+\infty$, montrer alors :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{f(t)n}{n^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\ell.$$

[001300]

Exercice 2678

Calculer :

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^{3a}\frac{\tan t}{t^2}dt\ ,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n-x^{2n}}{1-x}dx.$$

[001301]

Exercice 2679

Soit $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^\infty f$ existe, montrer que $F(x)=\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos txdt$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
[001302]

Exercice 2680

Sans les calculer, dire si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}},$$
$$\int_0^{\pi/2}\tan t\ dt,$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\arcsin t}\ln(1-t)}.$$

[002331]

Exercice 2681

Sans les calculer, dire si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes :

$$\int_0^\infty \frac{t^3-5t^2+1}{2t^5-2t^3+t^2+1}\,dt,$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\ln\frac{t-1}{t+1}\,dt,$$
$$\int_0^\infty \frac{dt}{t\operatorname{arg\,cosh} t},$$
$$\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,dt,$$

[002332]

Exercice 2682

Soit $n \geqslant 0$ un entier. Montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^\infty t^n \exp(-t^2)dt$$

est convergente. La calculer en fonction de n, sachant que $I_0 = \sqrt{\pi}/2$.

[002333]

Exercice 2683

On définit

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

1. Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que si $k \geqslant 1$, alors
$$\frac{2}{(2k+1)\pi} < u_{2k} < \frac{1}{k\pi}.$$
Trouver une inégalité similaire pour u_{2k+1}, puis pour $u_{2k}+u_{2k+1}$.
3. Montrer que la suite de terme général $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$ admet une limite finie. En déduire que
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$
est convergente.

[002334]

Exercice 2684

Soit φ la fonction définie sur $[0,1[$ par

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

Montrer que $\varphi(x)$ a une limite quand x tend vers 1 et la calculer. (Indication : comparer à $\int_x^{x^2} 1/(t\ln t)\,dt$).
[002337]

Exercice 2685

Dire si les intégrales suivantes sont convergentes (en discutant éventuellement suivant la valeur des paramètres) :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt[3]{1-t}},\quad \int_0^{\pi/2} \tan t\,dt,\quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta},\quad \int_0^1 \cos(\ln t)\,dt,\quad \int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,dt,$$

$$\int_0^\infty \frac{t^2+t-1}{\sqrt{t}\,(t^3-2t^2+3t-6)}\,dt,\quad \int_0^\infty t^\alpha\,[1-e^{-1/\sqrt{t}}]\,dt,\quad \int_0^\infty \frac{\ln t-\ln(1-e^{-t})}{t}e^{-\alpha t}\,dt.$$

[002338]

Exercice 2686

Montrer la convergence des intégrales suivantes puis les calculer :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos\alpha\cos t+1},\quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}},\quad \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}},$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{e^{2t}+e^t-6},\quad \int_a^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+a^2}},\ (a>0),\quad \int_1^{+\infty} \frac{t^3-t^2-1}{t^6+2t^4+t^2}\,dt.$$

[002339]

Exercice 2687 Étude de convergence

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$ (cv)
$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,dt$ (dv)
$\int_0^1 \frac{t^\alpha-1}{\ln t}\,dt$ (cv ssi $\alpha>-1$)
$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln\ln t)}$ (dv)
$\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)dt$ (dv)
$\int_0^{+\infty} \left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$ (cv)
$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,dt$ (cv ssi $\alpha>1$)
$\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$ (dv)
$\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha-t^\alpha}{t^\beta}\,dt$ (cv ssi $0<\beta-\alpha<1$ ou $\alpha=0$)
$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ (cv)
$\int_0^1 \frac{dt}{\arccos t}$ (cv)
$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha}\,dt$ (dv)
$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t)\,dt}{(t^2-1)^\alpha}$ (cv ssi $0<\alpha<1$)
$\int_0^1 \frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha}\,dt$ (cv ssi $\alpha<\beta+1$)
$\int_0^{+\infty} t^\alpha\left(1-e^{-1}\sqrt{t}\right)dt$ (cv ssi $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$)
$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1}tt^{-k}\,dt$ (cv)

[004268]

Exercice 2688 Fractions rationnelles

$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+2} = \pi$
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2-2t\cos\alpha+1)} = \frac{\pi}{2|\sin\alpha|}$
$\int_0^{+\infty} \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{3\pi}{4}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)(t^2+a^2)} = \frac{\pi}{1+|a|}$
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
$\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^6(1+t^{10})} = \frac{4-\pi}{20}$

[004269]

Exercice 2689 Fonctions trigonométriques

$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$
$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2dt}{2+\sin t+\cos t} = 2\pi\sqrt{2}$
$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,dt = \int_0 +\infty \frac{2t^2\,dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{3\tan t+2} = \frac{\pi+3\ln(3/2)}{13}$
$\int_0^{\pi} \frac{dt}{(a\sin^2 t+b\cos^2 t)^2} = \frac{\pi(a+b)}{2\sqrt{ab}^3}$
$\int_0^{\pi/4} \cos t\ln(\tan t)\,dt = -\ln(1+\sqrt{2})$

[004270]

Exercice 2690 Radicaux

$\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = \frac{\pi}{2}$
$\int_1^{10} \frac{dt}{\sqrt[3]{t-2}} = \frac{9}{2}$
$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \pi$
$\int_0^1 \frac{t^5\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{8}{15}$
$\int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
$\int_0^1 \frac{dt}{(4-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$
$\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$
$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt[3]{t^2-t^3}} = \frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$
$\int_0^1 \arctan\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}$
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^{10}+t^5+1}} = \frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

[004271]

Exercice 2691 Exponentielles

$\int_2^{+\infty} \frac{e^t\,dt}{(e^{2t}-5e^t+6)(e^t-1)} = \ln\left(\frac{e^2-2}{\sqrt{e^4-4e^2+3}}\right)$
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^4 t+\operatorname{sh}^4 t} = \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$

[004272]

Exercice 2692 Divers

$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,dt = 12$
$\int_0^1 \arcsin t\,dt = \frac{\pi}{2}-1$
$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = -2\ln 2$
$\int_0^{+\infty} \frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}\,dt = -\frac{1}{32}$
$\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = -\frac{\pi\ln 2}{2}$
$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt = 4\ln 2-4$ $(u=\sqrt{1-t})$

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0 \ (u = 1/t)$
$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\,dt = \ln 2 - \frac{\pi}{2} \left(u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$
$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1)$
$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt = a\pi$
$\int_0^{+\infty} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \frac{t\,dt}{(a^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{2|a|(a^2+1)}$

[004273]

Exercice 2693 Centrale PC 1999

Soit (a_k) une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^n a_k = 0$. Étudier la convergence de $\int_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k \cos(a_k t)\frac{dt}{t}$. [004274]

Exercice 2694 Chimie P 91

Existence et calcul de $f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{1-x\cos t}$.

Correction ▼ [004275]

Exercice 2695 Chimie P 1996

Convergence et calcul de $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t\,dt}{\operatorname{sh} t}$ (on pourra décomposer l'intégrande en somme d'une série de fonctions).

Correction ▼ [004276]

Exercice 2696 Calcul par récurrence

On pose $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos(2nt)\ln(\sin t)\,dt$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Calculer $2nI_n - (2n+2)I_{n+1}$ et en déduire I_n en fonction de n.

Correction ▼ [004277]

Exercice 2697 Calcul par récurrence

Soit $\alpha \in]0,\pi[$ et $I_n = \int_{t=0}^{\pi} \frac{\cos nt\,dt}{1-\sin\alpha\cos t}$.
Calculer $I_n + I_{n+2}$ en fonction de I_{n+1} puis exprimer I_n en fonction de α et n.

Correction ▼ [004278]

Exercice 2698 Calcul par récurrence

Calculer par récurrence : $I_n = \int_{t=0}^{1} \frac{t^n\,dt}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}$.

Correction ▼ [004279]

Exercice 2699 Mines-Ponts 1999

Calculer $I_n = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$.

Correction ▼ [004280]

Exercice 2700 Calcul de $\int_0^\infty \sin t/t\,dt$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$.
2. Montrer que $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\,dt$ est comprise entre $A_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt$ et $B_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \operatorname{cotan}^2 t \sin^2 nt\,dt$.
3. Calculer $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ et $A_n - B_n$. En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction de n.
4. Lorsque $n \to \infty$ montrer que $\frac{I_n}{n} \to J = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ et donner la valeur de cette dernière intégrale.

Correction ▼ [004281]

Exercice 2701 $\int_0^\infty$ périodique$/t\,dt$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, périodique de période $T>0$. On note $m=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)\,dt$. Montrer que $\int_{t=T}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ converge si et seulement si $m=0$. [004282]

Exercice 2702 $\int_0^\infty f(t)/t\,dt$

Soit f une application continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si l'intégrale $\int_{t=1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_{t=1}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$. On pourra introduire la fonction $F(x)=\int_{t=1}^{x} f(t)\,dt$. [004283]

Exercice 2703 Polynôme$\times e^{-t}$

Soit $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}^{n+1}, P\mapsto(a_0,\dots,a_n)$ avec $a_k=\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}t^kP(t)\,dt$.

1. Justifier l'existence de φ.
2. Montrer que φ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

[004284]

Exercice 2704 Constante d'Euler

Calculer $\int_{t=1}^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^2}\,dt$ en fonction de la constante d'Euler.

Correction ▼ [004285]

Exercice 2705 Constante d'Euler

Soit γ la constante d'Euler. Montrer que ...

1. $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt=-\gamma$.
2. $\int_{t=0}^{1}\frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,dt=\gamma$.
3. $\int_{t=0}^{1}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\ln(1-t)}\right)dt=\gamma$.

Correction ▼ [004286]

Exercice 2706 Sommes de Riemann

Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}^+$ continue croissante. On pose $S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

1. Si $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$ converge, montrer que $S_n\to\int_{t=a}^{b} f(t)dt$ lorsque $n\to\infty$.
2. Si $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$ diverge, montrer que $S_n\to+\infty$ lorsque $n\to\infty$.

[004287]

Exercice 2707 Sommes de Riemann

Calculer $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$.

Correction ▼ [004288]

Exercice 2708 Comparaison série-intégrale

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue décroissante telle que $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge et encadrer le reste : $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f.
2. Application : Pour $\alpha>1$, donner un équivalent pour $n\to\infty$ de $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

[004289]

Exercice 2709 Comparaison série-intégrale

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$. On pose, sous réserve de convergence, $g(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nt)$ pour $t>0$.

1. Si f est monotone et intégrable, montrer que $g(t)$ existe pour tout $t>0$ et que l'on a $tg(t) \to \int_{u=0}^{+\infty} f(u)\,du$ lorsque $t \to 0^+$.
2. Même question en supposant f de classe $\mathscr{C}^1$ et f, f' intégrables.
3. On suppose maintenant f de classe $\mathscr{C}^2$ et f, f', f'' intégrables.
   Montrer que $g(t) = \frac{1}{t}\int_{u=0}^{+\infty} f(u)\,du + \frac{f(0)}{2} + O_{t\to 0^+}(t)$.

Correction ▼ [004290]

Exercice 2710 Valeur moyenne d'une variable aléatoire à densité

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge. On pose $F(x) = \int_{t=x}^{+\infty} f(t)\,dt$.

1. Justifier l'existence de $F(x)$, et montrer que $F(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \to +\infty$.
2. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} F(t)\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} tf(t)dt$.

[004291]

Exercice 2711 $\int_0^\infty f(t)/t^2\,dt$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $\exists\ \alpha > 0$ tel que $\forall\ x \geqslant 0,\ f'(x) \geqslant \alpha$. Montrer que $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ diverge.

[004292]

Exercice 2712 $x(f(x) - f(x+1))$

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle que $\int_{t=1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
Montrer que $xf(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, puis que $\int_{t=1}^{+\infty} t(f(t) - f(t+1))\,dt$ converge, et calculer la valeur de cette intégrale.

Correction ▼ [004293]

Exercice 2713 $f(|t-1/t|)$

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{u=0}^{+\infty} f\left(\left|u - \frac{1}{u}\right|\right)\,du$.

[004294]

Exercice 2714 $(f(ax) - f(x))/x$

1. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\begin{cases} f(x) \to \ell \\ f(x) \text{ si } x \to 0^+ \to L \text{ si } x \to +\infty. \end{cases}$
   Pour $a > 0$, établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt$.
2. Application : Calculer $\int_{t=0}^{1} \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

Correction ▼ [004295]

Exercice 2715 $f(t+a) - f(t)$, Ensi PC 1999

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} (f(t+a) - f(t))\,dt$ converge.
2. Calculer $\int_{t=0}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\,dt$.

Correction ▼ [004296]

Exercice 2716 Valeur moyenne

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\int_{t=-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ converge. On pose $F(x)=\frac{1}{2}\int_{t=x-1}^{x+1}f(t)\,dt$.
Montrer que $\int_{t=-\infty}^{+\infty}F(t)\,dt=\int_{t=-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$.
Démontrer le même résultat en supposant seulement la convergence de $\int_{t=-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$.

Correction ▼ [004297]

Exercice 2717 $(\int tf(t)\,dt)/x$

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty}f(t)\,dt$ converge. Montrer que $\frac{1}{x}\int_{t=0}^{x}tf(t)\,dt\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

Correction ▼ [004298]

Exercice 2718 f uniformément continue

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty}f(t)\,dt$ converge.

1. Montrer que $f(t)\to 0$ lorsque $t\to+\infty$(raisonner par l'absurde).
2. Si f est positive, montrer que $\int_{t=0}^{+\infty}f^2(t)\,dt$ converge.
3. Donner un contre-exemple si f n'est pas de signe constant.

[004299]

Exercice 2719 f décroissante $\Rightarrow xf(x)\to 0$

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty}f(t)\,dt$ converge.

1. Si $f(x)\to L$ lorsque $x\to+\infty$, combien vaut L ?
2. Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$.
3. Si f est décroissante, montrer que $xf(x)\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

[004300]

Exercice 2720 $\int e^{-t}/t,dt$

On pose $f(x)=\int_{t=x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Chercher $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de $f(x)$ pour $x\to+\infty$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ pour $x\to 0^+$.

Correction ▼ [004301]

Exercice 2721 Intégrale de Gauss

1. Montrer que pour $0\leqslant x\leqslant\sqrt{n}$ on a : $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\leqslant e^{-x^2}$ et pour x quelconque : $e^{-x^2}\leqslant\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.
2. Calculer les intégrales $I_n=\int_{t=0}^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$ et $J_n=\int_{t=0}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt$ en fonction des intégrales : $K_p=\int_{t=0}^{\pi/2}\cos^p t\,dt$.
3. On admet que $K_p\sim\sqrt{\frac{\pi}{2p}}$ quand $p\to\infty$. Calculer $\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004302]

Exercice 2722 Intégrales de Gauss

On admet que $\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer les intégrales : $I_n=\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}t^{2n}\,dt$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Correction ▼ [004303]

Exercice 2723 Mines-Ponts MP 2005

Nature et calcul de $\int_{x=0}^{+\infty} \exp\left(-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right) dx$?

Correction ▼ [004304]

Exercice 2724

Existence de $\int_{x=0}^{+\infty} \sin(x^4+x^2+x)\, dx$.

Correction ▼ [004305]

Exercice 2725 $\cos(P(t))$

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} \cos(P(t))\, dt$ converge.

Correction ▼ [004306]

Exercice 2726 Ensi PC 1999

Soient $I = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ et $J = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^n\, du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Prouver que ces intégrales convergent, qu'elles sont égales et les calculer.

Correction ▼ [004307]

Exercice 2727 f et f'' de carrés sommables

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f^2(t)\, dt$ et $\int_{t=0}^{+\infty} f''^2(t)\, dt$ convergent. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} f'^2(t)\, dt$ converge. [004308]

Exercice 2728 $f' \leqslant 1$, Ulm 1999

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathscr{C}^1$, intégrable.

1. On suppose $f' \leqslant 1$. Montrer que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Est-ce encore vrai si on suppose seulement $f' \leqslant 1+g$ avec g intégrable ?

[004309]

Exercice 2729 Intégrales emboitées

Établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{x=0}^{+\infty} \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt\, dx$.

Correction ▼ [004310]

Exercice 2730 Centrale MP 2001

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que ff'' et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, que f est uniformément continue et qu'elle tend vers zéro en $+\infty$.

Correction ▼ [004311]

Exercice 2731 X MP* 2000

Donnez un équivalent pour $x \to +\infty$ de $\int_{t=0}^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$.

Correction ▼ [004312]

Exercice 2732

Etudier l'existence des intégrales suivantes

1) (**) $\int_0^{+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\,dx$ 2) (**) $\int_1^{+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)\,dx$ 3) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x+e^x}\,dx$

4) (***) $\int_0^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}\,dx$ 5) (**) $\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x^2-x}}\,dx$ 6) (**) $\int_0^{+\infty}x^{-\ln x}\,dx$

7) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}\,dx$ 8) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ 9) (**) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}\,dx$

10) (**) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 11) (**) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}\,dx$ 12) (***) $\int_0^1\frac{1}{\arccos(1-x)}\,dx.$

Correction ▼ [005713]

Exercice 2733

Etudier l'existence des intégrales suivantes.

1) (***) I $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^a\ln^b x}\,dx$ (Intégrales de BERTRAND) 2) (**) $\int_0^{\pi/2}(\tan x)^a\,dx$

3) (**) $\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right)dx$ 4) (***) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x^b)}\,dx$

Correction ▼ [005714]

Exercice 2734

(Hors programme) Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$
2. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a}\,dx$
3. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{ix^2}\,dx$
4. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^3\sin(x^8)\,dx$
5. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(e^x)\,dx$
6. (****) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3\sin^2 x}\,dx$

Correction ▼ [005715]

Exercice 2735

Existence et calcul de :

1) (** I) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ 2) (très long) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}\,dx$
3) (** I) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$ 4) (***) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\,dx$

5)(***) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ 6) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx$

7) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{5\operatorname{ch}x+3\operatorname{sh}x+4}\,dx$ 8) (***) $\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$

9) (** I) $\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$ 10) (I très long) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^a}\,dx$ (calcul pour $a\in\left\{\frac{3}{2},2,3\right\}$)

11) (***) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$ 12) (*** I) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ $(0<a<b)$

Correction ▼ [005716]

Exercice 2736

Deux calculs de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx$.
1) (I)** En utilisant $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx$, calculer I (et J).
2) (* I)** Calculer $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ (commencer par P_n^2) et en déduire I.

Correction ▼ [005717]

Exercice 2737 ** I

En utilisant un développement de $\frac{1}{1-t}$, calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt$.

Correction ▼ [005718]

Exercice 2738 *** I

Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$ (en écrivant $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt$).

Correction ▼ [005719]

Exercice 2739

1) (I)** Trouver un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.
2) (***) Montrer que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx \underset{a\to 0}{\sim} -\ln a$.
3) (*) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\, dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}$.

Correction ▼ [005720]

Exercice 2740 ***

Etude complète de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt$.

Correction ▼ [005721]

Exercice 2741 ***

(Hors programme) Convergence et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx$.

Correction ▼ [005722]

Exercice 2742 ***

Soit f définie, continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, intégrable sur $[1,+\infty[$.

1. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. Existence et calcul de $\int_1^{+\infty} x(f(x+1) - f(x))dx$.

Correction ▼ [005723]

Exercice 2743 ***

1. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge en $+\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$ converge en $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. (a) On suppose que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' admettent des limites réelles quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f' tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que si les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_0^{+\infty} f''(x)\, dx$ convergent alors f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005724]

Exercice 2744 ***

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\,dx\right)$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005725]

Exercice 2745

1. *Le but de cette question est de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ n'est pas absolument convergente.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$
Montrer que pour $n \geqslant 0$, $\frac{2}{(n+1)\pi} \leqslant u_n$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ est divergente.
2. *Deuxième formule de la moyenne.* Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, admettant des primitives notées F et G respectivement. Supposons que F est positive et décroissante. Montrer qu'il existe $y \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(a)\int_a^y g(x)\,dx.$$
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.
4. *Le but de cette question est de calculer la valeur de cette intégrale.* Pour tout nombre réel $\lambda \geqslant 0$, on pose :
$$\begin{cases} f(t,\lambda) &= e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t} \quad \text{pour} \quad t>0 \\ f(0,\lambda) &= 1. \end{cases}$$
   (a) Pour $0 < x \leqslant y$, démontrer que l'on a :
$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| \leqslant \frac{2}{x}e^{-\lambda x}.$$
   (b) En déduire que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ sont convergentes, uniformément pour $\lambda \geqslant 0$. On pose, pour $\lambda \geqslant 0$,
$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$
   Démontrer que la fonction F est continue pour $\lambda \geqslant 0$.
   (c) Démontrer que la fonction F est dérivable pour $\lambda > 0$ et que sa dérivée est égale à l'intégrale généralisée convergente
$$F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt.$$
   (d) Calculer cette dernière intégrale généralisée, par exemple en intégrant par parties sur $[0,x]$ et en calculant la limite quand $x \to +\infty$.
   (e) En déduire la valeur de $F(\lambda)$ pour $\lambda \geqslant 0$ à une constante additive près. Démontrer que $F(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$. En déduire la valeur de la constante additive, puis la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Correction ▼ [005925]

100 127.99 Autre

Exercice 2746

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cos(nt)f(t)dt = 0$. [001273]

Exercice 2747

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = 0.$$

Généraliser au cas où $f(0)$ est quelconque. [001274]

Exercice 2748

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que f est bornée. On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
2. Soient x et $y \in [a,b]$ Montrer que $|\int_x^y f(t)dt| \leqslant M|x-y|$. En déduire que l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue sur $[a,b]$.
3. Soit $x_0 \in [a,b]$. Montrer que si f est continue en x_0 alors F est dérivable en x_0.

[001275]

Exercice 2749

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nt^n f(t^n)dt = \int_0^1 f(t)dt.$$

(On pourra faire le changement de variable $u = t^n$). [001276]

Exercice 2750

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(a) = f(b) = 0$. Posons $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Montrer que $|\int_a^b f(t)dt| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$. (Indication : faire des développements limités de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$).
[001277]

Exercice 2751

Soit f continue sur $[0,1]$ avec $f(1) \neq 0$, montrer :

$$\int_0^1 x^n f(t)dt \sim \frac{f(1)}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-2t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

On posera $u = 1 - \frac{1}{n}$ puis $v = ue^{2(u-1)}$. [001278]

Exercice 2752

Donner un développement :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = a + \frac{b}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

[001279]

Exercice 2753

Calculer les intégrales

$$I = \int_0^x \exp 2t \cos 3t \; dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^x \exp 2t \sin 3t \; dt.$$

[002327]

Exercice 2754

Soient $a \neq 0$ un réel, et $y > x > 0$.

1. Calculer la valeur de
$$I(x,y) = \int_x^y \ln\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) dt.$$
2. Montrer que $I(x,y)$ a une limite $I_0(y)$ quand x tend vers zéro et la calculer.
3. Montrer que $I_0(y)$ a une limite quand y tend vers $+\infty$ et la calculer.

[002328]

Exercice 2755 École de l'air 94

On note $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,dx$, $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,dx$, $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2+\cos x}\,dx$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = J_n + (-1)^n K_n$ et $I_{n+1} = 4I_n - I_{n-1}$. En déduire I_n en fonction de n.

Correction ▼ [004238]

Exercice 2756 Calcul d'intégrale

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2(nx)}$.

Correction ▼ [004239]

Exercice 2757 arcsin et arccos

Simplifier $\int_{t=0}^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_{t=0}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

Correction ▼ [004240]

Exercice 2758 Calcul de limite

Étudiez la limite de la suite définie par $u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$.

Correction ▼ [004244]

Exercice 2759 Échange de décimales

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(0,a_1a_2a_3\dots) = 0,a_2a_1a_3\dots$ (échange des deux $1^{\text{ères}}$ décimales).
Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\int_{t=0}^{1} f(t)\,dt$. [004246]

Exercice 2760 $\int f(t)\cos(t)\,dt$

Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ convexe de classe $\mathscr{C}^2$. Quel est le signe de $I = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos t\,dt$?

Correction ▼ [004247]

Exercice 2761 Convexité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $g(x) = \int_{t=x-1}^{x+1} f(t)\,dt$. Montrer que g est convexe. [004248]

Exercice 2762 Expression d'une primitive n-ème de f

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g(x) = \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$. Montrer que $g^{(n)} = f$. [004249]

Exercice 2763 Théorème de division

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+p}$ telle que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$.
On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1. Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale.
2. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^p$ et $|g^{(p)}(x)| \leqslant \frac{p!}{(p+n)!}\sup\{|f^{(n+p)}(tx)|$ tel que $0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

[004250]

Exercice 2764 Fonction absolument monotone

Soit $f : [0,a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que f et toutes ses dérivées sont positives sur $[0,a[$.

1. Montrer que la fonction $g_n : x \longmapsto \frac{1}{x^n}\left(f(x) - f(0) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right)$ est croissante.
2. On fixe $r \in]0,a[$. Montrer que la série de Taylor de f converge vers f sur $[0,r[$.

Correction ▼ [004251]

Exercice 2765 Deuxième formule de la moyenne

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive décroissante.
On note $G(x) = \int_{t=a}^{x} g(t)\,dt$, et

$$M = \sup\{G(x),\ x \in [a,b]\} \qquad m = \inf\{G(x),\ x \in [a,b]\}.$$

1. On suppose ici que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que $mf(a) \leqslant \int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,dt \leqslant Mf(a)$.
2. Démontrer la même inégalité si f est seulement continue, en admettant qu'elle est limite uniforme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ décroissantes.
3. Démontrer enfin qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_{t=a}^{c} g(t)\,dt$.

[004252]

Exercice 2766 Inégalité de la moyenne

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f décroissante, et $0 \leqslant g \leqslant 1$. On note $G(x) = a + \int_{t=a}^{x} g(t)\,dt$.
Démontrer que $\int_{t=a}^{b} fg(t)\,dt \leqslant \int_{t=a}^{G(b)} f(t)\,dt$.

[004253]

Exercice 2767 Une inégalité

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = 0$ et $\forall\ t \in [a,b],\ 0 \leqslant f'(t) \leqslant 1$. Comparer $\int_{t=a}^{b} f^3(t)\,dt$ et $\left(\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt\right)^2$.
On introduira les fonctions : $F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,dt$, $G(x) = \int_{t=a}^{x} f^3(t)\,dt$, et $H = F^2 - G$.

Correction ▼ [004254]

Exercice 2768 Intégrales de Wallis

On note $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

1. Comparer I_n et $\int_{t=0}^{\pi/2} \sin^n t\,dt$.
2. En coupant $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $[0,\alpha]$ et $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, démontrer que $I_n \to 0$ pour $n \to \infty$.
3. Chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.
4. Démontrer que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
5. Démontrer que $I_n \sim I_{n-1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n puis de C_{2n}^n pour $n \to \infty$.

[004255]

Exercice 2769 Norme L^∞

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue non identiquement nulle. On pose $I_n = \int_{t=a}^b f^n(t)\,dt$ et $u_n = \sqrt[n]{I_n}$.
Soit $M = \max\{f(x)$ tel que $a \leqslant x \leqslant b\}$ et $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$.

1. Comparer M et u_n.
2. En utilisant la continuité de f en c, démontrer que : $\forall\, \varepsilon \in]0,M[$ il existe $\delta > 0$ tel que $I_n \geqslant \delta(M-\varepsilon)^n$.
3. En déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.

[004256]

Exercice 2770 Lemme de Lebesgue

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=a}^b f(t)\cos(nt)\,dt \to 0$, (lorsque $n \to \infty$) ...

1. si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. si f est en escalier.
3. si f est continue.

[004257]

Exercice 2771 Plus grande fonction convexe minorant f

1. Soit (f_i) une famille de fonctions convexes sur un intervalle I.
   On suppose que : $\forall\, x \in I,\ f(x) = \sup(f_i(x))$ existe. Montrer que f est convexe.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ minorée. Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe minorant f. On la note $\tilde{f}$.
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ croissante. Montrer que $\int_{t=0}^1 \tilde{f}(t)dt \geqslant \frac{1}{2}\int_{t=0}^1 f(t)dt$ (commencer par le cas où f est en escalier).

[004258]

Exercice 2772 Centrale PC 1998

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continue.

1. Montrer qu'il existe une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que :
   $\forall\, k \in [[0,n-1]],\ \int_{t=x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_{t=a}^b f(t)\,dt.$
2. Étudier $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

Correction ▼ [004259]

Exercice 2773 Mines MP 2000

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$, 2π périodique, ne s'annulant pas. Montrer que $I(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}$ est un entier.

Correction ▼ [004260]

Exercice 2774 Fonctions affines

Soit $E = \mathscr{C}([a,b])$, et $F = \{f \in \mathscr{C}^2([a,b]),$ tel que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\}$.

1. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $g \in F$ vérifiant $g'' = f$ si et seulement si $\int_{x=a}^b f(x)\,dx = \int_{x=a}^b xf(x)\,dx = 0$.
2. Soit $f \in E$ telle que $\int_{x=a}^b f(x)g''(x)\,dx = 0$ pour toute fonction $g \in F$. Montrer que f est affine.

Correction ▼ [004261]

Exercice 2775 Mines MP 2001

Soit $a<0<b$ et f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[a,b]$ telle que $\int_0^1 f=0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leqslant -ab$.

Correction ▼ [004262]

Exercice 2776 **I

1. Soit f une application de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(1)\neq 0$.
   Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1 t^n f(t)\,dt$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ puis déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ (étudier $\lim_{n\to+\infty} nu_n$).
2. Mêmes questions en supposant que f est de classe C^2 sur $[0,1]$ et que $f(1)=0$ et $f'(1)\neq 0$.

Correction ▼ [005445]

Exercice 2777 **I Le lemme de Lebesgue

1. On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t)f(t)\,dt=0$.
2. (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

Correction ▼ [005448]

Exercice 2778 ***

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$. Montrer que $2\int_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f'^2(t)\,dt$.

Correction ▼ [005452]

Exercice 2779 ***

Soit a un réel strictement positif et f une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0,a]$ telle que $f(0)=0$. Montrer que $\forall x\in[0,a],\ \forall y\in[0,f(a)],\ xy\leqslant \int_0^x f(t)\,dt+\int_0^y f^{-1}(t)\,dt$.

Correction ▼ [005454]

Exercice 2780 **

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Correction ▼ [005455]

Exercice 2781 **

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[0,1]$ telles que $\forall x\in[0,1],\ f(x)g(x)\geqslant 1$. Montrer que $\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right)\geqslant 1$.

Correction ▼ [005456]

Exercice 2782 ***

Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$.

Correction ▼ [005461]

Exercice 2783 ***

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et soit $M=\sup\{|f'(x)|,\ x\in[a,b]\}$. Montrer que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$.

Correction ▼ [005462]

Exercice 2784 **

Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

Correction ▼ [005463]

101 140.01 Distance, norme, produit scalaire

102 140.02 Droites

103 141.01 Produit scalaire, produit vectoriel, déterminant

104 141.02 Aire, volume

105 141.03 Plans

106 141.04 Droites de l'espace

107 141.05 Distance

108 200.01 Forme multilinéaire

Exercice 2785

On considère l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées $n\times n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. On rappelle que la *trace* $\mathrm{tr}(A)$ d'une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux.
Pour une matrice M donnée, on note α_M l'application définie par

$$\forall X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad \alpha_M(X)=\mathrm{tr}(MX).$$

1. Vérifier que $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad \alpha_M\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$.

   On note ϕ l'application suivante :

$$\phi:\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*\\ M & \mapsto & \alpha_M\end{array}$$

2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de ϕ.
3. En déduire que pour toute forme linéaire $\alpha\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$, il existe une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad \alpha(X)=\mathrm{tr}(AX).$$

4. Déterminer toute les formes linéaires $\alpha\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$ telles que

$$\forall (X,Y)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2,\quad \alpha(XY)=\alpha(YX).$$

[001107]

Exercice 2786

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Pour chaque $i\in\{0,\dots,n\}$, on note α_i l'application

$$\alpha_i:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}\\ P & \mapsto & P(x_i)\end{array}$$

1. Vérifier que chaque α_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. On note G l'espace engendré par $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Déterminer G°. En déduire que la famille $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
3. Montrer que la famille $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
4. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ tels que
$$\forall P\in\mathbb{R}_n[X]\ \ \int_0^1 P(t)dt=\sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$$
5. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_0,\dots,P_n)$ de $R_n[X]$ telle que $\forall (i,j)\in\{0,\dots,n\}^2\ \ P_i(x_j)=\begin{cases}1 & \text{si } j=i\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
6. En déduire que pour toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un polynôme P de degré n, qui interpole f en chaque point x_i, c'est à dire qui satisfait :
$$\forall i\in\{!,...,n\}\quad P(x_i)=f(x_i).$$

[001108]

Exercice 2787

Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application ϕ de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.

$$\begin{aligned}
\phi\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{smallmatrix}\right)\right)&=x_1+y_2+z_3\\
\phi\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{smallmatrix}\right)\right)&=x_1y_3+y_2z_1+z_3x_2\\
\phi\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{smallmatrix}\right)\right)&=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2\\
\phi\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{smallmatrix}\right)\right)&=x_1x_2x_3+y_1y_2y_3+z_1z_2z_3\\
\phi\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{smallmatrix}\right)\right)&=x_1y_1z_1+x_2y_2z_2+x_3y_3z_3\\
\phi\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{smallmatrix}\right)\right)&=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)(z_1+z_3)\\
\phi\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{smallmatrix}\right)\right)&=(x_1+2x_2)(z_1+z_3)
\end{aligned}$$

[001109]

Exercice 2788

Montrer que l'espace des formes bi-linéaires sur $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel. En donner une base. [001110]

Exercice 2789

Donner toutes les formes tri-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, que dire des formes m-linéaires alternées sur un espace de dimension n lorsque $m>n$? [001111]

Exercice 2790

Soit $A\in\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On considère l'application Φ_A suivante :

$$\Phi_A\ :\ \begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^n)^n & \to & \mathbb{R}\\ M=(C_1,...,C_n) & \mapsto & \det(AM)\end{array}$$

Montrer que Φ_A est n-linéaire.

Calculer $A \times \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{id}_{n-2} \end{array}\right)$. En déduire que $\Phi_A(e_2, e_1, e_3 \dots e_n) = -\Phi_A(e_1, e_2, e_3 \dots e_n)$.
Plus généralement, montrer que Φ_A est alternée.
Montrer que $\Phi_A(M) = \det(A)\det(M)$.
En déduire que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \qquad \det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$$

[001112]

Exercice 2791

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les applications ω et α suivantes :

$$\omega : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} & \mapsto & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & x_3 \end{array}$$

1. Montrer que ω est antisymétrique et bilinéaire.
   A l'aide de ω et α, on définit une nouvelle application, notée $\omega \wedge \alpha$, de la façon suivante :

$$\omega \wedge \alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y,Z) & \mapsto & \omega(X,Y)\alpha(Z) + \omega(Y,Z)\alpha(X) + \omega(Z,X)\alpha(Y) \end{array}$$

2. Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est alternée.
3. Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est trilinéaire.
4. Calculer $\omega \wedge \alpha(e_1, e_2, e_3)$. En déduire que $\forall (X,Y,Z) \in (\mathbb{R}^3)^3 \ \omega \wedge \alpha(X,Y,Z) = \det(X,Y,Z)$

[001113]

Exercice 2792 Changements de signe

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ et $A' = ((-1)^{i+j} a_{ij})$. Comparer $\det A$ et $\det A'$.

Correction ▼ [003427]

Exercice 2793 Somme des colonnes, Matexo

Soit M une matrice carrée d'ordre n, et M' la matrice déduite de M en remplaçant, pour tout j, la j-ième colonne par la somme des colonnes de M d'indices différents de j. Comparer les déterminants de M et M'. [003428]

Exercice 2794 Trace d'un endomorphisme

Soit E un ev de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$, et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, n vecteurs de E. On note det le déterminant dans une base fixée de E. Démontrer que :

$$\det(f(\vec{u}_1), \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) + \det(\vec{u}_1, f(\vec{u}_2), \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n) + \cdots + \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, f(\vec{u}_n)) = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)\operatorname{tr}(f).$$

Correction ▼ [003438]

Exercice 2795 **

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Correction ▼ [005635]

Exercice 2796 ***I

On définit par blocs une matrice A par $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, B et C sont des matrices carrées de formats respectifs n, p et q avec $p + q = n$. Montrer que $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$.

Correction ▼ [005636]

109 200.02 Calcul de déterminants

Exercice 2797

Calculer les déterminants des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1+a & b & a \\ b & 1+a & b \\ a & b & 1+a \\ b & a & b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$

[001114]

Exercice 2798

Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ et $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$. [001115]

Exercice 2799

1. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$ et $B \in M_q(\mathbb{R})$. Calculer (en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$) le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra pour cela décomposer M comme produit de deux matrices de déterminant évident et utiliser la multiplicativité du déterminant.)
2. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_q(\mathbb{R})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra généraliser la méthode de 1.)

[001116]

Exercice 2800

Sans calcul, montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 17. [001117]

Exercice 2801

Soit $\Delta(x) = \det(a_{i,j}(x))$ de taille $n = 2$ ou 3 avec $a_{i,j}$ des fonctions dérivables.

1. Montrer que $\Delta'(x)$ est la somme des n déterminants obtenus en remplaçant successivement dans $\Delta(x)$ chaque colonne par sa dérivée.
2. Calculer $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

[001118]

Exercice 2802

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice. [001119]

Exercice 2803

La famille $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ est-elle libre ? [001120]

Exercice 2804

Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. [001121]

Exercice 2805

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}$ [001122]

Exercice 2806

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans $\mathbb{R}^n$. On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i-ième composante est égale à 1 et toutes les autres sont nulles. Écrire la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes C_i sont donnés par $C_i = e_i + e_n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $C_n = e_1 + e_2 + e_n$. Calculer alors son déterminant. [001123]

Exercice 2807

On note a, b, c des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Généraliser le calcul de D_2 à un déterminant $n \times n$ du même type. [001124]

Exercice 2808

On note $a_1, \cdots, a_n$ des réels. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

[001125]

Exercice 2809

Montrer que

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c) = 4 \sin\frac{c-b}{2} \sin\frac{b-a}{2} \sin\frac{a-c}{2}$$

[001126]

Exercice 2810

Soient a, b deux réels distincts. Calculer le déterminant suivant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

[001127]

Exercice 2811

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calculer alors, suivant la valeur du paramètre m, le rang de cette matrice. [001128]

Exercice 2812

Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \ddots & \\ -4 & 0 & 3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

en fonction de n. (vérifier que -1 est racine de $X^3 - 3X^2 + 4$) [001129]

Exercice 2813

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

[001130]

Exercice 2814

Soit $(a,x,y) \in \mathbb{R}^3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note A_n le déterminant suivant :

$$A_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & a & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ y & & & a \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3,\ A_n = aA_{n-1} - xya^{n-2}$. En déduire une expression de A_n en fonction de n, a, x et y. [001131]

Exercice 2815

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note B_n le déterminant suivant :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$ Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

[001132]

Exercice 2816

On s'intéresse aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n \qquad (\star)$$

1. Déterminer toutes les suites complexes satisfaisant la relation $(\star)$.
2. Déterminer toutes les suites réelles satisfaisant la relation $(\star)$.
   On considère maintenant le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & & \mathbf{0} \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

3. Calculer Δ_{n+2} en fonction de Δ_{n+1} et Δ_n pour $n \in \mathbb{N}$ (on pose $\Delta_0 = 1$).
   En déduire la valeur de Δ_n en fonction de n.

[001133]

Exercice 2817

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

[001134]

Exercice 2818

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

[001135]

Exercice 2819

Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17. [001136]

Exercice 2820

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

[001137]

Exercice 2821

Pour $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on note $A_{(a_0\dots a_n)}$ la matrice

$$A_{(a_0\dots a_{n-1})} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}$$

et à $\lambda \in \mathbb{R}$, on associe $\Delta_{(a_0\dots a_{n-1})}(\lambda) = \det(A_{(a_0,\dots,a_{n-1})} - \lambda \mathrm{id})$. Calculer $\Delta_{(a_0\dots a_{n-1})}(\lambda)$ en fonction de $\Delta_{(a_1\dots a_{n-1})}(\lambda)$ et a_0. En déduire $\Delta_{(a_0\dots a_{n-1})}(\lambda)$. [001138]

Exercice 2822

Calculer les déterminants suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} p & q & & 0 \\ 1 & p & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & q \\ 0 & & 1 & p \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

[001139]

Exercice 2823

Soit $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{m,m}(\mathbb{R})$. On considère l'application ϕ suivante :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{array}$$

Etudier la multi-linéarité de ϕ par rapport aux colonnes de A. Calculer $\phi(\mathrm{id})$. En déduire que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs. Montrer que $\det(M) = \det(A_1)\cdots\det(A_k)$ [001140]

Exercice 2824

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 & a_{45} \\ -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

Comment généraliser ce résultat en dimension plus grande ? [001141]

Exercice 2825

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos y & \cos z & \cos t \\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z & \cos 2t \\ \cos 3x & \cos 3y & \cos 3z & \cos 3t \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & & n \\ -1 & -2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \cdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

[001142]

Exercice 2826

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001143]

Exercice 2827

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{K})^3$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AV, puis $\det(AV)$ en fonction de $\det(V)$, et en déduire $\det(A)$. [001144]

Exercice 2828

Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
2. Démontrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001145]

Exercice 2829

Soit a un réel différent de 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Calculer D_n en foncion de D_{n-1} et D_{n-2}. Monter que $D_n = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}$. Combien vaut D_n si $a = 1$? [001146]

Exercice 2830

Soient a, b, c trois réels et Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

1. On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = (n+1)\frac{a^n}{2^n}$$

[001147]

Exercice 2831

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

[001148]

Exercice 2832

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$ (avec la convention $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$).
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = 2^{n+1} - 1$

[001149]

Exercice 2833

Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P + P'$. Calculer $\det u$. Même question lorsque $u(P) = XP' + P(1)$. [001150]

Exercice 2834

Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -7 \end{vmatrix}.$$

[002448]

Exercice 2835

Calculer par récurrence le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n & \dots & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

[002452]

Exercice 2836 Déterminant de Vandermonde

Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i)$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002453]

Exercice 2837

Soit M une matrice carrée d'ordre n, et M' la matrice déduite de M en remplaçant, pour tout j, la j-ième colonne par la somme des colonnes de M d'indices différents de j. Montrer que $\det M' = (-1)^{n-1}(n-1)\det M$.
[002454]

Exercice 2838

Calculer le déterminant d'ordre n

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

[002455]

Exercice 2839

Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+2 \end{vmatrix}.$$

[002456]

Exercice 2840

Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n réelles, et $A \in E$ fixée. On définit une application u_A de E sur lui-même par $u_A(B) = AB$. Montrer que c'est un endomorphisme de E et que $\det u_A = (\det A)^n$. [002458]

Exercice 2841

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det A$.
2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est A. Pour quelles valeurs de m est-ce un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3. On pose $m = 1$. Trouver une base du noyau de u.

[002466]

Exercice 2842

Soient a, b, c des réels vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et P la matrice réelle 3×3 suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de P.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $\ker P$ et $\operatorname{Im} P$.
3. Soit $Q = I - P$, calculer P^2, PQ, QP et Q^2.
4. Caractériser géométriquement P et Q.

Correction ▼ [002578]

Exercice 2843

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Correction ▼ [002582]

Exercice 2844

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

Correction ▼ Vidéo ■ [002753]

Exercice 2845

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[002754]

Exercice 2846

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

[002755]

Exercice 2847

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[002756]

Exercice 2848

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & k & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & k \\ 0 & 0 & 0 & l \end{pmatrix}.$$

[002757]

Exercice 2849

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée de taille n. On construit à partir de M la matrice $N = (n_{ij})$ de la manière suivante : pour tout couple d'indices i, j, on appelle M_{ij} la matrice obtenue à partir de M en rayant la ligne i et la colonne j ; alors $n_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ji})$. Démontrer que $MN = NM = \det(M)I$, où I désigne la matrice identité. En déduire une méthode d'inversion de matrices passant par le calcul de déterminants, et l'appliquer à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002758]

Exercice 2850

Calculer les inverses des matrices suivantes de deux manières différentes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\-1&0&2\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\3&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix};\qquad D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&0&1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

[002759]

Exercice 2851

En utilisant le déterminant montrer que chacun des systèmes suivants admet une solution unique. Résoudre chacun de ces système en inversant la matrice de ses coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&z&=&1\\ 2x&+&3y&+&4z&=&2\\ &&y&+&4z&=&3\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x&+&y&+&z&+&t&=1\\ x&+&y&-&z&-&t&=0\\ x&-&y&-&z&+&t&=2\\ x&-&y&+&z&-&t&=3\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x&+&2y&-&z&=-1\\ x&+&y&-&3z&=1\\ 3x&+&2y&&&=0\end{array}\right.$$

[002760]

Exercice 2852 Calcul de déterminants

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix}x&a&b&x\\b&x&x&a\\x&b&a&x\end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$.
3. $\begin{vmatrix}a+b&b+c&c+a\\a^2+b^2&b^2+c^2&c^2+a^2\\a^3+b^3&b^3+c^3&c^3+a^3\end{vmatrix}$.
4. $\begin{vmatrix}a+b&ab&a^2+b^2\\b+c&bc&b^2+c^2\\c+a&ca&c^2+a^2\end{vmatrix}$.
5. $\begin{vmatrix}a^2&b^2&ab\\b^2&ab&a^2\\ab&a^2&b^2\end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^p \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n+p}^0 & C_{n+p}^1 & \dots & C_{n+p}^p \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \dots & \dots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \dots & a_1-b_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_n-b_1 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}$, $(n \geqslant 3)$.

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Pour 6 : Chercher une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On notera α et β les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique, et on exprimera le déterminant en fonction de α et β.

Correction ▼ [003451]

Exercice 2853 Factorisation de polynômes

Déterminer les cas d'annulation des déterminants suivants, puis les calculer :

1. $\begin{vmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & n-x \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a & b & c & \dots & z \\ b & b & c & & z \\ c & c & c & & z \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \dots & z \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [003452]

Exercice 2854 Calcul par dérivation

1. Soient $a,b,c,d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$.

   Montrer que f est dérivable et que : $f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.
2. Généraliser à un déterminant $n \times n$.
3. Application : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [003453]

Exercice 2855 $\det(A+(\alpha))$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\det(A+\alpha U) = \det A + \alpha \sum$ cofacteurs de A.
2. En déduire la valeur de $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$,

   (a) pour $b \neq c$.

   (b) pour $b = c$.

Correction ▼ [003454]

Exercice 2856 Déterminant tridiagonal, Matexo

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,a_2,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $(b_1,b_2,\dots,b_{n-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}$ et $(c_1,c_2,\dots,c_{n-1}) \in (\mathbb{R}_-^*)^{n-1}$. Montrer que le déterminant de la matrice suivante est strictement positif :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & 0 & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

[003455]

Exercice 2857 Déterminants de Vandermonde

Soient $a_1,\dots,a_n \in K$. Le déterminant de Vandermonde associé aux a_i est : $V(a_1,\dots,a_n) = \det\left(a_i^{j-1}\right)$.

1. Calculer et factoriser $V(a,b)$ et $V(a,b,c)$.
2. Pour $x \in K$, montrer que $V(a_1,\dots,a_n,x) = V(a_1,\dots,a_n)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$.
3. En déduire l'expression générale de $V(a_1,\dots,a_n)$.

[003456]

Exercice 2858 Racines de l'unité

On note $\omega = e^{2i\pi/n}$, $\alpha = e^{i\pi/n}$ et D le déterminant $n\times n$: $D = \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)$.

1. Calculer D^2.
2. Montrer que $D = \prod_{k<\ell}(\omega^\ell - \omega^k) = \prod_{k<\ell}\left(\alpha^{k+\ell}\cdot 2i\sin\frac{\ell-k}{n}\pi\right)$.
3. Exprimer D sous forme trigonométrique.

Correction ▼ [003457]

Exercice 2859 Cosinus

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$. Mettre le déterminant : $\det\left(\cos((j-1)\alpha_i)\right)$ sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

Correction ▼ [003458]

Exercice 2860 $(x_i+y_j)^k$

Soit $k \leqslant n-1$ et $M = \left((x_i+y_j)^k\right)$. Écrire M comme produit de deux matrices et calculer $\det M$.

Correction ▼ [003459]

Exercice 2861 $P(i+j)$

Soit $P \in K_{n-1}[X]$ et $A = \left(P(i+j)\right) \in \mathscr{M}_n(K)$. Développer $P(i+j)$ par la formule de Taylor et écrire A comme produit de deux matrices. En déduire $\det A$.

Correction ▼ [003460]

Exercice 2862 **

Montrer que $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$.

Correction ▼ [005362]

Exercice 2863 **

Pour a, b et c deux à deux distincts donnés, factoriser $\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005363]

Exercice 2864 ***

Calculer :

1. $\det(|i-j|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
2. $\det(\sin(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (a_1,...,a_n étant n réels donnés)
3. $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & & \dots & a \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$
5. $\det(C_{n+i-1}^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant p+1}$
6. $\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \dots & & \dots & a_{n-2} & a_{n-1}-X \end{vmatrix}$

Correction ▼ [005364]

Exercice 2865 **** Déterminant de CAUCHY et déterminant de HILBERT

Soit $A=\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a_1,..., a_n, b_1,...,b_n sont $2n$ réels tels que toutes les sommes a_i+b_j soient non nulles. Calculer $\det A$ (en généralisant l'idée du calcul d'un déterminant de VANDERMONDE par l'utilisation d'une fraction rationnelle) et en donner une écriture condensée dans le cas $a_i=b_i=i$.

Correction ▼ [005365]

Exercice 2866 ****

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où, pour tout i et tout j, $a_{i,j}\in\{-1,1\}$. Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Correction ▼ [005366]

Exercice 2867 **I

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $b_{i,j}=(-1)^{i+j}a_{i,j}$. Montrer que $\det B=\det A$.

Correction ▼ [005369]

Exercice 2868 **** Déterminant circulant

Soit $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $P=(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ où $\omega=e^{2i\pi/n}$. Calculer P^2 et PA. En déduire $\det A$.

Correction ▼ [005371]

Exercice 2869 ***I

Calculer $\det(\mathrm{com}A)$ en fonction de $\det A$ puis étudier le rang de $\mathrm{com}A$ en fonction du rang de A.

Correction ▼ [005372]

Exercice 2870 ***I Dérivée d'un déterminant

Soient $a_{i,j}$ ((i,j) élément de $\{1,...,n\}^2$) n^2 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et $A = (ai,j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \det(A(x))$.

Applications. Calculer

1. $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$

Correction ▼ [005373]

Exercice 2871 ***I

Calculer

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$
2. $\det((i+j-1)^2)$
3. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \dots & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}$ b, c complexes distincts

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005374]

Exercice 2872

Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}.$$

Correction ▼ [005376]

Exercice 2873 ***I Déterminants de VANDERMONDE

Soient x_0,..., x_{n-1} n nombres complexes. Calculer $\text{Van}(x_0,\dots,x_{n-1}) = \det(x_{j-1}^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Correction ▼ [005637]

Exercice 2874 ****I Déterminant de CAUCHY

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n $2n$ nombres complexes tels que toutes les sommes $a_i + b_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, soient non nulles. Calculer $C_n = \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Cas particulier : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$ (déterminant de HILBERT).

Correction ▼ [005638]

Exercice 2875 **

Calculer $\det(\sin(a_i + a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a_1,..., a_n sont n réels donnés ($n \geqslant 2$).

Correction ▼ [005640]

Exercice 2876 **

Calculer $\det(a_i + b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a_1,..., a_n, $b_1,\dots, b_n$ sont $2n$ complexes donnés.

Correction ▼ [005641]

Exercice 2877 **

Calculer $\det((a+i+j)^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a est un complexe donné.

Correction ▼ [005642]

Exercice 2878 ****

Soient x_1,..., x_n n entiers naturels tels que $x_1 < \dots < x_n$. A l'aide du calcul de $\det(C_{x_j}^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_j-x_i}{j-i}$ est un entier naturel.

Correction ▼ [005643]

Exercice 2879 **** Déterminants circulants

Soient a_0,...,a_{n-1} n nombres complexes. Calculer $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \det A$. Pour cela, on calculera d'abord $A\Omega$ où $\Omega = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Correction ▼ [005644]

Exercice 2880 **I

1. Soient $a_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, n^2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $d = \det(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer d'.
2. Application : calculer $d_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005645]

Exercice 2881 ***

Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n. Montrer que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ de format $2n$ est un réel positif.

Correction ▼ [005646]

Exercice 2882 ***

Soient A, B, C et D quatre matrices carrées de format n. Montrer que si C et D commutent et si D est inversible alors $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$. Montrer que le résultat persiste si D n'est pas inversible.

Correction ▼ [005647]

Exercice 2883 **I

Soient a_0, ... , a_{n-1} n nombres complexes et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A - xI_n)$.

Correction ▼ [005649]

Exercice 2884 **

Calculer les déterminants suivants :

1. $\det A$ où $A \in M_{2n}(\mathbb{K})$ est telle que $a_{i,i} = a$ et $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 1 & \dots & & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$

4. (I) $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$.

Correction ▼ [005650]

Exercice 2885

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006885]

Exercice 2886

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006886]

Exercice 2887

Calculer les déterminants suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006887]

110 200.03 Système linéaire, rang

Exercice 2888

Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [001163]

Exercice 2889

Sans chercher à résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leurs ensembles de solution :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 0\\ x & -y & & = & 0\\ x & +y & +z & = & 0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +3y & +2z & = & 1\\ 2x & -2y & & = & 2\\ x & +y & +z & = & 2\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +3y & +2z & = & 1\\ 2x & -2y & & = & 2\\ x & +y & +z & = & 3\end{array}\right.$$

[001164]

Exercice 2890

Soient $x_0,x_1,...,x_n$, $n+1$ réels distincts, et $y_0,y_1,...,y_n$, $n+1$ réels (distincts ou non).
Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que :

$$\forall i \in \{0,\dots,n\} \quad P(x_i) = y_i$$

[001165]

Exercice 2891

Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+(m+1)y & = & m+2\\ mx+(m+4)y & = & 3\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} mx+(m-1)y & = & m+2\\ (m+1)x-my & = & 5m+3\end{array}\right.$$

Correction ▼ [001166]

Exercice 2892

Écrire les conditions, portant sur les réels a, b, c, pour que les systèmes suivants admettent des solutions non nulles ; expliciter ces solutions.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0\\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z & = & 0\\ bcx+acy+abz & = & 0\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x-a(y+z) & = & 0\\ y-b(x+z) & = & 0\\ z-c(x+y) & = & 0\end{array}\right.$$

Correction ▼ [001167]

Exercice 2893

Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+4z+7t & = & b_1\\ x+3y+4z+5t & = & b_2\\ x+3y+3z+2t & = & b_3\\ x+y+z+t & = & b_4\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t & = & b_1\\ x+4y+7z+3t & = & b_2\\ y+2z & = & b_3\\ x+2y+3z+2t & = & b_4\end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z-t & = & b_1\\ -x+3y+t & = & b_2\\ 2x-2y+2z-2t & = & b_3\\ 2y+z & = & b_4\end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z+2t & = & b_1\\ -2x-4y-2z-4t & = & b_2\\ -x-2y-z-2t & = & b_3\\ 3x+6y+3z+6t & = & b_4\end{array}\right.$$

Correction ▼ [001168]

Exercice 2894

Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl}(1+\lambda)x+y+z+t & = & a\\ x+(1+\lambda)y+z+t & = & b\\ x+y+(1+\lambda)z+t & = & c\\ x+y+z+(1+\lambda)t & = & d\end{array}\right.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [001169]

Exercice 2895

Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl}3x+2y-z+t & = & \lambda\\ 2x+y-z & = & \lambda-1\\ 5x+4y-2z & = & 2\lambda\\ (\lambda+2)x+(\lambda+2)y-z & = & 3\lambda+a\\ 3x-z+3t & = & -\lambda^2\end{array}\right.$$

Correction ▼ [001170]

Exercice 2896

Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcl}2x+y+z & = & 3\\ 3x-y-2z & = & 0\\ x+y-z & = & -2\\ x+2y+z & = & 1\end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl}x+y+z+t & = & 1\\ x-y+2z-3t & = & 2\\ 2x+4z+4t & = & 3\\ 2x+2y+3z+8t & = & 2\\ 5x+3y+9z+19t & = & 6\end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl}2x+y+z+t & = & 1\\ x+2y+3z+4t & = & 2\\ 3x-y-3z+2t & = & 5\\ 5y+9z-t & = & -6\end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl}x-y+z+t & = & 5\\ 2x+3y+4z+5t & = & 8\\ 3x+y-z+t & = & 7\end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{rcl}x+2y+3z & = & 0\\ 2x+3y-z & = & 0\\ 3x+y+2z & = & 0\end{array}\right.$

[001171]

Exercice 2897

Calculer les déterminants suivants.

$$D_1=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&3&3\\1&2&1\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&2\\2&3&1\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}5&-3&13\\0&-1&-16\\0&0&2\end{vmatrix}\ D_4=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}\ D_5=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}$$

[001172]

Exercice 2898

Résoudre et discuter le système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 & = & b_1 \\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 & = & b_2 \\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 & = & b_3 \\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 & = & b_4 \end{array}\right.$$

[001173]

Exercice 2899

On considère l'application f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ qui à un élément $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ associe l'élément $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, défini par :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 & = & y_1 \\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 & = & y_2 \\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 & = & y_3 \\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 & = & y_4 \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. On considère A l'ensemble des solutions de (S_H).

$$(S_H)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 & = & 0 \\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 & = & 0 \\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 & = & 0 \\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Quelle est la nature de A ? Que représente A pour l'application f ? Donner une base de A ; quelle est la dimension de A ? Donner un système minimal d'équations qui définissent A.
3. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs : $V_1=(1,1,1,1)$, $V_2=(1,2,3,4)$, $V_3=(3,1,4,2)$, $V_4=(10,4,13,7)$, $V_5=(1,7,8,14)$. Que représentent ces vecteurs pour l'application f ? Trouver une base de $\mathrm{Im} f$.
4. On considère le système (S) où les inconnues sont les x_i, et où les y_j sont des paramètres. Comment interpréter les conditions de possibilité de ce système du point de vue de f ?
5. Donner une interprétation du théorème du rang relativement à ce système. Quel est le lien entre le rang de f et le rang du système ?

[001174]

Exercice 2900

Pour tout a réel, on considère la matrice A et le système linéaire (S) définis par :

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad (S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & az & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & at & = & 1 \end{array}\right.$$

aux inconnues réelles x,y,z,t.

1. Discuter le rang de A suivant les valeurs de a.
2. Pour quelles valeurs de a le système (S) est-il de Cramer ? Compatible ? Incompatible ?
3. Lorsqu'il est de Cramer, résoudre (S) avec un minimum d'opérations (on pourra montrer d'abord que l'on a nécessairement $x=y=z=t$.).
4. Retrouver 3. par application des formules de Cramer.

[001175]

Exercice 2901

Déterminer le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ [001176]

Exercice 2902

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\exists X \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ tel que $AX = \lambda X$. Pour chaque λ déterminer $E_\lambda = \left\{X \in \mathbb{R}^3 / AX = \lambda X\right\}$. [001177]

Exercice 2903

Trouver les solutions de

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [001178]

Exercice 2904

Résoudre suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ a^2x + y + az = 0 \\ ax + a^2y + z = 0 \end{cases}$. [001179]

Exercice 2905

Résoudre suivant les valeurs de a et $\mu \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = \mu \\ x + y + az + t = \mu^2 \\ x + y + z + at = \mu^3 \end{cases}$. [001180]

Exercice 2906

Inverser en utilisant un système linéaire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. [001181]

Exercice 2907

Résoudre $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$. [001182]

Exercice 2908

Résoudre $\begin{cases} -cy+bz=\alpha \\ cx-az=\beta \\ -bx+ay=\gamma \end{cases}$. [001183]

Exercice 2909

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ des éléments (x,y,z,t) qui satisfont :

$$\begin{cases} x+y+z+3t &= 0 \\ 2x+3y+4t &= 0 \\ 2x+5y-4z &= 0 \end{cases}$$

Donner une base de F et sa dimension. [001184]

Exercice 2910

On considère le système

$$(S):\begin{cases} x+y+z+t &=0 \\ x-y-2z+2t &=0 \\ 2x+y+z &=0 \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S) puis indiquer son rang.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, indiquer sa dimension et en donner une base.

[001185]

Exercice 2911

L'objectif de ce problème est de résoudre l'énigme du berger :
Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Comment a-t-il fait ? On montre, dans un premier temps, un résultat utile pour la démonstration finale.

1. (a) Montrer par récurrence que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.

   (b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.

2. L'objectif de cette question est de résoudre l'énigme du berger. On note B la matrice carrée de taille 101 construite de la manière suivante :
   On numérote les moutons de 1 à 101. Quand le berger retire le ième mouton du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux troupeaux égaux (troupeau A, troupeau B) et de même poids. On note alors $B_{i,j}$ les coefficients de la ième ligne de la matrice B obtenu de la façon suivante

   $$B_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{si le j-ième mouton se trouve dans le troupeau A} \\ 2 & \text{si le j-ième mouton se trouve dans le troupeau B .} \end{cases}$$

   On note X la matrice de taille 101×1 constituée des poids des moutons

   $$X=\begin{pmatrix} \text{poids du monton 1} \\ \text{poids du mouton 2} \\ \vdots \\ \text{poids du mouton 100} \\ \text{poids du mouton 101} \end{pmatrix}.$$

On note M le poids total du troupeau.

(a) Calculer

$$B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer

$$BX.$$

(c) Montrer que B est inversible.

(d) En déduire X et résoudre l'énigme du berger.

[001186]

Exercice 2912

Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse. [001187]

Exercice 2913

Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$? [001188]

Exercice 2914

Soient $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^3$. Donner, sous forme d'équation, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartienne à l'espace vectoriel engendré par v_1 et v_2.
Même question pour un plan engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. [001189]

Exercice 2915

Soit u un endomorphisme de E, et $\mathscr{B}$ une base de E. Discuter dans chacun des cas ci-dessous la dimension du noyau de u.

$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 12-\lambda & -6 & 3 \\ -9 & -5-\lambda & 3 \\ -12 & -8 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

[001190]

Exercice 2916

Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres réels x et y :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[001191]

Exercice 2917

Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de α, a, b et c :

$$\begin{cases} x - y - \alpha z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

[001192]

Exercice 2918

Systèmes linéaires.

1. Résoudre le système d'équations linéaires sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

2. Le système suivant admet-il des solutions sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

3. On considère le système précédent, mais dont coefficients et inconnues sont dans le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Résoudre ce système.

[002462]

Exercice 2919

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le système suivant admet des solutions différentes de $x = y = z = t = 0$:

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 0 \\ x + (1+m)y + z + t = 0 \\ x + y + (2+m)z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

[002463]

Exercice 2920

Soit a, b deux réels différents. Montrer que le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ bx_1 + ax_2 + ax_3 + \dots + ax_n = c_1 \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 + \dots + ax_n = c_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \dots + ax_n = c_n \end{cases}$$

admet une solution unique que l'on calculera.

[002464]

Exercice 2921

Soit A une matrice carrée d'ordre n tridiagonale, c'est-à-dire telle que $a_{i,j}=0$ si $|i-j|>1$. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure L vérifiant $l_{i,j}=0$ si $j>i+1$ et une triangulaire supérieure U vérifiant $u_{i,i}=1$ et $u_{i,j}=0$ si $i>j+1$ telles que $A=LU$, et que ces matrices sont uniques. En déduire la solution du système linéaire $Ax=b$, où b est un vecteur donné dans $\mathbb{R}^n$.

[002465]

Exercice 2922

Résoudre

$$S_1\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \cosh a\, y & + & \cosh 2a\, z & = & \cosh 3a \\ \cosh a\, x & + & \cosh 2a\, y & + & \cosh 3a\, z & = & \cosh 4a \\ \cosh 2a\, x & + & \cosh 3a\, y & + & \cosh 4a\, z & = & \cosh 5a \end{array}\right.$$

et

$$S_2\left\{\begin{array}{rcrcccrcl} x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & \dots & + & nx_n & = & 0 \\ x_1 & + & 2^2x_2 & + & \dots & + & n^2x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ x_1 & + & 2^{n-1}x_2 & + & \dots & + & n^{n-1}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Correction ▼

[002478]

Exercice 2923

Décider, pour chacun des systèmes d'équations aux inconnues x_1, x_2, $\dots$, x_n et aux paramètres s, t, s'il est linéaire :

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1\sin(t) & + & x_2 & = & 3 \\ x_1e^t & + & 3x_2 & = & t^2 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{ccccl} \frac{1}{x_1} & +\frac{2}{x_2} & +\dots & +\frac{n}{x_n} & = n! \\ x_1 & +\frac{x_2}{2} & +\dots & +\frac{x_n}{n} & = \frac{1}{n!} \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{ccc} \sqrt{(x_1+sx_2+t)^2-4sx_2(x_1+t)} & = & 0 \\ x_1\ln s-\pi x_2+e^tx_n & = & 0 \end{array}\right.$$

$$d)\left\{\begin{array}{ccc} (1+sx_1)(3+tx_2)-(2+tx_1)(5+sx_2) & = & 8 \\ (x_3+s)^2-(x_3-s)^2+x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

[002731]

Exercice 2924

En appliquant l'algorithme de Gauss, résoudre le système linéaire suivant :

$$\mathscr{S}:\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & - & 11x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \end{array}\right. .$$

[002732]

Exercice 2925

Résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[002733]

Exercice 2926

Résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[002734]

Exercice 2927

Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant :

$$\mathscr{S}_a : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système $\mathscr{S}_a$ peut :
   (i) n'admettre aucune solution ;
   (ii) admettre exactement une solution ;
   (iii) admettre une infinité de solutions.
2. Résoudre le système $\mathscr{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

[002735]

Exercice 2928

Les vecteurs complexes (z,w) et (z',w') sont liés par la formule $(z',w') = (z+iw, (1+i)z+(1-2i)w)$. Un étudiant qui n'aime pas les nombres complexes pose $z = x+iy$, $w = u+iv$, $z' = x'+iy'$ et $w' = u'+iv'$.

1. Exprimer (x',y',u',v') en fonction de (x,y,u,v).
2. Résoudre le système $(x',y',u',v') = (1,2,3,4)$.

[002736]

Exercice 2929

Un cycliste s'entraîne chaque dimanche en faisant l'aller-retour d'Issy à Labat. Le trajet Issy-Labat n'est pas horizontal : il y a des montées, des descentes et du plat. En montée, notre cycliste fait du quinze kilomètres à l'heure, en plat du vingt, en descente du trente. L'aller lui prend deux heures et le retour trois. Sur la portion du trajet qui n'est pas plate, la pente moyenne est de cinq pour cent.

1. Quelle est la distance d'Issy à Labat, quelle est la plus haute de ces deux villes, et quelle est leur différence d'altitude ?
2. Un autre cycliste, plus sportif, fait du vingt kilomètres à l'heure en montée, trente en plat et quarante en descente. Sachant que l'aller-retour Issy-Labat lui prend seulement trois heures quarante, déterminer les trois longueurs : de la partie du trajet qui monte, de celle qui descend, de celle qui est à plat.

[002737]

Exercice 2930

Soient a, b, et c trois nombres réels.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système suivant ait au moins une solution ?

$$\mathscr{S}_{abc} : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array} \right.$$

2. Est-ce que le système $\mathscr{S}_{abc}$ peut avoir une unique solution ?

[002738]

Exercice 2931

Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$\mathscr{S}_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\mathscr{S}_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{array} \right.$$

[002739]

Exercice 2932

1. Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :
$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 7y & = & -2 \end{array} \right.$$
2. Choisir la méthode qui vous paraît la plus rapide pour résoudre, selon les valeurs de a, les systèmes suivants :
$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & 2 \\ (a^2+1)x & + & 2ay & = & 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a+1)x & + & (a-1)y & = & 1 \\ (a-1)x & + & (a+1)y & = & 1 \end{array} \right.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [002768]

Exercice 2933

Résoudre le système suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcrl} 2x & + & y & + & z & - & 2u & + & 3v & - & w & =1 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & - & 3u & + & 5v & - & 3w & =4 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & - & 2u & + & 4v & - & 4w & =6 \\ x & + & y & + & z & - & u & + & 2v & - & 2w & =3 \\ 3x & & & & & - & 3u & + & 3v & + & 3w & =-6 \end{array} \right.$$

[002769]

Exercice 2934 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2. \end{array} \right.$$

Correction ▼ [003408]

Exercice 2935 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1. \end{array} \right.$$

Correction ▼ [003409]

Exercice 2936 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z = -1 \\ (m-1)x - 3z = -1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003410]

Exercice 2937 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} 3mx + (3m-7)y + (m-5)z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2mz = m+1 \\ 4mx + (5m-7)y + (2m-5)z = 0. \end{cases}$$

Correction ▼ [003411]

Exercice 2938 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a(a-1)x + b(b-1)y + c(c-1)z = d(d-1). \end{cases}$$

Correction ▼ [003412]

Exercice 2939 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x - y - z + t = b \\ -x - y + z + t = c \\ -3x + y - 3z - 7t = d. \end{cases}$$

Correction ▼ [003413]

Exercice 2940 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z + t = a \\ x + 4y + 3z + 2t = b \\ 2x + y + 4z + 3t = c \\ 3x + 2y + z + 4t = d. \end{cases}$$

Correction ▼ [003414]

Exercice 2941 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x\cos 2\alpha & + & y\cos\alpha & + & z & = & a \\ x\cos 2\beta & + & y\cos\beta & + & z & = & b \\ x\cos 2\gamma & + & y\cos\gamma & + & z & = & c. \end{cases}$$

Correction ▼ [003415]

Exercice 2942 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax - by = p \\ by - cz = q \\ cz - ax = r. \end{cases}$$

Correction ▼ [003416]

Exercice 2943

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1. \end{cases}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [003417]

Exercice 2944 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{x}{1+a} & + & \frac{y}{1+2a} & + & \frac{z}{1+3a} & = & 1 \\ \frac{x}{2+a} & + & \frac{y}{2+2a} & + & \frac{z}{2+3a} & = & 1 \\ \frac{x}{3+a} & + & \frac{y}{3+2a} & + & \frac{z}{3+3a} & = & 1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003418]

Exercice 2945 Système incompatible

Soit $(S) \iff AX = B$ un système linéaire incompatible. Montrer que les lignes de A sont liées.

[003419]

Exercice 2946 Combinaison de formes linéaires

Soient $f, f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur K^n linéairement indépendantes. Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_p$.
Indication : Étudier le système

$$\begin{cases} f_1(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_p(x) & = & 0 \\ f(x) & = & 1. \end{cases}$$

Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas $(f_1, \dots, f_p)$ libre ? [003420]

Exercice 2947 Base antiduale

Soient $f_1, \dots, f_n$, n formes linéaires indépendantes sur un ev E de dimension n. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_i)$ de E telle que $f_i = \vec{e}_i^{\,*}$. [003421]

Exercice 2948 Orthogonal d'un sev

Soit E un K-ev de dimension n et F un sev de E^* dimension p.
On note $F^\perp = \{\vec{x} \in E \text{ tq } \forall f \in F \text{ on a } f(\vec{x}) = 0\}$. Chercher $\dim F^\perp$. [003422]

Exercice 2949 Système de Vandermonde

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, n scalaires distincts et M la matrice $\left(\alpha_i^{j-1}\right)$ (matrice de Vandermonde).
Montrer que M est inversible en interprétant le système $MX = 0$ dans $K_{n-1}[x]$. [003423]

Exercice 2950 Formule d'intégration numérique

Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré $\leqslant 3$ on ait :

$$\int_2^4 P(x)\,dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [003424]

Exercice 2951 Système non linéaire

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{12} & = & 2 \\ x^2y^2z^5 & = & 3. \end{cases}$$

1. Lorsque x, y, z sont réels strictement positifs.
2. Lorsque $x, y, z \in \mathbb{C}$.

Correction ▼ [003425]

Exercice 2952 Comatrice, Ensi P 91

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction du rang de A.
Correction ▼ [003431]

Exercice 2953 Comatrice

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Calculer $\mathrm{com}\,(\mathrm{com} A)$ dans le cas où A est inversible.
2. Si $\mathrm{rg} A \leqslant n-2$, démontrer que $\mathrm{com} A = 0$.
3. Si $\mathrm{rg} A = n-1$, démontrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{com} A) = 1$.
4. Dans le cas général, démontrer que $\mathrm{com}\,(\mathrm{com} A) = (\det A)^{n-2} A$.

[003432]

Exercice 2954 Calcul de rang

Chercher les rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003461]

Exercice 2955 Calcul de rang

Chercher rg $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en fonction de $m \in \mathbb{C}$. [003462]

Exercice 2956 Calcul de rang

Chercher rg $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \lambda \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et le cas échéant, donner une relation de dépendance linéaire entre les lignes.

Correction ▼ [003463]

Exercice 2957 Calcul de rang

Chercher rg $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$ en fonction de a et b.

Correction ▼ [003464]

Exercice 2958 Matrice à trou

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(K)$, $B \in \mathscr{M}_{2,2}(K)$, $C \in \mathscr{M}_{2,3}(K)$ telles que $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver x.

Correction ▼ [003465]

Exercice 2959 Factorisation, Centrale P' 1996

Soit la matrice carrée d'ordre n, I_p ($p \leqslant n$), telle que le i-ème terme diagonal vaut 1 si i est compris entre p et n, tous les autres coefficients étant nuls. Quelle sont les conditions sur A (matrice carrée d'ordre n) pour qu'il existe B telle que $AB = I_p$?

Correction ▼ [003466]

Exercice 2960 Échange de lignes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ inversible et B la matrice obtenue en échangeant dans A les colonnes i et j. Montrer que B est aussi inversible. Comment passe-t-on de A^{-1} à B^{-1} ?

Correction ▼ [003467]

Exercice 2961 Matrices de rang 1

Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que : $\quad \text{rg}(M) = 1 \iff$ il existe C, colonne et L, ligne, non nulles, telles que $M = CL$. [003468]

Exercice 2962 Matrices de projection de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ de rang 1. Montrer que A est une matrice de projection si et seulement si $\text{tr}A = 1$. [003469]

Exercice 2963 Calcul de rang

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots y_p \in K$. On note A, B les matrices de termes généraux $x_i + y_j$ et $(x_i + y_j)^2$.
Chercher les rangs de A et B.

Correction ▼ [003470]

Exercice 2964 Juxtaposition de matrices

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{n,q}(K)$. On considère $C = (A\ B) \in \mathscr{M}_{n,p+q}(K)$.
Montrer que : $\text{rg}(C) = \text{rg}(A) \Leftrightarrow \exists\, P \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ tq $B = AP$. [003471]

Exercice 2965 $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $B = {}^tAA$.

1. Montrer que : $\forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYY = 0 \Leftrightarrow Y = 0$.
2. Montrer que : $\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $BX = 0 \Leftrightarrow AX = 0$.
3. En déduire que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.
4. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\text{rg}(A) \neq \text{rg}({}^tAA)$.

Correction ▼ [003472]

Exercice 2966 Rang de $\text{Re}(M)$

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. On écrit $M = P + iQ$ avec $P, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rg}(P) \leqslant 2$. [003473]

Exercice 2967 Calcul de rang

Soit $M = \Big(\cos(i + j - 1)\theta\Big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{rg}M$ en fonction de θ.

Correction ▼ [003474]

Exercice 2968 Décomposition en blocs

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice carrée décomposée en blocs. On suppose que A est inversible.
Montrer que $\text{rg}M = \text{rg}A + \text{rg}(D - CA^{-1}B)$. [003475]

Exercice 2969 $MA = 0$, Chimie P' 90

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $MA = 0\}$. Quelle est la structure de E, sa dimension ?

Correction ▼ [003476]

Exercice 2970 Rang des applications $X \mapsto AX, XB, AXB$

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(K)$. Chercher le rang des applications :

$$f : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{n,q}(K), X \mapsto AX \qquad g : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{p,r}(K) X \mapsto XB$$

$$h : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{n,r}(K) X \mapsto AXB$$

(on transformera A et B en matrices canoniques équivalentes)

[003477]

Exercice 2971 Rang de $X \mapsto AX - XA$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(K)$. Chercher le rang de l'application $\mathcal{M}_2(K) \to \mathcal{M}_2(K), M \mapsto AM - MA$ [003478]

Exercice 2972 Matrice antisymétrique 3×3

Soit $M \in \mathcal{M}_3(K)$ antisymétrique. Quel est le rang de M ?

Correction ▼ [003479]

Exercice 2973 Matrices antisymétriques

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ antisymétrique.

1. On suppose $a_{12} \neq 0$, et on décompose A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} J & U \\ -{}^tU & V \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$.

   Soit $P = \begin{pmatrix} I_2 & -J^{-1}U \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P existe et est inversible.
   (b) Calculer AP.
   (c) En déduire que $\mathrm{rg}(A) = 2 + \mathrm{rg}({}^tUJ^{-1}U + V)$.
2. Dans le cas général, montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

[003480]

Exercice 2974 Matrice à diagonale dominante

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que M est *à diagonale dominante* si : $\forall\, i,\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. On transforme M en $M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot. Montrer que M_1 est à diagonale dominante.
2. En déduire que M est inversible.

[003481]

Exercice 2975 Rang par blocs, Matexo

Soit une matrice M de rang r telle que :

$$M = \begin{pmatrix} M_r & M_2 \\ M_1 & M_3 \end{pmatrix},$$

où la matrice M_r est carrée de rang r et de taille r. Montrer que $M_3 = M_1 M_r^{-1} M_2$. [003482]

Exercice 2976 $\mathrm{rg}(BC)$, Centrale MP 2006

1. Soient deux matrices $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ de même rang r. Montrer que $A = BC$ est de rang r.
2. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r \geqslant 1$. Montrer qu'il existe des matrices B et C comme précédemment telles que $A = BC$.
3. Déterminer explicitement une telle décomposition pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

4. Supposons de plus A symétrique. Montrer que CB est aussi de rang r.

Correction ▼ [003483]

Exercice 2977 *PA* nilpotente

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que A est non inversible si et seulement s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que PA est nilpotente. [003484]

Exercice 2978 ***

Résoudre le système $MX = U$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005367]

Exercice 2979

Résoudre (en discutant en fonction des différents paramètres) les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{l} 2x+my+z=3m \\ x-(2m+1)y+2z=4 \\ 5x-y+4z=3m-2 \end{array}\right.$ 3) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=3 \\ x+my+z-mt=m+2 \\ mx-y-mz-t=-1 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z+mt=m-1 \\ 2x+y+mz+3t=1 \\ 3x+my+z+2t=0 \\ mx+3y+2z+t=0 \end{array}\right.$ 5) $\left\{\begin{array}{l} mx+y+z=m+2 \\ -x-y+mz=m-2 \\ -mx+y+mz=-m \\ x-y-mz=m-4 \end{array}\right.$ 6) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=m \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{m} \end{array}\right.$

7) $\left\{\begin{array}{l} (b+c)^2x+b^2y+c^2z=1 \\ a^2x+(c+a)^2y+c^2z=1 \\ a^2x+b^2y+(a+b)^2z=1 \end{array}\right.$ 8) $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=p \\ cx+ay+bz=q \\ bx+cy+az=r \end{array}\right.$

9) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=2 \\ a^2x+b^2y+c^2z=3 \end{array}\right.$ (où $a,\ b,$ et c sont les racines de l'équation $t^3-t+1=0$).

Correction ▼ [005375]

Exercice 2980

Résoudre le système : $x_1+x_2=0$, $x_{k-1}+x_k+x_{k+1}=0$ pour $k=2,\dots,n-1$, $x_{n-1}+x_n=0$.

Correction ▼ [005378]

Exercice 2981

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n $2n$ nombres complexes deux à deux distincts tels que les sommes a_i+b_j soient toutes non nulles. Résoudre le système $\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{a_i+b_j}=1$, pour tout $i=1,\dots,n$ (en utilisant la décomposition en éléments simples de $R=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{X+b_j}$).

Correction ▼ [005381]

Exercice 2982 **

Résoudre le système $MX=U$ où $M=(j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in M_n(\mathbb{R})$, $U=(\delta_{i,1})_{1\leqslant i\leqslant n}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et X est un vecteur colonne inconnu.

Correction ▼ [005639]

Exercice 2983

Résoudre les systèmes suivants, en précisant auparavant le domaine de résolution.

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x} = \frac{y+1}{y-2} \\ \frac{5x+1}{5x-2} = \frac{y-1}{y-2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{(x+3)^2+(y-1)^2}{x^2+y^2} = 1 \\ 3x+2y = 73 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{(x-1)^2-(x-5)^2}{(y+1)^2-(y-1)^2} = 1 \\ 2y-x = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{4}{y} = 18 \\ \frac{3}{x}-\frac{7}{y} = -55 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 3 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y} = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1-2x}{x}+\frac{3}{y} = 0 \\ \frac{1-x}{x}+\frac{3-y}{y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4(x-2)}+\frac{7}{3(y-1)} = 41 \\ \frac{5}{2(x-2)}-\frac{3}{5(y-1)} = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{9}{x-y}+\frac{10}{x+y} = 75 \\ \frac{12}{x-y}+\frac{25}{x+y} = 135 \end{cases}$$

Indication ▼ Correction ▼ [007026]

Exercice 2984

La somme de deux nombres x et y est 29. La différence de leurs carrés est 145. Quels sont ces nombres ?

Correction ▼ [007027]

Exercice 2985

Trouver les dimension d'un triangle rectangle d'hypoténuse 13 cm et d'aire 30 cm^2.

Indication ▼ Correction ▼ [007028]

Exercice 2986

Dans une station de métro, les usagers ont à leur disposition un tapis roulant de 300m de long. Un piéton marchant à vitesse constante fait l'aller-retour sur le tapis roulant. À l'aller, il met 1 minute et 30 secondes. Au retour, à contre-sens, il met 4 minutes et 30 secondes. Déterminer la vitesse du piéton et celle du tapis roulant. [007029]

Exercice 2987

Résoudre le système suivant sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur le domaine de définition maximal :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x/y = 2 \end{cases}$$

Indication ▼ Correction ▼ [007030]

Exercice 2988

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ le système suivant :

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3 \end{cases}$$

Correction ▼ [007031]

Exercice 2989

Soient a,b,c trois réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ae^x + bx + c$. On suppose que le graphe de f contient le point de coordonnées $(0,1)$, et que sa tangente en ce point contient également le point de coordonnées $(2,3)$. On suppose enfin que le graphe admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln(3)$. Déterminer a,b,c. [007032]

Exercice 2990

Soient $a_1,\dots,a_n$ des points du plan complexe.
Déterminer à quelle(s) condition(s) il existe au moins un polygone à n sommets $z_1,\dots,z_n$ tel que :
(a_i est le milieu de $[z_i,z_{i+1}]$ et a_n est le milieu de $[z_n,z_1]$.)
Correction ▼ [007033]

Exercice 2991

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

Correction ▼ [007034]

111 200.04 Applications

Exercice 2992

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\varphi^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Donner des exemples de telles applications dans le cas $n = 2$ ou 4.
2. Montrer que de telles applications existent si et seulement si n est pair.

Correction ▼ [001151]

Exercice 2993

Inverser les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi que leurs produits. [001152]

Exercice 2994 Résultant

Soient $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$, et $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_qX^q$, avec $a_p \neq 0,\ b_q \neq 0$.

Le résultant de P et Q est : $\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_p & \ddots & a_0 & b_{q-1} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & a_1 & b_q & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & \ddots & b_{q-1} \\ & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}$ les positions non remplies correspondent à des zéros.

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xleftrightarrow{\quad q \quad} \xleftrightarrow{\quad p \quad}$

En considérant l'application $\Phi : K_{q-1}[X] \times K_{p-1}[X] \to K_{p+q-1}[X], (U,V) \mapsto UP+VQ$,
montrer que : $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0 \iff P \wedge Q = 1$.
Application : CNS pour que le polynôme $P = X^4 + aX + b$ ait une racine multiple ?
Correction ▼ [003443]

Exercice 2995 Système unisolvent

Soient E un ensemble quelconque et $f_1,\dots,f_n : E \to K$ des fonctions.
Montrer par récurrence sur n que la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre dans K^E si et seulement s'il existe des éléments $x_1,\dots,x_n$ de E tels que $\det\big(f_i(x_j)\big) \neq 0$. [003444]

Exercice 2996 $\prod a_{i\sigma(i)} = \mathrm{cste}$

Soit $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(K)$ telle qu'il existe $a\neq 0$ tel que : $\forall\ \sigma\in S_n$, $\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}=a$. Montrer que $\mathrm{rg}A=1$.
[003445]

Exercice 2997 Combinaison linéaire des solutions

Soit $(S)\iff AX=B$ un système linéaire de n équations à n inconnues de Cramer. Montrer que pour tous scalaires $c_1,\dots,c_n$, on a :

$$c_1x_1+\cdots+c_nx_n=-\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} & & & b_1\\ & A & & \vdots\\ & & & b_n\\ c_1 & \dots & c_n & 0\end{vmatrix}.$$

[003446]

Exercice 2998 Problème d'interpolation de Lagrange

Soit A un *anneau* commutatif, $x_1,\dots,x_n\in A$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
a. Le déterminant de Vandermonde de $x_1,\dots,x_n$ est un élément inversible de A ;
b. Pour tous $y_1,\dots,y_n\in A$, il existe un unique polynôme $P\in A_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i)=y_i$ pour $i=1,\dots,n$.
Donner un exemple d'anneau A et un problème d'interpolation dans A (en des points x_i distincts) n'ayant pas de solution.

Correction ▼ [003447]

Exercice 2999 Polytechnique MP 2002

Soit p un nombre premier et $a_0,\dots,a_{p-1}\in\mathbb{Z}$. Montrer que le déterminant de la matrice $A=(a_{j-i \bmod p})\in\mathscr{M}_p(\mathbb{Z})$ vérifie : $\det(A)\equiv a_0+\cdots+a_{p-1} \bmod p$.
Indication : écrire $A=\sum_{k=0}^{p-1}a_kJ^k$ et calculer A^p.

Correction ▼ [003448]

Exercice 3000 Centrale MP 2002

Soit un déterminant symétrique réel d'ordre impair dont les coefficients sont entiers, les diagonaux étant de plus pairs. Montrer que ce déterminant est pair.

Correction ▼ [003449]

Exercice 3001 Formule de Cauchy-Binet

Soit $M=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{np}(K)$ et $q\in[[1,\min(n,p)]]$.
Pour $X=\{x_1,\dots,x_q\}$ et $Y=\{y_1,\dots,y_q\}$ avec $1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_q\leqslant n$ et $1\leqslant y_1<y_2<\cdots<y_q\leqslant p$ on note $\Delta_{X,Y}(M)$ le déterminant de la matrice $q\times q$ de terme général a_{x_i,y_j}.

1. Soient $M\in\mathscr{M}_{np}(K)$ et $N\in\mathscr{M}_{pn}(K)$ avec $n\leqslant p$. Montrer que $\det(MN)=\sum_{X\subset[[1,p]];\mathrm{Card}\,X=n}\Delta_{[[1,n]],X}(M)\Delta_{X,[[1,n]]}(N)$ (considérer les deux membres comme des fonctions des colonnes de N).
2. Donner une formule pour $\det(MN)$ quand $n>p$.
3. Soient $M\in\mathscr{M}_{np}(K)$, $N\in\mathscr{M}_{pq}(K)$ et $r\in[[1,\min(n,q)]]$. Montrer, pour $X\subset[[1,n]]$ et $Y\subset[[1,q]]$ avec $\mathrm{Card}\,(X)=\mathrm{Card}\,(Y)=r$: $\Delta_{X,Y}(MN)=\sum_{Z\subset[[1,p]];\mathrm{Card}\,(Z)=r}\Delta_{X,Z}(M)\Delta_{Z,Y}(N)$.

[003450]

Exercice 3002

Dans le plan, on donne n points A_1, ... , A_n. Existe-t-il n points M_1,..., M_n tels que A_1 soit le milieu de $[M_1,M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2,M_3]$,..., A_{n-1} soit le milieu de $[M_{n-1},M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n,M_1]$.

Correction ▼ [005377]

112 200.99 Autre

Exercice 3003

Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer. [001153]

Exercice 3004

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in M_n(\mathbb{R})$ est dite triangulaire supérieure lorsque pour tout $i > j : a_{ij} = 0$.

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2. Démontrer que $\det(A) = a_{11}\cdots a_{nn}$.
3. Soit E un espace vectoriel, $\varepsilon = \{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On note E_i l'espace vectoriel engendré par $\{e_1,\dots,e_i\}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $\mathrm{Mat}(\varphi,\varepsilon)$ est triangulaire supérieure si et seulement si $\varphi(E_i) \subset E_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.
4. Démontrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

[001154]

Exercice 3005

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = I+N.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ calculer $\det(A^n)$.
2. Calculer N^2 et N^3.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner le rang de N^n et celui de A^n.
4. En utilisant 1., donner, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de la matrice $M(n) = A^n$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la formule $(A^n)^{-1} = M(-n)$. Expliquer et justifier l'écriture : $A^n = M(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

[001155]

Exercice 3006

Soit S la matrice 5×5 à coefficients réels : $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer det (S). Déterminer (de préférence sans calcul) S^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux sous espaces vectoriels E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^5$ de dimension respective 2 et 3 tels que : $\mathbb{R}^5 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ et $S(E_1) \subset E_1$ $S(E_2) \subset E_2$.
3. Montrer qu'il existe $x \in E_2$ tels que $Sx = x$. En déduire que la décomposition qui précéde n'est pas unique.

[001156]

Exercice 3007

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in M_2(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [001157]

Exercice 3008

Soient $n = 2$ ou 3 et $A \in M_n(\mathbb{Q})$.

1. Montrer que si $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\det(A+X) = \det(X)$ alors $A = 0$.
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{Q})$ telle que $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\det(A+X) = \det(B+X)$. Montrer que $A = B$.

[001158]

Exercice 3009

Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A^2+B^2 = AB$ et $AB-BA$ inversible. Montrer que 3 divise n. [001159]

Exercice 3010

Montrer que si $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, A \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

[001160]

Exercice 3011

Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{rg}(A) = n \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n;$$

$$\mathrm{rg}(A) = n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1;$$

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0.$$

[001161]

Exercice 3012

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} \forall i & \in & \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1, \\ \forall (i,j) & \in & \{1,\dots,n\}^2, a_{i,j} \in [0,1[. \end{array}$$

Montrer que $|\det(A)| < 1$. [001162]

Exercice 3013

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice complexe dont les coefficients vérifient $|a_{i,j}| \leqslant 1$. Montrer que $|\det A| \leqslant 1$. [002451]

Exercice 3014

Soit A,B deux matrices carrées d'ordre n, A inversible.

1. Montrer que $\det(A+\lambda B)$ est un polynôme en λ de degré n. Quels sont ses termes de plus haut et de plus bas degré ?
2. En déduire que si A est une matrice inversible, pour toute matrice B, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A+\varepsilon B$ soit aussi inversible, $\forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

[002457]

Exercice 3015 $\det(I-AB) = \det(I-BA)$

Soient $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{q,p}(K)$. Montrer que $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$. (Commencer par le cas où A est la matrice canonique de rang r) [003426]

Exercice 3016 $\det(A^2+B^2)$

1. Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2+B^2) \geqslant 0$.
2. Chercher A,B ne commutant pas telles que $\det(A^2+B^2) < 0$.

Correction ▼ [003429]

Exercice 3017 Déterminant par blocs

Soient $A,B,C,D \in \mathscr{M}_n(K)$ avec A inversible et $AC = CA$. On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(K)$. Montrer que $\det M = \det(AD - CB)$. [003430]

Exercice 3018 Système linéaire homogène

On considère un système linéaire homogène : $(S) \iff AX = 0$, avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$, $n < p$ et $\mathrm{rg} A = n$.

1. Montrer qu'on peut compléter A en une matrice $B = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ inversible.
2. Montrer que les colonnes $n+1$ à p de ${}^t\mathrm{com}\,B$ constituent une base des solutions de (S).
3. Considérer l'exemple suivant :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & 5t & = & 0. \end{array} \right.$$

Correction ▼ [003434]

Exercice 3019 Inégalité

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que : $|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
Quand y a-t-il égalité ?

Correction ▼ [003435]

Exercice 3020 Déterminants 2×2 imposés

Soient $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ quatre vecteurs d'un ev E de dimension 2. On note det le déterminant dans une base fixée de E.

1. Démontrer que : $\det(\vec{a},\vec{b})\det(\vec{c},\vec{d}) + \det(\vec{a},\vec{c})\det(\vec{d},\vec{b}) + \det(\vec{a},\vec{d})\det(\vec{b},\vec{c}) = 0$.
   (Commencer par le cas où $(\vec{a},\vec{b})$ est libre)
2. On donne six scalaires : $d_{ab}, d_{ac}, d_{ad}, d_{cd}, d_{db}, d_{bc}$ tels que $d_{ab}d_{cd} + d_{ac}d_{db} + d_{ad}d_{bc} = 0$.
   Montrer qu'il existe des vecteurs $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ tels que : $\forall\, x,y,\ d_{xy} = -\frac{1}{2}xy$.

Correction ▼ [003436]

Exercice 3021 Décomposition d'un vecteur en dimension 3

Soient $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ quatre vecteurs d'un ev E de dimension 3. On note : det le déterminant dans une base fixée de E.
Démontrer que : $-\frac{1}{2}abc\vec{d} = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c} + \det(\vec{a},\vec{d},\vec{c})\vec{b} + \det(\vec{d},\vec{b},\vec{c})\vec{a}$.

Correction ▼ [003437]

Exercice 3022 $\det(u+n)$

Soient $u,n \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, u inversible, n nilpotent, avec $u \circ n = n \circ u$.

1. Démontrer que $\det n = 0$.
2. Chercher le polynôme caractéristique de n. En déduire que $\det(\mathrm{id}_E + n) = 1$.
3. Démontrer que $\det(u+n) = \det u$.

[003439]

Exercice 3023 Sev stables

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe deux sev F, G supplémentaires et stables par f.
Démontrer que $\det f = (\det f_{|F})(\det f_{|G})$.

[003440]

Exercice 3024 Groupe $SL_n(K)$

On note $SL_n(K) = \{M \in \mathscr{M}_n(K) \text{ tq } \det M = 1\}$.

1. (a) Démontrer que $SL_n(K)$ est un groupe pour le produit matriciel.
   (b) Démontrer que $SL_n(K)$ est engendré par les matrices : $I + \lambda E_{ij}$, $(j \neq i)$ où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$, et $\lambda \in K$ (transformer une matrice $M \in SL_n(K)$ en I par opérations élémentaires).
2. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que M a une inverse dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.
   (b) Démontrer que le groupe $SL_n(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices $I + E_{ij}$, $(j \neq i)$.

Correction ▼ [003441]

Exercice 3025 Déterminant de $X \mapsto AX$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $f_A : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K), X \mapsto AX$. Calculer $\det f_A$.

Correction ▼ [003442]

Exercice 3026 ***I

Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det C \geqslant 0$.

Correction ▼ [005368]

Exercice 3027 ***I

Déterminer les matrices A, carrées d'ordre n, telles que pour toute matrice carrée B d'ordre n on a $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Correction ▼ [005370]

Exercice 3028

Soit E un ensemble contenant au moins n éléments et $(f_1, f_2 ..., f_n)$ un n-uplet de fonctions de E dans $\mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre ;
2. il existe n éléments a_1, a_2,..., a_n dans E tels que $\det(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$.

Correction ▼ [005379]

Exercice 3029

Déteminer l'inverse de $A = (a_{i,j})$ telle que $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Correction ▼ [005380]

Exercice 3030 **I

Soit A une matrice carrée de format n. Calculer le déterminant de sa comatrice.

Correction ▼ [005614]

Exercice 3031 ***I

Soit A une matrice carrée de format n. Etudier le rang de com$A$ en fonction du rang de A.

Correction ▼ [005615]

Exercice 3032 ***

Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M = \mathrm{com}M$ ($n \geqslant 2$).

Correction ▼ [005616]

Exercice 3033 ***

Soit A une matrice carrée complexe de format n ($n \geqslant 2$) telle que pour tout élément M de $M_n(\mathbb{C})$, on ait $\det(A+M) = \det A + \det M$. Montrer que $A = 0$.

Correction ▼ [005648]

113 201.01 Valeur propre, vecteur propre

Exercice 3034

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m. Déterminer lorsque cela est possible A_m^{-1}.
3. Lorsque A_m n'est pas inversible déterminer le noyau et l'image de A_m.

[001597]

Exercice 3035

Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si -1 n'est pas valeur propre de A, alors il existe une matrice Q antisymétrique (i.e. ${}^tQ = -Q$) telle que $A = (I+Q)^{-1}(I-Q) = (I-Q)(I+Q)^{-1}$ et qu'on a $A \in \mathscr{S}\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Réciproque ?
[001598]

Exercice 3036

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f,g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$). [001599]

Exercice 3037

1. Soient f et g deux endomorphisme s d'un espace vectoriel E de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans K. Montrer que
$$f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$
2. Supposons maintenant que $K = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Si u est un endomorphisme on dit qu'un espace vectoriel F est $u-$stable si $u(F) \subset F$. Montrer que tout sous-espace propre de f est $g-$stable.
Remarque : On peut montrer par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à $f$et g. On admettra ce résultat.
3. Considérons f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

— Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les sous-espaces propres de M et N.
— Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

[001600]

Exercice 3038

Soient $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme associé à la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Uniquement* en examinant la matrice A, trouver deux valeurs propres et un vecteur propre de A, puis deux sous-espaces $f-$stables.
2. Que représente la matrice B ?

[001601]

Exercice 3039

Soit $u \in \mathrm{End}(E)$. On note $\chi_u = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$. Montrer que

$$a_0 = \det(u) \qquad \text{et} \qquad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(u)$$

[001602]

Exercice 3040

Soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres. [001603]

Exercice 3041

Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent, c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$. On suppose que v admet n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une base de E, formée de vecteurs propres communs à u et à v.
En déduire qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $u = a_0 \mathrm{id} + a_1 v + \cdots + a_{n-1} v^{n-1}$ [001604]

Exercice 3042

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible,

1. montrer que $\{0\} \subset \mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}A^2 \subset \mathrm{Ker}A^3 = \mathbb{R}^4$
et déterminer les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^2$,
2. déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}A^2 \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$,
3. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre,
4. montrer que $Ae_1 \in \mathrm{Ker}A^2$, et que $\mathrm{Ker}A^2 = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Vect}(Ae_1)$,
5. montrer que $A^2e_1 \in \mathrm{Ker}A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Vect}(A^2e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2)$,
6. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Caluler $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C [001605]

Exercice 3043

Soit J la matrice
$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
.

1. Trouver une relation entre J et J^2.
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer leurs multiplicités.
3. Donner le polynôme caractéristique de J.

[001606]

Exercice 3044

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$AB - BA = A$$
Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente, c'est à dire
$$\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0.$$
On note E l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application :
$$\psi \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & MB - BM \end{array}$$

1. Montrer que ψ est linéaire de E dans E.
2. Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \psi(A^k) = kA^k$.
3. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$. Montrer que ψ a une infinité de valeurs propres.
4. Conclure.

[001607]

Exercice 3045

Soit M la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de M. En déduire M^{-1}.

[001608]

Exercice 3046

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$. Soit $\pi_1, \dots, \pi_N$ des endomorphismes tous non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ N nombres complexes distincts. On suppose que :
$$\forall m \in \mathbb{N} \quad f^m = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^m \pi_k.$$

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(f) = \sum_{k=1}^{N} P(\lambda_k)\pi_k$

   On considère le polynôme $Q = \prod_{1 \leqslant k \leqslant N}(X - \lambda_k)$ et pour chaque $p \in \{1, \dots, N\}$ les polynômes suivants :
$$Q_p = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant N \\ k \neq p}} (X - \lambda_k) \qquad \text{et} \qquad \tilde{Q}_p = \frac{1}{Q_p(\lambda_p)}\, Q_p$$

2. Calculer $Q(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?
3. Montrer que $Sp(f) \subset \{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$
4. Montrer que $\tilde{Q}_p(f) = \pi_p$. Vérifier alors que $\pi_p \circ \pi_q = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq q \\ \pi_p \text{ si } p = q \end{cases}$
5. Calculer $f \circ \pi_p$. En déduire que $Sp(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$.

   On note E_p l'espace propre associé à la valeur propre λ_p.
6. Montrer que $\mathrm{Im}\pi_p \subset E_p$. Réciproquement, pour $x \in E_p$, montrer que $x \in \mathrm{Ker}\pi_q$ pour $q \neq p$ (on calculera par exemple $\pi_q \circ f(x)$ de deux façons différentes) puis que $x = \pi_p(x)$. En déduire que $E_p \subset \mathrm{Im}\pi_p$.
7. En déduire que $\mathrm{Im}\pi_p = E_p$ et que $\mathrm{Ker}\pi_p = \bigoplus_{q \neq p} E_q$. Décrire géométriquement π_p.

[001609]

Exercice 3047

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X^2-1)P' - 2(nX+a)P \end{array}$$

Vérifier que cette application est bien définie.
Déterminer ses valeurs propres, et les espaces propres associés. [001610]

Exercice 3048

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Com} = \{v \in \mathscr{L}(E,E) / uv = vu\}$ des endomorphismes de E qui commutent avec u est un espace vectoriel.
2. (a) Soit v un élément de Com. Montrer que v préserve les espaces propres de u (c'est à dire que si E_λ est un espace propre de u associé à la valeur propre λ, on a $\forall x \in E_\lambda, v(x) \in E_\lambda$).
   (b) Donner la dimension des espaces propres de u et montrer que si x est un vecteur propre de u alors c'est aussi un vecteur propre de v.
   (c) A l'aide d'une base convenablement choisie, décrire tous les éléments de Com, et montrer que Com est de dimension n.
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2, ..., u^{n-1}) \subset \mathrm{Com}$.
4. On veut maintenant étudier l'indépendance linéaire de la famille $\{\mathrm{id}, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$. Pour cela, on considère n réels $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u^i = 0$.
   (a) Montrer que les (α_i) sont solution du système :

$$(*) \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + ... + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + ... + \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + ... + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

   (b) On rappel que : $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$. En déduire l'ensemble des solutions du système $(*)$ et conclure.
5. Montrer que $\mathrm{Com} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2, ..., u^{n-1})$.

Correction ▼ [001611]

Exercice 3049

Donner les valeurs propres, vecteurs propres et matrice de diagonalisation éventuelle des matrices suivantes dans $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

[002467]

Exercice 3050

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes, et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ ayant pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étudier, dans les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si u est diagonalisable. En donner une forme diagonalisée dans une base dont on donnera la matrice de passage par rapport à la base canonique.

[002468]

Exercice 3051

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$; on suppose qu'il existe un entier p tel que $M^p = I$. Montrer que si ω est une racine p-ième de l'unité, c'est une valeur propre de M ou alors M vérifie

$$M^{p-1} + \omega M^{p-2} + \cdots + \omega^{p-2} M + \omega^{p-1} I = 0.$$

[002470]

Exercice 3052

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K, u un endomorphisme de E et $P \in K[X]$. On suppose que u vérifie l'équation $P(u) = 0$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda) = 0$.
2. On suppose que P est de la forme

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i), \quad \text{avec } a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j.$$

Montrer que les seules matrices vérifiant $P(M) = 0$ sont de la forme $Q^{-1}DQ$, avec Q matrice inversible quelconque et D matrice diagonale que l'on précisera. Combien y a-t-il de matrices diagonales de ce type ?

[002471]

Exercice 3053

Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe E. On suppose qu'il existe a, b complexes tels que $u \circ v = au + bv$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun. [002472]

Exercice 3054

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'application qui à tout polynôme P de E fait correspondre $u(P) = P(X - 1)$.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E. Est-il injectif ou surjectif ?
2. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de u ainsi qu'une base dans laquelle u est diagonalisable.

[002473]

Exercice 3055

Soit A,B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes qui commutent ($AB = BA$). On suppose en outre que toutes les valeurs propres de B sont distinctes.

1. Montrer que tout vecteur propre de B est vecteur propre de A.
2. Montrer que A est de la forme $A = P(B)$, où P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$.

[002474]

Exercice 3056

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Étant donné deux réels a,b, on note u l'application qui à tout polynôme P de E fait correspondre

$$u(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
2. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de u.
3. Trouver le noyau de u, ainsi que l'ensemble des polynômes qui vérifient $u(P) = 1$.

[002476]

Exercice 3057

On considère la matrice $N \times N$

$$M = \begin{pmatrix} b & c & 0 & .. & 0 & 0 \\ a & b & c & .. & 0 & 0 \\ 0 & a & b & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & b & c \\ 0 & 0 & 0 & .. & a & b \end{pmatrix}$$

où a,b et c sont trois nombres complexes, avec $c \neq 0$. On note V un vecteur propre associé à la valeur propre λ de M.
Ecrire les relations reliant les composantes de V.
Déterminer toutes les valeurs propres de M.

Correction ▼ [002479]

Exercice 3058

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
2. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .

Correction ▼ [002570]

Exercice 3059

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

1. Démontrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.
2. Vérifier que pour tout $\vec{x} \in E$, on a

   $$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \text{ et } f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

   et en déduire que f admet toujours une valeur propre.

3. Démontrer que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.
4. Traduire géométriquement sur un dessin dans le cas $n = 2$.

Correction ▼ [002571]

Exercice 3060

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n = 0$.

1. Montrer que u n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

Correction ▼ [002579]

Exercice 3061

Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Correction ▼ [002580]

Exercice 3062

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.
3. Donner en le justifiant, mais sans calcul, le polynôme minimal de A.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [002594]

Exercice 3063

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les valeurs propres de A.
2. On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. Déterminer une base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\vec{\varepsilon}_1 \in E_1$, $\vec{\varepsilon}_2 \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme $(1, y)$.
3. Soit $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note (α, β) ses coordonnées dans la base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$A^n\vec{x} = \alpha\lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1 + \beta\lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2$$

4. Notons $A^n\vec{x} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Exprimer a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2. En déduire que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. Expliquer, sans calcul, comment obtenir à partir des questions précédentes une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.

Correction ▼ [002595]

Exercice 3064

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On note B la matrice : $B = P(A) \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ, alors $\vec{x}$ est un vecteur propre de B de valeur propre $P(\lambda)$.
2. Le but de cette question est de démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $P(\lambda)$, avec λ valeur propre de A.

   Soit $\mu \in \mathbb{C}$, on décompose le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs de degré 1 :
$$P(X) - \mu = a(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_r).$$
   (a) Démontrer que
$$\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n)\cdots\det(A - \alpha_r I_n).$$
   (b) En déduire que si μ est valeur propre de B, alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.
3. On note S_A l'ensemble des valeurs propres de A, démontrer que
$$S_B = \{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\}.$$
4. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et soit $Q(X)$ le polynôme :
$$Q(X) = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_r),$$
   on note C la matrice $C = Q(A)$.

   (a) Démontrer que $S_C = \{0\}$.

   (b) En déduire que le polynôme caractéristique de C est $(-1)^n X^n$ et que $C^n = 0$.

Correction ▼ [002596]

Exercice 3065

1. (a) Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}.$$
   (b) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On la notera A.

   (c) Montrer que le vecteur $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?

   (d) Montrer que le vecteur $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est également vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?

   (e) Calculer graphiquement l'image du vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Retrouver ce résultat par le calcul.

   (f) Montrer que la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

   (g) Quelle est la matrice de f dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$? On la notera D.

(h) Soit P la matrice dont la première colonne est le vecteur $\vec{v}_1$ et dont la deuxième colonne est le vecteur $\vec{v}_2$. Calculer P^{-1}.

(i) Quelle relation y-a-t-il entre A, P, P^{-1} et D ?

(j) Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Même exercice avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

[002761]

Exercice 3066

Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002762]

Exercice 3067

Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0).$$

[002763]

Exercice 3068

Trouver une matrice carrée inversible P telle que $B = PAP^{-1}$ soit diagonale, et écrire la matrice B obtenue, pour les matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002764]

Exercice 3069 DS mai 2008

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

qui représente f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathscr{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

1. (a) Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.

   (b) En déduire que l'on peut diagonaliser A.

2. (a) Déterminer une base $\mathscr{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vecteurs propres tels que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Préciser la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$; quelle relation lie les matrices A, P, P^{-1} et D ?

3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Après avoir donné D^n, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[002765]

Exercice 3070 DS mai 2008

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. (a) Donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre de A.

   (b) A est diagonalisable ; justifier cette affirmation et diagonaliser A.

[002766]

Exercice 3071

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a' & b & 2 & 0 \\ a'' & b' & c & 2 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions les inconnue doivent-elles satisfaire pour que cette matrice soit diagonalisable ? Ces conditions étant remplies, fournir une base de vecteurs propres pour A. [002767]

Exercice 3072

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[002777]

Exercice 3073 Valeurs propres de AB et BA

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(K)$. On note $C = I_n - AB$ et $D = I_p - BA$.
(I_n, I_p = matrices unité d'ordres n et p)

1. Montrer que si C est inversible, alors D l'est aussi (résoudre $DX = 0$).
2. Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1}.
3. En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.

Correction ▼ [003379]

Exercice 3074 Calcul de valeurs propres

Chercher les valeurs propres des matrices :

1. $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003499]

Exercice 3075 Calcul de valeurs propres

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$.

Chercher les valeurs et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. On distinguera les cas :

1. $(a_1,\dots,a_{n-1}) \neq (0,\dots,0)$.
2. $(a_1,\dots,a_{n-1}) = (0,\dots,0)$.

Correction ▼ [003500]

Exercice 3076 Polynômes de Chebychev

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $D_n(\theta) = \det(A + (2\cos\theta)I)$ par récurrence.
2. En déduire les valeurs propres de A.

Correction ▼ [003501]

Exercice 3077 Matrice tridiagonale

Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [003502]

Exercice 3078 Esem 91

Soit $C_{pq} = \begin{pmatrix} U_{pq} & (0) & U_{pq} \\ (0) & (0) & (0) \\ U_{pq} & (0) & U_{pq} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où U_{pq} est la matrice $p \times q$ dont tous les coefficients valent 1. Chercher les éléments propres de $C_{p,q}$.

Correction ▼ [003506]

Exercice 3079 Sommes par lignes ou colonnes constantes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que la somme des coefficients par ligne est constante $(= S)$. Montrer que S est une valeur propre de A.

Même question avec la somme des coefficients par colonne. [003508]

Exercice 3080 Matrices stochastiques

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall\, i,j,\ m_{ij} \geqslant 0 \\ \forall\, i,\ m_{i,1} + m_{i,2} + \cdots + m_{i,n} = 1. \end{cases}$ (*matrice stochastique*)

1. Montrer que 1 est valeur propre de M.
2. Soit λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ (si $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé, considérer le coefficient x_k de plus grand module). Montrer que si tous les coefficients m_{ij} sont strictement positifs alors $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

[003509]

Exercice 3081 $(X-a)P'$

Soit $E = K_n[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto (X-a)P'$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u. [003511]

Exercice 3082 $X(X-1)P' - 2nXP$

Soit $E = K_{2n}[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto X(X-1)P' - 2nXP$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Correction ▼ [003512]

Exercice 3083 X^3P mod $(X-a)(X-b)(X-c)$

Soient $\alpha,\beta,\gamma \in K$ distincts, et $\varphi : K_2[X] \to K_2[X], P \mapsto R$ où R est le reste de la division euclidienne de X^3P par $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. Chercher les valeurs et les vecteurs propres de φ.

Correction ▼ [003513]

Exercice 3084 $P(2-X)$

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\theta : K[X] \to K[X], P \mapsto P(2-X)$.

Correction ▼ [003514]

Exercice 3085 $P(X+1) - P'$

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\theta : K[X] \to K[X], P \mapsto P(X+1) - P'$.

Correction ▼ [003515]

Exercice 3086 Eivp 91

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ qui à P associe $(X-a)P' + P - P(a)$. Donner la matrice de f dans la base $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Chercher $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ et les éléments propres de f.

Correction ▼ [003516]

Exercice 3087 ***

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour P élément de E, soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.

Vérifier que f est un endomorphisme de E puis déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et les valeurs et vecteurs propres de f.

Correction ▼ [005655]

Exercice 3088 ****

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 /\ uv - vu = \alpha u + \beta v$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

Correction ▼ [005660]

Exercice 3089 ***

$E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour f élément de E, $\varphi(f)$ est l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (\varphi(f))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \text{ si } x \neq 0 \text{ et } (\varphi(f))(0) = f(0).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de φ.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Correction ▼ [005674]

114 201.02 Diagonalisation

Exercice 3090

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application linéaire. Donner la matrice A de T dans la base donnée.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans cette nouvelle base.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

[001612]

Exercice 3091

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base (e_1,e_2,e_3). On désigne par I_E l'application identité de E. Soit f une application linéaire de E dans E telle que $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Donner la matrice de f dans la base (e_1,e_2,e_3).
2. Donner la dimension et une base de $Ker(f - I_E)$.
3. Donner la dimension et une base de $Ker(f^2 + I_E)$.
4. Montrer que la reunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? Et celle de f^2 ?

[001613]

Exercice 3092

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans E.

1. Montrer que la condition $f^2 = 0$ est équivalente à $Imf \subset Kerf$. Quelle condition vérifie alors le rang de f ? On suppose dans la suite que $f^2 = 0$.
2. Soit F un supplémentaire de $Kerf$ dans E et soit $(e_1,\dots,e_r)$ une base de F. Montrer que la famille des vecteurs $(e_1,\dots,e_r,f(e_1),\dots,f(e_r))$ est libre. Montrer comment la compléter si nécessaire par des vecteurs de $Kerf$ pour obtenir une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $Imf = Kerf$?
4. Exemple. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f^2 = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question 2).

[001614]

Exercice 3093

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. [001615]

Exercice 3094

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A. [001616]

Exercice 3095

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ? [001617]

Exercice 3096

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire. [001618]

Exercice 3097

Soit n un entier strictement supérieur à 1. Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Soit x_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $A^{n-1}x_0 \neq 0$. Montrer que $(x_0, Ax_0, A^2x_0, \cdots, A^{n-1}x_0)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Comment s'écrit la matrice A dans cette base ?

Application : on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle A a une forme simple. [001619]

Exercice 3098

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ? Justifier. Écrire alors M sous une forme plus simple. [001620]

Exercice 3099

Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par sa matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner un base de Ker T et ImT.
2. (a) Calculer le polynôme caractéristique de T, puis ses valeurs propres.
   (b) Justifier, sans calcul, que T soit diagonalisable et écrire une matrice diagonale semblable à A .
   (c) Calculer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de T.
3. Soient $f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $f_3 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice P de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (f_1, f_2, f_3).
   (b) Calculer P^{-1}.
   (c) Ecrire la matrice D de T dans la base (f_1, f_2, f_3) .
4. Quelle relation relie A^3, D^3, P et P^{-1} ? En déduire A^3.

[001621]

Exercice 3100

Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

[001622]

Exercice 3101

Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? On ne cherchera pas à réduire explicitement A.

[001623]

Exercice 3102

Soit u l'application suivante :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2 - 1)P' \end{array}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u, et, si c'est possible, diagonaliser u.

[001624]

Exercice 3103

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A. De même, montrer que si x est un vecteur propre complexe de A, alors $\bar{x}$ (où $\bar{x}$ désigne le vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de x) est aussi un vecteur propre complexe de A.

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[001625]

Exercice 3104

Soit A_t la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$. Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$? En déduire le spectre de A_t. A_t est-elle diagonalisable ? [001626]

Exercice 3105

Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

[001627]

Exercice 3106

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E, qui commutent (c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$). On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \ldots, \mu_q$) les valeurs propres de u (resp. de v), et $F_1, \ldots, F_p$ les espaces propres associés (resp. $G_1, \ldots, G_q$).

1. Montrer que chaque G_j (resp. F_i) est stable par u (resp. v) (c'est à dire que $u(G_j) \subset G_j$).
2. On pose $H_{ij} = F_i \cap G_j$. Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. Montrer que F_i est la somme directe des espaces $(H_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant q}$.
3. En déduire l'énoncé suivant : *Lorsque deux endomorphismes diagonalisables u et v commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à u et à v (en d'autres termes, u et v sont diagonalisables simultanément dans la même base).*

[001628]

Exercice 3107

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables ? Si oui, les réduire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

[001629]

Exercice 3108

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est diagonalisable. [001630]

Exercice 3109

Soit P_0 un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, et f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & R = \text{ reste de la division euclidienne de } P \text{ par } P_0 \end{array}$$

A l'aide d'un polynôme annulateur de f, montrer que f est diagonalisable. [001631]

Exercice 3110

Soit α et β deux réels, et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1-\alpha & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

A quelle condition sur α et β, A est-elle diagonalisable ?
On suppose $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Vérifier que $A(A-I) = 0$. En déduire A^n et $(A+I)^{-1}$.

[001632]

Exercice 3111

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$?
Lorsqu'elles sont diagonalisables, donner une matrice diagonale semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Réduire explicitement A et C.

[001633]

Exercice 3112

On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E de dimension finie n, tel que f^2 est diagonalisable. Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$f \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$$

1. On suppose que f est diagonalisable. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les valeurs propres (distinctes) de A, et $E_1, \ldots, E_r$ les espaces propres associés.
   (a) Montrer que si $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ alors $\mathrm{Ker} f^2 = \{0\}$.
   (b) On suppose maintenant que $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$. On note $\alpha_{\alpha_1}, \ldots, \alpha_{\alpha_r}$ les autres valeurs propres de f, et $E_0, \ldots, E_r$ ses espaces propres. En utilisant que $E = E_0 \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$, montrer que si $f^2(x) = 0$ alors $f(x) = 0$. En déduire que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
2. On suppose que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (a) Montrer que si μ est une valeur propre de f, alors μ^2 est une valeur propre de f^2.
      i. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2, et μ et $-\mu$ ses deux racines complexes. Montrer que
      $$\mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}) \quad \text{et que} \quad \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}).$$
      ii. Montrer que
      $$\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id})$$
      (remarquer que $\forall y \in \mathrm{Ker} f^2 \;\; y = \frac{1}{2\mu}((f + \mu \mathrm{id})(y) - (f - \mu \mathrm{id})(y))$).
   (b) Montrer (avec soin) que f est diagonalisable.

[001634]

Exercice 3113

La matrice suivante est-elle diagonalisable, triangularisable ? Effectuer explicitement la réduction.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ [001635]

Exercice 3114

Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$. Calculer A^2, puis A^3. A l'aide d'un polynôme annulateur de A, montrer que A est diagonalisable.

Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de A, donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de A, puis donner les valeurs valeurs propres elles mêmes ainsi que leurs multiplicités. En déduire le polynôme caractéristique de A.

Correction ▼ [001636]

Exercice 3115

On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{C})$ et l'application ϕ_A définie par :

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & AB \end{array}$$

1. Montrer que ϕ_A est linéaire.
   Le but de l'exercice est de montrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
2. Calculer $\phi_A^2(B)$, puis $\phi_A^k(B)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire que si P est un polynôme, alors $P(\phi_A) = \phi_{P(A)}$.
3. En déduire que P est un polynôme annulateur de A si et seulement si P est un polynôme annulateur de ϕ_A.
4. Montrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

[001637]

Exercice 3116

A n nombres complexes $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $a_2 \neq 0$, on associe la matrice $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & \text{{\Large 0}} & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A_n. Qu'en déduit-on pour le polynôme caractéristique χ_n de A_n ?
2. Calculer χ_2, χ_3.
3. On pose $b_n = a_2^2 + \cdots + a_n^2$. Par récurrence, montrer que $\chi_n = (-X)^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_n)$.
4. Si $b_n = 0$, A_n est-elle diagonalisable ?
5. Si $b_n \neq 0$, à quelle condition A_n est-elle diagonalisable ?

[001638]

Exercice 3117

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tA$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Trouver une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. [001639]

Exercice 3118

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E tel que $u^p = 0$ pour un certain entier p. Quelles sont les valeurs propres de u. A quelle condition u est-il diagonalisable ? Montrer que $u^n = 0$.
[001640]

Exercice 3119

Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables, triangularisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A l'aide du polynôme caractéristique de B, calculer B^{-1}.

Correction ▼ [001641]

Exercice 3120

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer ${}^tA$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Diagonaliser A.
3. Diagonaliser A dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$).

Correction ▼ [001642]

Exercice 3121

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application linéaire suivante :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \frac{1}{2}P''(0)X + \frac{1}{6}P'''(0) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique. Calculer A^2.
2. u est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de $\mathbb{R}^3[X]$ formée de vecteurs propres de u.

[001643]

Exercice 3122

On considère un réel α et l'application T_α suivante :

$$T_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X(X-1)P'' + (1+\alpha X)P' \end{array}$$

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$, la restriction de T_α à $\mathbb{R}_n[X]$ défini un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose pour cette question que $n = 3$.
   (a) Ecrire la matrice de T_α dans la base $(1, X, X^2, x^3)$.
   (b) Déterminer les valeurs propores de T_α. On les note $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
   (c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T_α a des valeurs propres multiples.
   (d) Donner un vecteur propre de T_α pour chaque valeur propre, lorsque $\alpha = -1$, puis $\alpha = -4$. L'endomorphisme T_{-4} est-il diagonalisable ?
3. On suppose maintenant $n > 3$.
   (a) Ecrire la matrice de T_α dans la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
   (b) Déterminer les valeurs propores de T_α. On les note $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   (c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T_α a des valeurs propres multiples. Dans chaque cas, donner la liste des valeurs propres avec leurs multiplicités
   (d) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker} T_\alpha$ et de $\mathrm{Im} T_\alpha$ lorsque $\alpha \notin \{1-n, \ldots, -1, 0\}$.
   (e) Déterminer $\mathrm{Ker} T_\alpha$ pour $\alpha = -1$, puis $\alpha = 0$. L'endomorphisme T_0 est-il diagonalisable ?

(f) Lorsque $\alpha = p-1$ avec $p \in \{1,...,n\}$, donner un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $T_\alpha(P) = 0$. En déduire $\mathrm{Ker} T_\alpha$. Préciser sa dimension.

(g) Soit λ_k une valeur propre simple de T_α. Donner un vecteur propre de T_α associé à λ_k.

[001644]

Exercice 3123

Soient $\mathbb{R}^n$ euclidien, $f \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale. [001645]

Exercice 3124

Diagonaliser en base orthonormale les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, a_i \in \mathbb{R}; B = \begin{pmatrix} a & b & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Peut-on déterminer a, b tels que B soit la matrice d'un produit scalaire ? [001646]

Exercice 3125

Montrer que si A est une matrice symétrique réelle, alors $A + iI$ est inversible. [001647]

Exercice 3126

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } k \in \mathbb{C}.$$

(a) Déterminer, suivant les valeurs de k, la dimension du noyau de f.
(b) Montrer que M admet une valeur propre réelle entière indépendante de k, et calculer toutes les valeurs propres de M.
(c) Indiquer toutes les valeurs de k pour lesquelles on obtient des valeurs propres multiples. Pour quelles valeurs de ces k la matrice M est-elle semblable à une matrice diagonale ? [001648]

Exercice 3127

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.

1. Montrer que n est pair, $n = 2p$.
2. Calculer $Sp_\mathbb{R}(A)$ et montrer $Sp_\mathbb{C}(A) = \{i, -i\}$. Pour quelle raison A est elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. Montrer que si $\{y_1, \dots y_k\}$ est une base de E_i, alors $\{\overline{y_1}, \dots \overline{y_k}\}$ est une base de E_{-i}. Quelle est donc la valeur de k ?
4. Démontrer que A est semblable (dans $M_n(\mathbb{R})$) à une matrice diagonale par blocs dont chacun des blocs diagonaux est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (on pourra utiliser la question 3.)

[001649]

Exercice 3128

Soient M et $N \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\varphi_M \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}))$ l'application $N \mapsto MN - NM$.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et montrer que B n'est pas diagonalisable.

2. Montrer que si N est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle λ de φ_M alors N est nilpotente. (on pourra établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $MN^k - N^kM = k\lambda N^k$.)
3. Montrer que l'identité n'appartient pas à l'image de φ_M. (utiliser la trace.)
4. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser φ_D puis φ_A. Montrer que φ_B n'est pas diagonalisable.
5. Montrer que si M est diagonalisable, φ_M est diagonalisable.
6. Etablir la réciproque lorsque M a au moins une valeur propre.

[001650]

Exercice 3129

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $p \in \mathscr{L}(E)$ est nommée projecteur lorsque $p^2 = p$.

1. Montrer que si p est un projecteur $1-p$ est un projecteur. Montrer que $\operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p) = E$.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient p et q deux projecteurs tels que $p+q$ soit aussi un projecteur. Montrer que :
   (a) $pq = qp = 0$.
   (b) $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$.
   (c) $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$.

   On suppose désormais E de dimension finie et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. Montrer que tout projecteur est diagonalisable et que deux projecteurs sont semblables si et seulement si ils ont même trace.
4. Montrer que toute matrice diagonalisable est combinaison linéaire de projecteurs.

[001651]

Exercice 3130

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $P(Sp(u)) = \{P(\lambda); \lambda \in Sp(u)\}$.

1. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que $P(Sp(u)) = Sp(P(u))$.
2. Montrer, dans le cas général, $P(Sp(u)) \subset Sp(P(u))$.
3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ montrer que $Sp(P(u)) \subset P(Sp(u))$. Ce résultat est-il vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

[001652]

Exercice 3131

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que f^2 soit diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$. [001653]

Exercice 3132

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ déterminée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que la restriction de f a tout sous-espace stable est diagonalisable.
3. En déduire tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

[001654]

Exercice 3133

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $\varphi_M \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}))$ l'application $N \mapsto MN$. Montrer que φ_M est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable. (utiliser le polynôme minimal.) [001655]

Exercice 3134

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $\{id, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$ est libre.

(ii) Il existe $x \in E$: $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ engendre E.

(iii) Les valeurs propres de f sont simples. [001656]

Exercice 3135

Soit ρ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par (X^2-1).

1. Montrer que ρ est linéaire.
2. Montrer que $\rho^2 = \rho$. En déduire que ρ est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour ρ.

[001657]

Exercice 3136

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propores de A. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A-I)^2$. En déduire A^n, en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.
   En remarquant que $P(A) = 0$ (on dit alors que P est un polynôme annulateur de A) et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.
4. Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $(A-I)$ est un sous-espace de dimension 1, dont on désignera une base par ε_2. Déterminer ensuite un vecteur ε_3 tel que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Soit enfin ε_1, un vecteur propre de f, non colinéaire à ε_2. Ecrire $\tilde{A}$, la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, ainsi que la matrice de passage P et son inverse P^{-1}. Retrouver A^n.

[001658]

Exercice 3137

Soit f un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable. [001659]

Exercice 3138

Les questions sont indépendantes. K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base fixée de E et f un endomorphisme de E.

1. Quels sont les valeurs propres de l'endomorphisme nul de E ?
2. On suppose que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) 2 est-il valeur propre de f ?
   (b) Le vecteur $2e_1 + e_2 + e_3$ est-il un vecteur propre de f ?

3. Pourquoi un vecteur de E ne peut-il être vecteur propre relativement à deux valeurs propres distinctes ?
4. (a) Est-il vrai que si λ est une valeur propre de f et si P est un polynôme annulateur de f alors λ est racine de P ?
   (b) Est-il vrai que si λ est une racine d'un polynôme annulateur de f alors λ est une valeur propre de f ?
5. Montrer que si $f^2-2f+\mathrm{Id}_E=0$ alors 1 est valeur propre de f.
6. Montrer qu'il existe toujours au moins un scalaire α tel que $f-\alpha\mathrm{Id}_E$ est bijectif.
7. Donner un exemple d'endomorphisme f de E avec $n=2$ tel que la somme de deux vecteurs propres de f n'est pas un vecteur propre de f.
8. On suppose que $E=E_1\oplus E_2$ et que si $x\in E$ s'écrit x_1+x_2 avec $x_1\in E_1$ et $x_2\in E_2$ alors $f(x)=2x_1-3x_2$.
   (a) Quel résultat assure l'existence d'un tel endomorphisme ?
   (b) Montrer que f est diagonalisable.
9. La matrice $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
10. Si l' endomorphisme f admet 0 pour valeur propre et est diagonalisable, que peut-on dire de la dimension du noyau de f ?

[001660]

Exercice 3139

Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes et le cas échéant, les diagonaliser :

1. $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\8&1&-5\\4&3&-3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
2. $B=\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\0&0&1&1&0\\0&-1&2&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&2&-3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$,
3. $C=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&k&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_4(\mathbb{C}),k\in\mathbb{C}$.

[001661]

Exercice 3140

Soient $A\in\mathscr{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{tr}(A)\neq 0$ et

$$f:\mathscr{M}_n(K)\to\mathscr{M}_n(K),M\mapsto \mathrm{tr}(A)M-\mathrm{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(K)$.
2. Montrer que $\mathscr{T}=\{M\in\mathscr{M}_n(K):\mathrm{tr}(M)=0\}$ et $\mathrm{vect}(A)$ sont des sous-espaces propres de f.
3. En déduire que f est diagonalisable et écrire la matrice réduite de f.

[001662]

Exercice 3141

Montrer que si le polynôme minimal d'un endomorphisme f d'un K-espace vectoriel de dimension finie admet une racine $\lambda\in K$ alors λ est valeur propre de f. [001663]

Exercice 3142

Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes

1. $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&3&-1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), n \geqslant 2,$

[001664]

Exercice 3143

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors $\operatorname{tr}(f) \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que le polynôme cararactéristique de f s'écrive

$$\chi_f = (-1)^n X^{n-1}(X-\lambda).$$

3. (a) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(f) \neq 0$.
   (b) Réduire sans calcul la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sans calcul les sous-espaces vectoriels propres.

[001665]

Exercice 3144

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $Y \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y^2 = D$.
   (a) Montrer que Y et D commutent.
   (b) En déduire que Y est diagonale puis déterminer Y.
2. (a) Montrer que A est diagonalisable.
   (b) En déduire les solutions $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$.

[001666]

Exercice 3145

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable et $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$.
2. Soit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que $\ker(f^2 - \mu^2 \mathrm{Id}_E) = \ker(f - \mu \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu \mathrm{Id}_E)$.
3. On suppose $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$.
   (a) Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$.
   (b) On suppose en outre que f^2 est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.

[001667]

Exercice 3146

On considère la matrice par blocs $A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Calculer A^2.
2. Rechercher les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

[001668]

Exercice 3147

On désigne par E l'espace vectoriel des polynôme s à coefficients réels, et par E_n, le sous-espace des polynôme s de degré au plus n.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\Delta P(x) = (x+1)P'(x) + 2P(x)$ définit une application linéaire de E dans E. Quel est le degré de ΔP lorsque P appartient à E_n ?
2. On considère Δ_2, la restriction de Δ au sous-espace E_2. Déterminer les valeurs propres de Δ_2. L'endomorphisme Δ_2 est-il diagonalisable ? Est-ce que Δ_2 est un isomorphisme ?
3. En utilisant la définition des valeurs propres, calculer les valeurs propres et les polynôme s propres de Δ.

[001669]

Exercice 3148

Pour tout élément non nul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ est la matrice $A = (\alpha_{i,j})$ où $\alpha_{i,j} = a_i a_j$.

1. Déterminer le noyau et l'image de u.
2. En déduire les sous-espaces propres de u. Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

[001670]

Exercice 3149

Soit B une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit son rayon spectral par

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| \text{ avec } \lambda \text{ est une valeur propre de } B\}.$$

1. Montrer que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} B^k = 0$.
2. En déduire que $I - B$ est inversible et que $(I-B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k$.

[001671]

Exercice 3150 Endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^2$

On considère l'endomorphisme a de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative $A = [a]_e^e$ dans la base canonique e est $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$. Calculer la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique et le spectre de a. Quel théorème du cours garantit l'existence d'une base $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ de vecteurs propres ? Choisir ensuite f telle que $[\mathrm{id}_E]_f^e$ et $[\mathrm{id}_E]_e^f$ soient à coefficients entiers. Dessiner $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$, en prenant des unités d'axes assez petites. Dessiner quelques vecteurs $\vec{x}$ et leurs images $a(\vec{x})$ à l'aide de f.
Trouver deux matrices P et D carrées d'ordre 2 telles que D soit diagonale, P inversible et $A = PDP^{-1}$. Calculer $[a^{50}]_f^f$, $[a^{50}]_e^e$ et A^{50}. Calculer $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} a^{2n}$.

Correction ▼ [001672]

Exercice 3151 Endomorphisme d'un espace de matrices

Soit K un corps commutatif quelconque, et soit $F = \mathscr{M}_n(K)$ l'espace vectoriel sur K des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. Si i et j sont des entiers compris entre 1 et n, on note par F_{ij} l'élément de F dont le coefficient (i, j) est 1 et dont les autres coefficients sont nuls. Montrer que les F_{ij} forment une base de F. Dimension de F ? Soit D dans F et diagonale. Soient α et β dans K et soit l'endomorphisme Φ de F qui à la matrice X fait correspondre la matrice $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$. Calculer $\Phi(F_{ij})$. Φ est il un endomorphisme diagonalisable ? Donner son polynôme caractéristique en fonction des coefficients de D et de α et β.

Correction ▼ [001673]

Exercice 3152

Soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère les deux matrices d'ordre n :

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\1&0&1&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2\cos\theta&1&0&\cdots&0&0\\1&2\cos\theta&1&\cdots&0&0\\0&1&2\cos\theta&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2\cos\theta&1\\0&0&0&\cdots&1&2\cos\theta\end{bmatrix}$$

Montrer par récurrence que $\det B=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ (Méthode : développer par rapport à la dernière ligne). Montrer que $\det B$ s'annule pour n valeurs distinctes de θ de $]0,\pi[$, et les déterminer. Si P_A est le polynôme caractéristique de A, calculer $P_A(-2\cos\theta)$ et déduire de ce qui précède les valeurs propres de A. Montrer que les valeurs propres des matrices $2I_n+A$ et $2I_n-A$ sont strictement positives.

Correction ▼ [001674]

Exercice 3153

Soit a,b,c trois réels et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice

$$M=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Discuter la possibilité de le diagonaliser selon les valeurs de a,b,c. [002469]

Exercice 3154

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n non nulle et nilpotente.

1. Montrer que $I-A$ n'est pas diagonalisable.
2. Généraliser en montrant que si B est une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont égales, alors $B+A$ n'est pas diagonalisable.
3. Montrer qu'il existe A,B dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $A\neq 0$ nilpotente et B diagonalisable, telles que $A+B$ soit diagonalisable.

[002477]

Exercice 3155

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D=P^{-1}MP$, pour $k\in\mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Correction ▼ [002563]

Exercice 3156

Soit

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002566]

Exercice 3157

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factoriser le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Correction ▼ [002567]

Exercice 3158

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002568]

Exercice 3159

(*9 points*) Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   En déduire la décomposition de Dunford de B.
5. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

[002572]

Exercice 3160

(*7 points*) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

   Justifier.

2. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2.
3. Soit $R_n(X) = a_nX + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).
4. Montrer que $A^n = a_nA + b_nI_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

[002573]

Exercice 3161

(*5 points*) Soit A une matrice carrée, $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que $\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}A$.
Démontrer que $\det(\exp A) = \mathrm{e}^{\mathrm{trA}}$ dans les cas suivants :

1. A diagonalisable.
2. A triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3. A trigonalisable.
4. A quelconque.

[002574]

Exercice 3162

(*4 points*) On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. Diagonaliser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Exprimer le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A.
3. Représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy).
4. Discuter graphiquement l'évolution de la population des lapins en fonction des conditions initiales.

Correction ▼ [002575]

Exercice 3163

(*9 points*) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A - I)^2$. Montrer que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q. En remarquant que $P(A) = 0$ et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.
4. (a) Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $u - mathrmId$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on notera ε_2 une base.
   (b) Déterminer un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Déterminer un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.
   (c) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.Ecrire la matrice de u dans cette base, ainsi que les matrices de passage.

(d) Retrouver A^n.

Correction ▼ [002576]

Exercice 3164

(*7 points*) Soient M et A deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

1. Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ, montrer que $MAx = \lambda Ax$, en déduire que les vecteurs x et Ax sont colinéaires, puis que tout vecteur propre de M est un vecteur propre de A.
2. On note maintenant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de M et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de A.
   (a) Montrer par récurrence sur n l'égalité suivante :
   $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j).$$
   En déduire que le système suivant
   $$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} \\ \quad \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} \end{cases}$$
   admet une unique solution $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes :
   $$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$
   Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que
   $$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$
   et en déduire qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que
   $$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

Correction ▼ [002577]

Exercice 3165

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que les valeurs propres de A sont -1 et 2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002581]

Exercice 3166

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliquer sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction ▼ [002583]

Exercice 3167

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de A la somme des coefficients est égale à 1.

1. Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on suppose que
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
montrer qu'alors
$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$
2. Soit le vecteur $\varepsilon = (1, -1)$, montrer que c'est un vecteur propre de A. On notera λ sa valeur propre.
3. Montrer que si v est un vecteur propre de A non colinéaire à ε, alors la valeur propre associée à v est égale à 1.
4. Soit $e_1 = (1, 0)$. Montrer que la matrice, dans la base (e_1, ε), de l'endomorphisme associé à A est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire que si $\lambda \neq 1$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002584]

Exercice 3168

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Première partie :

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.

Seconde partie :
On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
2. Démontrer que f admet un plan stable (c'est-à-dire f-invariant).

3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

II

On rappelle qu'une matrice $N \in M_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente d'ordre m si $N^m = 0$, et si pour tout k dans $\mathbb{N}$, $k < m$, on a $N^k \neq 0$. Soient $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'ordre m et $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $AN = NA$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de N. En déduire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de N.
2. Déterminer les valeurs propres de N.
3. Démontrer que $\det(I+N) = 1$.
4. On suppose A inversible. Démontrer que les matrices AN et NA^{-1} sont nilpotentes. En déduire que

$$\det(A+N) = \det A.$$

5. On suppose A non inversible. En exprimant $(A+N)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\det(A+N) = 0.$$

Correction ▼ [002586]

Exercice 3169

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002587]

Exercice 3170

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.

Correction ▼ [002591]

Exercice 3171

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A-2I_3)^2$, puis $(A-2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Correction ▼ [002592]

Exercice 3172

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f.
2. Déterminer les vecteurs propres de f.
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Trouver des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que
$$f(\vec{v}) = 2\vec{v}+\vec{u} \text{ et } f(\vec{w}) = 2\vec{w}+\vec{v}.$$
4. Soit $\vec{e}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 1. Démontrer que $(\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de f dans cette base.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [002593]

Exercice 3173

Soit $m \in \mathbb{R}$, et A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A et montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 1.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ? (justifier). Déterminer suivant les valeurs de m le polynôme minimal de A (justifier).

Correction ▼ [002599]

Exercice 3174

1. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (justifier).
2. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$ (justifier).

Correction ▼ [002600]

Exercice 3175

Soit A la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Exprimer les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans une base de vecteurs propres et tracer ses trajectoires.

Correction ▼ [002601]

Exercice 3176

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Correction ▼ [002603]

Exercice 3177

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de cet endomorphisme ?
2. Démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la matrice A admet une unique valeur propre réelle. Quel est le sous-espace propre associé ? Que se passe-t-il si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$?

Correction ▼ [002604]

Exercice 3178

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et -2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002605]

Exercice 3179

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? (Justifier).
2. Calculer $(A-I)^2$. Démontrer que $A^n = nA + (1-n)I$.

Correction ▼ [002606]

Exercice 3180

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer, sans calculs, des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$.
3. Soit $\vec{e}$ tel que $f(\vec{e}) = \vec{e}$. Démontrer que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier.)

Correction ▼ [002607]

Exercice 3181

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $AP = PB$ (ou $A = PBP^{-1}$).
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $y' = By$ et $x' = Ax$, où x et y désignent des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [002608]

Exercice 3182

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
   Lorsque A est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de A.
2. Soit E l'espace vectoriel des solutions du système $x' = Ax$, où x est une fonction de la variable réelle t à valeur dans $\mathbb{R}^3$.
   (a) Lorsque A est diagonalisable, donner une base de E en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de A. Ecrire la solution générale du système.
   (b) Lorsque A n'est pas diagonalisable, intégrer directement le système $x' = Ax$.
3. Soit E_0 l'ensemble des éléments s de E tels que $\lim_{t \to +\infty} s(t) = \vec{0}$. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E. (hors barème) Déterminer sa dimension en fonction de a.
4. Soit F l'ensemble des éléments s de E bornés sur $[0, +\infty[$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E. (hors barème) Déterminer sa dimension en fonction de a.

Correction ▼ [002609]

Exercice 3183

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

I

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.

II

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\ker(A+I)^2$ est un plan stable par f.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ ($AP = PB$).
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

III

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = -1$, on note $A = A_{-1}$.

1. Vérifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Donner les solutions du système différentiel $X' = A.X$.

IV

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 1$, on note $A = A_1$.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
2. Trigonaliser la matrice A.

Correction ▼ [002610]

Exercice 3184

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose $a + c = b + d = 1$ et $a - b \neq 1$.

1. Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tels que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

   montrer qu'alors

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

2. Soit le vecteur $\vec{x} = (1,-1)$, vérifier que $\vec{x}$ est un vecteur propre de A, et déterminer sa valeur propre.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A et calculer ses racines.
4. Déterminer un vecteur propre, $\vec{y}$, de A non colinéaire à $\vec{x}$ et exprimer la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base $(\vec{x},\vec{y})$.

Correction ▼ [002611]

Exercice 3185

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une base de E, si $\vec{u}$ est un vecteur de E on note (x,y,z) ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$f : E \longrightarrow E$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ 2x+2z \\ 4x-2y+4z \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. Déterminer les sous-espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soient $\vec{u}_1 = (1,0,-1)$, $\vec{u}_2 = (1,2,0)$ et $\vec{u}_3 = (0,1,1)$. Démontrer que $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est une base de E.
4. Calculer $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminer la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$.
5. Déterminer les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.

Correction ▼ [002612]

Exercice 3186

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On cherche à déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

1. Démontrer que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n.
2. On suppose maintenant que $n = 4$.
   (a) Démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} \neq 0$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.
   (b) Soit $\vec{x}_1 \neq 0$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$.
      i. Démontrer que F est stable par f.
      ii. Soit $\vec{x}_2 \in E$, on suppose que $\vec{x}_2 \notin F$, démontrer que $\mathscr{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$ est une base de E.
   (c) Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (d) Calculer $\det f$ et $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (e) L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?

Correction ▼ [002613]

Exercice 3187

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$

(a) Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A.

(b) Trouver D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et

$$A = D + N.$$

3. Soit le système différentiel suivant :

$$\mathscr{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminer les solutions de $\mathscr{E}$.

Correction ▼ [002614]

Exercice 3188

Questions préliminaires :

(a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ. Démontrer que $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Enoncer le théorème de Hamilton-Cayley.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A. Donner une base de vecteurs propres de A et diagonaliser A.
2. On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

   (a) Démontrer que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.

   (b) Déterminer les valeurs propres de B et leur multiplicité.

   (c) Ecrire le polynôme caractéristique de B.

   (d) Déterminer B telle que $B^3 = A$.

Correction ▼ [002615]

Exercice 3189 Diagonalisation en dimension 2

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Correction ▼ [003496]

Exercice 3190 Diagonalisation en dimension 3

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 2 & -6\\ -2 & 2 & -6\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$
5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$
6. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$
7. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$
8. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$
9. $A=\begin{pmatrix}7 & -12 & -2\\ 3 & -4 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$
10. $A=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 6\\ -4 & 10 & 6\\ 4 & -8 & -4\end{pmatrix}$

Correction ▼ [003497]

Exercice 3191 Diagonalisation en dimension 4

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}0 & 2 & -2 & 2\\ -2 & 0 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}-5 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -11 & 5 & 0\\ 0 & 7 & -9 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Correction ▼ [003498]

Exercice 3192 Diagonalisation

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(K)$.

Correction ▼ [003503]

Exercice 3193 Diagonalisation

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Correction ▼ [003504]

Exercice 3194 Engees 93

Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [003505]

Exercice 3195 Matrice triangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. A quelle condition A est-elle diagonalisable ? [003507]

Exercice 3196 $(X^2-1)P''+(2X+1)P'$

Soit $E = K_n[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto (X^2-1)P''+(2X+1)P'$.

1. Chercher la matrice de u dans la base canonique de $K_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.

Correction ▼ [003510]

Exercice 3197 $\mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. L'endomorphisme f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $f(M) = \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$ est-il diagonalisable ?

Correction ▼ [003517]

Exercice 3198 ***

Soit f qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = (X^2-1)P' - 2nXP$.
Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

Correction ▼ [005654]

Exercice 3199 ****

Soient A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et M l'élément de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.
Calculer $\det M$. Déterminer les éléments propres de M puis montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Correction ▼ [005663]

Exercice 3200 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A est diagonalisable.

Correction ▼ [005667]

Exercice 3201 ***

Soit A une matrice carrée de format 2 telle que A^2 est diagonalisable et $\mathrm{Tr}A \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Correction ▼ [005673]

Exercice 3202 ***I

Sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On donne trois endomorphismes f, u et v tels qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour $k \in \{1,2,3\}$, $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$. Montrer que f est diagonalisable.

Correction ▼ [005675]

Exercice 3203 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ où $a_1,\dots, a_n$ sont n nombres complexes ($n \geqslant 2$). A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [005682]

115 201.03 Polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 3204 Formules pour une matrice 3×3

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\mathrm{tr}A)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det(A)$.
2. Soit λ une valeur propre de A et L_1, L_2 deux lignes non proportionnelles de $A - \lambda I$ (s'il en existe). On calcule $L = L_1 \wedge L_2$ (produit vectoriel) et $X = {}^tL$. Montrer que X est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

[003524]

Exercice 3205 Recherche de vecteurs propres pour une valeur propre simple

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $\lambda \in K$ une valeur propre de A telle que $\mathrm{rg}(A - \lambda I) = n - 1$.

1. Quelle est la dimension du sous espace propre E_λ ?
2. Montrer que les colonnes de ${}^t\mathrm{com}(A - \lambda I)$ engendrent E_λ.
3. Exemple : diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003525]

Exercice 3206 Éléments propres de C^tC

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = C^tC$.

1. Chercher le rang de M.
2. En déduire le polynôme caractéristique de M.
3. M est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003526]

Exercice 3207 Ensi Chimie P 94

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \frac{i}{j}$. A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003527]

Exercice 3208 Ensi Chimie P 93

On considère le polynôme défini par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_n(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$ avec $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_i \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

1. Montrer qu'il existe une unique racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ pour P_n.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A admet une unique valeur propre réelle strictement positive.

Correction ▼ [003528]

Exercice 3209 Ensi Physique 93

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\Delta_n = \det(I + (x_i y_j))$.

Correction ▼ [003529]

Exercice 3210 Centrale MP 2000

On considère la matrice de $M_n(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq b$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\frac{(-1)^n}{a-b}(a(X+b)^n - b(X+a)^n)$.
2. Montrer qu'en général les valeurs propres de A sont sur un cercle.

Correction ▼ [003530]

Exercice 3211 Centrale MP 2000

Soit $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$ et $A_n = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \vdots & b_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & a_n+b_n \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det A_n$.
2. Calculer χ_A le polynôme caractéristique de A.
3. On suppose $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et, pour tout i, $b_i > 0$. Montrer que A_n est diagonalisable $\Big($on pourra utiliser $\chi_A(t)/\prod_{i=1}^n (a_i - t)\Big)$.
4. Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ et, pour tout i, $b_i > 0$?

Correction ▼ [003531]

Exercice 3212 Polynômes caractéristiques

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ inversible et $B = A^{-1}$, $C = A^2$. Exprimer les polynômes caractéristiques χ_B et χ_C en fonction de χ_A.

Correction ▼ [003532]

Exercice 3213 Matrice compagnon

Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} - X^n \in K_n[X]$. La matrice compagnon de P est $M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Soit E un K-ev de dimension n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E et φ l'endomorphisme de E de matrice M dans $\mathscr{B}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. Calculer $\varphi^k(\vec{e}_1)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. En déduire que $P(M) = 0$.

[003533]

Exercice 3214 Matexo

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{spec}(A) \cap \mathrm{spec}(B) = \varnothing$ si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.
Application : Soient A, B, P trois matrices carrées complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur popre commune. [003534]

Exercice 3215 Matrices à spectres disjoints

Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :
(a) : $\forall\, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$.
(b) : $\forall\, X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ on a $AX = XB \Rightarrow X = 0$.
(c) : $\chi_B(A)$ est inversible.
(d) : A et B n'ont pas de valeur propre en commun.

Correction ▼ [003535]

Exercice 3216 *AB* et *BA* ont même polynôme caractéristique

Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
2. Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.
3. Dans le cas général, on note $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ $(M,N,P \in \mathscr{M}_{2n}(K))$.
   Vérifier que $MP = PN$, montrer que P est inversible, et conclure.

[003536]

Exercice 3217 $\det(I + A\overline{A}) \geqslant 0$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre non nulle de $A\overline{A}$, et X un vecteur propre associé. Montrer que $A\overline{X}$ est aussi vecteur propre de $A\overline{A}$.
2. Lorsque $\lambda \notin \mathbb{R}^+$, montrer que X et $A\overline{X}$ sont linéairement indépendants.
3. En déduire que $\det(I + A\overline{A}) \in \mathbb{R}^+$.

[003537]

Exercice 3218 Centrale PC 1999

Soit l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tM$. Calculer sa trace par un moyen simple.

Correction ▼ [003538]

Exercice 3219 Multiplicité d'une valeur propre

Soit E un K-ev de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Montrer que la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de u est égale au nombre de facteurs invariants de u ayant λ pour racine. [003539]

Exercice 3220 Fermat pour la trace, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit p premier et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{tr}(A^p) \equiv \mathrm{tr}(A) \pmod{p}$.

Correction ▼ [003540]

Exercice 3221 ***

Soit A une matrice rectangulaire de format (p,q) et B une matrice de format (q,p). Comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA.

Correction ▼ [005656]

Exercice 3222 *** I

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que u et v commutent et que v est nilpotent. Montrer que $\det(u+v) = \det u$.

Correction ▼ [005657]

Exercice 3223 **

Soit A une matrice antisymétrique réelle. Etudier la parité de son polynôme caractéristique.

Correction ▼ [005666]

Exercice 3224 **

Soient A et B deux matrices carrées complexes de format n. Montrer que A et B n'ont pas de valeurs propres communes si et seulement si la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

Correction ▼ [005678]

Exercice 3225 **

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et χ_f sont premiers entre eux.

Correction ▼ [005679]

116 201.04 Sous-espace stable

Exercice 3226

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le plan P d'équation $y+z=0$ est-il stable par f ? La droite $\operatorname{vect}\{(1,1,1)\}$ est-elle stable par f ? [001675]

Exercice 3227

que $f^3+f^2+f=0$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $F=\operatorname{Im} f$.

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par f.
   (b) Montrer que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   (c) En déduire que la restriction g de f à F est un automorphisme de F.
2. (a) Montrer que si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ alors $\lambda = 0$.
   (b) En déduire que le rang de f est pair (raisonner par l'absurde et étudier les racines réelles du polynôme caractéristique de g).

[001676]

Exercice 3228

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $a \in E$.

1. Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant a et stable par f est $F_a = \operatorname{vect}\left\{f^k(a) : k \in \mathbb{N}\right\}$.
2. Montrer que si $\dim(E)=n$ alors $F_a = \operatorname{vect}\left\{f^k(a) : k=0,\dots,n-1\right\}$.
3. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il n'existe pas $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $F_a = \mathbb{R}^3$. Généraliser à un endomorphisme diagonalisable.

[001677]

Exercice 3229

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme de G induit par f.

1. Montrer que si $P \in K[X]$ vérifie $P(f)=0$ alors $P(g)=0$.
2. En déduire que si f est diagonalisable alors g est diagonalisable.
3. Application : trouver tous les sous-espaces vectoriels stables par l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

[001678]

Exercice 3230

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est trigonalisable. A est-elle diagonalisable ? Réduire A et déterminer son polynôme minimal.
2. Même question pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

[001679]

Exercice 3231

Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ?

[001680]

Exercice 3232

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres complexes. Exprimer $\operatorname{tr}(A^p)$ où $p \in \mathbb{N}$ en fonction des λ_j, $j = 1, \ldots, n$.

[001681]

Exercice 3233

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $fg = gf$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = g(x)$ alors $f^n(x) = g^n(x)$.
   Dans toute la suite, on suppose g nilpotent.
2. (a) Déduire de 1. que si f est inversible alors $f + g$ est inversible.
   (b) Déduire de (a) que si $f + g$ est inversible alors f est inversible.
3. (a) Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\det(h + \mathrm{Id}_E) = 1$.
   (b) Montrer que $\det(f + g) = \det(f)$ (on distinguera selon que f est inversible ou non et on utilisera les questions précédentes.

[001682]

Exercice 3234

Soient E un K-espace vectoriel, f et g des endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$ et P un polynôme de $K[X]$.

1. Montrer que $P(g)$ et f commutent.
2. Montrer que le noyau et l'image de l'endomorphisme $P(g)$ sont stables par f. Donner des cas particuliers de cette situation.

[001683]

Exercice 3235

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On désigne par g l'endomorphisme de F induit par f sur F.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(g) \subseteq \mathrm{Sp}(f)$.
2. Montrer que si $P(f) = 0$ alors $P(g) = 0$. En déduire que le polynôme minimal de g divise celui de f.

[001684]

Exercice 3236

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E. Montrer que si f admet un sous-espace vectoriel propre de dimension $p \geqslant 2$ alors il admet une infinité de sous-espaces vectoriels stables par f.

[001685]

Exercice 3237 Droites et hyperplans stables

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par u.
2. Montrer qu'il existe un hyperplan stable par u (considérer $\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id})$ où λ est une valeur propre de u).
3. Donner un exemple où ces propriétés sont en défaut pour un $\mathbb{R}$-ev.

[003609]

Exercice 3238 Plan stable pour une valeur propre non réelle

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de M ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). On note X un vecteur propre complexe de M.

1. Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de M.
2. Montrer que $(X, \overline{X})$ est libre dans $\mathbb{C}^n$.
3. Soient $U = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$. Montrer que (U, V) est libre dans $\mathbb{R}^n$.

[003610]

Exercice 3239 Plans stables

Soit E un K-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Soit F un plan vectoriel. Montrer que si F est stable par f alors il existe $P \in K_2[x]$ non nul tel que $F \subset \mathrm{Ker} P(f)$.
2. Réciproquement, si $P \in K_2[x]$ est irréductible, montrer que $\mathrm{Ker} P(f)$ contient un plan stable par f.
3. Si $K = \mathbb{R}$ montrer que f admet toujours une droite ou un plan stable.

[003611]

Exercice 3240 Recherche de sev stables

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les sev de $\mathbb{R}^3$ stables pour l'endomorphisme associé à A.
2. Quelles sont les matrices réelles commutant avec A ?

Correction ▼ [003612]

Exercice 3241 u diagonalisable $\Rightarrow$ diagonalisable dans un sev stable

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que si F est un sev stable par u, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

[003613]

Exercice 3242 Plan affine stable

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $H : x + 2y + 3z = 1$ un plan *affine* de E. Montrer que si H est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$ alors 1 est valeur propre de f.

Correction ▼ [003614]

Exercice 3243 Endomorphisme cyclique

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et F un sous-espace vectoriel stable par f. Montrer que $f_{|F}$ est aussi cyclique. [003615]

Exercice 3244 Endomorphismes semi-simples.

Un endomorphisme f est dit semi-simple si tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f. Montrer qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable. [003616]

Exercice 3245 χ_u irréductible

Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension n sur le corps K. Montrez que seuls $\{0\}$ et E sont stables par u si et seulement si χ_u est irréductible sur K.

Correction ▼ [003617]

Exercice 3246 Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E tel que tout sous-espace de E admette un supplémentaire stable par f. Que peut-on dire de f ? Réciproque ?

Correction ▼ [003618]

Exercice 3247 Sous-espaces stables (Centrale MP 2003)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Correction ▼ [003619]

Exercice 3248 ***

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Trouver les sous espaces stables par f dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005683]

Exercice 3249 **

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle et F un sous-espace non nul de E stable par f. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que la restriction de f à F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Correction ▼ [005686]

117 201.05 Trigonalisation

Exercice 3250

Trigonaliser les matrices réelles suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[001686]

Exercice 3251

Mettre sous forme triangulaire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

[001687]

Exercice 3252

Soient les matrices à coefficients réels suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trigonaliser les matrices A, B et C.
2. Déterminer le polynôme minimal de A, B et C.

[001688]

Exercice 3253

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$.
2. Trouver une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$\mathrm{mat}(f, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
3. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\ker f^2$ est stable par g. En déduire qu'un tel endomorphisme g ne peut exister.

[001689]

Exercice 3254

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver une base $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \varepsilon') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - Id)^2$ sont laissés stables par g. En déduire que la matrice de g dans ε' est de la forme $\mathrm{Mat}(g, \varepsilon') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Préciser les valeurs possibles de a, b, c et d.

4. Soit $F = \{B \in M_3(\mathbb{R}); AB = BA\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Calculer sa dimension (on pourra utiliser la question 3.).

[001690]

Exercice 3255

Les questions sont indépendantes. K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base fixée de E et f. un endomorphisme de E.

1. Donner un exemple de matrice de $M_2(K)$ non trigonalisable.
2. Donner un exemple de matrice de $M_n(K)$ à la fois non diagonalisable et trigonalisable.
3. Déterminer sans calculs les valeurs propres complexes de f s i sa matrice dans $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. On suppose que $n = 3$ et que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que le plan d'équation $x + 2z = 0$ est stable par f.
5. Que peut-on dire d'un vecteur générateur d'une droite stable par f ?
6. Montrer que si l'endomorphisme f est trigonalisable alors il admet au moins un sous-espace vectoriel stable par f et de dimension $k \in [0, n]$ fixée.

[001691]

Exercice 3256 Trigonalisation de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Chercher deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.
3. Compléter ces vecteurs en une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Écrire la matrice de φ dans cette base.
5. Résoudre le système différentiel : $X' = AX$.

Correction ▼ [003578]

Exercice 3257 $AB = 0$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables. [003620]

Exercice 3258 Produit de matrices nilpotentes

Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{M}_n(K)$ nilpotentes et commutant deux à deux. Montrer que $A_1 \ldots A_n = 0$. [003621]

Exercice 3259 Matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

Correction ▼ [003622]

Exercice 3260 Mines MP 2003

Soit E un ev de dimension finie et (u_n) une suite d'endomorphismes diagonalisables convergeant vers $u \in \mathscr{L}(E)$.
u est-il diagonalisable ?

Correction ▼ [003623]

Exercice 3261 Mines-Ponts MP 2005

On donne une matrice carrée réelle M d'ordre n. Soient α, β les multiplicités de zéro dans χ_M et μ_M. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker} M) = \alpha$ si et seulement si $\beta = 1$.

Correction ▼ [003624]

Exercice 3262 ***

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle qui commutent. Montrer que f et g sont simultanément trigonalisables.

Correction ▼ [005677]

---

118 201.06 Réduction de Jordan

Exercice 3263

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base canonique de E.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u. Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2. Pourquoi u est-il non diagonalisable ? Est-il triangularisable ?
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques F_1 et F_2. Pour $k = 1, 2$, donner l'ordre β_k du nilpotent $(u - \lambda_k.\mathrm{id}_E)|_{F_k}$ ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$).
3. Si $v \in F_2$ et $v \notin \ker(u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1}$, montrer que $f_1 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1}(v)$, $f_1 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 2}(v)$, ..., $f_{\beta_2} = v$ forment une base de F_2.
4. On note $f = \{f_1, \dots, f_4\}$ la complétée de la base précédente par une base de F_1. Vérifier que $T = [u]_f^f$ est triangulaire. Décomposer T sous la forme $D + N$, où D est diagonale, N est nilpotente, et $DN = ND$. Calculer T^5.

[001692]

Exercice 3264

Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ? [001693]

Exercice 3265

Donner toutes les réduites de Jordan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des endomorphismes nilpotents pour $1 \leqslant n \leqslant 4$. [001694]

Exercice 3266

Soit ρ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $(X^2 - 1)$.

1. Montrer que ρ est linéaire.
2. Montrer que $\rho^2 = \rho$. En déduire que ρ est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour ρ.

[001695]

Exercice 3267

Les matrices $\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ ont-elles une racine carrée ? [001696]

Exercice 3268

Réduire sous la forme de Jordan les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&2&2\\0&1&-1&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&-1&1&-7\\9&-3&-7&-1\\0&0&4&-8\\0&0&2&-4\end{pmatrix}.$$

[001697]

Exercice 3269

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice N (le plus petit entier p tel que $f^p = 0$). Montrer que

$$N = n \Leftrightarrow \operatorname{rang} f = n-1.$$

[001698]

Exercice 3270

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit
$$B = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).

Correction ▼ [002589]

Exercice 3271

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix}3&2&4\\-1&3&-1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Calculer $\exp B$.

Correction ▼ [002602]

Exercice 3272 Décomposition de Dunford

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices D, N telles que $A = D + N$, D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$. [003581]

Exercice 3273 M et ${}^tM$ sont semblables

Montrer qu'une matrice compagnon est semblable à sa transposée. En déduire que pour toute $M \in \mathscr{M}_n(K)$ les matrices M et ${}^tM$ sont semblables. [003582]

Exercice 3274 Réduction de Jordan (Mines MP 2003)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})) = 2$.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003583]

Exercice 3275 *** Décomposition de Dunford

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
Montrer qu'il existe un couple d'endomorphismes (d, n) et un seul tel que d est diagonalisable, n est nilpotent n et $f = d + n$.

Correction ▼ [005670]

---

119 201.07 Applications

Exercice 3276

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner un polynôme annulateur de A de degré aussi petit que possible. En déduire A^{-1}, A^3, et A^5. [001703]

Exercice 3277

Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 5y \\ \frac{dz}{dt} = -3x - 6y - 5z \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y + 4z \\ \frac{dz}{dt} = -3x - y - 2z \end{cases}$$

[001704]

Exercice 3278

Déterminer toutes les suites (u_n) telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \\ u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 0 \end{cases}$$

Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f''' + f'' + f' + f = 0 \\ f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 0 \end{cases}$$

[001705]

Exercice 3279

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \frac{dx}{dt} & = & 2x(t) & + & 2y(t) & + & 2z(t) \\ \frac{dy}{dt} & = & x(t) & + & 3y(t) & + & 2z(t) \\ \frac{dz}{dt} & = & -x(t) & - & y(t) & - & z(t) \end{array} \right.$$

Donner toutes les solutions qui satisfont $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = -1$. [001706]

Exercice 3280

Réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(c'est à dire étudier la diagonalisabilité ou la triangularisabilité de A, et donner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit aussi simple que possible)

Application : Déterminer toutes les fonctions dérivables x, y, z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y \\ z' = x - 3y + 4z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

(on rappelle qu'il n'est pas utile de calculer P^{-1}...) [001707]

Exercice 3281

Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} + 2u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

Montrer que les suites réelles satisfaisant cette relation sont les suites de la forme :

$$u_n = A(-1)^n + B\cos(\frac{2n\pi}{3} + \phi)$$

où A, B et ϕ sont des réels. [001708]

Exercice 3282

Etant donnés quatre nombres réels (u_0, v_0, w_0, x_0), on définit quatre nouveaux nombres (u_1, v_1, w_1, x_1) en calculant les moyennes suivantes : $u_1 = \frac{2u_0+v_0+w_0+x_0}{5}$, $v_1 = \frac{u_0+2v_0+w_0+x_0}{5}$, $w_1 = \frac{u_0+v_0+2w_0+x_0}{5}$, et $x_1 = \frac{u_0+v_0+w_0+2x_0}{5}$. En itérant ce procédé, on définit quatre suites (u_n), (v_n), (w_n), et (x_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + v_n + w_n + x_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2v_n + w_n + x_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + 2w_n + x_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + w_n + 2x_n) \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice A associée à cette relation de récurrence, et la matrice $B = 5A$. Que dire de la diagonalisabilité de B ?
2. Sans calculer le polynôme caractéristique de B, montrer que 1 est valeur propre de B. Quelle est la dimension de l'espace propre associé ? Que dire de la multiplicité de 1 comme valeur propre de B ?
3. En utilisant la trace de B, déterminer toutes les valeurs propres de B.
4. Donner un polynôme annulateur de B de degré 2.
5. En déduire l'existence de deux réels a_n et b_n, que l'on calculera, tels que $B^n = a_n B + b_n I$.
6. Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{5^n}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{5^n}$. En déduire que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
   (On rappelle qu'une suite de matrices M_n est dite convergente si chaque suite de coefficient est convergente. On pourra utiliser sans démonstration la continuité des opérations élémentaires sur les matrices pour cette notion de limite, c'est à dire que :
   - si (λ_n) est une suite convergente alors pour toute matrice M, la suite $(\lambda_n M)$ est convergente et $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n M) = (\lim_{n\to\infty}\lambda_n)M$
   - si (M_n) est une suite de matrices convergente alors pour tout vecteur X, la suite de vecteurs $(M_n X)$ est convergente et $\lim_{n\to\infty}(M_n X) = (\lim_{n\to\infty} M_n)X$.)
7. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et donner leur limite.

[001709]

Exercice 3283

Donner toutes les suites (x_n), (y_n) et (z_n) telles que : *(on notera $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$)*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n + x_n \end{cases}$$

Parmi les solutions de ce système, donner celle qui satisfait $x_0 = 2$ et $y_0 = z_0 = 1$.

Correction ▼ [001710]

Exercice 3284

Soit a un réel. On considère le système à n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} ax_1 - x_2 = 0 \\ -x_{p-1} + ax_p - x_{p+1} = 0 \quad (2 \leqslant p \leqslant n-1) \\ -x_{n-1} + ax_n = 0 \end{cases}$$

Écrire la matrice A_n associée à ce système. On note $D_n = \det A_n$. Calculer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}
[001711]

Exercice 3285

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$, avec $(b,c,d) \neq (0,0,0)$.

1. Calculer $A^t A$. Que vaut $\det A$ au signe près ?
2. En étudiant le signe du terme en a^4 dans le déterminant de A, montrer que $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Sans calcul supplémentaire, en déduire que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = ((a-X)^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
3. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? (justifier)

4. On se place maintenant dans le cas où $a=1, b=c=d=-1$. Vérifier que $(i\sqrt{3},1,1,1)$ et $(-1,i\sqrt{3},-1,1)$ sont des vecteurs propres de A, puis diagonaliser A sur $\mathbb{C}$.
5. Application : résoudre le système récurent suivant (il n'est pas nécessaire de calculer l'inverse de la matrice de passage de la question précédente). On notera $\omega = 1/2+i\sqrt{3}/2 = e^{i\pi/3}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& u_n+v_n+w_n+h_n \\ v_{n+1} &=& -u_n+v_n-w_n+h_n \\ w_{n+1} &=& -u_n+v_n+w_n-h_n \\ h_{n+1} &=& -u_n-v_n+w_n+h_n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 1 \\ v_0 &=& 0 \\ w_0 &=& 0 \\ h_0 &=& 0 \end{array}\right.$$

Correction ▼ [001712]

Exercice 3286

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

[001713]

Exercice 3287

Soit la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Par différentes méthodes, calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la formule obtenue a un sens pour $n \in \mathbb{Z}$ et donner plusieurs méthodes pour établir sa validité dans ce cas. [001714]

Exercice 3288

Soit l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{smallmatrix}\right).$$

1. Déterminer toutes les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f.
2. Déterminer toutes les plans vectoriels P de $\mathbb{R}^3$ stables par f (on commencera par étudier le polynôme caractéristique de la restriction de f à P).
3. Donner la liste de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

[001715]

Exercice 3289

Calculer les puissances et l'exponentielle ($e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$) des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

[001716]

Exercice 3290

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Dans le cas d'existence de g, donner le nombre exact de g tel que $g^2 = f$.

Application Soit :
$$M=\begin{pmatrix}5&1&-1\\2&4&-2\\1&-1&3\end{pmatrix}.$$
Montrer qu'il existe $N\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2=M$. Déterminer une N. [001717]

Exercice 3291

Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et ${}^tM$ sont semblables.
Indication : le montrer d'abord pour des blocs de Jordan n'ayant que des 1 au-dessus de la diagonale. [001718]

Exercice 3292

Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour que M et $2M$ soient semblables. [001719]

Exercice 3293

Soit $a\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes. On pose
$$\mathscr{C}=\{u\in\mathscr{L}(E):au=ua\}.$$

1. Soit $u\in\mathscr{C}$.
   (a) Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de a est stable par u.
   (b) En déduire que u est diagonalisable.
2. (a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et que $\dim\mathscr{C}=n$.
   (b) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E,a,...,a^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$ (raisonner par l'absurde et utiliser le polynôme minimal de a.)
   (c) En déduire que $\mathscr{C}=\{P(u):P\in K[X]\}$.

[001720]

Exercice 3294

Soient $f\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $a\in E$ tels que la famille $(a,f(a),...,f^{n-1}(a))$ est une base de E.

1. Soit $P\in K[X]\setminus\{0\}$ un polynôme annulateur de f. Montrer que $\deg(P)\geqslant n$ (raisonner par l'absurde).
2. En déduire que le polynôme minimal de f est (au signe près) le polynôme caractéristique de f.

[001721]

Exercice 3295

Donner un exemple de deux matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal et pourtant non semblables. Qu'en est-il pour deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? [001722]

Exercice 3296

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel
$$\mathscr{S}=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\forall n\geqslant 3,u_n=3u_{n-1}-3u_{n-2}+u_{n-3}\right\}.$$

1. Montrer que l'application
$$f:\mathscr{S}\to\mathbb{R}^3,u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto(u_0,u_1,u_2)$$
est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriels.
2. Soient la matrice $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{smallmatrix}\right)\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\sigma\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A et, pour $n\geqslant 2$, $U_n=(u_{n-2},u_{n-1},u_n)\in\mathbb{R}^3$. Montrer que $\sigma(U_{n-1})=U_n$ et en déduire une base de $\mathscr{S}$.

[001723]

Exercice 3297

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0. [001724]

Exercice 3298

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 = f$. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f_t = id + tf$ est inversible ? Calculer f_t^{-1}. [001725]

Exercice 3299

Etudier les solutions (suivant A) dans $M_2(\mathbb{C})$ de l'équation $X^2 = A$. [001726]

Exercice 3300

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{K}); AB = BA\}$.

1. On suppose que A a des valeurs propres simples. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $B \in C(A)$.

   ii) B a une base de vecteurs propres en commun avec A.

   iii) Il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

   iv) Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

2. On suppose que $n = 3$ (pour simplifier) et que A est diagonalisable avec une valeur propre double. Déterminer $C(A)$.

[001727]

Exercice 3301

Les parties I, II, III et IV peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Soient $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice dépendant d'un paramètre réel a et f_a l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice M_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On nomme *racine carrée* d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ toute matrice $N \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.

On désigne par I la matrice identité et, pour toute base ε de $\mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{Mat}(f_a, \varepsilon)$ la matrice représentant l'endomorphisme f_a dans la base ε.

I

1. Calculer les valeurs propres de M_a en fonction de a. Pour quelle raison la matrice M_a est-elle triangularisable ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

II

On pose maintenant (questions 3 et 4) $a = 2$.

3. Diagonaliser M_2. Déterminer une racine carrée A de M_2.
4. (a) Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $g^2 = f_2$. Montrer que g est diagonalisable (on pourra déterminer le polynôme minimal de f_2). Montrer que les sous-espaces propres de f_2 sont laissés stables par g.

(b) Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ a une infinité de racines carrées. En déduire l'existence d'une infinité de racines carrées de M_2.

III

5. On pose $a = 1$. Montrer que $M_1 = 2I + N$ avec N nilpotente (telle que $N^2 = 0$). En déduire la valeur de $(M_1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer deux réels α et β tels que $\alpha I + \beta N$ soit une racine carrée de M_1.

IV

On pose désormais (questions 6 et 7) $a = 0$.

6. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_0^2) \oplus \mathrm{Ker}(f_0 - 2I)$. Déterminer une base ε de $\mathbb{R}^3$ telle que l'on ait : $\mathrm{Mat}(f_0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $g^2 = f_0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_0^2)$ est laissé stable par g. En déduire que f_0 n'a pas de racine carrée.

[001728]

Exercice 3302

La suite de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ est la suite $(F_n)_{n \geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que A admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
3. Trouver des vecteurs propres ε_1 et ε_2 associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on les note x_1 et x_2.
5. Montrer que $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2$. En déduire que
$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$
6. Donner un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [002590]

Exercice 3303

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.

3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

Correction ▼ [002597]

Exercice 3304

1. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donner sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.
2. On cherche à déterminer, s'il en existe, les matrices B telles que $\exp B = A$.
   (a) Montrer que si $A = \exp B$, alors $AB = BA$.
   (b) En déduire que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de vecteurs propres de B.
   (c) Déterminer toutes les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $\exp B = A$. Justifier.
3. Soit la matrice C,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C = \exp D$.
4. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C.
5. Supposons qu'il existe une matrice $E \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $E^2 = C$. Notons $Q_E(X)$ son polynôme minimal et $Q_C(X)$ le polynôme minimal de C.
   (a) Montrer que $Q_E(X)$ divise $Q_C(X^2)$.
   (b) En déduire que $E^3 = 0$ et que $C^2 = 0$.
   (c) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas de matrice E telle que $E^2 = C$.
6. Soient F et G des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $F = \exp G$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice H telle que $H^n = F$.

Correction ▼ [002598]

Exercice 3305 Ensi PC 1999

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n.
2. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (U_n) défini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n.

3. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$.

Correction ▼ [003585]

Exercice 3306 Puissances de A

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$, et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
2. On considère le polynôme $P = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.
3. En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Correction ▼ [003586]

Exercice 3307 Suites récurrentes linéaires

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A. En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

Correction ▼ [003587]

Exercice 3308 Centrale P' 1996

Soit f, endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. On suppose que pour tout sous-ev D de dimension 1 il existe $x \in D$ tel que $E = \mathrm{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Que dire de E et f ?
2. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $E = \mathrm{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Montrer que si f est diagonalisable alors ses valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que si f est nilpotente alors $f^{n-1} \neq 0$.

Correction ▼ [003588]

Exercice 3309 Chimie P' 1996

Soit (M_n) une suite de points dans le plan, de coordonnées (x_n, y_n) définies par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & -x_n + 2y_n \\ y_{n+1} & = & -3x_n + 4y_n. \end{cases}$$

1. Montrer que, quelque soit M_0, les points M_n sont alignés.
2. Étudier la suite (M_n) quand n tend vers l'infini.
3. Quelle est la limite de y_n/x_n (utiliser une méthode géométrique) ?

Correction ▼ [003589]

Exercice 3310 Commutant d'une matrice à valeurs propres distinctes

1. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à valeurs propres distinctes.
   (a) Montrer qu'une matrice M commute avec D si et seulement si M est diagonale.
   (b) Montrer que pour toute matrice M diagonale, il existe un polynôme $P \in K_{n-1}[X]$ unique tel que $M = P(D)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice à valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices M commutant avec A sont les polynômes en A.

[003590]

Exercice 3311 $XY = YX = A$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Trouver toutes les matrices $X, Y \in \mathscr{M}_2(K)$ telles que $XY = YX = A$.

Correction ▼ [003591]

Exercice 3312 Racine carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Correction ▼ [003592]

Exercice 3313 Ensi Physique 93

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B différente de A et $-A$ telle que $B^2 = A$.

Correction ▼ [003593]

Exercice 3314 Esigelec 91

Trouver le commutant de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003594]

Exercice 3315 Centrale MP 2000

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $C(A)$ le commutant de A.

1. Pour $n = 2$, montrer que $C(A)$ est de dimension 2 ou 4, en donner une base.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $C(A)$ est de dimension $\geqslant n$ (traiter d'abord le cas où A est diagonalisable).

Correction ▼ [003595]

Exercice 3316 Ulm MP* 2001

En se déplaçant uniquement sur les arêtes d'un cube de côté 1, combien y a-t-il de chemins de longueur n pour aller d'un point à un autre ?

Correction ▼ [003596]

Exercice 3317 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour n entier relatif donné, calculer A^n par trois méthodes différentes.

Correction ▼ [005651]

Exercice 3318 **

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005652]

Exercice 3319 **

Soit $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&8&-2\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer $\text{Ker}(A-I)^2$.
3. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&0&b\end{pmatrix}$
4. Calculer A^n pour n entier naturel donné.

Correction ▼ [005653]

Exercice 3320 ***

Soient a et b deux réels tels que $|a|\neq|b|$. Soit $A=\begin{pmatrix}0&b&\dots&b\\a&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&b\\a&\dots&a&0\end{pmatrix}$.

Montrer que les images dans le plan complexe des valeurs propres de A sont cocycliques. (Indication : pour calculer χ_A, considérer $f(x)=\begin{vmatrix}-X+x&b+x&\dots&b+x\\a+x&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&b+x\\a+x&\dots&a+x&-X+x\end{vmatrix}$.)

Correction ▼ [005664]

Exercice 3321 ***I Matrices stochastiques

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\in[0,1]$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j}=1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A.
   (a) Montrer que $|\lambda|\leqslant 1$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel ω de $[0,1]$ tel que $|\lambda-\omega|\leqslant 1-\omega$. Conséquence géométrique ?

Correction ▼ [005665]

Exercice 3322 ***I Déterminant circulant

1. Soit $J_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&\ddots&0\\0&&&\ddots&1\\1&0&\dots&\dots&0\end{pmatrix}$ (de format $n\geqslant 3$). Diagonaliser J_n.
2. En déduire la valeur de $\begin{vmatrix}a_0&a_1&\dots&a_{n-2}&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&&a_{n-2}\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\a_2&&\ddots&a_0&a_1\\a_1&a_2&\dots&a_{n-1}&a_0\end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005668]

Exercice 3323 ***I Matrices de permutations

Pour $\sigma \in S_n$, $n \geqslant 2$, on définit la matrice P_σ par $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Calculer $\det(P_\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$.
2. (a) Montrer que $\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2$, $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

   (b) On pose $G = \{P_\sigma,\ \sigma \in S_n\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe isomorphe à S_n.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer AP_σ.
4. Trouver les valeurs propres d'une matrice de pemutation (on pourra utiliser le résultat hors programme : toute permutation se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints).

Correction ▼ [005669]

Exercice 3324 **

Trouver une matrice carrée A vérifiant $A^4 - 3A^3 + A^2 - I = 0$.

Correction ▼ [005671]

Exercice 3325 **I

Calculer $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005672]

Exercice 3326 **I

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005676]

Exercice 3327 ** (ESTP1994)

Soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Peut-on trouver deux matrices distinctes semblables parmi les quatre matrices $M_{0,0}$, $M_{0,1}$, $M_{1,0}$ et $M_{1,1}$?

Correction ▼ [005680]

Exercice 3328 ***

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005684]

Exercice 3329

Commutant de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005685]

120 201.08 Polynôme annulateur

Exercice 3330

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme minimal de A. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5.

[001574]

Exercice 3331

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $P(f) = 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$; en déduire $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. [001575]

Exercice 3332

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f - id) = 1$. On note $H = \mathrm{Ker}(f - id)$.

1. Soit $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ une base de H et $e_n \notin H$. Montrer que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E et donner l'allure de la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que le polynôme $(X-1)(X - \det(f))$ annule f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

[001576]

Exercice 3333

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E nilpotent, c'est à dire tel que $\exists m \in \mathbb{N}, u^m = 0$. Montrer que $u^n = 0$ [001577]

Exercice 3334

Déterminer toutes les matrices A de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 - 3A + 2\mathrm{id} = 0$$

Même question pour

$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18\mathrm{id} = 0$$

[001578]

Exercice 3335

Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Le démontrer dans le cas particulier où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

Correction ▼ [001579]

Exercice 3336

1. Réduire la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$
2. Donner un polynôme annulateur de A de degré 2.
3. En déduire qu'il existe des coefficients a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n$ et les calculer en fonction de n.

[001580]

Exercice 3337

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de trace non nulle. Montrer que toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ qui commute avec A^2 commute aussi avec A. (*Indication :* utiliser Cayley-Hamilton.) [001581]

Exercice 3338

Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie annulé par les polynômes $P = 1 - X^3$ et $Q = X^2 - 2X + 1$? [001582]

Exercice 3339

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que le polynôme minimal de f est $P = (X-2)(X-1)^2$. Quel est le polynôme minimal de $f + \mathrm{Id}_E$? [001583]

Exercice 3340

Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice diagonale. Si $P \in K[X]$, calculer $P(M)$ et en déduire le polynôme minimal de M. [001584]

Exercice 3341

En appliquant la méthode utilisée en cours pour démontrer l'existence d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, déterminer le polynôme minimal de la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. [001585]

Exercice 3342

Quel est le polynôme minimal d'un endomorphisme d'une droite vectorielle ? [001586]

Exercice 3343

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que le polynôme minimal de f est de la forme $X(X-\lambda)$. [001587]

Exercice 3344

Déterminer les endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension finie n dont le polynôme minimal est de degré 1. [001588]

Exercice 3345

1. Montrer que $P = (X-1)^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et en déduire le polynôme minimal de la matrice A.
2. Soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Calculer explicitement $B^2 - \mathrm{tr}(B)B + \det(B)I_2$. En déduire le polynôme minimal de la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

[001589]

Exercice 3346

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ et P son polynôme minimal. Montrer que f est bijective si et seulement si $P(0) \neq 0$. [001590]

Exercice 3347

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. Montrer que f admet un plan stable (on discutera en fonction du caractère trigonalisable de f). [001591]

Exercice 3348

Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que $\ker(f^3 - f - \mathrm{Id}) \oplus \ker f = E$.
2. (a) Montrer que $\operatorname{Im} f \subseteq \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.
   (b) En déduire que $\operatorname{Im} f = \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

[001592]

Exercice 3349

Déterminer le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. [001593]

Exercice 3350

Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice par blocs à coefficients réels suivante

$$M = \begin{pmatrix} O & \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}J & O \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2 et M^3 et en déduire que M est diagonalisable.
2. Déterminer le polynôme caract eristique et le polynôme minimal de M.

[001594]

Exercice 3351

On considére la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculer son polynôme caractéristique, calculer A^2 et déduire de ces calculs et du théorème de Cayley-Hamilton l'inverse de A. [001595]

Exercice 3352

On se place dans $E = \mathbb{C}^4$ muni de sa base canonique $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On désigne par j l'endomorphisme de E dont la matrice dans b est la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer l'image de b par j, j^2, j^3, et j^4.
2. En déduire J^2, J^3 et J^4.
3. Déterminer un polynôme annulateur non nul de J.
4. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \leqslant 3$ vérifie $P(J) = 0$ alors $P = 0$.
5. En déduire le polynôme minimal de J.
6. Montrer que J est diagonalisable.

7. Déterminer les valeurs propres de J.

[001596]

Exercice 3353

Soit A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A.

Correction ▼ [002569]

Exercice 3354

Soit N une matrice nilpotente, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $N^q = 0$. Montrer que la matrice $I - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.

Correction ▼ [002588]

Exercice 3355 Étude d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & (0) \\ a_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ a_n & (0) & & 0 \end{pmatrix}$ où les a_i sont des réels positifs ou nuls, avec $a_1 a_n > 0$.

1. Quel est le polynôme caractérique de A ?
2. Montrer que A admet une unique valeur propre $r > 0$ et que l'on a $r < 1 + \max(a_1, \dots, a_n)$.
3. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant r$ et $|\lambda| = r \Rightarrow \lambda = r$.
4. Montrer qu'il existe un entier k tel que A^k a tous ses coefficients strictement positifs.

Correction ▼ [003518]

Exercice 3356 Matrice bitriangulaire

Donner une CNS sur $a, b \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & & (a) \\ & \ddots & \\ (b) & & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Correction ▼ [003541]

Exercice 3357 $A^2 = A$ et $tr(A) = 0$

Trouver les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$. [003542]

Exercice 3358 Matexo

Soient E un ev de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u un endomorphisme de E.
On suppose que $u^3 = u^2, u \neq \mathrm{id}, u^2 \neq 0, u^2 \neq u$.

1. Montrer qu'une valeur propre de u ne peut être que 0 ou 1.
2. Montrer que 1 et 0 sont effectivement valeurs propres de u.
3. Montrer que u *n'est pas* diagonalisable.
4. Montrer que $E = \mathrm{Im}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u^2)$.
5. Monter que $u|_F$ avec $F = \mathrm{Im}(u^2)$ est l'identité.

[003543]

Exercice 3359 INT gestion 94

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det A$.
2. Calculer $(A-xI)({}^tA-xI)$ et en déduire $\chi_A(x)$.
3. Montrer que A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

Correction ▼ [003544]

Exercice 3360 $X^nP(1/X)$

Soit $E = K_n[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto X^nP(1/X)$.

1. Déterminer $u \circ u$. En déduire que u est diagonalisable.
2. Donner une base de vecteurs propres de u.

[003545]

Exercice 3361 TPE 93

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = A^{-1}$. A est-elle diagonalisable ? Calculer e^A. ($e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$)

Correction ▼ [003546]

Exercice 3362 Ensi Physique 93

Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker} u \Leftrightarrow u \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

Correction ▼ [003547]

Exercice 3363 u^2 diagonalisable

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $u \in GL(E)$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable.

[003548]

Exercice 3364 Ensi PC 1999

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible diagonalisable et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $B^p = A$.

1. Montrer que B est diagonalisable.
2. Si A n'est pas inversible la conclusion subsiste-t-elle ?

Correction ▼ [003549]

Exercice 3365 Ensi P 90

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que p^2 est un projecteur. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de p ? Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Correction ▼ [003550]

Exercice 3366 $A^3 = A + I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Correction ▼ [003551]

Exercice 3367 Mines-Ponts PC 1999

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} A$ est pair. [003552]

Exercice 3368 Esem 91

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I$ et $(I, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Montrer qu'alors on a $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Correction ▼ [003553]

Exercice 3369 $A^p = I$ et $\operatorname{spec}(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow A^2 = I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont réelles et qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $A^p = I$. Montrer que $A^2 = I$.

Correction ▼ [003554]

Exercice 3370 $P(u) = \sum P(\lambda_i) u_i$

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose u diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.
   (a) Montrer qu'il existe des endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ tels que pour tout polynôme $P \in K[X]$, on ait : $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme P_i tel que $u_i = P_i(u)$.
2. Réciproquement, soit $u, u_1, \dots, u_p \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tels que pour tout $P \in K[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$. Montrer que u est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

[003555]

Exercice 3371 Mines PSI 1998

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un ev E de dimension finie, λ une valeur propre de f et p_λ le projecteur sur le sous-espace propre associé parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Montrer que p_λ est un polynôme en f.

Correction ▼ [003556]

Exercice 3372 Endomorphismes anticomutant (Centrale MP 2003)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p$ ($p \geqslant 2$) des endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall\, k,\ u_k^2 = -\mathrm{id}_E, \quad \forall\, k \neq \ell,\ u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

1. Montrer que les u_k sont des automorphismes et qu'ils sont diagonalisables.
2. Montrer que n est pair.
3. Donner le spectre de chaque u_k.
4. Donner les ordres de multiplicité des valeurs propres des u_k.
5. Calculer $\det(u_k)$.

Correction ▼ [003557]

Exercice 3373 Ensi PC 1999

Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$.

1. Quelle relation y a-t-il entre $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$? Montrer que $2 \operatorname{rg} u \leqslant \dim E$.
2. On suppose ici $\dim E = 4$ et $\operatorname{rg} u = 2$. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ de E telle que : $u(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$, $u(\vec{e}_2) = \vec{0}$, $u(\vec{e}_3) = \vec{e}_4$, $u(\vec{e}_4) = \vec{0}$.

3. On suppose $\dim E = n$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Est-ce que u est diagonalisable ?

[003558]

Exercice 3374 Réduction de M tq $M^3 = I$

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I$, et $M^3 = I$.

1. Quelles sont les valeurs propres complexes de M ? (On vérifiera que ce sont effectivement des valeurs propres de M)
2. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

[003559]

Exercice 3375 Centrale PSI 1998

Soient u, v, h trois endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$u \circ v = v \circ u, \quad u \circ h - h \circ u = -2u, \quad v \circ h - h \circ v = -2v.$$

1. Cas particulier, $n = 3$, $\operatorname{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer si v et h existent et si oui, les donner.
2. Cas général.
   (a) Que peut-on dire de $\operatorname{tr}(u)$ et $\operatorname{tr}(v)$?
   (b) Montrer que u et v sont non inversibles. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} v$ sont stables par h.
   (c) Déterminer $u^k \circ h - h \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(u) \circ h - h \circ P(u)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
   (d) Quel est le polynôme minimal de u ?

Correction ▼ [003560]

Exercice 3376 Indépendance du polynôme minimal par rapport au corps

Soient $K \subset L$ deux corps et $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On note $\mu_K(A)$ et $\mu_L(A)$ les polynômes minimaux de A en tant que matrice à coefficients dans K ou dans L. Montrer que ces polynômes sont égaux. [003561]

Exercice 3377 Polynôme minimal et caractéristique

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que χ_A et μ_A ont les mêmes facteurs irréductibles. [003562]

Exercice 3378 X MP* 2004

Caractériser les polynômes P tels que : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $(P(A) = 0) \Rightarrow (\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{Z})$.

Correction ▼ [003563]

Exercice 3379 TPE MP 2005

Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$ et $\operatorname{rg}(C) = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres communes.

Correction ▼ [003564]

Exercice 3380 Polynôme minimal imposé, Centrale MP 2005

Le polynôme $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $M_5(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [003565]

Exercice 3381 $\operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$, Polytechnique MP* 2006

Soit E un K-ev de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, P son polynôme minimal et p le plus petit exposant de X dans l'écriture de P.

1. Si $p = 0$, que dire de u ?
2. Si $p = 1$, montrer que $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
3. Dans le cas général, montrer que $E = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$.

Correction ▼ [003566]

Exercice 3382 ****

Soit A une matrice carrée de format n.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$.

Correction ▼ [005658]

Exercice 3383 *** I

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant $fg - gf = f$. Montrer que f est nilpotent.

Correction ▼ [005659]

121 201.99 Autre

Exercice 3384

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique P_u de u. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques F_i.
2. Donner une base suivant laquelle la matrice de u se décompose en deux blocs diagonaux.
3. Donner les projections p_i de $\mathbb{R}^4$ sur F_i.

[001699]

Exercice 3385

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$ et $A \neq 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. [001700]

Exercice 3386

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. (a) Déterminer le noyau de f.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

[001701]

Exercice 3387

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et u un endomorphisme de E.
Soit $x_0 \in E\setminus\{0\}$. On note $x_k = u^k(x_0)$ et F le sous espace vectoriel engendré par la famille $\{x_k, k\in\mathbb{N}\}$, c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de $x_k, k\in\mathbb{N}$:

$$F = \left\{ x\in E \;/\; \exists N\in\mathbb{N}, \exists(\alpha_0\dots\alpha_N)\in\mathbb{R}^{N+1},\; x=\sum_{i=0}^{N}\alpha_i x_i \right\}$$

1. Montrer que F est stable par u, c'est à dire que $\forall x\in F, u(x)\in F$.
2. Montrer qu'il existe un entier $k\leqslant n$ tel que $(x_0,x_1,\dots,x_k)$ soit libre et $(x_0,x_1,\dots,x_{k+1})$ soit liée. Montrer alors qu'il existe des scalaires $(a_0,a_1,\dots,a_k)$ tels que
$$x_{k+1} = a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_kx_k$$
3. En déduire que le polynôme $P_0 = X^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} a_iX^i$ satisgfait $\big(P_0(u)\big)(x_0) = 0$.
4. Montrer que pour tout x de F, il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $x = \big(P(u)\big)(x_0)$.
5. A l'aide des questions (3) et (4), montrer que $\forall x\in F, \exists R\in\mathbb{R}_k[X], x = \big(R(u)\big)(x_0)$.
   (on pourra effectuer la division eulidienne de P par P_0)
6. En déduire que $(x_0\dots x_k)$ est une base de F.
7. Ecrire la matrice de la restriction $u_{|_F}$ de u à F dans cette base. Quel est le polynôme caractéristique de $\tilde{u}$?
8. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans la quelle
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_r \end{pmatrix}$$
   où les matrices C_i sont des matrices Compagnon.

Correction ▼ [001702]

Exercice 3388 $f\mapsto f(2x)$

Soit $E = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues tq $f(x)\to 0$ lorsque $x\to\pm\infty\}$, $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto 2x$ et $u:E\to E, f\mapsto f\circ\varphi$.
Montrer que u n'a pas de valeurs propres (si $u(f)=\lambda f$, étudier les limites de f en 0 ou $\pm\infty$). [003519]

Exercice 3389 Ensi Physique P 94

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite finie en $+\infty$. Soit $T\in\mathscr{L}(E)$ défini par $T(f)(x) = f(x+1)$. Trouver les valeurs propres de T.

Correction ▼ [003520]

Exercice 3390 Équation intégrale

Soit $E = \mathscr{C}([0,+\infty[\to\mathbb{R})$ et $u:E\to E, f\mapsto\tilde{f}$ avec $\tilde{f}(x) = \frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$.

1. Montrer que $\tilde{f}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0,+\infty[$.
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Correction ▼ [003521]

Exercice 3391 Endomorphisme sur les suites

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$(f(u))_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}.$$

Quelles sont les valeurs propres de f ?

Correction ▼ [003522]

Exercice 3392 Opérateur intégral

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $f : E \to E, u \mapsto \tilde{u}$ avec $\tilde{u}(x) = \int_{t=0}^{1} \min(x,t)u(t)\,dt$.
Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Correction ▼ [003523]

Exercice 3393 Somme de projecteurs

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe des projecteurs $p_1,\dots,p_k \in \mathscr{L}(E)$ et des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ tels que : $\begin{cases} u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k \\ \forall\, i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0. \end{cases}$ [003579]

Exercice 3394 A^3 est semblable à A^4

Quelles sont les matrices $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que A^3 est semblable à A^4 ? On étudiera séparément les cas :

1. A a 3 valeurs propres distinctes.
2. A a 2 valeurs propres distinctes
3. A a une seule valeur propre.

Correction ▼ [003580]

Exercice 3395 A et $2A$ sont semblables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que A et $2A$ sont semblables.

Correction ▼ [003584]

Exercice 3396 Matrice bloc

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2N}(K)$.

1. Comparer les valeurs propres de A et M.
2. Soit $P \in K[X]$ et $Q = XP'$. Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ Q(A) & P(A) \end{pmatrix}$.
3. A quelle condition sur A, M est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003597]

Exercice 3397 Ensi P 90

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Soit $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003598]

Exercice 3398 Matrice bloc

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est. (Chercher les sous-espaces propres de M en fonction de ceux de A)

Correction ▼ [003599]

Exercice 3399 Matrice bloc

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(K)$ diagonalisable avec A carrée d'ordre p.

Soit λ une valeur propre de M de multiplicité m. Montrer que si $p > n - m$, alors λ est valeur propre de A.

[003600]

Exercice 3400 Réduction par blocs (Centrale MP 2003)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathrm{Spec}(B)$ et fonction de $\mathrm{Spec}(A)$.

Correction ▼ [003601]

Exercice 3401 $A^m \to 0$ lorsque $m \to \infty$ (Mines MP 2003)

Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Représenter dans un plan l'ensemble des couples (a,b) tels que $A^m \to 0$ lorsque $m \to \infty -$.

Correction ▼ [003602]

Exercice 3402 Chimie P 1996

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Est-il vrai que : f est diagonalisable $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$? [003603]

Exercice 3403 u diagonalisable $\Rightarrow Ker(u - \lambda\mathrm{id}) + Im(u - \lambda\mathrm{id})$ est directe

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Pour $\lambda \in \mathrm{spec}(u)$, on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})$ et $F_\lambda = \mathrm{Im}(u - \lambda\mathrm{id})$. Montrer que $E_\lambda \oplus F_\lambda = E$. [003604]

Exercice 3404 $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$

Soit E un K-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(f) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = E$.

Correction ▼ [003605]

Exercice 3405 $rg(f - \lambda\mathrm{id})$

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $rg(f - \lambda\mathrm{id}) = rg(f - \lambda\mathrm{id})^2$. [003606]

Exercice 3406 Nombre de noyaux et d'images

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les ensembles $\mathscr{K} = \{\mathrm{Ker}(P(u)),\ P \in K[X]\}$ et $\mathscr{I} = \{\mathrm{Im}(P(u)),\ P \in K[X]\}$ sont finis et ont même cardinal.

Correction ▼ [003607]

Exercice 3407 $\dim(\mathrm{Ker} f^2) = 2\dim(\mathrm{Ker} f)$, Mines-Ponts MP 2005

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\dim(\mathrm{Ker} f^2) = 2\dim(\mathrm{Ker} f) = 2d$. Montrer que s'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $g^k = f$ alors k divise d.

Correction ▼ [003608]

Exercice 3408 ***

Soit $E = SL_2(\mathbb{Z}) = \{$matrices carrées de format 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant 1$\}$.

1. Montrer que $(E, \times)$ est un groupe
2. Soit A un élément de E tel que $\exists p \in \mathbb{N}^* / A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

Correction ▼ [005661]

Exercice 3409 ****

Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Correction ▼ [005662]

Exercice 3410 ****

Trouver A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la comatrice de A soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005681]

Exercice 3411 **I

Soit A une matrice carrée réelle de format $n \geqslant 2$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est un entier pair.

Correction ▼ [005687]

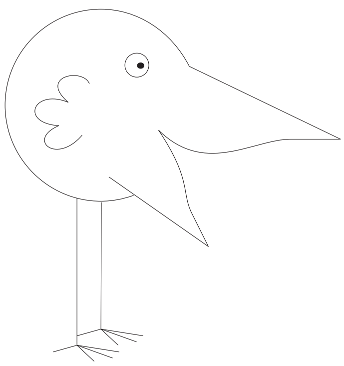
122 202.01 Endomorphisme du plan

Exercice 3412

Dessiner l'allure du Shadock ci dessous après qu'il ait subi l'action de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

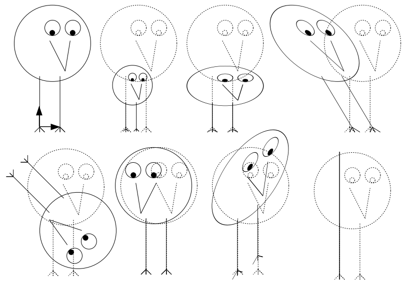
Ecrire la matrice de la dernière transformation dans la base $((2,1),(-1,1))$.



[001517]

Exercice 3413

Retrouver la matrice (dans la base indiquée sur le premier dessin) de la transformation subie par chacun des Shadocks ci-dessous.



[001518]

Exercice 3414

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p\circ p=p$. Soit p un projecteur.

1. Montrer que Id_E-p est un projecteur, calculer $p\circ(\mathrm{Id}_E-p)$ et $(\mathrm{Id}_E-p)\circ p$.
2. Montrer que pour tout $\vec{x}\in\operatorname{Im}p$, on a $p(\vec{x})=\vec{x}$.
3. En déduire que $\operatorname{Im}p$ et $\ker p$ sont supplémentaires.
4. Montrer que le rang de p est égal à la trace de p. (On rappelle que la trace de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime cette matrice.)

Correction ▼ [002564]

123 202.02 Endomorphisme auto-adjoint

Exercice 3415

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $p\in\mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal si et seulement si $p=p^*$. [001525]

Exercice 3416

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $\varphi\in\mathscr{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\varphi=\varphi^*$ et $\varphi(F)\subset F$ alors $\varphi(F^\perp)\subset F^\perp$.
2. Soit F un espace propre de φ. Montrer que si $\varphi\circ\varphi^*=\varphi^*\circ\varphi$ alors $\varphi(F^\perp)\subset F^\perp$.

[001526]

Exercice 3417

Soient A et B deux matrices symétriques positives. Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que tout vecteur propre de A^k est vecteur propre de A.
2. Si $A^k = B^k$ alors $A = B$.
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse A et B symétriques positives ?

[001527]

Exercice 3418

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\varphi^* \circ \varphi$ est symétrique et que $\mathrm{Sp}(\varphi^* \circ \varphi) \subset \mathbb{R}_+$.
2. On note respectivement λ et μ la plus grande et la plus petite valeur propre de $\varphi^* \circ \varphi$. Montrer, pour tout $x \in E$, l'inégalité :
$$\mu \|x\|^2 \leqslant \|\varphi(x)\|^2 \leqslant \lambda \|x\|^2.$$

[001528]

Exercice 3419

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si $\varphi = \varphi^*$ et $\forall x \in E : \langle x, \varphi(x)\rangle = 0$ alors $\varphi = 0$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.

   ii) $\forall x, y \in E : \langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x)\rangle$.

   iii) $\forall x \in E : \|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$.
3. Si $\dim(E) = 2$ et si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ alors la matrice de φ dans une base orthonormée est soit symétrique, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.
4. On suppose désormais que $\dim(E) = 3$ et que $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.
   (a) Montrer que φ a au moins une valeur propre réelle qu'on notera λ. Montrer que E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont laissés stables par φ et φ^*.
   (b) Montrer que si φ n'est pas symétrique, il existe une base orthonormée ε de E et deux réels a et b (avec $b \neq 0$) tels que $\mathrm{Mat}(\varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

[001529]

Exercice 3420

Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de E. Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ deux vecteurs de E. Calculer $\langle x, y\rangle$ en fonction des coefficients x_i et y_i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$).
2. On considère $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. On note λ sa plus petite valeur propre et λ' sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à E, les inégalités :
$$\lambda \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda' \|x\|^2.$$
(On utilisera une base orthonormée convenable.)
3. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme quelconque. Montrer que $u = \frac{1}{2}(v + v^*)$ est auto-adjoint. Soient μ une valeur propre de v, λ la plus petite valeur propre de u et λ' la plus grande valeur propre de u. Montrer que $\lambda \leqslant \mu \leqslant \lambda'$.

[001530]

Exercice 3421

1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tA \cdot A$ est une matrice symétrique dont tous les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives. Démontrer l'égalité : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$.
2. Soit $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Existe-t-il une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tA \cdot A$? Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que A soit inversible. Application à $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

[001531]

Exercice 3422

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension p. A chaque n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E on associe le nombre (déterminant de Gram)

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \text{dét}(< x_i, x_j >)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

1. Montrer que $x_1, \ldots, x_n$ sont liés si et seulement si $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$; montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont indépendants, on a $G(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
2. Montrer que, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a $G(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \ldots, x_n)$, et que la valeur de $G(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas modifiée si l'on rajoute à un des vecteurs, soit x_i, une combinaison linéaire des autres vecteurs $x_j (j \neq i)$. Calculer $G(\alpha x_1, \ldots, x_n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
3. On suppose $x_1, \ldots, x_n$ indépendants. Soit $x \in E$, et soit $d(x,H)$ la distance de x à l'hyperplan $H = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que $d(x,H)^2 = \dfrac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}$.

[001532]

Exercice 3423

Diagonaliser très rapidement la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

[001533]

Exercice 3424

Montrer que l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$C = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

est un automorphisme orthogonal. [001534]

Exercice 3425

Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. (a) Soit $x \in E$ tel que $f^*(x) = x$. Montrer que $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.
   (b) En déduire que $\ker(f^* - \text{Id}) \subseteq \ker(f - \text{Id})$.
2. Soit h un endomorphisme de E. Montrer que $(\text{Im}\, h)^\perp \subseteq \ker h^*$.
3. En déduire que les sous-espace vectoriels $\ker(f - \text{Id})$ et $\text{Im}\,(f - \text{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

[001535]

Exercice 3426

Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E. Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ deux vecteurs de E. Calculer $\langle x, y\rangle$ en fonction des coefficients x_i et y_i (pour $i \in \{1,2,3\}$).
2. On considère $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. On note λ_1 sa plus petite valeur propre et λ_2 sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à E les inégalités :
$$\lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_2\|x\|^2.$$
(On utilisera une base orthonormée convenable.)
3. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme quelconque. Montrer que $u = \dfrac{1}{2}(v+v^*)$ est auto-adjoint. Soient λ une valeur propre de v, λ_1 la plus petite valeur propre de u et λ_2 la plus grande valeur propre de u. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

[001536]

Exercice 3427

1. Soient E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique positif. Montrer que si $x \in E$ alors $(f(x)|x) \geqslant 0$.
2. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive. Montrer que pour tout $i = 1,..,n$, $m_{ii} \geqslant 0$ et $\mathrm{tr}(M) \geqslant 0$
3. Soient A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives.
   (a) Montrer qu'il existe $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(DM)$.
   (b) En déduire que $\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

[001537]

Exercice 3428

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in E, \langle f(x), x\rangle \geqslant 0$.
2. Il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f = g^*g$.
3. Il existe $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $h = h^*$ et $f = h^2$.

[001538]

Exercice 3429

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer que $\|f\| = \|f^*\|$.

[001539]

Exercice 3430

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien (de dimension finie) et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On note $X = \{x \in E; \langle f(x), x\rangle \leqslant 1\}$. Montrer que X est compacte si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont strictement positives.

[001540]

124 202.03 Autres endomorphismes normaux

Exercice 3431

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien. Un endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ est dit antisymétrique lorsque $\varphi^* = -\varphi$.

1. Montrer que φ est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E, \langle \varphi(x), x\rangle = 0$. (on pourra remarquer que $\varphi+\varphi^*$ est autoadjoint.)
2. Montrer que si φ est antisymétrique alors $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \mathrm{Im}(\varphi)$ puis que $\mathrm{rg}(\varphi)$ est pair.

[001541]

Exercice 3432

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique c'est-à-dire tel que $\varphi^* = -\varphi$.

1. Montrer que si $\lambda \in Sp(\varphi)$ alors $\lambda = 0$. Montrer que $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp$ est stable par φ.
2. (a) Montrer que φ^2 est symétrique.
   (b) Montrer que si x est un vecteur propre associé à une valeur propre μ de φ^2 alors $E_x = \mathrm{vect}\{x, \varphi(x)\}$ et $E_x^\perp$ sont laissés stables par φ.
   (c) Montrer que $\mu > 0$. Déterminer une base $\{e_1, e_2\}$ de E_x telle que la matrice de la restriction de φ E_x dans $\{e_1, e_2\}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que E est somme directe orthogonale de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et de plans stables.

[001542]

125 202.04 Endomorphisme orthogonal

Exercice 3433

Soit f une transformation orthogonal d'un espace euclidien E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f-\mathrm{id})^\perp$$

En déduire que si $(f-\mathrm{id})^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}$. [001543]

Exercice 3434

Déterminer la nature des transformations de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[001544]

Exercice 3435

Diagonaliser dans une base orthonormale (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$) la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpréter géométriquement la transformation de $\mathbb{R}^3$ représentée par cette matrice. [001545]

Exercice 3436

Diagonaliser les matrices suivantes dans des bases orthonormées :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 1 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3i \\ 3i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[001546]

Exercice 3437

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice symétrique réelle. Montrer que ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2$$

[001547]

Exercice 3438

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonal d'un espace euclidien E. On dit qu'un endomorphisme f de E conserve l'orthogonalité de $\mathscr{B}$ si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille orthogonale.
Montrer que f conserve l'orthogonalité de $\mathscr{B}$ si et seulement si $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de ${}^t f f$.
Montrer que pour tout endomorphisme f de E, il existe une base orthogonale dont f conserve l'orthogonalité.
[001548]

Exercice 3439 Décomposition polaire

1. Soit r un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On dit que r est positif, si toutes ses valeurs propres sont positives.

   Montrer que si r est défini positif, il existe un et un seul endomorphisme symétrique s positif tel que $s^2 = r$. On appelle s racine carrée positive de r.

   On dit que r est défini positif si et seulement si toutes ses racines sont strictement positives. Montrer que si r est défini positif, alors sa racine positive aussi.
2. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que ${}^t f f$ est symétrique et positif. Montrer que si en plus f est bijective, ${}^t f f$ est défini positif.
3. On suppose maintenant que f est une bijection. Soit s la racine carrée positive de ${}^t f f$. Montrer que $u = f \circ s^{-1}$ est une transformation orthogonale. En déduire que tout endomorphisme bijectif de E peut s mettre sous la forme :
   $$f = u \circ s$$
   où u et une transformation orthogonale, et s est symétrique défini positif.

   Montrer que cette décomposition, appelée décomposition polaire de f est unique.
4. Que se passe-t-il si f n'est pas bijective ?

[001549]

Exercice 3440

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textit{(attention au } \tfrac{1}{7}\textit{...)}$$

1. Sans calculs, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Montrer que f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_1.
5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Donner une interprétation géométrique de f.

[001550]

Exercice 3441

A — Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E diagonalisables qui commutent (c'est à dire qui satisfont $u \circ v = v \circ u$). On note $\lambda_1 ... \lambda_k$les valeurs propres de u et $E_1 ... E_k$ les espaces propres associés.

1. Montrer que $v(E_i) \subset E_i$.
2. On note $v_i = v_{|E_i}$ la restriction de v à E_i. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $P(v_i) = P(v)_{|E_i}$.
3. En déduire que v_i est diagonalisable. Soit B_i une base de E_i formée de vecteurs propres de v_i.

   Montrer que $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ est une base de E formée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v.
4. En déduire que u et v sont diagonalisables dans une même base. Montrer que $u - v$ est diagonalisable.

B — *Application :* On considère maintenant une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, et on lui associe l'endomorphisme $w_A \in \mathrm{End}(M_{n,n}(\mathbb{R}))$ suivant :

$$w : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Le but de l'exercice est de montrer que si A est diagonalisable, w_A l'est aussi.
On note

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \qquad \text{et} \qquad v_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MA \end{array}$$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, (u_A)^k = u_{A^k}$. En déduire que $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(u_A) = u_{P(A)}$, puis que tout polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de u_A.
2. Montrer que

   $$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow u_A \text{ diagonalisable}$$

   On admet sans démonstration que le même résultat est vrai pour v_A :

   $$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow v_A \text{ diagonalisable}$$
3. Montrer que $u_A \circ v_A = v_A \circ u_A$.
4. En déduire que

   $$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow w_A \text{ diagonalisable}$$

[001551]

Exercice 3442

Dans un espace euclidien $(E, <\cdot,\cdot>)$, on considère un vecteur v non nul, un scalaire λ et l'endomorphisme :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + \lambda < x, v > v \end{array}$$

1. Pour $x \in E$, calculer $\|u(x)\|^2$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que u soit une transformation orthogonale.
3. Lorsque u est orthogonale, dire a priori quelles sont les valeurs propres possibles de u, puis dire si elles sont effectivement valeur propre en étudiant les espaces propres associés.
4. Lorsque u est orthogonale, donner une interprétation géométrique de u.

[001552]

Exercice 3443

On considère un espace euclidien $(E, <>)$. On dit qu'un endomorphisme u de E est une similitude de E si et seulement si il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$u^*u = \lambda \mathrm{id}$$

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une similitude

(ii) u est colinéaire à une transformation orthogonale, c'est à dire

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists v \in O(E)\ /\ u = \alpha v$$

(iii) u conserve l'orthogonalité, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, < x,y >= 0 \Rightarrow < u(x), u(y) >= 0$$

Pour (i)⇔(ii), on pourra commencer par montrer que (ii)⇒(i).
Pour (i)⇒(iii), on commencera par montrer que x et $u^*u(x)$ sont toujours colinéaires, c'est à dire que

$$\forall x \in E \exists \lambda_x / u^*u(x) = \lambda_x x$$

puis on montrera que λ_x est indépendant de x.

[001553]

Exercice 3444

Dans un espace euclidien E, on considère un vecteur unitaire a, et à un réel $k \neq -1$ on associe l'endomorphisme u_k de E défini par :

$$u_k(x) = k < x,a > a + x$$

1. Montrer que u_k est un isomorphisme. Déterminer u_k^{-1}. *(on pourra commencer par calculer $< u_k(x), a >$)*
2. Rappeler la caractérisation de l'adjoint d'un endomorphisme, et montrer que u est auto adjoint.
3. Pour quelles valeurs de k u est-il orthogonal ? Interpréter alors géométriquement cette transformation.
4. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de u_k.

Correction ▼ [001554]

Exercice 3445

1. Soient E un espace vectoriel euclidien, f un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base orthonormale donnée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, exprimer a_{ij} en fonction de f et des vecteurs e_i et e_j.
2. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $S = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$.
   (a) Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $S = (u|f(u))$.
   (b) En déduire que $|S| \leqslant n$.

[001555]

Exercice 3446

Soient $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et A_{ij} le cofacteur (i,j) de A. Montrer que $\det A>0$ si et seulement si a_{ij} et A_{ij} sont de même signe. [001556]

Exercice 3447

Que peut-on dire d'une matrice carrée réelle à la fois symétrique et orthogonale ? Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ de matrice $A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&6&-3\\6&3&2\\-3&2&6\end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. [001557]

Exercice 3448

Quelles sont les isométries vectorielles d'un espace vectoriel euclidien qui sont diagonalisables. [001558]

Exercice 3449

Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x\in E, \|f(x)\|\leqslant\|x\|.$$

1. (a) Soit $x\in E$ tel que $f^*(x)=x$. Montrer que $\|f(x)-x\|^2=\|f(x)\|^2-\|x\|^2$.
   (b) En déduire que $\ker(f^*-\mathrm{Id})\subseteq\ker(f-\mathrm{Id})$.
2. Soit h un endomorphisme de E. Montrer que $(\operatorname{Im} h)^\perp\subseteq\ker h^*$.
3. En déduire que les sous-espace vectoriels $\ker(f-\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(f-\mathrm{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

[001559]

Exercice 3450

Déterminer une matrice diagonale $D\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $U\in\mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ telles que $UDU^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$. [001560]

Exercice 3451

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $u\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $u^*=u^{-1}$.

ii) $\forall x\in E, \|u(x)\|=\|x\|$.

iii) $\forall x,y\in E, \langle u(x),u(y)\rangle=\langle x,y\rangle$.

iv) L'image par u d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E.

v) L'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E. [001561]

Exercice 3452

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $\varphi\in\mathscr{O}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\varphi(F)\subset F$ alors $\varphi(F^\perp)\subset F^\perp$. A-t-on égalité ? [001562]

Exercice 3453

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et $u\in\mathscr{O}^-(E)$. On pose $F=\mathrm{Ker}(u+id)$.

1. Montrer que $F\neq\{0\}$. Montrer que F et $f^\perp$ sont stables par u. Pour quelle raison $\dim(F)\neq 2$?
2. On suppose $E\neq F$. Montrer que la restriction de u à $F^\perp$ est une rotation.

3. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base ε de E tels que :

$$\mathrm{Mat}(u,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[001563]

Exercice 3454

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension 4 et $\varepsilon = \{e_1,\cdots,e_4\}$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme déterminé par $\mathrm{Mat}(u,\varepsilon) = A$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{O}^+(E)$.
2. Montrer que l'espace vectoriel F engendré par e_1 et $u(e_1)$ est stable par u. Montrer que la restriction de u à F est une rotation.
3. Montrer que $F^\perp$ est stable par u et est engendré par e_4 et $u(e_4)$. La restriction de u à $F^\perp$ est-elle une rotation ?

[001564]

Exercice 3455

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{O}(n,\mathbb{R})$. Montrer pour tout $j \in \{1,\cdots,n\}$ l'égalité : $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$. En déduire que si A est triangulaire supérieure elle est diagonale. [001565]

Exercice 3456

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{O}(E)$. On pose $v = id - u$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v)^\perp$.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} u^p(x)$ est la projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(v)$.

[001566]

Exercice 3457

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathscr{L}(E)$ telle que $s^2 = id$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s - Id) \oplus \mathrm{Ker}(s + Id)$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $s \in \mathscr{O}(E)$.

   ii) $\mathrm{Ker}(s - Id) \perp \mathrm{Ker}(s + Id)$.

   iii) $s = s^*$.
3. On note désormais s_F l'unique symétrie $s \in \mathscr{O}(E)$ telle que $F = \mathrm{Ker}(s + Id)$. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{O}(E)$ on a : $us_Fu^{-1} = s_{u(F)}$.
4. Montrer que si f est une application de E dans lui-même laissant stables toutes les droites vectorielles (c'est à dire que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$) alors f est linéaire.
5. En déduire que $Z(\mathscr{O}(E)) = \{id, -id\}$ et que si $n \geqslant 3$ alors $Z(\mathscr{O}^+(E)) = \{id, -id\} \cap \mathscr{O}^+(E)$. (on pourra appliquer 3.) dans le cas où F est une droite ou un plan.)
6. Que se passe-t-il lorsque $n = 1$ et $n = 2$?

[001567]

Exercice 3458

Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$ telle que $\ker(u-id) \neq E$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq x$. On pose $y = u(x)$. Alors on sait qu'il existe une unique réflexion r telle que $r(y) = x$.

1. Montrer que $\ker(u-id) \subset \ker(r-id)$.
2. Montrer que $\dim\ker(r \circ u - id) > \dim\ker(u-id)$.
3. Montrer par récurrence que toute isométrie vectorielle est la composée de réflexions.

[001568]

Exercice 3459

Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall (i,j)\ |a_{i,j}| \leqslant 1$ et que $\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leqslant n$. [001569]

Exercice 3460

Soit E euclidien, $n \in \mathbb{N}^*, (x_1,...,x_n,y_1,...,y_n) \in E^{2n}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, (x_i|x_j) = (y_i|y_j).$$

Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal f de E tel que :

$$\forall i \in \{1,...,n\}, f(x_i) = y_i.$$

[001570]

126 202.99 Autre

Exercice 3461

On considère l'application suivante :

$$\alpha\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)dt \end{array}$$

Montrer que α est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour $i \in \{0,...,n\}$, on note α_i l'application

$$\alpha_i\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(i/n) \end{array}$$

Montrer que α_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et montrer que la famille $(\alpha_0,...,\alpha_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.
En déduire que :

$$\exists (\lambda_0,...,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(i/n)$$

[001519]

Exercice 3462

On considère l'application u suivante :

$$u\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Calculer ${}^t u(\alpha)$ lorsque :

$$\alpha\ : P \mapsto P(0) \qquad\qquad \alpha\ : P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$$

[001520]

Exercice 3463

On appelle *trace* d'une matrice A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A)\end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace.
3. Existe-t-il deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I$?

[001521]

Exercice 3464

Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que $(\mathrm{Im} f)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,{}^t f$.
En déduire que f est surjective si et seulement si ${}^t f$ est injective.
Lorsque E et F sont de dimension finies, montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}({}^t f)$. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^t(A))$. [001522]

Exercice 3465

Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in (\mathbb{R}^3)^*$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \alpha(x)\, v.$$

(Indication : commencer par montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 1$*)* [001523]

Exercice 3466

On considère un espace euclidien $(E, <>)$. On rappelle que l'adjoint u^* d'un endomorphisme u est l'endomorphisme caractérisé par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y > = < x, u^*(y) >$$

On dit qu'un endomorphisme u de E est une similitude de E si et seulement si u est la composée d'une homotétie et d'une isométrie, c'est à dire si et seulement si :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists v \in O(E) \ /\ u = \alpha v.$$

1. Redémontrer l'équivalence entre les trois caractérisations suivantes des isométries :

$$\begin{aligned} v \text{ est une isométrie} &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad \|v(x)\| = \|x\| \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2 \quad < v(x), v(y) > = < x, y > \\ &\Leftrightarrow v^* v = \mathrm{id} \end{aligned}$$

On veut montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i) u est une similitude

(ii) il existe un réel $\lambda > 0$ tel que
$$u^* u = \lambda \mathrm{id}$$

(iii) u conserve l'orthogonalité, c'est à dire :
$$\forall (x,y) \in E^2, < x, y > = 0 \Leftrightarrow < u(x), u(y) > = 0$$

2. Montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$, puis que $(ii) \Rightarrow (i)$.

3. Montrer que $(i) \Rightarrow (iii)$.
4. On suppose (iii).
   (a) Soit $x \in E$, $x \neq 0$.Montrer que
   $$\forall y \in E \quad x \perp y \Leftrightarrow u^*u(x) \perp y$$
   (b) En déduire que $u^*u(x)$ appartient à la droite engendrée par x. On note λ_x le réel tel que $u^*u(x) = \lambda_x x$.
   (c) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda_{tx} = \lambda_x$
   (d) Montrer que, pour tout couple (x,y) de vecteurs linéairement indépendants de E, on a : $\lambda_x = \lambda_y$.
   (e) En déduire que l'application $x \mapsto \lambda_x$ est constante. Conclure.

[001524]

Exercice 3467 Équation $AM = \lambda M$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Déterminer les scalaires λ et les matrices $M \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que $AM = \lambda M$. [003567]

Exercice 3468 $v \mapsto v \circ u$ (Centrale MP 2003)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On considère l'application Φ_u qui à $v \in \mathscr{L}(E)$ associe $v \circ u$.

1. Montrer que $\Phi_u \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.
2. Montrer l'équivalence : (u est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (Φ_u est diagonalisable)...
   (a) en considérant les polynômes annulateurs de u et de Φ_u.
   (b) en considérant les spectres et sous-espaces propres de u et de Φ_u.

Correction ▼ [003568]

Exercice 3469 Matexo

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, (F,G) deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G. Soit $E_p = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } f \circ p = p \circ f\}$. Quelle est la dimension de E_p ? [003569]

Exercice 3470 $f \mapsto p \circ f \circ p$

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection et $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), f \mapsto p \circ f \circ p$.
Déterminer les éléments propres de Φ.

Correction ▼ [003570]

Exercice 3471 $f \mapsto u \circ f$ et $f \mapsto f \circ u$

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.
On considère les applications$\mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ $\varphi : f \mapsto u \circ f$ $\psi : f \mapsto f \circ u$

1. Montrer que φ et ψ sont diagonalisables.
2. Montrer que $\varphi - \psi$ est diagonalisable.

[003571]

Exercice 3472 $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}$

Soient u, v deux endomorphisme d'un espace vectoriel E non nul tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_E$.

1. Simplifier $u^k \circ v - v \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis $P(u) \circ v - v \circ P(u)$ pour $P \in K[X]$.
2. Montrer que u et v n'ont pas de polynômes minimaux.

Correction ▼ [003572]

Exercice 3473 Ensi PC 1999

Soit E un ev réel de dimension finie et $f,g \in \mathscr{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Montrer pour tout entier naturel n : $f^n \circ g - g \circ f^n = \alpha n f^n$.
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$).

[003573]

Exercice 3474 X MP* 2001

Soit f un endomorphisme de E (ev de dimension finie sur K) tel que χ_f soit irréductible. Montrez que pour aucun endomorphisme g le crochet de Lie $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ n'est de rang un.

Correction ▼ [003574]

Exercice 3475 $\frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$ (Mines MP 2003)

Soit E un espace vectoriel de dimension n finie, p un projecteur de rang r et $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), u \mapsto \frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$.

1. Est-ce que φ est diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres de φ et les dimensions des sous-espaces propres.

Correction ▼ [003575]

Exercice 3476 Crochet de Lie (Ens Cachan MP* 2003)

Soit $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ un automorphisme d'ev tel que : $\forall\, A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi([A,B]) = [\Phi(A),\Phi(B)]$ où $[X,Y] = XY - YX$. Montrer : $\forall\, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, ($D$ est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ ($\Phi(D)$ est diagonalisable).

Indication : considérer $\phi_D : X \mapsto [D,X]$ et montrer que (D est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (ϕ_D est diagonalisable).

Correction ▼ [003576]

Exercice 3477 Base de $(K^3)^*$

Dans K^3 on considère les formes linéaires : $f_1(\vec{x}) = x+y-z$, $f_2(\vec{x}) = x-y+z$, $f_3(\vec{x}) = x+y+z$.

1. Montrer que (f_1,f_2,f_3) est une base de $(K^3)^*$.
2. Trouver la base duale.

[003625]

Exercice 3478 Base de $(K^3)^*$

Dans K^3 on considère les formes linéaires : $f_1(\vec{x}) = x+2y+3z$, $f_2(\vec{x}) = 2x+3y+4z$, $f_3(\vec{x}) = 3x+4y+6z$.

1. Montrer que (f_1,f_2,f_3) est une base de $(K^3)^*$.
2. Trouver la base duale.

Correction ▼ [003626]

Exercice 3479 Base de $(K^n)^*$

Pour $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n) \in K^n$ on pose $f_i(\vec{x}) = x_i + x_{i+1}$ et $f_n(\vec{x}) = x_n + x_1$. Déterminer si $\mathscr{F} = (f_1,\dots,f_n)$ est une base de $(K^n)^*$ et, le cas échéant, déterminer la base duale.

Correction ▼ [003627]

Exercice 3480 Bases duale des polynômes

Soit $E = K_n[X]$. Montrer que la famille $\mathscr{F} = (f_0,\dots,f_n)$ est une base de E^* et donner la base duale lorsque ...

1. $f_i(P) = P(x_i)$ où $x_0, \dots, x_n$ sont des scalaires distincts.
2. $f_i(P) = P^{(i)}(0)$.
3. $f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$ où $x_0, \dots, x_n$ sont des scalaires quelconques. (Ne pas chercher la base duale pour cet exemple)

[003628]

Exercice 3481 Base duale des polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note :

$$\phi_i : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(x_i); \qquad \psi_i : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P'(x_i)$$

1. Montrer que $(\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$ est une base de E^*.
2. Chercher la base duale. On notera $P_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.

Correction ▼ [003629]

Exercice 3482 Intégrale

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \mapsto \int_{t=-1}^{1} t^i P(t)\,dt$.

1. Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.
2. Trouver la base duale.

Correction ▼ [003630]

Exercice 3483 Évaluations et intégrale

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ distincts. On considère les formes linéaires sur E :

$$f_a \ : \ P \mapsto P(a), \quad f_b \ : \ P \mapsto P(b), \quad f_c \ : \ P \mapsto P(c), \quad \varphi \ : \ P \mapsto \int_{t=a}^{b} P(t)\,dt.$$

Étudier la liberté de (f_a, f_b, f_c, φ).

Correction ▼ [003631]

Exercice 3484 Base duale de $(1, X, X(X-1), \dots)$

Soit $E = K_n[X]$. On note $P_0 = 1$, $P_i = X(X-1)\cdots(X-i+1)$ pour $i \geqslant 1$, et $f_i : P \mapsto P(i)$.

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E et $\mathscr{B} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^*.
2. Décomposer la forme linéaire P_n^* dans la base $\mathscr{B}$. (On pourra utiliser les polynômes : $Q_i = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n; j \neq i}(X - j)$)
3. Décomposer de même les autres formes linéaires P_k^*.

Correction ▼ [003632]

Exercice 3485 Base duale de $((X-a)^k (X-b)^{n-k})$

Soit $E = K_n[X]$ et $a, b \in K$ distincts. On pose $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$.

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.
2. On suppose $n = 2$ et on prend comme base de E^* : $\mathscr{B} = (f_a, f_c, f_b)$ où $f_x(P) = P(x)$ et $c = \frac{a+b}{2}$. Exprimer les formes linéaires (P_0^*, P_1^*, P_2^*) dans $\mathscr{B}$.

Correction ▼ [003633]

Exercice 3486 Formes linéaires liées

Soient $f_1,\dots,f_n$ des formes linéaires sur K^n telles qu'il existe $\vec{x}\in K^n$ non nul tel que $f_1(\vec{x})=\dots=f_n(\vec{x})=0$. Montrer que $(f_1,\dots,f_n)$ est liée. [003634]

Exercice 3487 $(P(X),\dots,P(X+n))$ est une base des polynômes

Soit $E=K_n[X]$, $Q\in E$ de degré n et $Q_i=Q(X+i)$ $(0\leqslant i\leqslant n)$.

1. Montrer que $(Q,Q',Q'',\dots,Q^{(n)})$ est libre.
2. Montrer que toute forme linéaire sur E peut se mettre sous la forme :
   $f:P\mapsto \alpha_0P(0)+\alpha_1P'(0)+\dots+\alpha_nP^{(n)}(0)$.
3. Soit $f\in E^*$ telle que $f(Q_0)=\dots=f(Q_n)=0$. Montrer que $f=0$.
   (considérer le polynôme $P=\alpha_0Q+\dots+\alpha_nQ^{(n)}$)
4. Montrer que $(Q_0,\dots,Q_n)$ est une base de E.

[003635]

Exercice 3488 $\varphi((X-a)P)=0$

Soit $E=K_n[X]$. Soit $\varphi\in E^*$ telle que : $\forall\ P\in K_{n-1}[X],\ \varphi((X-a)P)=0$.
Montrer qu'il existe $\lambda\in K$ tel que : $\forall\ P\in E,\ \varphi(P)=\lambda P(a)$.

[003636]

Exercice 3489 Forme linéaire sur les polynômes

Montrer l'existence et l'unicité d'une forme linéaire Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\Phi(1)=0$, $\Phi(X)=1$ et $\Phi(P)=0$ pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0)=P(1)=0$. [003637]

Exercice 3490 Système unisolvent

Soient $f_1,\dots,f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ n fonctions linéairement indépendantes. On pose $E=\mathrm{vect}(f_1,\dots,f_n)$ et pour $x\in\mathbb{R}$, $\delta_x:E\to\mathbb{R}, f\mapsto f(x)$.

1. Montrer que la famille $(\delta_x)_{x\in\mathbb{R}}$ engendre E^*.
2. En déduire qu'il existe $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ tels que $\det M\neq 0$ où M est la matrice de terme général $f_i(x_j)$.

[003638]

Exercice 3491 Polynômes à deux variables

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. On dit que f est polynomiale si elle est de la forme : $f(x,y)=\sum_{i,j}a_{ij}x^iy^j$, la somme portant sur un nombre fini de termes. Le degré de f est alors $\max(i+j \text{ tq } a_{ij}\neq 0)$.
On note E_k l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ polynomiales de degré inférieur ou égal à k.

1. Montrer que E_k est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et donner sa dimension.
2. Soient $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$. Montrer que les formes linéaires $f\mapsto f(A)$, $f\mapsto f(B)$, $f\mapsto f(C)$ constituent une base de E_1^*.
3. Chercher de même une base de E_2^*.
4. Soit T le triangle plein ABC et $f\in E_1$. Montrer que $\iint_T f(x,y)\,dxdy=\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{6}$.
5. Chercher une formule analogue pour $f\in E_2$.

Correction ▼ [003639]

Exercice 3492 Polynômes trigonométriques

On note $f_n(x) = \cos nx$ et $g_n(x) = \sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$).
Soit E_n l'espace engendré par la famille $\mathscr{F}_n = (f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$.

1. Montrer que pour $k \geqslant 1$, (f_k, g_k) est libre.
2. Soit $\varphi : E_n \to E_n, f \mapsto f''$. Chercher les sous-espaces propres de φ. En déduire que $\mathscr{F}_n$ est libre.
3. On note $a_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ et $\varphi_k : E_n \to \mathbb{R}, f \mapsto f(a_k)$.
   Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{2n})$ est une base de E_n^*. (On utilisera la fonction $f : x \mapsto \prod_{k=1}^{n}(\cos x - \cos a_k)$)
4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $b_k = \frac{2k\pi}{N}$ et $\psi_k : E_n \to \mathbb{R}, f \mapsto f(b_k)$. Montrer que $(\psi_0, \dots, \psi_{N-1})$ est libre si et seulement si $N \leqslant 2n+1$, et engendre E_n^* si et seulement si $N \geqslant 2n+1$.

Correction ▼ [003640]

Exercice 3493 trace sur $\mathscr{M}_n(K)$

Soit $E = \mathscr{M}_n(K)$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(K)$, on note $\phi_A : E \to K, M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$.

1. Montrer que $E^* = \{\phi_A \text{ tq } A \in E\}$.
2. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathscr{S}^\circ = \{\phi_A \text{ tq } A \in \mathscr{A}\}$ et $\mathscr{A}^\circ = \{\phi_A \text{ tq } A \in \mathscr{S}\}$.

[003641]

Exercice 3494 Suites de Fibonacci

Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)$ à termes réels telles que pour tout n : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.
2. Soient $f_0 : E \to \mathbb{R}, u \mapsto u_0$ et $f_1 : E \to \mathbb{R}, u \mapsto u_1$. Trouver la base duale de (f_0, f_1).

Correction ▼ [003642]

Exercice 3495 Combinaison de formes linéaires

Soit E un K-ev de dimension finie et $f, f_1, \dots, f_p \in E^*$. Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $\mathrm{Ker} f \supset \mathrm{Ker} f_1 \cap \dots \cap \mathrm{Ker} f_p$. [003643]

Exercice 3496 Combinaison de formes linéaires

Soit E un K-ev de dimension finie et $f_1, \dots, f_p \in E^*$. On considère l'application :

$$\Phi : E \to K^p, \vec{x} \mapsto \Big(f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x})\Big)$$

Montrer que Φ est surjective si et seulement si $(f_1, \dots, f_p)$ est libre. [003644]

Exercice 3497 Orthogonaux d'une somme directe

Soit E un K-ev de dimension finie et F, G deux sev de E tels que $F \oplus G = E$.

1. Montrer que $F^\circ \oplus G^\circ = E^*$.
2. Montrer que F° est naturellement isomorphe à G^* et G° à F^*.

[003645]

Exercice 3498 $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$

Soit E un K-ev de dimension finie et $f, g \in E^*$ toutes deux non nulles. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) \neq 0$ et $g(\vec{u}) \neq 0$. [003646]

Exercice 3499 p formes linéaires

Soit E un K-ev. On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1,\dots,f_p$ telles que :

$$\forall\,\vec{x}\in E,\ (f_1(\vec{x})=\dots=f_p(\vec{x})=0)\Rightarrow(\vec{x}=\vec{0}).$$

Montrer que E est de dimension finie inférieure ou égale à p. [003647]

Exercice 3500 $\det(f_i(u_j))\neq 0$

Soit E un K-ev de dimension finie n, $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\in E$ et $f_1,\dots,f_n\in E^*$.
Soit M la matrice de terme général $f_i(\vec{u}_j)$. Montrer que si $\det M\neq 0$, alors $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ est une base de E et $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de E^*. [003648]

Exercice 3501 e_n^* imposé

Soit E un K-ev de dimension finie n, $\mathscr{F}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1})$ une famille libre de E et $f\in E^*\setminus\{0\}$. Montrer qu'on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ telle que $f=e_n^*$ si et seulement si $f(\vec{e}_1)=\dots=f(\vec{e}_{n-1})=0$.
Y a-t-il unicité de $\vec{e}_n$? [003649]

Exercice 3502 Modification élémentaire

Soit E un K-ev de dimension finie n, $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E, et $\mathscr{B}'=(\vec{e}_1{}',\dots,\vec{e}_n{}')$ déduite de $\mathscr{B}$ par une opération élémentaire (échange de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul, addition à un vecteur d'un multiple d'un autre).
Étudier comment on passe de la base duale $\mathscr{B}^*$ à $\mathscr{B}'^*$ en fonction de l'opération effectuée.
Correction ▼ [003650]

Exercice 3503 Séparation

Soit E un K-ev de dimension finie.

1. Soient $\vec{x},\vec{y}\in E$ avec $\vec{x}\neq\vec{y}$. Montrer qu'il existe $f\in E^*$ telle que $f(\vec{x})\neq f(\vec{y})$.
2. Soit V un sev de E^* ayant la propriété : $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in E,\ \vec{x}\neq\vec{y}\Rightarrow\exists\,f\in V$ tq $f(\vec{x})\neq f(\vec{y})$.
   Montrer que $V=E^*$.

[003651]

127 203.01 Groupe, sous-groupe

Exercice 3504

Soit ABC un triangle équilatéral du plan.

1. Déterminer l'ensemble des rotations qui laissent invariant $\{A,B,C\}$.
2. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.
3. Faire de même avec un carré.

[001303]

Exercice 3505 Entiers modulo n

Étant donné un entier naturel n, on appelle classe d'un entier relatif p modulo n l'ensemble $\overline{p}=\{p+kn\mid k\in\mathbb{Z}\}$.
L'ensemble des classes modulo n est noté $\mathbb{Z}_n$.

1. Écrire la liste des éléments distincts de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ et $\mathbb{Z}_5$.
2. Montrer que si $x\in\overline{p}$ et $y\in\overline{q}$, alors $x+y\in\overline{p+q}$ et $xy\in\overline{pq}$.

3. En posant $\overline{p}+\overline{q}=\overline{p+q}$ et $\overline{p}\cdot\overline{q}=\overline{pq}$, on définit deux lois de composition, addition et multiplication sur $\mathbb{Z}_n$.
   Écrire la table d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}_4$.

Même question pour $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, et $\mathbb{Z}_5$. [001304]

Exercice 3506

1. Montrer que les transformations géométriques qui conservent globalement un rectangle forment un groupe. Faire l'étude de ce groupe.
2. Étudier le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'il n'existe que deux sortes de groupes à quatre éléments.

[001305]

Exercice 3507

1. Étudier le groupe des isométries du carré.
2. Écrire la liste des éléments du groupe $\mathfrak{S}_4$ des permutations de quatre lettres. Trouver des sous-groupes de ce groupe isomorphes aux groupes du rectangle, du triangle équilatéral, du carré.

[001306]

Exercice 3508 Permutations d'un ensemble de n éléments

1. Une permutation de l'ensemble de n éléments $\{1,2,\ldots,n\}$ est une bijection de cet ensemble dans lui-même. Il est commode de désigner une telle permutation s par le tableau de valeurs suivant : $s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n)\end{pmatrix}$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble de ces permutations pour n donné.
2. Écrire les éléments de $\mathfrak{S}_2$ et de $\mathfrak{S}_3$.
3. Établir les tables de composition de ces deux ensembles.
4. De la table de $\mathfrak{S}_3$ on peut extraire des parties *stables* ne faisant intervenir que certains éléments ; lesquelles ? Peut-on les trouver toutes.
5. Voyez-vous des analogies (totales ou partielles) entre ces tables et des situations rencontrées plus haut ?
6. On peut obtenir tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$ à partir de la composition de certains d'entre-eux ; lesquels ?
7. Combien d'éléments possède $\mathfrak{S}_n$? Combien de cases contient la table de composition de $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5,\ldots$? Pourrait-on étudier $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$ à partir de ces tables ?

[001307]

Exercice 3509

Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x)=x \qquad f_2(x)=\frac{1}{x} \qquad f_3(x)=-x \qquad f_4(x)=-\frac{1}{x}$$

Montre que $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$. [001308]

Exercice 3510

Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3. Est-ce vrai pour 4 ? [001309]

Exercice 3511

Montrer que si X contient au moins trois éléments alors $\sigma(X)$ n'est pas abélien. [001310]

Exercice 3512

Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?

1. $]-1,1[$ muni de la loi définie par $x\star y=\frac{x+y}{1+xy}$;
2. $\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}$ pour la multiplication usuelle ;
3. $\mathbb{R}_+$ pour la multiplication usuelle ;
4. $\{x\in\mathbb{R}\mapsto ax+b : a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, b\in\mathbb{R}\}$ pour la loi de composition des applications.

Correction ▼ [001311]

Exercice 3513

Soit $K=\{\mathrm{Id},f_1,f_2,f_3\}$ où f_1, f_2, et f_3 sont les permutations de $E=\{1,2,3,4\}$ définies par

$$f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

Montrer que K est un sous-groupe de $\mathscr{S}_4$. [001312]

Exercice 3514

Soit l'ensemble

$$\mathscr{J}=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}):x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}.$$

Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices, $\mathscr{J}$ est un groupe abélien. [001313]

Exercice 3515

Pour la multiplication usuelles des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes :

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})\cap\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}),\quad \{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}):\det M=1\}\ ?$$

Correction ▼ [001314]

Exercice 3516

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à droite et tel que chaque élément de G admette un symétrique à droite. Montrer que G est un groupe. [001315]

Exercice 3517

Soient $(G,.)$ un groupe et $a,b\in G$. On suppose que

$$(1): ab^2=b^3a \quad \text{et } (2): ba^2=a^3b.$$

1. Montrer, en utilisant seulement (1), que $a^2b^8a^{-2}=b^{18}$ puis que $a^3b^8a^{-3}=b^{27}$.
2. En déduire, en utilisant (2), que $a^3b^8a^{-3}=b^{18}$ et enfin que $a=b=1$.

[001316]

Exercice 3518

1. L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ muni de la loi $\star$ définie par $\forall a,b\in\mathbb{R}, a\star b=a+b+ab$ est-il un groupe ?
2. L'ensemble $E=\{-1,1,i,-i\}\subseteq\mathbb{C}$ muni de la loi usuelle de multiplication dans $\mathbb{C}$ est-il un groupe ?
3. L'ensemble $E=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}:a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$ muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un groupe ?
4. L'ensemble $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles d'ordre 2 muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un groupe ?

[001317]

Exercice 3519

Soient $(G,\star)$ et $(H,\triangle)$ deux groupes. On définit sur $G\times H$ la loi $\heartsuit$ par $(x,y)\heartsuit(x',y')=(x\star x',y\triangle y')$.

1. Montrer que $(G \times H, \heartsuit)$ est un groupe.
2. Si G est de cardinal 2, dresser la table de $G \times G$ et la reconnaître parmi les exemples des exercices précédents.

[001318]

Exercice 3520

Montrer que si H et K sont des sous-groupes de G alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G. Est-ce vrai pour $H \cup K$?
[001319]

Exercice 3521

Si G est un groupe, on appelle centre de G et on note $Z(G)$ l'ensemble $\{x \in G / \forall y \in G, xy = yx\}$.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que G est commutatif ssi $Z(G) = G$.
3. Calculer $Z(\sigma_3)$.

[001320]

Exercice 3522

On nomme $M_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients entiers relatifs.
- Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que pour que M admette un inverse élément de $M_n(\mathbb{Z})$ il faut et il suffit que $\det(M) \in \{-1, 1\}$.
- Démontrer que $Gl_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z})\ ; \det(M) \in \{-1, 1\}\}$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$. [001321]

Exercice 3523

1. L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ est il un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?
2. L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est-il un sous groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?
3. Existe-t-il une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a \leqslant M$ forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [001322]

Exercice 3524

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Correction ▼ [001323]

Exercice 3525

Déterminer le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par les entiers 24, 36 et -54. [001324]

Exercice 3526

Les questions sont indépendantes. Soit j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Déterminer le sous-goupe du groupe additif $\mathbb{C}$ engendré par i et j.
2. Déterminer le sous-goupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ engendré par i et j.

[001325]

Exercice 3527

Soit G un groupe engendré par a et b. Montrer que $< a > \cap < b > \subseteq Z(G)$ où $Z(G)$ désigne le centre de G.

Correction ▼ [001326]

Exercice 3528

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ avec $G \neq \{0\}$.

1. Montrer l'existence de $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$.
2. Si $\alpha > 0$ montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Si $\alpha = 0$ montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

[001327]

Exercice 3529

Soit G un groupe. Montrer que l'ensemble $Aut(G)$ des automorphismes de G est un groupe pour la loi de composition. Soit H un sous-groupe de $Aut(G)$, et $\pi : G \to \wp(G)$ définie par : $\pi(x) = \{f(x) | f \in H\}$. Montrer que $\pi(G)$ est une partition de G. [001328]

Exercice 3530

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\star$. On appelle translation à droite (resp. à gauche) par $a \in E$, l'application d_a (resp. g_a) de E dans E définie par $d_a(x) = a \star x$ (resp. $g_a(x) = x \star a$).

1. Montrer que dans un groupe les translations à droite et à gauche sont des bijections.
2. Réciproquement, si la loi $\star$ de E est associative, et que les translations à droite et à gauche sont des bijections, on va montrer que $(E,\star)$ est un groupe.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $e_x \in E$ (resp. $f_x \in E$) tel que $e_x \star x = x$ (resp. $x \star f_x = x$).
   (b) Si $x, y \in E$, montrer que $e_x = e_y$ (noté e dorénavant) et $f_x = f_y$ (noté f dorénavant).
   (c) Montrer que $e = f$ (noté e dorénavant).
   (d) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $\bar{x} \in E$ (resp. $\bar{\bar{x}} \in E$) tel que $\bar{x} \star x = e$ (resp. $x \star \bar{\bar{x}} = e$).
   (e) Montrer que $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$.
   (f) Conclure.

[001329]

Exercice 3531

Si K est un sous-groupe de H et H un sous-groupe de G, montrer que K est un sous-groupe de G. [001330]

Exercice 3532

1. Soit $(G,.)$ un groupe. Montrer l'équivalence de :
   i) G est abélien.
   ii) Pour tout $a, b \in G$, on a : $(ab)^2 = a^2 b^2$.
   iii) Pour tout $a, b \in G$, on a : $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$.
   iv) L'application f de G dans G définie par $f(x) = x^{-1}$ est un automorphisme.
2. En déduire que si pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, alors G est abélien.

[001331]

Exercice 3533

1. Les ensembles $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C},\mathbb{C}^*$ munis des lois $+$ ou $\times$ sont-ils des groupes ? Quand c'est le cas, chercher des sous-groupes non triviaux.
2. $\{x\in\mathbb{R}\mapsto ax+b : a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, b\in\mathbb{R}\}$ muni de la loi de composition des applications est-il un groupe ?

[001332]

Exercice 3534

Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ (resp. de $(\mathbb{R}^*,\times)$) contenant 1 ? Contenant 2 ? [001333]

Exercice 3535

Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ fixé. Montrer que $S_\lambda=\{\exp(i\lambda t) : t\in\mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},\times)$. Pour quelles valeurs de λ retrouve-t-on des sous-groupes bien connus ? A quoi ressemblent les courbes S_λ ? Que peut-on dire, en terme de morphisme, de l'application $t\mapsto\exp(i\lambda t)$? [001334]

Exercice 3536

Décrire tous les homomorphismes de groupes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

Correction ▼ [001343]

Exercice 3537

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on pose la matrice $M_{a,b}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$. Soit $\mathscr{S}=\left\{M_{a,b} : (a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right\}$. Soit l'application $f:\mathscr{S}\to\mathbb{R}, M_{a,b}\mapsto a^2+b^2$.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est un groupe pour la loi usuelle de multiplication des matrices carrées.
2. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathscr{S},\times)$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$.

[001344]

Exercice 3538

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$ l'application qui à tout $x\in\mathbb{R}$ associe $e^{ix}\in\mathbb{C}^*$. Montrer que f est un homomorphisme de groupes. Calculer son noyau et son image. f est-elle injective ?

Correction ▼ [001345]

Exercice 3539

Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes :

1. $\ln(xy)=\ln x+\ln y$;
2. $\det(MM')=\det(M)\det(M')$;
3. $|zz'|=|z||z'|$;
4. $(xy)^{\frac12}=x^{\frac12}y^{\frac12}$;
5. $e^{z+z'}=e^ze^{z'}$;
6. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$.

[001346]

Exercice 3540

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on pose $M_{a,b}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$, $\mathscr{S}=\left\{M_{a,b} : (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ et $\mathscr{S}^*=\mathscr{S}\setminus\{M_{0,0}\}$. Soit l'application $f:\mathscr{S}\to\mathbb{C}, M_{a,b}\mapsto a+ib$.

1. (a) Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-groupe du groupe additif usuel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathscr{S}^*$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f est un isomorphisme du groupe $(\mathscr{S},+)$ sur le groupe additif $\mathbb{C}$.
3. (a) Montrer que f définit un homomorphisme du groupe $(\mathscr{S}^*,\times)$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de cet homomorphisme.
4. Montrer que $\Omega = \left\{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2+b^2=1\right\}$ est un sous-groupe distingué du groupe multiplicatif $\mathscr{S}^*$.

[001347]

Exercice 3541

Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \to x^{-1}$ est un morphisme si et seulement si G est commutatif. On suppose G fini ; soit ϕ un morphisme involutif de G dont le seul point fixe est e, montrer que :

$$\forall z \in G, \exists t \in G, z = t(\phi(t))^{-1}.$$

En déduire ϕ puis que G est commutatif. [001348]

Exercice 3542

Montrer que les groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ sont isomorphes. [001349]

Exercice 3543

Montrer que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3$ est isomorphe à $\mathbb{U}_6$. Est-ce que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ est isomorphe est $\mathbb{U}_4$? Pouvez-vous conjecturer à quelle condition $\mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m$ est isomorphe à $\mathbb{U}_{nm}$? [001350]

Exercice 3544

Soit G un groupe.

1. Montrer que l'ensemble des automorphismes de G muni de la loi de composition des applications est un groupe. Ce groupe est noté $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Vérifier que l'application $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ qui associe à $g \in G$ l'application $\phi_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$ est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau $Z(G)$, dit *centre* de G.
3. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

[001351]

Exercice 3545

Soit $(G,.)$ un groupe. On appelle conjugaison par $a \in G$, l'application f_a de G dans G définie par $f_a(x) = a.x.a^{-1}$.

1. Montrer que f_a est un automorphisme de G.
2. Soit $\Gamma = \{f_a : a \in G\}$. Montrer que $(\Gamma,\circ)$ est un groupe.
3. Soit $\Phi : G \to \Gamma, a \mapsto f_a$. Vérifier que Φ est un morphisme. Est-il injectif ? (indication : préciser ce morphisme lorsque G est abélien).

[001352]

Exercice 3546

1. Les sous-groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Z},+)$ sont-ils isomorphes ?
2. Les sous-groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\times)$ sont-ils isomorphes ?

[001353]

Exercice 3547

Montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ne sont pas isomorphes.

Correction ▼ [001354]

Exercice 3548

1. On suppose que φ est un isomorphisme de $(G,*)$ sur $(G',\diamond)$. Si e est l'élément neutre de G, que peut-on dire de $\varphi(e)$? Si x' est l'inverse de x dans G, que peut-on dire de $\varphi(x')$? Si G est d'ordre n, que peut-on dire de l'ordre de G' ?
2. Pouvez-vous citer des exemples de groupes ? de groupes isomorphes ?
3. Si $(G,*)$ est un groupe fini et si on établit la table de la loi $*$, peut-on rencontrer deux fois le même élément dans la même ligne, dans la même colonne ? Établir les tables de composition possibles pour des groupes à 2, 3, 4 éléments. Pouvez-vous donner des exemples de groupes correspondant à ces tables. Retrouver éventuellement des groupes isomorphes.

[001385]

Exercice 3549

Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est cyclique et donner la liste des générateurs de G.

Correction ▼ [001386]

Exercice 3550

Soit G un groupe d'ordre pn avec p premier.

1. On considère deux sous-groupes H et H' de G d'ordre p avec $H \neq H'$. Montrer que $H \cap H' = \{e\}$.
2. En déduire que le nombre d'éléments d'ordre p dans G est un multiple de $p-1$.

Correction ▼ [001387]

Exercice 3551

Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4. [001388]

Exercice 3552

1. Soit G un groupe dans lequel tout élément (distinct de l'élément neutre) est d'ordre 2. Montrer que G est commutatif.
2. Soit G un groupe d'ordre pair. Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 2.

Correction ▼ [001389]

Exercice 3553

Montrer que tout morphisme de groupes de $\mathbb{Q}$ dans un groupe fini G est trivial. [001390]

Exercice 3554

Soit G un groupe et H une partie finie non vide de G. On suppose que H est stable pour la loi de G. Montrer H est un sous-groupe de G. [001391]

Exercice 3555

Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ ($n \geqslant 2$), possédant 2 sous-groupe H et H' tels que :

$$\mathrm{Card}(H) = \mathrm{Card}(H') = n$$

et

$$H \cap H' = \{e\}.$$

1. Montrer que $G - (H \cup H')$ est un singleton, noté $\{a\}$.
2. Soit $h \in H - \{e\}$, montrer que $hH' \subset \{h, a\}$, en déduire que $hH' = \{h, a\}$ puis que $n = 2$.
3. On écrit $G = \{a, e, h, h'\}$, donner la table de G (puis un exemple d'un tel groupe).

[001392]

Exercice 3556

Soit G l'ensemble des matrices d'ordre 2 inversibles.

1. Montrer que G est un groupe pour le produit matriciel. Est-il commutatif ?
2. Montrer que si $A \in G, B \in G$ vérifient $A^2 = B^2 = ABAB = I$, alors $A = A^{-1}, B = B^{-1}$ et $AB = BA$.
3. Trouver deux éléments de G vérifiant $A^2 = B^2 = I$ et $AB \neq BA$.

[002438]

Exercice 3557

Soit G l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que c'est un groupe multiplicatif isomorphe au groupe additif réel. [002439]

Exercice 3558

Soit G le groupe multiplicatif des matrices complexes d'ordre n. Parmi les sous-ensembles suivants de G, lesquels sont des sous-groupes ?

— les matrices à coefficients réels ;
— les matrices inversibles ;
— les matrices réelles inversibles à coefficients positifs ;
— les matrices diagonales inversibles ;
— les matrices vérifiant $a_{i,i} \neq 0, \forall i$, et triangulaires supérieures ($a_{i,j} = 0$ si $i > j$).
— les matrices vérifiant $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}, \forall i, j$.

[002440]

Exercice 3559

On munit l'ensemble $G = \{a, b, c, d\}$ d'une loi de composition interne dont la table de Pythagore est

$\star$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	c	a	c	a
b	a	d	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

(La première ligne se lit $a \star a = a$, $a \star b = a$, $a \star c = c, \ldots$)

1. Cette loi possède-t-elle un élément neutre ?
2. Cette loi est-elle commutative ?
3. Cette loi est-elle associative ?
4. Est-ce une loi de groupe ?

[002727]

Exercice 3560

On définit une permutation σ de l'ensemble $\{1,2,\dots,15\}$ par la suite finie des entiers $\sigma(1)$, $\sigma(2),\dots,\sigma(15)$. Par exemple

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 7 & 1 & 14 & 3 & 12 & 8 & 9 & 6 & 15 & 13 & 4 & 10 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

signifie $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 7$, etc...Soient

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 3 & 2 & 15 & 4 & 11 & 13 & 10 & 12 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 15 & 2 & 14 & 3 & 13 & 4 & 12 & 5 & 11 & 6 & 10 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour $i = 1,\dots,4$,
   — décomposer σ_i en cycles à supports disjoints.
   — déterminer l'ordre de σ_i.
   — déterminer la signature de σ_i.
2. Calculer les puissances successives du cycle $\sigma = (10\ 15\ 11\ 13)$. Quel est l'inverse de σ_1 ?
3. Calculer σ_2^{2008}.
4. Déterminer, sans fatigue excessive, la signature de
$$\sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3^{-4} \circ \sigma_4^3 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3^{-1} \circ \sigma_4^{-6}.$$
5. Combien y a-t-il de permutations g de $\{1,\dots,15\}$ telles que $\sigma_1 \circ g = g \circ \sigma_1$?

[002728]

Exercice 3561

1. Montrer que les ensembles G suivants, munis des lois $\star$ données, sont des groupes. Préciser quel est l'élément neutre de G et quel est l'inverse d'un élément quelconque $x \in G$.
   (a) $G = \mathbb{Z}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
   (b) $G = \mathbb{Q}^*$ (ensemble des rationnels non nuls), $\star =$la multiplication des nombres ;
   (c) $G = \mathbb{Q}^{+*}$ (ensemble des rationnels strictement positifs), $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (d) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
   (e) $G = \mathbb{R}^{+*}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (f) $G = \mathbb{C}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
   (g) $G = \mathbb{C}^*$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (h) $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (i) $G = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k = 0,1,\dots,n-1\}$, $\star =$ la multiplication des nombres (n est un entier fixé) ;
   (j) $G =$ l'ensemble des bijections d'un ensemble non vide E, $\star =$ la composition des applications ;
   (k) G = l'ensemble des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire standard), $\star =$ la composition des applications ;
   (l) G = l'ensemble des isométries du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire standard) qui préservent une figure donnée, $\star =$ la composition des applications.
2. Donner un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^{+*},\cdot)$;

3. Donner un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +)$;
4. Donner un morphisme de groupes surjectif entre $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

[002729]

Exercice 3562

Dire pour quelle(s) raison(s) les opérations $\star$ suivantes ne munissent pas les ensembles G donnés d'une structure de groupe ?

(a) $G = \mathbb{N}$, $\star =$ l'addition des nombres ;

(b) $G = \mathbb{N}^*$, $\star =$ la multiplication des nombres ;

(c) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;

[002730]

Exercice 3563 Groupe produit

Soient G, H deux groupes multiplicatifs. On munit $G \times H$ de l'opération :

$$\forall\, g, g' \in G,\ \forall\, h, h' \in H, \qquad (g,h)\cdot(g',h') = (gg', hh').$$

Montrer que $\cdot$ définit une loi de groupe sur $G \times H$. [002965]

Exercice 3564 Essai de tables

Les opérations suivantes sont-elles des lois de groupe ?

1.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & b & c & a \\ b & c & a & b \\ c & a & b & c \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & d & c & b & a \\ d & c & d & a & b \end{array}$$

Correction ▼ [002966]

Exercice 3565 Translations surjectives

Soit G un ensemble non vide muni d'une opération interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall\, a, b \in G,\ \exists\, x, y \in G \text{ tq } a = x \cdot b = b \cdot y.$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe. [002967]

Exercice 3566 Transport de structure

Soit G un groupe multiplicatif, E un ensemble, et $\phi : G \to E$ une bijection.

On définit une opération $\star$ sur E par :

$$\forall\, x, y \in E,\ x \star y = \phi\Big(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\Big).$$

Montrer que $\star$ est une loi de groupe et que les groupes G et E sont isomorphes. [002968]

Exercice 3567 Transport de structure

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.

1. Vérifier que $\sqrt{1+(x\star y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe.
3. Montrer que l'application sh est un isomorphisme entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}, \star)$.

[002969]

Exercice 3568 Transport de structure

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$. [002970]

Exercice 3569 Loi associative régulière

Soit E un ensemble fini muni d'une opération interne $*$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que E est un groupe. [002971]

Exercice 3570 Partie finie stable par produit

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G. [002972]

Exercice 3571 Centre d'un groupe et commutant

Soit G un groupe multiplicatif. On note $Z(G) = \{a \in G \text{ tq } \forall\, b \in G, \text{ on a } ab = ba\}$ (*centre de* G), et pour $a \in G$: $C(a) = \{b \in G \text{ tq } ab = ba\}$ (*commutant de* a).
Montrer que $Z(G)$ et $C(a)$ sont des sous-groupes de G. [002973]

Exercice 3572 Loi Δ

Soit E un ensemble et $G = \mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que (G, Δ) est un groupe commutatif.
2. Pour $a \in E$, on note $\phi_a : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\begin{cases} X & \dot{0} \text{ si } a \notin X \\ X & \dot{1} \text{ si } a \in X \end{cases}$.

   Montrer que ϕ_a est un morphisme de groupes.
3. On prend $E = \{1, \dots, n\}$ et on note

$$\begin{aligned} \Phi : G &\to \big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)^n, \\ X &\mapsto (\phi_1(X), \dots, \phi_n(X)). \end{aligned}$$

   Montrer que Φ est un isomorphisme de groupes.

[002974]

Exercice 3573 Sous-groupes emboîtés

Soit G un groupe additif, et H, K, L trois sous-groupes de G vérifiant : $H \subset K$, $H \cap L = K \cap L$, $H + L = K + L$. Démontrer que $H = K$. [002975]

Exercice 3574 Card(HK)

Soit G un groupe fini et H,K deux sous-groupes de G. On considère l'application $\phi : H\times K \to G, (h,k)\mapsto hk$

1. Est-ce que ϕ est un morphisme de groupes ?
2. Soit $z\in HK$, $z=h_0k_0$ avec $h_0\in H$ et $k_0\in K$.
   Montrer que les antécédents de z par ϕ sont les couples $(h_0t, t^{-1}k_0)$ avec $t\in H\cap K$.
3. En déduire que : Card(HK)Card$(H\cap K)=$ Card(H)Card(K).
4. Montrer que : (HK est un sous-groupe de G) $\iff$ $(HK\subset KH)$ $\iff$ $(HK=KH)$.

[002976]

Exercice 3575 Sous-groupes d'un groupe cyclique

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $k\in\mathbb{Z}$ et $d=k\wedge n$.

1. Déterminer l'ordre de $\dot{k}$ dans G.
2. Montrer que $\dot{k}$ et $\dot{d}$ engendrent le même sous-groupe de G.
3. Quels sont tous les sous-groupes de G ?

[002978]

128 203.02 Ordre d'un élément

Exercice 3576

On appelle *ordre d'un élément* d'un groupe fini $(G,*)$ l'ordre du sous-groupe engendré dans G par cet élément.

1. Montrer que si x est d'ordre p, p est le plus petit entier tel que $x^p=e$.
2. Déterminer les ordres des éléments des groupes rencontrés au **I**.
3. Soit $(G,*)$ un groupe fini, a un élément de G, H un sous-groupe d'ordre p de G ; on note aH l'ensemble $\{a*y\mid y\in H\}$.
   a) Montrer que pour tout $a\in G$, aH a p éléments.
   b) Montrer que si $a\in G$ et $b\in G$, $(aH=bH)$ ou $(aH\cap bH=\emptyset)$.
   c) En déduire que l'ordre de H divise l'ordre de G.
4. Montrer que si G est un groupe fini d'ordre n, les ordres de tous ses éléments divisent n.
5. Trouver des sous-groupes de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$.
6. Si G est un groupe d'ordre 5, que peut-on dire de l'ordre de ses éléments ? En déduire les tables de composition possibles pour un groupe d'ordre 5. Que peut-on dire de deux groupes quelconques d'ordre 5 ? Mêmes questions pour les groupes d'ordre 23. Généraliser.

[001335]

Exercice 3577

Soit H un groupe abélien. Un élément $x\in H$ est dit d'ordre fini lorsque il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que la somme $x+\ldots+x$ (n-fois) soit égale à 0. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de H est un sous-groupe abélien de H.

Correction ▼ [001336]

Exercice 3578

Soit G un groupe, e son élément neutre. Un élément g de G est dit *d'ordre* $n\in\mathbb{N}$ si $g^n=e$ et $g^k\neq e$ pour tout entier $k<n$. g est dit *d'ordre fini* si il est d'ordre n pour un n quelconque.

1. Montrer que $Gl_2(\mathbb{R})$ contient des éléments d'ordre 2 et des éléments qui ne sont pas d'ordre fini.

2. Soit φ un homomorphisme de G à valeurs dans H et g un élément de G d'ordre n. Montrer que :
   - $\varphi(g)$ est d'ordre fini inférieur ou égal à n.
   - Si φ est injectif, l'ordre de $\varphi(g)$ est égal à n.
3. Montrer que si G n'a qu'un nombre fini d'éléments, tous ses éléments ont un ordre fini.

Correction ▼ [001337]

Exercice 3579

Soit le groupe $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le sous-groupe H de G engendré par $\overline{6}$ et $\overline{8}$ et déterminer son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G.
3. Quel est l'ordre de l'élément $\overline{9}$?

[001338]

Exercice 3580

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E. On considère les endomorphismes de E définis par

$$s(e_1) = e_1, \quad s(e_2) = -e_2,$$
$$r(e_1) = e_2, \quad r(e_2) = -e_1.$$

1. Montrer que r et s sont des automorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
2. Déterminer l'ordre de s et l'ordre de r.
3. (a) Montrer que $sr = -rs$.
   (b) En déduire que $G := \{\mathrm{Id}_E, s, r, sr, -\mathrm{Id}_E, -s, -r, -s\}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de E.
   (c) Montrer que G est le sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ engendré par s et t.

[001339]

Exercice 3581

Soient G un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre n. Quel est l'ordre de x^2 ?

Correction ▼ [001340]

Exercice 3582

1. Soient G un groupe et $x, y \in G$ des éléments qui commutent et d'ordres respectifs m et n premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre mn. Montrer que l'hypothèse m et n *premiers entre eux* est indispensable.
2. Montrer que $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ d'ordres finis et que AB n'est pas d'ordre fini.

Correction ▼ [001341]

Exercice 3583

Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Correction ▼ [001342]

Exercice 3584 Sous groupes finis de $\mathbb{C}^*$

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$. [002982]

Exercice 3585 Ordre d'un élément

1. Soient G et G' deux groupes et f un morphisme de G dans G'. Pour $a \in G$, comparer l'ordre de a et celui de $f(a)$.
2. Soient $a, b \in G$. Comparer les ordres de a et de bab^{-1}.
3. Soient $a, b \in G$. Comparer les ordres de ab et de ba.

[002983]

Exercice 3586 Ordre de ab

Soient a, b deux éléments d'un groupe multiplicatif G tels que : $\begin{cases} a \text{ est d'ordre } \alpha \\ b \text{ est d'ordre } \beta \\ \alpha \wedge \beta = 1 \\ ab = ba. \end{cases}$

Déterminer l'ordre de ab. [002984]

Exercice 3587 Décomposition d'un élément d'ordre fini

Soit G un groupe multiplicatif et $a \in G$ d'ordre np avec $n \wedge p = 1$.
Montrer qu'il existe $b, c \in G$ uniques tels que b est d'ordre n, c est d'ordre p, $a = bc = cb$.

Indication ▼ [002985]

---

129 203.03 Morphisme, isomorphisme

Exercice 3588 Groupe des automorphismes

Soit G un groupe multiplicatif. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des isomorphismes $\phi : G \to G$.

1. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.
2. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.
3. Pour $a \in G$ on note $\phi_a : G \to G, x \mapsto axa^{-1}$
   Montrer que $\phi_a \in \mathrm{Aut}(G)$, et que l'application $a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes.

[002977]

Exercice 3589 Images directes et réciproques

Soit G un groupe additif et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G on a : $f^{-1}(f(H)) = H + \mathrm{Ker}\, f$.
2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' on a : $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \mathrm{Im}\, f$.

[002979]

Exercice 3590 Morphismes entre deux groupes cycliques

Soit G un groupe cyclique engendré par a d'ordre n, G' un deuxième groupe, et $a' \in G'$.
Montrer qu'il existe un morphisme $\phi : G \to G'$ tel que $\phi(a) = a'$ si et seulement si a' est d'ordre fini divisant n.
Application : déterminer tous les morphismes : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. [002980]

Exercice 3591 Morphismes de $\mathbb{Q}$ additif

Déterminer tous les morphismes de

1. $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}, +)$.
2. $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
3. $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

Correction ▼ [002981]

130 203.04 Anneau

Exercice 3592

Soient $a,b\in\mathbb{C}$. L'application $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto iz-\bar{z}$ est-elle un (endo)morphisme...

1. ...du groupe $\mathbb{C}$?
2. ...de l'anneau $\mathbb{C}$?
3. ...du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

[001355]

Exercice 3593

Soient les ensembles

$$L=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : x\in\mathbb{R}\right\} \text{ et } M=\left\{\begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : x\in\mathbb{R}\right\}$$

Étudier si, munis des lois usuelles, L et M sont des anneaux, des corps. [001356]

Exercice 3594

1. Soit $D=\{f\in\mathbb{R}[X] : f'(0)=0\}$. Montrer que D n'est pas un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et que c'est un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $E=\{f\in\mathbb{R}[X] : f(0)=f'(0)=0\}$. Montrer que D n'est pas un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et que c'est un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera un générateur.

[001357]

Exercice 3595

On définit sur $\mathbb{R}$ les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ par $x\oplus y=x+y-1$ et $x\otimes y=x+y-xy$. Montrer que $(\mathbb{R},\oplus,\otimes)$ est un corps. [001358]

Exercice 3596

Soit $(G,+)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f+g : G\to G, x\mapsto f(x)+g(x)$.
Montrer que $(\mathrm{End}(G),+,\circ)$ est un anneau. [001359]

Exercice 3597

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On dit que $x\in A$ est nilpotent ssi il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $x^n=0$.

1. Montrer que si x est nilpotent alors $1-x$ est inversible.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x+y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

[001360]

Exercice 3598

Soit $(A,+,\times)$ un anneau.
On appelle centre de A l'ensemble $C=\{x\in A/\forall y\in A, xy=yx\}$.
Montrer que C est un sous-anneau de A. [001361]

Exercice 3599

Soient A et B deux anneaux. On définit sur $A \times B$ les lois

$$(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$$

$$(x,y)(x',y') = (xx',yy')$$

1. Montrer que $A \times B$ est alors un anneau.
2. Si A et B sont des corps, en est-il de même pour $A \times B$?

[001362]

Exercice 3600

Montrer que si $A_1,\ldots,A_n$ sont des sous-anneaux de A alors $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ est un sous-anneau de A. [001363]

Exercice 3601

Soit $\mathbb{Z}[i] = \left\{a+ib, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour les lois usuelles de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

[001364]

Exercice 3602

Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. On pose $\mathcal{N}(A) = \{a \in A : a \text{ est nilpotent}\}$.

1. Dans cette question, $A = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{6} \in \mathcal{N}(A)$ puis que $\mathcal{N}(A) = \left\{\lambda\overline{6} : \lambda \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Que peut-on dire de $\mathcal{N}(A)$ si A est intègre ?
3. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A

[001365]

Exercice 3603 Extrait de l'examen de juin 1994

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\star$ par

$$(x_1,x_2) \star (y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1).$$

1. (a) Montrer que $(\mathbb{R}^2,+,\star)$ est un anneau commutatif noté A.
   (b) Chercher les diviseurs de 0 de l'anneau A.
2. On considère l'application
$$f : \mathbb{R}[X] \to A, P \mapsto (P(0), P'(0)).$$
   (a) Montrer que f est un homomorphisme d'anneaux.
   (b) f est-il surjectif ?
   (c) Déterminer le noyau de f.

[001366]

Exercice 3604 Extrait de l'examen de janvier 1994

On définit $A = \{a+jb : a,b \in \mathbb{Z}\}$ où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathcal{U}(A)$ le groupe des éléments inversibles de A et enfin, on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|^2$.

2. (a) Montrer que si $z \in A$ alors $N(z) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in \mathscr{U}(A)$ si et seulement si $N(z) = 1$.
   (c) Soient a et b des entiers. Montrer que si $N(a+jb) = 1$ alors $a, b \in \{-1, 0, 1\}$.
3. Décrire le groupe $\mathscr{U}(A)$ et en déterminer les éléments d'ordre 3.
4. Soit $\Phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}, P \mapsto P(j)$.
   (a) Montrer que Φ est un homomorphisme d'anneaux.
   (b) Déterminer le noyau de Φ (on pourra remarquer que $j^2 + j + 1 = 0$).
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}\,\Phi = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Q}\}$ et que c'est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

[001367]

Exercice 3605 D'après examen juin 94

1. Montrer que $\overline{k}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si les entiers k et n sont premiers entre eux.
2. On pose $n = 10$ et soit G le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (a) Donner la liste des éléments de G.
   (b) Quel est l'ordre de $\overline{3}$? G est-il cyclique ?

[001369]

Exercice 3606 Bac 1978

Soit l'anneau $A = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

1. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau A.
2. Résoudre dans A l'équation $x^2 + \overline{2}x - \overline{3} = \overline{0}$.

[001370]

Exercice 3607

Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau principal. [001372]

Exercice 3608

Soit A un anneau fini commutatif intègre (i.e. $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$). Montrer que c'est un corps, i.e. que tout élément non nul est inversible. [001373]

Exercice 3609

Soit A un anneau, on dit que $x \in A$ est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si x est nilpotent alors $(1 - x)$ est inversible.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent alors xy et $x + y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

[001374]

Exercice 3610 Anneau de Boole

Soit E un ensemble fini et $A = \mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que $(A, \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?
2. Soit I un idéal de A. Montrer que : $\begin{cases} \forall\, X \in I,\ \forall\, Y \subset X,\ \text{on a } Y \in I \\ \forall\, X, Y \in I,\ \text{on a } X \cup Y \in I. \end{cases}$
3. En déduire que $I = \mathscr{P}(E')$ avec $E' \subset E$.

4. Étudier la réciproque.
5. Si E est infini, montrer que $I = \{\text{parties finies de } E\}$ est un idéal qui n'est pas de la forme $\mathscr{P}(E')$.

[003005]

Exercice 3611 Idéaux triviaux

Soit A un anneau commutatif non nul dont les seuls idéaux sont $\{0\}$ et A. Montrer que A est un corps. [003006]

Exercice 3612 Idéaux premiers

Un idéal I d'un anneau A est dit premier si : $\forall\, x, y \in A,\ xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$.

1. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$?
2. Montrer que si A est commutatif non nul et si tous les idéaux de A sont premiers alors A est un corps.

Correction ▼ [003007]

Exercice 3613 Théorème de Gauss

Soit A un anneau commutatif et $a, b \in A$. On dit que : $\begin{cases} a \text{ divise } b \text{ si } b \in aA \\ a \text{ est premier à } b \text{ si } aA + bA = A. \end{cases}$

Montrer que si a est premier à b et a divise bc, alors a divise c. [003008]

Exercice 3614 Caractéristique

Soit A un anneau. On appelle *caractéristique de* A l'ordre de 1 dans le groupe additif $(A, +)$. On suppose A de caractéristique finie, n.

1. Montrer que : $\forall\, x \in A,\ nx = 0$.
2. Si A est intègre, montrer que n est un nombre premier.
3. Si A est intègre et commutatif, montrer que $x \mapsto x^n$ est un morphisme d'anneau.

[003009]

Exercice 3615 Anneau de caractéristique 2

Soit A un anneau non nul tel que : $\forall\, x \in A,\ x^2 = x$.

1. Exemple d'un tel anneau ?
2. Quels sont les éléments inversibles de A ?
3. Montrer que : $\forall\, x \in A,\ x + x = 0$. En déduire que A est commutatif.
4. Pour $x, y \in A$ on pose : $x \leqslant y \iff \exists\, a \in A$ tel que $x = ay$. Montrer que c'est une relation d'ordre.

Correction ▼ [003010]

Exercice 3616 Eléments nilpotents

Soit A un anneau commutatif, et $a \in A$. On dit que a est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

1. Exemple : Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.
2. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents est un idéal de A.
3. Soit a nilpotent. Montrer que $1 - a$ est inversible (remarquer que $1 = 1^n - a^n$).
4. Soient a nilpotent et b inversible. Montrer que $a + b$ est inversible.

[003011]

Exercice 3617 $1 - ab$ et $1 - ba$

Soit A un anneau et $a, b \in A$. Montrer que $1 - ab \in A^* \Leftrightarrow 1 - ba \in A^*$.

Correction ▼ [003012]

Exercice 3618 Radical d'un idéal

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A.
On note $\sqrt{I} = \{x \in A \text{ tq } \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tq } x^n \in I\}$ (radical de I).

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{I+J} \supset \sqrt{I} + \sqrt{J}$.
4. Exemple : $A = \mathbb{Z}$, $I = 3648\mathbb{Z}$. Trouver $\sqrt{I}$.

Correction ▼ [003013]

Exercice 3619 Produit de deux idéaux

Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A.
On note $IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ tel que $a_i \in I,\ b_i \in J\}$.

1. Montrer que IJ est un idéal de A.
2. Montrer que $I(J+K) = IJ + IK$.
3. On suppose $I + J = A$. Montrer que $IJ = I \cap J$.
4. Pour $A = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$, $J = p\mathbb{Z}$, qu'est-ce que IJ ?

[003014]

Exercice 3620 Relation d'équivalence compatible avec les opérations d'anneau

Soit A un anneau commutatif.

1. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence compatible avec l'addition et la multiplication dans A. On note I la classe de 0. Montrer que I est un idéal de A.
2. Réciproquement, soit J un idéal de A. On pose $x \sim y \iff x - y \in J$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence compatible avec $+$ et $\times$.

[003015]

Exercice 3621 Étude de l'anneau $\mathbb{Z}^2$

1. Soit $d \in \mathbb{N}$. On pose
$$A_d = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } x \equiv y \pmod d\}$$
($x = y$ pour $d = 0$). Montrer que A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
2. Montrer que l'on obtient ainsi tous les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$.
3. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}^2$. On note : $\begin{cases} I_1 = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tq } (x,0) \in I\} \\ I_2 = \{y \in \mathbb{Z} \text{ tq } (0,y) \in I\}. \end{cases}$
Montrer que I_1 et I_2 sont des idéaux de $\mathbb{Z}$, et que $I = I_1 \times I_2$.
4. En déduire que I est un idéal principal.

[003016]

Exercice 3622 Idéaux de K^E

Soit K un corps, E un ensemble fini, et $A = K^E$. Pour $e \in E$, on pose :

$$I_e = \{f \in A \text{ tq } f(e) = 0\}, \qquad \chi_e : x \mapsto \begin{cases} 1 & si x = e \\ 0 & \text{si } x \neq e. \end{cases}$$

1. Montrer que I_e est un idéal principal de A.
2. Soit $f \in A$. Vérifier que $f = \sum_{e \in E} f(e)\chi_e$.
3. Soit I un idéal quelconque de A, et $F = \{e \in E \text{ tq } \exists\, f \in I \text{ tq } f(e) \neq 0\}$.
   Montrer que I est un idéal principal engendré par $\sum_{e \in F} \chi_e$.

[003017]

Exercice 3623 Fonctions trigonométriques

On pose
$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx),\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Soit $f \in A$. Montrer que si $f = 0$, alors les coefficients a_k sont tous nuls $\left(\text{calculer } \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\right)$.
3. En déduire que A est intègre.

[003018]

Exercice 3624 Suites croissantes d'idéaux

Soit A un anneau commutatif et (I_n) une suite croissante d'idéaux de A. On pose $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

1. Montrer que I est un idéal de A.
2. On suppose que A est principal. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I = I_{n_0}$.
3. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas principal.

[003019]

Exercice 3625 Endomorphismes d'un groupe commutatif

Soit G un groupe additif et $A = \{\text{morphismes } f : G \to G\}$.

1. Montrer que $(A, +, \circ)$ est un anneau.
2. On prend $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$. Montrer que A est l'ensemble des applications $G \to G, x \mapsto kx$ avec $k \in G$, et que A est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[003020]

Exercice 3626 Entiers 2-adiques

Soit $A = \{m/n \in \mathbb{Q}$ tel que n est impair$\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Chercher les éléments inversibles dans A.
3. Montrer que les idéaux de A sont tous principaux engendrés par les nombres de la forme 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

[003021]

Exercice 3627 Morphismes $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

Chercher les morphismes d'anneaux : $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [003022]

Exercice 3628 Suites stationnaires

Soit $A = \{\text{suites stationnaires d'entiers relatifs}\}$ muni des opérations usuelles.

1. Montrer que A est un anneau.
2. Chercher les morphismes d'anneaux : $A \to \mathbb{Z}$.
3. Soit $I = \{\text{suites presque nulles}\}$. Montrer que c'est un idéal non principal.

Correction ▼ [003023]

Exercice 3629 Entiers de Gauss

Soit $A = \{a+bi \text{ tq } a,b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Quels sont les éléments inversibles ?
2. Soient $u,v \in A$ avec $v \neq 0$. Montrer qu'il existe $q,r \in A$ tels que $u = qv+r$ et $|r| < |v|$. A-t-on unicité ?
3. Montrer que A est principal.

Correction ▼ [003024]

131 203.05 Idéal

Exercice 3630

1. $\mathscr{J} = \{(\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}\}$ est-il un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}^2$?
2. $\mathscr{J} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] : P^{'}(0) = 0\right\}$ est-il un idéal de $\mathbb{R}[X]$?

[001368]

Exercice 3631

Soit $\mathscr{J} = \{P \in \mathbb{Z}[X] : P(0) \in 2\mathbb{Z}\}$.

1. (a) Montrer que $\mathscr{J}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) Montrer que $\mathscr{J}$ est engendré par les polynômes 2 et X.
2. En remarquant que $2 \in \mathscr{J}$, montrer que l'hypothèse "$\mathscr{J}$ est un idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$" est absurde.

[001371]

Exercice 3632

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif, on dit que $I \subset A$ est un idéal de A si et seulement si : I est un sous-groupe de $(A,+)$ et de plus : $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

1. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$?
2. On appelle radical de I, l'ensemble :
$$\sqrt{I} = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$
Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de Acontenant I. Étudier le cas $A = Z$.
3. Montrer que si I et J sont deux idéaux de A tels que $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.En déduire $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
4. Montrer que si I et Jsont deux idéaux de A, $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

[001375]

Exercice 3633

A est nommé idéal de A lorsque pour tout $x \in J$ et tout $a \in A$ le produit ax appartient à J.

1. Trouver tous les idéaux d'un corps $\mathbb{K}$.
2. Montrer que tout idéal de $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$, où $a \in \mathbb{Z}$.
3. On note D l'ensemble des rationnels x tels que il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x10^k \in \mathbb{Z}$. Montrer que tout idéal de D est de la forme aD où $a \in D$.

[001376]

Exercice 3634

Montrer qu'un idéal de $K[X]$ est distinct de $K[X]$ si et seulement s'il ne contient aucun polynôme constant non nul. [001571]

Exercice 3635

Soient les polynômes $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $\mathrm{pgcd}(P,Q)$ puis la somme et l'intersection des idéaux principaux (P) et (Q) de $\mathbb{R}[X]$. [001572]

Exercice 3636

Les parties $\mathscr{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\}$ et $\mathscr{J} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$ sont-elles des idéaux de $\mathbb{R}[X]$? Dans l'affirmative, en donner un générateur. [001573]

132 203.06 Algèbre, corps

Exercice 3637

Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}$. [001377]

Exercice 3638

Soit σ un automorphisme de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $x \geqslant 0$ alors $\sigma(x) \geqslant 0$.
2. Montrer que σ est croissante.
3. Déterminer σ.

[001378]

Exercice 3639

Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $C = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : MA = AM\}$.

1. Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
2. Montrer que, pour les lois usuelles, C est une $\mathbb{R}$-algèbre.

[001379]

Exercice 3640

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. On définit

$$\mathbb{R}[u] := \{P(u) : P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

1. Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathscr{L}(E)$, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre.
2. Montrer que cette algèbre est de dimension finie et discuter de sa dimension en fonction de u.
3. L'anneau $\mathbb{R}[u]$ est-il un corps ?

[001380]

Exercice 3641

Soit $M = \{aI_2 + bJ \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : a,b \in \mathbb{R}\}$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et montrer que si $a,b \in \mathbb{R}$ et $aI_2 + bJ = O$ alors $a = b = 0$.

2. Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, M est un anneau. Cet anneau est-il commutatif, intègre ?
3. M est-il un corps, une $\mathbb{R}$-algèbre ?

[001381]

Exercice 3642

Montrer que l'ensemble S des suites réelles convergentes est une $\mathbb{R}$-algèbre. L'application $S \to \mathbb{R}, u \mapsto \lim u$ est-elle un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres ? L'anneau S est-il intègre ? [001382]

Exercice 3643

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. On définit

$$\mathbb{R}[u] = \{a\mathrm{Id}_E + bu : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathscr{L}(E)$, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre. L'anneau $\mathbb{R}[u]$ est-il un corps ? [001383]

Exercice 3644

Un automorphisme d'un corps $\mathbb{K}$ est une application bijective φ de $\mathbb{K}$ dans lui-même telle que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, on ait $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ et $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

1. Soit φ un automorphisme de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $x \mapsto \varphi(x)$ est croissante. En déduire que l'identité est le seul automorphisme de $\mathbb{R}$.
2. Soit ψ un automorphisme *continu* de $\mathbb{C}$. Montrer $\psi(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire tous les automorphismes *continus* de $\mathbb{C}$.

[001384]

Exercice 3645 Anneau intègre fini

Soit A un anneau non nul, commutatif et intègre.

1. Montrer que si A est fini, alors c'est un corps.
2. Montrer que si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux, alors c'est un corps (considérer les idéaux $I_n = x^n A$ pour $x \in A$ non nul).

[003025]

Exercice 3646 Corps $\mathbb{F}_4$

Chercher les structures de corps à 4 éléments.

Correction ▼ [003026]

Exercice 3647 Groupe multiplicatif d'un corps fini

Soit K un corps fini. Pour $x \in K^*$ on note $O(x)$ l'ordre multiplicatif de x et n le ppcm des ordres des éléments de K^*.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a'|a$, $b'|b$, $a' \wedge b' = 1$ et $a'b' = a \vee b$.
2. Soient $x, y \in K^*$ d'ordres a et b. Montrer qu'il existe u, v entiers tels que $O(x^u y^v) = a \vee b$. En déduire qu'il existe $z \in K^*$ d'ordre n.
3. Montrer que $n = \mathrm{Card}\,(K^*)$ (ceci prouve que K^* est cyclique).

[003027]

Exercice 3648 Groupe multiplicatif d'un corps fini

Soit K un corps fini de cardinal n. Si $a, b \in \mathbb{N}$ sont tels que $ab = n - 1$, on considère l'application $f_a : K^* \to K^*, x \mapsto x^a$ (remarquer que f_a est un morphisme de groupe). On note $N_a = \mathrm{Card}\,(\mathrm{Ker} f_a)$.

1. Expliquer pourquoi $N_a \leqslant a$.
2. Montrer que $\text{Im}(f_a) \subset \text{Ker} f_b$. En déduire que $N_a = a$ et $N_b = b$.
3. Soit φ l'indicateur d'Euler. Montrer par récurrence sur a, diviseur de $n-1$, que le nombre d'éléments de K^* d'ordre a est égal à $\varphi(a)$ (ceci prouve que K^* est cyclique).

[003028]

Exercice 3649 Théorème de Wedderburn

On dit que K est un corps gauche si $(K,+,\times)$ est un anneau et si $(K\setminus\{0\},\times)$ est un groupe (non nécessairement commutatif). On vérifiera rapidement que la théorie des espaces vectoriels est inchangée si on remplace le corps de base par un corps gauche. L'objet de l'exercice est de démontrer le théorème de Wedderburn : *tout corps gauche fini est commutatif.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des racines n-èmes primitives de l'unité dans $\mathbb{C}$. On pose $\Phi_1(X) = X - 1$ et $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mathscr{P}_n}(X-\zeta)$. Φ_n est appelé *le n-ème polynôme cyclotomique* (son degré est $\phi(n)$ où ϕ est l'indicateur d'Euler).

1. Démontrer : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$. En déduire, par récurrence, que $\Phi_n(X)$ a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Calculer explicitement $\Phi_n(X)$ pour $n \leqslant 16$.
3. Démontrer que, pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{p^\alpha}(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^{kp^{\alpha-1}}$.
4. Calculer le terme constant de chaque Φ_n.
5. Montrer que, si $d < n$ et d divise n, alors $X^d - 1$ divise $X^n - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$, puis que $\Phi_n(X)$ divise $X^n - 1$ et $\frac{X^n-1}{X^d-1}$ dans $\mathbb{Z}[X]$.
   On considère K un corps gauche fini et $Z(K)$ son centre, de cardinal q.
6. Montrer que $Z(K)$ est un corps commutatif.
7. Montrer que K est un $Z(K)$-espace vectoriel de dimension finie, notée n. Donner alors le cardinal de K en fonction de q et n.
8. Soit $a \in K\setminus\{0\}$. On note $C_a = \{x \in K \,|\, ax = xa\}$.
   Montrer que C_a est un corps gauche, puis que c'est un $Z(K)$-espace vectoriel de dimension finie d divisant n (on montrera pour cela que K est un C_a-espace vectoriel et l'on étudiera sa dimension).
9. On fait opérer le groupe multiplicatif K^* sur lui-même par automorphismes intérieurs.
   En considérant les orbites selon cette opération montrer que l'on a :
   $$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{q^n-1}{q^{d_i}-1} \text{ avec, pour tout } i,\ d_i|n.$$
10. En déduire que $\Phi_n(q)$ divise $q-1$.
11. En étudiant $|\Phi_n(q)|$ montrer que $n = 1$.

[003029]

Exercice 3650 Éléments algébriques

Soient $K, \mathbb{L}$ deux corps avec $K \subset \mathbb{L}$.
Un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est dit algébrique sur K s'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1. Montrer que α est algébrique sur K si et seulement si $K[\alpha]$ est un K-ev de dimension finie.
2. On suppose que α et β sont algébriques sur K. Montrer que $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques sur K (étudier $K[\alpha,\beta]$).

[003324]

Exercice 3651 Corps emboîtés

Soient $H \subset K \subset L$ trois sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que K et L sont des H-ev et L est un K-ev.
2. Montrer que L est de dimension finie sur H si et seulement si K est de dimension finie sur H et L est de dimension finie sur K.
3. Application : Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$, la cloture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, est un corps algébriquement clos (si $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$, considérer le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les coefficients de P).

[003325]

Exercice 3652 Surcorps de $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre et de dimension finie.

1. Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps.
2. Si $\dim \mathbb{A} > 1$ montrer que tout élément de $\mathbb{A}$ est algébrique de degré 1 ou 2 sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'alors $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

[003326]

Exercice 3653 Sous algèbres

Soit E un ev de dimension finie et $\mathscr{A}$ une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que si $f \in \mathscr{A}$ et f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathscr{A}$.
On pourra étudier l'application $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}, g \mapsto f \circ g$. [003352]

---

133 203.07 Groupe de permutation

Exercice 3654

1. Déterminer card(S_3) et écrire tous les éléments de S_3, puis écrire la table de S_3 et en déduire tous les sous-groupes de S_3.
2. On considère T un triangle équilatéral du plan, de sommets A, B, C.
   (a) Montrer que les isométries du plan qui préservent T forment un groupe pour la loi $\circ$, que l'on note G.
   (b) Montrer qu'un élément de G induit une permutation de l'ensemble $\{A, B, C\}$. On construit ainsi une application ϕ de G dans S_3.
   (c) Montrer que ϕ est un isomorphisme.

[001402]

Exercice 3655

On considère le groupe symétrique S_n.

1. Déterminer card(S_n).
2. Calculer $(34)(45)(23)(12)(56)(23)(45)(34)(23)$.
3. Rappel : la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur k, que l'on note $(a_1\ a_2 \dots a_k)$.
   Si $\tau \in S_n$, montrer que $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1)\ \tau(a_2) \dots \tau(a_k))$.
4. Rappel : toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints, et cette décomposition est unique à l'ordre près.
   Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5. Rappel : il existe un unique morphisme de S_n dans $(\{-1,1\},\times)$ non trivial, appelé signature, et noté ε. Une manière de calculer $\varepsilon(\tau)$ (où $\tau\in S_n$) consiste à décomposer τ en produit de p transpositions (ie cycles de longueur 2) : alors $\varepsilon(\tau)=(-1)^p$.

   Montrer que la signature d'un cycle de longueur k vaut $(-1)^{k-1}$. En déduire comment se calcule la signature d'une permutation à partir de sa décomposition en produit de cycles disjoints.

[001403]

Exercice 3656

Comment passer de 1234 à 2314 en échangeant seulement deux chiffres à chaque étape ? Y a-t-il plusieurs façons d'y parvenir ? Même question pour 1234 et 4312.
Peut-on obtenir n'importe quelle permutation des chiffres 1234 par ce procédé ? [001404]

Exercice 3657

Représenter graphiquement les permutations suivantes. Les décomposer en produit de cycles à supports disjoints, puis en produits de transpositions.

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1234567\\1425376\end{pmatrix}\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}1234567\\2471635\end{pmatrix}\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1234567\\3261547\end{pmatrix}\qquad \sigma_4=\begin{pmatrix}1234567\\7146253\end{pmatrix}$$

Calculer la signature des permutations ci-dessus. Calculer le produit $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ et sa signature. Comparer ce résultat aux précédents. [001405]

Exercice 3658

Soient a,b,c trois éléments distincts de $\{1,...,n\}$. Calculer le produit $(ab)(bc)(ab)$.
En déduire que $\mathscr{S}_n$ est engendré par les permutations $\{(1,i)\}_{2\leqslant, i\leqslant n}$, c'est à dire que toute permutation s'écrit comme produit de transpositions de cette forme.
Montrer que $\mathscr{S}_n$ est engendré par (12) et $(123...n)$. [001406]

Exercice 3659

Décrire tous les morphismes de groupe de $(\mathscr{S}_n,\circ)\to(\{+1,-1\},\cdot)$, c'est les applications $\phi\ :\mathscr{S}_n\to\{+1,-1\}$ satisfaisant :

$$\forall(\sigma,\sigma')\in\mathscr{S}_n^2,\quad \phi(\sigma\sigma')=\phi(\sigma)\phi(\sigma')$$

Indication : Commencer par montrer que toutes les transpositions ont même image. [001407]

Exercice 3660

Dans $\mathbb{R}^n$, on désigne par $(e_1,...,e_n)$ la base canonique. A une permutation $\sigma\in\mathscr{S}_n$, on associe l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$u_\sigma\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n\\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ x_{\sigma(n)}\end{pmatrix}\end{array}$$

1. Soit $\tau=(ij)$ une transposition. Écrire la matrice de u_τ dans la base canonique. Montrer que $\det(u_\tau)=-1$.
2. Montrer que $\forall\sigma,\sigma'\in\mathscr{S}_n,\ u_\sigma\circ u_{\sigma'}=u_{\sigma\circ\sigma'}$.
3. En déduire que $\forall\sigma\in\mathscr{S}_n,\ \det u_\sigma=\varepsilon(\sigma)$ où ε désigne la signature.

[001408]

Exercice 3661

On note $\mathscr{S}_n$ le groupe symétrique des permutations sur n éléments.

Soit ρ un *morphisme de groupes* de $(\mathscr{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \cdot)$, c'est à dire une application de $\mathscr{S}_n$ dans $\{-1,1\}$ satisfaisant

$$\forall(\sigma,\tau) \in \mathscr{S}_n \;\; \rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma)\rho(\tau)$$

1. Calculer $\rho(\mathrm{id})$. Pour tout cycle γ de longueur p, calculer γ^p. En déduire que lorsque p est impair, $\rho(\gamma) = 1$.
2. On suppose que pour toute transposition τ, $\rho(\tau) = 1$. Montrer que $\forall\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\rho(\sigma) = 1$
3. On suppose maintenant qu'il existe une transposition $\tau_0 = (a,b)$ pour laquelle $\rho(\tau_0) = -1$.
   (a) Pour un élément $c \in \{1,\dots,n\} \setminus \{a,b\}$, calculer $(a,b)(a,c)$. En déduire que $\rho(a,c) = -1$.
   (b) Pour deux éléments distincts c et d de $\{1,\dots,n\}$, calculer $(a,c)(a,d)(a,c)$. En déduire que $\rho(c,d) = -1$.
   (c) En déduire que pour toute transposition τ, $\rho(\tau) = -1$ puis montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\rho(\sigma)$ est la signature de σ.
4. Quels sont tous les morphismes de groupes de $(\mathscr{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \cdot)$?
5. On considère l'application φ suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_n & \to & \{-1,1\} \\ \sigma & \mapsto & \prod_{i=1}^n \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \end{array}$$

   Montrer que $\forall(\sigma,\tau) \in \mathscr{S}_n$, $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$.
   En déduire que

$$\forall\sigma \in \mathscr{S}_n, \;\; \varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j},$$

   où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.

[001409]

Exercice 3662

Soit G un groupe d'ordre $2n$ et H un sous-groupe de G d'ordre n (H est donc d'indice deux dans G).

1. Montrer que si $g \in G$ et $g \notin H$, on a $H \cap gH = \emptyset$ puis que $G = H \cup gH$.
2. En déduire que pour tout $g \in G, g^2 \in H$.
3. On suppose désormais $G = \mathscr{A}_4$ le groupe des permutations paires de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Soit $\sigma = (a,b,c)$ un 3-cycle. Montrer que σ peut s'écrire comme le carré d'une permutation paire c'est à dire qu'il existe $\varphi \in \mathscr{A}_4$ telle que $\varphi^2 = \sigma$. En déduire que $\mathscr{A}_4$ ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.

[001410]

Exercice 3663

Déterminer tous les éléments $\sigma \in S_n$ tels que $\sigma^2 = \sigma$. [001411]

Exercice 3664

1. Rappeler $|S_3|$. Montrer que S_3 ne contient pas d'élément d'ordre 6.
2. Montrer que S_3 contient un unique sous-groupe d'ordre 3. Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 2 de S_3.
3. Déduire de ce qui précède tous les sous-groupes de S_3.

Correction ▼ [001412]

Exercice 3665 examen juin 1999

Soit $GL_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles 2×2 à cœfficients réels. $GL_2(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une structure de groupe par la multiplication usuelle des matrices. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B appartiennent à $GL_2(\mathbb{R})$.
2. Quels sont les ordres de A et B ?
3. Montrer que $AB = -BA$ et en déduire que :
   (a) $G = \{I, A, B, AB, -I, -A, -B, -AB\}$ est un groupe (pour la loi multiplicative des matrices ; I esl la matrice identité) ;
   (b) G est le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par $\{A, B\}$.
4. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique.
   (a) Montrer que G est inclus dans $O_2(\mathbb{R})$ (le groupe orthogonal).
   (b) Déterminer l'intersection de G et de $SO_2(\mathbb{R})$ (le groupe spécial orthogonal).
   (c) Déterminer la nature géométrique des 8 éléments de G.

[001413]

Exercice 3666 examen juin 1999

I

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On définit le centre $\mathscr{Z}(G)$ de G par :

$$\mathscr{Z}(G) = \{x \in G \ / \ \forall a \in G \ \ ax = xa\}.$$

Montrer que $\mathscr{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.
Que peut-on dire de $\mathscr{Z}(G)$ si G est abélien ?

II

On désigne par $\mathscr{A}_n$ le groupe alterné d'ordre n (rappel : c'est le sous-groupe de $(\mathscr{S}_n, \circ)$ formé des permutations de $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ de signature $+1$.)
On se propose de déterminer le centre de $\mathscr{A}_n$ pour $n \geqslant 3$.

1. Donner la liste des éléments de $\mathscr{A}_3$ et de $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_3)$.
2. On suppose désormais $n \geqslant 4$. Dans cette question on fixe i, j, k trois éléments distincts de E_n.
   (a) Vérifier que le 3-cycle (i, j, k) est dans $\mathscr{A}_n$.
   (b) Soit $s \in \mathscr{S}_n$, montrer que $s \circ (i, j, k) = (s(i), s(j), s(k)) \circ s$.
   (c) En déduire que si $s \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}_n)$ alors l'image de $\{i, j, k\}$ par s est $\{i, j, k\}$.
3. Pour $n = 4$, on note $E_4 = \{i, j, k, \ell\}$. Si $s \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}_4)$ montrer que $s(\ell) = \ell$. En déduire $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_4) = \{\mathrm{id}\}$.
4. Pour $n \geqslant 5$, soit $s \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}_n)$, soit i, j, k, ℓ, m cinq éléments distincts de E_n. En considérant les ensembles $\{i, j, k\}$ et $\{i, \ell, m\}$ montrer que $s = \mathrm{id}$ et déterminer $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_n)$

[001414]

Exercice 3667

Quel est l'ordre maximal d'un élément de S_4? De S_5? De A_5? [001415]

Exercice 3668

On désigne par K le sous-ensemble $\{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ de S_4.

1. Montrer que K est un sous-groupe distingué de S_4 et de A_4.
2. Pour quelle raison K est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Calculer le quotient A_4/K.
3. Montrer que le quotient S_4/K est isomorphe à S_3.
4. Donner un exemple de sous groupe distingué de K et non de S_4. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

[001416]

Exercice 3669

Calculer $Z(S_n)$ suivant les valeurs de $n\in\mathbb{N}$. [001417]

Exercice 3670

Trouver la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, la signature, l'ordre et une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes de $\mathscr{S}_{10}$:

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 5 & 10\end{pmatrix},$$

$$\varphi=(10,3,4,1)\,(8,7)\,(4,7)\,(5,6)\,(2,6)\,(2,9)\,.$$

Calculer σ^{1998} et φ^{1998}.

Correction ▼ [001418]

Exercice 3671

$\mathscr{A}_4$ désigne le groupe des permutations paires sur l'ensemble $E=\{1,2,3,4\}$.

1. Quels sont les ordres des éléments de $\mathscr{A}_4$? En déduire la liste de ces éléments sous forme décomposée en produit de cycles à supports disjoints.
2. Montrer que les permutations $s=(1\ 2)(3\ 4)$ et $r=(1\ 2\ 3)$ engendrent $\mathscr{A}_4$.
3. Montrer que $\mathscr{A}_4$ admet un unique sous-groupe H d'ordre 4 (on examinera d'abord les ordres des éléments d'un tel sous-groupe) et que ce sous-groupe est un sous-groupe distingué de $\mathscr{A}_4$.

[001419]

Exercice 3672

Le groupe $G=\mathscr{S}_3\times\mathscr{S}_3$ est-il abélien ? Déterminer tous les sous-groupes de G d'ordre 4. [001420]

Exercice 3673

Quel est le nombre de k-cycles dans $\mathscr{S}_k$ puis dans $\mathscr{S}_n$ où $k\leqslant n$? [001421]

Exercice 3674

Soit G un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.

1. Montrer que si G est d'ordre impair alors G ne contient aucune permutation impaire.
2. Montrer que si G contient au moins une permutation impaire, alors G contient autant de permutations paires que de permutations impaires.

[001422]

Exercice 3675

Soient $a=(1,2)(3,4), b=(1,3)(2,4), c=(1,4)(2,3)\in\mathscr{A}_4$, $X=\{a,b,c\}$, $V=\{a,b,c,\mathrm{Id}\}$ et $\Phi:\mathscr{S}_4\to\mathscr{S}(X), g\in G\mapsto\Phi_g=\left[x\mapsto gxg^{-1}\right]$.

1. (a) Montrer que V est un sous-groupe distingué de $\mathscr{A}_4$ (on pourra étudier l'ordre des élements de $\mathscr{A}_4$).
   (b) Montrer que $< a >$ est un sous-groupe distingué de V et n'est pas un sous-groupe distingué de $\mathscr{A}_4$.

2. Montrer que Φ est un homomorphisme de groupes.
3. (a) Calculer $\Phi(g)$ pour $g = (1,2)$ puis $g = (1,2,3)$.
   (b) En déduire que Φ est surjectif.
4. Montrer que $\mathscr{S}_4/V$ est isomorphe à $\mathscr{S}_3$.
5. Ecrire la décomposition de $\mathscr{A}_4$ suivant les classes modulo V.

[001423]

Exercice 3676

1. Déterminer le centre du groupe $\mathscr{S}_n$.
2. (a) Montrer qu'un groupe $G_1 \times G_2$ contient un sous-groupe distingué isomorphe à G_1.
   (b) Montrer que les groupes $\mathscr{S}_n$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathscr{A}_n$ ne sont pas isomorphes si $n \geqslant 3$.

[001424]

Exercice 3677

1. Montrer que dans $\mathscr{S}_n$ on a $f \circ (a,b) \circ f^{-1} = (f(a), f(b))$.
2. Montrer que les permutations $(1,\dots,n)$ et $(1,2)$ engendrent $\mathscr{S}_n$ (on rappelle que les transpositions engendrent $\mathscr{S}_n$).

[001425]

Exercice 3678

1. Montrer que $\mathscr{S}_n$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{A}_{n+2}$.
2. Montrer que $\mathscr{S}_4$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{A}_5$.
3. Montrer que $\mathscr{S}_5$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{A}_6$.

Correction ▼ [001426]

Exercice 3679

Montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de S_n (groupe symétrique) pour un certain n. [001427]

Exercice 3680 Générateurs de $\mathscr{S}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{S}_n$ est engendré par les sous-ensembles suivants :

1. $A = \{(i, i+1) \text{ tq } 1 \leqslant i < n\}$.
2. $B = \{(1\ i) \text{ tq } 2 \leqslant i \leqslant n\}$.
3. $C = \{(1\ 2), (1\ 2\ \cdots\ n)\}$.

[003074]

Exercice 3681 Générateurs de $\mathscr{S}_n$

Montrer que toute permutation de $\mathscr{S}_n$ s'écrit de manière unique : $\sigma = c_2^{\alpha_2} \circ c_3^{\alpha_3} \circ \cdots \circ c_n^{\alpha_n}$ où $c_i = (1\ 2\ \cdots\ i)$ et $0 \leqslant \alpha_i < i$. [003075]

Exercice 3682 $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles

1. Calculer $(a\,b\,c) \circ (b\,c\,d)$.
2. Montrer que le sous-groupe alterné $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles ($n \geqslant 3$).

Correction ▼ [003076]

Exercice 3683 $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$.

1. Soit $i,j \in \{3,\dots,n\}$, $i \neq j$.
   Décomposer en cycles à supports disjoints la permutation : $\sigma = (1\ i\ 2)\circ(1\ 2\ j)\circ(1\ i\ 2)$.
2. On note $\mathscr{H}$ le sous-groupe de $\mathscr{A}_n$ engendré par les 3-cycles $(1\ 2\ k)$, $\quad 3 \leqslant k \leqslant n$.
   (a) Montrer que : $\forall\, i,j \geqslant 3$, avec $i \neq j$, $\mathscr{H}$ contient $(1\ 2)\circ(i\ j)$ et $(i\ j)\circ(1\ 2)$.
   (b) Montrer que : $\forall\ j \geqslant 3$, $\mathscr{H}$ contient $(1\ 2)\circ(1\ j)$ et $(1\ 2)\circ(2\ j)$.
   (c) Montrer que : $\forall\, i \neq j, \forall\, k \neq l, \quad (i\ j)\circ(k\ l) \in \mathscr{H}$.
   (d) Montrer que $\mathscr{H} = \mathscr{A}_n$.

Correction ▼ [003077]

Exercice 3684 Signature en fonction du nombre d'orbites

Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. On note c le nombre de cycles à supports disjoints constituant σ, et f le nombre de points fixes. Calculer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n, c, et f.

Correction ▼ [003078]

Exercice 3685 Nombre de transposition pour engendrer un cycle

Soit $\sigma \in S_n$. On appelle *orbite de* σ toute partie X de $\{1,\dots,n\}$ sur laquelle σ induit une permutation circulaire. (Les orbites sont les supports des cycles de σ, et les singletons constitués de points fixes)
On note $N(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.

1. Montrer que si τ est une transposition, alors $N(\tau\circ\sigma) = N(\sigma)\pm 1$.
2. Application : Quel est le nombre minimal de transpositions nécéssaires pour obtenir un n-cycle ?

[003079]

Exercice 3686 Conjugaison

Soient $\sigma,\sigma' \in \mathscr{S}_n$. On dit que σ et σ' sont conjuguées s'il existe $\rho \in \mathscr{S}_n$ tel que $\sigma' = \rho\circ\sigma\circ\rho^{-1}$.

1. Montrer que tout conjugué d'un k-cycle est encore un k-cycle.
2. Montrer que σ et σ' sont conjuguées si et seulement si les cycles à supports disjoints de σ et σ' ont deux à deux mêmes longueurs.

[003080]

Exercice 3687 Caractérisation de la signature

Soit E un ensemble fini et $f : \mathscr{S}_E \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes.

1. Si σ est une transposition, que peut-on dire de $f(\sigma)$?
2. Montrer que deux permutations conjuguées ont même image par f.
3. En déduire que f est la fonction constante 1, ou bien f est la signature.

[003081]

Exercice 3688 Calcul de signature

Soit
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

Calculer $\varepsilon(\sigma)$.

Correction ▼ [003082]

Exercice 3689 Centre de $\mathscr{S}_E$

Soit E un ensemble ayant au moins trois éléments.

1. Pour $a,b \in E$ distincts et $\sigma \in \mathscr{S}_E$, simplifier $\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1}$.
2. Quelles sont les permutations σ qui commutent avec $(a\ b)$?
3. En déduire que le centre de $\mathscr{S}_E$ est réduit à $\{\mathrm{id}_E\}$.

[003083]

Exercice 3690 Commutant d'un n-cycle

Soit $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n) \in \mathscr{S}_n$. Trouver toutes les permutations $\rho \in \mathscr{S}_n$ commutant avec σ. (Reconnaître $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$)

Correction ▼ [003084]

Exercice 3691 Commutant d'un produit de 5-cycles

Dans $\mathscr{S}_{10}$, quelles sont les permutations qui commutent avec $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)$?

Correction ▼ [003085]

Exercice 3692 Puissances d'un k-cycle

Soit σ un k-cycle de $\mathscr{S}_n$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1. Si $p \mid k$, montrer que σ^p est le produit de p cycles à supports disjoints de longueur $\frac{k}{p}$.
2. Montrer que pour $p \wedge k = 1$, σ^p est un k-cycle (utiliser l'égalité de Bézout).
3. Dans le cas général, étudier la décomposition en cycles de σ^p.

[003086]

Exercice 3693 Ordre maximal

Trouver l'ordre maximal d'une permutation de $\mathscr{S}_{10}$.

Correction ▼ [003087]

Exercice 3694 Sous-groupe d'indice 2 dans $\mathscr{S}_n$

Soit H un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$ d'ordre $\frac{n!}{2}$. On note $K = \mathscr{S}_n \setminus H$.

1. Pour $\sigma \in H$, montrer que $\sigma H = H$ et $\sigma K = K$.
2. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Déterminer les ensembles σH, σK, $H\sigma$, $K\sigma$ suivant que $\sigma \in H$ ou $\sigma \in K$.
3. En déduire que si deux permutations sont conjuguées, alors elles sont toutes deux dans H ou toutes deux dans K.
4. Montrer enfin que $H = \mathscr{A}_n$.

[003088]

Exercice 3695 Dénombrement

Combien y a-t-il de permutations de $\mathscr{S}_{26}$ comportant trois points fixes, deux 3-cycles, un 5-cycle, et deux 6-cycles ?

Correction ▼ [003089]

Exercice 3696 **IT

Soit σ l'élément de S_{12} : $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

1. Combien σ possède-t-elle d'inversions ? Que vaut sa signature ?
2. Décomposer σ en produit de transpositions. Retrouvez sa signature.

3. Déterminer les orbites de σ.
4. Déterminer σ^{2005}.

Correction ▼ [005353]

Exercice 3697 ***IT

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$,...,$\tau_{1,n}$.

Correction ▼ [005354]

Exercice 3698 ***IT

Démontrer que A_n est engendré par les cycles de longueur 3 (pour $n \geqslant 3$).

Correction ▼ [005355]

Exercice 3699 ***I

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}$ et le cycle $(2\ 3\ \dots\ n\ 1)$.

Correction ▼ [005356]

Exercice 3700 ***I

Soit $(G,\times)$ un groupe. Montrer que $(G,\times)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(S(G),\circ)$ et que, en particulier, tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n (théorème de CAYLEY). (Indication : montrer que pour chaque x de G, l'application $y \mapsto xy$ est une permutation de G.)

Correction ▼ [005357]

Exercice 3701 ***

Soit σ une permutation de $\{1,\dots,n\}$ et k le nombre d'orbites de σ. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

Correction ▼ [005358]

Exercice 3702 ***I

σ étant une permutation de $\{1,\dots,n\}$ donnée, on définit la matrice notée P_σ, carrée d'ordre n dont le terme ligne i colonne j est $\delta_{i,\sigma(j)}$ (où $\delta_{i,j}$ est le symbôle de KRONECKER. On note G l'ensemble des P_σ où σ décrit S_n.

1. (a) σ et σ' étant deux éléments de S_n, calculer $P_\sigma \times P_{\sigma'}$.
   (b) En déduire que $(G,\times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$, isomorphe à $(S_n,\circ)$ (les matrices P_σ sont appelées « matrices de permutation »).
2. (Une utilisation des P_σ) A étant une matrice carrée donnée, calculer AP_σ et $P_\sigma A$. Que constate-t-on ?

Correction ▼ [005359]

Exercice 3703 ***I

A_1, A_2,...,A_p sont p matrices carrées d'ordre n, deux à deux distinctes et inversibles. On suppose que $\{A_1,\dots,A_p\}$ est stable pour $\times$. Montrer que $\{A_1,\dots,A_p\}$ est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.

Correction ▼ [005360]

Exercice 3704 ***

Dans $E = \mathbb{R}^n$, on considère l'hyperplan H d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$ dans la base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E. Pour $\sigma \in S_n$ donnée, on considère l'endomorphisme f_σ de E défini par : $\forall i \in E,\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
On pose alors $p = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$. Montrer que p est une projection dont on déterminera l'image et la direction.

Correction ▼ [005361]

134 203.99 Autre

Exercice 3705 $x+y-xy$

1. Sur $E=[0,1]$, on définit l'opération : $x*y=x+y-xy$. Vérifier que $*$ est interne, et étudier ses propriétés (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables, éléments réguliers).
2. Mêmes questions avec $E=]-\infty,1[$.

Correction ▼ [002960]

Exercice 3706 $x\mapsto axa$ surjective

Soit $*$ une opération associative sur E, et $a\in E$ tel que l'application$E\to E, x\mapsto a*x*a$ soit surjective. Montrer qu'il existe un élément neutre, et que a est symétrisable.

Correction ▼ [002961]

Exercice 3707 Opération induite sur les parties

Soit $*$ une opération sur E. Pour $A,B\subset E$, on pose $A*B=\{a*b \text{ tq } a\in A,\ b\in B\}$.

1. Étudier les propriétés de $*$ sur $\mathscr{P}(E)$ en fonction de celles de $*$ sur E (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables).
2. Est-ce que $*$ est distributive par rapport à $\cup$?

Correction ▼ [002962]

Exercice 3708 Loi sur $\mathbb{Z}^2$

On définit l'opération dans $\mathbb{Z}^2$: $(a,b)*(a',b')=(aa',ab'+b)$.

1. Étudier les propriétés de cette opération.
2. Pour $z\in\mathbb{Z}$, on pose $f_{a,b}(z)=az+b$.
   Montrer que $\phi:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, (a,b)\mapsto f_{a,b}$ est un morphisme pour $*$ et $\circ$.
3. Est-ce un isomorphisme ?

Correction ▼ [002963]

Exercice 3709 Composition de relations

Soit E un ensemble, et $\mathscr{F}$ l'ensemble des relations binaires sur E. Pour $R,S\in\mathscr{F}$, on définit la relation $R*S$ par :

$$x(R*S)y \iff \exists\, z\in E \text{ tq } xRz \text{ et } zSy.$$

A toute fonction $f:E\to E$, on associe la relation : $yR_f x \iff y=f(x)$.

1. Montrer que $*$ est associative, mais non commutative en général.
2. Simplifier R_f*R_g.
3. Est-ce que $*$ admet un élément neutre ?

[002964]

Exercice 3710 Groupe sans sous-groupe non trivial

Soit G un groupe n'ayant pas de sous-groupe non trivial. Montrer que G est monogène, fini, et que $\operatorname{Card} G$ est un nombre premier. [002986]

Exercice 3711 Groupe diédral

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$. On note $\omega=\exp\frac{2i\pi}{n}$ et :

$$f_k:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto\omega^k z \qquad g_k:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto\omega^k\bar{z} \qquad (0\leqslant k<n)$$

1. Montrer que $G = \{f_0, \dots, f_{n-1}, g_0, \dots, g_{n-1}\}$ est un groupe pour la composition des applications.
2. Soit $a > 0$ et A_k le point du plan d'affixe $a\omega^k$. Montrer que G représente le groupe des isométries du polygone $A_0 \dots A_{n-1}$.
3. G est-il cyclique ?
4. Montrer que G est engendré par les applications f_1 et g_0 et que l'on a : $f_1 \circ g_0 = g_0 \circ f_1^{-1}$.
5. Soit H un groupe quelconque engendré par deux éléments ρ et σ tels que $\begin{cases} \rho \text{ est d'ordre } n \\ \sigma \text{ est d'ordre } 2 \\ \rho\sigma = \sigma\rho^{-1}. \end{cases}$

   Montrer que G et H sont isomorphes.

[002987]

Exercice 3712 Groupe d'ordre pair

Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2.

Indication ▼ [002988]

Exercice 3713 Groupe d'ordre impair

Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que : $\forall\, x \in G,\ \exists!\, y \in G$ tq $x = y^2$. [002989]

Exercice 3714 Groupe d'exposant 2

Soit G un groupe fini tel que : $\forall\, x \in G,\ x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif (considérer $(xy)(xy)$).
2. Soit H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$. On note K le sous groupe engendré par $H \cup \{x\}$. Montrer que $\operatorname{Card} K = 2 \operatorname{Card} H$.
3. En déduire que $\operatorname{Card} G$ est une puissance de 2.

[002990]

Exercice 3715 Groupes d'ordre 6

Déterminer tous les groupes finis de cardinal 6 (on admettra que dans un tel groupe, il existe un élément a d'ordre 2, et un élément b d'ordre 3). [002991]

Exercice 3716 Groupe d'homographies

Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, et $f : E \to E, x \mapsto \frac{1}{x}$, $\qquad g : E \to E, x \mapsto 1 - x$
Vérifier que f et g sont des bijections et déterminer le groupe engendré par f et g pour la loi $\circ$. [002992]

Exercice 3717 Groupes de similitudes

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on note $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \alpha z + \beta$

1. Montrer que l'ensemble des fonctions $f_{\alpha,\beta}$ est un groupe pour la loi $\circ$. Est-il commutatif ?
2. A quelle condition sur α, β, $f_{\alpha,\beta}$ est-elle d'ordre fini ?

[002993]

Exercice 3718 Théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On définit une relation sur G par :

$$\forall\, x, y \in G,\ x \sim y \iff \exists\, h \in H \text{ tel que } x = hy.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Quelle est la classe de e ?

2. Soit $a \in G$. Montrer que $\dot{a}$ est équipotent à H.
3. En déduire que $\operatorname{Card} H$ divise $\operatorname{Card} G$ (*Théorème de Lagrange*).

[002994]

Exercice 3719 Relation d'équivalence avec deux sous-groupes

Soient H,K deux sous-groupes d'un groupe G. Pour $x,y \in G$, on pose :

$$x \sim y \iff \exists\, h \in H,\ \exists\, k \in K \text{ tq } y = hxk.$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Pour $x \in G$, soit $G_x = \{(h,k) \in H \times K \text{ tq } hxk^{-1} = x\}$. Montrer que G_x est un sous-groupe de $H \times K$.
3. Si H et K sont finis, montrer que chaque classe d'équivalence est finie de cardinal divisant $\operatorname{Card}(H)\operatorname{Card}(K)$.

[002995]

Exercice 3720 Groupe d'ordre ab

Soit G un groupe commutatif fini d'ordre $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$.
On pose $A = \{x \in G \text{ tq } x^a = e\}$ et $B = \{x \in G \text{ tq } x^b = e\}$.

1. Montrer que A et B sont des sous-groupes de G.
2. Montrer que $A \cap B = \{e\}$ et $AB = G$.

Correction ▼ [002996]

Exercice 3721 Sous-groupes de type fini de $\mathbb{Q}$

1. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}$ engendré par un nombre fini d'éléments. Montrer que H est monogène.
2. Trouver un sous-groupe non trivial de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas engendré par une famille finie.

[002997]

Exercice 3722 $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}^{+*},\times)$ ne sont pas isomorphes

Montrer que les groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}^{+*},\times)$ ne sont pas isomorphes (penser à $\sqrt{2}$). [002998]

Exercice 3723 Sous-groupe infini de $\mathbb{C}^*$

Soit p un entier naturel premier. On appelle G l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^{p^n} = 1$.

1. Montrer que G est un groupe multiplicatif infini où tout élément est d'ordre fini.
2. Montrer que tout sous-groupe H de G, distinct de G, est cyclique (on pourra considérer un élément z_0 de $G \setminus H$ et montrer que l'ordre des éléments de H n'excède pas celui de z_0).

[002999]

Exercice 3724 Théorème du rang

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes où G est un groupe fini.
Montrer que $\operatorname{Card}(\operatorname{Ker} f) \times \operatorname{Card}(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Card}(G)$. [003000]

Exercice 3725 Centre d'un p-groupe

Soit G un groupe fini de cardinal p^k où p est un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. On note Z le centre de G.

1. En considérant l'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs montrer que $\operatorname{Card}(Z) \equiv 0 \bmod p$.

2. En déduire que tout groupe d'ordre p^2, p premier, est commutatif et est isomorphe soit à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ soit à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

[003001]

Exercice 3726 Sous groupes et générateurs de $\mathbb{Z}^2$

On considère le groupe $G = \mathbb{Z}^2$. Une *base* de G est une famille $(\alpha = (a,a'), \beta = (b,b'))$ engendrant G.

1. (a) Montrer que (α,β) est une base de G si et seulement si $\det(\alpha,\beta) = \pm 1$.
   (b) Montrer que $\alpha = (a,a')$ appartient à une base de G si et seulement si $a \wedge a' = 1$.
2. Soit H un sous-groupe non trivial de G. On note $H' = \{ux + vy \text{ tq } u \in \mathbb{Z},\ v \in \mathbb{Z}, (x,y) \in H\}$, n le plus petit élément de H' strictement positif et $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$, $(x,y) \in H$ tels que $ux + vy = n$.
   (a) Montrer que $u \wedge v = 1$ et que x et y sont divisibles par n.
   (b) On pose $\alpha = (x/n, y/n)$ et $\beta = (-v,u)$. Montrer que (α,β) est une base de G et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(n\alpha, np\beta)$ engendre H.

[003002]

Exercice 3727 Partie génératrice d'un groupe fini

Soit G un groupe fini de cardinal n. Montrer qu'il existe une partie génératrice de G de cardinal inférieur ou égal à $\log_2(n)$.

Correction ▼ [003003]

Exercice 3728 Groupe fini ?

Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Correction ▼ [003004]

---

135 204.01 Produit scalaire, norme

Exercice 3729

A deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$< P,Q >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire. [001450]

Exercice 3730

Pour quelles valeurs de λ les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2. $g(x,y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3. $h(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$
4. $i(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_3)(y_1+y_3) + (x_2+x_3)(y_2+y_3) - \lambda(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$

[001451]

Exercice 3731

Vérifier que l'application $\phi\ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est une forme bilinéaire symétrique et déterminer la forme quadratique qui lui est associée :

$$\phi\big((x,y,z),(x',y',z')\big) = xx' + 2yy' + 2yz' + 2y'z + zz'.$$

S'agit-il d'un produit scalaire ?

Vérifier que l'application $q\ :\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est une forme quadratique et déterminer la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée :

$$q\big((x,y,z)\big) = x^2+3(x+y-z)^2+(z-y)^2.$$

S'agit-il d'une norme euclidienne ?

[001452]

Exercice 3732

Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaire.

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$
$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q(t)+P'(t)Q(t)dt$$
$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt+P(0)Q(0)$$

[001453]

Exercice 3733

Pour quelles valeurs de λ les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x,y) = x_1y_1+6x_2y_2+3x_3y_3+2x_1y_2+2x_2y_1+3\lambda x_1y_3+3\lambda x_3y_1$
2. $g(x,y) = x_1y_1+10x_2y_2+6x_1y_2+\lambda x_3y_3-x_2y_3-x_3y_2$
3. $h(x,y) = 2x_1y_1+7x_1y_2+7x_2y_1+8x_2y_2-3x_3y_3+\lambda x_2y_3+\lambda x_3y_2$
4. $i(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)+(x_1+x_3)(y_1+y_3)+(x_2+x_3)(y_2+y_3)-\lambda(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$

[001454]

Exercice 3734

Soient $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$ appartenant à $\mathbb{R}^2$. Pour quelles valeurs de $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ l'application $f(x,y) = ax_1y_1+bx_1y_2+cx_2y_1+dx_2y_2$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$? [001455]

Exercice 3735

Soient x,y et z trois réels tels que $x^2+2y^2+3z^2 \leqslant 1$. Montrer l'inégalité : $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$. (On pourra par exemple appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à certains vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour un produit scalaire bien choisi.) [001456]

Exercice 3736

Soient x,y et z trois réels tels que $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leqslant 14$. [001457]

Exercice 3737

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul, φ un produit scalaire sur E, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. $\psi : E\times E\to\mathbb{R}$ l'application définie par $\psi(x,y) = a\varphi(x,x)+b\varphi(x,y)+c\varphi(y,y)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c) pour que ψ soit un produit scalaire sur E.

[001458]

Exercice 3738

1. Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\|.\|$ la norme associée ; $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \ldots, v_n \in E$. Montrer l'inégalité : $\|\sum_{i=1}^{n} v_i\|^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Etudier le cas d'égalité.

[001459]

Exercice 3739

Montrer que

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Etudier le cas d'égalité.
Soit f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall (f,g) \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \qquad \left(\int_0^1 f(t)g(t)dt \right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(t)dt \int_0^1 g^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité.
Soit f une application continue d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) \qquad \left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité. [001460]

Exercice 3740

Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Montrer que pour toute fonction continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b \Big(f(t) \Big)^2 dt$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ? [001461]

Exercice 3741

Soit $E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π-périodique$\}$. Montrer que $\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E. [001462]

Exercice 3742

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ est un produit scalaire sur E. [001463]

Exercice 3743

Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E qui vérifient : $\forall (x,y) \in E^2 \ \langle f(x)|y \rangle = \langle x|g(y) \rangle$.
Montrer que f et g sont linéaires. [001464]

Exercice 3744

Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ des réels positifs.
Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k \sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k$. [001465]

Exercice 3745

Soit E un espace euclidien de dimension n et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E tels que si $i \neq j$ alors $\langle x_i | x_j \rangle < 0$. Montrer par récurrence sur n que $p \leqslant n+1$. [001466]

Exercice 3746

Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 .$$

Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale (i.e. une base qui est aussi une famille orthonormale). (NB : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.) [001467]

Exercice 3747

1. Montrer que sur $M_n(\mathbb{R})$ l'application :
$$(A, B) \to tr({}^tAB)$$
est un produit scalaire.
2. Soit N la norme associée, montrer que :
$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$
3. Montrer que :
$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leqslant \sqrt{n} N(A).$$

[001468]

Exercice 3748

Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E telles que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle .$$

Montrer que f et g sont linéaires. [001469]

Exercice 3749

Soit E un espace euclidien, montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x+y\|^2 + 1 \leqslant 2\left(1 + \|x\|^2\right)\left(1 + \|y\|^2\right).$$

[001470]

Exercice 3750

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ tel que $f(0) = 0$ et :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| .$$

Montrer que f est linéaire. [001471]

Exercice 3751

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$(P,Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0) \ ?$$

[001472]

Exercice 3752

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E, tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

Montrer :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha (x|y).$$

[001473]

Exercice 3753

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\forall x,y \in E$ tels que $\langle x,y \rangle = 0$, on ait $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| = k\|x\|$.

[001474]

Exercice 3754

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), et $p \geqslant 1$ un nombre réel. On définit l'application

$$N_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que N_p est une norme sur $\mathbb{R}_n$; on la note aussi $\| \cdot \|_p$. Dans les cas où $p \neq 1$, $p \neq 2$, on pourra s'aider de la relation suivante (admise) :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}^n.$$

2. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $N_\infty(x) = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$. Montrer que cette limite existe pour tout x, et que $N_\infty(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Démontrer qu'il s'agit aussi d'une norme sur $\mathbb{R}^n$; on la note aussi $\| \cdot \|_\infty$.
3. Dessiner les "boules" $\{x \in \mathbb{R}^2,\ N_p(x) \leqslant 1\}$ dans les cas où $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. À quoi ressemblent les cas des valeurs intermédiaires ?

[002426]

Exercice 3755

Identité du parallélogramme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

1. On suppose que la norme de E vérifie la relation

$$\forall x,y \in E, \qquad 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2. \tag{2}$$

On définit $p : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$p(x,y) = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big).$$

Montrer que p est un produit scalaire sur E.

2. Réciproquement, si E est un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle x,y\rangle$, montrer que la norme euclidienne (définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$) vérifie (E), et que $\langle x,y\rangle = p(x,y)$.
3. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, pour quelles valeurs de $q \geqslant 1$ les normes $\|\cdot\|_q$ vérifient-elles (E) ?

[002460]

Exercice 3756

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. On définit $p : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$p(u,v) = \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\,dt.$$

1. Montrer que p est un produit scalaire sur E, et que $u \mapsto \sqrt{p(u,u)}$ est une norme sur E.
2. Soit $E_2 \subset E$ le sous-espace des polynômes de degré $\leqslant 2$, et $u \in E$ défini par $u(t) = t^4$. Déterminer la projection orthogonale u_0 de u sur E_2. En déduire la valeur de

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^4 - at^2 - bt - c)^2\,dt.$$

[002461]

Exercice 3757

1. Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, définir une distance d, telle que $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, on a $d(x,y) \leqslant 1$. Est-il possible de choisir d de sorte que, en plus, $x \mapsto \sqrt{d(x,0)}$ soit une norme ?
2. On considère l'ensemble S constitué des points de $\mathbb{R}^3$ de norme euclidienne égale à 1 ("sphère unité"). Si x, y, sont deux éléments de S, il existe au moins un cercle de rayon 1 tracé sur S et passant par ces points (dans quels cas en existe-t-il plusieurs ?) ; on note $d(x,y)$ la longueur du plus court arc de ce cercle joignant x et y ("distance géodésique" — comparer avec la distance sur la sphère terrestre). Montrer que d est une distance sur S ; pourquoi $x \mapsto \sqrt{d(x,0)}$ n'est-elle pas une norme ?

[002671]

Exercice 3758 Produits scalaires ?

Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $(x,x') \mid (y,y') = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$ (étudier $(1,t) \mid (1,t)$, $t \in \mathbb{R}$).
2. $E = \mathbb{R}^n$, $(x_1,\dots,x_n) \mid (y_1,\dots,y_n) = a\sum_i x_iy_i + b\sum_{i\neq j} x_iy_j$ $\left(\text{On montrera que } (\sum x_i)^2 \leqslant n\sum x_i^2\right)$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

Correction ▼ [003660]

Exercice 3759 Base de Schmidt

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire : $(P \mid Q) = \int_{t=-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

Correction ▼ [003661]

Exercice 3760 Base de Schmidt

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$. Chercher une base orthonormée de E.

Correction ▼ [003662]

Exercice 3761 Inversion

Soit E un espace vectoriel euclidien. On pose pour $\vec{x} \neq \vec{0}$: $i(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

1. Montrer que i est une involution et conserve les angles de vecteurs.

2. Vérifier que : $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in E\setminus\{\vec{0}\}$, $\|i(\vec{x})-i(\vec{y})\|=\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.
3. Déterminer l'image par i :
   (a) d'un hyperplan affine ne passant pas par $\vec{0}$.
   (b) d'une sphère passant par $\vec{0}$.
   (c) d'une sphère ne passant pas par $\vec{0}$.

Correction ▼ [003663]

Exercice 3762 Inégalité de Ptolémée

Soit E un espace euclidien.

1. Pour $\vec{x}\in E\setminus\{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x})=\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$. Montrer que : $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in E\setminus\{\vec{0}\}$, $\|f(\vec{x})-f(\vec{y})\|=\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.
2. Soient $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in E$. Montrer que $\|\vec{a}-\vec{c}\|\,\|\vec{b}-\vec{d}\|\leqslant\|\vec{a}-\vec{b}\|\,\|\vec{c}-\vec{d}\|+\|\vec{b}-\vec{c}\|\,\|\vec{a}-\vec{d}\|$.
   Indication : se ramener au cas $\vec{a}=\vec{0}$ et utiliser l'application f.

Correction ▼ [003664]

Exercice 3763 Calcul de distance

On munit $E=\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P=\sum_i a_iX^i$ et $Q=\sum_i b_iX^i$, $(P\mid Q)=\sum_i a_ib_i$.
Soit $H=\{P\in E \text{ tq } P(1)=0\}$.

1. Trouver une base orthonormale de H.
2. Calculer $d(X,H)$.

Correction ▼ [003665]

Exercice 3764 Expression analytique

Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_4)$ une base orthonormée de E, et F le sous-espace vectoriel d'équations dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{cases}x+y+z+t=0\\x+2y+3z+4t=0\end{cases}$$

1. Trouver une base orthonormée de F.
2. Donner la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer $d(\vec{e}_1,F)$.

Correction ▼ [003666]

Exercice 3765 Projection sur un hyperplan

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tq } a_1x_1+\dots+a_nx_n=0\}$ où $a_1,\dots,a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.
Correction ▼ [003667]

Exercice 3766 Caractérisation des projections orthogonales

Soit E un espace vectoriel euclidien et $p\in\mathscr{L}(E)$ une projection. Montrer que :
p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow\forall\,\vec{x},\vec{y}\in E,\ (\vec{x}\mid p(\vec{y}))=(p(\vec{x})\mid\vec{y})$
$\Leftrightarrow\forall\,\vec{x}\in E,\ \|p(\vec{x})\|\leqslant\|\vec{x}\|$.
(Pour la deuxième caractérisation, considérer $\vec{x}\in(\operatorname{Ker}p)^\perp$ et faire un dessin) [003668]

Exercice 3767 Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (de dimension éventuellement infinie) et $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ une famille orthonormée de E. On note $F=\operatorname{vect}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$.

1. Démontrer que $F \oplus F^{\perp} = E$ et $F^{\perp\perp} = F$ (on utilisera la projection associée aux $\vec{u}_i$).
2. Soit $\vec{x} \in E$. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{u}_i)^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2$. Quand a-t-on égalité ?
3. Application : Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue. On appelle *coefficients de Fourier de f* les réels :

$$c_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \qquad \text{et} \qquad s_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt.$$

Démontrer l'inégalité de Bessel : $\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)\,dt \geqslant \frac{c_0(f)^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f)^2 + s_k(f)^2}{\pi}$.

[003669]

Exercice 3768 Composition de projecteurs

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E tels que $F^{\perp} \perp G^{\perp}$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.
[003670]

Exercice 3769 Projecteurs commutant

Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si $(\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} p$ et $(\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} q$ sont orthogonaux.

Correction ▼ [003671]

Exercice 3770 Caractérisation des bases orthonormales

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ des vecteurs unitaires tels que : $\forall\, \vec{x} \in E, \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{e}_i)^2$.

1. Démontrer que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormale de E.
2. On remplace l'hypothèse : $\vec{e}_i$ unitaire par : $\dim E = n$.
   (a) Démontrer que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E.
   (b) Démontrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (\vec{x} \mid \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{e}_i)(\vec{y} \mid \vec{e}_i)$.
   (c) On note G la matrice de Gram de $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.

Correction ▼ [003672]

Exercice 3771 Matrice de Gram

Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E, et G leur matrice de Gram.

1. Montrer que $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.
2. Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace $\vec{x}_k$ par $\vec{x}_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i \vec{x}_i$.
3. Soit $F = \operatorname{vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et $\vec{x} \in E$. On note $d(\vec{x}, F) = \min(\|\vec{x} - \vec{y}\|, \vec{y} \in F)$.
   Montrer que $d(\vec{x}, F)^2 = \frac{\operatorname{Gram}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})}{\operatorname{Gram}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)}$.

[003673]

Exercice 3772 $\operatorname{Gram}(u(e_i))$

Soit E un espace vectoriel euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base quelconque de E. On note G le déterminant de Gram. Montrer que $G(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)) = (\det u)^2 G(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. [003674]

Exercice 3773 Équation du second degré

Soient E espace vectoriel euclidien, $\vec{a} \in E$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\alpha(\vec{x} \mid \vec{x}) + \beta(\vec{x} \mid \vec{a}) + \gamma = 0$.

Correction ▼ [003675]

Exercice 3774 Vecteur défini par ses produits scalaires

Soient $f_1, f_2, \dots, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues.
Existe-t-il $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, i,\ \int_{t=0}^{1} f(t) f_i(t)\,dt = 1$? [003676]

Exercice 3775 Décomposition QR

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M = PT$.
2. Application : inégalité de Hadamard. Soit E un espace vectoriel euclidien, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée, et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs quelconques.
   Démontrer que $|\det_{(\vec{e}_i)}(\vec{u}_j)| \leqslant \prod_j \|\vec{u}_j\|$. Étudier les cas d'égalité.

[003677]

Exercice 3776 Coefficients diagonaux dans la méthode de Schmidt

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base orthonormée déduite de $\mathscr{B}$ par la méthode de Schmidt. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Montrer que $P_{ii} \times d(\vec{u}_i, \mathrm{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1})) = 1$. [003678]

Exercice 3777 Coordonnées des vecteurs de Schmidt

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base orthonormée déduite de $\mathscr{B}$ par la méthode de Schmidt.
On note G_n le déterminant de Gram de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, et $\Delta_{i,n}$ le cofacteur de $(\vec{u}_i \mid \vec{u}_n)$ dans G_n.
Montrer que $\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{G_{n-1} G_n}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,n} \vec{u}_i$.
Correction ▼ [003679]

Exercice 3778 $\det({}^tAA)$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det({}^tAA) \geqslant 0$. [003680]

Exercice 3779 Angles $> 2\pi/3$

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 3. Existe-t-il trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ unitaires faisant entre eux deux à deux des angles strictement supérieurs à $\frac{2\pi}{3}$?
Correction ▼ [003681]

Exercice 3780 Polynômes orthogonaux

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $(P \mid Q) = \int_{t=0}^{1} P(t) Q(t)\,dt$

1. Démontrer que $(\ \mid\ )$ est un produit scalaire sur E.
2. Démontrer qu'il existe une unique famille $(P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$ de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} \deg P_i = i \\ \text{le coefficient dominant de } P_i \text{ est strictement positif} \\ \text{la famille } (P_i) \text{ est orthonormée.} \end{cases}$$

[003682]

Exercice 3781 Centrale PSI 1997

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P \mid Q) = \int_{t=0}^{1} P(t) Q(t)\,dt$.

1. Montrer que E, muni de $(\ \mid\ )$, est un espace euclidien.
2. Soit $K = \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ et $P \in K \setminus \{0\}$. Quel est le degré de P ?

3. Soit $\Phi\ :\ x \mapsto \int_{t=0}^{1} P(t)t^x\,dt$. Montrer que Φ est une fonction rationnelle.
4. Trouver Φ à une constante multiplicative près.
5. En déduire les coefficients de P.
6. En déduire une base orthogonale de E.

Correction ▼ [003683]

Exercice 3782 Réduction en carrés d'une forme quadratique

Soient $f_1,\dots,f_p$ p formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\mathrm{rg}(f_1,\dots,f_p) = n$.
En considérant le produit scalaire : $(\vec{x} \mid \vec{y}) = \sum_{i=1}^{p} f_i(\vec{x})f_i(\vec{y})$, démontrer qu'il existe n formes linéaires $g_1,\dots,g_n$ telles que :

$$\forall\,\vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{p} f_i(\vec{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i(\vec{x})^2.$$

Exemple : réduire $x^2 + (x+y)^2 + (x+2y)^2$

Correction ▼ [003684]

Exercice 3783 Famille de vecteurs unitaires équidistants

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ une famille libre. Démontrer qu'il existe une famille $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \vec{u}_i \text{ est unitaire} \\ \|\vec{u}_i - \vec{u}_j\| = 1 \\ \mathrm{vect}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_i) = \mathrm{vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i). \end{cases}$$

Démontrer que toute famille $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ vérifiant les deux premières propriétés est libre. [003685]

Exercice 3784 Famille obtusangle

Soit E un espace vectoriel euclidien et $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$ une famille de vecteurs vérifiant : $\forall\, i \neq j,\ (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j) < 0$.

1. On suppose $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ libre. Soit $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ la famille de Schmidt associée et M la matrice de passage de $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ à $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$. Montrer que M est à coefficients positifs.
2. Dans le cas général, démontrer par récurrence sur n que $\mathrm{rg}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n) \geqslant n-1$.
3. Si $\mathrm{rg}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n) = n-1$, démontrer que toute famille de $n-1$ vecteurs extraite de $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ est libre, et que les composantes dans cette famille du vecteur retiré sont strictement négatives.

[003686]

Exercice 3785 $F + F^\perp \neq E$

Soit $E = \mathscr{C}([0,1])$ muni du produit scalaire : $(f \mid g) = \int_{t=0}^{1} fg(t)\,dt$, et $F = \{f \in E \text{ tq } f(0) = 0\}$.
Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Correction ▼ [003687]

Exercice 3786 Forme linéaire sur les polynômes

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $(P \mid Q) = \int_{t=0}^{1} PQ(t)\,dt$.

1. Vérifier que c'est effectivement un produit scalaire.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, P \mapsto P(0)$. Trouver le polynôme A tel que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) = (A \mid P)$.

Correction ▼ [003688]

Exercice 3787 Norme uniforme sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que $\int_{t=-1}^{1} P^2(t)\,dt = 1$.
Montrer que $\sup\{|P(x)| \text{ tq } -1 \leqslant x \leqslant 1\} \leqslant 2\sqrt{2}$.
Indications : Pour $a \in \mathbb{R}$ montrer qu'il existe $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall\ P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(a) = \int_{t=-1}^{1} P(t)P_a(t)\,dt$. Calculer explicitement P_a, et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction ▼ [003689]

Exercice 3788 Centrale MP 2000

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi(f,g) = \int_{[0,1]} fg + f'g'$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.
3. Soit $E_{\alpha\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf\limits_{f \in E_{\alpha\beta}} \int_{[0,1]} f^2 + f'^2$.

Correction ▼ [003690]

Exercice 3789 Polytechnique MP* 2000

Soit H un espace euclidien, $(y_j)_{j\in I}$ une famille de vecteurs de H telle qu'il existe A et B strictement positifs vérifiant :

$$\forall\, x \in H,\ A\|x\|^2 \leqslant \sum_{j\in I} (x \mid y_j)^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

1. Montrer que $(y_j)_{j\in I}$ engendre H.
2. On choisit $H = \mathbb{R}^2$. Montrer que $y_1 = \binom{0}{1}$, $y_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $y_3 = y_2$ conviennent.
3. Si $A = B = 1$ et $\|y_j\| = 1$ pour tout j, montrer que $(y_j)_{j\in I}$ est une base orthonormale.
4. Si $A = B$, montrer que pour tout $x \in H$, $x = \frac{1}{A}\sum_{j\in I}(x \mid y_j)y_j$.

Correction ▼ [003691]

Exercice 3790 $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$.

Correction ▼ [003692]

Exercice 3791 X MP* 2000

Soit E un espace euclidien de dimension $n > 1$. Trouver toutes les fonctions f de E dans $\mathbb{R}$ continues telles que $u \perp v \Rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Correction ▼ [003693]

Exercice 3792 ***

Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \operatorname{Tr}({}^tAA)$. Montrer que N est une norme vérifiant de plus $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$ pour toutes matrices carrées A et B. N est-elle associée à un produit scalaire ?

Correction ▼ [005482]

Exercice 3793 ***

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $||\ ||$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in E^2,\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$. On se propose de démontrer que $|| \ ||$ est associée à un produit scalaire. On définit sur E^2 une application f par : $\forall(x,y) \in E^2$, $f(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$.

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a : $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a : $f(2x,y) = 2f(x,y)$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel r, on a : $f(rx,y) = rf(x,y)$.
   On admettra que pour tout réel λ et tout (x,y) de E^2 on a : $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$ (ce résultat provient de la continuité de f).
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $|| \ ||$ est une norme euclidienne.

Correction ▼ [005483]

Exercice 3794 **

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. Existe-t-il A élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P|A = P(0)$?

Correction ▼ [005485]

Exercice 3795 ***

Soit $(e_1,...,e_n)$ une base quelconque de E euclidien. Soient a_1,..., a_n n réels donnés. Montrer qu'il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in \{1,...,\}$, $x|e_i = a_i$.

Correction ▼ [005495]

Exercice 3796 ****

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Une famille de p vecteurs $(x_1,...,x_p)$ est dite obtusangle si et seulement si pour tout (i,j) tel que $i \neq j$, $x_i|x_j < 0$. Montrer que l'on a nécessairement $p \leqslant n+1$.

Correction ▼ [005496]

Exercice 3797 **I

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application φ_a par : $\forall P \in E$, $\varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que pour tout $a \in E$, $\varphi_a \in E^*$.
2. Soient $a_0, a_1,\ldots, a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_0},\ldots,\varphi_{a_n})$ est une base de E^* et déterminer sa préduale.
3. Montrer qu'il existe $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_0 P(a_0) + \ldots + \lambda_n P(a_n)$ puis donner la valeur des λ_i sous la forme d'une intégrale.

Correction ▼ [005629]

Exercice 3798 **

Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose pour tout $P \in E$, $\varphi_1(P) = P(0)$ et $\varphi_2(P) = P(1)$ puis $\psi_1(P) = P'(0)$ et $\psi_2(P) = P'(1)$. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une base de E^* et trouver la base dont elle est la duale.

Correction ▼ [005630]

Exercice 3799 **

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ et ψ deux formes linéaires sur E. On suppose que pour tout x de E, on a $\varphi(x)\psi(x) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

Correction ▼ [005631]

Exercice 3800 ***

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\varphi_1,..., \varphi_n$ et φ $n+1$ formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que : $\left(\exists(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n / \ \varphi = \lambda_1\varphi_1 + ... + \lambda_n\varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi\right)$.
2. Signification du résultat précédent : dans $\mathbb{R}^3$, équation d'un plan P contenant D : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+3z=0 \end{array}\right.$ et le vecteur $u=(1,1,1)$?

Correction ▼ [005632]

Exercice 3801 ***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\varphi_1,..., \varphi_n$ n formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace E de dimension n.
Montrer que la famille $(\varphi_1,...,\varphi_n)$ est liée si et seulement si il existe un vecteur x non nul tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$.

Correction ▼ [005633]

Exercice 3802 **

Rang du système de formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{l} f_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\ f_2 = x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 \\ f_3 = x_1 + x_3 + (m+4)x_4 \\ f_4 = x_2 - 3x_3 - mx_4 \end{array} ?$$

Correction ▼ [005634]

Exercice 3803 *** I

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)} e^X$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E.
   (b) Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E,φ).

Correction ▼ [005773]

Exercice 3804 ** I Polynômes de TCHEBYCHEV

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n-ème polynôme de TCHEBYCHEV de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Correction ▼ [005774]

Exercice 3805 ** I

On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-dire les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour $(u,v) \in E^2$, on pose $\varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Correction ▼ [005775]

Exercice 3806 * I

Soit Φ l'application qui à deux matrices carrées réelles A et B de format n associe $\mathrm{Tr}({}^tA \times B)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est ce que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

Correction ▼ [005776]

Exercice 3807 ****

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme, notée $\| \ \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Correction ▼ [005777]

Exercice 3808 **

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1,...,e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout vecteur x de E, on ait $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2$. Montrer que la famille $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormée de E.

Correction ▼ [005778]

Exercice 3809 **** I

Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille de p vecteurs de E $(p \geqslant 2)$. On dit que la famille $(x_1,...,x_p)$ est une famille obtusangle si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ $(i < j \Rightarrow x_i|x_j < 0)$. Montrer que si la famille $(x_1,...,x_p)$ est une famille obtusangle alors $p \leqslant n+1$.

Correction ▼ [005788]

136 204.02 Forme quadratique

Exercice 3810

Soient E un K-espace vectoriel (où K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n > 0$ et q une forme quadratique sur E.

1. q peut-elle être injective ?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur q pour qu'elle soit surjective.

[001509]

Exercice 3811 examen juin 1999

Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$

pour $v = (x,y,z)$. Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire ?

[001510]

Exercice 3812

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'expression analytique de q dans $\mathscr{B}$ et expliciter sa forme polaire f.

2. Vérifier que $\mathscr{B}' = (e_1, -\frac{1}{2}e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$ est une base $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de q dans cette base. Expliciter q dans cette base.
3. Trouver le rang et la signature de q.

[001511]

Exercice 3813

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $q(P) = P(0)P(1)$.

1. (a) Montrer que q est une forme quadratique sur E.
   (b) Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.
   (c) La forme q est-elle positive, négative ?
2. Soit $P := X^2 + X + 1$ et $V = \text{vect}(P)$. Déterminer $V^\perp$ et $V^{\perp\perp}$.
3. Déterminer le rang de q puis son noyau.
4. Déterminer le cône isotrope $C(q)$ de q et constuire une base de E formée de vecteurs isotropes. $C(q)$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
5. Déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de E telle que $q(a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2) = a_0^2 - a_1^2$ et donner la signature de q.

[001512]

Exercice 3814

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, que l'on suppose définie (*i.e.* son cône isotrope est $\{0\}$). Montrer que q garde un signe constant sur E (on pourra raisonner par l'absurde et considérer $q(a+tb)$ où a et b sont des vecteurs bien choisis et $t \in \mathbb{R}$). [001513]

Exercice 3815

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale, déterminer la signature de q et une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

[001514]

Exercice 3816

Déterminer la signature de la forme quadratique

$$q : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y-z)^2 - (3x-y+2z)^2 + (5y-7z)^2 .$$

[001515]

Exercice 3817

Soit la forme quadratique q définie par

$$q : (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \mapsto x_1x_2 + x_2x_4 - x_3x_4 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - x_1x_3.$$

1. Montrer, sans réduire q, qu'il existe une base q-orthonormale de $\mathbb{C}^4$.
2. En expliciter une.

[001516]

Exercice 3818 Étude de signe

Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives :

1. $q(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$.
2. $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$.
3. $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

Correction ▼ [003713]

Exercice 3819 Ensi PC 1999

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle une matrice de produit scalaire ?

Correction ▼ [003714]

Exercice 3820 Calcul de signature

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

Correction ▼ [003715]

Exercice 3821 Signature de ${}^tAA$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^p$.
2. Déterminer sa signature en fonction de $\mathrm{rg}A$.

[003716]

Exercice 3822 Décomposition en carrés

Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1} x_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 1} x_i\right)^2$. On posera $y_i = x_i + (x_{i+1} + \dots + x_n)/(i+1)$.

Correction ▼ [003717]

Exercice 3823 Rang d'une décomposition en carrés

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1,\dots,f_p \in E^*$, $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \dots + \alpha_p f_p^2$. Montrer que $\mathrm{rg}(f_1,\dots,f_p) \geqslant \mathrm{rg}(q)$. [003718]

Exercice 3824 Différentielle d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et f la forme bilinéaire symétrique associée.
Montrer que : $\forall\, \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ dq_{\vec{x}}(\vec{y}) = 2f(\vec{x},\vec{y})$. [003719]

Exercice 3825 $q(a)q(x) - f^2(a,x)$

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée.
On pose pour $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a,x)$.

1. Montrer que φ est une forme quadratique sur E.
2. Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q.
3. Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a.

Correction ▼ [003720]

Exercice 3826 $\mathrm{tr}(A^2)$

Soit pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $q(A) = \operatorname{tr}(A^2)$. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature (indication : étudier les restrictions de q aux sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques). [003721]

Exercice 3827 Adjoint

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E.

1. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ montrer qu'il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
$$\forall\, x,y \in E,\ f(u(x),y) = f(x,v(y)).$$
On note $v = u^*$.
2. Montrer que l'application $u \mapsto u^*$ est un anti-isomorphisme involutif de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$ (c'est-à-dire un isomorphisme linéaire tel que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ et $u^{**} = u$).

[003722]

Exercice 3828 Restriction d'une forme quadratique à un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et q une forme quadratique sur E de signature $(n-1,1)$. Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $d \geqslant 1$.

1. On suppose qu'il existe $x \in H$ tel que $q(x) < 0$. Montrer que la signature de $q_{|H}$ est $(d-1,1)$.
2. On suppose que $q_{|H}$ est positive, quelle est sa signature ?

Correction ▼ [003723]

Exercice 3829 Mineurs principaux

Soit $n \geqslant 2$ et A une matrice réelle symétrique $n \times n$ représentant une forme quadratique q. On appelle mineurs principaux de A les déterminants :
$$\Delta_k(A) = \det\big((a_{i,j})_{i,j \leqslant k}\big).$$
On suppose que tous les mineurs principaux de A sont non nuls, montrer que la signature de q est (r,s) où s est le nombre de changements de signe dans la suite $(1, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$ et $r = n - s$.

Correction ▼ [003724]

Exercice 3830 Diagonale dominante

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On dit que A est à diagonale faiblement dominante si pour tout i on a $a_{ii} \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ et que A est à diagonale fortement dominante si pour tout i on a $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.
Montrer que si A est à diagonale fortement dominante alors A est définie positive et si A est à diagonale faiblement dominante alors A est positive.

Correction ▼ [003725]

Exercice 3831 Formes quadratiques de signature donnée

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, on note :
$\operatorname{Quad}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E ;
$\operatorname{Quad}^*(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de rang n ;
$\operatorname{Quad}_{p,q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de signature (p,q).

1. Montrer que $\operatorname{Quad}^*(E)$ est dense dans $\operatorname{Quad}(E)$.
2. Montrer que si $p+q=n$ alors $\operatorname{Quad}_{p,q}(E)$ est ouvert dans $\operatorname{Quad}(E)$.
3. Montrer que $\operatorname{Quad}_{p,q}(E)$ est connexe par arcs.

Correction ▼ [003726]

Exercice 3832 $1/(\lambda_i + \lambda_j)$

1. Soit $f_1,\dots,f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues de carrés intégrables sur l'intervalle I. On pose $a_{i,j} = \int_I f_i f_j$. Montrer que la matrice $(a_{i,j})$ est définie positive ssi la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre.
2. En déduire que si $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des réels strictement positifs distincts alors la matrice de terme général $1/(\lambda_i+\lambda_j)$ est définie positive.

[003727]

Exercice 3833 Matrice des inverses

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients tous non nuls. On note A' la matrice de coefficient général $1/a_{i,j}$.

1. Trouver les matrices A telles que A et A' sont symétriques définies positives (examiner les cas $n=1$, $n=2$, $n=n$).
2. Trouver les matrices A telles que A et A' sont symétriques positives (examiner les cas $n=2$, $n=3$, $n=n$).

Correction ▼ [003728]

Exercice 3834 Centrale MP 2000

Soit S une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels, symétrique définie positive. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Montrer que $q : X \mapsto \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{vmatrix}$ est définie négative.

Correction ▼ [003729]

Exercice 3835 Polytechnique MP* 2000

On considère sur $\mathbb{R}^n$ la forme quadratique : $q(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x|a)^2$ où $\alpha > 0$, β réel et $a \in \mathbb{R}^n$. Discuter de la signature et du rang de q.

Correction ▼ [003730]

Exercice 3836 Ensae MP* 2000

Soit q une forme quadratique non nulle sur $M_2(\mathbb{C})$ telle que $q(AB) = q(A)q(B)$. Déterminer q.

Correction ▼ [003731]

Exercice 3837 Déterminant de Gram, X MP* 2005

Soit E un espace vectoriel réel de dimension quelconque, $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ deux familles de vecteurs de E et ϕ une forme bilinéaire symétrique positive.
Montrer que $(\det[\phi(x_i,y_j)])^2 \leqslant \det[\phi(x_i,x_j)] \times \det[\phi(y_i,y_j)]$.

Correction ▼ [003732]

Exercice 3838 **

Soit $E = \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2),\ Q(f) = \lambda \mathrm{Tr}(f^2) + \mu \det(f).$$

1. Vérifier que Q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer en fonction de λ et μ le rang et la signature de Q. Analyser en particulier les cas $(\lambda,\mu) = (1,0)$ et $(\lambda,\mu) = (0,1)$.

Correction ▼ [005807]

Exercice 3839 **

Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note φ sa forme polaire.
On suppose que φ est non dégénérée mais non définie. Montrer que Q n'est pas de signe constant.

Correction ▼ [005808]

Exercice 3840 *** I

Soient f_1, f_2,..., f_n n fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $b_{i,j} = \int_a^b f_i(t)f_j(t)\,dt$ puis pour $(x_1,...x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1,...,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j}x_ix_j$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique positive.
2. Montrer que Q est définie positive si et seulement si la famille $(f_1,...,f_n)$ est libre.
3. Ecrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in [a,b]$, $f_i(t) = t^{i-1}$.

Correction ▼ [005809]

Exercice 3841 ***

Soit S une matrice symétrique réelle, définie positive. Pour $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$Q((x_1,...,x_n)) = -\det\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est une forme quadratique définie positive.

Correction ▼ [005810]

137 204.03 Espace orthogonal

Exercice 3842

Montrer que l'application $(A,B) \mapsto tr({}^tAB)$ de $M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques. [001475]

Exercice 3843

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. Si $F\subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
2. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
4. Si $\dim(E)$ est finie, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

[001476]

Exercice 3844 **

On munit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1. Déterminer l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Correction ▼ [005792]

138 204.04 Projection, symétrie

Exercice 3845

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y-3z=0$.
En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Dans un espace euclidien de dimension n, on considére un sous-espace F de dimension r et $(f_1,...,f_r)$ une base de orthonormée de cet espace. On not p_F la projection orthogonale sur F, c'est à dire la projection sur F associée à la décomposition $E=F\oplus F^{\perp}$. Montrer que :

$$\forall v\in F,\qquad p_F(v)=<v,f_1>f_1+<v,f_2>f_2+\cdots+<v,f_r>f_r$$

[001477]

Exercice 3846

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+y+z=0$ de $(1,0,0)$, et plus généralement d'un vecteur (x,y,z) quelconque.
Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Dans un espace euclidien de dimension n, on considère un sous-espace F de dimension r et $(f_1,...,f_r)$ une base de orthonormée de cet espace. On not p_F la projection orthogonale sur F, c'est à dire la projection sur F associée à la décomposition $E=F\oplus F^{\perp}$. Montrer que :

$$\forall v\in F,\qquad p_F(v)=<v,f_1>f_1+<v,f_2>f_2+\cdots+<v,f_r>f_r$$

[001478]

Exercice 3847

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $p\in\mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p)\perp\mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x\in E:\|p(x)\|\leqslant\|x\|$. [001479]

Exercice 3848

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On note p la projection orthogonale sur F et on pose, pour tout $x\in E$: $d(x,F)=\inf_{y\in F}\|x-y\|$. Soit $z\in F$.

1. Montrer que pour tout $x\in F$, les trois conditions sont équivalentes :
   (i) $d(x,F)=\|x-z\|$.
   (ii) $z=p(x)$.
   (iii) $\forall y\in F, y\perp(x-z)$.
2. En déduire $\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^1(x^2-ax-b)^2dx$.

[001480]

Exercice 3849

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient x et $y\in E$. Montrer que :

1. Si $\|x\|=\|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y=s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.
2. Si $\langle x,y\rangle=\|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y=p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

[001481]

Exercice 3850

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y-3z=0$. Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan. [001482]

Exercice 3851

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormale $(e_1,\dots,e_m)$. Soit p la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que $\forall x\in E, p(x)=\sum_{i=1}^{m}\langle x,e_i\rangle e_i$.
2. Donner de même l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à F et la projection orthogonale sur $F^\perp$.

[001483]

Exercice 3852

Quelle est la transformation de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & 6 & -3\\ 6 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 6\end{pmatrix}$? [001484]

Exercice 3853

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ où $v_1=(1,-1,0,0)$ et $v_2=(0,1,0,1)$. [001485]

Exercice 3854

Soient E un espace euclidien, u un vecteur non nul et $H=u^\perp$. Soient p la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

1. Montrer que $\forall x\in E \qquad p(x)=x-\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u$.
2. Montrer que $\forall x\in E \qquad s(x)=x-2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u$.
3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $(\Pi : x-y+z=0)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à Π.

[001486]

Exercice 3855

Soit $(E,|\,)$ un espace vectoriel de dimension n.

1. Soient F et G des sous-espace vectoriels de E. Montrer que $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.
2. Soient $\mathscr{B}=(e_1,...,e_n)$ une base orthonormale de E et $(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,...,0)\}$ et H le sous-espace vectoriel de E d'équation cartésienne $\sum_{k=1}^n a_kx_k=0$ dans $\mathscr{B}$.
   (a) Déterminer l'orthogonale de H.
   (b) Déterminer la distance du vecteur $x=\sum_{k=1}^n x_ke_k$ de E au sous-espace vectoriel H.
3. Soit P le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ défini par
$$u=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in P \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=x_2+2x_3+3x_4=0.$$
   (a) Déterminer une base de $P^\perp$ puis une base orthonormale de $P^\perp$.
   (b) En déduire une expression analytique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur P.

[001487]

Exercice 3856

Soient E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espace vectoriels supplémentaires de E et p le projecteur de E d'axe F et de direction G.

1. On suppose que $F \perp G$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. On suppose que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
   (a) Soient $a \in F$ et $b \in G$. Montrer que $\|a+b\| \geqslant \|a\|$.
   (b) En déduire que $F \perp G$.

[001488]

Exercice 3857

Soit $\alpha = \inf\left\{\int_{-1}^{1}\left(ax^2+bx+c-|x|\right)^2 dx : a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, |\,)$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v,F)^2$.
2. Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v,p)^2$ et α.

[001489]

Exercice 3858

Soit E un espace euclidien (de dimension finie), F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Déterminer $(F+G)^\perp$ et $(F\cap G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$. [001490]

Exercice 3859

Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x-(ax+b))^2 dx$. [001491]

Exercice 3860

Calculer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 x^2\left|\ln x - ax - b\right|^2 dx.$$

[001492]

Exercice 3861 Isométries affines

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f : E \to E$ une application non nécéssairement linéaire.

1. On suppose que f conserve le produit scalaire. Démontrer que f est linéaire.
2. On suppose que f conserve les distances, c'est à dire : $\forall\, \vec{x},\vec{y} \in E,\ \|f(\vec{x})-f(\vec{y})\| = \|\vec{x}-\vec{y}\,\|$. Démontrer que $f = f(\vec{0})+g$, avec $g \in \mathscr{O}(E)$.

[003733]

Exercice 3862 Projection sur vect(u)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée $\mathscr{B}$.

1. Montrer que U^tU est la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur vect$(\vec{u})$.
2. Trouver la matrice de la symétrie associée.

[003734]

Exercice 3863 $\vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$

Soit $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $\vec{x} \in E$: $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$.
Déterminer λ pour que $f \in \mathscr{O}(E)$. Reconnaître alors f.

Correction ▼ [003735]

Exercice 3864 Composition de symétries

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$. [003736]

Exercice 3865 Composition de symétries

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$. [003737]

Exercice 3866 Condition pour que deux symétries commutent

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient H, K deux hyperplans de E, et s_H, s_K les symétries associées. Démontrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$. [003738]

Exercice 3867 Similitudes

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \|f(\vec{x})\| = \lambda\|\vec{x}\|$.

1. Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (f(\vec{x}) \mid f(\vec{y})) = \lambda^2(\vec{x} \mid \vec{y})$.
2. Caractériser les similtudes par leurs matrices dans une base orthonormée.
3. Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c'est à dire : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$.

[003739]

Exercice 3868 Similitudes

On définit l'application $\varphi : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j}^2$. Trouvez les matrices $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout A on ait $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$.

Correction ▼ [003740]

Exercice 3869 Sous-espaces stables

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $u \in \mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par u. [003741]

Exercice 3870 Projection sur le sous-espace invariant

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $u \in \mathscr{O}(E)$. On note $v = \mathrm{id}_E - u$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$.
2. Soit p la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} v$. Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k(\vec{x}) \to p(\vec{x})$ lorsque $m \to \infty$.

[003742]

Exercice 3871 Endomorphismes orthogonaux diagonalisables

Quels sont-ils ? [003743]

Exercice 3872 Valeurs propres d'une isométrie

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{O}(E)$.

1. On suppose n impair et $f \in \mathscr{O}^+(E)$. Montrer que 1 est valeur propre de f. (comparer $\det(f-\mathrm{id})$ et $\det(f^{-1}-\mathrm{id})$)
2. Que peut-on dire quand n est pair ?
3. Soit n quelconque, $f \in \mathscr{O}^-(E)$. Montrer que -1 est valeur propre de f.

[003744]

Exercice 3873 Caractérisation des symétries orthogonales

Soit $M \in \mathscr{O}(n)$.

1. Montrer que M est la matrice d'une symétrie orthogonale si et seulement si M est symétrique.
2. Dans ce cas, déterminer la base et la direction de cette symétrie en fonction des matrices $I+M$ et $I-M$.

[003745]

Exercice 3874 f orthogonal antisymétrique

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{O}(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

$$f \circ f = -\mathrm{id}_E \iff \forall\, \vec{x} \in E,\ f(\vec{x}) \perp \vec{x} \iff \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = -(\vec{x} \mid f(\vec{y})).$$

[003746]

Exercice 3875 Centre de O(E)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{O}(E)$, et s une réflexion par rapport à un hyperplan H. Soit $\vec{u} \in H^{\perp}, \vec{u} \neq \vec{0}$.

1. Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est aussi une symétrie et en donner la base.
2. En déduire que f et s commutent si et seulement si $\vec{u}$ est vecteur propre de f.
3. Quel est le centre de $O(E)$?

[003747]

Exercice 3876 Nombre de réflexions nécéssaires pour engendrer une application donnée

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{O}(E)$. On note $F = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$ et $p = \mathrm{codim}(F)$.

1. Montrer qu'on peut décomposer f en produit d'au plus p réflexions.
2. Inversement, si f est un produit de k réflexions, démontrer que $p \leqslant k$.
3. Application : trouver $f \in \mathscr{O}(E)$ qui se décompose en n réflexions et pas moins.

[003748]

Exercice 3877 Prolongement d'une transformation orthogonale

Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \to E$ une application orthogonale. Démontrer qu'on peut prolonger f en une application orthogonale de E dans E.
2. Soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs de E tels que : $\forall\, i, j,\ (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j) = (\vec{v}_i \mid \vec{v}_j)$.
   (a) Si $\sum \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0}$, démontrer que $\sum \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$.
   (b) En déduire qu'il existe $f \in \mathscr{O}(E)$ telle que : $\forall\, i,\ f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.

[003749]

Exercice 3878 Action de $\mathscr{O}(E)$ sur les sous-espaces vectoriels

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F,G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{O}(E)$ tel que $u(F) = G$.
2. $(*)$ Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{O}(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Correction ▼ [003750]

Exercice 3879 Transformations orthogonales sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Vérifier que c'est un produit scalaire.
2. Soit $P \in \mathscr{O}(n)$. Montrer que les applications $\begin{cases} \phi_P : A \longmapsto AP \\ \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP \end{cases}$ sont orthogonales.
3. Réciproquement, si ϕ_P ou $\psi_P \in \mathscr{O}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in \mathscr{O}(n)$?

Correction ▼ [003751]

Exercice 3880 $A = \mathrm{com}(A)$

Quelles sont les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice ?

Correction ▼ [003752]

Exercice 3881 $A{}^tA + A + {}^tA = 0$

1. Trouver les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A{}^tA + A + {}^tA = 0$.
2. Montrer que pour une telle matrice, $|\det A| \leqslant 2^n$.

Correction ▼ [003753]

Exercice 3882 Somme des coefficients d'une matrice orthogonale

Soit $P \in \mathscr{O}(n)$. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que : $\left|\sum_{i,j} P_{ij}\right| \leqslant n$.
Quand a-t-on égalité ? [003754]

Exercice 3883 Groupe engendré par les réflexions

Soit E un espace vectoriel hermitien et G le sous-groupe de $U(E)$ engendré par les réflexions.

1. On suppose ici $\dim E \geqslant 2$. Soient $u, v \in E$. Montrer qu'il existe une réflexion σ échangeant u et v si et seulement si $\|u\| = \|v\|$ et $(u \mid v) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $G = \{f \in U(E) \text{ tq } \det(f) \in \{-1, 1\}\}$.

Correction ▼ [003755]

Exercice 3884 Orthotrigonalisation

Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel hermitien est trigonalisable en base orthonormale. [003756]

Exercice 3885 Réduction des endomorphismes orthogonaux et unitaires

1. Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{C})$. Si $M \in G$ montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}$. En déduire que tout élément de G est diagonalisable.

2. Soit $M \in U_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ propre pour M.
3. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale par blocs : $P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1, R_1, \dots, R_k)$ où chaque R_i est une matrice de la forme : $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

[003757]

Exercice 3886 Groupes orthogonaux égaux

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ deux normes euclidiennes telles que les groupes orthogonaux associés sont égaux. Que peut-on dire de ces normes ? [003758]

Exercice 3887 Calcul de norme

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 - x_n, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$. Avec la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, calculer la norme de f.

Correction ▼ [003759]

Exercice 3888 Densité (Ens Ulm MP* 2003)

$\mathscr{O}_n(\mathbb{Q})$ est-il dense dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [003760]

Exercice 3889 Centrale MP 2003

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer a, b, c de sorte que f soit une isométrie, et la préciser.

Correction ▼ [003761]

Exercice 3890 ***I Matrices et déterminants de GRAM

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p sur $\mathbb{R}$ ($p \geqslant 2$). Pour $(x_1, ..., x_n)$ donné dans E^n, on pose $G(x_1, ..., x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (matrice de GRAM) et $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G(x_1, ..., x_n))$ (déterminant de GRAM).

1. Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1, ..., x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_n)$.
2. Montrer que $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) = 0$ et que $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$.
3. On suppose que $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans E (et donc $n \leqslant p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$.
Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d_F(x) = ||x - p_F(x)||$). Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, ..., x_n)}{\gamma(x_1, ..., x_n)}}$.

Correction ▼ [005486]

Exercice 3891 **I

Matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équations $3x = 6y = 2z$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite. De manière générale, matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $u = (a, b, c)$ et de la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [005488]

Exercice 3892 **I

Existence, unicité et calcul de a et b tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 \, dx$ soit minimum (trouver deux démonstrations, une dans la mentalité du lycée et une dans la mentalité maths sup).

Correction ▼ [005494]

Exercice 3893 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel euclidien orienté rapporté à la base orthonormée directe (i,j,k), déterminer l'image du plan d'équation $x+y=0$ par

1. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x-y+z=0$,
2. la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $(1,1,1)$,
3. par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur $(1,1,1)$.

Correction ▼ [005504]

Exercice 3894 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, soient (D) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{array}\right.$ et (Δ) : $6x=2y=3z$ puis (P) : $x+3y+2z=6$. Déterminer la projection de (D) sur (P) parallèlement à (Δ).

Correction ▼ [005509]

Exercice 3895 **

Soient (D) la droite dont un système d'équations cartésiennes est $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{array}\right.$ et (P) le plan d'équation cartésienne $x+3y+2z=6$. Déterminer la projetée (orthogonale) de (D) sur (P).

Correction ▼ [005520]

139 204.05 Orthonormalisation

Exercice 3896

Résoudre l'équation $(1-x)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+z^2=\frac{1}{4}$ pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. [001493]

Exercice 3897

1. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u=(1,2,3,-1,2)$ et $v=(2,4,7,2,-1)$. Trouver une base de l'orthogonal $F^\perp$ de F.
2. Trouver une base orthonormale du sous-espace E de $\mathbb{C}^3$ engendré par $v_1=(1,i,0)$ et $v_2=(1,2,1-i)$.

[001494]

Exercice 3898

Soit F un sous-espace d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthonormale de F qui est incluse dans une base orthonormale de E. [001495]

Exercice 3899

1. Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A définit un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$. Construire une base orthonormale pour φ.
2. Considérons une base $\{v_1=(1,1,1), v_2=(0,1,1), v_3=(0,0,1)\}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour transformer $\{v_i\}$ en une base orthonormale.

[001496]

Exercice 3900

Soient $E = \mathbb{R}_n[X], I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente. Que vaut I_{2p+1} ?

   Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire.
3. On suppose $n = 2$. Ecrire la matrice associée à φ dans la base $(1, X, X^2)$. Construire une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$.

[001497]

Exercice 3901

Réduire en somme de carrés indépendants les formes suivantes :

1. $9x^2 - 6y^2 - 8z^2 + 6xy - 14xz + 18xw + 8yz + 12yw - 4zw$
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$

[001498]

Exercice 3902

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,0,2)$ et $e_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt. [001499]

Exercice 3903

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient $e_1 = (1,0,1,0)$ et $e_2 = (1,-1,1,-1)$ et $F = \text{vect}(e_1, e_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur F.
3. Déterminer la distance du vecteur $(1,1,1,1)$ au sous-espace vectoriel F.

[001500]

Exercice 3904

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], (P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

[001501]

Exercice 3905

Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $u = (x,y,z)$ et $u' = (x',y',z')$ alors

$$f(u,u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x - y + z = 0$.

(a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel P.

(b) Déterminer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont l'orthogonal est P.

3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire f.

[001502]

Exercice 3906

Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ la famille $x_1 = (1,-2,2)$, $x_2 = (-1,0,-1)$, $x_3 = (5,-3,7)$. [001503]

Exercice 3907

Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. [001504]

Exercice 3908

On considère la forme bilinéaire b de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3$$

où x_1,x_2,x_3 et y_1,y_2,y_3 sont les coordonnées de x et y dans la base canonique.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Ecrire la matrice de b dans la base canonique.
3. Trouver une base orthonormée pour b.

[001505]

Exercice 3909

On considère un espace euclidien $(E,<>)$.

1. **Théorème de Pythagore :**
   Soient u et v deux vecteurs orthogonaux de E. Calculer $||u+v||^2$. Illustrer le résultat obtenu à l'aide d'un dessin.
2. **Projection orthogonale et distance à un sous-espace :**
   Soit F un sous-espace de E. On rappelle que $E = F \oplus F^{\perp}$, et donc que tout vecteur x de E se décompose de manière unique en une somme $x = x_1 +_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$. Le vecteur x_1 s'appelle alors la projection orthogonale de x sur F.
   (a) Montrer que l'application p qui à un vecteur asocie sa projection orthogonale sur E est une application linéaire. Vérifier que : $\forall y \in F, < x - p(x), y >= 0$.
   (b) On considère maintenant un vecteur x de E. On appelle distance de x à F le nombre $\mathrm{dist}(x,F) = \inf_{y\in F} ||x-y||$.
   Pour $y \in F$, vérifier que $x - p(x)$ et $y - p(x)$ sont orthogonaux. Utiliser alors la question 1 pour montrer que $||x-y||^2 \geqslant ||x-p(x)||^2$. Illustrer sur un dessin.
   En déduire que $\mathrm{dist}(x,F) = ||x-p(x)||$.
   (c) Soit $(e_1,\ldots,e_r)$ une base orthonormée de F. Montrer que $p(x) = \sum_{i=1}^r < x, e_i > \ e_i$.
3. **Espace de polynômes :**
   Sur l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la forme bilinéaire définie par :

$$< P, Q >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

   (a) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire (on admet que l'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction f continue et positive est nulle si et seulement si f est nulle sur $[-1,1]$)
   (b) A l'aide du procédé de Schmidt appliqué à la base $(1,X,X^2)$, construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(c) On considère le polynôme $P_0 = X^3$. Calculer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire que pour ce produit scalaire, on a :

$$\operatorname{dist}(X^3, \mathbb{R}^2[X]) = \frac{2}{5\sqrt{7}} .$$

[001506]

Exercice 3910

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, x_0 un point de E et F un sous espace vectoriel de E. On note π la projection orthogonale de E sur F. On rappelle que pour $x \in E$, $\pi(x)$ est caractérisé par les relations :

$$\pi(x) \in F \qquad \text{et} \qquad x - \pi(x) \in F^{\perp}$$

Le but de cette partie est de montrer que la projection orthogonale de x_0 sur F est le point de F le plus proche de x_0.

1. En utilisant que $x_0 - y = (x_0 - \pi(x_0)) + (\pi(x_0) - y)$, montrer que

$$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \pi(x_0)\|^2 + \|y - \pi(x_0)\|^2.$$

2. En déduire que $\inf_{y \in F} \|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \pi(x_0)\|^2$, c'est à dire que :

$$\forall y \in F,\ \|x_0 - y\|^2 \geqslant \|x_0 - \pi(x_0)\|^2$$

A quelle condition a-t-on égalité dans la relation ci-dessus ?

3. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de F. Montrer que $\pi(x_0) = \sum_{i=1}^k < e_i, x_0 > e_i$
4. Déduire des deux questions précédentes que

$$\inf_{y \in F} \|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \sum_{i=1}^k < e_i, x_0 > e_i\|^2 = \|x_0\|^2 - \sum_{i=1}^k < e_i, x_0 >^2$$

Application : Le but est maintenant de déterminer

$$\alpha = \inf_{a,b \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (e^t - at - b)^2 dt.$$

On considère à cet effet l'espace $F = \mathbb{R}_1[X]$, comme sous espace de $E = F \oplus \mathbb{R} f_0$ où f_0 est la fonction définie par $f_0(t) = e^t$. On admettra sans démonstration que $< f, g >= \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

5. Donner une base orthonormée (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
6. Calculer $< f_0, P_1 >, < f_0, P_2 >$, et $\|f_0\|^2$. En déduire que

$$\alpha = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - (2e^{-1})^2 - \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2.$$

7. Même question avec le calcul de $\alpha' = \inf_{a,b \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (e^t - at^2 - bt - c)^2 dt.$: commencer par chercher une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le même produit scalaire, et en déduire α'.

[001507]

Exercice 3911

A deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le nombre

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Lorsque $n = 2$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

[001508]

Exercice 3912 **IT

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $V_2 = (0, 3, 1, -1)$. On pose $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^\perp$.

Correction ▼ [005484]

Exercice 3913 ****I

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $P|Q = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

1. Montrer que $(E, |)$ est un espace euclidien.
2. Pour p entier naturel compris entre 0 et n, on pose $L_p = ((X^2-1)^p)^{(p)}$. Montrer que $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E.
   Déterminer $||Lp||$.

Correction ▼ [005500]

Exercice 3914 *** I Polynômes de LEGENDRE

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $P|Q = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.
   (a) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, \mid)$.
   (b) Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E.

Correction ▼ [005772]

Exercice 3915 ***

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P, Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\,dt$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n, $\deg(P_n) = n$.
3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n, $n \in \mathbb{N}^*$, a n racines réelles simples.

Correction ▼ [005779]

Exercice 3916 **I Inégalité de HADAMARD

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Montrer que pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1, ...x_n)$, on a : $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)| \leqslant \|x_1\| ... \|x_n\|$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005789]

Exercice 3917 **

Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de format n, on a $|\det A| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

Correction ▼ [005790]

Exercice 3918 **

Rang et signature des formes quadratiques suivantes :

1. $Q((x,y,z)) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.
2. $Q((x,y,z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$
3. $Q((x,y,z,t)) = xy + yz + zt + tx$.
4. $Q((x,y,z,t)) = x^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$.
5. $Q((x_1,...,x_5)) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$.
6. $Q((x_1,...,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ijx_i x_j$.
7. $Q((x_1,...,x_n)) = \sum^{i}_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j$.
8. $Q((x_1,...,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{Inf}(i,j)x_i x_j$.

Correction ▼ [005806]

Exercice 3919 **

Sur $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, réduire en base orthonormée les formes quadratiques suivantes :

1. $Q((x,y)) = x^2 + 10xy + y^2$.
2. $Q((x,y)) = 6x2 + 4xy + 9y2$.
3. $Q((x,y,z)) = 4x^2 + 9y^2 - z^2 + 2\sqrt{6}xy + 10\sqrt{2}xz + 2\sqrt{3}yz$.

Correction ▼ [005811]

Exercice 3920 ***

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $Q(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)P(-k)e^{-k}$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer sa signature.

Correction ▼ [005812]

140 204.06 Espace vectoriel euclidien de dimension 3

Exercice 3921 Propriétés du produit vectoriel

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Démontrer :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \mid (\vec{w} \wedge \vec{t}) = (\vec{u} \mid \vec{w})(\vec{v} \mid \vec{t}) - (\vec{u} \mid \vec{t})(\vec{v} \mid \vec{w})$$
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = -[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\vec{t} + [\vec{u},\vec{v},\vec{t}]\vec{w}$$
$$[\vec{t},\vec{v},\vec{w}]\vec{u} + [\vec{u},\vec{t},\vec{w}]\vec{v} + [\vec{u},\vec{v},\vec{t}]\vec{w} = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\vec{t}.$$

[003694]

Exercice 3922 Division vectorielle

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs donnés, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Étudier l'équation : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$. On cherchera une solution particulière de la forme $\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{y}$.

Correction ▼ [003695]

Exercice 3923 $a \wedge b$, $b \wedge c$, $c \wedge a$ donnés

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Trouver $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ connaissant $\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b} \wedge \vec{c}$ et $\vec{w} = \vec{c} \wedge \vec{a}$ (calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$).

Correction ▼ [003696]

Exercice 3924 $f(u)\wedge v+u\wedge f(v)=g(u\wedge v)$

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $f\in\mathscr{L}(E)$.

1. Prouver que : $[f(\vec{u}),\vec{v},\vec{w}]+[\vec{u},f(\vec{v}),\vec{w}]+[\vec{u},\vec{v},f(\vec{w})]=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\mathrm{tr}(f)$.
2. Montrer qu'il existe $g\in\mathscr{L}(E)$ telle que : $\forall\,\vec{u},\vec{v}$, on a $f(\vec{u})\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge f(\vec{v})=g(\vec{u}\wedge\vec{v})$.
3. Dans une *bond*, exprimer la matrice de g en fonction de celle de f.

Correction ▼ [003697]

Exercice 3925 Applications bilinéaires antisymétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\phi:E\times E\to\mathbb{R}$ une application bilinéaire antisymétrique.
Montrer qu'il existe $f\in E^*$ unique telle que : $\forall\,\vec{x},\vec{y},\ \phi(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{x}\wedge\vec{y})$.

[003698]

Exercice 3926 Volume d'un parallélépipède

Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
On donne $\|\vec{u}\|=a$, $\|\vec{v}\|=b$, $\|\vec{w}\|=c$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha$, $\overline{(\vec{v},\vec{w})}\equiv\beta$, $\overline{(\vec{w},\vec{u})}\equiv\gamma$.
Quel est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$?

Correction ▼ [003699]

Exercice 3927 Applications conservant le produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Trouver les applications $f\in\mathscr{L}(E)$ vérifiant :

1. $f(\vec{u}\wedge\vec{v})=f(\vec{u})\wedge f(\vec{v})$.
2. $f(\vec{u}\wedge\vec{v})=-f(\vec{u})\wedge f(\vec{v})$.

[003700]

Exercice 3928 Expression d'une rotation

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\vec{u}\in E$ unitaire, $\alpha\in\mathbb{R}$ et f la rotation autour de $\vec{u}$ d'angle de mesure α.

1. Exprimer $f(\vec{x})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{x}$ et α.
2. On donne les coordonnées de $\vec{u}$ dans une base orthonormée : a,b,c. Calculer la matrice de f dans cette base.

Correction ▼ [003701]

Exercice 3929 Conjuguée d'une rotation

Soit ρ une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et $f\in\mathscr{O}(E)$. Reconnaître $f\circ\rho\circ f^{-1}$.
Application : Déterminer le centre de $\mathscr{O}^+(E)$. [003702]

Exercice 3930 Conjugaison dans $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$

Soient $f,g\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$ ayant même polynôme caractéristique.
Montrer qu'il existe $h\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f=h^{-1}\circ g\circ h$.
Si f et g sont positifs, a-t-on h positif ?

Correction ▼ [003703]

Exercice 3931 Décomposition des rotations

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une *bond* d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 E, et $f\in\mathscr{O}^+(E)$.

1. On suppose $f(\vec{j}) \perp \vec{i}$. Montrer qu'il existe r, r' rotations autour de $\vec{j}$ et $\vec{i}$ telles que $r' \circ r = f$.
2. En déduire que tout $f \in \mathscr{O}^+(E)$ se décompose de deux manières sous la forme : $f = r'' \circ r' \circ r$ où r, r'' sont des rotations autour de $\vec{j}$ et r' est une rotation autour de $\vec{i}$.
3. Décomposer $(x,y,z) \mapsto (y,x,z)$ et $(x,y,z) \mapsto (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha, z)$.

Correction ▼ [003704]

Exercice 3932 Sous-groupes finis de $\mathscr{O}^+(3)$

Déterminer les sous-groupes de $\mathscr{O}^+(3)$ de cardinal 2,3, ou 4. [003705]

Exercice 3933 Applications antisymétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ antisymétrique.

1. Montrer que $\mathrm{id}_E + f \in GL(E)$.
2. Montrer que $g = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1} \in \mathscr{O}^+(E)$ et $\mathrm{id} + g$ est inversible.
3. Réciproquement, soit $h \in \mathscr{O}^+(E)$ tq $\mathrm{id} + h$ soit inversible. Montrer qu'il existe f antisymétrique tel que $h = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1}$.

Correction ▼ [003706]

Exercice 3934 Applications antisymétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice dans $\mathscr{B}$: $M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconaître f.
2. Montrer que $\mathrm{id}_E + f$ est une bijection et calculer la bijection réciproque.
3. Montrer que $g = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1}$ est une rotation et préciser son axe et son angle.

Correction ▼ [003707]

Exercice 3935 Exponentielle d'une application antisymétrique

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{a} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. On note $\alpha = \|\vec{a}\|$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(\vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{x}$.

1. Vérifier que $f^3 = -\alpha^2 f$.
2. On pose $g(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(\vec{x})}{k!}$. Simplifier $g(\vec{x})$ et en déduire que g est une rotation.

Correction ▼ [003708]

Exercice 3936 Matrice à trou

1. Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.
2. Reconnaître l'application de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [003709]

Exercice 3937 Matrice circulante

Pour tout triplet (a,b,c) de réels on pose

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $M(a,b,c)$ est une matrice de rotation ;
   (b) (a,b,c) appartient au cercle $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'intersection de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et du plan $x+y+z-1=0$;
   (c) a, b et c sont les racines d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + \lambda$ avec $\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.
2. Si $M(a,b,c)$ est une rotation, calculer son axe et son angle au signe près.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de rotation de la forme $M(a,b,c)$ est un sous-groupe de $SO(3)$. À quel groupe connu est-il isomorphe ?

Correction ▼ [003710]

Exercice 3938 Expressions analytiques

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques dans la base canonique :

1. $\begin{cases} 3x' = 2x+2y+z \\ 3y' = -2x+y+2z \\ 3z' = x-2y+2z \end{cases}$
2. $\begin{cases} 9x' = 8x+y-4z \\ 9y' = -4x+4y-7z \\ 9z' = x+8y+4z \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x' = -2x+2y-z \\ 3y' = 2x+y-2z \\ 3z' = -x-2y-2z \end{cases}$
4. $\begin{cases} 4x' = -2x-y\sqrt{6}+z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6}+y+3z \\ 4z' = -x\sqrt{6}+3y+z \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{6}} \\ y' = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{\sqrt{6}} \\ z' = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{6}} \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x' = x+2y+2z \\ 3y' = 2x+y-2z \\ 3z' = 2x-2y+z \end{cases}$
7. $\begin{cases} 7x' = -2x+6y-3z \\ 7y' = 6x+3y+2z \\ 7z' = -3x+2y+6z \end{cases}$
8. $\begin{cases} 3x' = 2x-2y+z \\ 3y' = -2x-y+2z \\ 3z' = x+2y+2z \end{cases}$
9. $\begin{cases} 3x' = 2x+y+2z \\ 3y' = 2x-2y-z \\ 3z' = -x-2y+2z \end{cases}$
10. $\begin{cases} 4x' = -x+3y-z\sqrt{6} \\ 4y' = 3x-y-z\sqrt{6} \\ 4z' = x\sqrt{6}+y\sqrt{6}+2z \end{cases}$

11. $\begin{cases} 15x' = 5x - 10z \\ 15y' = -8x + 5y + 6z \\ 15z' = 6x - 10y + 8z \end{cases}$

Correction ▼ [003711]

Exercice 3939 Ensi Physique 92

Déterminer la matrice de la rotation $\mathscr{R}$ de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ telle que $\mathscr{R}(\vec{u}) = \vec{u}$ avec $\vec{u}(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\mathscr{R}(\vec{i}) = \vec{k}$. Donner son angle de rotation.

Correction ▼ [003712]

Exercice 3940 **

$\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ donnée. Montrer que $\det_{\mathscr{B}}(u\wedge v, v\wedge w, w\wedge u) = (\det_{\mathscr{B}}(u,v,w))^2$ pour tous vecteurs u, v et w.

Correction ▼ [005491]

Exercice 3941 **

Montrer que $u\wedge v|w\wedge s = (u|w)(v|s)-(u|s)(v|w)$ et $(u\wedge v)\wedge(w\wedge s) = [u,v,s]w-[u,v,w]s$.

Correction ▼ [005493]

Exercice 3942 **

Soit (e_1,e_2,e_3) une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. Matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de e_1+e_2.

Correction ▼ [005793]

Exercice 3943 ***

Trouver tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y)$.

Correction ▼ [005797]

Exercice 3944 **

Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté défini par

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\ f(x) = a\wedge(a\wedge x) \text{ où } a \text{ est un vecteur donné.}$$

Correction ▼ [005801]

Exercice 3945 ** I

Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \end{cases}$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.
2. Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Correction ▼ [005803]

141 204.07 Endomorphismes auto-adjoints

Exercice 3946 Esem 91

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose ${}^tA = A$ et $A^2 = 0$. Montrer que $A = 0$. [003762]

Exercice 3947 Comatrice d'une matrice symétrique

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $\operatorname{com} M$ est aussi symétrique. La réciproque est-elle vraie ? [003763]

Exercice 3948 Base non orthonormée

Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base non orthonormée de E, G la matrice de Gram des $\vec{e}_i$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathscr{B}$.

1. Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.
2. Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = G$.

[003764]

Exercice 3949 autoadjoint $\Rightarrow$ linéaire

Soit $u : E \to E$ telle que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (u(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid u(\vec{y}))$. Montrer que u est linéaire.

[003765]

Exercice 3950 Diagonalisation de matrices symétriques

Diagonaliser dans une base orthonormée :

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
2. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & 2 & -4 \\ 2 & 26 & 2 \\ -4 & 2 & 23 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003766]

Exercice 3951 Diagonalisation de C^tC

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $M = (a_i a_j) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Correction ▼ [003767]

Exercice 3952 Décomposition en projections orthogonales

Soit φ l'endomorphisme de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe des projections orthogonales p, q et des réels λ, μ tels que :

$$\varphi = \lambda p + \mu q, \qquad p \circ q = 0, \qquad p + q = \mathrm{id}_E.$$

Correction ▼ [003768]

Exercice 3953 Ensi Physique 93

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$. On pose pour $P, Q \in E$: $< P, Q > = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ et on considère

$$u : E \to \mathbb{R}[x], P(x) \mapsto 2xP'(x) + (x^2 - 1)P''(x).$$

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire et que u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et que si P_k, P_ℓ sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes, alors $<P_k, P_\ell>=0$.
3. Éléments propres de u pour $n = 3$?

Correction ▼ [003769]

Exercice 3954 $(X^2-1)P'' + (2X+1)P'$

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $(P \mid Q) = \int_{t=-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)Q(t)\,dt$ et $\Phi(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P'$.

1. Vérifier que $(P \mid Q)$ existe et qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour ce produit scalaire, Φ est auto-adjoint $\Big($calculer $\int_{t=-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2} P''(t)Q(t)\,dt$ par parties$\Big)$.
3. Déterminer les valeurs propres de Φ et montrer qu'il existe une base propre de degrés étagés.

Correction ▼ [003770]

Exercice 3955 $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoint. Montrer que $\operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u = E$. [003771]

Exercice 3956 $u \circ v$ autoadjoint ?

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoints. Montrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$. [003772]

Exercice 3957 Composée de projecteurs

Soient p, q deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.
2. Montrer que $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q) \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q) = E$.
3. En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Correction ▼ [003773]

Exercice 3958 Autoadjoint et orthogonal

Quels sont les endomorphismes de E à la fois auto-adjoints et orthogonaux ? [003774]

Exercice 3959 Spectre et rang d'une matrice antisymétrique

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que les valeurs propres de M sont imaginaires pures.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$. En déduire que $g = f_{|\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} f$.
3. Montrer que g^2 est diagonalisable. En déduire que $\operatorname{rg}(M)$ est pair.

[003775]

Exercice 3960 Racine carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

Calculer B lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. [003776]

Exercice 3961 $A = {}^tBB$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$. [003777]

Exercice 3962 Mineurs principaux positifs

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on note Δ_p le déterminant de la sous-matrice $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant p}$.

1. Montrer que si A est définie positive, alors tous les déterminants Δ_p sont strictement positifs.
2. Réciproque : on suppose $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$. Montrer qu'il existe une matrice B triangulaire supérieure inversible telle $A = {}^tBB$. En déduire que A est définie positive.

Correction ▼ [003778]

Exercice 3963 q positive $\Rightarrow q(x) = \|u(x)\|^2$

Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique positive. Montrer qu'il existe un endomorphisme u auto-adjoint tel que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ q(\vec{x}) = \|u(\vec{x})\|^2$. [003779]

Exercice 3964 A symétrique et $A^k = I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I$. Montrer que $A^2 = I$. [003780]

Exercice 3965 $\sum_{i,j} a_{ij}^2$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2$. [003781]

Exercice 3966 u autoadjoint et $\mathrm{tr}(u) = 0$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoint tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}$ non nul tel que $u(\vec{x}) \perp \vec{x}$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_i)$ telle que : $\forall\, i,\ (u(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = 0$.

Correction ▼ [003782]

Exercice 3967 Matrices symétriques commutant

Soit (A_i) une famille de matrices $n \times n$ réelles symétriques commutant deux à deux.
Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que : $\forall\, i,\ A_i = P_i(A)$. [003783]

Exercice 3968 Valeurs propres de AB

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, B définie positive. Montrer que les valeurs propres de AB sont réelles.

Correction ▼ [003784]

Exercice 3969 $\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives. Montrer que $0 \leqslant \mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

Correction ▼ [003785]

Exercice 3970 $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives. Montrer que $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

Correction ▼ [003786]

Exercice 3971 f quelconque, il existe une BON dont l'image est orthogonale

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ dont l'image par f est une famille orthogonale.

Correction ▼ [003787]

Exercice 3972 Quotients de Rayleigh

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoint et $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \lambda_1 \|\vec{x}\|^2 \leqslant (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) \leqslant \lambda_n \|\vec{x}\|^2$.
2. Montrer que si l'une de ces deux inégalités est une égalité pour un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de f.
3. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout i : $(f(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = \lambda_i$.
   Montrer que : $\forall\, i,\ f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$.

[003788]

Exercice 3973 $\mathrm{Spec}(A+B)$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, λ, λ' leurs plus petites valeurs propres et μ, μ' leurs plus grandes valeurs propres. Montrer que toute valeur propre de $A+B$ est comprise entre $\lambda + \lambda'$ et $\mu + \mu'$. [003789]

Exercice 3974 Comparaison de valeurs propres

Soient $h \in \mathscr{L}(E)$ autoadjoint, $\vec{x}_0 \in E$ unitaire, p la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(\vec{x}_0)$, et $f = h + p$.
On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de h et $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ celles de f.
Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_n$.

Correction ▼ [003790]

Exercice 3975 Mines P' 1996

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f \Rightarrow f + f^* \in GL(E)$.
2. Montrer la réciproque lorsque l'on a $f^2 = 0$.

Correction ▼ [003791]

Exercice 3976 Rayon spectral

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\|f\|^2 = \max\{|\lambda| \text{ tq } \lambda \in \mathrm{Sp}(f^* \circ f)\}$. [003792]

Exercice 3977 Décomposition polaire d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. En considérant l'endomorphisme $f^* \circ f$, montrer que si f est inversible alors f se décompose de manière unique sous la forme $f = u \circ h$ avec u unitaire et h hermitien positif.
2. Si f est non inversible, montrer qu'une telle décomposition existe mais n'est pas unique (on rappelle que $U(E)$ est compact).
3. Montrer que l'application $f \mapsto (u, h)$ est continue sur $GL(E)$.

[003793]

Exercice 3978 Endomorphismes normaux

Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

1. Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^{\perp}$ est stable par u. En déduire que u est diagonalisable en base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
   (1) u est normal.
   (2) $\forall\, x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
   (3) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.
   (4) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u.
   (5) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

[003794]

Exercice 3979 $\|u(x)\| = \|v(x)\|$

Soit E un espace hermitien non nul et $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$\Big(\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| = \|v(x)\|\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists\, w \in\ U(E) \text{ tq } u = w \circ v\Big).$$

[003795]

Exercice 3980 $(u(x) \mid x)$ est réel

Soit E un espace vectoriel hermitien et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $u = u^*$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $(u(x) \mid x)$ est réel.
2. On suppose u autoadjoint positif. Montrer : $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\|^4 \leqslant (x \mid u(x)) \times (u(x) \mid u^2(x))$.

Correction ▼ [003796]

Exercice 3981 Série d'autoadjoints positifs

Soit H un espace de Hilbert et (u_n) une suite d'endomorphismes de H autoadjoints positifs continus telle que la suite $(u_0 + \cdots + u_n)$ est bornée dans $\mathscr{L}_c(H)$. Montrer que pour tout $x \in H$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est convergente.

Correction ▼ [003797]

Exercice 3982 Mines MP 2000

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = {}^tAA$. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, dans $M_n(\mathbb{C})$?

Correction ▼ [003798]

Exercice 3983 Centrale MP 2000 (avec Maple)

Soit E un espace euclidien, u et v deux endomorphismes auto-adjoints de E, u étant défini positif.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme w tel que $u \circ w + w \circ u = v$. Que peut-on dire de w ?
2. On suppose E de dimension 3, rapporté à une base orthonormale dans laquelle u et v ont pour matrices respectives $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer w.
3. On revient au cas général. Si v est défini positif, que dire de w ? Si w est défini positif, que dire de v ?

Correction ▼ [003799]

Exercice 3984 Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace euclidien et s une symétrie de E.

1. Que dire de $s^* \circ s$?
2. Un polynôme P est dit réciproque si $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$, pour P de degré n.
   Montrer que : $P(X) = \det(X\mathrm{id} + s^* \circ s)$ est un polynôme réciproque.

3. Montrer que $P(1) \geqslant 2^n$. A quelle condition y a-til égalité ? Y a-t-il des conditions sur s ?

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, carrée, d'ordre n, symétrique définie positive, où A_1 et A_4 sont carrées d'ordres respectifs p et q. Montrer que $\det(A) \leqslant \det(A_1)\det(A_4)$.

Correction ▼ [003800]

Exercice 3985 Cachan MP* 2000

On note P l'ensemble des fonctions f polynomiales par morceaux, continues sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Si f et g sont des fonctions de P, on note $(f \mid g) = \int_{t=0}^{1} f'(t)g'(t)\,dt$.

1. Que dire de P muni de cette application ?
2. Montrer que si $x \in [0,1]$, il existe $g_x \in P$ telle que $\forall\, f \in P,\ (g_x \mid f) = f(x)$.
3. On considère n réels vérifiant : $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ et on donne n réels $(\alpha_i)_{i\in[[1,n]]}$. On pose $\varphi(f) = \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - \alpha_i)^2$ et on demande de trouver le minimum de φ sur P.

Correction ▼ [003801]

Exercice 3986 Centrale MP 2002

1. Que peut-on dire de l'adjoint d'un projecteur orthogonal d'un espace euclidien ? Réciproque ?
2. Soit p un projecteur d'un espace euclidien tel que $p \circ p^* = p^* \circ p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Correction ▼ [003802]

Exercice 3987 IIE MP 2004

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \int_0^1 fg$.
Soient u, v les endomorphismes de E définis par $u(f)(x) = \int_0^x f$ et $v(f)(x) = \int_x^1 f$.

1. Montrer que $(u(f) \mid g) = (f \mid v(g))$.
2. Déterminer les valeurs propres de $u \circ v$.

Correction ▼ [003803]

Exercice 3988 Centrale MP 2004

Soit E un espace euclidien de dimension n et p endomorphismes autoadjoints $u_1, \dots, u_p$. Soit q_i la forme quadratique associée à u_i ($q_i(x) = (u_i(x) \mid x)$). On suppose :

$$\forall\, x \in E,\ q_1(x) + \cdots + q_p(x) = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(u_1) + \cdots + \mathrm{rg}(u_p) = n.$$

1. Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = \mathrm{id}_E$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(u_p) = E$.
3. Montrer que les u_i sont en fait des projecteurs orthogonaux et que la somme précédente est orthogonale.

Correction ▼ [003804]

Exercice 3989 Mines MP 2005

Soit A matrice réelle ; montrer que A est diagonalisable ssi il existe S symétrique réelle définie positive telle que ${}^tA = SAS^{-1}$.

Correction ▼ [003805]

Exercice 3990 Rayon spectral, Centrale MP 2006

Soient A, B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \max(\mathrm{Sp}(A + tB))$. Montrer que f est convexe.

Correction ▼ [003806]

142 204.08 Espaces vectoriels hermitiens

Exercice 3991 Somme directe orthogonale

Soit E un espace préhilbertien et $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels tels que pour $i \neq j$, $F_i \perp F_j$. Montrer que la somme $F_1+\dots+F_n$ est directe. [003823]

Exercice 3992 Espace ℓ^2

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.
Pour $u,v \in E$, on pose : $(u \mid v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(u \mid v)$ existe.
3. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
4. Montrer que E, muni de la norme associée, est complet.

[003824]

Exercice 3993 $f(x) \perp x \Rightarrow f=0$

Soit E un espace vectoriel préhilbertien complexe et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, on a $f(\vec{x}) \perp \vec{x}$.

1. Montrer que pour tous vecteurs $\vec{x},\vec{y} \in E$, on a $(f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = 0$.
2. Montrer que $f=0$.
3. Comparer avec le cas réel.

Correction ▼ [003825]

Exercice 3994 Hanh-Banach pour une boule

Soit E un espace préhilbertien réel et B une boule ouverte de E ne contenant pas $\vec{0}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que : $\forall\, \vec{x} \in B,\ f(\vec{x}) > 0$. [003826]

Exercice 3995 Calcul de minimums

Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a,b) \mapsto \int_{x=0}^{\pi} (\sin x - ax^2 - bx)^2\,dx$.

Correction ▼ [003827]

Exercice 3996 Calcul de minimums

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \int_{t=0}^{1} (1+tx_1+\dots+t^n x_n)^2\,dt$. Montrer que φ admet un minimum absolu et le calculer lorsque $n=3$.
2. Même question avec $\psi(x_1,\dots,x_n) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}(1+tx_1+\dots+t^n x_n)^2\,dt$.

Correction ▼ [003828]

Exercice 3997 Trouvez le produit scalaire

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degrés étagés ($\deg P_n = n$). Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille P_n est orthonormée.

[003829]

Exercice 3998 Décomposition de Cholesky

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

1. Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. Montrer que T est unique si on impose la condition : $\forall\, i,\ T_{ii} > 0$.

2. Application : Montrer que $\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

[003830]

Exercice 3999 Changement de base unitaire

Soit E un espace vectoriel hermitien et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Montrer que ${}^t\overline{P}P = I$. Que peut-on dire de $\det P$? [003831]

Exercice 4000 Déterminant de Gram

Soit E un espace préhilbertien et $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n \in E$. On note $G = (g_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ la matrice de Gram de ces vecteurs ($g_{ij} = (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j)$).

1. On suppose E de dimension finie, rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$. Exprimer G en fonction de $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$.
2. En déduire que $\det(G)$ est un réel positif ou nul, et nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}_i$ sont liés.
3. Montrer le même résultat sans supposer que E est de dimension finie.
4. Examiner le cas particulier $n = 2$.
5. Application : Le tétraèdre $ABCD$ est tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB,AC) \equiv \frac{\pi}{4}$, $(AB,AD) \equiv \frac{\pi}{3}$, $(AC,AD) \equiv \frac{\pi}{2}$. Calculer son volume.

Correction ▼ [003832]

Exercice 4001 Congruence des matrices de Gram

Soit E un espace vectoriel hermitien et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases quelconques. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?

[003833]

Exercice 4002 Normes euclidiennes

1. Montrer que les applications :
$$N_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+xy+y^2} \quad \text{et} \quad N_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{2x^2-xy+y^2}$$
sont des normes.
2. Montrer qu'il existe $\alpha,\beta > 0$ tels que : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha N_2(x,y) \leqslant N_1(x,y) \leqslant \beta N_2(x,y)$.
3. Trouver les meilleures constantes α,β (étudier si $N_1(x,y)^2 - \lambda N_2(x,y)^2$ est positive, négative).

Correction ▼ [003834]

Exercice 4003 Famille duale de $1, X, X^2, \dots$

1. Montrer qu'il existe des polynômes $P_0,\dots,P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\forall\ i,j \leqslant n,\ \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}t^iP_j(t)\,dt = \delta_{ij}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de suite de polynômes $(P_0,\dots,P_n,\dots)$ telle que : $\forall\, i,j \in \mathbb{N},\ \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}t^iP_j(t)\,dt = \delta_{ij}$.

Correction ▼ [003835]

Exercice 4004 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E l'ensemble des fonctions : $[a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continues et $\Phi : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f \times \int_a^b 1/f$.
Montrer que $\min\limits_{f\in E} \Phi(f) = (b-a)^2$ et chercher les fonctions réalisant le minimum.

Correction ▼ [003836]

Exercice 4005 Intégrale double

Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace E des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ nulles sur le bord, C, de D.
Pour $f, g \in E$, on pose $(f \mid g) = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy$. Montrer que c'est un produit scalaire.

[003837]

Exercice 4006 Forme quadratique associée à la matrice de Gram

Soit E un espace euclidien, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.
Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \sum_{i,j} a_{ij}(\vec{e}_i \mid \vec{x})(\vec{e}_j \mid \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$.

Correction ▼ [003838]

Exercice 4007 Orthogonal des polynômes

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et g la fonction exponentielle sur $[0,1]$.

1. Montrer que $g \notin F$.
2. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales convergeant vers g pour la norme euclidienne.
3. En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

[003839]

Exercice 4008 Orthogonal d'un hyperplan

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et, pour $f \in E$: $\varphi(f) = \int_{t=0}^{1/2} f(t)\,dt$.

1. Montrer que φ est continue.
2. Montrer que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.
3. Montrer que $H^{\perp} = \{0\}$.

Correction ▼ [003840]

Exercice 4009 Produit scalaire

Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ et $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose pour $f, g \in E$: $(f \mid g) = \int_{t=a}^{b} u(t) f(t) g(t)\,dt$.

1. A quelle condition sur u définit-on ainsi un produit scalaire ?
2. Soient u, v deux fonctions convenables. A quelle condition les normes associées sont-elles équivalentes ?

Correction ▼ [003841]

Exercice 4010 Produit scalaire ?

Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ et (a_n) une suite d'éléments de $[a,b]$.
Pour $f, g \in E$, on pose : $(f \mid g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a_n)g(a_n)}{2^n}$.

1. A quelle condition sur la suite (a_n) définit-on un produit scalaire ?
2. Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux telles suites telles que les ensembles $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. Montrer que les normes correspondantes sont non équivalentes.
3. Question ouverte : à quelle condition les normes associées à deux suites (a_n) et (b_n) sont-elles équivalentes ?
4. Montrer qu'il n'existe pas de suite (a_n) pour laquelle E soit complet.

Correction ▼ [003842]

Exercice 4011 Ulm MP* 2000

V est un espace hermitien et u,v,w trois vecteurs unitaires. Montrer que :

$$\sqrt{1-|(u\mid v)|^2}\leqslant\sqrt{1-|(u\mid w)|^2}+\sqrt{1-|(v\mid w)|^2}.$$

Correction ▼ [003843]

Exercice 4012 Ulm MP* 2000

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elle admet une décomposition $A=UT\,{}^tU$ avec U unitaire et T triangulaire supérieure si et seulement si le spectre de $A\overline{A}$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Correction ▼ [003844]

143 204.09 Problèmes matriciels

Exercice 4013 $I+a(X^tY-Y^tX)$ inversible

Soient $X,Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ indépendantes, $a\in\mathbb{R}$ et M la matrice $n\times n$ telle que $m_{ij}=x_iy_j-x_jy_i$.
A quelle condition $I+aM$ est-elle inversible ?

Correction ▼ [003807]

Exercice 4014 Matrice orthogonale pour une forme (p,q)

Soit $J=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & -I_p\end{pmatrix}$, et $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ telle que ${}^tMJM=J$. Montrer que A et D sont inversibles.

Correction ▼ [003808]

Exercice 4015 Calcul d'inverse

Soit $A=\begin{pmatrix}a & -b & -c & -d\\ b & a & d & -c\\ c & -d & a & b\\ d & c & -b & a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, avec a,b,c,d non tous nuls.

Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction ▼ [003809]

Exercice 4016 Matrices normales

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Montrer que $AA^*=A^*A\iff\operatorname{tr}(AA^*)=|\lambda_1|^2+\dots+|\lambda_n|^2$.

Correction ▼ [003810]

Exercice 4017 f normal, $f^2=-\mathrm{id}$

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ f^*=f^*\circ f$ et $f^2=-\mathrm{id}$. Montrer que f est orthogonal.

Correction ▼ [003811]

Exercice 4018 Chimie P 1996

Soit S, matrice orthogonale d'ordre impair, de coefficients fonction de t dérivables. Montrer que $\frac{dS}{dt}$ n'est pas inversible.

[003812]

Exercice 4019 Chimie P 1996

Déterminer a, b, c, réels non nuls pour que la matrice $M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{c} & \frac{a}{b} \\ \frac{c}{a} & -\frac{1}{2} & \frac{c}{a} \\ \frac{b}{a} & \frac{a}{c} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une isométrie.

Correction ▼ [003813]

Exercice 4020 Noyaux de A et ${}^tA$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\operatorname{tr}({}^tXAX) \geqslant 0$. Comparer les noyaux de A et ${}^tA$.

Correction ▼ [003814]

Exercice 4021 Matrice orthogonale ?

1. Peut-on définir sur $\mathbb{R}^2$ une structure euclidienne telle que l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ soit une rotation ?
2. Généraliser à une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque.
3. Généraliser à une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Correction ▼ [003815]

Exercice 4022 Valeurs propres d'une matrice complexe

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \operatorname{spec}(M)$. Montrer que $\operatorname{Re}(\lambda)$ est compris entre la plus grande et la plus petite valeur propre de $\frac{1}{2}(M + M^*)$. [003816]

Exercice 4023 Centrale MP 2001

1. Montrer que toute matrice symétrique réelle positive a ses coefficients diagonaux positifs. Montrer que si l'un des coefficients diagonaux u_{ii} est nul, alors pour tout j on a $u_{ij} = 0$.
2. U est une matrice symétrique réelle positive de la forme $U = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & B \end{pmatrix}$ avec A et B carrées. Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Correction ▼ [003817]

Exercice 4024 Centrale MP 2001

1. Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ montrer l'existence de deux matrices orthogonales U et V telles que ${}^tUMV$ soit diagonale.
2. Même question pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer U et V pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003818]

Exercice 4025 X MP* 2001

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

1. Montrer que n est pair.
2. Montrer que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$.
3. On suppose $A \in \mathscr{O}(n)$. Montrer que A est semblable à la matrice A' précédente avec une matrice de passage orthogonale.

Correction ▼ [003819]

Exercice 4026 X MP* 2001

Soient A et B deux matrices hermitiennes et $C = A+B$. On note $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ les valeurs propres de la première, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ celles de la deuxième, $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots \geqslant c_n$ celles de la troisième. Montrez que pour tout i on a $c_i \geqslant a_i + b_n$. *Indication :* se ramener au cas $b_n = 0$.

Correction ▼ [003820]

Exercice 4027 Centrale MP 2002

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients réels, $S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices positives, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices définies positives et $\phi \in \mathscr{L}(S_n(\mathbb{R}))$. On suppose que $\phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall\, M \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists\, A \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall\, \lambda > A,\ M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\phi \in GL(S_n(\mathbb{R}))$ et que $\phi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $n = 2$ et $\phi(I_2) = I_2$. Montrer que : $\forall\, M \in S_2(\mathbb{R}),\ \chi_{\phi(M)} = \chi_M$. Montrer que $\det(\varphi(M)) = \det(M)$ (i.e. ϕ conserve le déterminant).

Correction ▼ [003821]

Exercice 4028 Mines MP 2002

Déterminer $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } M({}^tMM)^2 = I_n\}$.

Correction ▼ [003822]

Exercice 4029 **

$E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $\mathscr{B}$. Etudier les endomorphismes de matrice A dans $\mathscr{B}$ suivants :

$$1)\ A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2/\ A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3/\ A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Correction ▼ [005489]

Exercice 4030 ***

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec a, b et c réels. Montrer que M est la matrice dans la base canonique orthonormée directe de R^3 d'une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + k = 0$ où $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$. En posant $k = \frac{4\sin^2\varphi}{27}$, déterminer explicitement les matrices M correspondantes ainsi que les axes et les angles des rotations qu'elles représentent.

Correction ▼ [005490]

Exercice 4031 *** I Matrices et déterminants de GRAM

Soit E un espace préhilbertien réel.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1,\ldots,x_n) = (x_i|x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de GRAM) puis $\gamma(x_1,\ldots,x_n) = \det(G(x_1,\ldots,x_n))$ (déterminant de GRAM).

1. Montrer que $\text{rg}(G(x_1,\ldots,x_n)) = \text{rg}(x_1,\ldots,x_n)$.
2. Montrer que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1,\ldots,x_n) = 0$ et que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1,\ldots,x_n) > 0$.

3. On suppose que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre dans E. On pose $F=\text{Vect}(x_1,\dots,x_n)$. Pour $x\in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x,F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|^2$). Montrer que $d(x,F)=\sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,\dots,x_n)}{\gamma(x_1,\dots,x_n)}}$.

Correction ▼ [005780]

Exercice 4032 *** I

Montrer que la matrice de HILBERT $H_n=\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est définie positive.

Correction ▼ [005786]

Exercice 4033 *** I

1. Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S={}^tAA$. Montrer que $S\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S={}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?
3. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4. Montrer que $\text{rg}(A)=\text{rg}(S)$.
5. (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive.
   Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2=S$.

Correction ▼ [005787]

Exercice 4034 ***

Soit A une matrice orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

Correction ▼ [005791]

Exercice 4035 ***

Soit A une matrice carrée réelle symétrique positive de format n. Montrer que $1+\sqrt[n]{\det(A)}\leqslant\sqrt[n]{\det(I_n+A)}$.

Correction ▼ [005794]

Exercice 4036 **

Déterminer $\text{card}(O_n(\mathbb{R})\cap\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))$.

Correction ▼ [005795]

Exercice 4037 **

Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont orthogonalement semblables.

Correction ▼ [005798]

Exercice 4038 *** I

Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

Correction ▼ [005799]

Exercice 4039 *** I

Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det A+\det B\leqslant\det(A+B)$.

Correction ▼ [005800]

Exercice 4040 **

La matrice $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie ?

Correction ▼ [005804]

Exercice 4041 ***

$O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ? $O_n(\mathbb{R})$ contient-il trois points alignés ?

Correction ▼ [005805]

Exercice 4042 ** I

Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inversible T telle que $A = {}^tTT$.

Correction ▼ [005813]

Exercice 4043 *** I

Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer que le déterminant de A est inférieur ou égal au produit de ses coefficients diagonaux (utiliser l'exercice 4042).

Correction ▼ [005814]

144 204.99 Autre

Exercice 4044 **I

Soit a un vecteur non nul de l'espce euclidien $\mathbb{R}^3$. On définit f de $\mathbb{R}^3$ dans lui même par : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Montrer que f est linéaire puis déterminer les vecteurs non nuls colinéaires à leur image par f.

Correction ▼ [005487]

Exercice 4045 ***I Inégalité de HADAMARD

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, espace euclidien de dimension n. Montrer que : $\forall (x_1,...,x_n) \in E^n$, $|\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)| \leqslant ||x_1||...||x_n||$ en précisant les cas d'égalité.

Correction ▼ [005492]

Exercice 4046 ***

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = 1$. Montrer que $\sup\{|P(x)|,\ |x| \leqslant 1\} \leqslant 2$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005497]

Exercice 4047 **IT

Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$, euclidien orienté, dont l'axe est orienté par k unitaire et dont une mesure de l'angle est θ. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(k \wedge x) + 2(x.k)\sin^2(\frac{\theta}{2})k$. Application : écrire la matrice dans la base canonique (orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$) de la rotation autour de $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Correction ▼ [005498]

Exercice 4048 **

Soit f continue strictement positive sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t)\,dt$. Montrer que la suite $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

Correction ▼ [005499]

Exercice 4049

Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-linéaire.

1. Montrer qu'il existe deux complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar{z}$.
2. Calculer $\mathrm{Tr}(f)$ et $\det(f)$ en fonction de a et b.
3. C.N.S. pour que f soit autoadjoint dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Correction ▼ [005796]

Exercice 4050 *** I

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Correction ▼ [005802]

145 205.01 Arithmétique de Z

Exercice 4051

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\forall n \geqslant 3 \quad \pi(2n+1) \geqslant \ln 2 \times \frac{2n+1}{\ln(2n+1)}$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.

a) Calculer $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ pour p et q entiers naturels.

b) Soit D_n le ppmc de $n+1,\ n+2, \dots,\ 2n+1$. A l'aide de $I_{n,n}$, établir l'inégalité $D_n \geqslant \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

c) Montrer que $D_n \leqslant (2n+1)^{\pi(2n+1)}$ et en déduire la minoration de $\pi(2n+1)$ annoncée au début de l'exercice.

Correction ▼ [002658]

Exercice 4052 **

Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

Correction ▼ [005291]

Exercice 4053 ***T

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $6|5n^3 + n$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $7|4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$.

Correction ▼ [005292]

Exercice 4054 ***IT

Un entier de la forme $8n+7$ ne peut pas être la somme de trois carrés parfaits.

Correction ▼ [005293]

Exercice 4055 **IT

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $a_n \wedge b_n = 1$.

Correction ▼ [005294]

Exercice 4056 ****

Montrer que, pour tout entier naturel n, 2^{n+1} divise $E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$.

Correction ▼ [005295]

Exercice 4057 ***IT

Soient A la somme des chiffres de 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A. Trouver la somme des chiffres de B. (Commencer par majorer la somme des chiffres de $n = a_0 + 10a_1 \ldots + 10^p a_p$.)

Correction ▼ [005296]

Exercice 4058 **

Montrer que si p est premier et $8p^2 + 1$ est premier alors $8p^2 - 1$ est premier.

Correction ▼ [005297]

Exercice 4059 **I

1. Montrer que $\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $[k \wedge n = 1 \Rightarrow n | C_n^k]$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1) | C_{2n}^n$.

Correction ▼ [005298]

Exercice 4060 **T

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ les équations ou systèmes d'équations suivants :

$$1)\ \left\{\begin{array}{l} x+y=56 \\ x\vee y=105 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{l} x\wedge y=x-y \\ x\vee y=72 \end{array}\right. \qquad 3)\ x\vee y - x\wedge y = 243.$$

Correction ▼ [005299]

Exercice 4061 ***

Montrer que la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

Correction ▼ [005300]

Exercice 4062 ***IT

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (nombres de FERMAT). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Correction ▼ [005301]

Exercice 4063 ***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de FIBONACCI).

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \wedge u_{n+1} = 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $u_{m+n} = u_m u_{n+1} + u_{m-1} u_n$ et en déduire que $u_m \wedge u_n = u_{m\wedge n}$ pour m et n non nuls.

Correction ▼ [005302]

Exercice 4064 ***I

On veut résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ (de tels triplets d'entiers relatifs sont appelés triplets pythagoriciens, comme par exemple $(3,4,5)$).

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $x \wedge y \wedge z = 1$. Montrer alors que dans ce cas, x, y et z sont de plus deux à deux premiers entre eux.
2. On suppose que x, y et z sont deux à deux premiers entre eux. Montrer que deux des trois nombres x, y et z sont impairs le troisième étant pair puis que z est impair.
   On suppose dorénavant que x et z sont impairs et y est pair. On pose $y = 2y'$, $X = \frac{z+x}{2}$ et $Z = \frac{z-x}{2}$.

3. Montrer que $X \wedge Z = 1$ et que X et Z sont des carrés parfaits.
4. En déduire que l'ensemble des triplets pythagoriciens est l'ensemble des triplets de la forme

$$(d(u^2-v^2),\ 2duv,\ d(u^2+v^2))$$

où $d \in \mathbb{N}$, $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, à une permutation près des deux premières composantes.

Correction ▼ [005303]

Exercice 4065 **

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $3x^3 + xy + 4y^3 = 349$.

Correction ▼ [005304]

Exercice 4066 ***

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation d'inconnue (x,y) : $\sum_{k=1}^{x} k! = y^2$.

Correction ▼ [005305]

Exercice 4067 ***

Montrer que $n = 4...48...89$ (p chiffres 4 et $p-1$ chiffres 8 et donc $2p$ chiffres) (en base 10) est un carré parfait.

Correction ▼ [005306]

Exercice 4068 ***I

Montrer que tout nombre impair non divisible par 5 admet un multiple qui ne s'écrit (en base 10) qu'avec des 1 (par exemple, $37.1 = 37$, $37.2 = 74$, $37.3 = 111$).

Correction ▼ [005307]

Exercice 4069 ***

Soit $u_n = 10...01_2$.(n chiffres égaux à 0). Déterminer l'écriture binaire de :

1. u_n^2,
2. u_n^3,
3. $u_n^3 - u_n^2 + u_n$.

Correction ▼ [005308]

Exercice 4070 **I

1. Déterminer en fonction de n entier non nul, le nombre de chiffres de n en base 10.
2. Soit $\sigma(n)$ la somme des chiffres de n en base 10.
   (a) Montrer que la suite $\left(\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}\right)_{n \geqslant 1}$ est bornée. Cette suite converge-t-elle ?
   (b) Montrer que pour tout naturel non nul n, $1 \leqslant \sigma(n) \leqslant 9(1+\log n)$.
   (c) Montrer que la suite $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n \geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

Correction ▼ [005309]

Exercice 4071 ***I

1. (Formule de LEGENDRE) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un nombre premier. Etablir que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est

$$E(\frac{n}{p}) + E(\frac{n}{p^2}) + E(\frac{n}{p^3}) + \dots$$

2. Par combien de 0 se termine l'écriture en base 10 de $1000!$?

Correction ▼ [005310]

Exercice 4072 ***I Petit théorème de FERMAT

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p divise C_p^k.
2. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$ (par récurrence sur a).

Correction ▼ [005311]

Exercice 4073 ***I Théorème de WILSON

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que : $(p-1)! \equiv -1\ (p) \Rightarrow p$ est premier (en fait les deux phrases sont équivalentes mais en Sup, on sait trop peu de choses en arithmétique pour pouvoir fournir une démonstration raisonnablement courte de la réciproque).

Correction ▼ [005312]

146 205.02 Anneau Z/nZ, théorème chinois

Exercice 4074

Donner la liste des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. [001393]

Exercice 4075

Soit le groupe G (additif) $\mathbb{Z}/40\mathbb{Z}$.

1. Soit H le sous-groupe de G engendré par $\overline{12}$ et $\overline{20}$. Montrer que H est le sous-groupe de G engendré par $\overline{4}$ et trouver son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G. Combien en compte-t-on ?
3. Déterminer l'ordre de $\overline{15}$.

[001394]

Exercice 4076

1. Montrer qu'il n'existe aucun élément d'ordre 3 dans le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. En déduire les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

[001395]

Exercice 4077

Soit f un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

1. Montrer que f est caractérisé par $f(\overline{1})$.
2. Déterminer les ordres possibles de $f(\overline{1})$.
3. En déduire la liste des morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

[001396]

Exercice 4078

Soit G le groupe-produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

1. Donner la liste des éléments de G et déterminer l'ordre de chacun d'entre eux. G est-il cyclique ?
2. Donner la liste des sous-groupes de G et en constuire le treillis.

[001397]

Exercice 4079

1. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ définie par $f(n) = (\overline{n}, \widetilde{n})$.
   (a) Montrer que f est un morphisme de groupes.
   (b) Déterminer le noyau de f.
2. En déduire que les groupes $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

[001398]

Exercice 4080

Les groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sont-ils isomorphes ? [001399]

Exercice 4081

On note R_n la rotation du plan de centre O, d'angle $2\pi/n$, S la symétrie par rapport à l'axe (Ox).

1. Montrer que $S^2 = id$, $(R_n)^n = id$ et $R_nS = SR_n^{-1}$.
2. Montrer que le sous-groupe des isométries du plan engendré par R_n et S (ie le plus petit sous-groupe des isométries du plan qui contient R_n et S) est de cardinal $2n$. On le note D_n : c'est le groupe dihédral d'ordre $2n$.
3. Montrer que D_n préserve un polygone régulier à n côtés, centré en O.
4. En vous aidant de ce qui précède, construire un isomorphisme entre D_3 et S_3.

[001400]

Exercice 4082

Soit $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ l'ensemble des quaternions. $\mathbb{H}^*$ désigne $\mathbb{H}$ privé de la matrice nulle. On note $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{H}^*$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{1}$, $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$, $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{kj} == \mathbf{i}$, $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$.
3. En déduire que le sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ engendré par $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ est d'ordre 8. On le note H_8.
4. Ecrire la table de H_8.
5. Vérifier que les groupes (tous de cardinal 8) H_8, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et D_4 sont 2 à 2 non isomorphes.

[001401]

Exercice 4083 Équations linéaires

Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$:

1. $$\begin{cases} \dot{3}x + \dot{7}y = \dot{3} \\ \dot{6}x - \dot{7}y = \dot{0}. \end{cases}$$
2. $x^2 - \dot{\overline{31}}x + \dot{\overline{18}} = \dot{0}$.

Indication ▼ Correction ▼ [003151]

Exercice 4084 Équation algébrique

1. Dresser la liste des cubes dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. Soient $x,y,z \in \mathbb{Z}$ tels que $5x^3+11y^3+13z^3=0$. Montrer que 13 divise x,y,z.
3. L'équation : $5x^3+11y^3+13z^3=0$ a-t-elle des solutions entières ?

Correction ▼ [003152]

Exercice 4085 Ordre d'un entier modulo n

1. Soient $n,p \geqslant 2$. Montrer que : $n \wedge p = 1 \iff \exists\, k>0$ tel que $n^k \equiv 1 (\bmod p)$.
2. Soit n un entier impair non divisible par 5. Montrer qu'il existe un multiple de n qui s'écrit $1\dots1$ en base 10.

[003153]

Exercice 4086 Théorème chinois

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge p = 1$. Pour $x \in \mathbb{Z}$ on note $\overline{x}^n$, $\overline{x}^p$ et $\overline{x}^{np}$ les classes d'équivalence de x modulo n, p et np.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{Z}/\big(np\mathbb{Z}\big) \to \big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big)\times\big(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big), \overline{x}^{np} \mapsto (\overline{x}^n, \overline{x}^p)$ est un morphisme d'anneaux.
2. En déduire que $\varphi(np)=\varphi(n)\varphi(p)$ (φ = fonction d'Euler).
3. Vérifier que l'hypothèse $n \wedge p = 1$ est nécéssaire.

[003154]

Exercice 4087 Théorème de Wilson

Soit $n \geqslant 2$. Montrer que n est premier si et seulement si $(n-1)! \equiv -1 (\bmod n)$.

Correction ▼ [003155]

Exercice 4088 $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$

1. Montrer que pour tout entier a impair et tout $n \geqslant 3$: $a^{2^{n-2}} \equiv 1 (\bmod 2^n)$.
2. Le groupe $\big(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\big)^*$ est-il cyclique ?

[003156]

Exercice 4089 Équation algébrique

1. Démontrer que f est une permutation de E.
2. Chercher l'ordre de f pour $\circ$.
3. En déduire que le nombre de points fixes de f est congru à $\operatorname{Card} E$ modulo 3.
4. Démontrer que ce nombre est inférieur ou égal à 2.
5. Combien l'équation $x^2-x+\dot{1}=\dot{0}$ a-t-elle de racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en fonction de p ?
6. Pour $p=37$, résoudre l'équation.

Correction ▼ [003157]

Exercice 4090 Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\dot{k}$ est un carré dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $k^{(p+1)/2} \equiv k (\bmod p)$. [003158]

Exercice 4091 Test de primalité de Rabin-Miller

Soit n un entier premier impair supérieur ou égal à 3 : $n = q2^p + 1$ avec p impair et soit $a \in \mathbb{Z}$ premier à n. On considère la suite $(b_0, b_1, \dots, b_p)$ d'entiers compris entre 0 et $n-1$ définie par :

$$b_0 \equiv a^q (\operatorname{mod} n), \quad b_1 \equiv b_0^2 (\operatorname{mod} n), \quad \dots, \quad b_p \equiv b_{p-1}^2 (\operatorname{mod} n).$$

1. Montrer que $b_p = 1$.
2. Si $b_0 \neq 1$ montrer qu'il existe un indice i tel que $b_i = n-1$.

[003159]

Exercice 4092 Coefficients du binôme

Soit p un nombre premier. Montrer que $\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k \equiv 2^p + 1 (\operatorname{mod} p^2)$.

Correction ▼ [003160]

Exercice 4093 Suite récurrente (Mines MP 2003)

On considère la suite (x_n) à valeurs dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ telle que pour tout n on ait $x_{n+3} = 4(x_{n+2} + x_{n+1} + x_n)$. Déterminer les différents comportements possibles de (x_n).

Correction ▼ [003161]

Exercice 4094 -3 est-il un carré ?

Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer qu'une équation du second degré : $x^2 + ax + b = \dot{0}$ admet une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si son discriminant : $a^2 - 4b$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $p \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$: $p = 3q + 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tel que $a^q \neq \dot{1}$.
   (b) En déduire que $-\dot{3}$ est un carré.
3. Réciproquement, on suppose que $-\dot{3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que $p \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$.

Correction ▼ [003162]

Exercice 4095 Indicateur d'Euler

Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $\varphi(n)$ est pair et que $\sum_{x \wedge n = 1, 1 \leqslant x \leqslant n} x = \frac{n\varphi(n)}{2}$.

Correction ▼ [003163]

---

147 205.03 Groupe fini commutatif

148 205.04 Arithmétique de K[X]

149 205.05 Corps fini

150 205.06 Applications

151 205.99 Autre

152 220.01 Convergence normale

153 220.02 Critères de Cauchy et d'Alembert

154 220.03 Rayon de convergence

Exercice 4096 Vrai ou faux ?

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors sa somme admet une limite infinie en $(-R)^+$ ou en R^-.
5. Si $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini et si les a_n sont strictement positifs, alors pour tout entier p, $\frac{f(x)}{x^p} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

[004564]

Exercice 4097 Calculs de rayons

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

1. $a_n \to \ell \neq 0$ lorsque $n \to \infty$
2. (a_n) est périodique non nulle.
3. $a_n = \sum_{d|n} d^2$.
4. $a_n = \frac{n^n}{n!}$.
5. $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$,
   $0 < a < b$.
6. $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
7. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.
8. $a_n = e^{\sqrt{n}}$.
9. $a_n = \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{n!}$.
10. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$.
11. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$.
12. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$,
    $a_0 = a_1 = 1$.
13. $a_n = C_{kn}^n$.
14. $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$.
15. $a_n = \int_{t=0}^{1} (1+t^2)^n \, dt$.
16. $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$.
17. $a_n = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

Correction ▼ [004565]

Exercice 4098 Centrale P' 1996

Comment peut-on trouver le rayon de convergence d'une série entière dont la suite des coefficients admet une infinité de zéros ? [004566]

Exercice 4099 Mines MP 2003

Quel est le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{k=0}^{\infty} \cos^k\left(\frac{2k\pi}{5} + \alpha\right) x^k$ où $\alpha \in \mathbb{R}$?

Correction ▼ [004567]

Exercice 4100 Ensi MP 2003

Rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}}$ et étude pour $x = \pm R$.

Correction ▼ [004568]

Exercice 4101 Centrale MP 2003

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_n = \frac{\cos(n\pi/3)}{n^{1/3}}$, $b_n = \sin(a_n)$.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.
2. Déterminer la nature de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ en fonction de x.

Correction ▼ [004569]

Exercice 4102 Transformation de rayons

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries :

1. $\sum a_n^2 z^n$.
2. $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.
3. $\sum \frac{n! a_n}{n^n} z^n$.

Correction ▼ [004570]

Exercice 4103 Séries paire et impaire

On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergence R et R'. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Correction ▼ [004571]

Exercice 4104 Division par $z - \rho$

Soit $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et $\rho > 0$.
On définit la série entière $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de sorte que $(z-\rho)b(z) = a(z)$ en cas de convergence de $b(z)$.

1. Prouver l'existence et l'unicité des coefficients b_n.
2. Quel est le rayon de convergence de $b(z)$?

Correction ▼ [004572]

Exercice 4105 Développer peut être dangereux

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^{4^n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.
2. On développe $u_n(x)$ par la formule du binôme : $u_n(x) = \sum_{4^n \leqslant k \leqslant 2.4^n} a_k x^k$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geqslant 1} a_k x^k$ est égal à 1 (en convenant que les a_k non définis valent zéro).

Correction ▼ [004573]

Exercice 4106 **

Déterminer le rayon de convergence de la série entière proposée dans chacun des cas suivants :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^n z^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n})^n z^n$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\ln(n!))^2 z^n$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} z^n$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{n^n} z^n$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n!))^a}{n!^b} z^n$

7. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+b^n} z^n$, $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

Correction ▼ [005745]

155 220.04 Propriétés de la somme d'une série entière

156 220.05 Calcul de la somme d'une série entière

Exercice 4107 Sommation de séries entières

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2-1}$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n-1}$, $x \geqslant 0$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n+1} x^n$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \operatorname{ch}(na)$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin^2(n\theta)}{2^n}$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+1} x^n$.
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^{2n}$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{n!}$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^{n+1} x^n$.
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t=1}^{x} \ln^n t\, dt$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

Correction ▼ [004581]

Exercice 4108 Suite récurrente linéaire

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases}$

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

Correction ▼ [004582]

Exercice 4109 Série matricielle, Centrale MP 2000

1. Montrer l'existence de $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} kA^k$ converge si et seulement si les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.
3. La somme $S = \sum_{k=1}^{\infty} kA^k$ est-elle inversible ?

Correction ▼ [004583]

Exercice 4110 Série des traces (Centrale MP 2003)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et admet trois valeurs propres réelles dont on précisera les parties entières.
2. On pose $t_n = \operatorname{tr}(A^n)$. Exprimer t_n en fonction de $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ et calculer sa somme.

Correction ▼ [004584]

Exercice 4111 Centrale MP 2000

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Correction ▼ [004585]

Exercice 4112 $\sum P(n)x^n$, Ensi P 91

Rayon et somme de $\sum P(n)x^n$ où P est un polynôme de degré p.

Correction ▼ [004586]

Exercice 4113 $\sum e^{in\theta}/2^n$, Ensi P 91

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n2^n}$.

Correction ▼ [004587]

Exercice 4114 Ensae MP* 2000

Soit (u_n) définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!} = 1$. Trouver la limite de (u_n).

Correction ▼ [004588]

Exercice 4115

Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

1) (**) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$ **2) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n$ **3) (** I)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ **4) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$
5) (*) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ **6) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n$ **7) (** I)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$ **7)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^n$
9) (I)** $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$ **10) (*)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}$ **11) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1) 2^{n+1} x^n$ **12) (**)** $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
13) (***) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
14) (**) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où a_n est le nombre de couples (x,y) d'entiers naturels tels que $x + 5y = n$.

Correction ▼ [005746]

Exercice 4116 ***

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$ pour x dans $]-1,1[$.

Correction ▼ [005752]

Exercice 4117 *** I

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$ pour x dans $]-1,1[$ et en déduire les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Correction ▼ [005753]

Exercice 4118 ****

Pour n entier naturel, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}$. Convergence et somme de la série (numérique) de terme général u_n.

Correction ▼ [005754]

Exercice 4119 **

On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ puis pour tout entier naturel n, $\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{array}\right.$. Rayons et sommes de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$.

Correction ▼ [005757]

Exercice 4120 *** I

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nC_{2n}^n}x^n$.

Correction ▼ [005758]

Exercice 4121 ***

Soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction ▼ [005763]

157 220.06 Développement en série entière

Exercice 4122 Développements en série entière

Développer en série entière les fonctions suivantes :

1. $\ln(1+x+x^2)$.
2. $(x-1)\ln(x^2-5x+6)$.
3. $x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
4. $\frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$.
5. $\frac{1}{1+x-2x^3}$.
6. $\frac{1-x}{(1+2x-x^2)^2}$.
7. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
8. $\arctan(x+1)$.
9. $\arctan(x+\sqrt{3})$.
10. $\int_{t=0}^{x}\frac{\ln(t^2-5t/2+1)}{t}\,dt$.
11. $\left(\frac{(1+x)\sin x}{x}\right)^2$.
12. $\int_{t=x}^{2x}e^{-t^2}\,dt$.
13. $e^{-2x^2}\int_{t=0}^{x}e^{2t^2}\,dt$.
14. $\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.
15. $\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right)$.

Correction ▼ [004574]

Exercice 4123 Ensi PC 1999

Développer en série entière : $\ln(\sqrt{1-2x\operatorname{ch}a+x^2})$.

Correction ▼ [004575]

Exercice 4124 $e^{x^2}/(1-x)$

Développer en série entière $\frac{e^x}{1-x}$ puis $\frac{e^{x^2}}{1-x}$.

Correction ▼ [004576]

Exercice 4125 Mines-Ponts MP 2004

Développer en série entière $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

Correction ▼ [004577]

Exercice 4126 DSE d'une fraction rationnelle par récurrence linéaire

Développer $f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ en série entière en utilisant la relation : $(1-x-x^2)f(x)=x$.

Correction ▼ [004578]

Exercice 4127 Produit de polynômes

Quel est le coefficient de x^n dans $\Big(1+x+\cdots+x^n\Big)\Big(1+2x+\cdots+(n+1)x^n\Big)\Big(1+4x+\cdots+(n+1)^2x^n\Big)$?

Correction ▼ [004579]

Exercice 4128 Développement en série entière de $\zeta(1+x)-1/x$

1. Vérifier que pour $x\in\,]0,+\infty[$ on a : $\zeta(1+x)-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n^{1+x}}-\frac{1}{x}\big(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\big)\Big)$.
2. Pour $p\in\mathbb{N}$ on pose $\gamma_p=\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{\ln^p(1)}{1}+\cdots+\frac{\ln^p(k)}{k}-\frac{\ln^{p+1}(k+1)}{p+1}\Big)$. Justifier l'existence de γ_p et montrer que $|\gamma_p|\leqslant(p/e)^p$.
3. Montrer alors que pour $x\in\,]0,1[$ on a : $\zeta(1+x)-\frac{1}{x}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\gamma_p}{p!}x^p$.

[004580]

Exercice 4129 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^nx)$

Soit $q\in\,]-1,1[$ et $f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^nx)$.

1. Montrer que $f(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$ et que f est développable en série entière au voisinage de 0. On admettra que si une fonction g est DSE alors e^g l'est.
2. A l'aide de la relation : $f(x)=(1-qx)f(qx)$, calculer les coefficients du développement de f et le rayon de convergence.

Correction ▼ [004589]

Exercice 4130 Fonction non DSE

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n+n^2ix}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière autour de 0.

Correction ▼ [004590]

Exercice 4131 Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha} e^{inx}$. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$. Donner une CNS sur α pour que f soit développable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [004591]

Exercice 4132 Théorème de réalisation de Borel

Soit (a_n) une suite complexe donnée, on construit dans cet exercice une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tout entier n on ait $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant : $\forall\ x \in [-1,1]$, $\varphi(x) = 1$ et $\forall\ x \notin [-2,2]$, $\varphi(x) = 0$ (l'existence de φ fait l'objet de la question 2.). On pose $\varphi_n(x) = x^n\varphi(x)$, $M_n = \max(\|\varphi_n'\|_\infty, \dots, \|\varphi_n^{(n)}\|_\infty)$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varphi(\lambda_n x)$ où (λ_n) est une suite de réels strictement positifs, tendant vers $+\infty$ et telle que $\sum |a_n| M_n/\lambda_n$ converge.

1. Montrer que f est bien définie, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$.
2. Construction de φ : à l'aide de fonctions du type $x \mapsto \exp(-1/x)$ construire une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ nulle sur $[0,1] \cup [2,+\infty[$ et strictement positive sur $]1,2[$.

   Vérifier alors que $\varphi(x) = \int_{t=|x|}^{+\infty} \psi(t)\,dt \Big/ \int_{t=0}^{+\infty} \psi(t)\,dt$ convient.

Correction ▼ [004592]

Exercice 4133

Développer en série entière les fonctions suivantes :

1) (*) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$	**2) (*** I)** $\frac{1}{x^2-2tx+1}$, $t \in \mathbb{R}$	**3) (*)** $\ln(x^2-5x+6)$
4) (**) $\arctan\left(\frac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)$, $a \in]0,\pi[$	**5) (**)** $\frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-p)}$	**6) (*** I)** $(\arcsin x)^2$
7) (*) $\int_0^x \cos(t^2)\,dt$	**8) (*** I)** $\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{t^4+t^2+1}$	**9) (**)** $\cos x \operatorname{ch} x$.

Correction ▼ [005747]

Exercice 4134 * I

Pour x réel, on pose $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est ce classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005748]

Exercice 4135 ***

Pour x réel, on pose $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$. En développant F en série entière par deux méthodes différentes, montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

Correction ▼ [005756]

Exercice 4136 **** I Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \tan x$

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f(x) = \tan x$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $f^{(n)} = P_n \circ f$ et que les P_n sont à coefficients entiers naturels. (Utiliser $\tan' = 1 + \tan^2$).
2. En utilisant la formule de TAYLOR-LAPLACE, montrer que la série de TAYLOR à l'origine de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.
3. On note a_n les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. En déduire que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = g(x)$ et que $R = \frac{\pi}{2}$.
4. Calculer a_0, a_1, a_2,..., a_7.

5. Vérifier que la fonction $x \mapsto \operatorname{th} x$ est développable en série entière. Préciser le rayon et la valeur des coefficients en fonction des a_n.

Correction ▼ [005761]

Exercice 4137 ***

Développer en série entière $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\, dt$ et en déduire que pour tout réel x, $F(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2} \int_0^x e^{t^2/4}\, dt$.

Correction ▼ [005762]

158 220.07 Etude au bord

Exercice 4138 Étude sur le cercle de convergence

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence, R, de cette série.
2. Étudier la convergence de f pour $x = \pm R$.
3. Déterminer $\lim_{x \to R^-} f(x)$.

Correction ▼ [004593]

Exercice 4139 Coefficients équivalents $\Rightarrow$ séries équivalentes

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est 1 et que la série diverge pour $x = 1$.

1. Montrer que $A(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1^-$.
2. Soit (b_n) une suite telle que $b_n \sim a_n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Montrer que $B(x) \sim A(x)$ pour $x \to 1^-$.

Correction ▼ [004594]

Exercice 4140 Produit de Cauchy

Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). Montrer que si les trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent vers A,B,C, alors $C = AB$ (considérer les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$).

Correction ▼ [004595]

Exercice 4141 Produit de Cauchy

Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). On suppose que la série $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon $R > 0$ et que $b_n/b_{n+1} \to \lambda$ lorsque $n \to \infty$ avec $|\lambda| < R$. Montrer que $c_n/b_n \to A(\lambda)$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004596]

159 220.08 Equations différentielles

Exercice 4142 Équation différentielle

Montrer que l'équation $3xy' + (2-5x)y = x$ admet une solution développable en série entière autour de 0. Calculer $y(1)$ à 5.10^{-5} près.

Correction ▼ [004597]

Exercice 4143 DSE de tan

1. En utilisant la relation : $\tan' = 1+\tan^2$, exprimer $\tan^{(n)}$ en fonction de $\tan,\dots,\tan(n-1)$. En déduire que : $\forall x \in [0,\pi/2[$, $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.
2. Montrer que la série de Taylor de tan en 0 converge sur $]-\pi/2,\pi/2[$.
3. Soit f la somme de la série précédente. Montrer que $f' = 1+f^2$ et en déduire que $f = \tan$.
4. Prouver que le rayon de convergence est exactement $\pi/2$.

Correction ▼ [004598]

Exercice 4144 DSE de $(\arcsin x)^2$

On pose $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence.
2. Chercher une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f. En déduire les coefficients du développement en série entière de f.
3. Donner le développement en série entière de $\arcsin^2 x$.

Correction ▼ [004599]

Exercice 4145 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}$

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{C_{2n}^n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et montrer que f vérifie l'équation : $x(4-x)y' - (x+2)y = -2$.
2. Résoudre l'équation précédente pour $x > 0$ (utiliser le DL de f en 0 à l'ordre 1 pour fixer la constante) et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}$.

Correction ▼ [004600]

Exercice 4146 Calcul de somme

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^{2n+1}}{1.3.5\dots(2n+1)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence.
2. Étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.
3. Calculer $f(x)$.

Correction ▼ [004601]

Exercice 4147 Fonction génératrice du nombre de partitions

On note T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1. Montrer que $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$.
2. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!} = e^{e^x-1}$.

Correction ▼ [004602]

Exercice 4148 Suite récurrente

Soit (a_n) la suite réelle définie par : $a_0 = 1$, $2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k a_{n-k}$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence est non nul.
2. Calculer $f(x)$.
3. En déduire a_n en fonction de n.

Correction ▼ [004603]

Exercice 4149 Fonction ζ

Pour $|x| < 1$ on pose : $Z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n)x^n$.
Montrer que Z vérifie l'équation différentielle : $2xZ'(x) - 2Z^2(x) + Z(x) = 3x\zeta(2)$ (écrire $Z(x)$ comme somme d'une série double, intervertir les sommations, remplacer et ... simplifier).
En déduire la relation de récurrence : $\forall\, n \geqslant 2,\ (n+\frac{1}{2})\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{n-1} \zeta(2p)\zeta(2n-2p)$.

Correction ▼ [004604]

Exercice 4150 DSE de tan

On note $\zeta_i(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^n}$ et $Z_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_i(2n)x^n$. En s'inspirant de l'exercice 4149 montrer que Z_i vérifie l'équation différentielle : $2xZ_i'(x) - 2Z_i^2(x) - Z_i(x) = x\zeta_i(2)$.
Déterminer alors deux réels α et β tels que $T(x) = Z_i(x^2)/x$ soit égal à $\alpha \tan \beta x$ sur $]-1,1[$.

Correction ▼ [004605]

Exercice 4151 DSE de $\tan x$.

1. Pour $a,b \in \mathbb{R}$ avec $b \not\equiv 0 (\operatorname{mod} \pi)$, vérifier l'identité suivante : $\frac{(1+ia)-e^{ib}(1-ia)}{1-e^{ib}} = 1 - \frac{a}{\tan(b/2)}$.
2. Pour $a,b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'identité suivante : $a^n + b^n = \prod_{k=0}^{n-1}(a - be^{i(2k+1)\frac{\pi}{n}})$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'identité suivante : $\dfrac{\left(1+\frac{ix}{2p}\right)^{2p} + \left(1-\frac{ix}{2p}\right)^{2p}}{2} = \prod_{k=0}^{p-1}\left(1 - \frac{x^2}{4p^2\tan^2\frac{(2k+1)\pi}{4p}}\right)$.
4. Démontrer alors : $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \ln(\cos x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$.
5. En déduire : $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2-4x^2}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, vérifier l'identité suivante : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^n} = \frac{2^n-1}{2^n}\zeta(n)$.
7. Démontrer enfin : $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(4^n-1)}{\pi^{2n}}\zeta(2n)x^{2n-1}$.

[004606]

160 220.09 Intégrales

Exercice 4152 $\int_{t=0}^{1} t^t \, dt$

1. A l'aide d'un développement en série entière, montrer que $\int_{t=0}^{1} t^t \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.
2. Calculer la valeur commune des deux membres à 10^{-5} près.

Correction ▼ [004607]

Exercice 4153 $\int_{t=0}^{1} \ln(t)\ln(1-t)\, dt$

On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\int_{t=0}^{1} \ln(t)\ln(1-t)\, dt$.

Correction ▼ [004608]

Exercice 4154 Centrale PSI 1997

Établir la convergence puis calculer la valeur de $\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\, dt$.

Correction ▼ [004609]

Exercice 4155 $\int_{t=0}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

Montrer que pour $x \in]-1,1[$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_{t=0}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$. [004610]

Exercice 4156 Intégrale elliptique

Montrer que la longueur d'une ellipse de demi-axes a,b est : $L = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2p}\frac{C_{4p}^{2p}C_{2p}^{p}}{4^{3p}(1-4p)}$. [004611]

Exercice 4157 Norme L^2

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$. Montrer, pour $0 \leqslant r < R$: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta$.
[004612]

Exercice 4158 *** I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction ▼ [005751]

161 220.10 Analycité

Exercice 4159 Série à valeurs réelles

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$ telle que pour tout $z \in \mathring{D}(0,R)$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [004613]

Exercice 4160 Formules de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{C}$ analytique. On note $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de f en 0, R son rayon et d la distance de 0 à $\mathrm{fr}(U)$ ($d = +\infty$ si $U = \mathbb{C}$).

1. Montrer, pour $0 < r < \min(R,d)$ et $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\,d\theta$.
2. Montrer que l'application $r \mapsto \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta$ est analytique sur $[0,d[$ (minorer le rayon de convergence du DSE de f en $r_0e^{i\theta}$ et majorer en module les coefficients lorsque θ décrit $[0,2\pi]$ et r_0 est fixé dans $[0,d[$ à l'aide d'un recouvrement ouvert de $[0,2\pi]$). En déduire que l'égalité de la question 1. a lieu pour tout $r \in [0,d[$.
3. Pour $0 < r < d$ et $|z| < r$ on pose $g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z} re^{i\theta}\,d\theta$. Montrer que g est la somme d'une série entière de rayon supérieur ou égal à r et que g coïncide avec f sur $\mathring{D}(0,r)$.

   Applications :
4. $R \geqslant d$.
5. Si $U = \mathbb{C}$ et f est bornée alors f est constante (théorème de Liouville).
6. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annule pas alors P est constant (théorème de d'Alembert-Gauss).
7. Si (f_n) est une suite de fonctions analytiques convergeant uniformément sur U vers une fonction f alors f est analytique sur U (théorème de Weierstrass, comparer avec le cas réel).
8. La composée de deux fonctions analytiques est analytique.

Correction ▼ [004614]

Exercice 4161 Formule des résidus

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ayant pour racines $z_1,\dots,z_k$ de multiplicités $m_1,\dots,m_k$ et $r \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{|z_1|,\dots,|z_k|\}$.

Montrer : $\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})}re^{i\theta}\,d\theta=\sum_{|z_j|<r}m_j$. [004615]

Exercice 4162 Croissance de f en fonction des coefficients

Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence infini. Montrer l'équivalence entre les propriétés :
1 : Pour tout $a>0$, la fonction $z\mapsto f(z)e^{-a|z|}$ est bornée sur $\mathbb{C}$.
2 : $\sqrt[n]{n!\,|a_n|}\to 0$ lorsque $n\to\infty$.
On utilisera les formules de Cauchy (cf. exercice 4160).

Correction ▼ [004616]

Exercice 4163 Centrale MP 2000

Soit (a_n) une suite réelle avec $a_0=0$ et $a_1=1$. On note $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. On suppose que f est injective et que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On considère $\Omega^+=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}z>0\}$ et $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$.

1. Montrer que, pour tout $z\in D$, $f(z)\in\mathbb{R}$ si et seulement si $z\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(D\cap\Omega^+)\subset\Omega^+$.
3. Montrer que, pour tout $|r|<1$, $a_n=\frac{2}{\pi r^n}\int_{\theta=0}^{\pi}\operatorname{Im}(f(re^{i\theta}))\sin(n\theta)\,d\theta$.
4. Montrer que $|\sin(n\theta)|\leqslant n|\sin\theta|$. En déduire que $|a_n|\leqslant n$.

Correction ▼ [004617]

162 220.99 Autre

Exercice 4164 Anneau des séries entières

Soit A l'ensemble des suites (a_n) de complexes telles que la série entière $\sum a_nz^n$ a un rayon non nul. On munit A de l'addition terme à terme et du produit de Cauchy noté $*$.

1. Vérifier que A est un anneau intègre. Quels sont les éléments de A inversibles ?
2. Soit $I_k=\{a=(a_n)\in A$ tel que $a_0=\dots=a_k=0\}$. Montrer que les idéaux de A sont $\{0\}$, A et les I_k, $k\in\mathbb{N}$.
3. Soit $f(x)=2-\sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}$. Montrer que f est développable en série entière sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ et que si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ alors la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : $2u_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}u_ku_{n+1-k}$.
4. Soit $a=(a_n)\in A$ avec $a_0=1$ et $|a_n|\leqslant 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe une unique suite $b=(b_n)\in A$ telle que $b_0=1$ et $b*b=a$. Pour prouver que le rayon de convergence de b est non nul on établira par récurrence que $|b_n|\leqslant u_n$.
5. Pour $a\in A$ quelconque, étudier l'équation $b*b=a$ d'inconnue $b\in A$.

[004618]

Exercice 4165 Ulm MP* 2000

Soit $z_1,\dots,z_p\in\mathbb{C}$, $p_1,\dots,p_p\in\mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^{p}p_i=1$, et $\omega\in\mathbb{R}$. Pour $n>p$ on pose $z_n=e^{i\omega}\sum_{j=1}^{p}z_{n-j}p_j$. Étudier la suite (z_n).

Correction ▼ [004619]

Exercice 4166 X MP* 2001

Soit D le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 0 et rayon 1.

1. Soit $\varphi(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ une série entière de rayon $R\geqslant 1$ et $r\in\,]0,1[$. Montrer que
$$a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_{\theta=0}^{2\pi}\varphi(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.$$

2. Soit E l'ensemble des fonctions de $\overline{D}$ dans $\mathbb{C}$ continues et dont la restriction à D est somme d'une série entière. Montrer que $f \mapsto \|f\| = \sup\{|f(z)|,\ z \in \overline{D}\}$ définit une norme sur E et que pour cette norme E est complet.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients complexes est dense dans E.

Correction ▼ [004620]

Exercice 4167 Centrale MP 2002

1. Développer en série entière $f : z \mapsto z(1-z)^{-2}$. Montrer que f est injective sur $\mathring{D}(0,1)$.
2. Soit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins 1 à coefficients réels. On suppose f injective sur $\mathring{D}(0,1)$ et on veut prouver : $\forall\, n \geqslant 1, |a_n| \leqslant n$.
   (a) Montrer pour $|z| < 1$ que $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et en déduire : $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f(z)) \geqslant 0$.
   (b) Pour $0 < r < 1$ calculer $\int_{t=0}^{\pi} \mathrm{Im}(f(re^{it})) \sin nt\, dt$. En déduire $|a_n| r^n \leqslant n |a_1| r$ et conclure.

Correction ▼ [004621]

Exercice 4168 *** I

Soient $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $R > 0$ donné. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

Correction ▼ [005749]

Exercice 4169 **** Inverse d'une série entière

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et telle que $a_0 = 1$ (ou plus généralement $a_0 \neq 0$).

1. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.
2. Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon strictement positif.

Correction ▼ [005750]

Exercice 4170 ***

Soit A une matrice carrée complexe de format $p \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergence et somme en fonction de χ_A de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^n) z^n$.

Correction ▼ [005755]

Exercice 4171 *** I

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite réelle k. (En particulier $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ si $k = 0$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ si $k = 1$).On suppose de plus que la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence égal à 1 et que la série de terme général a_n diverge.

1. Montrer que $\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = k$.
2. **Applications.**
   (a) Equivalent simple quand x tend vers 1 de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$.
   (b) Déterminer $\lim_{x\to 1} (1-x)^p \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} x^n$ où p est un entier naturel non nul donné.

Correction ▼ [005759]

Exercice 4172

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$. Pour x réel on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.
On suppose que pour tout entier naturel p et tout réel positif x, $|f^{(p)}(x)| \leqslant 1$. Déterminer f.

Correction ▼ [005760]

Exercice 4173 *** I Dénombrement de parenthésages

1. Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne et a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléménts de E (($a_1 = 1$ conventionnellement), $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, ...). Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
2. Soit f la série entière associée à la suite (a_n). On suppose momentanément le rayon R de cette série strictement positif. Montrer que pour tout x de $]-R,R[$, $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$.
3. Calculer R et f.
4. En déduire a_n.

Correction ▼ [005764]

163 221.01 Calcul de coefficients

Exercice 4174

Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ si $|x| \leqslant \pi$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
4. Montrer que $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction ▼ [001951]

Exercice 4175

Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ si $|x| \leqslant \pi$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. Montrer que $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

[001952]

Exercice 4176

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : x f(x) = 2 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin tx}{(1+t^2)^2} dt$.
2. Montrer que f est de classe C^2 puis, en dérivant l'expression ci-dessus, que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f''(x) = f(x)$.
3. Donner une expression de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$.

[001955]

Exercice 4177 Développements

Calculer le développement des fonctions f 2π-périodiques telles que :

1. $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi[$.
2. $f(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi[$.
3. $f(x) = x^2$ sur $]0, 2\pi[$.
4. $f(x) = \max(0, \sin x)$.
5. $f(x) = |\sin x|^3$.

Correction ▼ [004622]

Exercice 4178 Chimie P' 1996

Établir la convergence puis calculer $\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\, dt$.
En déduire les coefficients de Fourier de $f : f(t) = \ln|\tan(t/2)|$.

Correction ▼ [004623]

Exercice 4179 Chimie P 1996

Développer en série de Fourier $f : t \mapsto \frac{1}{1-\cos\alpha\cos t}$ avec $0 < \alpha < \pi$. Indication : on pourra utiliser une relation de récurrence entre les coefficients à partir de $(1 - \cos\alpha\cos t)f(t) = 1$.

Correction ▼ [004624]

Exercice 4180 Mines MP 2002

Soit $a \in]-1, 1[$ et $g : x \mapsto \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$.

1. Prouver : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$.
2. Quel est le mode de convergence de la série ?
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Montrer que $h : x \mapsto \int_{t=0}^{2\pi} g(x-t)f(t)\, dt$ est somme d'une série trigonométrique uniformément convergente. Que peut-on déduire pour h ?
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux et 2π-périodiques telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \int_{t=0}^{2\pi} g(x-t)f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Correction ▼ [004625]

Exercice 4181 Usage d'une série entière

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que les coefficients de Fourier soient : $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $b_n = 0$?
2. Application : calculer $\int_{t=0}^{\pi} \frac{dt}{5-4\cos t}$.

Correction ▼ [004626]

Exercice 4182 $1/(\cos x + \operatorname{ch} a)$

Soit $a > 0$.

1. Développer en série entière : $f(x) = \frac{1}{x+e^a}$.
2. En déduire le développement en série de Fourier de $g(x) = \frac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a}$.

Correction ▼ [004627]

Exercice 4183 Décomposition en $\sin^2$

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}$. [004628]

Exercice 4184 DSF de $f * g$, Mines PSI 1998

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues 2π-périodiques. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} f(x-t)g(t)\, dt$.

1. Montrer que h est 2π-périodique, continue, et calculer les coefficients de Fourier exponentiels de h en fonction de ceux de f et de g.
2. Pour g fixée, déterminer les valeurs et vecteurs propres de $f \mapsto h$.

Correction ▼ [004629]

Exercice 4185 DSF d'une série

On pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2}$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer sa série de Fourier.

Correction ▼ [004630]

Exercice 4186 Calcul de séries

Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi[,\ f(x) = e^x$.

1. Chercher le développement en série de Fourier de f.
2. En déduire les sommes des séries : $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Correction ▼ [004631]

Exercice 4187 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$ (Centrale MP 2003)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique valant e^{ax} sur $]0, 2\pi]$.
   Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $I(a) = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} \sin(au)\, du$.
2. Exprimer $I(a)$ sous forme d'une série sans intégrale.
3. Calculer $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} \sin(au)\, du$.
4. Conclure.

Correction ▼ [004632]

Exercice 4188 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$ (Centrale MP 2000)

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$.
2. Calculer $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{a^2+n^2}$. En déduire $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
3. Que vaut $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{a^2+n^2}$?

Correction ▼ [004633]

Exercice 4189 Calcul de séries, Matexo

On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin \frac{x}{2}$ si $0 \leqslant x < 2\pi$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?
3. En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$.

Correction ▼ [004634]

Exercice 4190 $\sin(\pi a)/\pi a$

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. Développer en série de Fourier la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $f(x) = \cos(ax)$.
2. Soit $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)$. Justifier l'existence et la dérivabilité de g et la calculer.

Correction ▼ [004635]

Exercice 4191 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$

1. Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique telle que $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ pour $0\leqslant x<2\pi$.
2. Donner les développements en série de Fourier de $f(x+1)$ et $f(x-1)$.
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Correction ▼ [004636]

Exercice 4192 $f(x+\pi)$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f si l'on a :

1. $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x+\pi)=f(x)$?
2. $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x+\pi)=-f(x)$?

Correction ▼ [004637]

Exercice 4193 f est-elle π-périodique ?

Soit $f\in\mathscr{D}$. On note c_k les coefficients de Fourier exponentiels de f. Montrer que f est π-périodique si et seulement si c_k est nul pour tout k impair (noter que la série de Fourier de f peut ne pas converger vers f).
[004638]

Exercice 4194 DSF de f'

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On note a_k, b_k les coefficients de Fourier de f. Calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f. En déduire que $ka_k\to 0$ et $kb_k\to 0$ lorsque $k\to\infty$.

Correction ▼ [004639]

Exercice 4195 DSF de f'

Soit $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On considère la fonction g, 2π-périodique coïncidant avec f sur $[0,2\pi[$. Soient a_n,b_n les coefficients de Fourier de g.

1. Montrer que $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n=\frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Donner le développement en série de Fourier de g'.

Correction ▼ [004640]

Exercice 4196 DSF d'une primitive de f

Soit f continue 2π-périodique, $F(x)=\int_{t=0}^{x}f(t)\,dt$, a_n,b_n les coefficients de Fourier trigonométriques de f et $C=\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}(\pi-t)f(t)\,dt$. Montrer :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ F(x)=\frac{a_0x}{2}+C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}.$$

[004641]

Exercice 4197 Concavité, ENS

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue 2π-périodique paire dont la restriction à $[0,2\pi]$ est concave. Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient : $a_k\leqslant 0$ pour $k\geqslant 1$.

Correction ▼ [004642]

Exercice 4198

Développer en série de FOURIER les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :

1) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique paire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

2) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique impaire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

3) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.

4) (***) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \text{ch}(\lambda x)$ (λ réel strictement positif donné). En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2+n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$.

5) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sup(0, \sin x)$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$.

Correction ▼ [005782]

Exercice 4199 ***

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

1. (a) Développer en série trigonométrique la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos t}$ (utiliser la racine de plus petit module, notée b, de l'équation $z^2 - az + 1 = 0$).
   (b) La série obtenue est-elle la série de FOURIER de f ?
2. Déduire de 1) la valeur des intégrales $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos t}\, dt$, $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [005783]

Exercice 4200 *** I

(un développement en série de fonctions de $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ et $\text{cotan}(\pi z)$).

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique telles que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Développer la fonction f en série de FOURIER.
2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ et } \pi \text{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Correction ▼ [005784]

Exercice 4201 **

Développer en série de FOURIER la fonction $f : x \mapsto x - E(x) - \frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005785]

164 221.02 Convergence, théorème de Dirichlet

Exercice 4202 Phénomène de Gibbs pour $\sin kx/k$

Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$.

1. Calculer l'abscisse, x_n, du premier maximum positif de f_n.
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

Correction ▼ [004650]

Exercice 4203 Convergence uniforme

Soit $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ une série trigonométrique convergeant uniformément sur un intervalle $[\alpha,\beta]$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

Correction ▼ [004651]

Exercice 4204 Convergence uniforme

Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $na_n\to 0$ lorsque $n\to\infty$.
Pour le sens direct : utiliser le critère de convergence uniforme de Cauchy et l'inégalité : $\sin x\geqslant\frac{2x}{\pi}$ sur $[0,\pi/2]$.

Correction ▼ [004652]

Exercice 4205 Fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ paire, 2π-périodique, telle que, pour tout $x\in[0,\pi]$, $f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}\sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)$. Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,dt$, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos(nt)\,dt$.
   Pour $\nu\in\mathbb{N}$, on pose $a_{0,\nu}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\left((2\nu+1)\frac{t}{2}\right)dt$ et $a_{n,\nu}=\int_0^{\pi}\cos(nt)\sin\left((2\nu+1)\frac{t}{2}\right)dt$.
   Pour $q\in\mathbb{N}$, on note $s_{q,\nu}=\sum_{i=0}^{q}a_{i,\nu}$. Montrer que si ν est fixé, $s_{n,\nu}\to 0$ lorsque $n\to\infty$. Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$. En déduire que, pour tout q, pour tout ν, $s_{q,\nu}>0$, et prouver que $\max_{q\in\mathbb{N}}(s_{q,\nu})=s_{\nu,\nu}$.
3. Montrer qu'il existe $B>0$ tel que, pour tout $\nu\geqslant 1$, $s_{\nu,\nu}\geqslant B\ln\nu$.
4. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n=\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}a_{n,2^{p^3}-1}$.
5. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $T_n=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n}A_k$. Vérifier que $T_n=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}s_{n,2^{p^3}-1}$. Montrer qu'il existe $D>0$ tel que, pour tout $p\geqslant 1$, $T_{2^{p^3}-1}\geqslant Dp$, et constater que la série de Fourier de f diverge au point 0.

[004653]

Exercice 4206 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}R(n)e^{inx}$, $R=$ fraction rationnelle

Soit R une fraction rationnelle à coefficients complexes, de degré strictement négatif, n'ayant pas de pôle dans $\mathbb{Z}$. On pose $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R(n)e^{inx}$.

1. Étudier l'existence et la continuité de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [004654]

Exercice 4207 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{P(n)}$, $P=$ polynôme

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction f 2π-périodique telle que $f(x)=(\pi-x)^2$ sur $]0,2\pi[$.
2. Soit P un polynôme de degré 2 sans racines dans $\mathbb{N}^*$. On pose $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{P(n)}$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Correction ▼ [004655]

Exercice 4208 Noyau de Féjer

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique continue, f_n sa n-ème somme de Fourier et $g_n=\frac{f_0+\cdots+f_n}{n+1}$.

1. Exprimer g_n à l'aide d'un produit de convolution, $g_n=f*k_n$.
2. Montrer que la suite (k_n) constitue une suite d'approximations de la mesure de Dirac sur $]-\pi,\pi[$. Ceci montre que la moyenne des sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f *pour toute f continue.*

Correction ▼ [004656]

165 221.03 Formule de Parseval

Exercice 4209

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, C^2 et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ et, $\forall t \in [0, 2\pi], |f(t)| \geqslant |f''(t)|$.On note respectivement $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier (complexes) de f et f''.

1. Calculer c_0 puis calculer c''_n en fonction de c_n.
2. A l'aide du théorème de Parseval, en déduire que $c_n = 0$ pour $|n| \geqslant 2$.
3. Montrer qu'il existe $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$ tels que $f(t) = \rho\cos(t+\varphi)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

[001953]

Exercice 4210

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, C^1 et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. On note respectivement $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier (complexes) de f et f'.

1. Calculer c_0 puis donner une relation entre c_n et c'_n.
2. En déduire que que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.
3. Dans quel cas l'égalité a-t-elle lieu ?

[001954]

Exercice 4211 ENS MP 2002

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction impaire et 2-périodique.
2. En déduire l'existence de $c > 0$ indépendant de f tel que $\|f\|_\infty \leqslant c\|f''\|_2$.

Correction ▼ [004643]

Exercice 4212 Inégalité de Wirtinger

Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ et $f(0) = f(2\pi)$.
Montrer que $\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)\,dt \leqslant \int_{t=0}^{2\pi} f'^2(t)\,dt$ et déterminer les cas d'égalité.

Correction ▼ [004644]

Exercice 4213 Inégalité isopérimétrique

1. Soient f, g deux applications 2π-périodiques réelles de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que : $2\int_0^{2\pi} fg' \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2 + \int_0^{2\pi} g'^2$.
2. Soit Γ un arc $\mathscr{C}^1$, fermé, simple, de longueur 2π. Montrer que l'aire du domaine limité par Γ est inférieure ou égale à π.

Correction ▼ [004645]

Exercice 4214 $|f''| \leqslant |f|$

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodiques de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ et $|f''| \leqslant |f|$. [004646]

Exercice 4215 Calcul de $(f \mid g)$

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques, continues par morceaux. On note $c_n(f)$ et $c_n(g)$ les coefficients de Fourier exponentiels de f et g. Montrer que : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,dt$.

[004647]

Exercice 4216 Une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
2. Calculer $\lim_{a \to 0^+} \int_{t=a}^{\pi - a} f(t) \sin(pt)\, dt$ et en déduire que f n'a pas de développement en série de Fourier (et donc n'est pas continue en 0).

[004648]

Exercice 4217 X MP* 2001

Soit $a > 0$ et f continue sur $[0, a]$ à valeurs réelles. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\int_{t=0}^{a} f(t)\cos(xt)\, dt = 0$. Montrer que f est nulle.

Correction ▼ [004649]

166 221.99 Autre

Exercice 4218

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann périodique de période 2π. On désigne par : $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx$

sa série de Fourier et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$.
2. Etablir que $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{(x-t)}{2}} f(t)dt$.
3. En déduire $S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} d\theta$.
4. Calculer $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} d\theta$.

[001950]

Exercice 4219 Formule sommatoire de Poisson

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $a > 1$ tel que $f(x) = O(1/|x|^a)$ et $f'(x) = O(1/|x|^a)$ lorsque $|x| \to \infty$, et on pose $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$.
Montrer que F est bien définie, $\mathscr{C}^1$ et 2π-périodique. En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

[004657]

Exercice 4220 Formule d'échange

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que f, f', g, g' sont intégrables. Montrer :

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) g(t)\, dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \hat{g}(t)\, dt.$$

[004658]

Exercice 4221 $\int_{t=a}^{b} f(t)|\sin nt|\,dt$

1. Développer en série de Fourier la fonction : $x \mapsto |\sin x|$.
2. Application : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)|\sin nt|\,dt \to \frac{2}{\pi}\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004659]

Exercice 4222 Équation différentielle

Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Correction ▼ [004660]

Exercice 4223 Équation différentielle

Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + k^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Correction ▼ [004661]

Exercice 4224 Équirépartition modulo 1

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ 1-périodique, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.
   Montrer que $\frac{f(x)+f(x+\alpha)+\cdots+f(x+n\alpha)}{n+1} \to \int_{t=0}^{1} f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai en supposant seulement f continue.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$.

Correction ▼ [004662]

Exercice 4225 Cachan MP* 2000

Soit un réel $\beta > 1$ et $a_k = \iint_{[0,1]^2} e^{-|x-x'|^\beta} e^{2i\pi k(x-x')}\,dx\,dx'$. Trouver un équivalent quand n tend vers l'infini de $\sum_{|k|>n \text{ ou } |\ell|>n} a_k a_\ell$, k et ℓ étant des entiers relatifs.

Correction ▼ [004663]

Exercice 4226 Algèbre de séries trigonométriques

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme : $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nx}$ où $\sum |c_n|$ converge. On pose pour $f \in E$: $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$.

1. Justifier la définition de $\|f\|$ et montrer que E est un espace vectoriel normé complet.
2. Montrer que E est une $\mathbb{C}$-algèbre et que $\|fg\| \leqslant \|f\|\,\|g\|$.
3. Soit $\varphi : E \to \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbres.
   (a) On suppose φ continu, montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{U}$ tel que $\forall\, f \in E,\ \varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z_0^n$.
   (b) Vérifier que la formule précédente définit effectivement un morphisme continu de E dans $\mathbb{C}$.

Correction ▼ [004664]

Exercice 4227 Mines MP 2002

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_{t=0}^{1} \cos(nt^2)\,dt$.

Correction ▼ [004665]

Exercice 4228 Ens Lyon MP* 2003

On note : $E \ = \{\text{fonctions continues } 2\pi\text{-périodiques } f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$;

$E^1 = \{f \in E$ de classe $\mathscr{C}^1\}$;
$E_n = \{f \in E$ tel que $\forall\, k \in [[-n,n]],\ \int_{t=0}^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = 0\}$;
$E_n^1 = E_n \cap E^1$.
On considère sur E la norme $\|\ \|_2$ $\left(\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int |f|^2}\right)$.

1. Montrer que $D : E_0^1 \to E_0, f \mapsto f'$ est une bijection.
2. D est-elle continue ?
3. Montrer que D^{-1} est continue.
4. Montrer que $D^{-1}(E_n) = E_n^1$ et calculer $|||D^{-1}_{|E_n}|||$.

Correction ▼ [004666]

Exercice 4229 Quatre racines, ENS Cachan MP* 2005

Soit f à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^2$, 2π-périodique, de moyenne nulle. Montrer que $g = f + f''$ s'annule au moins quatre fois sur $[0, 2\pi[$.

Correction ▼ [004667]

Exercice 4230 **

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire telle que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

Correction ▼ [005781]

167 222.01 Convergence simple, uniforme, normale

Exercice 4231

A

1. Soient a et z deux réels. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur le segment d'extrémités a et z et ϕ un polynôme de degré n. Prouver que pour tout t compris dans l'intervalle $[0,1]$,

$$\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))$$

$$= -(z-a)\phi^{(n)}(t)f'(a+t(z-a)) + (-1)^n(z-a)^{n+1}\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))$$

2. (a) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est prolongeable par continuité en zéro, que son prolongement est indéfiniment dérivable et admet des développements limités en zéro de la forme :

$$1 - t/2 + \frac{b_1t^2}{2!} + \frac{b_2t^4}{4!} + \cdots + \frac{b_nt^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1}),$$

où les b_i sont des réels qu'on ne cherchera pas à déterminer.
Montrer que la dérivée $n^{ième}$ en zéro, notée $\phi_n(z)$, de la fonction $t \mapsto t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}$ est un polynôme en z de degré n et que

$$\phi_n(z) = z^n - \frac{1}{2}nz^{n-1} + C_n^2b_1z^{n-2} + C_n^4b_2z^{n-4} + \cdots + C_n^{2N}b_Nz^{n-2N}$$

où $N = E(\frac{n-1}{2})$, E désignant la fonction partie entière.

(b) Prouver que $nz^{n-1} = \phi_n(z+1) - \phi_n(z)$

3. Prouver que

$$\begin{array}{llll}(i) & \phi_n^{(n-k)}(1)=\phi_n^{(n-k)}(0)\ \ (2\leqslant k\leqslant n) & (ii) & \phi_n^{(n-2k-1)}(0)=0\ \ (1\leqslant k\leqslant N)\\ (iii) & \phi_n^{(n-2k)}(0)=\frac{n!b_k}{(2k)!}\ \ (1\leqslant k\leqslant N) & (iv) & \phi_n^{(n-1)}(0)=-\frac{1}{2}n!\\ (v) & \phi_n^{(n-1)}(1)=+\frac{1}{2}n! & (vi) & \phi_n^{(n)}=n!\end{array}$$

4. (a) On suppose f de classe C^{2n+1}. Prouver que

$$\begin{aligned}0 &= f(z)-f(a)-\frac{z-a}{2}\left[f'(z)+f'(a)\right]\\ &\quad+\sum_{m=1}^{n-1} b_m\frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\left[f^{(2m)}(z)-f^{(2m)}(a)\right]\\ &\quad-\frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t)f^{(2n+1)}\Big(a+(z-a)t\Big)dt\end{aligned}$$

(b) En déduire que si F est de classe C^{2n} sur $[a,a+r\omega]$ où $r\in\mathbb{N}$ et $\omega>0$, alors

$$\begin{aligned}\int_a^{a+r\omega} F(x)dx &= \omega\Big[\frac{1}{2}F(a)+F(a+\omega)+\cdots+F(a+(r-1)\omega)+\frac{1}{2}F(a+r\omega)\Big]\\ &\quad-\sum_{m=1}^{n-1} b_m\frac{\omega^{2m}}{(2m)!}\left[F^{(2m-1)}(a+r\omega)-F^{(2m-1)}(a)\right]+R_n\end{aligned}$$

où

$$R_n=\frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\phi_{2n}(t)\sum_{m=0}^{r-1}F^{(2n)}(a+m\omega+\omega t)dt\ .$$

B

1. Soit $u_k : x>0\mapsto \ln(x+k)-\ln(k)+x\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\qquad (k\in\mathbb{N}^*)$
Montrer que pour tout x strictement positif, la série $\sum_{k\geqslant 1}u_k(x)$ est convergente. On pose pour la suite $G(x)=\ln(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$
2. Prouver que G vérifie l'équation fonctionnelle
$$\forall x>0\quad G(x+1)=G(x)-\ln(x).$$
3. En déduire que $\forall m\in\mathbb{N}\quad \exp(-G(m+1))=m!$
4. Soit x et y deux réels strictement positifs. Montrer que la série
$$\sum_{k\geqslant 1}\left[\ln(y+k)-\ln(x+k)+(y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]$$
est convergente et que sa somme est $G(y)-G(x)-\ln y+\ln x$.
5. Prouver à l'aide de A que pour tous entiers strictement positifs n et p
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\ln(y+k)-\ln(x+k) &= \int_0^n f(t)dt+\frac{1}{2}\big(f(0)+f(n)\big)\\ &\quad+\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n)-f^{(2h-1)}(0)\big)+T_{p,n}(x,y)\end{aligned}$$
où $f:t\mapsto \ln(y+t)-\ln(x+t)$ et $T_{p,n}(x,y)$ est une expression que l'on précisera.
6. Prouver que $R_p(x,y)=\lim_{n\to+\infty}T_{p,n}(x,y)$ existe.
7. On pose $g(z)=z\ln z-z-\frac{1}{2}\ln z+\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)(2h-1)}\frac{1}{z^{2h-1}}$. Montrer que $G(y)+g(y)=G(x)+g(x)+R_p(x,y)$
8. Montrer que $R_p(x,y)=O\left(\frac{1}{\left[\inf(x,y)\right]^{2p-1}}\right)$ quand $\inf(x,y)\to+\infty$.
9. Prouver à l'aide de la formule de Stirling que $G(m)+g(m)\to\frac{1}{2}\ln 2\pi$ quand $m\to+\infty$.

10. Montrer que

$$G(y) = -y\ln y + y + \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \sum_{h=1}^{p-1} \frac{b_h}{(2h)(2h-1)} \frac{1}{y^{2h-1}} + O(\frac{1}{y^{2p-1}})$$

11. Donner un développement asymptotique de $\ln(m!)$ quand m tend vers $+\infty$ à un $O(\frac{1}{m^7})$ près.

Correction ▼ [002683]

Exercice 4232 Étude de convergence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0,1]$.

1. Trouver la limite simple des fonctions f_n.
2. Y a-t-il convergence uniforme ?

Correction ▼ [004503]

Exercice 4233 Étude de convergence

On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
2. En déduire qu'il en est de même pour la suite (g_n). (On utilisera la concavité de sin sur $[0,\pi]$)

[004504]

Exercice 4234 Non interversion limite-intégrale

Soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

1. Chercher la limite simple, f, des fonctions f_n.
2. Vérifier que $\int_{t=0}^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{\pi/2} f_n(t)\,dt$.

[004505]

Exercice 4235 Non interversion limite-intégrale

1. Déterminer la limite simple des fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'il y a convergence uniforme. (On admettra la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$)
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

Correction ▼ [004506]

Exercice 4236 Étude de convergence

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \begin{cases} x \leqslant n & (1-x/n)^n \\ x > n & 0. \end{cases}$

1. Déterminer la limite simple, f, des fonctions f_n.
2. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$.
3. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[0,a]$.
4. Démontrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Correction ▼ [004507]

Exercice 4237 Étude de convergence

Étudier la convergence simple, uniforme, de la suite de fonctions : $f_n : x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$.

Correction ▼ [004508]

Exercice 4238 Étude de convergence

Soit $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Étudier la convergence simple, puis uniforme des f_n sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[\alpha, +\infty[$, pour $\alpha > 0$.

[004509]

Exercice 4239 $f(nx)$, $f(x/n)$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Donner un exemple de fonction f.
2. Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle, et que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3. Si $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, chercher $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} g_n(t)\,dt$.

[004510]

Exercice 4240 Équation différentielle dépendant d'un paramètre

Soit y_n la solution de l'équation : $(*_n) \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)y'' - \left(2+\frac{1}{n}\right)y' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

1. Calculer explicitement y_n.
2. Déterminer la limite simple, y, des fonctions y_n.
3. Vérifier que y est solution de l'équation limite de $(*_n)$ avec les mêmes conditions initiales.

Correction ▼ [004511]

Exercice 4241 $f \circ f \circ \ldots \circ f$

Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction continue vérifiant : $\forall\, x \neq 0, \quad |f(x)| < |x|$.
On pose $f_0(x) = x$, puis $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. Étudier la convergence simple des f_n.

Correction ▼ [004512]

Exercice 4242 Étude de convergence

On pose $f_0(t) = 0$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$, pour $t \geqslant 0$.

1. Déterminer la limite simple, ℓ, des fonctions f_n.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
3. Démontrer que : $\forall\, t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leqslant \frac{|f_n(t)-\ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. (Remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geqslant 1$)

Correction ▼ [004513]

Exercice 4243 Approximation de la racine carrée par la méthode de Newton

On définit une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ par récurrence : $\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right). \end{cases}$

Étudier la convergence simple, puis uniforme des f_n $\left(\text{considérer } g_n(x) = \frac{f_n(x)-\sqrt{x}}{f_n(x)+\sqrt{x}}\right)$.

[004514]

Exercice 4244 Approximation polynomiale de la racine carrée

On considère la suite (f_n) de fonctions sur $[0,1]$ définie par les relations : $f_0 = 0$, $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{t - f_n^2(t)}{2}$. Étudier la convergence simple, uniforme, des fonctions f_n.

Correction ▼ [004515]

Exercice 4245 Suite ayant deux limites

Trouver une suite de polynômes (P_n) convergeant simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et vers la fonction constante égale à 1 sur $[2,3]$.
Remarque : une telle suite a donc des limites distinctes dans $\mathbb{R}[x]$ pour les normes de la convergence uniforme sur $[0,1]$ et sur $[2,3]$.

Correction ▼ [004516]

Exercice 4246 Limite simple de polynômes de degrés bornés

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé et (P_n) une suite de fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à p convergeant simplement vers f sur un intervalle $[a,b]$.

1. Démontrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à p, et que les coefficients des P_n convergent vers ceux de f.
2. Montrer que la convergence est uniforme.

Correction ▼ [004522]

Exercice 4247 Polynômes à coefficients entiers, ENS Lyon MP* 2005

On considére $f : x \mapsto 2x(1-x)$ définie sur $[0,1]$.

1. Étude de la suite de fonction g_n, avec $g_n = f^n = f \circ \ldots \circ f$.
2. Soit $[a,b] \subset]0,1[$ et h continue sur $[a,b]$. Montrer que h est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

Correction ▼ [004523]

Exercice 4248 Théorèmes de Dini

Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. On suppose que chaque fonction f_n est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.
2. On suppose qu'à x fixé la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

[004524]

Exercice 4249 Théorème d'Ascoli

Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. On suppose que toutes les fonctions f_n sont k-Lipchitizennes (avec le même k).

1. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ une subdivision régulière de $[a,b]$. On note $M_n = \max\{|f_n(a_i) - f(a_i)|$ tel que $0 \leqslant i \leqslant N\}$. Encadrer $\|f_n - f\|_\infty$ à l'aide de M_n.
2. Montrer que f_n converge uniformément vers f.

[004525]

Exercice 4250

Etudier les suites de fonctions suivantes (convergence simple, convergence uniforme, convergence localement uniforme)

1) (**) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ **2) (**)** $f_n(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ **3) (**)** $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Correction ▼ [005726]

Exercice 4251 *** I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n] \\ 0 \text{ si } x \geqslant n \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.
2. A l'aide de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, calculer l'intégrale de GAUSS $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Correction ▼ [005727]

Exercice 4252 ** I

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Correction ▼ [005729]

Exercice 4253 **

Etudier (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) les séries de fonctions de termes généraux :

1. $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$
2. $f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $f_n(x) = (-1)^n\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

Correction ▼ [005732]

Exercice 4254 ** I

Montrer que pour tout réel $a > 0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+na}$.

Correction ▼ [005733]

168 222.02 Continuité, dérivabilité

Exercice 4255 Fonction orthogonale aux polynômes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout entier k on a $\int_{t=a}^{b} f(t)t^k\,dt = 0$. Que peut-on dire de f ? [004517]

Exercice 4256 Approximation de f et f'

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que P_n converge uniformément vers f et P_n' converge uniformément vers f'.
2. Si f est $\mathscr{C}^\infty$, peut-on trouver une suite de polynômes (P_n) telle que pour tout k la suite $(P_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$?

Correction ▼ [004518]

Exercice 4257 Limite de $f_n(x_n)$

Soient $f_n : D \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant vers une fonction continue f et (x_n) une suite d'éléments de D convergeant vers $x \in D$.

1. Si les fonctions f_n convergent uniformément, montrer que $f_n(x_n) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$.
2. Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.

[004519]

Exercice 4258 Compositon et convergence

Soit f_n convergeant uniformément vers f, et g une fonction continue. Démontrer que $g \circ f_n \to g \circ f$ uniformément.

[004520]

Exercice 4259 $f_n \circ g_n$

Soit $f_n : [a,b] \to [c,d]$ et $g_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant uniformément vers les fonctions f et g. Montrer que $g_n \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Correction ▼ [004521]

Exercice 4260 Équicontinuité

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f. Montrer que les fonctions f_n sont *équi-continues* c'est à dire :

$$\forall\, x \in D,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, y \in]x-\delta, x+\delta[\cap D,\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

[004526]

Exercice 4261 Limite simple de fonctions convexes

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convexes convergeant simplement vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme.

Correction ▼ [004527]

Exercice 4262 *** I Polynômes de BERNSTEIN. Théorème de WEIERSTRASS

Soit f une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour n entier naturel non nul, on définit le n-ème polynôme de BERNSTEIN associé à f par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\tfrac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1. (a) Calculer $B_n(f)$ quand f est la fonction $x \mapsto 1$, quand f est la fonction $x \mapsto x$, quand f est la fonction $x \mapsto x(x-1)$.
   (b) En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.
2. En séparant les entiers k tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha$ et les entiers k tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \alpha$ ($\alpha > 0$ donné), montrer que la suite de polynômes $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer le théorème de WEIERSTRASS : soit f une application continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

Correction ▼ [005728]

Exercice 4263 **

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire que $f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin x}{1 - x\cos x}\right)$.

Correction ▼ [005730]

Exercice 4264 **

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. Domaine de définition de f. On étudie ensuite f sur $]1,+\infty[$.
2. Continuité de f et limites de f en 1 et $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Correction ▼ [005731]

Exercice 4265 **

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$.

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la série de terme général f_n puis la continuité de la somme f.
2. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ à l'aide de la formule de STIRLING.

Correction ▼ [005734]

Exercice 4266 **

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, soit $f_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$.
Etude complète de $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$: domaine de définition, parité, limites, continuité, dérivabilité (vérifier que f n'est pas dérivable en 0), allure du graphe.

Correction ▼ [005735]

169 222.03 Suites et séries d'intégrales

Exercice 4267 ** I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,\sqrt{n}] \\ 0 \text{ si } x > \sqrt{n} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.
2. A l'aide de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, calculer l'intégrale de GAUSS $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Correction ▼ [005738]

Exercice 4268 **

Montrer que $\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ et $\int_0^1 x^x\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

Correction ▼ [005739]

Exercice 4269 **

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\, dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Correction ▼ [005740]

Exercice 4270 **

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\, dx$ en écrivant cette intégrale comme somme d'une série.

Correction ▼ [005741]

Exercice 4271 **

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

Correction ▼ [005742]

Exercice 4272 **

1. Montrer que pour x réel de $[0,1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Correction ▼ [005743]

Exercice 4273 *** I

Montrer que pour tout réel x, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$

Correction ▼ [005744]

170 222.04 Suite et série de matrices

Exercice 4274 **

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (a réel strictement positif donné).

Correction ▼ [005864]

Exercice 4275 ***

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $p \geqslant 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(1) $\mathrm{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$ (disque unité ouvert).
(2) $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$
(3) La série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Correction ▼ [005865]

Exercice 4276 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Convergence et somme de la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [005866]

Exercice 4277 ** I

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit A un élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| < 1$. Montrer que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I-A)^{-1}$.
En déduire que $\|(I-A)^{-1} - (I+A)\| \leqslant \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$.

Correction ▼ [005867]

Exercice 4278 ** I

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [005868]

Exercice 4279 ** I

Calculer $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, si

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Correction ▼ [005869]

Exercice 4280 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Calculer $\ln(I_3 + tA) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} A^n$ en précisant les valeurs de t pour lesquelles la série converge.

Correction ▼ [005870]

Exercice 4281 ** I Exponentielle d'un endomorphisme anti-symétrique de $\mathbb{R}^3$

1. (a) Soit $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, on pose $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}$. Vérifier que $f_{\overrightarrow{\omega}} \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Réciproquement, soit $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{\omega}$ unique tel que $f = f_{\overrightarrow{\omega}}$.
2. Soit $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ est une rotation dont on déterminera l'axe (quand celui-ci est défini) et l'angle.

Correction ▼ [005871]

Exercice 4282 **

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, calculer $\lim_{p\to+\infty} \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p$.

Correction ▼ [005872]

Exercice 4283 **

Montrer que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Correction ▼ [005873]

171 222.99 Autre

Exercice 4284 Fonction définie par une série

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arccos(\cos nx)}{n!}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, continue, paire et 2π-périodique.
2. Calculer $f(0)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Correction ▼ [004528]

Exercice 4285 Fonction définie par une série (Centrale MP 2003)

Soit $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2n^2}$ sous réserve de convergence ($a \in \mathbb{R}$).

1. Domaine de définition de f ?
2. Limite de $af(a)$ quand $a \to 0$?
3. Limite de $f(a)$ quand $a \to +\infty$?

Correction ▼ [004529]

Exercice 4286 Fonction ζ de Riemann

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de ζ. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce domaine.
2. Prouver que $\zeta(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$ $\left(\text{majorer } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{ par comparaison à une intégrale}\right)$.
3. Prouver que $\zeta(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1^+$.

[004530]

Exercice 4287 Fonction ζ de Riemann et constante d'Euler

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$.
Montrer que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ puis que $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k}$.

[004531]

Exercice 4288 Fonction définie par une série

1. Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.
2. Calculer $f(x)$ lorsque la série converge (intégrer terme à terme).

Correction ▼ [004532]

Exercice 4289 Fonction définie par une série

1. Étudier la convergence de la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $]1, +\infty[$.

[004533]

Exercice 4290 Fonction définie par une série

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

1. Déterminer le domaine, D de définition de g et prouver que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D.
2. Montrer que la quantité : $xg(x) - g(x+1)$ est constante sur D.
3. Tracer la courbe représentative de g sur $]0, +\infty[$.
4. Donner un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$ et en 0^+.

Correction ▼ [004534]

Exercice 4291 Fonction définie par une série

1. Établir la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{\operatorname{ch} nx}$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur toute partie de la forme $\mathbb{R} \setminus [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Que pouvez-vous en déduire pour f ?

[004535]

Exercice 4292 Fonction définie par une série

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que la série $f(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3. Y a-t-il convergence normale ?

Correction ▼ [004536]

Exercice 4293 Fonction définie par une série

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)...(x+n)}$.

1. Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.
3. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [004537]

Exercice 4294 Fonction définie par une série

1. Étudier la convergence simple, uniforme, de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\arctan(x+n) - \arctan(n)\big)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Chercher une relation simple entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
4. Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Correction ▼ [004538]

Exercice 4295 Conversion série-intégrale

Montrer, pour $x > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_{t=0}^{1} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt$.

Correction ▼ [004539]

Exercice 4296 Fonction Γ

Soit $f_n(x) = \frac{n^x}{(1+x)(1+x/2)...(1+x/n)}$.

1. Étudier la convergence simple des fonctions f_n.
2. On note $f = \lim f_n$. Calculer $f(x)$ en fonction de $f(x-1)$ lorsque ces deux quantités existent.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition (on calculera $f_n'(x)/f_n(x)$).

Correction ▼ [004540]

Exercice 4297 Ensi Chimie P' 93

Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \frac{n(n+1)}{x^{n+1}} \int_0^x (x-t)^{n-1} \sin t\,dt$.

Correction ▼ [004541]

Exercice 4298 Convergence de $f^{(n)}$

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $f_n = f^{(n)}$ (dérivée n-ème). On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers φ. Que peut-on dire de φ ? [004542]

Exercice 4299 Ensi PC 1999

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n \cos^n x}{n+1}$.

1. Étudier la convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \int_{x=0}^{\pi/2} f_n(x)\,dx$.
3. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sous forme d'une intégrale.

Correction ▼ [004543]

Exercice 4300 Développement de $\coth(x)$

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X) = \frac{1}{(1+X/n)^n-1}$.
2. En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\coth x = \frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{e^{-2x}-1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+k^2\pi^2}$.
3. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

Correction ▼ [004544]

Exercice 4301 $\sum \sin(n)/n$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$ on pose $u_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction continue, f.
2. Justifier la dérivabilité de f sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Correction ▼ [004545]

Exercice 4302 Fonctions ζ et η

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et pour $x > 0$: $\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Établir pour $x > 1$: $\eta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$. En déduire $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ pour $x \to 1^+$.
2. Montrer que $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$. On remarquera que $\frac{1}{x-1} = \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Correction ▼ [004546]

Exercice 4303 Centrale MP 2000

Pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n(y) = \frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n(y)x^n$.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1\}$ et $F(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y)x^n$. Montrer que F, $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ existent en tout point de D.

[004547]

Exercice 4304 Série lacunaire

Soit (p_n) une suite d'entiers naturels, strictement croissante et telle que $p_n/n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. On pose pour $x \in]-1,1[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p_n}$. Montrer que $(1-x)f(x) \to 0$ lorsque $x \to 1^-$.

Correction ▼ [004548]

Exercice 4305 Fonctions réciproques (Pugin, MP*-2001)

Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to [c,d]$ continues, bijectives, strictement croissantes, convergeant simplement vers une fonction $f : [a,b] \to [c,d]$ elle aussi continue, bijective strictement croissante.

1. Montrer qu'il y a convergence uniforme (deuxième théorème de Dini, considérer une subdivision de $[a,b]$).
2. Montrer que les fonctions réciproques f_n^{-1} convergent simplement vers une fonction g et que $g = f^{-1}$.
3. Montrer que (f_n^{-1}) converge uniformément vers f^{-1}.

Correction ▼ [004549]

Exercice 4306 Mines MP 2001

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le compact K, à valeurs réelles et convergent uniformément sur K vers la fonction f. A-t-on $\sup f_n \to \sup f$ lorsque $n \to \infty$?

Correction ▼ [004550]

Exercice 4307 Mines MP 2001

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ on pose $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ sous réserve de convergence.

1. Étudier la convergence simple, normale, uniforme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que $x^k S(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [004551]

Exercice 4308 Centrale MP 2001

Convergence et limite en 1^- de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{1+x^n}$.

Correction ▼ [004552]

Exercice 4309 Centrale MP 2001

Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1-t^n}$.

1. Pour quelles valeurs de t, S est-elle définie ? Est-elle continue ?
2. Montrer qu'au voisinage de 1^- on a $S(t) = -\frac{\ln(1-t)}{1-t} + O\left(\frac{1}{1-t}\right)$. On pourra développer $\ln(1-t)$ en série entière.

Correction ▼ [004553]

Exercice 4310 Centrale MP 2002

On pose $\phi(x) = d(x, \mathbb{Z}) = \inf\{|x-n| \text{ tel que } n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x)$ est définie et continue.
2. Montrer que ϕ est lipschitzienne. Que peut-on en déduire pour f ?
3. Montrer que f n'est dérivable en aucun point.

Correction ▼ [004554]

Exercice 4311 ENS Lyon-Cachan MP 2002

Soin $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose : $f(h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin^2(nh)}{(nh)^2}$ si $h \neq 0$ et $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Étudier le domaine de définition et la continuité de f.

Correction ▼ [004555]

Exercice 4312 Centrale MP 2002

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \frac{1}{n}\int_{t=0}^{n} f(x+t)f(t)\,dt$.

1. Montrer que la suite (F_n) converge vers une fonction F que l'on précisera.
2. Nature de la convergence ?
3. Prouver $\|F\|_\infty = |F(0)|$.

Correction ▼ [004556]

Exercice 4313 Approximation par des fractions rationnelles

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, ayant même limite finie ℓ en $\pm\infty$. Montrer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fractions rationnelles.

Correction ▼ [004557]

Exercice 4314 Fonction définie par une série

On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

1. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
2. Chercher un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Correction ▼ [004558]

Exercice 4315 Recherche d'équivalents, Centrale MP 2006

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ et $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Correction ▼ [004559]

Exercice 4316 Étude de $\sum t^{p-1}\sin(px)$ pour $x \in]0,\pi[$, TPE MP 2005

1. Calculer $S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\sin(px)$ puis $S(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$.
2. Calculer $\int_{t=0}^{1} S_n(t)\,dt$ et $\int_{t=0}^{1} S(t)\,dt$.
3. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ converge et donner sa valeur.

Correction ▼ [004560]

Exercice 4317 Fraction rationnelle de meilleure approximation (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

On note R l'ensemble des fractions rationnelles continues sur $[0,1]$ et pour $m,n \in \mathbb{N}$:
$R_{m,n} = \{f \in R$ tel que $\exists\, P,Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \leqslant m,\ \deg(Q) \leqslant n$ et $f = P/Q\}$.

1. R est-il un espace vectoriel ? Si oui en trouver une base. Même question pour $R_{m,n}$.
2. Soient m,n fixés. On note $d = \inf\{\|g-f\|,\ f \in R_{m,n}\}$ où g désigne une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\|h\| = \sup\{|h(x)|,\ x \in [0,1]\}$. Montrer qu'il existe $r_0 \in R_{m,n}$ tel que $\|g - r_0\| = d$.

Correction ▼ [004561]

Exercice 4318 Dérivation multiple, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que (f_n') converge uniformément vers g et il existe x_1 tel que $(f_n(x_1))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que $f' = g$.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur $[a,b]$ telle que $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers g et il existe $x_1,\dots,x_p$ distincts tels que $(f_n(x_i))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que $f^{(p)} = g$.

Correction ▼ [004562]

Exercice 4319 Exponentielle, Polytechnique MP* 2006

Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\exp(A) - \exp(B) = \int_{s=0}^{1} \exp(sA)(A-B)\exp((1-s)B)\,ds$.

Correction ▼ [004563]

Exercice 4320 **

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$. Trouver un équivalent simple de f en 0 à droite.

Correction ▼ [005736]

Exercice 4321 ***

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Trouver un équivalent simple de f en 1.

Correction ▼ [005737]

172 223.01 Limite

Exercice 4322

Étudier l'existence des limites suivantes :

1. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x^2y}{x+y}$
2. $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$
3. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
4. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$
5. $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

Indication ▼ Correction ▼ [001784]

Exercice 4323

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0 \tag{3}$$

et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Indication ▼ Correction ▼ [001785]

Exercice 4324

Soit

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad \text{ et } \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe et est égale à 0. [001786]

Exercice 4325

Déterminer les limites lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$
3. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$;
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$;
7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos xy}{y^2}$;
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{\cos y-\cosh x}$

Indication ▼ Correction ▼ [001787]

Exercice 4326

Pour chacune des fonctions f suivantes, étudier l'existence d'une limite en $(0,0,0)$:

1. $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z}$;
2. $f(x,y,z) = \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [001788]

Exercice 4327

Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f_1(0,0) &= 0. \\ f_2(x,y) &= \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f_2(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

[001789]

Exercice 4328 partiel 1999

1. Étudier la continuité de la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{(\sin x)(\sin y)}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. Soit $a > 0$ fixé. Étudier la continuité de la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^a\,|y|^a}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
3. Étudier la continuité de la fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_3(x,y) = \begin{cases} y-x^2 & \text{si } y > x^2 \\ 0 & \text{si } y \leqslant x^2. \end{cases}$$
4. On définit une fonction continue de l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ en posant
$$f_4(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\,\sin\frac{1}{x}\,\sin\frac{1}{y}\,\cos\frac{1}{z}.$$
Étudier la possibilité de prolonger f_4 en une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$.

[001790]

Exercice 4329

Prolonger par continuité la fonction $g : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$. [001791]

Exercice 4330

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,.)$ et $f(.,y)$ sont continues. Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n\to\infty} g_n(x,y) = f(x,y).$$

[001792]

Exercice 4331

Pour chacune des suites $(u_n)_n$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ ci-dessous, placer quelques-uns des points u_n dans le plan et décrire qualitativement le comportement de la suite lorsque n tend vers l'infini. Étudier ensuite la convergence de chacune des suites et déterminer la limite le cas échéant.

1. $u_n = (\frac{4n^2}{n^2+4n+3}, \cos\frac{1}{n})$
2. $u_n = (\frac{n^2\arctan n}{n^2+1}, \sin(\frac{\pi}{4}\exp(-\frac{1}{n})))$
3. $u_n = (\sinh n, \frac{\ln n}{n})$
4. $u_n = (a^n\cos(n\alpha), a^n\sin(n\alpha))$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002621]

Exercice 4332

On considère une suite $(u_n)_n$, de terme général $u_n \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner la définition de convergence pour une telle suite. (Ceci est une question de cours !)
2. Soit la suite de terme général $u_n = (\mathrm{th}(n), \cos(n)\exp(-n^2))$. Étudier sa convergence.

[002649]

Exercice 4333 **T

Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $\frac{xy}{x+y}$
2. $\frac{xy}{x^2+y^2}$
3. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
4. $\frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$
5. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
6. $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Correction ▼ [005553]

Exercice 4334 ** I

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
2. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
3. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$

4. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$
5. $\frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$
6. $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$
7. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$
8. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$

Correction ▼ [005887]

173 223.02 Continuité

Exercice 4335

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(x+y, x-y).$$

[001793]

Exercice 4336

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
5. $$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
6. $$f(x,y) = \begin{cases} xe^{\arctan\frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[001794]

Exercice 4337

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$ par

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}.$$

Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$? [001795]

Exercice 4338

Etudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

[001796]

Exercice 4339

1. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+2y)^3y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^6+x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3. $$f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{x}{y}} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

4. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{y} & \text{si } y\neq 0\\ x & \text{sinon.}\end{cases}$$

5. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ \frac{1}{1+x} & \text{sinon.}\end{cases}$$

   définie sur $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.

[001797]

Exercice 4340

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y}{x-y}, \quad \text{si } x\neq y\\ &= x, \quad \text{si } x=y.\end{aligned}$$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$.
2. Pour tout $v=(\cos\theta,\sin\theta)$, calculer $D_vf(1,-2)$. Pour quelles valeurs de $\theta\in[0,2\pi[$, $D_vf(1,-2)=0$?
3. Étudier la continuité de f au point $(1,1)\in\mathbb{R}^2$.
4. Étudier la continuité de f au point $(0,0)\in\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et les déterminer.

6. Montrer que la dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ existe pour $v=(1,1)$, et la déterminer. On constatera que l'égalité $D_v f(0,0) = \partial_x f(0,0) + \partial_y f(0,0)$ n'est pas satisfaite. Expliquer pourquoi cela ne contredit aucun théorème du cours.

[002650]

Exercice 4341 ***

On pose $f_{x,y} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & xt^2+yt \end{array}$ puis $F(x,y) = \sup_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t)$. Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [005554]

Exercice 4342 **

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et $B = \{x \in E/\ \|x\| < 1\}$. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} E & \to & B \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array}$ est un homéomorphisme.

Correction ▼ [005900]

Exercice 4343 **

$E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_2 \end{array}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et préciser df. Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

Correction ▼ [005901]

---

174 223.03 Différentiabilité

Exercice 4344

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \text{ si } |x| > |y| \\ (x,y) \mapsto y \text{ si } |x| < |y| \\ (x,y) \mapsto 0 \text{ si } |x| = |y| \end{cases}$.

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité. [001798]

Exercice 4345

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.

Étudier la continuité de f et l'existence des dérivées partielles.f est-elle C^1 ? [001799]

Exercice 4346

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{l} f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0 \end{array}$$

Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe C^1.

Indication ▼ Correction ▼ [001800]

Exercice 4347

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy)$$

Indication ▼ Correction ▼ [001801]

Exercice 4348

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.

Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$. [001802]

Exercice 4349

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = x & \text{si} & |x| > |y| \\ f(x,y) = y & \text{si} & |x| < |y| \\ f(x,y) = 0 & \text{si} & |x| = |y|. \end{array}$$

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

Indication ▼ Correction ▼ [001803]

Exercice 4350

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ fixé ; l'application $x \to \langle x, a \rangle$ de $\mathbb{R}^2$ usuel dans $\mathbb{R}$ est-elle continue, admet-elle des dérivées partielles, celles-ci sont elles continues ? [001804]

Exercice 4351

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

— si $|x| \leqslant y$, $f(x,y) = x^2$.

— $f(x,y) = y^2$ sinon.

Étudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles. [001805]

Exercice 4352

Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^2$ ne peut avoir des dérivées partielles qui existent et qui soient continues en 0. [001806]

Exercice 4353

Soient $\alpha > 0$ et $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que

$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad |f(x,y)| \leqslant \left(x^2+y^4\right)^{\frac{2\alpha-3}{4}}.$$

(b) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \left|f(y^2,y)\right|$.

(c) Étudier la continuité de f en (0,0).

2. (a) Montrer que
$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant |x|^{\alpha-2}.$$

(b) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{|f(x,x)|}{\sqrt{2}|x|}$.

(c) Étudier la différentiabilité de f en (0,0).

[001807]

Exercice 4354

1. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y)=e^{x^2+y^2}$ au point $P(1,0)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.
2. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z)=x^2-3yz+5$ au point $P(1,2,1)$ dans une direction formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées.
3. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z)=xy+yz+zx$ au point $M(2,1,3)$ dans la direction joignant ce point au point $N(5,5,15)$.

[001808]

Exercice 4355

Etudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières, des fonctions suivantes :

1.
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2.
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3.
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{x\ln(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

[001809]

Exercice 4356

On définit la fonction
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue mais pas différentiable en $(0,0)$. [001810]

Exercice 4357

Soit $f:]0,1[\times]0,1[\to\mathbb{R}$,
$$f(x,y)=\begin{cases} x(1-y) & \text{si } x\leqslant y\\ y(1-x) & \text{si } x>y\end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f. [001811]

Exercice 4358

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$ et admet des dérivées partielles dans toutes les directions, mais n'y est pas différentiable. [001812]

Exercice 4359

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\ . \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ ne sont pas continues en certains points de $\mathbb{R}^2$. [001813]

Exercice 4360

Etudier la différentiabilité et la continuité des dérivées partielles de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{3/2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

[001814]

Exercice 4361

Etudier la différentiabilité en $(0,0)$ des fonctions définies par

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[001815]

Exercice 4362

Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition.

1. $f(x,y) = x^2e^{xy}$;
2. $g(x,y,z) = x^2y^3\sqrt{z}$;
3. $h(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

[001816]

Exercice 4363

Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) de la fonction $f(x,y) = \sqrt{xy+\frac{x}{y}}$ en $(2,1)$. [001817]

Exercice 4364

On définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ bien que f ne soit pas continue en $(0,0)$.
[001818]

Exercice 4365

1. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$ au point $P(1,2)$ dans une direction formant avec l'axe Ox un angle de $\frac{\pi}{3}$.
2. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ au point $P(1,2)$ dans la direction joignant ce point au point $M(4,6)$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ au point $P(1,1)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.

[001819]

Exercice 4366

Calculer les différentielles des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition :

1. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$;
2. $f(x,y) = \ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$.

[001820]

Exercice 4367

Calculer $df(1,1)$, si $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$. [001821]

Exercice 4368

Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ à l'origine dans une direction formant avec les axes de coordonnées x,y,z les angles α, β, γ. [001822]

Exercice 4369

Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0,y_0,z_0) donné :

1. $z = \sqrt{19-x^2-y^2}$, $\quad (x_0,y_0,z_0) = (1,3,3)$;
2. $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$, $\quad (x_0,y_0,z_0) = (1,1/2,1)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002628]

Exercice 4370

On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(x_0,y_0,z_0) = (2,3,7)$. Sa réponse est

$$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

Indication ▼ Correction ▼ [002629]

Exercice 4371

Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x+2y+z = 6$. Même question avec le plan $3x+5y-2z = 3$.

Indication ▼ Correction ▼ [002630]

Exercice 4372

Soit C le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et C^+ le demi-cône où $z \geqslant 0$. Pour un point quelconque M_0 de $C \setminus \{(0,0,0)\}$, de coordonnées $(x_0, y_0, \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$, on note $\mathscr{P}_{M_0}$ le plan tangent au cône C en M_0.

1. Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan $\mathscr{P}_{M_0}$.
2. Montrer que l'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ est constituée de deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et que l'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est constituée de deux demi-droites $\mathscr{D}_1^+$ et $\mathscr{D}_2^+$.
3. Montrer que le plan tangent au cône C est le même en tout point de $\mathscr{D}_1 \setminus \{(0,0,0)\}$ (respectivement en tout point de $\mathscr{D}_2 \setminus \{(0,0,0)\}$).

Indication ▼ Correction ▼ [002631]

Exercice 4373

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 2y^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent $\mathscr{P}_{M_0}$ au graphe G_f de f en un point quelconque M_0 de G_f.
2. Pour le point M_0 de coordonnées $(2,1,2)$, déterminer tous les points M tels que le plan tangent en M soit parallèle à $\mathscr{P}_{M_0}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002632]

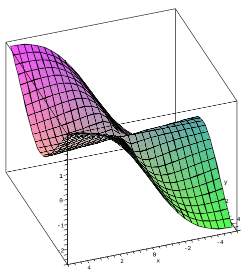
Exercice 4374

Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue et que, quel que soit $v \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle $D_v f(x,y)$ existe en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
2. La dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ est-elle linéaire en v ? Les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$, forment-elles un plan ? Expliquer comment on peut observer la réponse sur la figure.
3. Le vecteur v étant fixé, qu'est-ce qu'on peut dire de la continuité de $D_v f(x,y)$ en (x,y) ?



Indication ▼ Correction ▼ [002633]

Exercice 4375

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée des nombres suivants :

$$\exp[\sin(3.16)\cos(0.02))], \quad \arctan[\sqrt{4.03} - 2\exp(0.01)].$$

Indication ▼ Correction ▼ [002634]

Exercice 4376

1. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. Donner la définition de “f est différentiable en a”.
2. Montrer que, si f est différentiable en a, alors toutes ses dérivées partielles existent. Exprimer le lien entre la différentielle df_a de f en a et les dérivées partielles de f en a.
3. Les affirmations suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera brièvement sa réponse.
   (A) Si f est différentiable en a, alors elle y est continue.
   (B) Si toutes les dérivées partielles de f en a existent, alors f est différentiable en a.

[002651]

Exercice 4377

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée de

$$\exp[-0.02\sqrt{4.03}].$$

[002652]

Exercice 4378 ***T

Déterminer la classe de f sur $\mathbb{R}^2$ où $f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$.

Correction ▼ [005555]

Exercice 4379 *** I

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [005888]

Exercice 4380 ** I

Extremums des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$
2. $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

Correction ▼ [005894]

Exercice 4381 *** I

Soit $f : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$. Montrer que f est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle.

Correction ▼ [005895]

Exercice 4382 *

Déterminer $\text{Max}\{|\sin z|,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\}$.

Correction ▼ [005896]

Exercice 4383 **

Déterminer la différentielle en tout point de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$.

Correction ▼ [005899]

175 223.04 Dérivée partielle

Exercice 4384

Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition D_f. Pour chacune des fonctions, calculer ensuite les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition lorsqu'elles existent :

1. $f(x,y) = x^2 \exp(xy)$,
2. $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$,
3. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$,
4. $f(x,y,z) = x^2y^2\sqrt{z}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002622]

Exercice 4385

Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x\cos y + y\exp x$.

1. Calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0,2\pi[$. Calculer $D_v f(0,0)$. Pour quelle(s) valeurs de θ cette dérivée directionnelle de f est-elle maximale/minimale ? Que cela signifie-t-il ?

Indication ▼ Correction ▼ [002623]

Exercice 4386

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Indication ▼ Correction ▼ [002624]

Exercice 4387

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,1,2)$.
6. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$. La fonction F admet-elle une réciproque locale au voisinage du point $(2,2)$?

Indication ▼ Correction ▼ [002625]

Exercice 4388

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Indication ▼ Correction ▼ [002626]

Exercice 4389

On considère les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2)), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Indication ▼ Correction ▼ [002627]

Exercice 4390 Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles des fonctions :

1. $f(x,y,z) = (x+z)^{(y^z)}$
2. $f(x,y) = \min(x,y^2)$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

[004136]

Exercice 4391 DL d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0,1,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 3$.
Peut-on déterminer $\lim_{t\to 0} \frac{f(t^2,\operatorname{ch} t,e^t)}{f(t,\cos t,\operatorname{ch} t)}$?

Correction ▼ [004137]

Exercice 4392 Simplification

Soit $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x,y) = \arctan x - \arctan y$.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
3. Simplifier f à l'aide de g.

Correction ▼ [004138]

Exercice 4393 Somme des angles d'un triangle

Sur quelle partie D de $\mathbb{R}^3$ la fonction

$$f : (x,y,z) \mapsto \arccos\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right) + \arccos\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right) + \arccos\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}\right)$$

est-elle définie ? Montrer que f est constante lorsque x,y,z sont strictement positifs. [004139]

Exercice 4394 Intégrale fonction de paramètres

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_{t=0}^{1} f(t, x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)\, dt$.
Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles. [004140]

Exercice 4395 Dérivées secondes composées

Soient $u, v, f, g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ liées par la relation :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)).$$

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de g.

Correction ▼ [004141]

Exercice 4396 Les polynômes complexes sont harmoniques

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto P(x+iy)$. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. [004142]

Exercice 4397 Laplacien en polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, et $g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. On pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (laplacien de f).

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Exprimer Δf en fonction des dérivées de g.

Correction ▼ [004143]

Exercice 4398 Laplacien en sphériques

Soient $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \mapsto (x,y,z)$ avec $\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi, \end{cases}$ et $F = f \circ \Phi$.

Vérifier que :

$$(\Delta f)\circ\Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan\varphi}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

Pour cet exercice, il est conseillé de prendre la feuille dans le sens de la longueur, et d'y aller calmement, en vérifiant ses calculs. [004144]

Exercice 4399 Laplacien en dimension n

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit une application F de $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(x_1, \dots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$.
Calculer le laplacien de F en fonction de f.

Correction ▼ [004145]

Exercice 4400 Contre-exemple au théorème de Schwarz

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction π-périodique de classe $\mathscr{C}^2$. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $g(x,y) = r^2 f(\theta)$ avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de f. En déduire les valeurs de $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$. Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

Correction ▼ [004146]

Exercice 4401 Contre-exemple au théorème de Schwarz (Centrale MP 2003)

Soit $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Correction ▼ [004147]

Exercice 4402 Dérivées d'ordre k distinctes

Trouver $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que les $k+1$ dérivées d'ordre k en $(0,0)$ soient distinctes.

[004148]

Exercice 4403 Les isométries conservent le laplacien

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie pour la norme $\| \ \|_2$.

1. Montrer que la matrice jacobienne de φ est constante, égale à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la partie linéaire de φ.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que $(\Delta f) \circ \varphi = \Delta(f \circ \varphi)$.

[004149]

Exercice 4404 Changement de variables affine

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application affine.

1. Montrer que la matrice jacobienne, J, de φ est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Pour $A \in \mathbb{R}^2$, on note $H_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$ (*matrice Hessienne de* f). Montrer que : $\forall\, A \in \mathbb{R}^2,\ H_{f\circ\varphi}(A) = {}^tJH_f(\varphi(A))J$.

[004150]

Exercice 4405 Formule de Leibniz

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Calculer $\frac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ en fonction des dérivées de f et g.

Correction ▼ [004151]

Exercice 4406 Intégration de formes différentielles

Déterminer les fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2+x}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2+y}{x} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-y}{(x+y+1)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2+x}{(x+y+1)^2} \end{cases}$
3. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{x}{y^2} \end{cases}$

Correction ▼ [004152]

Exercice 4407 Formes différentielles exactes

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que la forme différentielle $\omega = f(y)(xe^y\,dx + y\,dy)$ soit exacte. Déterminer alors ses primitives.

Correction ▼ [004153]

Exercice 4408

Quelles sont les applications $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que la forme différentielle :
$\omega = f(x,y)\,d(x^2+y^2)$ soit exacte ?

Correction ▼ [004154]

Exercice 4409

Trouver les fonctions $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que la forme différentielle :
$\omega = 2xz\,dx + f(y)g(z)\,dy + \left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)dz$ soit exacte. Déterminer alors ses primitives.

Correction ▼ [004155]

Exercice 4410 Équation associée à une différentielle exacte

1. Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\ln x + y - 1}{x^2 y}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\ln x}{xy^2}\end{cases}$
2. Application : Résoudre l'équation différentielle : $(x\ln x)y' + (\ln x + y - 1)y = 0$.

Correction ▼ [004156]

Exercice 4411 Équation aux dérivées partielles

Trouver les fonctions polynomiales $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$. [004157]

Exercice 4412 DL d'ordre 2

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Démontrer que :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(a,b) + o(h^2+k^2).$$

[004158]

Exercice 4413 Ajustement linéaire

Problème d'ajustement linéaire : Etant donné n couples de réels (x_i,y_i) $1\leqslant i\leqslant n$, on cherche une droite D d'équation $y = ax+b$ telle que $\mu(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ soit minimal.
On note $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_iy_i$, et on suppose $\overline{x^2}\neq\overline{x}^2$.

1. Résoudre le problème.
2. Interpréter la relation $\overline{x^2}\neq\overline{x}^2$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

[004159]

Exercice 4414 Jacobien des fonctions symétriques

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, (x_1,\dots,x_n)\mapsto(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$
où $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $x_1,\dots,x_n$. Calculer le déterminant jacobien de f.

Correction ▼ [004160]

Exercice 4415 Changement de variables

On pose $f(x,y) = (x+y,xy) = (u,v)$. Montrer que f induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser. Chercher l'expression de f^{-1} et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est égal à I.

[004161]

Exercice 4416 Changement de variables

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$. Montrer que f induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

Correction ▼ [004162]

Exercice 4417 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ dont les dérivées secondes sont bornées :

$$\forall\, i,j,\ \forall\, A \in U,\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right| \leqslant M.$$

1. Montrer que : $\forall\, A,B \in U,\ \left|f(B)-f(A)-df_A(\vec{AB})\right| \leqslant \frac{M\|\vec{AB}\|_1^2}{2}$.
2. Montrer que : $\forall\, A,B \in U,\ \left|f(B)-f(A)-df_C(\vec{AB})\right| \leqslant \frac{M\|\vec{AB}\|_1^2}{4}$ où C est le milieu de $[A,B]$.

[004163]

Exercice 4418 Application du théorème des fonctions implicites

On considère la courbe d'équation $e^{x-y} = 1+2x+y$. Donner la tangente à cette courbe et la position par rapport à la tangente au point $(0,0)$.

Correction ▼ [004164]

Exercice 4419 Théorème des fonctions implicites

1. Montrer que l'équation : $x^3+y^3-3xy = 1$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$.
2. Donner le DL de φ en 0 à l'ordre 3.

Correction ▼ [004165]

Exercice 4420 Théorème des fonctions implicites, Ensi P 91

Montrer que l'égalité $2e^{x+y}+y-x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1,-1)$. Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Correction ▼ [004166]

Exercice 4421 Équation implicite $x\ln x = y\ln y$

Soit $f(x,y) = x\ln x - y\ln y$ $(x,y > 0)$.
Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $f(x,y) = k$.

1. Suivant la position de $(a,b) \in \mathscr{C}_k$, préciser l'orientation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ en (a,b).
2. Dresser le tableau de variations de $\phi(t) = t\ln t$.
3. Dessiner $\mathscr{C}_0$. (Étudier en particulier les points $(0,1), (1,0)$ et $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ à l'aide de DL)
4. Indiquer l'allure générale des courbes $\mathscr{C}_k$ suivant le signe de k.

[004167]

Exercice 4422 Fonction implicite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation $y - zx = f(z)$ définit localement z fonction implicite de x et y.
2. Montrer que l'on a alors : $\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

[004168]

Exercice 4423 Équation fonction de deux paramètres

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow x^5 + \lambda x^3 + \mu x^2 - 1 = 0$. Montrer qu'il existe un voisinage, V, de $(0,0)$ et $\varphi : V \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{array}{l} \varphi \text{ est } \mathscr{C}^\infty \\ \varphi(0,0) = 1 \\ \forall\ (\lambda,\mu) \in V,\ \varphi(\lambda,\mu) \text{ est racine simple de } (*). \end{array}$$

Donner le DL à l'ordre 2 de φ en $(0,0)$.

Correction ▼ [004169]

Exercice 4424 Changement de variable singulier, Matexo

On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même définie par $f(x,y) = (u,v)$, où

$$u(x,y) = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad v(x,y) = (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}).$$

Calculer sa matrice jacobienne. Est-elle inversible localement ? Caractériser $f(\mathbb{R}^2)$.

Correction ▼ [004170]

Exercice 4425 Longueur d'un arc de courbe

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^1$ dont les dérivées partielles sont bornées sur U et $t \in I \ \mapsto M_t$ une courbe paramétrée dans U de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $a,b \in I$ comparer les longueurs des arcs $\overset{\frown}{M_aM_b}$ et $\overset{\frown}{f(M_a)f(M_b)}$. [004171]

Exercice 4426 Différentielle du déterminant

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \det M$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que l'on a pour $M,H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $df_M(H) = \operatorname{tr}({}^t\operatorname{com}(M)H)$.
Application : soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_M(X) = (-1)^n X^n + \cdots + a_1 X + \det(M)$. Exprimer a_1 en fonction des cofacteurs de M. [004172]

Exercice 4427 Mise en facteur de x et y

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0,0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $g,h : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que :
$$\forall\ (x,y) \in U,\ f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y).$$
2. Y a-t-il unicité de g et h ?
3. Généraliser au cas où U n'est pas convexe.

Correction ▼ [004173]

Exercice 4428 Fonctions convexes

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe lorsque :

$$\forall\, x,y \in U,\ \forall\, t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte lorsque $x \neq y$ et $0 < t < 1$.

1. On suppose que f est convexe.
   (a) Soient $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$ tel que $x-h \in U$ et $x+h \in U$. Montrer :
   $$(1+t)f(x)-tf(x-h) \leqslant f(x+th) \leqslant (1-t)f(x)+tf(x+h).$$
   (b) Montrer que f est continue (raisonner sur le cas $n=2$ puis généraliser).
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
   Montrer que f est convexe si et seulement si pour tous $(x,y) \in U$ on a : $f(y) \geqslant f(x)+df_x(y-x)$. Donner une interprétation géométrique de cette inégalité lorsque $n=2$.
3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (a) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in U$ la forme bilinéaire symétrique d^2f_x est positive.
   (b) Si, pour tout $x \in U$, d^2f_x est définie positive, montrer que f est strictement convexe. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse.

Correction ▼ [004174]

Exercice 4429 Les racines d'un polynôme sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ des coefficients

Soit U l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n et à racines réelles simples.

1. Montrer que U est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $P \in U$ on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les racines de P. Montrer que l'application $P \mapsto (x_1,\dots,x_n)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

[004175]

Exercice 4430 Non injectivité locale de l'exponentielle

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), M \mapsto \exp(M)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et exprimer, pour $M,H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $df_M(H)$ sous forme d'une série.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour toutes matrices $A,B \in V$ on a : $\exp(A)=\exp(B) \Rightarrow A=B$.
3. Trouver une suite (M_k) de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ distinctes ayant même exponentielle et convergeant vers une matrice A (donc il n'existe pas de voisinage de A sur lequel la restriction de f est injective).
4. Donner de même un point de non injectivité locale dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [004176]

Exercice 4431 Caractérisation des isométries

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : E \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que f est une application affine si et seulement si sa différentielle est constante (c'est-à-dire $df_x = df_y$ pour tous x,y, égalité dans $\mathscr{L}(E)$).

2. Soit X un ensemble non vide quelconque et $\varphi : X^3 \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall\, x,y,z \in X,\ \varphi(x,y,z) = \varphi(y,x,z) = -\varphi(z,y,x).$$

Montrer que $\varphi = 0$ (lemme des tresses).

3. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que f est une isométrie de E pour la distance euclidienne si et seulement si, pour tout $x \in E$, df_x est une application orthogonale.

[004177]

Exercice 4432 Différentiabilité de la norme

Pour chacune des trois normes classiques sur $\mathbb{R}^2$ dire en quels points elles sont différentiables. [004178]

Exercice 4433 Difféomorphisme

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, h \in E,\ (df_x(h) \mid h) \geqslant \alpha \|h\|^2.$$

1. Montrer pour $x, y \in E$: $(f(x) - f(y) \mid x - y) \geqslant \alpha \|x - y\|^2$. En déduire que $f(E)$ est fermé.
2. Montrer que $f(E)$ est ouvert puis que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

[004179]

Exercice 4434 Difféomorphisme

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et k-lipschitzienne avec $k < 1$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x + f(y), y - f(x))$. Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. [004180]

Exercice 4435 Partiellement dérivable $\Rightarrow$ continue ?

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner un exemple de fonction $f : U \to \mathbb{R}$ ayant en tout point des dérivées partielles premières, mais discontinue en au moins un point.
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ ayant en tout point des dérivées partielles premières *bornées* sur U. Montrer que f est continue.

Correction ▼ [004181]

Exercice 4436 Point non extrémal

On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2 y - \frac{4x^6 y^2}{(x^4 + y^2)^2} \quad \text{si } (x,y) \neq 0, \qquad f(0,0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé et $g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.
3. Calculer $f(x, x^2)$. Conclusion ?

Correction ▼ [004182]

Exercice 4437 Contre-exemple au théorème de Leibniz

On pose : $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } y \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\,; \\ 2\sqrt{y} - x & \text{si } y \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{y} < x \leqslant 2\sqrt{y}\,; \\ 0 & \text{si } y \geqslant 0 \text{ et } 2\sqrt{y} < x \text{ ou } x \leqslant 0\,; \\ -f(x,-y) & \text{si } y < 0. \end{cases}$ et : $F(y) = \int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx$.

Faire un dessin, vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, calculer $F(y)$ pour $-\frac{1}{4} \leqslant y \leqslant \frac{1}{4}$, $F'(0)$ et $\int_{x=0}^{1} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\,dx$.
[004183]

Exercice 4438 Centrale MP 2000

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $c > 0$ tels que, pour tous x, y, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant c\|x - y\|$.

1. Montrer que pour tous x, h, $\|df_x(h)\| \geqslant c\|h\|$.
2. Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ (pour la surjectivité on considèrera, si $a \in \mathbb{R}^n$, le minimum de $\|f(x) - a\|^2$).

Correction ▼ [004184]

Exercice 4439 Centrale MP 2000

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$ et $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

1. On suppose que $\Delta u > 0$. Montrer que $\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u(x,y) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}\setminus\Omega} u(x,y)$.
2. Même question en supposant seulement $\Delta u \geqslant 0$.
3. Soit $0 < r_1 < r_2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2\}$. On suppose que u est continue sur $\overline{A}$, $\mathscr{C}^2$ sur A et que $\Delta u \geqslant 0$ sur A. On pose pose $M(r) = \max\limits_{x^2+y^2=r^2} (u(x,y))$.

   Montrer que, pour tout $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $M(r) \leqslant \frac{M(r_1)\ln(r_2/r) + M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$.

   Indication : la fonction $v : (x,y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ vérifie $\Delta v = 0$.

Correction ▼ [004185]

Exercice 4440 Mines MP 2001

Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur le disque unité du plan, telle que son laplacien $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ soit nul.

1. Montrer $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$ ne dépend pas de $r \in [0,1]$.
2. Calculer alors $\iint_{D_r} f(x,y)\,dxdy$ D_r étant le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

Correction ▼ [004186]

Exercice 4441 Mines MP 2001

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) \geqslant 1$ et $|g'(x)| < 1$. Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = (f(x) + g(y), f(y) + g(x))$.

1. Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.
2. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|g'(x)| < k$; montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [004187]

Exercice 4442 ENS MP 2002

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $|f(x)|/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$. Prouver que ∇f est surjective sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [004188]

Exercice 4443 ENS MP 2002

Soit n un entier > 0, $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $f(x)/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$, et qu'en tout point la matrice hessienne de f est définie positive.
On pose $g(y) = \sup\{(x \mid y) - f(x),\ x \in \mathbb{R}^n\}$. Étudier les propriétés de g.

Correction ▼ [004189]

Exercice 4444 $\int \varphi\circ f$, X MP* 2004

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On y définit une norme par : $\|f\| = \sqrt{\int_{t=0}^{1} f^2(t)\,dt}$.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que φ'' est bornée. Pour $f \in E$ on pose $T(f) = \int_{t=0}^{1} \varphi(f(t))\,dt$.

1. Montrer que l'application ainsi définie $T : E \to \mathbb{R}$ est continue.
2. Montrer que T est différentiable en tout point.

Correction ▼ [004190]

Exercice 4445 ***T

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } y=0 \\ y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0 \end{array}\right. \end{array}$.

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. On montrera en particulier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur.

Correction ▼ [005556]

Exercice 4446 ***

Le laplacien d'une application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.
Déterminer une fontion de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction

$$g(x,y) = f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

soit non constante et ait un laplacien nul sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ le plus grand possible (une fonction de Laplacien nul est dite harmonique).

Correction ▼ [005557]

Exercice 4447 *

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall\lambda \in]0,+\infty[$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$.
Montrer pour une telle fonction l'identité d'EULER :

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = rf(x).$$

Correction ▼ [005893]

176 223.05 Différentielle de fonctions composées

177 223.06 Différentielle seconde

Exercice 4448

Calculer les différentielles suivantes, sans calculer des dérivées partielles, en utilisant les propriétés des différentielles de sommes, produits et composées :

$$\text{(a) } \mathrm{d}(\ln(xy)) \quad \text{(b) } \mathrm{d}(xyz(1+\sinh(yz))) \quad \text{(c) } \mathrm{d}\left(\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right)$$

Indication ▼ Correction ▼ [002635]

Exercice 4449

1. Y a-t-il une fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que
$$\mathrm{d}g = x^2y^2\mathrm{d}x + x^3y\mathrm{d}y?$$
2. Trouver les fonctions $b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaisant à la condition
$$\mathrm{d}g = x^2y^2\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y.$$
Étant donnée alors la fonction b, déterminer toutes les fonctions g correspondantes.

Indication ▼ Correction ▼ [002636]

Exercice 4450

Soit $g\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $g(1,1) = 3$ et dont la différentielle vaille
$$\mathrm{d}g = (2xy + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 + 2xy)\mathrm{d}y. \tag{5}$$
Soit
$$h\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$$
l'application de classe C^1 définie par
$$h(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (x^2y, xy^2) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}.$$
1. Calculer $\mathrm{d}u + \mathrm{d}v$.
2. Déterminer g à partir du calcul précédent et (E), et sans autre calcul.
3. Montrer que h est une bijection. (On pourra calculer explicitement h^{-1}.)
4. Déterminer explicitement $\mathrm{d}(g \circ h^{-1})$.
5. Calculer les matrixes jacobiennes $J_h(x,y)$ et $J_{h^{-1}}(u,v)$ et vérifier par un calcul direct que
$$J_h(x,y)J_{h^{-1}}(h(x,y)) = I_2,$$
où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

Indication ▼ Correction ▼ [002637]

Exercice 4451

Calculer les matrices hessiennes des fonctions f définies par les expressions suivantes sur leur domaine de définition naturel :
$$\sin(xyz), \quad \sin^2(y/x).$$

Indication ▼ Correction ▼ [002638]

Exercice 4452

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient r et θ les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'association
$$]0,+\infty[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$
soit un changement de variables. Soit F la fonction définie par
$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
C'est "l'expression de f en coordonnées polaires". Montrer que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta). \tag{6}$$

Cette formule calcule “le Laplacien en coordonnées polaires.” L’exercice ne dépend pas de la connaissance du Laplacien cependant.

Indication ▼ Correction ▼ [002639]

Exercice 4453

Les variables étant notées x et t, trouver la solution générale $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de “l’équation des ondes”, à savoir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{7}$$

Trouver ensuite la solution unique de l’équation des ondes qui satisfait aux conditions initiales

$$f(x,0) = \sin x, \ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -\cos x. \tag{8}$$

Indication ▼ Correction ▼ [002640]

Exercice 4454 *** I

Soit $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

Correction ▼ [005889]

Exercice 4455 ***

Trouver une application non constante $f\ :\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l’application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)$ ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de g est $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

Correction ▼ [005904]

Exercice 4456 *** I

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que f est une rotation affine.

Correction ▼ [005905]

178 223.07 Extremums locaux

Exercice 4457

Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0,0)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002641]

Exercice 4458

Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$$f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$$

Indication ▼ Correction ▼ [002642]

Exercice 4459

1. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^2 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Montrer que la fonction réelle F des deux variables x et y définie dans un voisinage de $(0,0)$ par $F(x,y) = f(x)f(y)$ n'a pas d'extremum relatif en $(0,0)$. Est-ce que le point $(0,0)$ est quand même critique ? Si oui caractériser sa nature.
2. Déterminer les points critiques, puis les minima et les maxima locaux de
$$f(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$
Remarque : en utilisant la périodicité de la fonction, on peut limiter le nombre de cas à étudier.

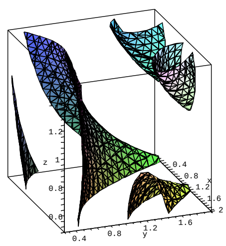
Indication ▼ Correction ▼ [002643]

Exercice 4460

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface de niveau

$$\sin(\pi xy) + \sin(\pi yz) = 1,$$

au point de coordonnées $(1, \frac{1}{6}, 1)$. Identifier, en ce point, un vecteur perpendiculaire à la surface. Votre résultat est-il compatible avec la figure ci-dessous ? Expliquer.



Indication ▼ Correction ▼ [002644]

Exercice 4461

Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane d'équation $f(x,y) = ye^x + e^y \sin(2x) = 0$.

1. Appliquer le théorème des fonctions implicites à la courbe $\mathscr{C}$ au point $(0,0)$.
2. Déterminer la limite de y/x quand (x,y) tend le long la courbe $\mathscr{C}$ vers $(0,0)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002645]

Exercice 4462

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction f de deux variables définie par $f(x,y) = x\,(x+1)^2 - y^2$ et préciser la nature de chacun d'eux.

2. Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geqslant 0$. (*Indication* : Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geqslant 0$).
3. Montrer que le point $(-1,0)$ est un point isolé de la partie

$$\mathscr{C} = \{(x,y); f(x,y) = 0\}$$

du plan, c'est-à-dire, le point $(-1,0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap \mathscr{C} = \{(-1,0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1,0)$ et de rayon ε.
4. Énoncer le théorème des fonctions implicites.
5. Montrer que, quel que soit le point (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ distinct de $(-1,0)$, au moins une des deux alternatives (i) ou (ii) ci-dessous est vérifiée :
   (i) Il existe une fonction h de classe C^1 de la variable x définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(x_0) = y_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0,y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y) = 0$ il faut et il suffit que $y = h(x)$.
   (ii) Il existe une fonction k de classe C^1 de la variable y définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(y_0) = x_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0,y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y) = 0$ il faut et il suffit que $x = k(y)$.

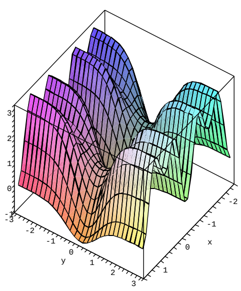
Indication ▼ Correction ▼ [002646]

Exercice 4463

On considère la fonction

$$f(x,y) = (1+2\cos^2(\pi x))(1-\exp(-y^2)) + \sin(\pi x).$$

Son graphe est reproduit dans la figure ci-dessous.



1. Trouver tous les points critiques de f et déterminer leur nature. Vos résultats sont-ils compatibles avec le graphe de la fonction, reproduit ci-dessus ?
2. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point de coordonnées $(1,1,f(1,1))$. Tracer la droite d'intersection de ce plan avec le plan xOy.

[002654]

Exercice 4464 Étude de points critiques

Chercher les extrémums des fonctions $f(x,y)$ suivantes :

1. $3xy - x^3 - y^3$

2. $-2(x-y)^2+x^4+y^4$
3. $x^2y^2(1+3x+2y)$
4. $2x+y-x^4-y^4$
5. $\frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x,y>0$
6. xe^y+ye^x
7. $x(\ln^2 x+y^2)$, $x>0$
8. $\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-x)^2}$
9. $MA+MB-MO, \quad O=\text{mil}(A,B)$

Correction ▼ [004191]

Exercice 4465 Distances aux sommets d'un triangle

Soit $A\in\mathbb{R}^p$ fixé et $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, M\mapsto AM^2$ $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, M\mapsto AM$ (distance euclidienne)

1. Calculer les gradients de f et g en un point M.
2. Soient A,B,C trois points non alignés du plan. Trouver les points M du plan réalisant le minimum de :
   (a) $MA^2+MB^2+MC^2$.
   (b) $MA+MB+MC$.
   (c) $MA\times MB\times MC$.

Correction ▼ [004192]

Exercice 4466 Aire d'un triangle

Soit ABC un triangle de cotés a,b,c.

1. Calculer l'aire, S, de ABC en fonction de a,b,c.
2. Montrer que $\frac{S}{a^2+b^2+c^2}$ est maximal lorsque ABC est équilatéral.

Correction ▼ [004193]

Exercice 4467 Centrale MP 2000

On considère un vrai triangle ABC et f la fonction définie par : $f(M)=d(M,AB)\times d(M,AC)\times d(M,BC)$. Montrer que f admet un maximum à l'intérieur du triangle ABC, et caractériser géométriquement le point M_0 où f est maximale.

Correction ▼ [004194]

Exercice 4468 Loi de réfraction

Soient dans $\mathbb{R}^2$: $A=(0,a)$, $B=(b,-c)$ et $M=(x,0)$ $(a,b,c>0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de A à M et v_2 de M à B. On note $\alpha_1=\overline{(\vec{j},\vec{MA})}$ $\alpha_2=\overline{(-\vec{j},\vec{MB})}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque $\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

[004195]

Exercice 4469 Centrale MP 2001

Soit f une forme linéaire sur E espace euclidien et $g(x)=f(x)e^{-\|x\|^2}$. Montrer que g admet un minimum et un maximum.

Correction ▼ [004196]

Exercice 4470 Centrale MP 2001

D_1, D_2, D_3 sont trois droites d'un plan portant les côtés d'un triangle équilatéral de côté a. On pose

$$\varphi : D_1 \times D_2 \times D_3 \to \mathbb{R}, (M,N,P) \mapsto MN + NP + PM.$$

Déterminer $\min \varphi$ et les triplets (M,N,P) où ce minimum est atteint.

Correction ▼ [004197]

Exercice 4471 Centrale MP 2006

E désigne l'espace affine euclidien classique. D_1, D_2, D_3 sont trois droites deux à deux non parallèles. Soit $f : D_1 \times D_2 \times D_3 \to \mathbb{R}, (M_1, M_2, M_3) \mapsto \|\vec{M_1M_2}\|^2 + \|\vec{M_2M_3}\|^2 + \|\vec{M_3M_1}\|^2$.

1. Montrer que f admet un minimum atteint pour un unique triplet.
2. Dans le cas où D_1, D_2, D_3 sont coplanaires et délimitent un triangle équilatéral, trouver ce triplet.

Correction ▼ [004198]

Exercice 4472 Plus court chemin, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005

Déterminer le plus court chemin entre les pôles nord et sud d'une sphère en dimension 3.

Correction ▼ [004199]

Exercice 4473 Extremums liés, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^n$, f de classe $\mathscr{C}^1$ sur B et $x \in B$ tel que $f(x) = \max\{f(y),\, y \in B\}$.
Montrer que $\nabla f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \geqslant 0$.

Correction ▼ [004200]

Exercice 4474 **T

Trouver les extrema locaux de

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{array}$

Correction ▼ [005558]

Exercice 4475 ***

Maximum du produit des distances aux cotés d'un triangle ABC du plan d'un point M intérieur à ce triangle (on admettra que ce maximum existe).

Correction ▼ [005559]

Exercice 4476 **

Soit a un réel strictement positif donné. Trouver le minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$.

Correction ▼ [005560]

Exercice 4477 ***

Maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

Correction ▼ [005902]

Exercice 4478 *

Minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, a réel donné.

Correction ▼ [005903]

179 223.08 Fonctions implicites

Exercice 4479

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$y^2(x^2+1)+x^2(y^2+1)=1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $b>0$ tel que le point de coordonnées $(1/2,b)$ se trouve sur $\mathscr{C}$. Déterminer b, puis déterminer l'équation de la droite tangente à $\mathscr{C}$, passant par $(1/2,b)$.
2. Trouver l'unique fonction $\varphi : x \in]-1,1[\to \varphi(x) \in \mathbb{R}^+$ telle que $(x,\varphi(x)) \in \mathscr{C}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Montrer que $\varphi(-x)=\varphi(x)$ et que φ est décroissante sur $[0,1[$. Tracer $\mathscr{C}$.
3. Énoncer le théorème des fonctions implicites et montrer qu'il existe exactement deux points de la courbe $\mathscr{C}$ où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas pour écrire, au voisinage de chacun de ces deux points, y comme fonction de x.

[002653]

Exercice 4480 **

Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (e^x-e^y, x+y) \end{array}$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Correction ▼ [005890]

Exercice 4481 ***

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que l'équation $y^{2n+1}+y-x=0$ définit implicitement une fonction φ sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)$, $[y^{2n+1}+y-x=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)]$.
Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_0^2 \varphi(t)\,dt$.

Correction ▼ [005891]

Exercice 4482 ***

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction implicitement définie sur un voisinage de 0 par l'égalité $e^{x+y}+y-1=0$.

Correction ▼ [005892]

180 223.99 Autre

Exercice 4483

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues en 0 et telle que :

$$\forall a\in\mathbb{R}^2-\{0\}, \forall t>0, f(ta)=tf(a).$$

Montrer que f est linéaire. [001861]

Exercice 4484

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application C^1 sur un ouvert convexe O telle que :

$$\forall a\in O, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)=0.$$

Montrer que f est constante sur O. [001862]

Exercice 4485

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Montrez que si $\|\nabla f(x)\| \leqslant M$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\|x-y\|, \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n \; .$$

[001863]

Exercice 4486 Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Montrer que : $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \;\; (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$
2. Déterminer : $m = \mathrm{Inf}\{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n 1/x_i)$ tels que $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0\}$
3. Déterminer : $M = \sup\{|x + 2y + 3z + 4t|$ tels que $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \; , x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant 1\}$

[001864]

Exercice 4487

On considère la fonction $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Tracer les lignes de niveau $f(x, y) = 2, f(x, y) = 4$.
2. Tracer le graphe de la fonction f. Expliquer votre dessin en quelques phrases, en identifiant notamment les intersections du graphe de f avec les plans parallèles aux trois plans des coordonnées.

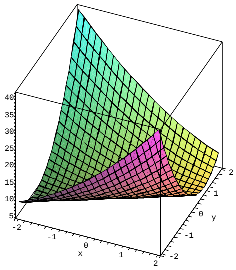
[002648]

Exercice 4488

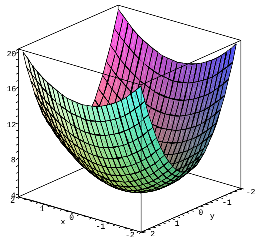
On considère les quatre surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 - \exp(2x^2 + y^2) = 0 \quad & (\Sigma_1) \\ z = x^2 + 3y^2 + 4 \quad & (\Sigma_2) \\ z - (x - 2y)^2 - 4 = 0 \quad & (\Sigma_3) \\ \exp(x^2 + y^2) + \exp(y^2 + z^2) = 3 \quad & (\Sigma_4) \end{aligned}$$

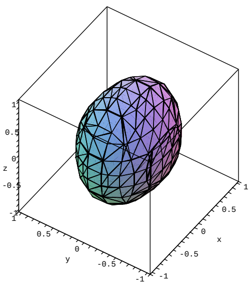
Les quatre surfaces sont tracées dans les parties A, B, C et D de la figure sur la page suivante. Indiquer quelle surface correspond à quelle partie de la figure. On justifiera très brièvement ses réponses.



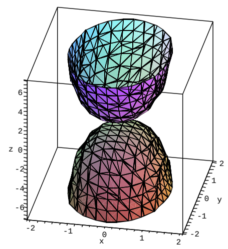
A



B



C



D

[002655]

Exercice 4489

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^n$ par $f(x_1,\dots,x_n) = \sqrt[n]{x_1\dots x_n}$. Chercher ses extrema quand $x_1 + \cdots + x_n = n$. En déduire que la moyenne géométrique de n nombres positifs est plus petite que leur moyenne arithmétique.

[002684]

Exercice 4490 **

Trouver toutes les applications φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application f de $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

Correction ▼ [005561]

Exercice 4491 **

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

1. $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (en utilisant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x+2y$)
2. $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x > 0\}$ (en passant en polaires).

Correction ▼ [005562]

181 224.01 Intégrale multiple

Exercice 4492

Calculer $I_1 = \iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x,y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\right\}$.

Calculer $I_2 = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 < x, x^2+y^2 > y\right\}$.

Calculer $I_3 = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in [0,1]^2/x^2+y^2 \geqslant 1\right\}$.

Calculer $I_4 = \iint_D \frac{1}{y\cos(x)+1}dxdy$ où $D = [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{1}{2}]$.

Calculer $I_5 = \iiint_D zdxdydz$ où $D = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3/y^2+z \leqslant 1, x^2+z \leqslant 1\right\}$.

Calculer $I_5 = \iint_D xydxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x,y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec $a,b > 0$. [001907]

Exercice 4493

Représenter et calculer le volume de $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/-1 \leqslant z \leqslant 1, x^2+y^2 \leqslant z^2+1\right\}$. [001908]

Exercice 4494

Déterminer le centre de gravité du culbuto (homogène), *i.e.* le cône

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/z \in [0,1], x^2+y^2 \leqslant z^2\right\}$$

auquel on adjoint sur sa base une demi-boule. [001909]

Exercice 4495

Soit $D = [0,1]^2$. Calculer :

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}.$$

[001910]

Exercice 4496

Soit D le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer :

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy.$$

[001911]

Exercice 4497

Soit $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2-2y \geqslant 0, x^2+y^2-1 \leqslant 0\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

[001912]

Exercice 4498

Soit $D = \{(x^2+y^2)^2 \leqslant xy\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy.$$

[001913]

Exercice 4499

Soient $a, b > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse $E = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$ par deux méthodes différentes.
(On rappelle que l'aire d'un domaine D vaut $\iint_D dx\, dy$.) [001914]

Exercice 4500

Soit $a > 0$ et D le domaine délimité par la courbe d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$. Calculer l'aire de D.
[001915]

Exercice 4501

Soient $0 < a \leqslant b, 0 < c \leqslant d$, et $D = \{ax^2 \leqslant y \leqslant bx^2, \frac{c}{x} \leqslant y \leqslant \frac{d}{x}\}$. Calculer l'aire de D.
(Indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$.) [001916]

Exercice 4502

Soit $p > 0$ et $D = \{y^2 - 2px \leqslant 0, x^2 - 2py \leqslant 0\}$. Calculer :

$$\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\, dx\, dy.$$

(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$.) [001917]

Exercice 4503

Soit $R > 0$, $D_R = \{x^2+y^2 \leqslant R^2, x > 0, y > 0\}$ et $K_R = [0, R]^2$. Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leqslant \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leqslant \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\, dt.$$

[001918]

Exercice 4504

Soient $a, R > 0$. Dans le plan (yOz), soit D le disque de centre $(0, a, 0)$ et de rayon R. En tournant autour de l'axe (Oz), le disque D engendre un domaine T (appelé un tore plein). Calculer le volume de T (c'est-à-dire l'intégrale triple $\iiint_T dx\, dy\, dz$). [001919]

Exercice 4505

Soit $D = \{x^2+y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 + y^2\}$. Calculer le volume de D. [001920]

Exercice 4506

Soit $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$. Calculer :

$$\iiint_D \frac{dx\, dy\, dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

[001921]

Exercice 4507

Quel est le volume délimité par deux cylindres de révolution d'axes (Ox) et (Oy) et de même rayon $R > 0$?

[001922]

Exercice 4508

En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2\}$; $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$;
2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec $a\,, b > 0$; $f(x,y) = x^2+y^2$;
3. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\,, 0 \leqslant z \leqslant h\}$ avec $h > 0$; $f(x,y,z) = z$;
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2\,, 1/x \leqslant y \leqslant 2/x\}$; $f(x,y) = x+y$ (changement de variable $u = y/x^2\,, v = xy$) ;
5. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\,, y \geqslant 0\,, z \geqslant 0\,, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$; $f(x,y,z) = xyz$;
6. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$; $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^\alpha$.

[001923]

Exercice 4509

Identifier les ensembles suivants et calculer leur aire s'ils sont dans $\mathbb{R}^2$, leur volume s'ils sont dans $\mathbb{R}^3$.

1. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec $a,b > 0$;
2. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$ avec $a,b,c > 0$; qu'obtient-on dans le cas particulier où D est la boule unité de $\mathbb{R}^3$?
3. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant R\,, 0 \leqslant z \leqslant h\right\}$ avec $R,h > 0$;
4. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\,, y \geqslant 0\,, z \geqslant 0\,, x+y+z \leqslant 1\right\}$;
5. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant z^2/h^2\,, 0 \leqslant z \leqslant h\right\}$ avec $h > 0$.

[001924]

Exercice 4510

Calculer les coordonnées du centre d'inertie (de gravité) du domaine D :

1. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\,, x \geqslant 0\,, y \geqslant 0\right\}$ (le quart d'ellipse) ;
2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\,, x \geqslant 0\,, |y| \leqslant ax\right\}$;
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 9\,, (x-1)^2+y^2 \geqslant 1\}$.

[001925]

Exercice 4511

1. **Théorème de Guldin** Soit D_0 un domaine tracé dans le demi-plan $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\}$. Si l'on fait tourner D_0 autour de l'axe Oz, on obtient un domaine D de $\mathbb{R}^3$. En utilisant les coordonnées cylindriques. montrer que
$$Vol\,(D) = 2\pi Aire\,(D_0) \cdot x_G\,,$$
où (x_G, z_G) sont les coordonnées du centre d'inertie du domaine D_0.
2. Calculer les volumes des domaines suivants :
   (a) le tore obtenu en faisant tourner autour de Oz le domaine $D_0 = \{(x,0,z) \mid \frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} \leqslant 1\}$, où $a < c$;
   (b) $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 4R^2\,, x^2+y^2 \leqslant R^2\right\}$, où $R > 0$.

[001926]

Exercice 4512

On pose $I=\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$ et $J=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}\,dxdy$. Calculer J et en déduire la valeur de I. [001927]

Exercice 4513

On note D le domaine délimité par les droites $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.

1. Calculer (directement) $I=\iint_D (x-y)dxdy$.
2. Calculer I au moyen du changement de variable $u=x+y$ et $v=x-y$.

[001928]

Exercice 4514

Soit $D=\{(x,y);x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1\}$. Calculer $\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$. [001929]

Exercice 4515 Intégrales doubles

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$:

1. $D=\{y\geqslant 0,x+y\leqslant 1,y-x\leqslant 1\}$,
   $f(x,y)=x^2y$.
2. $D=\{x^2+y^2\leqslant R^2\}$,
   $f(x,y)=x^2y$.
3. $D=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$,
   $f(x,y)=x^2+y^2$.
4. $D=\{0\leqslant x\leqslant 1-\frac{y^2}{4}\}$,
   $f(x,y)=x^2+y^2$.
5. $D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}$,
   $f(x,y)=(x+y)^2$.
6. $D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}$,
   $f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$.
7. $D=\{x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$,
   $f(x,y)=x+y+1$.
8. $D=\{|x+y|\leqslant 1,|x-y|\leqslant 1\}$,
   $f(x,y)=\ln(x+y+1)$.
9. $D=\{x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant \pi\}$,
   $f(x,y)=(x+y)\sin x\sin y$.
10. $D=\{|x|\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$,
    $f(x,y)=(1+x^2+y^2)^2$.
11. $D=\{x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant a\}$,
    $f(x,y)=x+y+\sqrt{a^2+(x+y)^2}$.
12. $D=\{x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1\}$,
    $f(x,y)=xy\sqrt{x^2+4y^2}$.
13. $D=\{x^2+y^2-2y\leqslant 0\}$,
    $f(x,y)=y\exp(x^2+y^2-2y)$.

14. $D=\{y^2 \leqslant 2px, x^2 \leqslant 2py\}$,
$f(x,y)=\exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)$.

Correction ▼ [004381]

Exercice 4516 ESEM 94

Calculer $I=\iint_\Delta xy\,dxdy$ où $\Delta=\{(x,y)$ tel que $y \geqslant 0$ et $(x+y)^2 \leqslant 2x/3\}$.

Correction ▼ [004382]

Exercice 4517 Ensi PC 1999

Calculer $I=\iint_\Delta (x^2+xy+y^2)\,dxdy$ où $\Delta=\{(x,y)$ tel que $y \geqslant 0$ et $x^2+y^2-2x \leqslant 0$ et $x^2+y^2-2y \leqslant 0\}$.

Correction ▼ [004383]

Exercice 4518 Intégrales triples

Calculer $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$:

1. $D=\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$,
$f(x,y,z)=\frac{1}{(x+y+z+1)^3}$.
2. $D=\{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$,
$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} \quad (a>R>0)$.
3. $D=\{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$,
$f(x,y,z)=xyz$.
4. $D=\{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$,
$f(x,y,z)=\frac{1}{(x+y+z+1)^2}$.
5. $D=\{x^2+y^2 \leqslant R^2, 0 \leqslant z \leqslant a\}$,
$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3z(x^2+y^2)$.
6. $D=\{x^2+y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$,
$f(x,y,z)=\frac{z}{(x^2+y^2+1)^2}$.
7. $D=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$,
$f(x,y,z)=x^2+y^2$.

Correction ▼ [004384]

Exercice 4519 Ensi Chimie P 93

1. Calculer $\iiint_D \frac{dxdydz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$ avec $D=\{(x,y,z)$ tel que $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z\}$.
2. En déduire $\int_{t=0}^{+\infty}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

Correction ▼ [004385]

Exercice 4520 Ensi Chimie P 93

Soit $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.
En calculant $J=\iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}$ avec $D=\{(x,y)$ tel que $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ de deux façons différentes, trouver I.

Correction ▼ [004386]

Exercice 4521 Ensi Chimie P 93

Soit T un tore plein d'axe (Oz) et de rayons R, r $(R>r)$. Calculer $\iiint_T (x^2+y^2)\,dxdydz$.

Correction ▼ [004387]

Exercice 4522 $MF+MF'$

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$, E le domaine limité par $\mathscr{E}$ et F,F' les foyers de $\mathscr{E}$. Calculer $I=\iint_{M\in E}(MF+MF')\,dxdy$.
On effectuera le changement de variable : $x=\sqrt{u^2+c^2}\cos v$, $y=u\sin v$ où $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Correction ▼ [004388]

Exercice 4523 $\int_{x=0}^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}dx$

1. Montrer l'existence de $I=\int_{x=0}^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}dx$.
2. Montrer que $I=\iint_D\frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}dxdy$ où $D=[0,\frac{\pi}{2}]^2$.
3. En déduire la valeur de I.

Correction ▼ [004389]

Exercice 4524 Intégrale de Gauss

Calcul de $I=\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$.

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Pour $a>0$ on note $\Delta_a=[0,a]\times[0,a]$ et C_a le quart de disque d'équations : $x^2+y^2\leqslant a^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.
   (a) Encadrer l'intégrale sur Δ_a de $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ par les intégrales de f sur des domaines du type C_b.
   (b) Calculer $\iint_{C_b}f(x,y)\,dxdy$ en polaires et en déduire la valeur de I.

[004390]

Exercice 4525 $\int_{t=0}^{1}\frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$

1. Calculer $A=\iint_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
2. Démontrer la convergence des intégrales :
   $B=\int_{\theta=0}^{\pi/4}\frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta}d\theta$, $C=\int_{\theta=0}^{\pi/4}\frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos 2\theta}d\theta$, et $D=\int_{t=0}^{1}\frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$.
3. Démontrer que $A=B$ (passer en coordonnées polaires dans A).
4. Calculer $B+C$ et $B-C$ en fonction de D.
5. En déduire les valeurs de C et D.

Correction ▼ [004391]

Exercice 4526 Aires

Calculer l'aire des domaines suivants :

1. D est la partie du disque unité située dans la concavité de l'hyperbole d'équation $xy=\frac{\sqrt{3}}{4}$.
2. D est l'intersection des domaines limités par les ellipses d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

Correction ▼ [004392]

Exercice 4527 Ensi P 90

Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Correction ▼ [004393]

Exercice 4528 Chimie P 91

On considère les courbes planes : $\mathscr{Q}_i : (x^2 = 2q_i y)$ et $\mathscr{P}_i : (y^2 = 2p_i x)$. On suppose $0 < q_1 < q_2$ et $0 < p_1 < p_2$. Calculer l'aire du "quadrilatère" limité par $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{Q}_1$ et $\mathscr{Q}_2$.

Correction ▼ [004394]

Exercice 4529 Chimie P 1996

Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $(y-x)^2 = a^2 - x^2$.

Correction ▼ [004395]

Exercice 4530 Volumes

Calculer le volume des domaines suivants :

1. D est l'intersection du cylindre de révolution d'axe Oz de rayon a et de la boule de centre O de rayon 1 $(0 < a < 1)$.
2. D est l'intersection de la boule de centre O de rayon 1 et du cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle $\frac{\pi}{4}$.
3. D est le volume engendré par la rotation d'un disque de rayon r autour d'une droite coplanaire avec le disque, située à la distance $R > r$ du centre du disque (tore de révolution ou chambre à air).

Correction ▼ [004396]

Exercice 4531 Ensi Physique P 94

Calculer le volume intérieur au paraboloïde d'équation $x^2 + y^2 = 2pz$ et extérieur au cône d'équation $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ $(p > 0,\ \lambda > 0)$.

Correction ▼ [004397]

Exercice 4532 Volume

Dans le plan Oxy on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ $(a > 0,\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4})$. En tournant autour de Ox, $\mathscr{C}$ engendre une surface dont on calculera le volume qu'elle limite (on posera $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta\cos\phi$, $z = \rho\sin\theta\sin\phi$).

Correction ▼ [004398]

Exercice 4533 Volume

On coupe une demi-boule par un plan P parallèle à sa base. Quelle doit être la position de P pour que les deux morceaux aient même volume ? (Donner un résultat approché)

Correction ▼ [004399]

Exercice 4534 Somme double

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$. [004400]

Exercice 4535 Nombre de couples (a,b) tel que $a^2 + b^2 \leqslant n$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $E_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p^2 + q^2 \leqslant n\}$ et $C_n = \operatorname{Card}(E_n)$.
Interpréter C_n comme une aire et donner un équivalent de C_n lorsque $n \to \infty$. [004401]

Exercice 4536 Ens MP 2002

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_0^1 f = 1$. Pour $\psi \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ on pose

$$\Lambda_n(\psi) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) f(x_1)\ldots f(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Montrer que $\Lambda_n(\psi) \to \psi\left(\int_{x=0}^{1} x f(x)\,dx\right)$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004402]

Exercice 4537 **

Calculer les intégrales multiples suivantes

1. $I = \iint_D (x+y)\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$.
2. $I = \iint_{[-1,1]^2} |x+y|\,dxdy$.
3. $I = \iint_D xy\,dxdy$ où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$.
4. $I = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy$.
5. $I = \iint_{x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1} \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.
6. $I = \iiint_{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1} xyzdxdydz$.
7. $I = \iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant 1} zdxdydz$.

Correction ▼ [005908]

Exercice 4538 ***

Soient $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in]0,+\infty[^4$ tel que $p_1 < p_2$ et $q_1 < q_2$.
Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x$ et $2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2y\}$.

Correction ▼ [005910]

Exercice 4539 *** I

Calculer le volume de $B = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n /\ x_1^2+\dots+x_n^2 \leqslant 1\}$ (boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour $\|\ \|_2$).

Correction ▼ [005911]

Exercice 4540 **

Calculer le volume de l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = 1$.

Correction ▼ [005912]

Exercice 4541 ***

Calculer $I = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1} (x^2 - y^2)\,dxdy$.

Correction ▼ [005914]

---

182 224.02 Calcul approché d'intégrale

183 224.03 Intégrale de Riemann dépendant d'un paramètre

Exercice 4542 Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to 0} \int_{t=x}^{2x} \frac{\cos t \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \operatorname{sh} t}\,dt$.

Correction ▼ [004313]

Exercice 4543 Calcul de limite, Ensi P 90

Calculer les limites : $\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{t}{\tan^2 t}\,dt$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt$.

Correction ▼ [004314]

$\frac{t}{\tan^2 t}=\frac{1}{t}+\varphi(t)$ avec φ prolongeable par continuité en 0, donc $\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{t}{\tan^2 t}\,dt=\ln 3$.
$\frac{t^2}{t+e^{3t}}=t^2+o(t^2)$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt=\frac{1}{3}$. **Exercice 4544** Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_{t=3}^{x^2+x}\frac{\sin t\,dt}{3+\ln(\ln t)}$.

Correction ▼ [004315]

Exercice 4545 Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to 0^+}\int_{t=x}^{x^2}\frac{e^{-t}\,dt}{\sin t\ln t}$.

Correction ▼ [004316]

Exercice 4546 Série d'intégrales, Esem 91

Établir la convergence et calculer la somme de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

Correction ▼ [004317]

Exercice 4547 $\sin(t)/(t+x)$

1. Prouver l'existence pour $x>0$ de $I(x)=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}I(x)$.

Correction ▼ [004318]

Exercice 4548 Calcul de limite

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{x\to 0^+}\int_{t=0}^{1}\frac{xf(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004319]

Exercice 4549 Calcul d'équivalent, Mines 1999

Donner un équivalent pour $x\to+\infty$ de $\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\sin t}{x^2+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004320]

Exercice 4550 Calcul de limite

Soit $a>0$. Donner le DL en $x=1$ à l'ordre 3 de $f(x)=\int_{t=a/x}^{ax}\frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004321]

Exercice 4551 $(\int f^x)^{1/x}$

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ continue. On pose $\varphi(x)=\left(\int_{t=a}^{b}(f(t))^x\,dt\right)^{1/x}$.

1. Montrer que $\varphi(x)\to\max(f)$ lorsque $x\to+\infty$.
2. On suppose $f>0$ et $b-a=1$. Montrer que $\varphi(x)\to\exp\left(\int_{t=a}^{b}\ln(f(t))\,dt\right)$ lorsque $x\to 0^+$.

Correction ▼ [004322]

Exercice 4552 $t^n f(t)$

Soit $I_n=\int_{t=0}^{1}t^n\ln(1+t^2)\,dt$. Montrer que $I_n\to 0$ lorsque $n\to\infty$.

[004323]

Exercice 4553 $t^n f(t)$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^{1} t^n f(t)\,dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

[004324]

Exercice 4554 $f(t^n)$

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^{1} f(t^n)\,dt \to f(0)$ lorsque $n \to \infty$.
2. Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $\int_{t=0}^{1} \frac{t^n\,dt}{1+t^n}$.
3. Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $-1 + \int_{t=0}^{1} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Correction ▼ [004325]

Exercice 4555 $f(t^n)$

Donner les deux premiers termes du DL pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{1+t^n}$.

Correction ▼ [004326]

Exercice 4556 $f(t^n)$

Donner les deux premiers termes du DL pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^{1} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Correction ▼ [004327]

Exercice 4557 $f(t^n)$

Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $\int_{t=1}^{1+1/n} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Correction ▼ [004328]

Exercice 4558 Calcul de limite

Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{x+2}\,dx$.

[004329]

Exercice 4559 Calcul de limite

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{1} nf(t)e^{-nt}\,dt$.

Correction ▼ [004330]

Exercice 4560 $(1-x/n)^n$, Ensi PSI 1998

Soit $x \in [0,n]$. Montrer que $(1-x/n)^n \leqslant e^{-x}$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{n} (1-x/n)^n\,dx$.

Correction ▼ [004331]

Exercice 4561 Équation intégrale, Ensi P 91

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$.

Correction ▼ [004332]

Exercice 4562 $\tan^n t$, Ensi Physique P 94

On pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t\,dt$.

1. Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Calculer I_n en fonction de n.

3. Que peut-on en déduire ?

Correction ▼ [004333]

Exercice 4563 Calcul de limite, École de l'air 94

Chercher $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{t^n-t^{2n}}{1-t}\,dt$.

Correction ▼ [004334]

Exercice 4564 Approximation de la mesure de Dirac

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ continue atteignant son maximum en un unique point $c\in\,]a,b[$.

1. Soit $\mu>0$ tel que $[c-\mu,c+\mu]\subset[a,b]$. Chercher $\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t=a}^b f^n(t)\,dt \Big/ \int_{t=c-\mu}^{c+\mu} f^n(t)\,dt\right)$.
2. Soit $g:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t=a}^b f^n(t)g(t)\,dt \Big/ \int_{t=a}^b f^n(t)\,dt\right)$.

Correction ▼ [004335]

Exercice 4565 Équation intégrale

Soit $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}^+$ continue telle que $f(x)\int_{t=0}^x f^2(t)\,dt\to\ell\neq 0$ (lorsque $x\to+\infty$). Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Correction ▼ [004336]

Exercice 4566 Convolution

Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues et $a,b\in\mathbb{R}$. On pose $\varphi(x)=\int_{t=a}^b f(t)g(x-t)\,dt$.

1. Montrer que φ est continue et que si g est de classe $\mathscr{C}^k$, alors φ l'est aussi.
2. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^1$ (et g continue), alors φ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.

[004337]

Exercice 4567 Convolution (Mines MP 2003)

Soient $f,g\in\mathscr{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On pose $h(x)=\int_{t=0}^x f(x-t)g(t)\,dt$.

1. Existence et continuité de h.
2. Peut-on inverser f et g ?
3. On suppose f intégrable sur $[0,+\infty[$ et g bornée. Montrer que h est bornée.
4. On prend $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ et $g(x)=\cos(\alpha x)$ avec $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. h est-elle bornée (on pourra étudier les cas $\alpha=0$ et $\alpha=1$) ?

Correction ▼ [004338]

Exercice 4568 Calcul d'intégrale

1. Calculer $\varphi(a)=\int_{t=0}^1 \frac{dt}{1+at}$.
2. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^1 \frac{t\,dt}{(1+at)^2}$.

Correction ▼ [004339]

Exercice 4569 Fonction définie par une intégrale

On pose $\varphi(x)=\int_{t=0}^1 e^{-x/t}\,dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Vérifier que $\varphi''(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

[004340]

Exercice 4570 Fonction définie par une intégrale, Mines 1999

Soit $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx$. Montrer que $I(\alpha)$ existe et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. Écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série. [004341]

Exercice 4571 Fonction définie par une intégrale

On pose pour $x \geqslant 0$: $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\, dt$.
Calculer explicitement $f'(x)$ et en déduire $f(x)$ (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).

Correction ▼ [004342]

Exercice 4572 Fonction définie par une intégrale

On pose $I(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)\, dt$.

1. Montrer que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer $I'(x)$ et en déduire $I(x)$.

Correction ▼ [004343]

Exercice 4573 Intégrale de Gauss

On considère les fonctions définies par : $f(x) = \left(\int_{t=0}^{x} e^{-t^2}\, dt\right)^2$ et $g(x) = \int_{t=0}^{1} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.

1. Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.
2. Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Correction ▼ [004344]

Exercice 4574 Intégrale de Gauss, Ensi PC 1999

On donne : $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Existence et valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-(t^2+a^2/t^2)}\, dt$.

Correction ▼ [004345]

Exercice 4575 Fonction définie par une intégrale

1. Soit $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\, dt$. Prouver que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Chercher une relation simple entre I et I'.
3. En déduire la valeur de $I(x)$ $\left(\text{on admet que } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Correction ▼ [004346]

Exercice 4576 Fonctions définies par des intégrales

On pose, pour x réel, $F(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{1-\cos tx}{t^2}\, dt$ et $G(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{1-\cos tx}{t\sqrt{1+t^2}}\, dt$.

1. Montrer que les intégrales $F(x)$ et $G(x)$ convergent absolument pour tout x réel et que $F(x) = |x|F(1)$.
2. Montrer que la fonction $F - G$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0.

[004347]

Exercice 4577 Théorème de division des fonctions $\mathscr{C}^\infty$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Vérifier que $g(x) = \int_{t=0}^{1} f'(tx)\,dt$. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Montrer de même que la fonction $g_k : x \mapsto \frac{1}{x^k}\left(f(x)-f(0)-xf'(0)-\dots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)\right)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0.

[004348]

Exercice 4578 $y''+y=f$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On pose $g(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,dt$. Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle : $y''+y=f(x)$ telle que $y(0)=y'(0)=0$.

[004349]

Exercice 4579 Fonction définie par une intégrale

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On définit pour $x\in\mathbb{R}^*$ et $y\in\mathbb{R}$: $g(x,y) = \frac{1}{x}\int_{t=x}^{xy} f(t)\,dt$.

1. Montrer que g peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose de plus f dérivable en 0. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

Correction ▼ [004350]

Exercice 4580 Fonctions définies par des intégrales

Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} |x+t|\sin t\,dt$.
2. $f(x) = \int_{t=x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
3. $f(x) = \int_{t=x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.
4. $f(x) = \int_{t=0}^{1} \frac{e^t\,dt}{t+x}$.
5. $f(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} x\exp\left(\frac{\sin t}{x}\right)dt$.
6. $f(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004351]

Exercice 4581 Fonction définie par une intégrale

Montrer qu'il existe un unique réel $x\in[0,\pi]$ tel que $\int_{\theta=0}^{\pi}\cos(x\sin\theta)\,d\theta = 0$. Calculer une valeur approchée de x à 10^{-2} près.

Correction ▼ [004352]

Exercice 4582 Développement en série, Ensam PSI 1998, Mines MP 1999

Soit $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{e^x-1}\,dx$.

1. Justifier l'existence de $I(\alpha)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que : $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{b+n^2}$.
3. Donner un équivalent de $I(\alpha)$ quand $\alpha\to+\infty$.

Correction ▼ [004353]

Exercice 4583 Formule de Stirling

Montrer que $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ pour x réel tendant vers $+\infty$.

Correction ▼ [004354]

Exercice 4584 Développement en série, Mines 1999

Soit $\theta \in]0,\pi[$. Montrer que $\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{e^{-i\theta}-t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(in\theta)}{n}$. [004355]

Exercice 4585 Fonction définie par une intégrale, X 1999

1. Calculer $f(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(at)\,dt$.
2. Soit $g(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{\sin(at)}{t}\,dt$; calculer $\lim_{a\to+\infty} g(a)$.

Correction ▼ [004356]

Exercice 4586 Développement asymptotique

Soient $J(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}$ et $K(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}$.
Calculer $\lim_{x\to 0^+}(J(x)-K(x))$ et montrer que $J(x) = -\ln x + 2\ln 2 + o_{x\to 0^+}(1)$. [004357]

Exercice 4587 Transformée de Laplace

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (pas forcément absolument).
On pose $\varphi(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que φ est continue en 0.

Correction ▼ [004358]

Exercice 4588

On pose pour $n \geqslant 2$: $v_n = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{1+x^n}\,dx$. Montrer que la suite (v_n) converge. Nature de la série $\sum(v_n - 1)$?

Correction ▼ [004359]

Exercice 4589

On pose pour $n \geqslant 2$ $u_n = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$. Montrer que la suite (u_n) converge, puis que la série $\sum(u_n - 1)$ converge également.

Correction ▼ [004360]

Exercice 4590 Centrale MP 2000

Domaine de définition de $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,dx$. Calculer $I(2)$ et $I(3)$. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ en $+\infty$.

Correction ▼ [004361]

Exercice 4591 Centrale MP 2000

On considère $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Domaine de définition, monotonie, convexité de f (sans dériver f).
2. Continuité, dérivabilité, calcul de $f^{(k)}(x)$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en 1.
4. Calculer $f(1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Correction ▼ [004362]

Exercice 4592 Ensae MP* 2000

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{n+k}$.

Correction ▼ [004363]

Exercice 4593 Polytechnique MP* 2000

Existence et continuité de $f(x) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|}\cos(x+t)}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dt$. Montrer que f est intégrable.

Correction ▼ [004364]

Exercice 4594 Centrale MP 2001

1. Développer, pour tout $x > 0$, $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,dt$ en série de fractions rationnelles.
2. Montrer qu'en 0^+, $s(x)$ est équivalente à $\frac{\pi}{2x}$.

Correction ▼ [004365]

Exercice 4595 X MP* 2001

Étudier $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004366]

Exercice 4596 Ensi MP 2004

Soit $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,dt$.

1. Trouver le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Calculer $f - f'$.
4. Donner un équivalent simple de $f'(x)$ pour $x \to +\infty$.
5. Montrer que $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.
6. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [004367]

Exercice 4597 Ensea MP 2004

Soit $\alpha > 0$.

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-\alpha x} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer $I = \int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,dx$. Indication : écrire $I = \lim_{a\to+\infty} \int_{x=0}^{a} f(x)\,dx$.

Correction ▼ [004368]

Exercice 4598 X MP* 2000

Étudier la limite en 0+ de $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t}-\cos t}{t} e^{-xt}\,dt$.

Correction ▼ [004369]

Exercice 4599 ζ et Γ

Montrer, pour $x > 1$: $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt$. [004370]

Exercice 4600 Centrale MP 2002

Soit $f : x \mapsto \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}+t+1}$. Déterminer son domaine de définition ; étudier sa continuité et sa monotonie. Calculer $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}+t}$ et en déduire des équivalents et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Correction ▼ [004371]

Exercice 4601 Polytechnique MP 2002

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{x=0}^{\alpha} \sin(x) \exp(\lambda n \sin^2(x))\, dx$.

Correction ▼ [004372]

Exercice 4602 Centrale MP 2004

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{1}{n!} \int_{t=0}^{1} t(t-1)\dots(t-n)\, dt$.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
2. Donner un équivalent de a_n.

Correction ▼ [004373]

Exercice 4603 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, Mines-Ponts MP 2004

Soit $u_n(t)$ le terme général d'une série : $u_n(t) = t^{n-1} \sin(nx)$ avec $0 < x < \pi$.

1. Étudier la convergence de la série.
2. Calculer $\sum_{p=0}^{n} u_p(t) = S_n(t)$. Mettre $S_n(t)$ sous la forme $\frac{P_n(t)}{Q(t)}$ avec $Q(t) > \alpha$, $\alpha > 0$.
3. Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n(t)$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{1} S_n(t)\, dt$.
4. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Correction ▼ [004374]

Exercice 4604 Lemme de Lebesgue, Centrale MP 2004

Soit f continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t) \cos(nt)\, dt \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. On suppose que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit $u_n = \int_{t=0}^{n\pi} \sin^2(nt) f(t)\, dt$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand $n \to \infty$ et la préciser.

Correction ▼ [004375]

Exercice 4605 Suite d'intégrales, Centrale MP 2004

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $f_n(x) = \left(\frac{x+x^n}{2}\right)^n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction φ.
2. (a) La convergence est-elle uniforme ?
   (b) La convergence est-elle monotone ?
3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_{x=0}^{1} f_n(x)\, dx$. Montrer que $J_n \sim \frac{2}{n^2}$.

Correction ▼ [004376]

Exercice 4606 Mines-Ponts MP 2004

Soit $f(x) = \int_{t=0}^{1} \frac{1-t}{\ln t} t^x\, dt$. Étudier le domaine de définition de f, sa dérivabilité, puis calculer $f(x)$.

Correction ▼ [004377]

Exercice 4607 Mines-Ponts MP 2004

Soit $I(a) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} e^{-ax}\, dx$.

1. Quel est le domaine de définition de I ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de I.
3. Calculer $I(a)$.

Correction ▼ [004378]

Exercice 4608 ENS Lyon MP* 2004

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $F(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)e^{-itx}\,dt$ avec $a < 0 < b$. Montrer que $F(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Montrer que $F(x) = \frac{f(a)e^{-iax} - f(b)e^{-ibx}}{ix} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2}\,dt$.
4. Soit $g(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)e^{-ixt^2/2}\,dt$. Montrer que $g(x) = \frac{I.f(0)}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Correction ▼ [004379]

Exercice 4609 Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Le but de cet exercice est de prouver que P admet une racine dans $\mathbb{C}$. On suppose au contraire que P ne s'annule pas et on considère pour $r \geqslant 0$, $\theta \in [0,2\pi]$: $f(r,\theta) = \frac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})}$ et $F(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r,\theta)\,d\theta$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
2. Vérifier que $ir\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \theta}$. En déduire que F est constante.
3. Obtenir une contradiction.

[004380]

Exercice 4610 ****

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour x réel, on pose $F(x) = \int_a^b |t-x|f(t)\,dt$. Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005453]

Exercice 4611 ***

Etude complète de $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Correction ▼ [005460]

Exercice 4612 ***I

— Déterminer $\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

— Etude complète de $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Correction ▼ [005464]

Exercice 4613

Etude de $f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [005472]

Exercice 4614

Etude de $f(x) = \int_0^1 \mathrm{Max}(x,t)\,dt$.

Correction ▼ [005473]

Exercice 4615 **

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,+\infty[$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3}\, dt$.

Correction ▼ [005765]

Exercice 4616 *** I (très long) Intégrale de POISSON

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta + x^2)\, d\theta$.

1. (a) Montrer que F est paire, définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Préciser une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.
   (b) Calculer $F'(x)$.
   (c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}(F(x) - 4\pi\ln x)$.
   (d) En déduire $F(x)$ pour tout réel x.
2. (a) Quand $x \in]-1,1[$, retrouver ce résultat en écrivant d'abord $\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$ comme somme d'une série (commencer par dériver la fonction de θ).
   (b) Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire $F(x)$ pour tout réel x.

Correction ▼ [005766]

Exercice 4617 ** I Un calcul de l'intégrale de GAUSS $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
2. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser G'.
3. Montrer que la fonction $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5. En déduire I.

Correction ▼ [005767]

Exercice 4618 ***

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\, dt$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Correction ▼ [005768]

Exercice 4619 ***

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\, dt$.

Correction ▼ [005769]

Exercice 4620 **** I (très long)

Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\, dt$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ (indication : trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par ces deux fonctions).

Correction ▼ [005770]

Exercice 4621 ** I (Produit de convolution)

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues et T-périodiques (T réel strictement positif). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f*g(x) = \int_0^T f(x-t)g(t)\,dt.$$

Montrer que la fonction $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et T-périodique.

2. $*$ est donc une loi interne sur E, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Montrer que cette loi est commutative.

Correction ▼ [005771]

184 224.04 Tranformée de Laplace et transformée de Fourier

185 224.99 Autre

186 225.01 Résolution d'équation différentielle du premier ordre

Exercice 4622

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$,
2. $y' = \cos x + y$,
3. $y' + 2y = (x-2)^2$.

[000845]

Exercice 4623

Pour chacune des équations différentielles qui suit : écrire la solution passant par le point M(.,.) et tracer sommairement le graphe de la solution.

1. $y' + 2xy = 0, \quad M = (0,1)$,
2. $y' + y\tan x = \sin x \cos x \quad M = (\frac{\pi}{4}, 0)$,
3. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$, On déterminera $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

[000846]

Exercice 4624

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0,\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0,\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E_1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$
3. Intégrer (E_1) sur $]0,\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,\infty[$.

Correction ▼ [000847]

Exercice 4625

Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) + 2y(t) = 0$;
2. $\dfrac{dx}{dt} - x = 0$;

3. $y'(x)+2y(x)=0$ avec $(y-y')(0)=0$.

[000848]

Exercice 4626

Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y'-xy=0$;
2. $y'+y\tan x=0$, pour x dans $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$.

[000849]

Exercice 4627

Trouver les solutions réelles sur l'intervalle maximal de l'équation différentielle :

$$t^2y'+y=1.$$

[000850]

Exercice 4628

Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'+2xy=x.$$

1. Résoudre l'équation homogène asociée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0)=1$.

Correction ▼ [000851]

Exercice 4629

Résoudre et raccorder éventuellement :

1. $xy'-2y=x^4$.
2. $x(1+x^2)y'=y$.
3. $(x^2+1)y'+(x-1)^2y=x^3-x^2+x+1$.
4. $(e^x-1)y'+(e^x+1)y=3+2e^x$.

[000852]

Exercice 4630

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)+y(t)\\ \dot{y}(t)=3x(t)-y(t)\end{cases}$ et $\begin{cases}x(0)=2\\ y(0)=-2\end{cases}$.

Indication ▼ Correction ▼ [000853]

Exercice 4631

Résoudre l'équation différentielle de Ricatti $x^2y'=x^2y^2+xy+1$ en trouvant une solution particulière y_0 et en posant $z=\frac{1}{y-y_0}$. [000854]

Exercice 4632

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{dy(x)}{dx}+y(x)=x^2+2x$$

Intégrer (E) et montrer que par un point donné il passe une et une seule courbe intégrale. Soit H l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par M a une tangente horizontale en ce point, et I l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par ce point a un point d'inflexion en ce point. Tracer H,I et la courbe intégrale passant par $O(0,0)$. En déduire un tracé géométrique des courbes intégrales. [000855]

Exercice 4633

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' - (1-\tan(x))y = \cos(x).$$

On s'intéresse à cette équation sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. (a) Écrire l'équation homogène associée à (E), puis résoudre cette équation sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   (b) Quelle est la solution de l'équation homogène vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$? On la note g_0. Donner le tableau de variations de g_0 sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer les limites aux bornes de l'intervalle. Tracer le graphe de g_0.
   (c) Tracer sur le même dessin, rapidement, les graphes des trois solutions de l'équation homogène vérifiant respectivement $y(0) = 2$, $y(0) = 3$, $y(0) = -1$.
2. Résoudre complètement l'équation (E).
3. Résoudre de même, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, l'équation différentielle suivante :

$$y' - (1-\tan(x))y = \cos^2(x).$$

   Indication : on pourra calculer la primitive en utilisant l'exponentielle complexe, ou des intégrations par parties.
4. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$?

$$y' - (1-\tan(x))y = \cos(x) + \cos^2(x).$$

[000856]

Exercice 4634

Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que si :

$$\lim_{x\to\infty} \left(f'(x) + \alpha f(x)\right) = 0$$

alors :

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

[000857]

Exercice 4635

Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et $f \leqslant f' \leqslant 2f$.Encadrer $f(-1)$ et $f(1)$. [000858]

Exercice 4636 **IT

Résoudre sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ proposé les équations différentielles suivantes :

1) $x\ln x y' + y = x$, $I =]1,+\infty[$ 2) $x(xy'+y-x) = 1$, $I =]-\infty,0[$
3) $2xy' + y = x^4$, $I =]-\infty,0[$ 4) $y' + 2y = x^2 - 3x$, $I = \mathbb{R}$
5) $y' + y = \frac{1}{1+2e^x}$, $I = \mathbb{R}$ 6) $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$, $I =]0,\pi[$

Correction ▼ [005476]

Exercice 4637 ***I

Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I =]1,+\infty[$, $I =]-1,1[$, $I =]-1,+\infty[$, $I = \mathbb{R}$.

Correction ▼ [005477]

Exercice 4638 ***

Résoudre sur $\} -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Correction ▼ [005478]

Exercice 4639 **

Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et pèriodique de période $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période T.

Correction ▼ [005481]

Exercice 4640

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$ (E_1)
2. $y' + y = 2\sin x$ (E_2)
3. $y' - y = (x+1)e^x$ (E_3)
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$ (E_4)

Correction ▼ Vidéo ■ [006991]

Exercice 4641

Déterminer toutes les fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006992]

Exercice 4642

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0;\pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006993]

Exercice 4643 Variation de la constante

Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0;+\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0;+\infty[$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006994]

Exercice 4644

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$

2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006995]

Exercice 4645

Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2y' - y = 0$ (E_1)
2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006996]

Exercice 4646 Équations de Bernoulli et Riccati

1. **Équation de Bernoulli**
   (a) Montrer que l'équation de Bernoulli
   $$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$
   se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.
   (b) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.
2. **Équation de Riccati**
   (a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati
   $$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$
   alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).
   (b) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [007001]

Exercice 4647

1. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + e^{x^2}y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{x^2}y = 0$ est bornée. (*Indication :* étudier la fonction auxiliaire $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$.)

Correction ▼ Vidéo ■ [007002]

187 225.02 Résolution d'équation différentielle du deuxième ordre

Exercice 4648

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$,
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$,
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

[000859]

Exercice 4649

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$,

2. $y'' - 2y' + y = e^x$,
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$,
4. $y'' - 2y' + y = x^3e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$ (utiliser le principe de superposition).

[000860]

Exercice 4650

On considère l'équation homogène (E) $\;ay'' + by' + cy = 0$, avec $a \neq 0$. Donner des conditions necessaires et suffisantes liant les coefficients a, b et c dans les deux cas suivants :
(i) toutes les solutions de (E) tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini ;
(ii) toutes les solutions sont périodiques. [000861]

Exercice 4651

Résoudre l'équation :

$$y'' + k^2y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

On discutera suivant les valeurs de k et m. [000862]

Exercice 4652

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Correction ▼ [000863]

Exercice 4653

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x.$$

Correction ▼ [000864]

Exercice 4654

Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

Correction ▼ [000865]

Exercice 4655

On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\log t.$$

   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Correction ▼ [000866]

Exercice 4656

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparement les cas $m = 0$ et $m \neq 0$). [000867]

Exercice 4657

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 6y' + 9y = d(x) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) lorque, respectivement, on pose :

$$d(x) = (x^2+1)e^{-3x} \text{ et } d(x) = \cos x.$$

3. Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque :

$$d(x) = 2(x^2+1)e^{-3x} + 50\cos x.$$

[000868]

Exercice 4658

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

[000869]

Exercice 4659

Déterminer une équation différentielle admettant $(r-2)^2 = 0$ comme équation caractéristique et $e^x + (x^3/6)e^{2x}$ comme solution particulière. [000870]

Exercice 4660

Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations :
a) $y'' + y' - 6y = e^{3x}$, b) $y'' + y' - 6y = e^x(2x+1)$,
c) $y'' - 4y' + 13y = \cos x$, d) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}(x+1)$ avec $y(0) = 1$, $y(1) = 0$. [000871]

Exercice 4661

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.
2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

Correction ▼ [000872]

Exercice 4662

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 4y = 4e^{-2x}$.
2. $y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)e^x$.
3. $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$.
4. $y'' + y = e^{-|x|}$.

[000873]

Exercice 4663

Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) + f(-x) = x$. [000874]

Exercice 4664

Résoudre sur $]0,+\infty[$ $xy'' - y' - x^3y = 0$ en posant $z(t) = y(\sqrt{t})$. [000875]

Exercice 4665

Résoudre en posant $z(t) = y(e^t)$ ou $y(-e^t)$ suivant le signe de x, les équations différentielles (d'Euler) suivantes :

1. $x^2y'' - 2y = x$.
2. $x^2y'' + xy' + y = x\ln|x|$.

[000876]

Exercice 4666

Résoudre l'équation différentielle de Bernouilli $x^2y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$. [000877]

Exercice 4667

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) &= x^4, \\ y"(x) - 4y(x) &= 4e^{-2x}, \\ y"(x) - 2y'(x) + y(x) &= e^x \sin x. \end{aligned}$$

[000878]

Exercice 4668

En posant $z = \frac{1}{y}$ et en supposant que y ne s'annule pas, résoudre l'équation (de Bernoulli) :

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} - x\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0.$$

[000879]

Exercice 4669

Résoudre : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x\cos x \cosh x$.

Correction ▼ [000880]

Exercice 4670

Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x\cos x.$$

Correction ▼ [000881]

Exercice 4671

Soit p continue positive non nulle ; montrer que toute solution de $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. [000882]

Exercice 4672

Montrer que toute solution de $y''(x)e^{-x^2} + y(x) = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}$. [000883]

Exercice 4673

En posant $t = \arctan x$, résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Correction ▼ [000884]

Exercice 4674

Résoudre par le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$ l'équation différentielle :

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2-x^2)y(x) = 0.$$

Correction ▼ [000885]

Exercice 4675 **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y'' - 2y' + 2y = x\cos x \operatorname{ch} x$ 2) $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{2x}$ 3) $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
4) $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = e^x \sin x,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Correction ▼ [005479]

Exercice 4676 **

On considère l'équation différentielle (E) : $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$) pour $x \in]0,+\infty[$.

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$. Vérifier que y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.
3. Résoudre sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Correction ▼ [005480]

Exercice 4677

Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + y = 2\cos^2 x$

Correction ▼ Vidéo ■ [006997]

Exercice 4678

On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006998]

Exercice 4679

Résoudre sur $]0;\pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \operatorname{cotan} x$, où $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006999]

Exercice 4680

Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2 y'' + xy' + y = 0$, sur $]0;+\infty[$, en posant $x = e^t$;
2. $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

Correction ▼ Vidéo ■ [007000]

Exercice 4681

1. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle $x^2 y'' + y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).
2. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Correction ▼ Vidéo ■ [007003]

188 225.03 Raccordement de solutions

189 225.04 Equations différentielles linéaires

Exercice 4682 Équations linéaires d'ordre 1

Intégrer les équations suivantes :

1. $(2+x)y' = 2 - y$.
2. $xy' + y = \cos x$.
3. $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$.
4. $x^3 y' - x^2 y = 1$.
5. $3xy' - 4y = x$.
6. $y' + y = \sin x + 3\sin 2x$.
7. $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$.
8. $x(x+1)y' + y = \arctan x$.
9. $x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2$.

   pour 8 : Étudier les problèmes de raccordement.

Correction ▼ [004054]

Exercice 4683 Équations d'ordre 2 à coefficients constants

Intégrer :

1. $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.
3. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$.
4. $y'' + y = \operatorname{cotan} x$.
5. $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
6. $y'' + y = P(x)$ où P est un polynôme.
7. $y'^2 + y^2 = 1$ (dériver).

Correction ▼ [004055]

Exercice 4684 Équations d'ordre 2 à coefficients non constants

Intégrer les équations suivantes :

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
2. $y'' - \left(6x + \frac{1}{x}\right)y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).
3. $x(1-2\ln x)y'' + (1+2\ln x)y' - \frac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3\sin x$ (poser $u = \ln x$).
5. $x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2$ (chercher une solution de l'équation homogène de la forme $y = x^\alpha$).
6. $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$ $\left(\text{poser } y = \frac{u}{x^2}\right)$.
7. $(x^2+3)y'' + xy' - y = 1$ (chercher les solutions polynomiales).
8. $xy'' - 2y' - xy = 0$ (dériver deux fois).

Correction ▼ [004056]

Exercice 4685 Résolution par DSE

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

1. $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$.
2. $xy'' + 2y' - xy = 0$.
3. $4xy'' + 2y' - y = 0$.
4. $y'' + xy' + 3y = 0$.
5. $x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1$.
6. $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Correction ▼ [004057]

Exercice 4686 $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$

Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Correction ▼ [004058]

Exercice 4687 $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Correction ▼ [004059]

Exercice 4688 $y' = |x-y|$

Résoudre l'équation : $y' = |x-y|$. Étudier les problèmes de raccordement.

Correction ▼ [004060]

Exercice 4689 $y'' + |y| = 1$

Résoudre l'équation $y'' + |y| = 1$, avec $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Correction ▼ [004061]

Exercice 4690 Mines MP 2000

Résoudre (E) : $4xy'' + 2y' + y = 0$ sachant que (E) admet deux solutions y et z telles que $yz = 1$. Comment résoudre cette équation sans l'indication ?

Correction ▼ [004062]

Exercice 4691 Mines MP 2000

Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

1. Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe un unique g de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $\begin{cases} g' + ag = f \\ g(0) = b. \end{cases}$
2. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, g l'est également. Relation entre $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{t=0}^{+\infty} g(t)\,dt$.

Correction ▼ [004063]

Exercice 4692 Systèmes différentiels à coefficients constants

x, y, z sont des fonctions de t. Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t. \end{cases}$

Correction ▼ [004064]

Exercice 4693 Système différentiel à coefficients non constants

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx+y+2t^2-1 \\ (t^2+1)y' = x-ty+3t. \end{cases}$

Correction ▼ [004065]

Exercice 4694 Lemme des noyaux, Matexo

Soit $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ et (E) l'équation : $y''+py'+qy=0$. On note S l'ensemble des solutions de (E) et D l'application de S dans S définie par $D(f)=f'$.

1. D peut elle être une homothétie ?
2. Déterminer les valeurs de p et q pour lequelles D n'est pas un isomorphisme de S.
3. Vérifiez que $D\circ D+pD+q\mathrm{id}_S=0$ et montrer qu'il existe des nombres complexes r_1 et r_2 tels que : $(D-r_1\mathrm{id}_S)\circ(D-r_2\mathrm{id}_S)=0$.
4. Les applications $D-r_1\mathrm{id}_S$, $D-r_2\mathrm{id}_S$ peuvent-elles être inversibles ?

[004066]

Exercice 4695 $y''+x\,y'+y=0$, Matexo

On désigne par y la solution de l'équation différentielle $y''+x\,y'+y=0$, avec les conditions de Cauchy $y(0)=0, y'(0)=1$.

1. Montrer que les dérivées de y vérifient $y^{(n)}+x\,y^{(n-1)}+(n-1)\,y^{(n-2)}=0, \quad \forall n\geqslant 2$.
2. Calculer par récurrence les dérivées successives de y en zéro.
3. Montrer que y admet le développement limité à l'origine $(x\to 0)$:

$$y(x)=x-\frac{2x^3}{3!}+\frac{8x^5}{5!}+\dots+\frac{(-2)^k k!\,x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2k+2}).$$

[004067]

Exercice 4696 $f''(x)+f(-x)=x\cos x$

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall\, x\in R,\ f''(x)+f(-x)=x\cos x$.

Correction ▼ [004068]

Exercice 4697 $y''+\frac{2y'}{\operatorname{th}x}+y=0$

On considère l'équation différentielle : $(*)\iff y''+\frac{2y'}{\operatorname{th}x}+y=0$.

1. On pose $z(x)=y'(x)+\frac{y(x)}{\operatorname{th}x}$. Écrire l'équation différentielle (d'ordre 1) sur z déduite de $(*)$.
2. Résoudre sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ l'équation en z, puis $(*)$.
3. Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles prolongeables en 0 ?
   On note y_0 la solution de $(*)$ telle que $y_0(x)\to 1$ lorsque $x\to 0$.
4. Démontrer que y_0 est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\frac{y_0'(x)}{\operatorname{th}x}$ admet une limite finie en 0.
   En déduire que y_0 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
5. Est-ce que l'aire comprise entre la courbe de y_0 et l'axe des abscisses est finie ?

Correction ▼ [004069]

Exercice 4698 $y''+2xy'+(x^2-1)y=0$

Soit $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\Phi:E\to E$, définie par $\Phi(f)=g$ où g est l'application $g:t\mapsto f'(t)+tf(t)$.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.

3. Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Correction ▼ [004070]

Exercice 4699 $x^2 f''(x) + xf'(x) = \lambda f(x)$

Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1. $E = \mathbb{R}[X]$ $\Phi(P)(X) = X^2 P''(X) + XP'(X)$.
2. $E = \mathscr{C}^\infty(]0, +\infty[)$ $\Phi(f)(x) = x^2 f''(x) + xf'(x)$.
3. $E = \mathscr{C}^\infty(]0, 1[)$ $\Phi(f)(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} f'(x)$.

Correction ▼ [004071]

Exercice 4700 $AP' - nA'P = \lambda P$

Soit A un polynôme à coefficients réels de degré 2 donné. Au polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n$ on fait correspondre le polynôme $Q = AP' - nA'P$.

1. Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ dans les cas particuliers :
   (a) $A = X^2 - 1$,
   (b) $A = X^2$,
   (c) $A = X^2 + 1$.

Correction ▼ [004072]

Exercice 4701 Équation intégrale

Trouver les applications $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues vérifiant pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{2}\int_{t=0}^{x} g^2(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(\int_{t=0}^{x} g(t)\,dt\right)^2.$$

Correction ▼ [004073]

Exercice 4702 Inéquations différentielles

Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, et y, z solutions de $\begin{cases} y(0) = z(0) \\ y' = a(t)y + b(t) \\ z' \leqslant a(t)z + b(t). \end{cases}$

Démontrer que : $\forall\, t \geqslant 0$, on a $y(t) \geqslant z(t)$.

Correction ▼ [004074]

Exercice 4703 Tangentes parallèles ou concourantes

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow y' = a(x)y + b(x)$ et x_0 un réel fixé. Montrer que les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse x_0 sont parallèles ou concourantes.

Correction ▼ [004075]

Exercice 4704 $y' + ay =$ fct périodique

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique. On considère l'équation : $(*) \Leftrightarrow y' + \lambda y = \varphi(x)$.

1. Montrer que si y est solution de $(*)$, alors $y(x+T)$ est aussi solution.
2. En déduire que y, solution de $(*)$, est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.
3. Montrer que, sauf pour des valeurs exceptionnelles de λ, l'équation $(*)$ admet une et une seule solution T-périodique.

[004076]

Exercice 4705 Coefficients périodiques

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow y' + a(x)y = b(x)$ où a, b sont des fonctions continues, T-périodiques.

1. Montrer que si y est solution de $(*)$, alors la fonction définie par $z(x) = y(x+T)$ est aussi solution.
2. En déduire que si $\int_{t=0}^{T} a(t)\,dt \neq 0$, alors $(*)$ admet une unique solution T-périodique.

Correction ▼ [004077]

Exercice 4706 Équation intégrale

Soit $E = \{\text{fcts} : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continues }\}$ et $\Phi : E \to E, f \mapsto g$ avec $g(x) = \int_{t=0}^{1} \inf(t,x) f(t)\,dt$.
Chercher les valeurs propres et les fonctions propres de Φ.

Correction ▼ [004078]

Exercice 4707 Matexo

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ fixé. On considère : $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \text{ tq } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 3\}$.

Déterminer $\inf_{f \in E} \displaystyle\int_{t=0}^{1} (f'(t) + kf(t))^2\,dt$. *Indication : poser $f' + kf = g$ et calculer $f(1)$ en fonction de g.*

Correction ▼ [004079]

Exercice 4708 Ulm-Lyon-Cachan MP* 2000

Soient u, v, w trois applications bornées et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, vérifiant : $u' + v' = w$; $w' = -v$; $\int_0^\infty \|u'\|^2 < +\infty$. On suppose qu'il existe une suite de terme général t_n tendant vers $+\infty$ telle que $u(t_n)$ tend vers $a \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} u(t)\,dt$ tend vers a.
2. Montrer que les suites de termes généraux $v_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,dt$ et $w_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,dt$ tendent vers 0.

Correction ▼ [004080]

Exercice 4709 Centrale MP 2001

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y + f = 0$.

1. Montrer que (E) admet une unique solution F bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et comparer $\int_{-\infty}^{+\infty} F$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Correction ▼ [004081]

Exercice 4710 Centrale MP 2001

Trouver les fonctions f, g continues vérifiant : $\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt = x - 1 + g(x)$ et $\int_{t=0}^{x} g(t)\,dt = x - 1 + f(x)$.

Correction ▼ [004082]

Exercice 4711 X MP* 2000

On considère l'équation différentielle $y' = \sin(x+y)$. Montrer que pour toute condition initiale l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$. Ensemble des points d'inflexion des courbes solutions ?

Correction ▼ [004083]

Exercice 4712 Polytechnique PC 2002

Soit l'équation différentielle : $(E) \Leftrightarrow u''(x) + (k - 2d\cos(x))u(x) = 0$.

1. Existence et domaine de définition des solutions maximales A et B telles que $A(0) = 1$, $A'(0) = 0$ et $B(0) = 0$, $B'(0) = 1$.

2. Montrer que A est paire et B est impaire.
3. Montrer que $A(k,d,x) = A(k,0,x) + 2d\int_{t=0}^{x} B(d,0,x-t)A(k,d,x)\cos(t)\,dt$.

Correction ▼ [004084]

Exercice 4713 $f \mapsto f + f'$ (Mines MP 2003)

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est bornée.
Soit $u : E \to E, f \mapsto f + f'$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$.
2. Est-ce que u est injectif ?
3. Est-ce que u est surjectif ?

Correction ▼ [004085]

Exercice 4714 Centrale MP 2004

On considère l'équation différentielle : $-y'' + \frac{y}{p^2} = f$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction continue donnée.

1. Donner les solutions de cette équation. Montrer que $x \mapsto -\int_{t=0}^{x} pf(t)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x-t}{p}\right)dt$ est solution.
2. Montrer qu'il existe une unique solution telle que $y(0) = y(1) = 0$. On la note u_p.
3. Montrer que (u_p) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Correction ▼ [004086]

Exercice 4715 Centrale MP 2004

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \frac{d^2u(x)}{dx^2} + (1-\lambda)x^2u(x) = 0$.

1. Montrer que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont de la forme $H(x)e^{-x^2/2}$ où H est une fonction développable en série entière.
2. Déterminer les valeurs de λ telles que H soit une fonction polynomiale non nulle.

Correction ▼ [004087]

Exercice 4716 Lemme de Gronwall (X MP* 2003)

Soient f, g deux fonctions continues et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, t \geqslant 0,\ g(t) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f(t) \leqslant a + \int_{u=0}^{t} f(u)g(u)\,du$.
Montrer : $\forall\, t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant a\exp\left(\int_{u=0}^{t} g(u)\,du\right)$.

Correction ▼ [004088]

Exercice 4717 $y'' + y \geqslant 0$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + f''(x) \geqslant 0$.
Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Correction ▼ [004089]

Exercice 4718 $f'' + f' + f \to 0$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f''(t) + f'(t) + f(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Démontrer que $f(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

Correction ▼ [004090]

Exercice 4719 $f'' \geqslant f + 2/ch(x)^3$, Centrale PC 1997

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout x : $f''(x) \geqslant f(x) + \frac{2}{\mathrm{ch}(x)^3}$. Montrer pour tout x : $f(x) \geqslant \frac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)}$. [004091]

Exercice 4720 $y'+ay=b$, $y(-\infty)=0$

Soit $a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ a(x)\geqslant 1$ et $b(x)\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

1. Montrer que toute solution de l'équation : $y'+ay=b$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. On suppose $b(x)\to 0$ lorsque $x\to-\infty$. Montrer qu'il y a une unique solution y qui tend vers 0 en $-\infty$.

Correction ▼ [004092]

Exercice 4721 $y''+ay=0$, $a>0\Rightarrow y$ s'annule

Soit $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.

1. Soit y une solution de l'équation $y''+a(x)y=0$. Montrer que y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2. Soit z une solution de l'équation $z''-a(x)z=0$. Montrer que $z=0$ ou bien z s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [004093]

Exercice 4722 $y''+ay'=0$ a croissante positive => y est bornée

Soit $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ croissante strictement positive et y une solution de l'équation : $y''+a(t)y=0$. Montrer que y est bornée au voisinage de $+\infty$ (on étudiera $z=y^2+y'^2/a$). [004094]

Exercice 4723 $y''+ay=0$, a intégrable

Soit $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue intégrable. Montrer l'équation $y''+a(t)y=0$ admet des solutions non bornées sur $[0,+\infty[$ (on commencera par prouver que si y_1,y_2 sont deux solutions alors le déterminant wronskien de y_1 et y_2 est constant).

Correction ▼ [004095]

Exercice 4724 Zéros entrelacés (Centrale MP 2003)

Soient r et q deux fonctions continues définies sur $I=[a,b]$ telles que : $\forall\, x\in I,\ r(x)\geqslant q(x)$. On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\Leftrightarrow y''+qy=0,\qquad (E_2)\Leftrightarrow z''+rz=0.$$

1. Soit y une solution de (E_1) et x_0,x_1 deux zéros consécutifs de y. $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que dire de leurs signes ?
2. Soit z une solution de (E_2). On considère $W(x)=\begin{vmatrix} y(x) & z(x)\\ y'(x) & z'(x)\end{vmatrix}$. Calculer $W'(x)$ et $W(x_1)-W(x_0)$.
3. Montrer que z a un zéro dans $]x_0,x_1[$ ou $z(x_0)=z(x_1)=0$.
4. Soit u une solution de (E_1). Montrer que u est soit proportionnelle à y, soit admet un unique zéro dans $]x_0,x_1[$.

Correction ▼ [004096]

Exercice 4725 Zéros des solutions de $y''+ay'+by=0$

On considère l'équation $(*)\iff y''+a(t)y'+b(t)y=0$, avec a,b continues.

1. Soit y une solution non nulle de $(*)$. Montrer que les zéros de y sont isolés.
2. Soient y,z deux solutions de $(*)$ non proportionelles.
   (a) Montrer que y et z n'ont pas de zéros commun.
   (b) Montrer que si u,v sont deux zéros consécutifs de y, alors z possède un unique zéro dans l'intervalle $]u,v[$ (étudier $\frac{z}{y}$).

Correction ▼ [004097]

Exercice 4726 $y''+\left(1+\frac{\lambda}{t^2}\right)y=0$

Soit $\lambda>0$ et y une solution de $y''+\left(1+\frac{\lambda}{t^2}\right)y=0$. Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$, y a un zéro dans l'intervalle $]a,a+\pi[$. (Étudier $z=y'\varphi-y\varphi'$ où $\varphi(t)=\sin(t-a)$)

Correction ▼ [004098]

Exercice 4727 $y''+e^ty=0$

Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de $y''+e^ty=0$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de y est infini dénombrable.
2. On note a_n le $n$ème zéro positif de y. En utilisant les fonctions $\begin{cases}\varphi(t)=\sin\left(e^{a_n/2}(t-a_n)\right)\\ \psi(t)=\sin\left(e^{a_{n+1}/2}(t-a_n)\right),\end{cases}$ montrer que $\frac{\pi}{e^{a_{n+1}/2}}\leqslant a_{n+1}-a_n\leqslant\frac{\pi}{e^{a_n/2}}$.
3. Donner un équivalent de a_n quand $n\to\infty$.

Correction ▼ [004099]

Exercice 4728 Conditions aux limites

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues avec f positive. Montrer qu'il existe une unique solution pour le problème aux limites : $y''=f(t)y+g(t)$, $y(a)=y(b)=0$.

Correction ▼ [004100]

Exercice 4729 Comparaison de solutions

Soient $p,q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues avec : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ q(x)<0$. Soient $y,z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases}\forall\,x\in\mathbb{R},\ y''+p(x)y'+q(x)y\leqslant z''+p(x)z'+q(x)z\\ y(a)\leqslant z(a),\ y'(a)<z'(a).\end{cases}$$

Montrer que : $\forall\,x>a,\ y(x)<z(x)$.

Correction ▼ [004101]

Exercice 4730 Système différentiel à coefficients positifs

Soit $A:\mathbb{R}^+\to\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),t\mapsto(a_{ij}(t))$ continue avec : $\forall\,t\geqslant0,\ \forall\,i,j,\ a_{ij}(t)\geqslant0$ et X une solution du système différentiel $X'(t)=A(t)X(t)$. Montrer que si toutes les coordonnées de $X(0)$ sont positives ou nulles il en est de même pour $X(t)$ pour tout t (commencer par le cas strictement positif).

Correction ▼ [004102]

Exercice 4731 Intégrale fonction d'un paramètre

On pose $f(x)=\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t}e^{itx}\frac{dt}{\sqrt{t}}$. Former une équation différentielle satisfaite par f. En déduire f.

Correction ▼ [004103]

Exercice 4732 Ulm MP* 2000

Soit $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. On suppose que la fonction Δ est strictement positive sur I.
On pose $E=\{f\in\mathscr{C}^2(I)\mid f(a)=f(b)=0\}$. On considère enfin l'opérateur $K:f\mapsto\frac{f''}{\Delta}$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(K)\subset\,]-\infty,0[$.
2. Trouver un produit scalaire $(\mid)$ pour lequel deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

3. On suppose que $I=\mathbb{R}^+$ et que $\Delta(x)\geqslant 1$ pour $x\geqslant 2$. Soit $\lambda<0$.

   (a) Montrer qu'il existe une unique $f_\lambda\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle $\begin{cases} f_\lambda''=\lambda\Delta f_\lambda \\ f_\lambda(0)=0 \\ f_\lambda'(0)=1. \end{cases}$

   (b) Montrer f_λ a une infinité dénombrable de zéros $(x_0<x_1<\cdots<x_n<\dots)$ et que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [004104]

Exercice 4733 Centrale MP 2001

1. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=f(\pi)=0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2\leqslant\int_0^\pi f'^2$.
   Indication : prolonger f en une fonction impaire 2π-périodique.
2. Soit une fonction q de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, à valeurs dans $]-\infty,1[$. Montrer que l'unique fonction x de classe $\mathscr{C}^2$ s'annulant en 0 et en π et vérifiant l'équation différentielle $x''(t)+q(t)x(t)=0$ est la fonction nulle.
3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et deux réels a,b fixés. Montrer qu'il existe une unique solution x de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $x(0)=a$, $x(\pi)=b$ et $x''(t)+q(t)x(t)=f(t)$.

Correction ▼ [004105]

Exercice 4734 X MP* 2000

On considère l'équation différentielle à coefficients continus sur $\mathbb{R}$: $x''+p(t)x'+q(t)x=0$. Trouver une condition nécessaire portant sur p et q pour qu'il existe deux solutions sur $\mathbb{R}$ dont le produit vaut constamment un.

Correction ▼ [004106]

Exercice 4735 X MP* 2000

Soit A coninue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. On suppose que les $a_{ij}(t)$ restent positifs quand t décrit $\mathbb{R}^+$, et l'on se donne un vecteur X_0 dont toutes les composantes sont positives. Montrer qu'en désignant par $X(t)$ la valeur en t du système $Y'=AY$ valant X_0 en $t=0$, on a pour tout $t\geqslant 0$ et pour tout i l'inégalité $x_i(t)\geqslant 0$.

Correction ▼ [004107]

Exercice 4736 ENS MP 2002

Soit une application A de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, telle que les valeurs propres de $A(0)$ aient toutes une partie réelle strictement positive. Soit F de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe X de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, solution de $tX'(t)+A(t)X(t)=F(t)$.
Indication : commencer par le cas $n=1$, A constante.

Correction ▼ [004108]

Exercice 4737 X MP* 2003

1. Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues et $k>0$, $t_0\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall\, t\geqslant t_0,\ f(t)\leqslant g(t)+k\int_{u=t_0}^t f(u)\,du$.
   Montrer que : $\forall\, t\geqslant t_0,\ f(t)\leqslant g(t)+k\int_{u=t_0}^t e^{k(t-u)}g(u)\,du$.
2. Soient $A,B:\mathbb{R}\to\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ continues, $T>t_0$, $K>0$ et $\eta>0$ tels que : $\forall\, t\in[t_0,T],\ |||A(t)|||\leqslant K$ et $|||A(t)-B(t)|||\leqslant\eta$. On note M_0 (resp. N_0) la solution du problème de Cauchy : $M(t_0)=I,\ M'(t)=A(t)M(t)$ (resp. $N(t_0)=I,\ N'(t)=B(t)N(t)$). Montrer que : $\forall\, t\in[t_0,T],\ |||M_0(t)-N_0(t)|||\leqslant e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)$.
3. On note X_0 (resp. Y_0) la solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$: $X(t_0)=\alpha,\ X'(t)=A(t)X(t)$ (resp. $Y(t_0)=\alpha,\ Y'(t)=B(t)Y(t)$) où $\alpha\in\mathbb{R}^n$. Quelle majoration a-t-on sur $\|X_0(t)-Y_0(t)\|$?

Correction ▼ [004109]

Exercice 4738 **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle proposée :

1. $y' + y = 1$
2. $2y' - y = \cos x$
3. $y' - 2y = xe^{2x}$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
5. $y'' + 4y = \cos(2x)$
6. $y'' + 2y' + 2y = \cos x \operatorname{ch} x$.

Correction ▼ [005874]

Exercice 4739 *** I

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   On suppose que quand x tend vers $+\infty$, $f' + \alpha f$ tend vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $f(x)$ tend vers $\frac{\ell}{\alpha}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty}(f + f' + f'')(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
   On note D l'opérateur de dérivation. Soit P un polynôme de degré n unitaire dont tous les zéros ont des parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(P(D))(f)(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Correction ▼ [005875]

Exercice 4740 *** I

Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f''(x) \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Correction ▼ [005876]

Exercice 4741 *** I

Résoudre sur l'intervalle I proposé :

1. $xy' - 2y = 0$ ($I = \mathbb{R}$)
2. $xy' - y = 0$ ($I = \mathbb{R}$)
3. $xy' + y = 0$ ($I = \mathbb{R}$)
4. $xy' - 2y = x^3$ ($I =]0, +\infty[$)
5. $x^2y' + 2xy = 1$ ($I = \mathbb{R}$)
6. $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$ ($I =]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$, $]-\infty, 1[$, $]0, +\infty[$, $\mathbb{R}$)
7. $|x|y' + (x-1)y = x^3$ ($I = \mathbb{R}$).

Correction ▼ [005877]

Exercice 4742 *** I

Déterminer le rayon de convergence puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$ quand x appartient à l'intervalle ouvert de convergence. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$.

Correction ▼ [005878]

Exercice 4743 **

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{array}\right.$

2. $\begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{cases}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

3. $\begin{cases} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 5x + y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x \\ z' = x + y + z \end{cases}$ (trouver la solution telle que $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = -1$).

Correction ▼ [005879]

Exercice 4744 **

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute solution de $X' = AX$, la fonction $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005880]

Exercice 4745 **

Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t^2}y + 2t \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2t}y + t^2 \end{cases}$ sur $]0, +\infty[$

2. $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx - y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x + ty + 3t \end{cases}$

3. $\begin{cases} \mathrm{sh}(2t)x' = \mathrm{ch}(2t)x - y \\ \mathrm{sh}(2t)y' = -x + \mathrm{ch}(2t)y \end{cases}$ sur $]0, +\infty[$ sachant qu'il existe une solution vérifiant $xy = 1$.

Correction ▼ [005881]

Exercice 4746 *** I

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ puis sur $\mathbb{R}$.
2. $(x^2+x)y'' - 2xy' + 2y = 0$ sur $]0, +\infty[$.
3. $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$ sur $]0, +\infty[$.
4. $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}$ sur $]-1, +\infty[$.
5. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$.
6. $4xy'' + 2y' - y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Correction ▼ [005882]

Exercice 4747 **

Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Correction ▼ [005883]

Exercice 4748 ***

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\forall x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{3}{16x}\right)$.

Correction ▼ [005884]

Exercice 4749 *** I

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$.

Correction ▼ [005885]

Exercice 4750 *** I

Montrer que $\forall x>0$, $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$.

Correction ▼ [005886]

190 225.05 Equations différentielles non linéaires

Exercice 4751 Équations à variables séparables

1. $y'=y(1+y)$.
2. $y'=\sin x\cos y$.
3. $2yy'\sqrt{x}=\sqrt{y^2-1}$.
4. $1+xy'=e^y$, condition initiale : $y(1)=1$.
5. $y'=\sqrt{|y|}$: étudier les problèmes de raccordements.

Correction ▼ [004110]

Exercice 4752 Équations homogènes

1. $y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}$.
2. $y'=\frac{x-y}{x+y}$.
3. $(x^2+y^2)y'=2xy$.
4. $(x+y)y'=2x-y$.

Correction ▼ [004111]

Exercice 4753 Équations de Bernouilli

1. $xy'+y=xy^3$.
2. $2xy'+y=\frac{2x^2}{y^3}$.
3. $\sqrt{x}y'-y+(x+2\sqrt{x})\sqrt{y}=0$.
4. $xy'+y=(xy)^{3/2}$.
5. $x^3y'=y(3x^2+y^2)$.

Correction ▼ [004112]

Exercice 4754 Équations de Riccati

1. $x^2(y'+y^2)=xy-1$.

Correction ▼ [004113]

Exercice 4755 Divers ordre 1

$(x^2-y^2-1)y'=2xy$: poser $z=\frac{y}{x^2+y^2-1}$.

Correction ▼ [004114]

Exercice 4756 Centrale MP 2004

Soit $n>0$ et $(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x'(t)=\frac{2}{n}x(t)y(t)\\ y'(t)=-x^2(t)+y^2(t).\end{cases}$

1. Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de (S). Trouver une autre solution présentant une symétrie avec γ. Peut-on avoir comme solution $\sigma(t) = \lambda\gamma(\mu t)$? En déduire une propriété géométriques des solutions maximales de (S).
2. Déterminer les courbes du plan formées des points (x_0, y_0) où les solutions de (S) ont des tangentes parallèles aux axes (Ox) et (Oy). En déduire quelques solutions particulières.
3. A supposer qu'il existe $\Phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $y(t) = \Phi(x(t))$, déterminer Φ et en déduire toutes les courbes intégrales.

Correction ▼ [004115]

Exercice 4757 Chimie P 91

Résoudre numériquement le système

$$\begin{cases} y' = -y \\ z' = y - z \\ y(0) = 1 \text{ et } z(0) = 0. \end{cases}$$

Prendre $h = 0.1$ et faire un tableau avec 10 valeurs. Faire la résolution analytique.

Correction ▼ [004116]

Exercice 4758 Équations d'ordre 2

1. $y'' = \sin y$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
2. $2(2a - y)y'' = y'^2$.
3. $yy'' = y'^2 - y^2$: poser $z = y'/y$.

Correction ▼ [004117]

Exercice 4759 Centrale MP 2000

Existe-t-il des solutions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2\sqrt{y} = 0$? Que peut-on dire de l'équation : $y'^2 = 4y$? [004118]

Exercice 4760 Étude qualitative : $y' = x^3 + y^3$

Soit y la solution maximale de l'équation $y' = x^3 + y^3$ telle que $y(0) = a \geqslant 0$, et $I =]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition. Montrer que y est strictement croissante sur $[0, \beta[$, que β est borné, et que $y \to +\infty$ lorsque $x \to \beta^-$.

Correction ▼ [004119]

Exercice 4761 Étude qualitative : $y' = x - e^y$

Soit y une solution maximale de l'équation $y' = x - e^y$.

1. Montrer que y est décroissante puis croissante.
2. Montrer que y est définie jusqu'en $+\infty$ et que sa courbe représentative admet une branche parabolique horizontale.
3. Montrer que $\alpha > -\infty$ et que $y \to +\infty$ lorsque $x \to \alpha^-$.

Correction ▼ [004120]

Exercice 4762 Étude qualitative : $x' = \cos(t) + \cos(x)$

Soit x la solution maximale du problème de Cauchy : $x' = \cos(t) + \cos(x)$, $x(0) = x_0 \in]0, \pi[$.
Montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, t > 0,\ 0 < x(t) < \pi$. [004121]

Exercice 4763 Étude qualitative : $x' = x^2 - t$, ENS Cachan MP* 2005

On considère l'équationn différentielle $(E) : x' = x^2 - t$ et l'ensemble $D_0 = \{(t,x) \mid x^2 - t < 0\}$.
Montrer que si x est une solution de (E) vérifiant $(t_0, x(t_0)) \in D_0$, alors x est définie sur $[t_0, +\infty[$ et la courbe intégrale reste dans D_0. En déduire que $x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Correction ▼ [004122]

Exercice 4764 Intervalle maximal pour $y' = f(y)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ strictement positive et y la solution maximale définie sur $]\alpha, \beta[$ du problème de Cauchy : $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$. Montrer que $\beta = x_0 + \int_{t=y_0}^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$ et que $y \to +\infty$ lorsque $x \to \beta^-$. [004123]

Exercice 4765 Étude qualitative de $y' = 2ty + y^2$

On considère l'équation : $y' = 2ty + y^2$, $y(t_0) = y_0$. Soit y une solution maximale.

1. Montrer que $y = 0$ ou bien y ne s'annule pas.
2. On choisit $y_0 > 0, t_0 < 0$. Soit $]t_1, t_2[$ le domaine d'existence de y.
   (a) Montrer que si $y_0 \geqslant -2t_0$, alors y est strictement croissante sur $[t_0, t_2[$.
   (b) Montrer que $t_1 = -\infty$. (sinon, y et y' seraient bornées sur $]t_1, t_0]$.)
   (c) Donner l'allure générale de la courbe de y.
3. Résoudre l'équation en posant $z(t) = \frac{\exp(t^2)}{y(t)}$.

[004124]

Exercice 4766 Équation admettant simultanément t et $\sin t$ comme solution

Existe-t-il une fonction $f : (y,t) \to f(y,t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que l'équation : $y^{(n)} = f(y,t)$ admette les deux solutions $y(t) = t$ et $y(t) = \sin t$ sur $\mathbb{R}$?
Même question avec l'équation $y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y, t)$. [004125]

Exercice 4767 $y'' = F(x,y)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

Soit $F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, l'application $y \mapsto F(x,y)$ est strictement croissante. Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe au plus une solution à l'équation : $y'' = F(x,y)$ avec les conditions aux limites $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

Correction ▼ [004126]

Exercice 4768 Comparaison d'équations

Soient y, z solutions de $\begin{cases} y' = f(y,t) \\ z' = g(z,t) \\ y(0) = z(0) \end{cases}$ où f, g sont deux fonctions localement lipschitziennes telles que :

$$\begin{cases} \forall\, u,t,\ f(u,t) \leqslant g(u,t) \\ \forall\, u,v,t,\ u \leqslant v \Rightarrow f(u,t) \leqslant f(v,t). \end{cases}$$

1. Pour $\varepsilon > 0$, on note z_ε la solution de $\begin{cases} z'_\varepsilon = g(z_\varepsilon, t) + \varepsilon \\ z_\varepsilon(0) = y(0). \end{cases}$
   Montrer que $z_\varepsilon \geqslant y$ (sur leur domaine commun de définition).
2. Démontrer que $z_\varepsilon \to z$ lorsque $varepsilon \to 0^+$ uniformément sur tout intervalle borné. Conclusion ?

[004127]

Exercice 4769 Étude de l'équation

$\begin{cases} y''+\sin y=0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=\alpha\geqslant 0. \end{cases}$

Soit y la solution maximale. On a l'intégrale première : $\frac{y'^2}{2}-\cos y=C=\alpha^2-1$.

1. (a) Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que y est impaire.
2. On suppose ici que $C>1$.
   (a) Montrer qu'il existe un plus petit $T>0$ tel que $y(T)=2\pi$.
   (b) Montrer que : $\forall\, t\in\mathbb{R},\ y(t+T)=y(t)+2\pi$.
3. On suppose ici que $-1<C<1$: On pose $C=-\cos\theta$, et $F(x)=\int_{u=0}^{x}\frac{du}{\sqrt{2(\cos u-\cos\theta)}}$.
   (a) Soit a maximal tel que $y'(t)>0$ sur $[0,a[$. Montrer que $y(a)=\theta$ et $F(\theta)=a$.
   (b) Montrer que y est $4a$-périodique.
4. Étudier les cas $C=1$, $C=-1$.

[004128]

Exercice 4770 Résolution approchée de $y'=f(y,t),\ y(a)=y_0$ par la méthode d'Euler

On suppose que f est bornée par M et $|f(y,s)-f(z,t)|\leqslant K(|y-z|+|s-t|)$. On divise $[a,b]$ en n intervalles $[a_k,a_{k+1}]$, $a_k=a+k\frac{b-a}{n}$ et on approche la solution y par la fonction z, continue affine par morceaux définie par :

$$\begin{cases} z(a_0)=y_0 \\ \text{sur }]a_k,a_{k+1}[,\ z'=f(z(a_k),a_k). \end{cases}$$

1. Soit $\varepsilon_k=|z(a_k)-y(a_k)|$. Montrer que : $\forall\, t\in[a_k,a_{k+1}],\quad |y(t)-z(t)|\leqslant kh^2(M+1)+(1+Kh)\varepsilon_k\ \left(h=\frac{b-a}{n}\right)$.
2. En déduire que $\sup|y-z|\leqslant(M+1)(e^{K(b-a)}-1)\frac{b-a}{n}$.

[004129]

Exercice 4771 Lyon MP* 2000

1. Soit f une application minorée et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que la suite $(f'(a_n))$ tende vers 0.
2. Soit f une application minorée et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) de $\mathbb{R}^p$ telle que la suite $(df(a_n))$ tende vers 0, c'est à dire $\nabla f(a_n)$ tend vers 0.

Correction ▼ [004130]

Exercice 4772 ENS MP* 2001

Soit un vecteur $v=(v_1,v_2,v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1,e_2,e_3). Montrer qu'il existe une unique fonction $u=(u_1,u_2,u_3)$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $u'+u\wedge u'=-u\wedge(u_3e_3)$ et $u(0)=v$.
Indication : étudier la fonction $p\mapsto p+u\wedge p$ avant de pouvoir évoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Correction ▼ [004131]

Exercice 4773 Centrale MP 2001

On définit une suite de fonctions sur $[0,1]$ de la manière suivante : f_0 est la fonction constante 1 et pour tout $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(x)=1+\int_{t=0}^{x}f_n(t-t^2)\,dt$.

1. En étudiant $f_{n+1} - f_n$ montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$. On note f sa limite.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Que valent $f'(0)$ et $f'(1)$?
3. Étudier la concavité de f.
4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $1 + x \leqslant f(x) \leqslant \exp(x)$.

Correction ▼ [004132]

Exercice 4774 ENS MP 2002

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto f(t,x)$ de classe $\mathscr{C}^1$, et a,b des réels tels que $a < b$. On suppose que f est T-périodique par rapport à t et que l'on a : $\forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ f(t,a) > 0$ et $f(t,b) < 0$.

1. Que peut-on dire des solutions du problème de Cauchy E_y : $(x'(t) = f(t,x(t)),\ x(0) = y \in [a,b])$?
2. Montrer que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $[a,b]$.
3. Montrer qu'il existe une solution de E_y qui est T-périodique.

Correction ▼ [004133]

Exercice 4775 X MP* 2005

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue. On suppose qu'il existe a,b continues de J dans $\mathbb{R}^+$ telles que, pour tous t,y : $(f(t,y) \mid y) \leqslant a(t)\|y\|^2 + b(t)$. Montrer que toute solution maximale de $y' = f(t,y)$ est définie sur J entier.

Correction ▼ [004134]

Exercice 4776 Système autonome, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

On considère le système différentiel :

$$(V) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1). \end{array} \right.$$

dont on cherche les solutions (x,y) définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

1. Trouver une fonction $f \in \mathscr{C}^2((\mathbb{R}^{+*})^2, \mathbb{R})$ telle que pour toute solution (x,y) de V, $f(x,y)$ soit constante.
2. Montrer que les solutions de (V) sont périodiques.

Correction ▼ [004135]

---

191 225.06 Equations aux dérivées partielles

Exercice 4777 $2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$

Résoudre l'équation $2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$ avec la *condition aux limites* : $f(t,t) = t\ (t \in \mathbb{R})$.
(Étudier $\varphi : t \mapsto f(a+bt, a+ct)$ avec a,b,c bien choisis)

Correction ▼ [004201]

Exercice 4778 $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \text{cste}$

Déterminer les applications f de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a$ où a est une constante réelle donnée. On utilisera le changement de variable : $u = x+y$, $v = x-y$.

Correction ▼ [004202]

Exercice 4779 $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$

Résoudre sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$: $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$, en posant $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y}. \end{cases}$

Correction ▼ [004203]

Exercice 4780 $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$

Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x,y) \text{ tq } x > 0,\ y > 0\}$. Trouver les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$. On utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

Correction ▼ [004204]

Exercice 4781 $x\frac{\partial f}{\partial x} = -y\frac{\partial f}{\partial y}$

Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $x\frac{\partial f}{\partial x} = -y\frac{\partial f}{\partial y}$, en posant $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$

Correction ▼ [004205]

Exercice 4782 $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$. où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On pose $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, puis trouver f ...

1. Si $U = \{(x,y) \text{ tq } x > 0\}$.
2. Si $U = \mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [004206]

Exercice 4783 Ensi Physique P 94

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en utilisant, par exemple, le changement de variable : $x = \frac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \frac{u}{v}$.

Correction ▼ [004207]

Exercice 4784 Fonctions homogènes

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y) \neq (0,0)\}$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si :

$$\forall\, (x,y) \in \Omega,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

(On étudiera $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$) [004208]

Exercice 4785

Résoudre l'équation : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha-1)f$ où α est un réel fixé, $\alpha \neq \frac{1}{2}$. On posera $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

Correction ▼ [004209]

Exercice 4786 Équation d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(*) \Leftrightarrow a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où f est une fonction inconnue : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ distincts, fixés. On fait le changement de variable : $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$.

1. Écrire l'équation déduite de $(*)$ par ce changement de variable.
2. En déduire que l'on peut ramener $(*)$ à l'une des trois formes réduites :

   $(1) : \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0, \qquad (2) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0, \qquad (3) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$

Correction ▼ [004210]

Exercice 4787 $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Trouver les applications $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On utilisera le changement de variables : $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Correction ▼ [004211]

Exercice 4788 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto g(y/x)$. Trouver g telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$.

Correction ▼ [004212]

Exercice 4789 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $g(x,y) = f(2x+y, 2x-y)$.

1. Calculer les dérivées partielles secondes de g en fonction de celles de f.
2. Trouver f telle que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$.

Correction ▼ [004213]

Exercice 4790 $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

On considère l'équation aux dérivées partielles sur $\Omega = (\mathbb{R}^{+*})^2$: $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Résoudre cette équation en posant $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y}. \end{cases}$

Correction ▼ [004214]

Exercice 4791 $f(\cos x / \operatorname{ch} y)$ harmonique

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On considère $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$.

Déterminer f pour que g vérifie : $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

Correction ▼ [004215]

Exercice 4792 $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ préserve les fonctions harmoniques

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto F(u,v)$ et f définie par : $f(x,y) = F(u,v)$.
Montrer que $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$ entraîne $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Correction ▼ [004216]

Exercice 4793 $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} = y$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g(u,v) = f(uv, u+v)$.

1. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$.
2. Résoudre l'équation : $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} = y$.

Correction ▼ [004217]

Exercice 4794 $f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ tq $\Delta f=-f$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g(x,y,z)=\frac{f(r)}{r}$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Déterminer f de sorte que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=-g$.

Correction ▼ [004218]

Exercice 4795 $x^4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

1. Trouver les fonctions $g:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } u>v\}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant : $\frac{\partial}{\partial u}\left(g+v\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(g+u\frac{\partial g}{\partial u}\right)$
(penser au théorème de Poincaré).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ l'équation : $x^4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ en posant $u=y+\frac{1}{x}$, $v=y-\frac{1}{x}$.

Correction ▼ [004219]

Exercice 4796 *** I

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0$ en posant $u=x+y$ et $v=x+2y$.
2. $x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en passant en polaires.
3. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en posant $x=u$ et $y=uv$.

Correction ▼ [005898]

192 225.99 Autre

193 229.01 Ouvert, fermé, intérieur, adhérence

Exercice 4797

Représenter graphiquement et déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts.
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x-1|<1\}$; $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\leqslant 1\}$;
$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|\leqslant 1\}$; $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}\}$;
$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\notin\mathbb{Q}, y\notin\mathbb{Q}\}$; $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$. [001741]

Exercice 4798

Montrer que toute reunion et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Que peut-on dire des intersections infinies d'ensembles ouverts ? [001742]

Exercice 4799 partiel 1999

On définit un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ en posant

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 2\}\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2<1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A. L'ensemble A est-il connexe ? [001743]

Exercice 4800

Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Compacts ?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leqslant 4\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\}$$
$$C = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid \cos(x) \geqslant 0\}$$

[001754]

Exercice 4801

On se propose de montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts disjoints. On considère donc un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ et pour tout $x \in U$ on pose

$$C(x) = \{y \in [x,+\infty[\mid [x,y] \subset U\} \cup \{y \in]-\infty,x[\mid [y,x] \subset U\}.$$

1. Montrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert pour tout x. (Considérer $\inf_{y\in C(x)} y$ et $\sup_{y\in C(x)} y$.)
2. Pour tous x,y dans U, montrer qu'on a $C(x) = C(y)$ ou $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.
3. Conclure.

[001755]

Exercice 4802

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. Montrer :

1. $C_{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_A}$, $C_{\bar{A}} = \overset{\circ}{C_A}$
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

   En **déduire** $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

   En **déduire** $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

   Donner un exemple pour lequel l'inclusion réciproque n'est pas réalisée.

[001756]

Exercice 4803

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$. Montrer que :

1. $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $B(x,\varepsilon) \cap C_A \neq \emptyset\}$
2. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_A)$
3. A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.

[001757]

Exercice 4804

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $\bar{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A.
2. On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que si A est bornée, alors $\sup A \in \bar{A}$. (Construire une suite de points appropriée.)

[001758]

Exercice 4805

Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon. [001759]

Exercice 4806

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. On pose $A+B=\{z\in E \mid \exists x\in A, \exists y\in B, z=x+y\}$.

Montrer que si A est ouvert, $A+B$ est ouvert. (Commencer par le cas où B est un singleton.) [001760]

Exercice 4807

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé. [001761]

Exercice 4808

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit $\operatorname{diam}(A)=\sup\{\|y-x\|, x,y\in A\}$.

1. Montrer que si A est bornée, alors $\bar{A}$ et $\operatorname{Fr}(A)$ sont bornés.
2. Comparer $\operatorname{diam}(A)$, $\operatorname{diam}(\overset{\circ}{A})$ et $\operatorname{diam}(\bar{A})$ lorsque $\overset{\circ}{A}$ est non vide.
3. (a) Montrer que $\operatorname{diam}(\operatorname{Fr}(A))\leqslant \operatorname{diam}(A)$.
   (b) Soit x et u des éléments de A avec $u\neq 0$. On considère l'ensemble $X=\{t\geqslant 0 \mid x+tu\in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.
   (c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\operatorname{Fr}(A)$.
   (d) En déduire que $\operatorname{diam}(\operatorname{Fr}(A))=\operatorname{diam}(A)$.

[001762]

Exercice 4809

Soit $E=\mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0,A)$, par la formule

$$d(x_0,A)=\inf_{x\in A}\|x-x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0\in E$ il existe $y\in A$ tel que $d(x_0,A)=\|y-x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0,B)\geqslant d(x_0,A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0,A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta>0$ telle que
$$\|a-b\|\geqslant\delta \qquad \forall(a,b)\in A\times B.$$
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

[001764]

Exercice 4810

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toutes parties A et B de E on note

$$A+B=\{z\in E \mid \exists(x,y)\in A\times B, z=x+y\}.$$

Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A+B$ est fermé. [001766]

Exercice 4811

Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$; montrer qu'elle est fermée si et seulement si pour toute partie fermée bornée $K, K \cap X$ est fermée bornée. [001769]

Exercice 4812

Soient $k \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\omega_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x - \frac{1}{n} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{n} \right)^2 \leqslant \frac{k^2}{n^2} \right\},$$

et

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \omega_n.$$

Ω est-il ouvert ? fermé ? ... [001770]

Exercice 4813

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} \subset K_n$, et $K_n \neq \emptyset$.
Montrer que :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset.$$

[001771]

Exercice 4814

Montrer que l'intersection de deux ensembles ouvert est ouvert, que l'union de deux ensembles fermés est fermée, que cela reste vrai pour un nombre fini d'ensembles, mais que cela peut devenir faux si l'on considère des suites infinies. [001772]

Exercice 4815

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ; on pose

$$\mathrm{Int}(E) =^c \overline{^c E}.$$

Montrer que $\mathrm{Int}(E)$ est le plus grand ouvert contenu dans E. [001773]

Exercice 4816

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\overline{A}$ est aussi bornée et que

$$\sup_{x \in A} \|x\| = \sup_{x \in \overline{A}} \|x\|.$$

[001774]

Exercice 4817

Classer (pour l'inclusion) les parties : $\overline{A \cap B}, \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}, \overline{A} \cup \overline{B}$. [001776]

Exercice 4818

Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, chacune des parties suivantes est-elle ouverte ? fermée ?
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, [0,1[, [0,+\infty[,]0,1[\cup \{2\}, \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}, \bigcap_{n \geqslant 1}]-1/n, 1/n[$. [001777]

Exercice 4819

Soit E un evn (espace vectoriel normé). Soit A une partie de E. Montrer l'égalité

$$E\setminus\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E\setminus A}} \quad \text{et } E\setminus \mathring{A} = \overline{E\setminus A}$$

[001778]

Exercice 4820

Soit E un evn, V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\mathring{V} \neq \varnothing$ alors $V = E$.

[001779]

Exercice 4821

Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et dire pour chacune d'elle si c'est un ouvert, un fermé, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer leurs adhérences et intérieurs.

1. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$$
2. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |x| = 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$$
3. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |x| \neq 1 \text{ ou } |y| \neq 1\}$$
4. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 1 - xy > 0\}$$
5. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 3x + 4y = 2\}$$
6. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , x^2 + y^2 = 1\}$$
7. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , xy = 1\}$$
8. $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{1/n\} \times [0,1]$$

[001780]

Exercice 4822

Déterminer l'adhérence de chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
2. $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $\{\frac{(-1)^n}{1+1/n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

[001781]

Exercice 4823

Soient A et B, deux parties d'un evn E.

1. Montrer que si O est un ouvert de E, alors $A + O$ est ouvert. (Indication : Prendre d'abord $A = \{a\}$ puis A quelconque ....)

2. Etablir que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$. (Trouver un exemple où l'inclusion est stricte)

[001782]

Exercice 4824

1. Tracer le graphe de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+y^2$ et tracer les lignes de niveau de cette fonction.
2. Tracer les graphes des fonctions f et g définies par $f(x,y)=25-(x^2+y^2)$ et $g(x,y)=5-\sqrt{x^2+y^2}$ sur $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 25\}$.
3. Tracer le graphe de la courbe paramétrée $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ définie par $f(x)=(x\cos x, x\sin x)$.
4. Peut-on représenter graphiquement l'application de la question (3.) ? Comment ?
5. Décrire les surfaces de niveau de la fonction $f\colon \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z)=\exp(x+y^2-z^2)$.
6. Pourquoi ne peut-t-on pas naïvement représenter le graphe de l'application

$$f\colon \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(-y,x),$$

sur une feuille de papier. Comment peut-on graphiquement représenter cette application ?

Indication ▼ Correction ▼ [002616]

Exercice 4825

Déterminer si chacune des parties suivantes du plan sont ouvertes ou fermées, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer chaque fois l'intérieur et l'adhérence.

1. $A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2y^2>1\}$,
2. $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1, y>0\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002617]

Exercice 4826

1. Soient $B_1\subset\mathbb{R}^n$ et $B_2\subset\mathbb{R}^m$ des boules ouvertes. Montrer que $B_1\times B_2\subset\mathbb{R}^{n+m}$ est un ouvert.
2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et B un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $A\times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Indication ▼ Correction ▼ [002618]

Exercice 4827

1. Soit (A_n) $(n\in\mathbb{N})$ une suite de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que la réunion des A_n est encore une partie ouverte ? Et leur intersection ?
2. Même question pour une famille de parties fermées.

Indication ▼ Correction ▼ [002619]

Exercice 4828

Soit $A=\{(t,\sin\frac{1}{t})\in\mathbb{R}^2; t>0\}$. Montrer que A n'est ni ouvert ni fermé. Déterminer l'adhérence $\overline{A}$ de A.

Indication ▼ Correction ▼ [002620]

Exercice 4829

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

1. Donner la définition de "D est ouvert." (Ceci est une question de cours !)
2. Donner la définition de "$a\in\mathbb{R}^2$ est un point adhérent de D." (Ceci est une question de cours !)

On considère dans la suite de l'exercice l'ensemble

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\leqslant|y|, x^2+y^2<1\}\subset\mathbb{R}^2.$$

3. Dessiner D.
4. Montrer que D n'est pas ouvert.
5. Déterminer $\overline{D}$, l'adhérence de D. On justifiera brièvement sa réponse, en s'aidant d'un dessin.

[002647]

Exercice 4830 **

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ et $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.
5. $\overset{\circ}{\widehat{A \setminus B}} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.
6. $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

Correction ▼ [005844]

Exercice 4831 **

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les sept ensembles A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ soient deux à deux distincts.

Correction ▼ [005845]

Exercice 4832 **

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E de $\| \|_\infty$.
D est la partie de E constituée des applications dérivables et P est la partie de E constituée des fonctions polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et l'intérieur de P.

Correction ▼ [005846]

Exercice 4833 **

1. Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés. Soient f et g deux applications continues sur E à valeurs dans F. Soit D une partie de E dense dans E. Montrer que si $f_{/D} = g_{/D}$ alors $f = g$.
2. Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.

Correction ▼ [005848]

Exercice 4834 ***

Soit u une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie ayant une unique valeur d'adhérence. Montrer que la suite u converge.

Correction ▼ [005849]

---

194 229.02 Compacité

Exercice 4835 partiel 1999

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(1) $\forall M > 0$, $\exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > M$.
(2) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

(3) Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. [001744]

Exercice 4836

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, les ensembles suivants sont-ils compacts ?

— $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant \|(x,y)\| \leqslant 2 \text{ et } xy = 1\}$.
— $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < \|(x,y)\| \leqslant 2 \text{ et } xy = 1\}$.
— $C = \{(x, \cos n) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 18 \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$.

[001763]

Exercice 4837

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0,A)$, par la formule

$$d(x_0,A) = \inf_{x\in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0,A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0,B) \geqslant d(x_0,A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0,A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que
$$\|a - b\| \geqslant \delta \qquad \forall (a,b) \in A \times B.$$
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

[001764]

Exercice 4838

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et x sa limite. Montrer que l'ensemble $\{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est compact. [001767]

Exercice 4839

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. $\forall n \geqslant 1$, on pose $A_n = \{u_p / \ p \geqslant n\}$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est $V = \bigcap_{n\geqslant 1} \overline{A_n}$, et qu'ainsi V est fermé. En déduire que si la suite est bornée, alors l'ensemble V est un compact non vide. [001783]

Exercice 4840 Graphe fermé

Soient E,F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. On note $Gr(f) = \{(x,y) \in E \times F \text{ tq } y = f(x)\}$.

1. Montrer que si f est continue, alors $Gr(f)$ est fermé dans $E \times F$.
2. Prouver la réciproque lorsque $f(E)$ est inclus dans un compact de F.
3. Donner un contre-exemple si $f(E)$ n'est pas inclus dans un compact.

[004827]

Exercice 4841 Application presque contractante

Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \to A$ telle que : $\forall\, x,y \in A,\ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)$.

1. Montrer que f admet un point fixe unique, a.
2. Soit (x_n) une suite d'éléments de A telle que $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers a.

Correction ▼ [004828]

Exercice 4842 Application presque contractante (Mines MP 2003)

Soit C un compact convexe d'un evn E. Soit $f : C \to C$, 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe. On pourra utiliser la fonction $f_n : x \mapsto \frac{a}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$ avec $a \in C$.

Correction ▼ [004829]

Exercice 4843 Fonction bicontinue sur un compact

Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \to F$ une fonction continue et injective (F = evn).

1. Montrer que $f^{-1} : f(A) \to A$ est aussi continue.
2. Donner un exemple où A n'est pas compact et f^{-1} n'est pas continue.

[004830]

Exercice 4844 Isométries d'un compact

Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \to A$ telle que : $\forall\, x, y \in A,\ d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$.

1. Soit $a \in A$ et (a_n) la suite définie par : $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Montrer que a est valeur d'adhérence de la suite (a_n).
2. Soient $a, b \in A$. Montrer que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.
3. Montrer que $f(A) = A$.

[004831]

Exercice 4845 Partie dense dans un compact

Soit A une partie compacte d'un evn E. Montrer qu'il existe une suite (a_k) d'éléments de A qui est dense dans A. [004832]

Exercice 4846 Intersection emboitée

Soit E un espace vectoriel normé, (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de E et $K = \bigcap_n K_n$.

1. Montrer que $K \neq \varnothing$.
2. Soit U un ouvert contenant K. Montrer qu'il existe n tel que $K_n \subset U$.
3. Montrer que $\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \delta(K_n)$ (δ est le diamètre).

Correction ▼ [004833]

Exercice 4847 Image d'une intersection

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ continue. Soit (K_n) une suite décroissante de compacts de E. Montrer que $f(\bigcap\limits_n K_n) = \bigcap_n f(K_n)$.

[004834]

Exercice 4848 Recouvrement ouvert

Soit A une partie compacte d'un evn E et $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que toute partie de A de diamètre inférieur ou égal à r soit incluse dans l'un des O_i.

Correction ▼ [004835]

Exercice 4849 Ensemble compact de suites

Soit $E = \mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{\text{suites } u = (u_n) \text{ bornées}\}$. On munit E de la norme : $\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$. Montrer que $A = \{u \in E \text{ tq } \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1\}$ est compact.

Correction ▼ [004836]

Exercice 4850 Boule unité non compacte

Soit $E = \mathscr{C}([0,2\pi])$ muni de la norme $\|.\|_2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(nx)$.

1. Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour $n, p \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

[004837]

Exercice 4851 Plus petite boule contenant une partie

Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie bornée contenant au moins deux points.

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimum contenant A.
2. Montrer que cette boule n'est pas nécessairement unique (on prendra $\|.\| = \|.\|_\infty$).
3. Montrer que si $\|.\|$ est une norme euclidienne, alors la boule précédente est unique.

[004838]

Exercice 4852 Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace vectoriel normé, K un compact convexe de E, f une application de K dans K, 1-lipchitzienne. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [004839]

Exercice 4853 Thm. de Riesz, Stival 2003

Soit E un evn de dimension infinie.

1. Soit F un sev de dimension finie et $a \in E \setminus F$.
   (a) Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $\|a - b\| = d(a,F)$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in E$ tel que $\|c\| = 1 = d(c,F)$.
2. Montrer que la boule unité de E n'est pas compacte.

[004840]

195 229.03 Borne supérieure

Exercice 4854

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer les implications suivants :

— $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in A,\ x < M \Rightarrow \sup A \leqslant M$

— $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$.

[001750]

Exercice 4855

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit :

$$A + B = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, c = a + B\}.$$

1. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, puis que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
2. Montrer l'implication :

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in A, \forall y \in B,\ x + y < M \Rightarrow \sup A + \sup B \leqslant M.$$

[001751]

Exercice 4856

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \geqslant \varepsilon$. Montrer que $\varepsilon = 0$. [001752]

Exercice 4857

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup\{|x-y| : (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

[001753]

Exercice 4858 ***

Calculer $\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}} \left\{ \underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}} |\sin(n\alpha)| \right\}$.

Correction ▼ [005850]

196 229.04 Topologie de la droite réelle

Exercice 4859 Partie à un seul point d'accumulation

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ ayant un seul point d'accumulation, a.

1. Montrer que A est dénombrable.
2. On numérote les éléments de A d'une manière quelconque : $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.
   Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Correction ▼ [004717]

Exercice 4860 $(\sin(n))$ est dense

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $A = \{ma + n \text{ tq } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.
Application : Montrer que tout réel de $[-1,1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\sin n)$. [004718]

Exercice 4861 $\sqrt{m} - \sqrt{n}$

Montrer que l'ensemble $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \text{ tq } m, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [004719]

Exercice 4862 Unités quadratiques

Soit $A = \{n + p\sqrt{2} \text{ tq } n, p \in \mathbb{N},\ n + p\sqrt{2} > 0,\ n^2 - 2p^2 = 1\}$. Montrer que A est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^{+*}$.

Correction ▼ [004720]

Exercice 4863 Olympiades 1991

Soit $a > 1$. Montrer qu'il existe une suite réelle bornée, (x_n), telle que : $\forall\, i \neq j,\ |x_i - x_j| \geqslant \frac{1}{|i-j|^a}$.

Correction ▼ [004721]

Exercice 4864 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle. [004722]

Exercice 4865 $u_{n+1}-u_n \to 0$

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue, $u_0\in[0,1]$ et (u_n) la suite des itérées de f en u_0.
On suppose que $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que la suite (u_n) converge vers un point fixe de f.

Correction ▼ [004723]

Exercice 4866 $\exp(iu_n)$

Soit (u_n) une suite réelle telle que la suite $(\exp(iu_n))$ converge et la suite $(|u_{n+1}-u_n|)$ est majorée par $\alpha<\pi$. Montrer que (u_n) converge.

[004724]

Exercice 4867 $\exp(iu_n)$

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Démontrer que la suite $(\exp(iu_n))$ est dense dans $\mathbb{U}$. [004725]

Exercice 4868 $\exp(iu_n)$

Soit (x_n) une suite réelle bornée et $u>0$, $v>0$. On suppose que $\frac{u}{v}\notin\mathbb{Q}$ et que les suites (e^{iux_n}) et (e^{ivx_n}) convergent. Montrer que la suite (x_n) converge. [004726]

Exercice 4869 $u_{n+p}\leqslant u_n+u_p$

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que : $\forall\, n,p\in\mathbb{N},\ u_{n+p}\leqslant u_n+u_p$. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est convergente.

Correction ▼ [004727]

Exercice 4870 Fonctions périodiques (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

1. Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues, périodiques de périodes 1 et $\sqrt{2}$.
2. Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ continues telles que :
   pour tout $X\in\mathbb{R}^2$, $f(X)=f(X+(1,0))=f(X+(0,1))=f(AX)$ où $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

Correction ▼ [004728]

Exercice 4871 **

Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel (ou encore montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Correction ▼ [005843]

Exercice 4872 *** I

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leqslant a|x|+b$.

Correction ▼ [005851]

---

197 229.05 Topologie des espaces métriques

Exercice 4873 Ouverts disjoints

Soient U,V deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\mathring{\overline{U}}$ et $\mathring{\overline{V}}$ sont disjoints.
Donner un contre-exemple lorsque U et V ne sont pas ouverts.

Correction ▼ [004729]

Exercice 4874 A ouvert disjoint de B

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé disjointes. Si A est ouvert, montrer que A et $\overline{B}$ sont disjoints.

[004730]

Exercice 4875 $\overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} = \overline{U}$.

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} = \overline{U}$.

Correction ▼ [004731]

Exercice 4876 Frontière d'un ouvert

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé. Montrer que la frontière de U est d'intérieur vide.

Correction ▼ [004732]

Exercice 4877 La distance est 1-lipchitzienne

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Pour $x \in E$, on pose $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \text{ tq } a \in A\}$.

1. Montrer que : $\forall\, x,y \in E,\ |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y)$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue.

[004733]

Exercice 4878 Diamètre de la frontière

Soit A une partie non vide et bornée d'un evn E. On note $\delta(A) = \sup\{d(x,y) \text{ tq } x,y \in A\}$ (*diamètre de* A). Montrer que $\delta(A) = \delta(\mathrm{Fr}(A))$.

Correction ▼ [004734]

Exercice 4879 Ensemble dérivé

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Un point $x \in E$ est dit *point d'accumulation de* A si toute boule de centre x contient une infinité de points de A. On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A (*ensemble dérivé de* A). Montrer que A' est fermé, et comparer A' et $\overline{A}$.

[004735]

Exercice 4880 Caractérisation des fonctions continues

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$.
Montrer que f est continue si et seulement si : $\forall\, A \subset E,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
si et seulement si : $\forall\, B \subset F,\ f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset f^{-1}(B)^{\circ}$.

Correction ▼ [004736]

198 229.06 Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 4881 Unicité du centre et du rayon d'une boule

Soit E un evn non nul et $\vec{a}, \vec{a}' \in E$, $r, r' > 0$ tels que $B_f(\vec{a}, r) = B_f(\vec{a}', r')$. Montrer que $\vec{a} = \vec{a}'$ et $r = r'$. [004737]

Exercice 4882 $x + y + z = 0$

Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs d'un evn E tels que $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$.
Montrer que : $\|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{x}\| \geqslant \frac{3}{2}(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| + \|\vec{z}\|)$. [004738]

Exercice 4883 Une boule est convexe

Soit E un evn, et $\vec{a} \in E$, $r > 0$. On note $\overline{B} = \overline{B}(\vec{a}, r)$ et $\mathring{B} = \mathring{B}(\vec{a}, r)$.

1. Montrer que $\overline{B}$ et $\mathring{B}$ sont convexes.
2. Si la norme est euclidienne, montrer que si $\vec{u}, \vec{v} \in \overline{B}$ avec $\vec{u} \neq \vec{v}$, alors $]\vec{u}, \vec{v}[\subset \mathring{B}$.
   ($]\vec{u}, \vec{v}[= \{(1-t)\vec{u} + t\vec{v}$ tq $t \in]0,1[\}$)
3. En déduire que si la norme est euclidienne, toute partie A telle que $\mathring{B} \subset A \subset \overline{B}$ est convexe.
4. Donner un contre-exemple avec une norme non euclidienne.

[004739]

Exercice 4884 Distance à un ensemble

Soit E un evn et $A \subset E$ une partie non vide. Pour $\vec{x} \in E$ on pose : $d(\vec{x}, A) = \inf\{\|\vec{x} - \vec{a}\|$ tq $\vec{a} \in A\}$.

1. Montrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\left| d(\vec{x}, A) - d(\vec{y}, A) \right| \leqslant \|\vec{x} - \vec{y}\|$. (Enlever la valeur absolue et démontrer séparément chaque inégalité)
2. Montrer que l'application $\vec{x} \mapsto d(\vec{x}, A)$ est continue.

[004740]

Exercice 4885 Distance à un ensemble (ENS Cachan MP 2002)

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ non vide. On note pour $x \in \mathbb{R}^n$: $d_A(x) = \inf\{\|x - y\|$ tq $y \in A\}$.

1. Montrer que d_A est continue.
2. Soient deux parties de $\mathbb{R}^n$ non vides A, B. Donner une condition équivalente à $d_A = d_B$.
3. On note $\rho(A, B) = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, valant éventuellement $+\infty$.
   Montrer que l'on a $\rho(A, B) = \max\left(\sup\limits_{x \in A} d_B(x),\ \sup\limits_{x \in B} d_A(x)\right)$.

Correction ▼ [004741]

Exercice 4886 Distance entre un fermé et un compact

Soient A, B deux parties compactes non vides de $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\|a - b\| = \min\{\|x - y\|$ tq $x \in A,\ y \in B\}$.
Montrer que ceci est encore vrai si on suppose A compact et B fermé. [004742]

Exercice 4887 Diamètre

Soit E un evn de dimension finie et $A \subset E$ borné, fermé, non vide. Montrer qu'il existe $\vec{a}, \vec{b} \in A$ tels que $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \max(\|\vec{x} - \vec{y}\|$ tq $\vec{x}, \vec{y} \in A)$. (Considérer l'ensemble $A \times A$ dans l'evn $E \times E$) [004743]

Exercice 4888 Diamètres concourants (Ens Ulm MP* 2003)

1. Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide. Soit $O \in \mathring{K}$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue 2π-périodique telle qu'en coordonnées polaires de centre O, K est défini par $\rho \leqslant f(\theta)$.
2. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{x=0}^{\pi} g(x)\cos(x)\,dx = \int_{x=0}^{\pi} g(x)\sin(x)\,dx = 0$. Montrer que g s'annule au moins deux fois sur $]0, \pi[$.
3. Soit G le centre de gravité de K. Montrer que G est le milieu d'au moins trois "diamètres" de K (trois segments joignant deux points de la frontière).

Correction ▼ [004744]

Exercice 4889 $x / \max(1, \|x\|)$, Centrale MP 2005

Soit f définie par $f(x) = \frac{x}{\max(1,\|x\|)}$. Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Correction ▼ [004745]

Exercice 4890 u_n colin à $v_n \Rightarrow \lim u_n$ colin à $\lim v_n$

Soit E un evn de dimension finie et $(\vec{u}_n)$, $(\vec{v}_n)$ deux suites de vecteurs telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \vec{u}_n \text{ est colinéaire à } \vec{v}_n, \qquad \vec{u}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{u}, \qquad \vec{v}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{v}.$$

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (raisonner par l'absurde et compléter $(\vec{u},\vec{v})$ en une base de E). [004746]

Exercice 4891 Suites de Cauchy

Soient (u_n), (v_n) deux suites d'un evn E telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (u_n) est de Cauchy. Montrer que (v_n) est de Cauchy. [004747]

Exercice 4892 Suite de Cauchy non convergente

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme : $\|\sum a_k X^k\| = \max(|a_k|,\ k \in \mathbb{N})$. On note $P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \cdots + \frac{X^n}{n}$. Montrer que la suite (P_n) est de Cauchy, mais ne converge pas. [004748]

Exercice 4893 Mines PC 1998

Soit B une matrice antisymétrique. On suppose que la suite (B^n) converge vers une matrice C. Que peut-on dire de C ? [004749]

Exercice 4894 Suite de matrices inversibles

Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1:\ A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ 2:\ \text{pour tout } n,\ A_n \text{ est inversible} \\ 3:\ A_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}). \end{cases}$$

1. Montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.
2. Peut-on retirer la propriété 3 ?

[004750]

Exercice 4895 Suite de matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles convergeant vers A. [004751]

Exercice 4896 DSE de $I - A$

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite de matrices : $A_n = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ converge vers une matrice B. Montrer que $I - A$ est inversible, et $B = (I - A)^{-1}$.
Remarque : La réciproque est fausse, c'est à dire que la suite (A_n) peut diverger même si $I - A$ est inversible. Chercher un contre-exemple. [004752]

Exercice 4897 Ensam PSI 1998

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite (A^k) converge vers une matrice P. Montrer que P est une matrice de projection.
[004753]

Exercice 4898 Suites de fonctions

Soient $E = \mathscr{C}([a,b] \to \mathbb{R})$, (f_n) une suite de fonctions de E et $f \in E$. Comparer les énoncés :

$$1 : \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 2 : \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 3 : \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

[004754]

Exercice 4899

On note E l'espace vectoriel des suites réelles (x_n) telles que la série $\sum x_n^2$ converge. On le munit du produit scalaire $(x \mid y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$. Soit (y^s) une suite bornée d'éléments de E. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergent faiblement, c'est-à-dire qu'il existe z telle que pour tout x de E on ait $(x \mid y^{s_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x \mid z)$.

Correction ▼ [004755]

Exercice 4900 ENS Lyon MP 2002

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ la suite $(u^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1. Montrer que la suite $(|||u^n|||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u^i(x)$.

Correction ▼ [004756]

Exercice 4901 Norme bizarre

Montrer que $(x,y) \mapsto \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$; dessiner la boule unité. [004757]

Exercice 4902 Normes de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$
$$\|P\|_\infty = \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\},$$
$$\|P\|_* = \max\{|P(t)| \text{ tq } 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Montrer que ce sont des normes, et qu'elles sont deux à deux non équivalentes. (On considèrera $P_n(t) = (t-1)^n$ et $Q_n(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n$) [004758]

Exercice 4903 Norme de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ on pose $\|P\| = \sup(|P(t) - P'(t)| \text{ tq } t \in [0,1])$.
Montrer qu'on définit ainsi une norme sur E. [004759]

Exercice 4904 Normes de polynômes

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour $P \in \mathbb{R}[X]$: $N_a(P) = |P(a)| + \int_{t=0}^{1} |P'(t)|\,dt$. Montrer que…

1. N_a est une norme.
2. N_0 et N_1 sont équivalentes.
3. Si $a, b \in [0,1]$, alors N_a et N_b sont équivalentes.
4. Soit $P_n = (X/2)^n$. Déterminer pour quelles normes N_a la suite (P_n) est convergente et quelle est sa limite.
5. Si $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$ alors aucune des normes N_a, N_b n'est plus fine que l'autre.

Correction ▼ [004760]

Exercice 4905 Normes sur les polynômes

Soit (λ_n) une suite de réels strictement positifs. On lui associe la norme sur $\mathbb{R}[x]$: $N(\sum_i a_i x^i) = \sum_i \lambda_i |a_i|$.

Soient (λ_n) et (λ'_n) deux suites et N, N' les normes associées. Montrer que N et N' sont équivalentes si et seulement si les suites $\left(\frac{\lambda_n}{\lambda'_n}\right)$ et $\left(\frac{\lambda'_n}{\lambda_n}\right)$ sont bornées. [004761]

Exercice 4906 Centrale MP 2006

E est l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose :

$$\begin{aligned} N_\infty(f) &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \\ N(f) &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f''(x)|, \\ N_1(f) &= \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|. \end{aligned}$$

1. Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.
2. Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1 ni à N.
3. Montrer que N et N_1 sont équivalentes (introduire l'équation différentielle $y''+y = g$).

Correction ▼ [004762]

Exercice 4907 Norme de Frobenius

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$.
Montrer que c'est une norme et que : $\forall\, A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.

Correction ▼ [004763]

Exercice 4908 Semi-norme

Soit p une semi-norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (ie. il manque juste l'axiome $p(A) = 0 \Rightarrow A = 0$). On suppose de plus que $\forall\, (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ p(AB) \leqslant p(A)p(B)$. Montrer que $p = 0$ ou p est en fait une norme.

Correction ▼ [004764]

Exercice 4909 Normes produit

Soient E,F deux evn et $G = E\times F$. On pose pour $u = (\vec{x},\vec{y}) \in G$:

$$\|u\|_1 = \|\vec{x}\|_E + \|\vec{y}\|_F, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\|\vec{x}\|_E^2 + \|\vec{y}\|_F^2}, \quad \|u\|_\infty = \max(\|\vec{x}\|_E, \|\vec{y}\|_F).$$

1. Montrer que ce sont des normes sur G et qu'elles sont deux à deux équivalentes (sans hypothèse de dimension finie).
2. On prend $E = F$. Montrer que pour chacune de ces normes, l'application $G \to E, (\vec{x},\vec{y}) \mapsto \vec{x}+\vec{y}$ est continue.

[004765]

Exercice 4910 Normes sur les suites

Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)$ réelles bornées. On pose $\begin{cases} \|u\| = \sup(|u_n| \text{ tq } n\in\mathbb{N}) \\ N(u) = \sup(|u_n|+|u_{2n}| \text{ tq } n\in\mathbb{N}). \end{cases}$
Montrer que ce sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes. [004766]

Exercice 4911 Norme sur les suites

Soit E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ telles que la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$ est bornée. Pour $u \in E$, on pose $\|u\| = \sup(\sqrt[n]{|u_n|} \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev et que $\| \,.\, \|$ *n'est pas* une norme sur E. [004767]

Exercice 4912 Fonctions lipschitziennes

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes. Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\| = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \text{ tq } x \neq y\right),$$
$$N(f) = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \text{ tq } x \neq 0\right).$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev.
2. Montrer que $\| \,.\, \|$ et N sont des normes sur E.
3. Sont-elles équivalentes ?

[004768]

Exercice 4913 Fonctions $\mathscr{C}^1$

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $f \in E$, on pose : $N_1(f) = \sup(|f| + |f'|)$, $N_2(f) = \sup|f| + \sup|f'|$. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E. [004769]

Exercice 4914 Norme sur les fonctions continues

$E = C([0,1],\mathbb{R})$. Soit $g \in E$. Pour tout $f \in E$ on pose $N(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} \{|f(x)g(x)|\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme sur E.
2. Si pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \neq 0$, montrer qu'alors N et $\| \, \|_\infty$ sont des normes sur E équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la proposition précédente.

[004770]

Exercice 4915 Comparaison de normes (ENS MP 2002)

1. Soit E un espace préhilbertien réel et $u_1, \dots, u_n$ des éléments de E. Calculer $\sum_\sigma \left\|\sum_{i=1}^n \sigma(i)u_i\right\|^2$ où σ parcourt l'ensemble des fonctions de $[[1,n]]$ dans $\{-1,1\}$.
2. On se place dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la norme infinie n'est équivalente à aucune norme euclidienne.
3. Même question avec la norme $\| \, \|_p$, $p \in [1,+\infty[\setminus \{2\}$.

Correction ▼ [004771]

Exercice 4916 Jauge

Soit $(E, \| \, \|)$ un $\mathbb{R}$-evn et $K \subset E$ une partie convexe, bornée, symétrique par rapport à l'origine et telle que $0 \in \mathring{K}$.
Pour $x \in E$, on pose $n(x) = \inf\{|\lambda| \text{ tq } x \in \lambda K\}$. Montrer que n est une norme équivalente à $\| \, \|$. [004772]

Exercice 4917 Polytechnique MP* 2006

Soit E un espace vectoriel réel. On considère une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$(i) \qquad \forall\, \lambda, x,\ \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)\ ;$$
$$(ii) \qquad \forall\, x,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

1. Montrer que N est une norme si et seulement $B = \{x \text{ tq. } N(x) \leqslant 1\}$ est convexe.
2. Montrer que si N vérifie aussi

$$(iii) \qquad \forall\, x,y,\ N(x+y)^2 \leqslant 2N(x)^2 + 2N(y)^2$$

alors c'est une norme.

Correction ▼ [004773]

Exercice 4918 Parties de $\mathbb{R}^n$

Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy = 1\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + xy + y^2 < 1\}$.
3. $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1\}$.

[004774]

Exercice 4919 Addition de parties

Soient A, B deux parties non vides d'un evn E. On note $A + B = \{\vec{a} + \vec{b} \text{ tq } \vec{a} \in A,\ \vec{b} \in B\}$. Montrer que ...

1. Si A ou B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Si A et B sont fermés, alors $A + B$ n'est pas nécéssairement fermé. (Prendre $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy = 1\}$ et $B = \{(x,0) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}$)
3. Si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

[004775]

Exercice 4920 Voisinage fermé d'un fermé

Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On pose $F' = \bigcup_{\vec{x} \in F} \overline{B}(\vec{x}, r)$. Montrer que F' est fermé. [004776]

Exercice 4921 Ev engendré par un ouvert

Soit $\mathscr{O}$ un ouvert non vide d'un ev normé E. Montrer que $\mathrm{vect}(\mathscr{O}) = E$. [004777]

Exercice 4922 Adhérence et intérieur d'un sev

Soit E un evn et F un sev de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sev de E.
2. Si E est de dimension finie, montrer que $F = \overline{F}$.
3. Dans le cas général, montrer que $\mathring{F} = \varnothing$ ou $F = E$.

[004778]

Exercice 4923 Cône convexe engendré par un ensemble fini, ENS ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $a_1, \dots, a_n \in E$. On pose $C = \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \lambda_i \geqslant 0\right\}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $c \in C$ tel que $\|x - c\| = \inf\{\|x - a\|, a \in C\}$.
2. En déduire que C est fermé.

Correction ▼ [004779]

Exercice 4924 Partie convexe dense

Soit E un evn de dimension finie et $C \subset E$ convexe et dense. Montrer que $C = E$.

Correction ▼ [004780]

Exercice 4925 L'ensemble des projecteurs est fermé

Soit E un evn de dimension finie et $\mathscr{P}$ l'ensemble des projecteurs de E. Montrer que $\mathscr{P}$ est fermé dans $\mathscr{L}(E)$.
[004781]

Exercice 4926 Adhérence et intérieur dans les fonctions continues

1. Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit P l'ensemble des fonctions de E positives ou nulles. Chercher $\overline{P}$ et $\mathring{P}$.
2. Mêmes questions avec la norme : $\|f\| = \int_{t=0}^{1} |f(t)|\,dt$.

Correction ▼ [004782]

Exercice 4927 Mines MP 2000

On pose $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et on le munit de la norme N_∞. Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1)\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F.
Correction ▼ [004783]

Exercice 4928 Points isolés (Ens Ulm MP* 2003)

Les solutions de l'équation $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ pour $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ sont-elles isolées ?
Correction ▼ [004784]

Exercice 4929 Adhérence et intérieur d'un convexe

Soit A une partie convexe d'un evn E.

1. Démontrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont aussi convexes (pour $\mathring{A}$: faire un dessin).
2. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est convexe (c.a.d. $d(tx+(1-t)y,A) \leqslant td(x,A)+(1-t)d(y,A)$).

[004785]

Exercice 4930 Théorème des fermés emboités

Soit E un evn de dimension finie, et $(B_n = B(\vec{a}_n, r_n))$ une suite de boules fermées, décroissante pour l'inclusion, tq $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1. Montrer que la suite $(\vec{a}_n)$ admet une sous-suite convergeant vers $\vec{a} \in E$.
2. Montrer que $\vec{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{a}$.
3. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{\vec{a}\}$.

[004786]

Exercice 4931 X MP* 2001

On considère l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme quelconque.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Quel est l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$?

Correction ▼ [004787]

Exercice 4932 Matrices nilpotentes, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à l'ensemble $\{P^{-1}NP,\ P \in GL_n(\mathbb{C})\}$.

Correction ▼ [004788]

Exercice 4933 Polynômes scindés (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathbb{R}^n$. On note $P_\sigma = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n \sigma_n$.
Soit $\Omega = \{\sigma \in \mathbb{R}^n$ tq P_σ est à racines réelles, distinctes$\}$.

1. Ω est-il ouvert ? fermé ?
2. Notons $f : \sigma \mapsto P_\sigma$. Déterminer $f(\overline{\Omega})$.

Correction ▼ [004789]

Exercice 4934 $(f(x)-f(y))/(x-y)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} (x,y) & \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ (x,x) & f'(x) \end{cases}$
Montrer que g est continue. (Attention : pour une fonction définie par cas, se placer au voisinage d'un point (x_0,y_0) et déterminer si un seul ou plusieurs cas sont à considérer dans ce voisinage) [004790]

Exercice 4935 $\sup(f(x,y))$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. On pose $g(x) = \sup(f(x,y)$ tq $y \in [0,1])$. Montrer que g est continue.

Correction ▼ [004791]

Exercice 4936 Fonction tendant vers $+\infty$ à l'infini

Soit E un evn de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(\vec{x}) \xrightarrow[\|\vec{x}\|\to\infty]{} +\infty$, c'est à dire :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \vec{x} \in E,\ \|\vec{x}\| \geqslant B \Rightarrow f(\vec{x}) \geqslant A.$$

1. On prend $A = f(\vec{0})$ et B le nombre correspondant.
   Montrer que $\inf\{f(\vec{x}) \text{ tq } \vec{x} \in E\} = \inf\{f(\vec{x}) \text{ tq } \|\vec{x}\| \leqslant B\}$.
2. En déduire que f admet un minimum.
3. Exemple : soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée.
   Montrer qu'il existe $P \in E$ tq $\|f-P\|_\infty = \sup\{|f(t)-P(t)| \text{ tq } t \in [a,b]\}$ soit minimal (P est appelé : *un polynôme de meilleure approximation de f sur $[a,b]$*).

[004792]

Exercice 4937 Fonctions homogènes

On note $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est *positivement homogène de degré α* si :

$$\forall\ (x,y) \in \Omega, \forall\ t > 0,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1. Donner des exemples de telles fonctions pour $\alpha = 1, 0, -2, \frac{1}{2}$.
2. Soit f continue, positivement homogène de degré α. Montrer que si $\alpha \geqslant 0$, f est bornée sur D et que si $\alpha > 0$, f admet une limite finie en $(0,0)$. Examiner les cas $\alpha = 0$, $\alpha < 0$.

[004793]

Exercice 4938 Fonction partiellement continue dans toutes les directions

Trouver une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ discontinue en $(0,0)$ mais telle que pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $f(\alpha t,\beta t)\xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

[004794]

Exercice 4939 Continuité du polynôme caractéristique

Soit $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $F=\mathbb{R}_n[X]$, et $\varphi:E\to F, A\mapsto P_A$ (polynôme caractéristique). Montrer que φ est continue.

[004795]

Exercice 4940 Ouverts et non ouverts

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $P\in E$, on pose : $\begin{cases} N_1(P)=\sup(|P(t)| \text{ tq } 0\leqslant t\leqslant 1)\\ N_2(P)=\sup(|P(t)| \text{ tq } 1\leqslant t\leqslant 2)\\ \varphi(P)=P(0).\end{cases}$

1. Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes.
2. Montrer que φ est continue pour N_1.
3. Montrer que φ est discontinue pour N_2. (Considérer $P_n(t)=(1-t/2)^n$)
4. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?
5. Soit $\mathscr{O}=\{P\in E \text{ tq } P(0)\neq 0\}$. Montrer que $\mathscr{O}$ est ouvert pour N_1 mais pas pour N_2.

[004796]

Exercice 4941 Thm du point fixe

Soit E un evn de dimension finie et $f:E\to E$ une fonction k-lipchitzienne avec $k<1$. On choisit $\vec{u}_0\in E$ arbitrairement, et on considère la suite $(\vec{u}_n)$ telle que pour tout n : $\vec{u}_{n+1}=f(\vec{u}_n)$.

1. Montrer que $\|\vec{u}_{n+1}-\vec{u}_n\|\leqslant k^n\|\vec{u}_1-\vec{u}_0\|$.
2. En déduire que la suite $(\vec{u}_n)$ est de Cauchy.
3. Soit $\vec{\ell}=\lim(\vec{u}_n)$. Montrer que $\vec{\ell}$ est l'unique solution dans E de l'équation $f(\vec{x})=\vec{x}$.

[004797]

Exercice 4942 Points fixes, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

1. Montrer que les points fixes de f, continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, forment un ensemble fermé non vide.
2. Montrer que tout fermé de $[0,1]$ non vide est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Correction ▼ [004798]

Exercice 4943 Racines de polynômes X MP* 2004

Soit $E=\mathbb{C}_d[X]$ normé par $\|P\|=\sum|a_i|$, $P\in E$ de degré d à racines simples et P_n une suite de polynômes de E convergeant vers P.
Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $P(z)=0$ et $\delta>0$.

1. Montrer que pour n assez grand, P_n a au moins un zéro dans $\overline{B(z,\delta)}$.
2. Montrer qu'il existe $\delta_0>0$ tel que pour tout $\delta\in\,]0,\delta_0]$ P_n a exactement une racine dans $\overline{B(z,\delta)}$ si n est assez grand.
3. Que peut-on dire si les zéros de P ne sont plus supposés simples ?

Correction ▼ [004799]

Exercice 4944 Une application polynomiale est fermée, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit f une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$. Montrer que l'image par f de tout fermé est un fermé.

Correction ▼ [004800]

Exercice 4945 Principe du maximum, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et U un ouvert de $\mathbb{C}$ borné. Montrer que $\sup(|P(x)|,\ x \in U) = \sup(|P(x)|,\ x \in \mathrm{Fr}(U))$.

Correction ▼ [004801]

Exercice 4946 Fonction presque additive, Centrale MP 2001

Soient E,F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, F étant complet. Soit f une application continue de E dans F telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall\, x,y \in E,\ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M.$$

1. Dans le cas $M = 0$ montrer que f est linéaire. Ce résultat subsiste-t-il si E et F sont des $\mathbb{C}$-ev ?
2. On suppose $M > 0$. Soit pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur E.
3. On note $g = \lim_{n\to\infty} f_n$. Montrer que g est une application linéaire continue et que c'est l'unique application linéaire telle que $f - g$ soit bornée.

Correction ▼ [004802]

Exercice 4947 f uc $\Rightarrow$ f(borné) est borné

Soit $A \subset E$ une partie non vide bornée et $f : A \to F$ uniformément continue. Montrer que f est bornée dans les cas suivants :

1. A est convexe.
2. A est connexe par arcs.
3. A est quelconque et E est de dimension finie.

[004803]

Exercice 4948 Applications linéaires continues

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose $|||u||| = \sup(\|u(\vec{x})\| \text{ tq } \|\vec{x}\| = 1)$.

1. Montrer que $|||u|||$ existe et que c'est un maximum.
2. Montrer que $|||\ .\ |||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$ (appelée : *norme linéaire associée à* $\|\ .\ \|$).
3. Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \|u(\vec{x})\| \leqslant |||u||| \times \|\vec{x}\|$.
4. En déduire que : $\forall\, u,v \in \mathscr{L}(E),\ |||u \circ v||| \leqslant |||u||| \times |||v|||$.

[004804]

Exercice 4949 Centrale MP 2006

E est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$.
Pour $p \in |||$ et $f \in E$ on pose : $N_p(f) = \sup\{|t^p e^{-|t|} f(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que N_p est une norme sur E.
2. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $P_c : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f(c)$. Étudier la continuité de P_c sur (E, N_p).
3. Montrer que, pour p et q distincts dans $|||$, les normes N_p et N_q ne sont pas équivalentes.

Correction ▼ [004805]

Exercice 4950 Applications linéaires continues

Soient E,F deux evn de dimensions finies et $\varphi : E \to F$ linéaire. Montrer que φ est continue.

En déduire que tout sev de E est fermé. [004806]

Exercice 4951 Continuité du polynôme de Lagrange

Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ distincts. À $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ on fait correspondre le polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i : $P(x_i) = y_i$.

1. Montrer que l'application $(y_1,\dots,y_n) \mapsto P$ est continue.
2. Montrer que l'application réciproque est aussi continue.

[004807]

Exercice 4952 Ensi PSI 1998

Soit $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes muni de la norme $\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in |||\}$.
Soit $L : \mathscr{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, u \mapsto \ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que L est une application linéaire continue et calculer sa norme.
[004808]

Exercice 4953 Itération d'un endomorphisme

Soit E un evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On choisit $\vec{x}_0 \in E$, et on considère la suite $(\vec{x}_n)$ définie par la relation de récurrence : $\vec{x}_{n+1} = \frac{u(\vec{x}_n)}{\|u(\vec{x}_n)\|}$.
On suppose que la suite $(\vec{x}_n)$ converge. Montrer que la limite est un vecteur propre de u.
Exemples : **1)** $E = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{mat}(u) = \begin{pmatrix} 1&2&3\\4&5&6\\7&8&9 \end{pmatrix}$. **2)** $E = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{mat}(u) = \begin{pmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}$. [004809]

Exercice 4954 Puissances de u

Soit E un evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|u\| \leqslant 1$. Montrer que la suite (u^n) contient une sous-suite simplement convergente.

Correction ▼ [004810]

Exercice 4955 $\mathrm{id} - u$ est bicontinu

Soit E un $\mathbb{C}$-evn et $u \in \mathscr{L}_c(E)$ tel que $\mathrm{id}_E - u$ est bicontinu. Montrer que pour tout entier n, $\mathrm{id}_E - u^n$ est bicontinu et comparer son inverse à $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{id}_E - e^{2ik\pi/n} u\right)^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼ [004811]

Exercice 4956 Norme linéaire sur $\mathbb{R}$ = norme linéaire sur $\mathbb{C}$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ les endomorphismes canoniquement associés à A. Montrer que si on munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ des normes euclidiennes usuelles, alors $\|f\| = \|g\|$.

Correction ▼ [004812]

Exercice 4957 Applications linéaires sur les polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[x]$ muni de la norme : $\left\|\sum_i a_i x^i\right\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que $\varphi : P \mapsto P(x+1)$ est continue ?
2. Est-ce que $\psi : P \mapsto AP$ est continue ? ($A \in E$ fixé)
3. Reprendre les questions précédentes avec la norme : $\|P\| = \sup\{e^{-|t|}|P(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Correction ▼ [004813]

Exercice 4958 $uv - vu = \mathrm{id}$

Soit E un espace vectoriel normé et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_E$.

1. Calculer $u \circ v^n - v^n \circ u$ pour $n \in |||^*$.

2. Montrer que u ou v est discontinu.

Correction ▼ [004814]

Exercice 4959 La dérivation peut-elle être continue ?

On note $E = \mathscr{C}^\infty([0,+\infty[,\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E de dérivation : $D(f) = f'$.

1. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu (considérer $x \mapsto e^{\alpha x}$).
2. Soit F le sous-ev de E constitué des fonctions polynomiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D_{|F}$ est continu.

Correction ▼ [004815]

Exercice 4960 Mines MP 2002

On munit $E_k = \mathbb{R}_k[X]$ de la norme $\|P\|_k = \sum_{i=0}^k |P(i)|$. Calculer $|||\varphi|||$ avec $\varphi : E_2 \to E_3, P \mapsto X^2P'$.

Correction ▼ [004816]

Exercice 4961 Normes sur les suites bornées

Soit E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)$ bornées et F le sev des suites telles que la série de terme général $|u_n|$ converge. Pour $u \in E$, on pose $\|u\|_\infty = \sup\limits_n |u_n|$ et pour $u \in F$: $\|u\|_1 = \sum\limits_n |u_n|$.

Soit $a \in E$ et $f : E \to E, u \mapsto au = (a_n u_n)$.

1. Montrer que f est une application linéaire continue de E dans E et calculer sa norme.
2. Montrer que F est stable par f et calculer la norme de $f_{|F}$ quand on prend la norme $\|\ \|_1$ sur F.

[004817]

Exercice 4962 Thm de l'hyperplan fermé

Soit E un $\mathbb{R}$-evn et $f \in E^*$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker} f$ est fermé (pour la réciproque : supposer $\mathrm{Ker} f$ fermé, montrer que $\{x \text{ tq } f(x) > 0\}$ est ouvert, puis étudier $\{x \text{ tq } -1 < f(x) < 1\}$).
2. On suppose f continue. Soit $x \in E$. Montrer que $|f(x)| = \|f\| d(x, \mathrm{Ker} f)$.

Correction ▼ [004818]

Exercice 4963 Théorème de Hahn-Banach (Polytechnique MP* 2003)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un hyperplan de E. Soit $\varepsilon \in E$ tel que $\mathbb{R}\varepsilon$ soit supplémentaire de F. Soit f une forme linéaire sur F.

1. Montrer que : $\forall\, x_1, x_2 \in F,\ f(x_1) - |||f|||\, \|x_1 - \varepsilon\| \leqslant |||f|||\, \|x_2 + \varepsilon\| - f(x_2)$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x_1, x_2 \in F,\ f(x_1) - |||f|||\, \|x_1 - \varepsilon\| \leqslant \alpha \leqslant |||f|||\, \|x_2 + \varepsilon\| - f(x_2)$.
3. On définit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par $\varphi_{|F} = f$ et $\varphi(\varepsilon) = \alpha$. Montrer que $|||\varphi||| = |||f|||$.
4. On considère $E = \{u = (u_n)_{n\in|||} \in \mathbb{R}^{|||} \text{ tq } \sum_{n\in|||} |u_n| < +\infty\}$ avec la norme définie par : $\|u\| = \sum_{n\in|||} |u_n|$. Montrer que E est complet pour cette norme.
5. Donner une famille dénombrable de sev de E de dimensions finies dont la réunion est dense dans E.
6. Soit F un sev de E de dimension finie et f une forme linéaire sur F. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi_{|F} = f$ et $|||\varphi||| = |||f|||$.

Correction ▼ [004819]

Exercice 4964 Rayon spectral

Soit E un evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose $x_n = \|u^n\|$.

1. Montrer que $\rho = \inf\{\sqrt[n]{x_n},\ n \in |||\}$ est indépendant de la norme choisie sur E.
2. En utilisant l'inégalité : $x_{p+q} \leqslant x_p x_q$, montrer que la suite $(\sqrt[n]{x_n})$ converge vers ρ.

[004820]

Exercice 4965 Rayon spectral (Centrale MP 2001)

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie. On considère un endomorphisme f de E et on note $\rho(f) = \sup\{|\lambda| \text{ tq } \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$ (rayon spectral de f). Soit ν une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\rho(f) \leqslant \lim_{p\to\infty}(\nu(f^p)^{1/p})$. On pourra pour commencer supposer que ν est la norme subordonnée à une norme sur E.
2. Montrer que si f est diagonalisable l'inégalité précédente est une égalité.
3. Étudier le cas général.

Correction ▼ [004821]

Exercice 4966 Polytechnique MP* 2000

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Prouver que u est surjective si et seulement si elle transforme tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ en ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Correction ▼ [004822]

Exercice 4967 Connexité d'un evn

Soit E un evn et $A \subset E$. On suppose que A est à la fois ouvert et fermé.

1. Exemples de telles parties ?
2. On définit la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ par $\begin{cases} \vec{x} & 1 \text{ si } \vec{x} \in A, \\ \vec{x} & 0 \text{ si } \vec{x} \notin A \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue.
   (b) On prend $\vec{a} \in A$ et $\vec{b} \notin A$. Montrer que $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t\vec{a} + (1-t)\vec{b})$ est continue.
   (c) Conclure.

[004823]

Exercice 4968 $A \neq E$ et $A \neq \varnothing => \mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$

Soit E un evn et A une partie de E ni vide, ni égale à E. Montrer que $\mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$. [004824]

Exercice 4969 $A \cup B$ fermé $\Rightarrow A \cup B = E$.

Soit E un evn de dimension supérieure ou égale à 2 et A, B deux parties de E telles que A est ouvert non vide, B est fini et $A \cup B$ est fermé. Montrer que $A \cup B = E$.

Correction ▼ [004825]

Exercice 4970 Complémentaire d'un hyperplan (Ens Ulm MP* 2005)

Soit E un evn réel et H un hyperplan de E. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si H *n'est pas* fermé.

Correction ▼ [004826]

Exercice 4971 **

Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé est un convexe de cet espace.

Correction ▼ [005839]

Exercice 4972 *** I

1. Inégalités de HÖLDER et de MINKOWSKI. Soit $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
   (a) Montrer que pour $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, $xy \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}$.
   (b) En déduire que $\forall((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leqslant (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{1/q}$.
   (c) En déduire que $\forall((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p)^{1/p} \leqslant (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^n |b_k|^p)^{1/p}$.
2. Soit α un réel strictement positif. Pour $x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $N_\alpha(x) = (\sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha)^{1/\alpha}$.
   (a) Montrer que $\forall \alpha \geqslant 1$, N_α est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Dessiner les « boules unités » de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $\alpha \in \left\{\frac{2}{3},1,\frac{3}{2},2,+\infty\right\}$.
   (c) Montrer que, pour $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ fixé, $\lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x) = \text{Max}\{|x_k|,\ 1\leqslant k\leqslant n\} = N_\infty(x)$.
   (d) Montrer que si $0<\alpha<1$, N_α n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ (si $n \geqslant 2$).

Correction ▼ [005840]

Exercice 4973 ** I

Soit $E=C^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour f élément de E, on pose $N(f)=\int_0^1 |f(t)|\,dt$, $N'(f)=|f(0)|+\int_0^1 |f'(t)|\,dt$ et $N''(f)=|f(0)|+|f'(0)|+\int_0^1 |f''(t)|\,dt$. Montrer que N, N' et N'' sont des normes et les comparer.

Correction ▼ [005841]

Exercice 4974 ** I Distance d'un point à une partie

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E,\|\ \|)$.
Pour $x\in E$, on pose $d_A(x)=d(x,A)$ où $d(x,A)=\text{Inf}\{\|x-a\|,\ a\in A\}$.

1. Justifier l'existence de $d_A(x)$ pour chaque x de E.
2. (a) Montrer que si A est fermée, $\forall x\in E$, $d_A(x)=0 \Leftrightarrow x\in A$.
   (b) Montrer que si A est fermée et E est de dimension finie, $\forall x\in E$, $\exists a\in A/\ d_A(x)=\|x-a\|$.
3. Si A est quelconque, comparer $d_A(x)$ et $d_{\overline{A}}(x)$.
4. Montrer d_A est continue sur E.
5. A chaque partie fermée non vide A, on associe l'application d_A définie ci-dessus. Montrer que l'application $A\mapsto d_A$ est injective.
6. Dans l'espace des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme, on considère $A=\left\{f\in E/\ f(0)=0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt \geqslant 1\right\}$. Calculer $d_A(0)$.

Correction ▼ [005847]

199 229.07 Connexité

Exercice 4975 Frontière connexe

Soit E un espace vectoriel normé et $A\subset E$ fermé. Montrer que si $\text{Fr}(A)$ est connexe, alors A est connexe.

Correction ▼ [004841]

Exercice 4976 $\mathbb{U}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes

Soit $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$ et $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que f n'est pas injective. [004842]

Exercice 4977 $u_{n+1}-u_n\to 0$

Soit E un evn de dimension finie et (u_n) une suite bornée d'éléments de E telle que $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est connexe.

Correction ▼ [004843]

Exercice 4978 Complémentaire d'une partie étoilée

Soit Ω une partie bornée étoilée d'un evn réel de dimension supérieure ou égale à 2. Montrer que le complémentaire de Ω est connexe.

[004844]

Exercice 4979 Complémentaire d'un sev

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie et F un sev propre de E. Montrer que $E \setminus F$ est connexe si et seulement si $\operatorname{codim}(F) \geqslant 2$. Que peut-on dire dans un $\mathbb{C}$-ev ?

[004845]

200 229.08 Espaces complets

Exercice 4980 Norme pour les fonctions lipschitziennes

Soit $E = \{$fonctions lipchitziennes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = |f(0)| + \sup\limits_{x \neq y} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$.

Montrer que E est complet.

[004846]

Exercice 4981 Image d'une intersection de fermés

Soit E un espace vectoriel normé complet, F un espace vectoriel normé quelconque, $f : E \to F$ une application continue et (E_n) une suite décroissante de fermés de E dont le diamètre tend vers 0.
Montrer que $f(\bigcap\limits_n E_n) = \bigcap_n f(E_n)$.

[004847]

Exercice 4982 Intersection de boules

Soit E un evn complet et $(B_n(a_n, r_n))$ une suite décroissante de boules fermées dont le rayon ne tend pas vers 0. Montrer que $\bigcap_n B_n$ est une boule fermée.

Correction ▼ [004848]

Exercice 4983 Intersection vide

Soit $E = \mathscr{B}(|||, \mathbb{R}) = \{$suites $u = (u_n)$ bornées$\}$. On munit E de la norme : $\|u\| = \sup\{|u_n|,\ n \in |||\}$.

1. Montrer que E est complet.
2. Soit $F_k = \{u \in E$ tq $\|u\| = 1$ et $u_0 = \cdots = u_k = 0\}$. Vérifier que les F_k forment une suite de fermés bornés emboîtés dont l'intersection est vide.

[004849]

Exercice 4984 Théorème de Baire

Soit E un espace vectoriel normé complet et (F_n) une suite de fermés de E d'intérieurs vides. On pose $F = \bigcup_n F_n$. Montrer que $\mathring{F} = \varnothing$.

Correction ▼ [004850]

Exercice 4985 $f \circ f$ est contractante

Soit E un espace vectoriel normé complet et $f : E \to E$ telle que $f \circ f$ est contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Correction ▼ [004851]

Exercice 4986 Centrale MP 2001

Montrer qu'un plan euclidien n'est pas réunion de cercles disjoints non réduits à un point.

Indication ▼ Correction ▼ [004852]

201 229.09 Fonctions vectorielles

Exercice 4987 Centre de gravité d'une courbe paramétrée

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto M_t$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ de longueur non nulle. Le centre de gravité de la courbe est le point G tel que $\int_{t=a}^{b} \vec{GM_t} \|\vec{M}'(t)\| \, dt = \vec{0}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité de G.
2. Déterminer le centre de gravité d'un demi-cercle. (On admet que G est indépendant du paramétrage)
3. Montrer que G appartient à l'enveloppe convexe de la courbe.
4. Montrer que si la courbe admet un axe de symétrie, Δ, alors $G \in \Delta$. (Si σ est la symétrie associée, considérer la courbe décrite par $N_t = \sigma(M_t)$)
5. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie affine. Montrer que si G est le centre de gravité de $\mathscr{C}$, alors $\Phi(G)$ est le centre de gravité de $\Phi(\mathscr{C})$.

Correction ▼ [004853]

Exercice 4988 Dérivée d'une base orthonormée

Soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que pour tout $t \in I$, $\mathscr{B}_t = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (base orthonormée mobile).

1. Soit M_t la matrice dans $\mathscr{B}_t$ des vecteurs dérivés $\vec{e}_1{}'(t), \vec{e}_2{}'(t), \vec{e}_3{}'(t)$. Montrer que M_t est antisymétrique.
2. En déduire qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}(t)$ tel que $\vec{e}_i{}'(t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{e}_i(t)$, $i = 1,2,3$.
3. Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont de classe $\mathscr{C}^2$, montrer que $\vec{\Omega}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $\vec{e}_i{}''$ en fonction de $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}'$ et $\vec{e}_i$.

Correction ▼ [004854]

Exercice 4989 f' est colinéaire à f

Soit $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall\, t \in I,\ \vec{f}(t) \neq \vec{0} \text{ et la famille } (\vec{f}(t), \vec{f}'(t)) \text{ est liée.}$$

On pose $\vec{g}(t) = \frac{\vec{f}(t)}{\|\vec{f}(t)\|}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\vec{g}'(t)$ est à la fois orthogonal et colinéaire à $\vec{g}(t)$.
2. En déduire que $\vec{f}(t)$ garde une direction constante.
3. Chercher un contre-exemple lorsqu'on retire la propriété : $\forall\, t \in I,\ \vec{f}(t) \neq \vec{0}$.

[004855]

Exercice 4990 f'' est colinéaire à f

Soit $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $t \in I$, $\vec{f}''(t)$ est colinéaire à $\vec{f}(t)$. (*mouvement à accélération centrale*) On note $\vec{\sigma}(t) = \vec{f}(t) \wedge \vec{f}'(t)$.

1. Montrer que $\vec{\sigma}(t)$ est un vecteur constant.
2. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $(\vec{f}(t_0), \vec{f}'(t_0))$ est libre, montrer que $\vec{f}(I)$ est inclus dans un plan.

[004856]

Exercice 4991 f et g colinéaires

Soient $f, g : I \subset \mathbb{R} \to E$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^1$.

1. On suppose : $\forall t \in I$, $f(t)$ et $g(t)$ sont colinéaires. Est-ce que $f'(t)$ et $g'(t)$ sont colinéaires ?
2. On suppose : $\forall t \in I$, $f'(t)$ et $g'(t)$ sont colinéaires. Existe-t-il $\vec{c} \in E$ tel que $f - \vec{c}$ et g soient colinéaires ?

Correction ▼ [004857]

Exercice 4992 $\mathbb{R}^2 \setminus$ une droite n'est pas connexe

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue, D une droite de $\mathbb{R}^2$ et P^+, P^- les demi-plans délimités par D. Montrer que s'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) \in P^+$ et $f(b) \in P^-$, alors il existe c compris entre a et b tel que $f(c) \in D$. Généraliser en dimension n. [004858]

202 229.10 Application linéaire continue, norme matricielle

Exercice 4993 *

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par : $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\frac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1. Vérifier brièvement que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.
2. Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E$, $f(P) = XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et déterminer $|||f|||$.

Correction ▼ [005854]

Exercice 4994 **

On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On considère les endomorphismes Δ et C de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall u \in E,\ \Delta(u) = v \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } \forall u \in E,\ C(u) = w \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que Δ et C sont continus sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et calculer leur norme.

Correction ▼ [005855]

Exercice 4995 *** I

On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme 1 définie par $\forall f \in E$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

On pose $\begin{array}{rcccccc} T : & E & \to & E & & & \\ & f & \mapsto & Tf : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & & & x & \mapsto & \int_0^x f(t)\,dt \end{array}$ et on admet que T est un endomorphisme de E.

1. Démontrer que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$ et déterminer $|||T|||$.
2. Vérifier que la borne supérieure n'est pas atteinte.

Correction ▼ [005856]

Exercice 4996 **

On munit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par $\forall A \in E$, $N(A) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Sup}} \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right\}$ (on admet que N est une norme sur E).

Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall A \in E$, $f(A) = \text{Tr}(A)$. Démontrer que l'application f est continue sur (E, N) et déterminer $|||f|||$.

Correction ▼ [005857]

Exercice 4997 ***

Déterminer $s = \text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|}{\|A\|\|B\|},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\}$ quand $\|\ \|$ est

1. $\| \|_1$,
2. $\| \|_2$,
3. $\| \|_\infty$.

Correction ▼ [005858]

Exercice 4998 *

Une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$), est-elle nécessairement une « norme trois barres » ?

Correction ▼ [005859]

Exercice 4999 **

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant k(A)N(B)$.

Correction ▼ [005860]

Exercice 5000 **

Existe-t-il une norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$) telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) = N(A)N(B)$.

Correction ▼ [005861]

Exercice 5001 ***

On pose $\forall X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|X\|_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |x_i|$.

Déterminer les normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement associées aux normes $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On notera $||| \; |||_1$ et $||| \; |||_\infty$ ces normes.

Correction ▼ [005862]

Exercice 5002 **I

Pour $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Pour $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A c'est-à-dire $\rho(A) = \text{Max}\{|\lambda|,\ \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

Montrer que $\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \rho(A)$ où $|||A|||_2 = \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$.

Correction ▼ [005863]

203 229.99 Autre

Exercice 5003

Soit $x = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$$

et

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

1. Démontrer que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Démontrer que
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$$
et
$$\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$
pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Discuter le cas $n = 1$.

3. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée

$$B_{\|\cdot\|} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \|x\| \leqslant 1\}$$

pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

[001740]

Exercice 5004

1. Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ euclidien muni d'une b.o.n., représenter les ensembles suivants :
   — $\mathscr{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 4\}$
   — $\mathscr{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{4} < 4\}$
   — $\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x+y+z < 3 \text{ et } x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } z > 0\}$
   — $\mathscr{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{ll} & x+y+z < 1 \\ \text{et} & x-y+z < 1 \\ \text{et} & -x-y+z < 1 \end{array} \right\}$
   — $\mathscr{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 0 \text{ et } 2 < z < 4\}$
   — $\mathscr{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ et } x^2 + y^2 < z^2 \text{ et } z > 0\}$
   — $\mathscr{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ et } z = x - 1\}$.
2. Déterminer les projections de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$ sur le plan (xOy).

[001745]

Exercice 5005 Images directes et réciproques

1. Soit f l'application affine par morceaux, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ 1+x & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

   Soient $A = [-1, 0[$ et $B = [0, 2[$. Déterminer $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f(\mathbb{R} \setminus A)$, $f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B))$, $f(A \cap B)$, et $f(A) \cap f(B)$.
2. Soient deux ensembles E et F, et $f : E \to F$ une application. Comparer les ensembles $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$, $f^{-1}(f(A))$ et A, $f(f^{-1}(B))$ et B, $f(E \setminus A)$ et $F \setminus f(A)$.

[001746]

Exercice 5006

Soit l'application $\left(\begin{array}{llll} G: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & \left(\frac{u}{u+v}, \frac{\sqrt{v(v+2u)}}{u+v}\right) \end{array} \right)$. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de G. Déterminer $G(\mathscr{D})$.

[001747]

Exercice 5007

Soient les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} y\right) \text{ et } g(x,y) = \left(2x, \frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Soient les ensembles

$$\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{xy}{2} = 1\},$$

$$\text{et } \mathscr{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + 2y^2 = 1\}.$$

Déterminer $f(\mathscr{D}_1)$ et $g^{-1}(\mathscr{D}_2)$.

[001748]

Exercice 5008

Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

$$I = \bigcup_{n>1} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \text{ et } J = \bigcap_{i>0, j>0}] - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{j}[.$$

[001749]

Exercice 5009

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum. [001765]

Exercice 5010

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in |||}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente. [001768]

Exercice 5011

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\overline{C}$ est aussi convexe. [001775]

Exercice 5012 *** I Topologie dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé mais non compact (pour $n \geqslant 2$).
3. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?
4. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est fermé.
5. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Peut-on remplacer $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
7. Propriétés topologiques de l'ensemble des triplets de réels (a, b, c) tels que la forme quadratique $(x, y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit définie positive ?
8. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$) est un compact convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
9. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Correction ▼ [005842]

---

204 240.00 Géométrie affine dans le plan et dans l'espace

Exercice 5013

Soit P un plan muni d'un repère $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points et les vecteurs sont exprimés par leurs coordonnées dans $\mathscr{R}$.

1. Donner un vecteur directeur, la pente une équation paramétrique et une équation cartésienne des droites (AB) suivantes :

(a) $A(2,3)$ et $B(-1,4)$

(b) $A(-7,-2)$ et $B(-2,-5)$

(c) $A(3,3)$ et $B(3,6)$

2. Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites passant par A et dirigées par $\vec{v}$ avec :

   (a) $A(2,1)$ et $\vec{v}(-3,-1)$

   (b) $A(0,1)$ et $\vec{v}(1,2)$

   (c) $A(-1,1)$ et $\vec{v}(1,0)$

3. Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites définies comme suit :

   (a) passant par le point $(0,4)$ et de pente 3,

   (b) passant par le point $(2,-3)$ et parallèle à l'axe des x,

   (c) passant par le point $(-2,5)$ et parallèle à la droite $D : 8x+4y=3$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001956]

Exercice 5014

1. Les trois points A, B et C de P sont-ils alignés ? Si oui donner une équation cartésienne de la droite qui les contient.

   (a) $A(-3,3)$, $B(5,2)$ et $C(2,1)$,

   (b) $A(1,1)$, $B(-2,2)$ et $C(2,1)$,

   (c) $A(4,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(2,-2)$,

   (d) $A(2,-1)$, $B(1,-2)$ et $C(-3,4)$.

2. Dans les cas suivant, donner un vecteur directeur de D et déterminer si le point C appartient ou non à D

   (a) $(D) : 3x+5y+1=0$, $\qquad C(3,-2)$.

   (b) $(D) : \begin{cases} x=3+t \\ y=2-t \end{cases}$, $\qquad C(5,3)$.

[001957]

Exercice 5015

Dans l'exercice suivant, on considère des couples de deux droites D_1 et D_2 : on doit déterminer si elles sont sécantes, parallèles ou confondues. Si elles sont sécantes, on déterminera les coordonnées du point d'intersection, et si elles sont parallèles ou confondues on déterminera un vecteur directeur.

1. $(D_1) : 3x+5y-2=0$ et $(D_2) : x-2y+3=0$
2. $(D_1) : 2x-4y+1=0$ et $(D_2) : -5x+10y+3=0$
3. $(D_1) : \begin{cases} x=3+4t \\ y=2-t \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x=5-s \\ y=2+3s \end{cases}$
4. $(D_1) : \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x=3-4s \\ y=-1+6s \end{cases}$
5. $(D_1) : x-2y+3=0$ et $D_2 : \begin{cases} x=2+t \\ y=3-2t \end{cases}$
6. $(D_1) : 3x-2y+1=0$ et $(D_2) : \begin{cases} x=1-4t \\ y=2-6t \end{cases}$

[001958]

Exercice 5016

On considère les deux droites du plan $D : 2x-3y+4=0$ et $D' : x+3y+1=0$. On considère le point A, intersection des deux droites et le point B de coordonnées $(3,8)$. Donner une équation de (AB). [001959]

Exercice 5017

On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x+2y = 3, (AC) : x+y = 2, (BC) : 2x+3y = 4$.

1. Donner les coordonnées des points A,B,C.
2. Donner les coordonnées des milieux A',B',C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
3. Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001960]

Exercice 5018 Médianes

On considère dans P trois points A, B et C.

1. Déterminer dans le repère $(A,\vec{AB},\vec{AC})$ des équations pour les médianes du triangle ABC.
2. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

[001961]

Exercice 5019 Théorème de Menelaüs

Dans le triangle ABC, on considère trois points P,Q,R, sur les côtés $(BC),(AC)$ et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A,B ou C. Montrer que P,Q et R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

[001962]

Exercice 5020 Théorème de Pappus

Soient (A_1,A_2,A_3) et (B_1,B_2,B_3) deux systèmes de trois points alignés. Montrer que les points C_1, C_2 et C_3, intersections des droites (A_2B_3) et (A_3B_2), (A_3B_1) et (A_1B_3), (A_1B_2) et (A_2B_1) (que l'on suppose exister) sont alignés. [001963]

Exercice 5021 Théorème de Ceva

Dans le triangle ABC, on considère trois points P,Q,R, sur les droites $(BC),(AC)$ et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A,B ou C. Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

[001964]

Exercice 5022

Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe. Est-ce vrai pour l'union ? [001965]

Exercice 5023

Soient C et C' deux ensembles convexes d'un espace affine, montrer que

$$D = \left\{ \frac{M+M'}{2} \mid (M,M') \in C \times C' \right\}$$

est convexe. [001966]

Exercice 5024

On appelle enveloppe convexe $co(A)$ d'une partie non vide A d'un espace affine E l'intersection des ensembles convexes contenant A ; c'est le plus petit ensemble convexe contenant A. Montrer que c'est aussi l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A. Que sont $co(\{A,B\}), co(\{A,B,C\})$? [001967]

Exercice 5025

Un cône d'un espace vectoriel est une partie K telle que :

$$\forall x \in K, \forall t \geqslant 0, tx \in K.$$

Montrer qu'un cône est convexe si et seulement si il est stable par addition. [001968]

Exercice 5026

Trouver les parties C convexes de $\mathbb{R}^2$ telles que le complémentaire ${}^cC$ soit aussi convexe. [001969]

Exercice 5027

Soit E un espace affine de dimension n, et $(x_1,...,x_n)$ des points de E.On considère une combinaison convexe de points de A, sous ensemble de E :

$$x = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \text{ avec } \forall i \in \{1,...,m\} : t_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{m} t_j = 1.$$

Montrer qu'on peut écrire :

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} g_k x_k \text{ avec } \forall k \in \{1,...,n+1\} : g_k \geqslant 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n+1} g_k = 1.$$

Ainsi il suffit de $n+1$ points dans un espace de dimension n pour écrire une combinaison convexe. [001970]

Exercice 5028

Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que les trois bimédianes sont concourantes. [001971]

Exercice 5029

Soient A,B,C trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$. [001972]

Exercice 5030

Soit $R_1 = (0,e_1,e_2,e_3)$ un repère cartésien d'un espace affine. Soient $O' = (1,0,0)$, $e_1' = e_1+e_2$, $e_2' = e_1-e_2$, $e_3' = e_3$ et $R_2 = (0',e_1',e_2',e_3')$. Déterminer les coordonnées d'un point dans R_2 en fonction de ses coordonnées dans R_1. [001973]

Exercice 5031

Soient $(D_i)_{i=1...4}$ quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en B, on dit que $[AB]$ est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés (on étudiera le problème analytiquement en choisissant un bon repère). [001974]

Exercice 5032

1. Soient $(D_i : u_i x + v_i y + h_i = 0)_{i=1...3}$ trois droites du plan affine. Montrer qu'elles sont parallèles ou concourantes ssi $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$

2. Soient $(D_1 : x+2y=1)$, $(D_2 : x+y=2)$, $(D_3 : 2x+y=3)$, $(D_4 : 3x+2y=1)$. Déterminer une équation de la droite D qui passe par $D_1 \cap D_2$ et $D_3 \cap D_4$ sans calculer ces points d'intersection.

[001975]

Exercice 5033

Soient A,B,C trois points non alignés d'un plan affine.

1. Soit f une application affine telle que $f(A)=A$, $f(B)=B$ et $f(C)=C$. Montrer que $f=id$.
2. Soient f et g affines telles que $f(A)=g(A)$, $f(B)=g(B)$ et $f(C)=g(C)$. Que peut-on dire ?
3. Soit f affine telle que $f(A)=B$, $f(B)=C$ et $f(C)=A$. Que peut-on dire ?

[001976]

Exercice 5034

Soit E un espace affine et f une application affine de E dans E.

1. Montrer que f est une translation ssi $\vec{f}=id$.
2. Montrer que si $\vec{f}=\lambda id$ où $\lambda \neq 1$ alors f est une homothétie (on montrera que f admet un point fixe).
3. On note $\mathscr{T}$ l'ensemble des translations. Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-groupe du groupe affine.
4. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des homothéties bijectives. Montrer que $\mathscr{T} \cup \mathscr{H}$ est un sous-groupe du groupe affine.

[001977]

Exercice 5035

Soient f et g deux applications affines de E dans E telles que $\vec{f}=\vec{g}$. Montrer qu'il existe $u \in \vec{E}$ tel que $f=t_u \circ g$ où t_u est la translation de vecteur u. Que peut-on dire si de plus il existe $M \in E$ tel que $f(M)=g(M)$? [001978]

Exercice 5036

Reconnaître les application affines de $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+2y-2z-2 \\ -3y+2z+6 \\ -4y+3z+6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{2}-\frac{z}{2}+\frac{2}{3} \\ -x+\frac{3y}{2}-\frac{z}{2}+\frac{2}{3} \\ -x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

[001979]

Exercice 5037

Soit E un espace affine, f une application affine de E dans E et

$$F=\{M \in E / f(M)=M\}.$$

On suppose que $F \neq \emptyset$.

1. Montrer que $\vec{F}=\ker(\vec{f}-id)$.
2. On suppose que $\vec{f} \circ \vec{f}=\vec{f}$. Soit s la projection affine sur F parallèlement à $\ker(\vec{f})$. Montrer que $f=s$.
3. Faire la même chose si $\vec{f} \circ \vec{f}=id$.

[001980]

Exercice 5038

Soit E un espace affine et f une application affine de E dans E.

1. Montrer que si $f \circ f=f$ alors f est une projection affine.
2. Montrer que si $f \circ f=id$ alors f est une symétrie affine.

[001981]

Exercice 5039

On considère les droites $D : x+2y=5$ et $D' : 3x-y=1$ et on note A l'intersection des deux droites et B le point de coordonnées $(5,2)$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à D passant par B.
3. Donner une équation cartésienne de la parallèle à D' passant par B.
4. Soit C le point de coordonnées $(2,-7)$). Donner une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[B,C]$. Δ est-elle parallèle à D ? Et à D' ?

[001991]

Exercice 5040

1. On considère la famille des droites $D_\lambda : x+\lambda y+1=0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que ces droites passent toutes par un même point A dont on donnera les coordonnées.
   (b) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui donner une équation de cette droite.
   (c) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui donner une équation de cette droite.
   (d) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite Δ d'équation $2x-3y+1=0$? Si oui donner des équations de ces droites.
2. On considère la famille de droites $D_m : (2m-1)x+(3-m)y+m+1=0$, $m \in \mathbb{R}$.
   Parmi toutes ces droites y en a-t-il une perpendiculaire à $(\Delta) : x+y-1=0$? Si oui, laquelle ?

[001992]

Exercice 5041

On considère les trois points de $P : A(2,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(-2,-5)$.

1. Dessiner le triangle ABC puis calculer son aire.
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H, du centre du cercle circonscrit Ω et du centre de gravité G de ABC.
3. Vérifier que H, Ω et G sont alignés et qu'en particulier $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$.

[001993]

Exercice 5042

1. Calculer les angles :
   (a) entre les vecteurs $\vec{u}_1(\sqrt{3},2)$ et $\vec{v}_1(1,3\sqrt{3})$,
   (b) entre les vecteurs $\vec{u}_2(1,\sqrt{2})$ et $\vec{v}_2(\sqrt{2}-2,\sqrt{2}+2)$,
   (c) du triangle de sommets $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
2. Calculer la distance du point A à la droite D :
   (a) $A(1,1)$ et $D : 2x+y-1=0$
   (b) $A(2,-1)$ et $D : 3x-2y+4=0$
   (c) $A(3,3)$ et $D : -x+3y+2=0$.
3. Trouver les bissectrices de :
   (a) $D : 5x-12y+7=0$ et $D' : 3x+4y-7=0$,
   (b) $D : x-3y+5=0$ et$D' : 3x-y-1=0$.

[001994]

Exercice 5043

Soit $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer l'expression analytique dans ce repère de la réflexion d'axe $x+y=1$.
[001995]

Exercice 5044

Soit G un sous-groupe fini de l'ensemble des isométries du plan. Montrer que G ne peut pas contenir de translation non triviale. [001996]

Exercice 5045

On considère dans le plan les deux droites $(D : 3x+y=5)$ et
$(D' : x-2y+3=0)$. Quel est l'angle entre ces deux droites ? [001997]

Exercice 5046

Soit C un cercle de centre $I=(x_0,y_0)$ et de rayon R et $(D : ax+by+c=0)$. En paramétrant D, montrer que D est tangente à C (*i.e.* $D\cap C$ est un singleton) ssi $d(I,D)=R$. [001998]

Exercice 5047

Soient A et B deux points du plan et α un réel. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\alpha$.
[001999]

Exercice 5048

Soient A,B,C les sommets d'un triangle équilatéral de coté 1. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA^2+MB^2+MC^2=2$. [002000]

Exercice 5049

Soient A et B deux points du plan et k un réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA=kMB$. [002001]

Exercice 5050

Quelle est l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x-4y \\ -4x+3y-2 \end{pmatrix} \end{cases}$? [002002]

Exercice 5051

Soit $X=\{A,B,C,D\}$ les sommets d'un carré du plan et $G=\{f\in I_2/f(X)=X\}$. Montrer que G est un sous-groupe de I_2. Montrer que si $f\in G$ alors $f(O)=O$ où O est l'isobarycentre de A,B,C,D. En déduire les éléments de G. [002003]

Exercice 5052

Déterminer les $z\in\mathbb{C}$ tels que z,z^2,z^4 soient alignés. [002004]

Exercice 5053

Si a et b sont les affixes de deux sommets opposés d'un carré, calculer les affixes des deux autres. [002005]

Exercice 5054

Soit O,A,B un triangle rectangle en O. A toute droite D issue de O on associe le cercle de diamètre $A^{'}B^{'}$ où $A^{'}$ et $B^{'}$ sont les projetés orthogonaux de A et B sur D. Montrer que tous les cercles passent par un même point fixe (on pourra utiliser une similitude...). [002006]

Exercice 5055

Pour a,b,c trois nombres complexes tels que $b \neq c$, on note $V(a,b,c) = \frac{c-a}{c-b}$. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre nombres complexes distincts. Montrer que les images de ces nombres complexes sont alignées ou cocycliques ssi $\frac{V(z_1,z_2,z_3)}{V(z_1,z_2,z_4)} \in \mathbb{R}$. [002007]

Exercice 5056

Soit $ABCD$ un carré direct et M un point de la droite (DC). La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N. On note I le milieu de $[MN]$. Déterminer le lieu des points I lorsque M décrit la droite (DC). [002008]

Exercice 5057

Soient A,B,C,D quatre points distincts du plan tels que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. Montrer que le centre de la similitude directe transformant A en C et B en D est aussi le centre de celle transformant A en B et C en D.

Indication ▼ Correction ▼ [002009]

Exercice 5058

Les quatre points A, B, C et D de l'espace sont-ils coplanaires ? Si oui, donner une équation cartésienne du plan qui les contient :

1. $A(1,2,2)$, $B(-1,-2,-1)$, $C(3,4,4)$ et $D(-2,3,1)$.
2. $A(0,1,3)$, $B(1,2,-1)$, $C(1,1,-1)$ et $D(1,2,2)$.
3. $A(-1,2,4)$, $B(3,-3,0)$, $C(1,3,4)$ et $D(5,1,-6)$.
4. $A(2,-1,0)$, $B(0,-4,5)$, $C(4,-13,13)$ et $D(-4,5,-3)$.

[002010]

Exercice 5059

1. Trouver une équation du plan (P) défini par les éléments suivants.
   (a) A, B et C sont des points de (P)
      i. $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$ et $C(0,1,0)$.
      ii. $A(1,1,1)$, $B(2,0,1)$ et $C(-1,2,4)$.
   (b) A est un point de (P), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de (P)
      i. $A(1,2,1)$, $\vec{u}(4,0,3)$ et $\vec{v}(1,3,-1)$.
      ii. $A(1,0,2)$, $\vec{u}(2,-1,3)$ et $\vec{v}(-1,4,5)$.
   (c) A est un point de (P), D est une droite contenue dans (P)
      i. $A(0,0,0)$ et $(D) : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 4x-y+2z=0 \end{cases}$
      ii. $A(1,1,0)$ et $(D) : \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=1-3t \end{cases}$
   (d) D et D' sont des droites contenues dans (P)
      i. $(D) : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x-y-z+5=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$

ii. $(D) : \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x+3y+z-4=0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 2x+y-3z+7=0 \\ 3x+2y+z-1=0 \end{cases}$

2. Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x=2+s+2t \\ y=2+2s+t \\ z=1-s-t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=1+3s'-t' \\ y=3+3s'+t' \\ z=1-2s' \end{cases}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [002011]

Exercice 5060

Les plans suivants sont-ils parallèles ou sécants ? Dans ce dernier cas, donner un vecteur directeur de la droite $(D)=(P)\cap(P')$.

1. $(P) : 5x-y-1=0$ et $(P') : z=3$.
2. $(P) : x+y+z+1=0$ et $(P') : 2x-y+3z+2=0$.
3. $(P) : 2x-z+1=0$ et $(P') : 4x-3y+2z+5=0$.
4. $(P) : 4x-6y+8z-1=0$ et $(P') : -6x+12y-9z+11=0$.

[002012]

Exercice 5061

Quelle est la nature de l'intersection des trois plans suivants ? Si c'est un point en donner les coordonnées, si c'est une droite en donner un vecteur directeur.

1. $(P) : z=1$, $(P') : x-y-2=0$ et $(P") : 4x-2y+z+2=0$.
2. $(P) : 4x-2y+3z+5=0$, $(P') : 3x+y-z+2=0$ et $(P") : x-y+z+1=0$.
3. $(P) : 4x-2y+10z-4=0$, $(P') : -10x+5y-25z+13=0$ et $(P") : x+y-z+1=0$.
4. $(P) : 3x-y+2z-5=0$, $(P') : x-y+3z-7=0$ et $(P") : 4x+2y-z+1=0$.
5. $(P) : x-y+2z-1=0$, $(P') : 2x+y+z+3=0$ et $(P") : x-4y+5z-6=0$.
6. $(P) : x-y+2z-1=0$, $(P') : 2x+y-z+1=0$ et $(P") : x+5y-8z+2=0$.

[002013]

Exercice 5062

Les droites suivantes sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Si elles sont sécantes donner leur point d'intersection et si elles sont parallèles donner un vecteur directeur.

1. $(D) : \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x-y=0 \end{cases}$
2. $(D) : \begin{cases} x=1-2t \\ y=t+2 \\ z=3t+1 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} x=3t-1 \\ y=-t+2 \\ z=2t \end{cases}$

[002014]

Exercice 5063

Dans chacun des cas suivants dire si la droite (D) et le plan (P) sont parallèles ou sécants. Donner alors leur point d'intersection.

1. $(D) : \begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ et $(P) : 4x-3y+7z-7=0$.
2. $(D) : \begin{cases} x=3+2t \\ y=5-3t \\ z=2-2t \end{cases}$ et $(P) : -3x+2y+3z-5=0$.

[002015]

Exercice 5064

On considère les cinq points suivants : $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$, $D(1,0,4)$ et $E(-1,1,1)$.

1. Ces quatre points sont-ils coplanaires ?
2. Déterminer la nature du triangle ABC. A, B et C sont-ils alignés, si non donner une équation catésienne du plan P qui les contient.
3. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points A, B, C et D.
4. Montrer que O, D et G sont alignés et que la droite OD est perpendiculaire à P.

[002016]

Exercice 5065

Soient D_1, D_2 et D_3 trois droites concourrantes en Ω et soient P, P' et P'' trois plans tels que aucun ne contient aucune des 3 droites ci dessus. On peut alors définir les 9 points d'intersections : P coupe D_1, D_2, D_3 en A, B, C ; P' coupe D_1, D_2, D_3 en A', B', C' ; P' coupe D_1 D_2, D_3 en A'', B'', C'' ;
On considère aussi les intersections suivantes : $I = (AB') \cap (A'B)$, $J = (AC') \cap (A'C)$,$K = (BC') \cap (B'C)$.
Montrer que les droites $(A''K)$, $B''J)$ et $(C''I)$ sont parallèlles ou concourrantes. (*Indication : utiliser un bon repère affine*). [002017]

Exercice 5066

On considère les quatre points suivants : $A(2,0,0)$, $B(-1,\sqrt{3},0)$, $C(-1,-\sqrt{3},0)$, $D(0,0,4)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite $(ABC) \cap (ADE)$. [002018]

Exercice 5067

Donner une condition sur m pour que les trois plans suivants se coupent sur une même droite. $(P) : x+my-z+1=0$, $(P') : (m+1)x+3y+4z-2=0$ et $(P") : y+(2m+4)z-(2m+2)=0$. [002019]

Exercice 5068

On considère la famille de plans $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$ définis par les équations cartésiennes :

$$m^2x+(2m-1)y+mz=3$$

1. Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :
   (a) $A(1,1,1) \in P_m$
   (b) $\vec{n}(2,-\frac{5}{2},-1)$ est normal à P_m.
   (c) $\vec{v}(1,1,1)$ est un vecteur directeur de P_m
2. Montrer qu'il existe un unique point Q appartenant à tous les plans P_m.

Correction ▼ Vidéo ■ [002020]

Exercice 5069

1. Déterminer la distance du point A au plan (P)
   (a) $A(1,0,2)$ et $(P) : 2x+y+z+4=0$.
   (b) $A(3,2,1)$ et $(P) : -x+5y-4z=5$.
2. Calculer la distance du point $A(1,2,3)$ à la droite (D) : $\begin{cases} -2x+y-3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$

Correction ▼ Vidéo ■ [002021]

Exercice 5070

On considère les deux droites $(D) : \left\{ \begin{array}{l} y-z=3 \\ -x-y+2=0 \end{array} \right.$ et $(\Delta) : \left\{ \begin{array}{l} -x+3z=1 \\ -x-3y=2 \end{array} \right.$.

1. Donner un vecteur directeur de D et de Δ.
2. Donner une équation paramétrique de Δ.
3. On fixe un point M_α de Δ dépendant du paramètre α où α est l'abscisse de point M_α. Donner une équation du plan P_α passant par M_α et contenant D.
4. Parmi tous ces plans, y en a-t-il un qui est perpendiculaire à Δ ? Pour quelle valeur α_0 de α est il obtenu ? Donner une équation de ce plan. Donner les coordonnées de M_{α_0}.

[002022]

Exercice 5071

On se donne 2 droites D_1 et D_2 ayant comme vecteurs directeurs respectifs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

1. Perpendiculaire commune à ces deux droites.
   (a) On suppose que $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires et on note $\vec{n} := \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.
      i. Montrer que le plan P_1 contenant D_1 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur et le plan P_2 contenant D_2 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur se coupent en une droite Δ.
      ii. Montrer que Δ est une perpendiculaire commune à D_1 et D_2 (c'est à dire Δ coupe D_1 et D_2, et est orthogonale à D_1 et à D_2).
      iii. Montrer que Δ est la seule perpendiculaire commune à D_1 et D_2.
   (b) Comment construire Δ dans le cas où D_1 et D_2 sont parallèles ?
2. Distance entre ces deux droites.
   Soit $H_1 := D_1 \cap \Delta$ et $H_2 := D_2 \cap \Delta$.
   Montrer que pour tout $A_1 \in D_1$ et tout $A_2 \in D_2$, on a $d(A_1, A_2) \geqslant d(H_1, H_2)$.
   $d(H_1, H_2)$ est appelée *distance entre les deux droites D_1 et D_2*.
3. Donner des équations cartésiennes pour Δ et calculer la distance entre les deux droites D_1 et D_2 dans le cas suivant :
   (a) $(D_1) : \left\{ \begin{array}{l} x-y-z+4=0 \\ -x-2y-3z+9=0 \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} -x+2y+z+2=0 \\ -2x+4y-z+1=0 \end{array} \right.$
   (b) $(D_1) : \left\{ \begin{array}{l} x+y-z+2=0 \\ x+y+z+1=0 \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} 3x-y+2z-7=0 \\ x-y=0 \end{array} \right.$
   (c) $(D_1) : \left\{ \begin{array}{l} x=1-2t \\ y=t+2 \\ z=3t+1 \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x=3t-1 \\ y=-t+2 \\ z=2t \end{array} \right.$
   (d) $(D_1) : \left\{ \begin{array}{l} x-y-z-2=0 \\ x-2y-3z+1=0 \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x+y+2z-1=0 \\ 2x+y+z+2=0 \end{array} \right.$

[002023]

Exercice 5072

1. Déterminer les plans bissecteurs de :
   $P : x+y+z+3=0$ et $P' : 2x+y+2z=1$
   $Q : 5x+3y-4z=8$ et $Q' : 4x-5y-3z=2$.
2. Déterminer l'ensemble des points de l'espace équidistants des trois axes de coordonnées.

3. On considère la droite D d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 1 \\ z = -t-1 \end{cases}$

   Donner une équation des deux plans P et P' contenant D à une distance de 1 de l'origine (point O de coordonnées $(0,0,0)$).

[002024]

Exercice 5073

Déterminer l'expression analytique de la réflexion s de plan $x+y-z=1$. Quelle est l'image par s du plan $x+2y-3z+1=0$?
[002025]

Exercice 5074

Déterminer la distance du point $M=(1,2,3)$ aux droites

$$D \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{et } \Delta \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \end{cases}$$

[002026]

Exercice 5075

Soit deux plans $\begin{cases} \pi: & ux+vy+wz+h &=& 0 \\ \pi': & u'x+v'y+w'z+h' &=& 0 \end{cases}$.

1. Montrer que si π et π' sont sécants, tout plan passant par leur droite d'intersection D a une équation du type
$$\lambda(ux+vy+wz+h)+\mu(u'x+v'y+w'z+h')=0$$
et réciproquement, tout plan ayant une équation de ce type, (pour un couple (λ,μ) donné) passe par D.
2. Si π et π' sont parallèles, que représente l'ensemble des plans d'équation :
$$\lambda(ux+vy+wz+h)+\mu(u'x+v'y+w'z+h')=0$$

[002027]

Exercice 5076

Écrire l'équation du plan passant par la droite $\begin{cases} 3x+2y+5z+6 &=& 0 \\ x+4y+3z+4 &=& 0 \end{cases}$ et parallèle à la droite $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-3}$.
[002028]

Exercice 5077

Soit la droite d'équations $\begin{cases} 3x-2y-z+4 &=& 0 \\ x-4y-3z-2 &=& 0 \end{cases}$. Trouver sa projection sur le plan $5x+2y+2z-7=0$.
[002029]

Exercice 5078

Soit les droites D et D' non coplanaires :

$$(D) \begin{cases} x-y+z+1 &=& 0 \\ 2x+y-z &=& 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D') \begin{cases} x+2y+z &=& 0 \\ 2x-2y-2z-1 &=& 0 \end{cases}$$

Trouver des équations de leur perpendiculaire commune.
[002030]

Exercice 5079

Soit ABC un triangle équilatéral de côté unité et T_0 son intérieur. On considère les figures géométriques T_n obtenues par récurrence de la manière suivante : sur chaque côté MN de T_{n-1}, on ajoute l'intérieur d'un triangle équilatéral PQR, où P et Q sont sur le segment $[MN]$, aux tiers de sa longueur, et R est extérieur à T_{n-1}. Finalement on définit le sous-ensemble du plan K par

$$K = \bigcup_{n\geqslant 0} T_n.$$

1. Faire un dessin respésentant T_0, T_1, T_2...
2. Donner l'aire de T_n sous forme de série. Quelle est l'aire de K ?
3. Mêmes questions avec le périmètre, puis le diamètre de T_n et K.

[002698]

Exercice 5080 **I

(ABC) est un vrai triangle.

1. Montrer que ses médianes sont concourantes en G l'isobarycentre de (ABC).
2. Montrer que ses médiatrices sont concourantes en O le centre du cercle circonscrit à (ABC).
3. Montrer que ses hauteurs sont concourantes en H l'orthocentre de (ABC) puis montrer la relation d'EULER :
   $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (considérer l'homothétie de centre G et de rapport -2).
4. Montrer que ses bissectrices (intérieures) sont concourantes en I le centre du cercle inscrit.

Correction ▼ [005195]

Exercice 5081 **IT

On donne les points $A(1,2)$, $B(-2,1)$ et $C(0,4)$.

1. Déterminer $\widehat{BAC}$ au degré près.
2. Déterminer l'aire du triangle (ABC).
3. Déterminer son isobarycentre, son orthocentre, le centre de son cercle circonscrit puis une équation de ce cercle.
4. Déterminer une équation des bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$ puis de la bissectrice intérieure à l'angle $\widehat{A}$.

Correction ▼ [005196]

Exercice 5082 **

Soit (E) l'ensemble d'équation cartésienne $2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5=0$. Montrer que (E) est une réunion de deux droites. Déterminer l'aire du parallélogramme formé par ces deux droites et les parallèles à ces deux droites passant par O.

Correction ▼ [005199]

Exercice 5083 **

Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives $y = 2x+1$, $y = 2x+7$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

Correction ▼ [005200]

Exercice 5084 ***I

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, puis A_1, A_2,..., A_n n points du plan. Existe-t-il n points B_1, B_2,..., B_n tels que, pour $i \in \{1,\dots,n\}$, A_i soit le milieu de $[B_i,B_{i+1}]$ (avec la convention $B_{n+1} = B_1$) ? (Utiliser l'exercice précédent.)

Correction ▼ [005202]

Exercice 5085 *T

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

1. Déterminer une équation de la tangente au point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(2,-2+\sqrt{3})$.
2. Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et du cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 2.

Correction ▼ [005203]

Exercice 5086 *** Théorème de MÉNÉLAÜS

Soient A, B et C trois points non alignés. Soient M, N et P trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) et distincts de A, B et C. Montrer que :

$$(M,\ N,\ \text{et } P \text{ sont alignés}) \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1\right).$$

(Trouver une démonstration utilisant le théorème de THALÈS, une utilisant la composée de deux homothéties et une utilisant des coordonnées.)

Correction ▼ [005204]

Exercice 5087 ** Faisceaux de droites

1. Soient (D) et (D') deux droites sécantes d'équation respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$, $(a,b)\neq(0,0)$, $(a',b')\neq(0,0)$. Soit (Δ) une droite. Montrer que (D), (D') et (Δ) sont concourantes si et seulement si il existe (Δ) a une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.
2. Equation cartésienne de la droite passant par le point $(1,0)$ et par le point d'intersection des droites d'équations respectives $5x+7y+1=0$ et $-3x+2y+1=0$
3. Pour $m\in\mathbb{R}$, on considère (D_m) la droite d'équation $(2m-1)x+(m+1)y-4m-1=0$. Montrer que les droites (D_m) sont concourantes en un point A que l'on précisera. Toute droite passant par A est-elle une droite (D_m) ?

Correction ▼ [005208]

Exercice 5088 **

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $(D)\ \left\{\begin{array}{l} x-z-a=0\\ y+3z+1=0\end{array}\right.$ et $(D')\ \left\{\begin{array}{l} x+2y+z-2b=0\\ 3x+3y+2z-7=0\end{array}\right.$. Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles puis trouver a et b pour que (D) et (D') soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

Correction ▼ [005510]

Exercice 5089 **

Système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) parallèle à la droite (D) : $2x=3y=6z$ et sécante aux droites $(D_1): x=z-4=0$ et $(D_2): y=z+4=0$.

Correction ▼ [005511]

Exercice 5090 ***

Trouver toutes les droites sécantes aux quatre droites $(D_1)\ x-1=y=0$, $(D_2): y-1=z=0$, $(D_3): z-1=x=0$ et $(D_4): x=y=-6z$.

Correction ▼ [005512]

Exercice 5091 **T

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ et $C(-1,-3,0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A,B,C).

Correction ▼ [005513]

Exercice 5092 **T

Soit $M(x,y,z)$ un point de $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la distance de M à la droite (D) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right.$. En déduire une équation du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

Correction ▼ [005514]

Exercice 5093 **T

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé, soient (D) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right.$ et (D') $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{array}\right.$. Déterminer la distance de (D) à (D') puis la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Correction ▼ [005515]

Exercice 5094 **

Montrer que les plans $(P_1) : z-2y=5$, $(P_2) : 2x-3z=0$ et $(P_3)\ :\ 3y-x=0$ admettent une parallèle commune. Ils définissent ainsi un prisme. Déterminer l'aire d'une section perpendiculaire.

Correction ▼ [005516]

Exercice 5095 *T

Angle des plans $x+2y+2z=3$ et $x+y=0$.

Correction ▼ [005517]

Exercice 5096 **T

Soient $(P_1)\ :\ 4x+4y-7z-1=0$ et $(P_2)\ :\ 8x-4y+z+7=0$. Trouver une équation cartésienne des plans bissecteurs de (P_1) et (P_2).

Correction ▼ [005518]

Exercice 5097 **T

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites (D) et (D') : (D) $\left\{\begin{array}{l} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array}\right.$ et (D') $\left\{\begin{array}{l} x=z-1 \\ y=z-1 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005519]

Exercice 5098 **I

Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

Correction ▼ [005521]

Exercice 5099 **T

Déterminer la distance de l'origine O à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est $\left\{\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005522]

Exercice 5100

Déterminer le projeté orthogonal du point $M_0(x_0,y_0)$ sur la droite (D) d'équation $2x-3y=5$ ainsi que son symétrique orthogonal.

Correction ▼ Vidéo ■ [006884]

205 240.01 Sous-espaces affines

Exercice 5101 Ensi Physique P 94

Soient I,J,K trois points du plan. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés :
a) I, J, K sont alignés.
b) Il existe M tel que $\det(\vec{MI},\vec{MJ})+\det(\vec{MJ},\vec{MK})+\det(\vec{MK},\vec{MI})=0$.
c) Pour tout point M, on a $\det(\vec{MI},\vec{MJ})+\det(\vec{MJ},\vec{MK})+\det(\vec{MK},\vec{MI})=0$.

Correction ▼ [004859]

Exercice 5102 Faisceau de plans

On considère deux plans non parallèles de $\mathscr{E}_3$ ayant pour équation dans un repère $\mathscr{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\begin{cases} P: & ax+by+cz+d=0 \\ P': & a'x+b'y+c'z+d'=0. \end{cases}$$

Soit $D=P\cap P'$. Montrer qu'un plan Q contient D si et seulement s'il a pour équation dans $\mathscr{R}$:

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ non tous deux nuls.

Correction ▼ [004860]

Exercice 5103 Équation d'un plan

Dans $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne : $A:\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $D:\begin{cases}x-3y+2z=1\\2x+y-3z=-1.\end{cases}$

Donner l'équation cartésienne du plan passant par A et D.

Correction ▼ [004861]

Exercice 5104 Droites coplanaires

Dans $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne : $D:\begin{cases}x-2z=1\\y-z=2\end{cases}$ et $D':\begin{cases}x+y+z=1\\x-2y+2z=a.\end{cases}$

1. Pour quelles valeurs de a, D et D' sont-elles coplanaires ?
2. Donner alors l'équation du plan contenant D et D'.

Correction ▼ [004862]

Exercice 5105 Droites non coplanaires

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3, et D,D',D'' trois droites parallèles à un même plan $\mathscr{P}$, mais deux à deux non coplanaires.

1. Montrer que par tout point A de D, il passe une unique droite Δ_A rencontrant D' et D''.
2. Montrer que les droites Δ_A sont toutes parallèles à un même plan $\mathscr{Q}$.

Correction ▼ [004863]

Exercice 5106 Droites concourantes

Dans $\mathscr{E}_2$ muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les trois droites : $\begin{cases} D: & \text{ax + by = c} \\ D': & \text{a'x + b'y = c'} \\ D'': & \text{a''x + b''y = c''.} \end{cases}$

Montrer que D, D', D'' sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$. [004864]

Exercice 5107 Droites concourantes

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et $M \in (ABC)$. On note I, J les projections de M sur (AB) et (CD) parallèlement à (AD), et K, L les projections de M sur (AD) et (BC) parallèlement à (AB).
Montrer que les droites (IK), (JL), (BD) sont parallèles ou concourantes.

Correction ▼ [004865]

Exercice 5108 Équation d'une droite variable

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère de $\mathscr{E}_2$, et $A : \binom{1}{0}$, $B : \binom{0}{1}$, $C : \binom{0}{2}$.
Pour $m \in \mathbb{R}$, on construit les droites $D : y = mx$ et $D' : y = -mx$, puis $M \in D \cap (AB)$, et $M' \in D' \cap (AC)$ (si possible).
Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe (= indépendant de m).

Correction ▼ [004866]

Exercice 5109 Dimensions

Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, deux sous-espaces affines de dimension finie d'un espace affine $\mathscr{E}$. On note $\mathscr{H}$ le sous-espace affine engendré par $\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$. Déterminer $\dim(\mathscr{H})$.

Correction ▼ [004867]

Exercice 5110 Dimensions

Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, deux sous-espaces affines disjoints de dimensions f, g d'un espace affine $\mathscr{E}$ avec $f \leqslant g$.
Montrer que $\mathscr{F} \mathbin{//} \mathscr{G}$ si et seulement s'il existe un sous-espace affine $\mathscr{H}$ de dimension $g+1$ contenant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. [004868]

Exercice 5111 Centrale PSI 1997

Soit la famille de droites :

$$(D_\lambda) \qquad \begin{cases} x = \lambda + \lambda^2 z \\ y = \lambda^2 + \lambda z. \end{cases}$$

1. En écrivant leurs équations sous la forme $\begin{cases} z = a \\ ux + vy + h = 0 \end{cases}$ montrer qu'il existe deux droites Δ_1 et Δ_2 horizontales coupant toutes les droites D_λ.
2. Trouver les équations des plans passant par $M(\lambda, \lambda^2, 0)$ et contenant respectivement Δ_1 et Δ_2.
3. Retrouver l'ensemble (D_λ).

Correction ▼ [004869]

Exercice 5112 *T

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer un repère de la droite (D) $\left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z + 7 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{array} \right.$.

Correction ▼ [005505]

Exercice 5113 *T

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'intersection de $(D)\left\{\begin{array}{l}x=2+\lambda\\ y=3-\lambda\\ z=7\end{array}\right.$ et $(P)\ :\ x+3y-5z+2=0$.

Correction ▼ [005506]

Exercice 5114 **

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer le réel a pour que les droites $\left\{\begin{array}{l}x+2=-2z\\ y=3x+z\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ 2x+y-z=a\end{array}\right.$ soient coplanaires, puis déterminer une équation du plan les contenant.

Correction ▼ [005507]

Exercice 5115 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, équation du plan P parallèle à la droite (Oy) et passant par $A(0,-1,2)$ et $B(-1,2,3)$.

Correction ▼ [005508]

206 240.02 Applications affines

Exercice 5116 $f^p=\mathrm{id} => f$ a un point fixe

Soit $f:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ affine telle qu'il existe $p\in |||^*$ tel que $f^p=\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

[004870]

Exercice 5117 1 non valeur propre $\Rightarrow$ un pt fixe unique

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie et $f:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ affine. Montrer que f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$. [004871]

Exercice 5118 Expressions analytiques

On fixe un repère $\mathscr{R}=(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ d'un espace affine de dimension 3. Déterminer les expressions analytiques des applications suivantes :

1. Symétrie de base le plan d'équation $x+2y+z=1$ et de direction $\mathrm{vect}(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)$.
2. Symétrie de base la droite d'équations $\begin{cases}x+y+1=0\\ 2y+z+2=0,\end{cases}$
   de direction le plan vectoriel d'équation $3x+3y-2z=0$.

Correction ▼ [004872]

Exercice 5119 Expression analytique

On fixe un repère $\mathscr{R}=(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ d'un espace affine de dimension 3. Reconaître l' application ayant l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases}x'=3x+4y+2z-4\\ y'=-2x-3y-2z+4\\ z'=4x+8y+5z-8.\end{cases}$$

(chercher les points fixes de f et étudier $\overrightarrow{MM'}$)

Correction ▼ [004873]

Exercice 5120 Permutation circulaire de 4 points

Dans un espace affine $\mathscr{E}$, on considère quatre points A,B,C,D. Étudier l'existence d'une application affine f telle que $f(A)=B$, $f(B)=C$, $f(C)=D$, $f(D)=A$.

Correction ▼ [004874]

Exercice 5121 $f^3 = \text{id}$

Soit $\mathscr{P}$ un plan, et $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ une application affine telle que $f^3 = \text{id}$, avec $f \neq \text{id}$.

1. Montrer que si $A \neq f(A)$, alors $A, f(A), f^2(A)$ sont non alignés.
2. En déduire que f est le produit de deux symétries.

[004875]

Exercice 5122 Produit d'affinités

Soit $\mathscr{P}$ un plan, $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{P}$, et f, g deux affinités de base $\mathscr{D}$, de directions $\vec{\Delta}$, $\vec{\Delta}'$ et de rapports λ, μ.
Étudier la nature de $f \circ g$.

Correction ▼ [004876]

Exercice 5123 Barycentre de projections

Soient π, π' deux projections dans un espace affine $\mathscr{E}$ ayant même direction $\vec{\mathscr{F}}$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note π_λ l'application : $M \longmapsto \text{Bar}(\pi(M) : \lambda, \pi'(M) : 1-\lambda)$.
Montrer que π_λ est encore une projection de direction $\vec{\mathscr{F}}$. [004877]

Exercice 5124 Symétrie-translation

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine. On dit que f est une *symétrie-translation* s'il existe une symétrie s et une translation t telles que $f = s \circ t = t \circ s$.

1. Soient s une symétrie de base $\mathscr{B}$ de direction $\vec{\mathscr{F}}$, et t une translation de vecteur $\vec{u}$.
   Montrer que $s \circ t = t \circ s \iff \vec{u} \in \vec{\mathscr{B}}$.
2. Soit f une symétrie-translation. Montrer que le couple (s, t) tel que $f = s \circ t = t \circ s$ est unique.
3. Soit f affine quelconque. Montrer que f est une symétrie-translation si et seulement si $f \circ f$ est une translation.
4. En déduire que le produit d'une symétrie par une translation quelconques est une symétrie-translation.
5. AN : décomposer l'application f d'expression analytique dans un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\begin{cases} x' = (x - 2y - 2z + 1)/3 \\ y' = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' = (-2x - 2y + z - 1)/3. \end{cases}$$

Correction ▼ [004878]

Exercice 5125 Transitivité des homothéties-translations

Dans un espace affine $\mathscr{E}$ on donne quatre points P, Q, P', Q' avec $P \neq Q$. Existe-t-il une homothétie-translation f telle que $f(P) = P'$ et $f(Q) = Q'$?

Correction ▼ [004879]

Exercice 5126 Usage d'applications affines

On considère dans l'espace deux plans parallèles distincts $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, $A, B, C \in \mathscr{P}$, $O \notin \mathscr{P}$, et on construit les points suivants :
– A', B', C' : les intersections avec $\mathscr{P}'$ des droites (OA), (OB), (OC).
– α, β, γ : les milieux des segments $[B,C]$, $[C,A]$, $[A,B]$.
Montrer que les droites $(A'\alpha)$, $(B'\beta)$, $(C'\gamma)$ sont parallèles ou concourantes.

Correction ▼ [004880]

Exercice 5127 Usage d'applications affines

Soient $A_1,\dots,A_n$ n points de $\mathscr{E}$.
Étudier l'existence de points $B_1,\dots,B_n$ tels que $A_i = \mathrm{mil}(B_i,B_{i+1})$ ($A_n = \mathrm{mil}(B_n,B_1)$). [004881]

Exercice 5128 Projection stéréographique

Dans l'espace, on considère un point O et un plan $\mathscr{P}$ ne passant pas par O. On définit l'application $f : M \longmapsto M'$ où M' est le point intersection de $\mathscr{P}$ et (OM). (Projection stéréographique sur $\mathscr{P}$ de pôle O)

1. Est-ce que f est affine ?
2. Etudier l'image par f d'une droite, d'un plan, d'une partie convexe.

[004882]

Exercice 5129 Caractérisation des produits de symétries

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine.
Montrer que f est un produit de symétries si et seulement si $\det(\vec{f}) = \pm 1$. [004883]

Exercice 5130 Points dans l'espace

Dans l'espace, les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en O, $O \notin (ABC)$ et A,B,C non alignés. Soient G,G' les isobarycentres des triangles ABC, $A'B'C'$. CNS pour que O,G,G' soient alignés ?

Correction ▼ [004885]

Exercice 5131 Polygone des milieux

Soit $P = A_1A_2\dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2\dots A'_{n-1}A'_n$ où A'_i est le milieu de A_i et A_{i+1} ($A_{n+1} = A_1$).

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.
(Écrire un sommet de P_k comme barycentre de $A_1,\dots,A_n$)

Correction ▼ [004886]

Exercice 5132 Isobarycentre de tous les points sauf un

Soit $P = A_1A_2\dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2\dots A'_n$ où A'_i est l'isobarycentre de tous les sommets sauf A_i.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.

Correction ▼ [004887]

Exercice 5133 Suite récurente

Soient A_0,A_1,A_2 trois points donnés. On considère la suite (A_k) de points vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall\, k \geqslant 3,\ A_k = \mathrm{Bar}(A_{k-1} : 1, A_{k-2}, 1, A_{k-3} : 2).$$

Étudier la convergence de cette suite.

Correction ▼ [004888]

Exercice 5134 Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A,B,C.

1. Montrer que P,Q,R sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$.
2. Dans ce cas, montrer que $P' = \text{mil}(P,C)$, $Q' = \text{mil}(Q,A)$, et $R' = \text{mil}(R,B)$ sont aussi alignés.

[004889]

Exercice 5135 Théorème de Céva

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A,B,C. Démontrer que les droites (AQ), (BR), (CP) sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1$. [004890]

Exercice 5136 Droites parallèles

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les parallèles à (AB), (BC), (CA) passant respectivement par C', A', B' soient concourantes.
Montrer qu'il en est de même pour les parallèles à $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'A')$ passant par C,A,B.

[004891]

Exercice 5137 Points aux tiers des côtés

Soit ABC un triangle, $A_1 = \text{Bar}(B:2, C:1)$, $B_1 = \text{Bar}(C:2, A:1)$ et $C_1 = \text{Bar}(A:2, B:1)$.
On note A_2, B_2, C_2 les points d'intersection des droites (AA_1), (BB_1), et (CC_1).

1. Montrer que A_2 est le milieu de $[B, B_2]$.
2. Comparer les surfaces des triangles ABC et $A_2B_2C_2$.

Correction ▼ [004892]

Exercice 5138 Symétriques d'un point par rapport aux milieux des cotés

Soit un triangle ABC, A', B', C', les milieux des côtés, et M un point du plan (ABC) de coordonnées barycentriques (α, β, γ).

1. Chercher les coordonnées barycentriques de P,Q,R symétriques de M par rapport aux points A', B', C'.
2. Montrer que les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes en un point N.
3. Montrer que N est le milieu de $[A,P]$, $[B,Q]$, $[C,R]$.
4. Reconnaître l'application $M \mapsto N$.

Correction ▼ [004893]

Exercice 5139 Parallélogrammes

Dans le plan, on considère :
– trois points non alignés A,B,C.
– trois points alignés P,Q,R avec $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, $R \in (BC)$.
On construit les points I,J,K de sorte que $BPIR$, $APJQ$, $CQKR$ soient des parallélogrammes.
Montrer que I,J,K sont alignés.

Correction ▼ [004894]

Exercice 5140 Projections en cascade

Soient A,B,C trois points non alignés et $M_1 \in (AB)$. On construit les points M_2, M_3, M_4 de la manière suivante :
– M_2 est le projeté de M_1 sur (BC) parallèlement à (AC).
– M_3 est le projeté de M_2 sur (AC) parallèlement à (AB).
– M_4 est le projeté de M_3 sur (AB) parallèlement à (BC).
On recommence ensuite les mêmes constructions à partir de M_4, ce qui donne les points M_5, M_6, M_7.
Montrer que $M_7 = M_1$.

Correction ▼ [004895]

Exercice 5141 Caractérisation du barycentre par les surfaces

Soit ABC un triangle, et $M \in (ABC)$. On note α, β, γ les aires des triangles MBC, MCA, MAB.

1. On suppose que M est dans l'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$.
   Montrer que : $(\alpha = \beta = \gamma) \iff M = \mathrm{Bar}(A:1,\ B:1,\ C:1)$.
2. Quels sont tous les points du plan (ABC) tels que $\alpha = \beta = \gamma$?

Correction ▼ [004896]

Exercice 5142 Coord. barycentriques du centre du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha \equiv (\overline{\vec{AB}, \vec{AC}})$, $\beta \equiv (\overline{\vec{BC}, \vec{BA}})$, $\gamma \equiv (\overline{\vec{CA}, \vec{CB}})$.

1. Montrer que pour tout point M du cercle (ABC), on a :
$$a \cos \alpha MA^2 + b \cos \beta MB^2 + c \cos \gamma MC^2 = abc.$$
2. En déduire les coordonnées barycentriques du centre du cercle (ABC).

[004897]

Exercice 5143 Cercle inscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

1. Soit A' le pied de la bissectrice intérieure issue de A. Montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$.
2. En déduire les coordonnées barycentriques de I, centre du cercle inscrit.

Correction ▼ [004898]

207 240.03 Barycentre

Exercice 5144 Équation barycentrique d'une droite

Soit (A, B, C) une base affine de $\mathscr{E}_2$, et M, M', M'' trois points de coordonnées barycentriques (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$.

Montrer que M, M', M'' sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$. [004884]

Exercice 5145 Points dans l'espace

Dans l'espace, les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en O, $O \notin (ABC)$ et A, B, C non alignés. Soient G, G' les isobarycentres des triangles ABC, $A'B'C'$. CNS pour que O, G, G' soient alignés ?

Correction ▼ [004885]

Exercice 5146 Polygone des milieux

Soit $P = A_1A_2 \dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2 \dots A'_{n-1}A'_n$ où A'_i est le milieu de A_i et A_{i+1} $(A_{n+1} = A_1)$.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini. (Écrire un sommet de P_k comme barycentre de $A_1, \dots, A_n$)

Correction ▼ [004886]

Exercice 5147 Isobarycentre de tous les points sauf un

Soit $P = A_1A_2\dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2\dots A'_n$ où A'_i est l'isobarycentre de tous les sommets sauf A_i.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.

Correction ▼ [004887]

Exercice 5148 Suite récurente

Soient A_0, A_1, A_2 trois points donnés. On considère la suite (A_k) de points vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall\, k \geqslant 3,\ A_k = \mathrm{Bar}(A_{k-1} : 1, A_{k-2}, 1, A_{k-3} : 2).$$

Étudier la convergence de cette suite.

Correction ▼ [004888]

208 240.04 Propriétés des triangles

Exercice 5149 Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A, B, C.

1. Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$.
2. Dans ce cas, montrer que $P' = \mathrm{mil}(P,C)$, $Q' = \mathrm{mil}(Q,A)$, et $R' = \mathrm{mil}(R,B)$ sont aussi alignés.

[004889]

Exercice 5150 Théorème de Céva

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A, B, C. Démontrer que les droites (AQ), (BR), (CP) sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1$. [004890]

Exercice 5151 Droites parallèles

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les parallèles à (AB), (BC), (CA) passant respectivement par C', A', B' soient concourantes.

Montrer qu'il en est de même pour les parallèles à $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'A')$ passant par C, A, B.

[004891]

Exercice 5152 Points aux tiers des côtés

Soit ABC un triangle, $A_1 = \mathrm{Bar}(B : 2, C : 1)$, $B_1 = \mathrm{Bar}(C : 2, A : 1)$ et $C_1 = \mathrm{Bar}(A : 2, B : 1)$.

On note A_2, B_2, C_2 les points d'intersection des droites (AA_1), (BB_1), et (CC_1).

1. Montrer que A_2 est le milieu de $[B, B_2]$.
2. Comparer les surfaces des triangles ABC et $A_2B_2C_2$.

Correction ▼ [004892]

Exercice 5153 Symétriques d'un point par rapport aux milieux des cotés

Soit un triangle ABC, A', B', C', les milieux des côtés, et M un point du plan (ABC) de coordonnées barycentriques (α, β, γ).

1. Chercher les coordonnées barycentriques de P,Q,R symétriques de M par rapport aux points A',B',C'.
2. Montrer que les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes en un point N.
3. Montrer que N est le milieu de $[A,P]$, $[B,Q]$, $[C,R]$.
4. Reconnaître l'application $M \mapsto N$.

Correction ▼ [004893]

Exercice 5154 Parallélogrammes

Dans le plan, on considère :
– trois points non alignés A,B,C.
– trois points alignés P,Q,R avec $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, $R \in (BC)$.
On construit les points I,J,K de sorte que $BPIR$, $APJQ$, $CQKR$ soient des parallélogrammes.
Montrer que I,J,K sont alignés.

Correction ▼ [004894]

Exercice 5155 Projections en cascade

Soient A,B,C trois points non alignés et $M_1 \in (AB)$. On construit les points M_2,M_3,M_4 de la manière suivante :
– M_2 est le projeté de M_1 sur (BC) parallèlement à (AC).
– M_3 est le projeté de M_2 sur (AC) parallèlement à (AB).
– M_4 est le projeté de M_3 sur (AB) parallèlement à (BC).
On recommence ensuite les mêmes constructions à partir de M_4, ce qui donne les points M_5,M_6,M_7.
Montrer que $M_7 = M_1$.

Correction ▼ [004895]

Exercice 5156 Caractérisation du barycentre par les surfaces

Soit ABC un triangle, et $M \in (ABC)$. On note α,β,γ les aires des triangles MBC, MCA, MAB.

1. On suppose que M est dans l'enveloppe convexe de $\{A,B,C\}$.
   Montrer que : $(\alpha=\beta=\gamma) \iff M = \mathrm{Bar}(A:1,\ B:1,\ C:1)$.
2. Quels sont tous les points du plan (ABC) tels que $\alpha=\beta=\gamma$?

Correction ▼ [004896]

Exercice 5157 Coord. barycentriques du centre du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha \equiv \overline{(\vec{AB},\vec{AC})}$, $\beta \equiv \overline{(\vec{BC},\vec{BA})}$, $\gamma \equiv \overline{(\vec{CA},\vec{CB})}$.

1. Montrer que pour tout point M du cercle (ABC), on a :

$$a\cos\alpha MA^2 + b\cos\beta MB^2 + c\cos\gamma MC^2 = abc.$$

2. En déduire les coordonnées barycentriques du centre du cercle (ABC).

[004897]

Exercice 5158 Cercle inscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

1. Soit A' le pied de la bissectrice intérieure issue de A. Montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$.
2. En déduire les coordonnées barycentriques de I, centre du cercle inscrit.

Correction ▼ [004898]

Exercice 5159 Orthocentre

Soit ABC un triangle. On note : $\alpha \equiv \overline{(\vec{AB},\vec{AC})}$, $\beta \equiv \overline{(\vec{BC},\vec{BA})}$, $\gamma \equiv \overline{(\vec{CA},\vec{CB})}$.

1. Soit A' le pied de la hauteur issue de A. Calculer $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$.
2. En déduire les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H.

Correction ▼ [004899]

Exercice 5160 **

Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets appartiennent aux points d'intersection des lignes d'une feuille blanche quadrillée usuelle.

Correction ▼ [005206]

Exercice 5161

Soit ABC un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit, de centre O. Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$. La hauteur (AH) issue de A du triangle ABC recoupe le cercle $\mathscr{C}$ au point D.
Montrer que la droite (DA') est parallèle à (BC).

Indication ▼ Correction ▼ [007059]

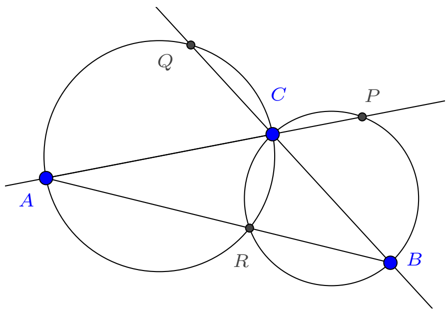
Exercice 5162

Soit $[AB]$ un segment et M, N deux points appartenant au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. On suppose que les droites (MB) et (AN) (respectivement (NB) et (AM)) s'intersectent en P (respectivement en Q). Déterminer l'angle formé par les droites (AB) et (PQ).

Indication ▼ Correction ▼ [007060]

Exercice 5163

Soit ABC un triangle. Le cercle $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}'$) de diamètre $[BC]$ (resp. $[CA]$) coupe la droite (CA) (resp. la droite (BC)) en P (resp. Q). Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se recoupent en un second point R. Montrer que (CR), (BP) et (AQ) sont concourantes.



Indication ▼ Correction ▼ [007061]

Exercice 5164

On donne un cercle $\mathscr{C}$, un diamètre $[AB]$ et un troisième point M du cercle. L'objectif est de construire le projeté orthogonal de M sur (AB) à la règle seule.

1. Montrer qu'il suffit de construire une droite orthogonale à (AB) coupant le cercle en deux points.
2. Construire une telle droite.

Indication ▼ Correction ▼ [007062]

Exercice 5165

On donne deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de rayons distincts, de centres O et O', tangents extérieurement en un point A. On admet qu'il existe trois tangentes communes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$: la tangente commune en A, qui est directement constructible, et deux autres droites. L'objectif de l'exercice est de tracer ces deux dernières tangentes.

1. Considérons donc une droite tangente à $\mathscr{C}$ en B et à $\mathscr{C}'$ en C, avec $B \neq C$. La tangente commune en A aux deux cercles coupe (BC) en I. Montrer que I est le milieu de $[BC]$ et que ABC est rectangle en A.

2. Finir l'exercice (c'est-à-dire construire B et C) de l'une des deux façons suivantes :
   (a) Soit D tel que $ABDC$ soit un rectangle. Quels sont les points d'intersection entre (DB), (DC) et (OO') ? En déduire une construction du point D.
   (b) Montrer que OIO' est rectangle en I et en déduire une construction du point I.

Indication ▼ Correction ▼ [007063]

Exercice 5166 Théorème de Varignon

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, et I, J, K, L les milieux de ses côtés. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme soit en utilisant des barycentres, soit le théorème de Thalès. Montrer que l'aire de $ABCD$ est le double de celle de $IJKL$ de deux façons différentes.

Indication ▼ [007064]

Exercice 5167 Quadrilatères orthodiagonaux

Un quadrilatère est dit *orthodiagonal* si ses diagonales sont perpendiculaires.
Soit $ABCD$ un quadrilatère orthodiagonal non croisé. Montrer que son aire vaut $\frac{1}{2}AC \cdot BD$.

Indication ▼ [007065]

Exercice 5168 Somme de distances

Soit ABC un triangle équilatéral. Pour tout point M à l'intérieur du triangle, on note

$$d = dist(M, [AB]) + dist(M, [BC]) + dist(M, [AC])$$

la somme des distances de M aux trois côtés. Montrer que d ne dépend en fait pas du point M.

Indication ▼ [007066]

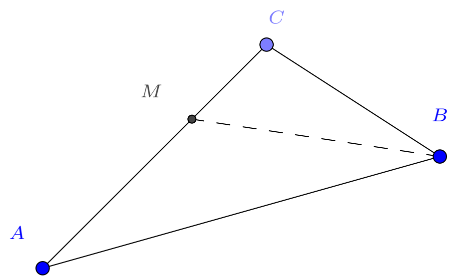
Exercice 5169

Trois cercles sont tangents extérieurement deux à deux. Montrer que les tangentes communes sont concourantes.

Indication ▼ Correction ▼ [007067]

Exercice 5170 *

Soit ABC un triangle avec $AB = 2BC$ et M un point de $[AC]$ tel que $AM = 2MC$. Comparer les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{MBC}$.



Indication ▼ Correction ▼ [007068]

Exercice 5171

À l'extérieur d'un triangle BOA on construit deux triangles rectangles :
- Le triangle OAC, ayant pour hypoténuse le côté $[OA]$, tel que le sommet C de l'angle droit soit situé sur la bissectrice extérieure de OAB.
- Le triangle OBE, ayant pour hypoténuse le côté $[OB]$, tel que le sommet E de l'angle droit soit situé sur la bissectrice extérieure de OBA.

Que dire de $[EC]$ et de sa longueur ?

Indication ▼ [007069]

Exercice 5172

On considère un carré $ABCD$, et un cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangent à $[CD]$.

1. Montrer que le point de tangence est le milieu de $[CD]$.
2. Montrer que si le rayon vaut $r = 10$ alors $AB = 16$, et réciproquement.

Indication ▼ [007070]

Exercice 5173

Soit A un point quelconque du diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$ et B l'extrémité d'un rayon perpendiculaire à ce diamètre. On mène une droite (BA) qui coupe le cercle en P, puis la tangente au point P qui coupe en C le diamètre prolongé. Démontrer que $CA = CP$.

Indication ▼ Correction ▼ [007071]

Exercice 5174

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit, dont on note r le rayon. Montrer qu'un des sommets du triangle est à distance $\geqslant 2r$ de I, et qu'un autre est à distance $\leqslant 2r$.

Indication ▼ Correction ▼ [007072]

Exercice 5175 Quadrilatères tangentiels

Un quadrilatère convexe est dit *tangentiel* ou *circonscriptible* s'il possède un cercle inscrit, c'est-à-dire si ses quatre côtés sont tangents à un même cercle.

1. Montrer qu'un quadrilatère est tangentiel ssi ses bissectrices intérieures sont concourantes.
2. Montrer le théorème de Pitot (1725) : dans un quadrilatère tangentiel, la somme des longueurs de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres. Réciproque ?
3. Montrer qu'un cerf-volant isocèle (ou rhomboïde) est tangentiel.

Indication ▼ [007073]

Exercice 5176 Théorème des trois tangentes

Soit ABC un triangle. Le cercle exinscrit dans l'angle en A touche les côtés $[BC]$, $[AC)$ et $[AB)$ en P, Q et R. Montrer que la somme $AR+AQ$ est égale au périmètre du triangle ABC.

Indication ▼ [007074]

Exercice 5177 Aire, périmètre et cercle inscrit

Soit ABC un triangle dont on note a, b et c les longueurs des côtés.

1. Exprimer l'aire S du triangle en fonction du périmètre $a+b+c = 2p$ et du rayon r du cercle inscrit.
2. Exprimer également S en fonction de a et du rayon r_A du cercle exinscrit en A.
3. En déduire $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$.

Indication ▼ [007075]

Exercice 5178

On donne un cercle $\mathscr{C}$ (de centre O), un point M à l'extérieur du cercle, les deux tangentes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ à $\mathscr{C}$ passant par M. On notera A et B les points de tangence.
Le cercle $\mathscr{C}$ coupe (MO) en deux points P et Q. D'autre part, soit H l'intersection de la corde $[AB]$ avec (OM). Montrer que les cercles de centres P et Q et passant par H sont tangents à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Correction ▼ [007076]

209 240.99 Autres

210 241.00 Isométrie vectorielle

Exercice 5179

Compléter $x_1 = (1,2,1)$ en base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique. [001982]

Exercice 5180

Montrer que $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^3)^3 \;\; x\wedge(y\wedge z)+y\wedge(z\wedge x)+z\wedge(x\wedge y)=0$. [001983]

Exercice 5181

Soit E euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E$.

Soit $f : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \wedge a \end{cases}$. f est-elle linéaire, bijective ? Comparer f^3 et f. [001984]

Exercice 5182

Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Discuter et résoudre l'équation $a \wedge x = b$. [001985]

Exercice 5183

Soit R le rotation vectorielle d'angle θ et d'axe orienté par le vecteur unitaire k. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3 \; R(x) = (\cos\theta)x+(\sin\theta)k\wedge x+2(x|k)\sin^2(\frac{\theta}{2})k$. [001986]

Exercice 5184

Determiner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du retournement d'axe $\mathbb{R}(1,2,1)$. [001987]

Exercice 5185

Reconnaître les transformations géométriques dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

[001988]

Exercice 5186

Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle θ et r une rotation quelconque. Déterminer rRr^{-1}. En déduire que le centre de $SO_3(\mathbb{R})$ est bîîîîîp (le centre est l'ensemble des rotations qui commutent avec toutes les autres). [001989]

Exercice 5187

On considère l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté $\mathbb{R}^3$. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}^3$ et $p = [a,b,c]$ le produit mixte de a, b et c. Exprimer à l'aide de p les quantités suivantes

1. $s = [a+b, b+c, c+a]$,
2. $t = [a\wedge b, b\wedge c, c\wedge a]$.

[001990]

Exercice 5188 *T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1. $z' = z + 3 - i$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = iz + 1$
4. $z' = (1-i)z + 2 + i$

Correction ▼ [005207]

211 242.01 Géométrie affine euclidienne du plan

Exercice 5189 Transformations affines et Isométries

Soit P un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quelconque.

1. On considère D une droite d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$ et $\vec{u}(3, -2)$.
   (a) Soit $A(4,2)$. Donner une équation paramétrique de D_A droite passant par A de direction $\vec{u}$. En déduire les coordonnées de $A' = D_A \cap D$ projeté de A sur D selon $\vec{u}$.
   (b) Définir plus généralement analytiquement la projection sur D selon $\vec{u}$ en exprimant les coordonnées x', y' de M' projeté de $M(x,y)$ en fonction de x et y.

2. Définir analytiquement les projections sur D selon Δ dans les cas suivants :
   (a) Δ d'équation $x - 2y + 1 = 0$.
   (b) Δ d'équation $3x + 2y + 2 = 0$.
   (c) Δ d'équation $x + y - 1 = 0$.
   (d) Δ d'équation $2x - 2y + 4 = 0$.

[002035]

Exercice 5190

Soit P un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quelconque.

1. Donner l'expression analytique de la translation t_1 de vecteur $(1,2)$.
2. Donner l'expression analytique de la translation t_2 de vecteur $(-1,2)$.
3. Donner l'expression analytique de l'homothétie h_1 de centre l'origine du repère et de rapport 2 et de l'homothétie h_2 de centre $A(2,-1)$ de rapport 3.
4. Donner l'expression analytique de $t_1 \circ h_1$, $t_2 \circ h_2$, $h_1 \circ t_1$, $h_2 \circ t_2$.
5. Soit $M(x,y)$ un point de P. Donner les coordonnées du symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = ax + b$.

[002036]

Exercice 5191

1. On considère S_1 la transformation du plan définie par le système d'équations suivant : $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2$. Reconnaître cette transformation.
2. De même avec la transformation S_2 définie par $x' = 5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$, $y' = -5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$.
3. On compose S_1 avec S_2. Donner l'expression de $S_1 \circ S_2$, et trouver la nature de cette transformation.

[002037]

Exercice 5192

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$.

1. Soit f la transformation du plan définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-1) \\ y' = & \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y+2) \end{cases}$$

   (a) Calculer les coordonnées de O', I', J' les images par f des points O, I, J.

   (b) Montrer que le repère $(O',\vec{O'I'},\vec{O'J'})$ est orthonormé, est-il direct ?

   (c) En déduire que f est une isométrie, est-elle directe ?

   (d) Déterminer l'ensemble des points invariants par f et reconnaitre f.

   (e) Donner l'expression analytique de la transformation inverse de f.

   (f) Calculer l'image par f la droite d'équation $2x-y-1=0$.

2. Donner l'expression analytique de la rotation de centre $A(1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$, calculer l'image de 0 par cette transformation.
3. Même question pour la symétrie d'axe la droite d'équation $x+y+1=0$
4. Donner l'expression analytique de la composée des deux applications précédentes.

[002040]

Exercice 5193

Dans le plan cartésien identifié à $\mathbb{C}$, un point M est représenté par son affixe z.

1. Dessiner les ensembles suivants puis les exprimer en fonction de (x,y) $((z=x+iy))$:
   (i) $z+\bar{z}=1$ (ii) $z-\bar{z}=i$ (iii) $iz-i\bar{z}=1$
2. Donner l'expression analytique en complexe des transformations suivantes, puis calculer l'image de i par ces transformations :

   (a) la rotation de centre $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

   (b) la symétrie d'axe la droite d'équation $iz-i\bar{z}=1$,

   (c) la composée des deux applications précédentes.

3. Soit f la transformation du plan définie analytiquement par $z'=(1+i)z+1$.

   (a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   (b) Donner l'expression analytique de la transformation inverse de f.

   (c) Calculer l'image par f de l'ensemble $z+\bar{z}=1$.

   (d) Ecrire f comme la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

[002041]

Exercice 5194 Fonction numérique de Leibniz

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.
Quels sont les points M du plan (ABC) tels que $MA^2+a^2=2(MB^2+MC^2)$?

Correction ▼ [004949]

Exercice 5195 Cercle circonscrit à un triangle

Soit ABC un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. Soit M un point du plan de coordonnées barycentriques (x,y,z) dans le repère affine (ABC).

Montrer que : $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = 0 \Leftrightarrow xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = 0$.

Correction ▼ [004950]

Exercice 5196 Cercle stable par une application affine

Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O,r)$ un cercle du plan et f une application affine telle que $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Montrer que f est une isométrie de point fixe O. [004951]

Exercice 5197 Point équidistant d'une famille de droites

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.
Montrer qu'il existe un point M_0 équidistant de toutes les droites D_λ.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [004952]

Exercice 5198 Bissectrice de deux droites

Soient D, D' deux droites distinctes sécantes en O.
On note $\mathscr{H} = \{M \text{ tq } d(M,D) = d(M,D')\}$.

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires. (appelées bissectrices de (D,D'))
2. Soit s une symétrie orthogonale telle que $s(D) = D'$. Montrer que l'axe de s est l'une des droites de $\mathscr{H}$
3. Soit $\mathscr{C}$ un cercle du plan tangent à D. Montrer que $\mathscr{C}$ est tangent à D et à D' si et seulement si son centre appartient à $\mathscr{H}$.

[004953]

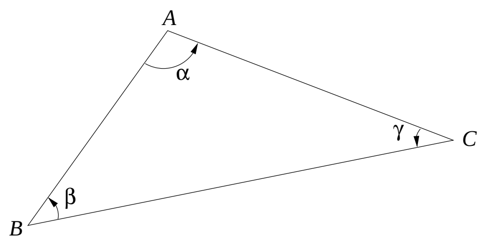
Exercice 5199 Trois figures isométriques

Trois figures F_1, F_2, F_3 se déduisent l'une de l'autre par rotations. Montrer qu'il existe une figure F dont F_1, F_2, F_3 se déduisent par symétries axiales.

Correction ▼ [004954]

Exercice 5200 Produit de 3 rotations

Soit ABC un triangle d'angles α, β, γ.
On note ρ, ρ', ρ'' les rotations autour de A, B, C d'angles α, β, γ, orientés suivant le dessin :



Qu'est-ce que $\rho \circ \rho' \circ \rho''$?

Correction ▼ [004955]

Exercice 5201 Sous-groupes finis de déplacements

1. Soit G un sous-groupe fini de déplacements du plan.
   (a) Montrer que G est constitué uniquement de rotations.
   (b) Soient $f, g \in G$. Montrer que f et g ont même centre (étudier $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$).
   (c) Prouver enfin que G est cyclique.
2. Soit G un sous groupe fini d'ordre p d'isométries du plan, non toutes positives.
   (a) Montrer que G contient autant d'isométries positives que négatives.

(b) Montrer que G est un groupe diédral (groupe d'isotropie d'un polygone régulier).

[004956]

Exercice 5202 Centrale MP 2000

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O. Soit A le point de coordonnées $(a,0)$. Pour tout point M, on définit $M' = f(M)$ de la manière suivante : A,M,M' sont alignés et (MO) est orthogonale à $(M'O)$. Expliciter f en fonction des coordonnées (x,y) de M. Donner son domaine de définition. Montrer que f réalise une bijection entre le demi-disque supérieur de diamètre $[AO]$ et le quart de plan d'équations $x<0, y>0$.

Correction ▼ [004957]

Exercice 5203 *IT

Déterminer le projeté orthogonal du point $M(x_0,y_0)$ sur la droite (D) d'équation $x+3y-5=0$ ainsi que son symétrique orthogonal.

Correction ▼ [005197]

Exercice 5204 *

Soit $(ABDC)$ un parallélogramme. Déterminer les coordonnées de D dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Correction ▼ [005198]

Exercice 5205 **I

1. h (resp. h') est l'homothétie de centre Ω et de rapport k (resp. k') non nul. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h' \circ h$.
2. s (resp. s') est la symétrie centrale de centre Ω (resp. Ω'). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s' \circ s$.
3. s est la symétrie centrale de centre Ω et t est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ s$.

Correction ▼ [005201]

Exercice 5206 Construction de parallèles et de perpendiculaires

On donne une droite $\mathscr{D}$ et un point $P \notin \mathscr{D}$. Tracer la parallèle ainsi que la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par P.

Indication ▼ [007047]

Exercice 5207 Construction du centre et de tangentes

On donne un cercle $\mathscr{C}$ (sans son centre).

1. Tracer son centre, si possible de plusieurs façons.
2. On donne un point P à l'extérieur du cercle. Tracer les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par P.
3. Même question si P est sur le cercle.

Indication ▼ [007048]

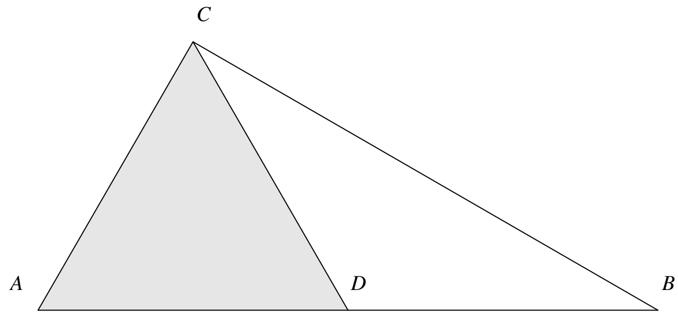
Exercice 5208 Triangle de l'écolier, 1

On donne deux points A et B. Construire un triangle ABC rectangle en C tel que $AB = 2AC$.

Indication ▼ Correction ▼ [007049]

Exercice 5209 Triangle de l'écolier, 2

Soit ADC un triangle équilatéral et B le symétrique de A par rapport à D. Montrer que ABC est rectangle en C et déterminer également $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.



Correction ▼ [007050]

Exercice 5210 Subdivision et barycentres

On donne un segment $[AB]$.

1. Diviser le segment en quatre.
2. Diviser le segment en trois parties égales sans utiliser le théorème de Thalès.
3. Diviser le segment en sept parties égales.
4. Construire le barycentre de $(A,3)$ et $(B,4)$.

Indication ▼ [007051]

Exercice 5211 Isobarycentre

1. On donne un quadrilatère $ABCD$. Construire l'isobarycentre de ses sommets. Construire le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,3)$ et $(D,3)$.
2. On donne un pentagone quelconque. Construire l'isobarycentre de ses sommets.

Indication ▼ Correction ▼ [007052]

Exercice 5212 Introduction aux nombres constructibles

On donne deux points O et I, avec $OI = 1$. Un réel r est constructible si on peut construire à la règle et au compas un point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OI}$. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

1. Construire sur la droite (OI) des points A, B et C tels que $OA = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $OB = \sqrt{2}$ et $OC = \sqrt{3}$.
2. (Construction du produit et de l'inverse de deux nombres constructibles.) On donne deux points A et B alignés avec O. Construire sur la droite (AB) des points C et D tel que $OC = OA \times OB$ et $OD = \frac{OA}{OB}$.
3. (Construction de la racine carrée.) Soit A un point sur la demi-droite $[OI)$. Soit I' le symétrique de I par rapport à O, soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $I'A$, et soit F l'une des intersections du cercle $\mathscr{C}$ avec la perpendiculaire à (OA) passant par O. Montrer que $OF = \sqrt{OA}$.

Indication ▼ [007053]

Exercice 5213 Tangentes communes à deux cercles

On donne deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de rayons $r < r'$, de centres O et O', disjoints et extérieurs l'un à l'autre. On admet qu'il existe quatre tangentes communes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. L'objectif est de les construire.

1. (Analyse) Soit $\mathscr{D}$ une tangente commune. On note A et A' les points de contact de $\mathscr{D}$ avec les deux cercles. Que peut-on dire de la parallèle à (AA') passant par O et de son intersection avec $(O'A')$?
2. (Synthèse) En déduire une construction du point d'intersection de ces deux droites, puis ces deux droites et enfin de $\mathscr{D}$. Tracer les quatre tangentes communes de cette façon.

Indication ▼ Correction ▼ [007054]

Exercice 5214 Construction de cercles, 1

1. On donne une droite $\mathscr{D}$ et un point O hors de la droite. Tracer le cercle de centre O et tangent à $\mathscr{D}$.
2. On donne deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes et un point O d'une bissectrice (et hors des droites). Construire le cercle de centre O et tangent aux deux droites.

Indication ▼ [007055]

Exercice 5215 Construction de cercles, 2

1. On donne une droite $\mathscr{D}$, un point H sur $\mathscr{D}$ et un point A en-dehors. Tracer le cercle passant par A et tangent à la droite en H.
2. On donne trois droites dont deux parallèles. Dénombrer et construire les cercles tangents aux trois droites.

Indication ▼ [007056]

Exercice 5216 Construction de cercles

On donne trois cercles distincts $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de même rayon et dont les centres ne sont pas alignés. Construire deux cercles tangents à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Indication ▼ [007057]

Exercice 5217 Construction de cercles de rayon donné

Dans tout l'exercice, on fixe $R > 0$. Dénombrer et construire les cercles de rayon R tangents à :

1. deux cercles distincts $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$;
2. deux droites sécantes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$;
3. un cercle $\mathscr{C}$ et une droite $\mathscr{D}$.

Correction ▼ [007058]

Exercice 5218

Soit $\mathscr{D}$ une droite et σ la réflexion orthogonale suivant cette droite. Construire l'image par σ d'un point, d'un segment, d'un droite, d'un cercle (que ces objets intersectent l'axe de symétrie ou pas). [007077]

Exercice 5219 Constructions

1. On donne deux points A et B. Soit τ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et M un point du plan. Construire $\tau(M)$.
2. Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan, et σ la réflexion orthogonale d'axe $\mathscr{D}$. Soit M un point du plan. Construire $\sigma(M)$. Réciproquement, soit σ une réflexion orthogonale, et supposons donnés un point A et son image $\sigma(A)$. Construire $\mathscr{D}$.
3. On donne un point O, et ϕ l'homothétie de centre O et de rapport $5/8$. Soit M un point du plan. Construire $\phi(M)$. Remarque : ceci marche pour tout rapport rationnel.
4. On donne un triangle auxiliaire ABC et on considère l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Soit ρ la rotation de centre O et d'angle α. Si M est un point du plan, construire $\rho(M)$.

[007078]

Exercice 5220

1. À quelle condition sur quatre points $P_1, \dots P_4$ existe-t-il une homothétie h telle que $h(P_1) = P_2$ et $h(P_3) = P_4$?

2. Soit ϕ une homothétie. On donne deux points A et B, ainsi que leurs images $\phi(A)$ et $\phi(B)$. Le centre de l'homothétie n'est pas donné. Le construire, y compris si les quatre points donnés sont alignés.
3. Soit ρ une rotation du plan. On donne deux points A et B, ainsi que leurs images $\rho(A)$ et $\rho(B)$. Construire le centre de la rotation, en distinguant les cas.

[007079]

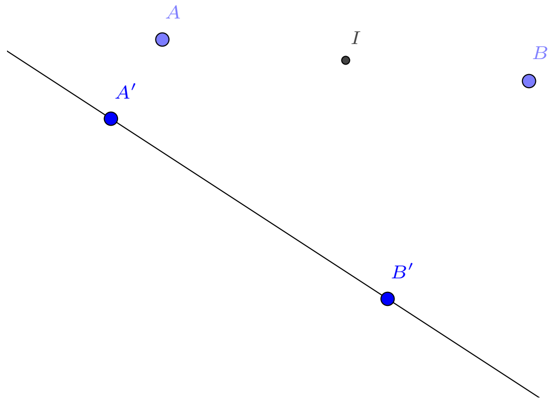
Exercice 5221 Polygone des milieux

On donne un nombre impair de points du plan $M_1, ...M_n$. Existe-t-il un polygone $P_1, P_2, ...\ P_n$ tel que les M_i soient les milieux des côtés du polygone ? Commencer par $n = 3$. Et si n est pair ? En particulier, si $n = 4$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le problème admette une solution et déterminer l'ensemble des solutions.

Indication ▼ Correction ▼ [007080]

Exercice 5222 Trapèze rectangle

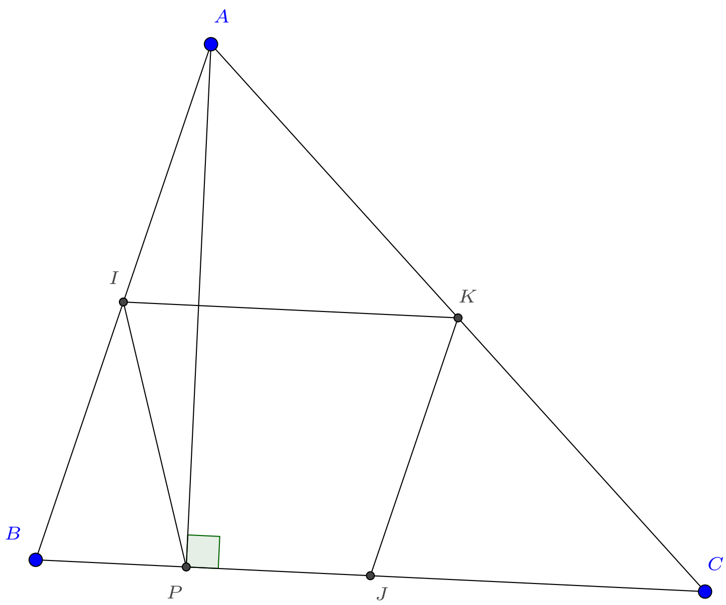
Soit $\mathscr{D}$ une droite, A et B deux points hors de cette droite, et A', B' leurs projetés orthogonaux sur $\mathscr{D}$, supposés distincts. Soit enfin I le milieu de $[AB]$. Montrer que $A'IB'$ est isocèle en I.



Indication ▼ Correction ▼ [007081]

Exercice 5223 Trapèze isocèle

Soit ABC un triangle, P le pied de la hauteur issue de A et I, J, K les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Montrer que le quadrilatère $IPJK$ est un trapèze isocèle.



Correction ▼ [007082]

Par le théorème des milieux, on a $(IK)//(PJ)$ donc $IPJK$ est un trapèze.
Soit Q le milieu de $[IK]$. La perpendiculaire à (IK) en Q est alors un axe de symétrie de $IPJK$, par le théorème des milieux appliqué à APJ.

Exercice 5224 Deux cercles sont homothétiques

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de rayons distincts. Montrer qu'il existe des homothéties transformant l'un en l'autre. Suivant la position et la taille des cercles, combien y a-t-il de telles homothéties ? Tracer leurs centres.

Indication ▼ Correction ▼ [007083]

Exercice 5225 Tangentes communes à deux cercles

On donne deux cercles. Déterminer le nombre de tangentes communes aux deux cercles et tracer ces tangentes.

Indication ▼ [007084]

Exercice 5226 Carré inscrit dans un triangle

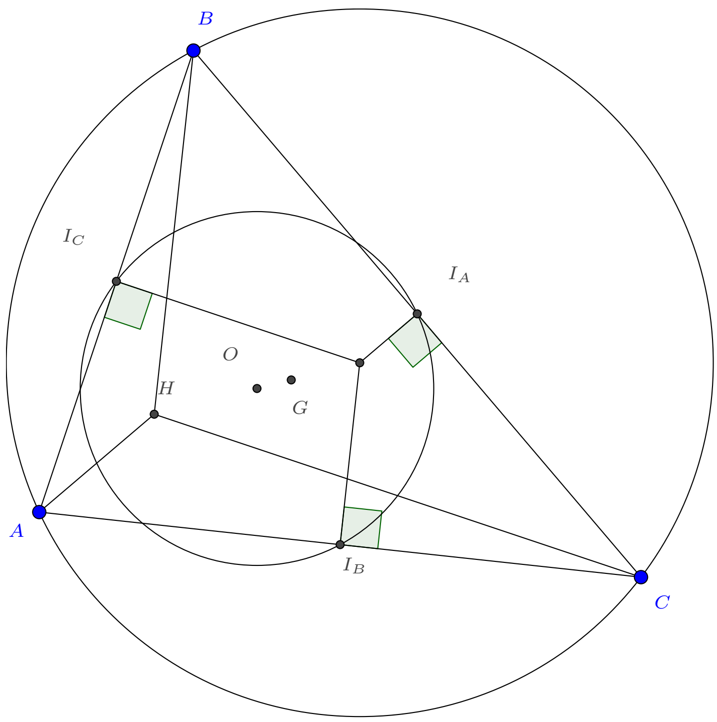
Soit ABC un triangle. Construire un carré dont un sommet appartient à $[AB]$, un à $[AC]$ et deux sommets adjacents appartiennent à $[BC]$.

Indication ▼ Correction ▼ [007085]

Exercice 5227 Cercle d'Euler

Soit ABC un triangle. On note G, Ω et H le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ et l'orthocentre. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle passant par les milieux I_A, I_B et I_C des côtés de ABC.

1. Montrer que le centre de $\mathscr{C}'$ appartient à la droite $(G\Omega)$. Calculer son rayon.
2. Montrer que $\mathscr{C}'$ coupe les segments reliant les sommets à l'orthocentre H en leur milieu.



Indication ▼ Correction ▼ [007086]

Exercice 5228 Théorème du trapèze

Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments parallèles de longueurs différentes. Montrer qu'il existe des homothéties transformant l'un en l'autre. Combien y a-t-il de telles homothéties ? Tracer leurs centres. Montrer que la droite reliant ces centres coupe les segments en leur moitié.

Application : construire à la règle seule le symétrique de A par rapport à B. Expliquer comment construire à la règle seule n'importe quel barycentre à coefficients rationnels de A et de B. [007087]

Exercice 5229 Application du théorème du trapèze

Soit $\mathscr{D}$ une droite, A et B deux points distincts n'appartenant pas à cette droite, et A' le symétrique de A par rapport à $\mathscr{D}$. On suppose que $A'B$ n'est pas parallèle à $\mathscr{D}$. Construire à la règle seule le symétrique B' de B par rapport à $\mathscr{D}$.

Indication ▼ [007088]

Exercice 5230 Application du théorème du trapèze, bis

Soient deux droites parallèles distinctes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, et P un point non situé sur ces droites. Construire à la règle seule la droite passant par P et parallèle aux deux autres. [007089]

Exercice 5231 Où est le centre ?

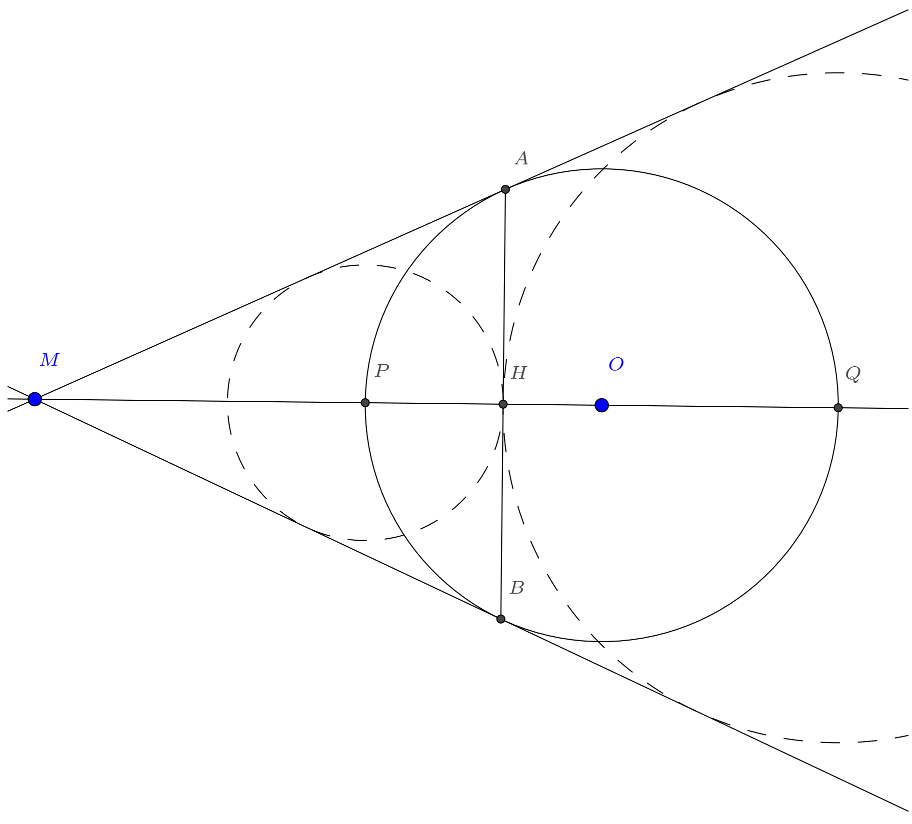
Soit $ABCD$ un parallélogramme, et M un point sur la diagonale (BD). Soit I le symétrique de C par rapport à M. Soit E la projection de I sur (AB) parallèlement à (AD), et F la projection de I sur (AD) parallèlement à (AB). Montrer que E, M et F sont alignés.

Indication ▼ [007090]

Exercice 5232 Tangentes communes à plusieurs cercles

On donne un cercle $\mathscr{C}$ (de centre O), un point M à l'extérieur du cercle, les deux tangentes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ à $\mathscr{C}$ passant par M. On notera A et B les points de tangence.

Le cercle $\mathscr{C}$ coupe (MO) en deux points P et Q. D'autre part, soit H l'intersection de la corde $[AB]$ avec (OM). À l'aide d'homothéties, montrer que les cercles de centres P et Q et passant par H sont tangents à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.



[007091]

Exercice 5233

On donne trois cercles disjoints, de rayons distincts et à l'extérieur les uns des autres. Chacune des trois paires de cercles fournit deux tangentes communes extérieures qui se croisent en un point. Montrer que ces trois points sont alignés.

Indication ▼ [007092]

Exercice 5234

Soit $ABCD$ un rectangle et M un point du plan.
On note C' le projeté orthogonal de C sur (AM), D' le projeté orthogonal de D sur (BM) et M' le projeté orthogonal de M sur (AB). Enfin, on note I le point d'intersection des droites (CC') et (DD').
Montrer que les points M, M' et I sont alignés.

Indication ▼ [007093]

Exercice 5235 Théorème de Pappus, version affine

Soient D et D' deux droites. Soient A,B,C trois points sur D, et A', B' et C' trois points sur D'. Si $(AB')//(BC')$ et $(BA')//(CB')$, alors $(AA')//(CC')$.

Indication ▼ Correction ▼ [007094]

Exercice 5236 Théorème de Desargues, version affine

1. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles (non aplatis) sans sommet commun. Montrer qu'ils se déduisent l'un de l'autre par homothétie ou translation ssi leurs côtés sont parallèles.
2. (Application) On donne deux droites se coupant en un point O hors de la feuille, ainsi qu'un point M hors de ces droites. Tracer la droite (OM).

Indication ▼ [007095]

Exercice 5237

Soient f et g deux homothéties de même rapport et de centres distincts. Déterminer la nature de $f \circ g^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼ [007096]

Exercice 5238 Corde de longueur fixée

Soit $\mathscr{C}$ un cercle et D une droite. Construire une droite parallèle à D coupant le cercle $\mathscr{C}$ en deux points situés à une distance a donnée (inférieure au diamètre).

Indication ▼ Correction ▼ [007097]

Exercice 5239 Cercle tangent à deux droites et passant par un point

On donne deux droites parallèles et un point A entre les deux droites. Dénombrer et tracer les cercles passant par A et tangents aux deux droites.

Indication ▼ Correction ▼ [007098]

Exercice 5240

1. On donne deux droites parallèles et un point A entre les deux droites. Dénombrer et tracer les cercles passant par A et tangents aux deux droites.
2. On donne deux droites sécantes et un point A n'appartenant pas aux deux droites. Dénombrer et tracer les cercles passant par A et tangents aux deux droites.

Indication ▼ Correction ▼ [007099]

Exercice 5241 Permutation cyclique

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $ABCD$ pour qu'il existe une transformation affine f du plan telle que $f(A) = B$,

$f(B) = C$, $f(C) = D$ et $f(D) = A$. Montrer qu'une telle transformation, si elle existe, est nécessairement d'ordre quatre dans le groupe affine.

Indication ▼ [007100]

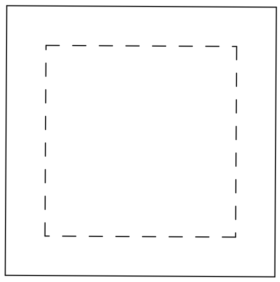
Exercice 5242 Minimisation

Soient C et C' deux cercles sécants de centres O et O', et A un de leurs points d'intersection. Une droite D passant par A recoupe les deux cercles en M et M'. Déterminer la position de la droite qui maximise la distance MM' et calculer le maximum.

Indication ▼ Correction ▼ [007101]

Exercice 5243 Cloître

On se donne un carré, et on cherche à construire un carré de même centre, aux côtés parallèles, et d'aire deux fois plus petite, comme ci-dessous :



1. (Question préliminaire) Soit $\mathscr{C}$ un cercle. Montrer qu'un carré circonscrit au cercle a une aire deux fois plus grande qu'un carré inscrit dans le cercle.
2. En déduire une solution au problème initial.

Indication ▼ Correction ▼ [007102]

Exercice 5244 Construction de l'octogone régulier

Construire un octogone régulier inscrit dans un carré donné (c'est-à-dire un octogone dont quatre des huit cotés s'appuient sur les cotés du carré).

Indication ▼ Correction ▼ [007103]

Exercice 5245 Carré invisible

On considère un carré $ABCD$ et on place quatre points E, F, G, et H sur les côtés de ce carré, en-dehors des sommets. Puis, on efface le carré. En considérant une rotation et une translation, reconstruire le carré.

Indication ▼ Correction ▼ [007104]

Exercice 5246

Sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ d'un carré direct $ABCD$, on place des points M et Nvérifiant $AM = BN$. Soit H le point d'intersection des droites (AN) et (CM). Montrer que H est l'orthocentre du triangle DMN.

Correction ▼ [007105]

Exercice 5247

Soit $ABCD$ un carré de centre O, et $OPQR$ un second carré de même taille. Calculer l'aire de l'intersection de ces deux carrés en fonction de l'aire de $ABCD$.

Indication ▼ Correction ▼ [007106]

Exercice 5248

Soit $ABCD$ un carré de centre O, et M un point sur (AB). À partir de M, on construit le triangle isocèle OMN, rectangle en O. Montrer que les points B, C et N sont alignés.

Indication ▼ [007107]

Exercice 5249

Soit BOA un triangle indirect quelconque, OAC et OEB deux triangles rectangles isocèles en O directs.
Montrer que $ACEB$ est un pseudo-carré, c'est-à-dire que les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires et que $BC = AE$.

Indication ▼ [007108]

Exercice 5250

Soit BOA un triangle indirect isocèle en O, OAC et OEB deux triangles équilatéraux directs.
Montrer que $BC = AE$ et vérifier que l'angle des droites (BC) et (AE) est de $\pi/3$.

Indication ▼ [007109]

Exercice 5251

Soit $ABCD$ un carré, E le symétrique de C par rapport à D, I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[DE]$.
Montrer que le triangle AIJ est rectangle isocèle en A.

Indication ▼ [007110]

Exercice 5252

On considère trois droites parallèles D_1, D_2 et D_3. Construire un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent respectivement à D_1, D_2 et D_3.

Indication ▼ [007111]

Exercice 5253

Soit $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux carrés du plan inclus l'un dans l'autre. On suppose que ce sont des cartes routières de la même région, tracées à différentes échelles, posées l'une sur l'autre. Montrer qu'il existe un unique point dont les représentations sur les deux cartes coïncident. (Bonus : construire ce point.)

Indication ▼ Correction ▼ [007112]

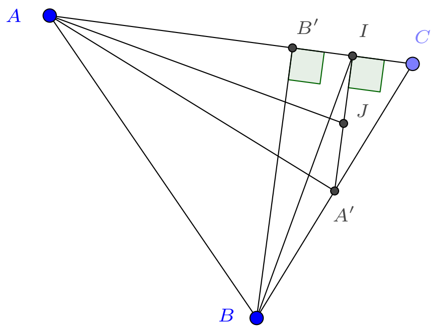
Exercice 5254

Soit ABC un triangle et D le projeté orthogonal de A sur (BC). On considère des points E et F appartenant à une droite passant par D tels que (AE) et (BE) sont perpendiculaires ainsi que (AF) et (CF). Enfin, on note M et N sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EF]$. Montrer que (AN) et (NM) sont perpendiculaires.

Indication ▼ [007113]

Exercice 5255

Soit ABC un triangle isocèle en A, A' et B' les pieds des hauteurs issues de A et B, I le milieu de $[CB']$ et J le milieu de $[A'I]$. Montrer que (BI) et (AJ) sont orthogonales.



Indication ▼ Correction ▼ [007114]

Exercice 5256

Soit ABC un triangle direct non isocèle rectangle. Soient ARB, BPC, CQA les triangles isocèles rectangles en P, Q et R, intérieurs à ABC.

1. Montrer que $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{QR}$ ont même norme et sont orthogonaux.
2. Montrer que (AP), (BQ) et (CE) sont concourantes.

Indication ▼ [007115]

Exercice 5257

Soit un quadrilatère convexe $ABCD$. Les points E, F, G, H sont tels que AEB, BFC, CGD, DHA sont rectangles isocèles en respectivement E, F, G, H. Les triangles AEB et CGD sont vers l'extérieur de ABC , les triangles BFC et DHA vers l'intérieur. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

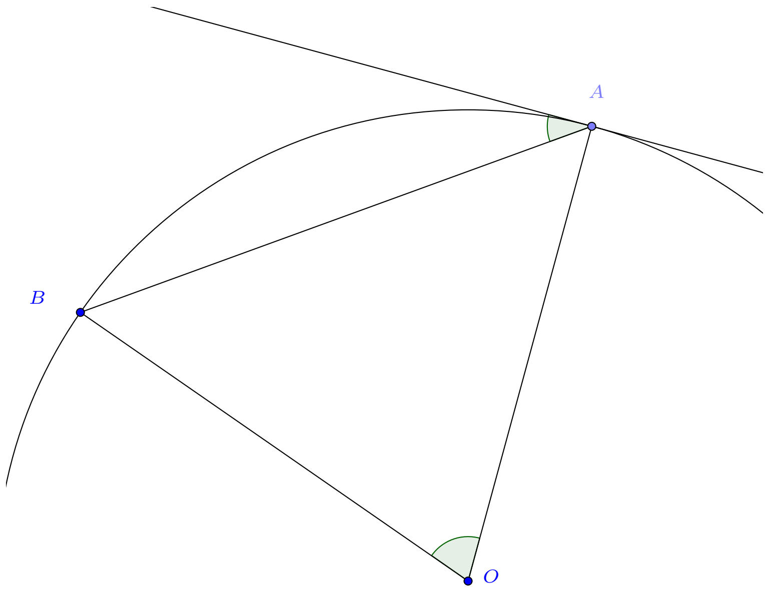
Indication ▼ Correction ▼ [007116]

Exercice 5258

Soient $ABCD$ et $AB'C'D'$ des carrés de même orientation et de centres respectifs O et O'. On note R et S sont les milieux respectifs de $[BD']$ et $[B'D]$. Montrer que $OSO'R$ est un carré. [007117]

Exercice 5259 Angle inscrit dans le cas limite

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, $[AB]$ une corde et $\mathscr{T}$ la tangente de A. Alors $(\mathscr{T}, AB) = \frac{1}{2}(OA, OB)$.



Indication ▼ Correction ▼ [007118]

Exercice 5260 Construction de l'arc capable

On donne un segment $[AB]$ et un réel $\alpha \in]-\pi, \pi[$. On suppose que l'on dispose également d'un triangle auxiliaire XYZ avec $(\widehat{\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}}) = \alpha$, de sorte que les angles de mesure α sont constructibles.

Construire le lieu des points M tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha$.

Correction ▼ [007119]

Exercice 5261 Octogone appuyé sur un segment

Construire un octogone convexe régulier dont un des côtés est un segment $[AB]$ donné.

Indication ▼ Correction ▼ [007120]

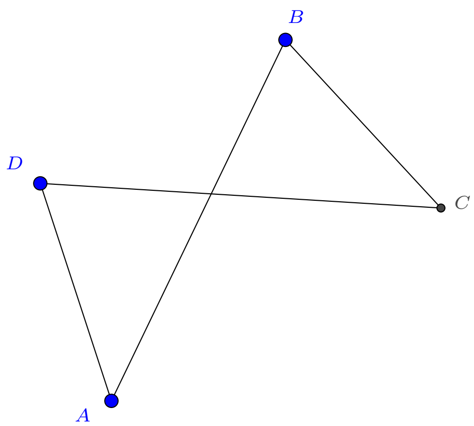
Exercice 5262 Trapèzes inscriptibles

Montrer qu'un trapèze est isocèle si et seulement s'il est inscriptible.

Correction ▼ [007121]

Exercice 5263 antiparallélogramme

Un antiparallélogramme est un quadrilatère croisé dont les cotés opposés sont deux à deux de même longueur. Soit $ABCD$ un antiparallélogramme. Montrer les assertion suivantes.



1. Les angles opposés ont la même mesure.
2. Les diagonales (AC) et (BD) sont parallèles.
3. La médiatrice des diagonales est un axe de symétrie de $ABCD$.
4. Deux côtés opposés ont leur point d'intersection situé sur cette médiatrice.
5. Le quadrilatère convexe $ADBC$ formé par les deux côtés non croisés et les diagonales est un trapèze isocèle.
6. $ABCD$ est inscriptible.

[007122]

Exercice 5264 Théorème de Reim

Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles sécants en A et B, et $\mathscr{D}_A$ (respectivement $\mathscr{D}_B$) une droite passant par A (resp. B). On note C et E (resp. D et F) l'intersection de $\mathscr{D}_A$ (resp. $\mathscr{D}_B$) avec les deux cercles. Montrer que $(CD)//(EF)$.

Correction ▼ [007123]

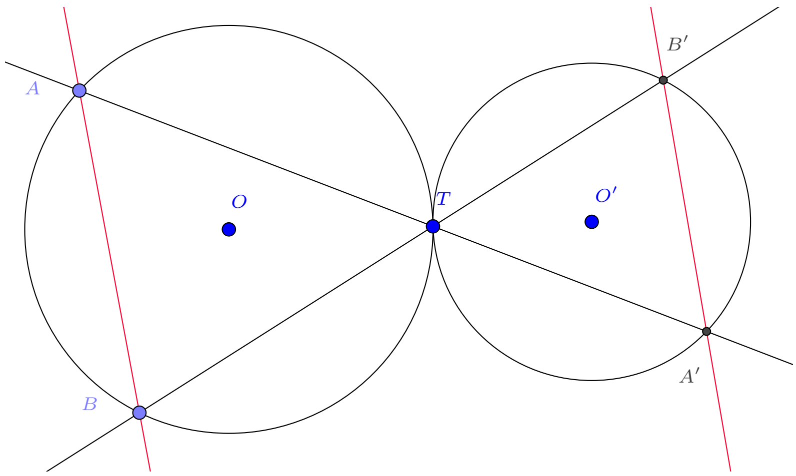
Exercice 5265 Bissectrices et cercle circonscrit

Les bissectrices intérieure et extérieure en A d'un triangle ABC non isocèle en A recoupent le cercle Γ circonscrit à ce triangle respectivement en I et J. Montrer que I et J appartiennent à la médiatrice de $[BC]$.

Indication ▼ Correction ▼ [007124]

Exercice 5266 Cas limite du théorème de Reim

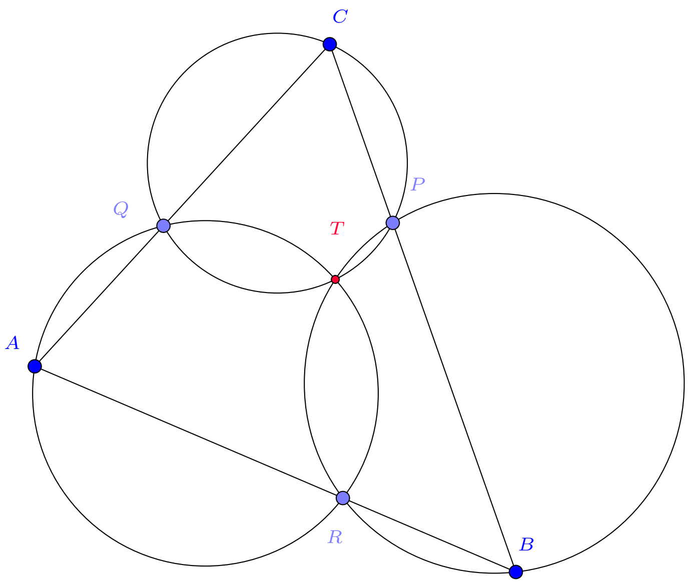
Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles tangents en un point T, et $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ deux droites sécantes en T. On note A et A' (resp. B et B') les points d'intersection de $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$) avec $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Montrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.



Indication ▼ Correction ▼ [007125]

Exercice 5267 Théorème des trois cercles de Miquel

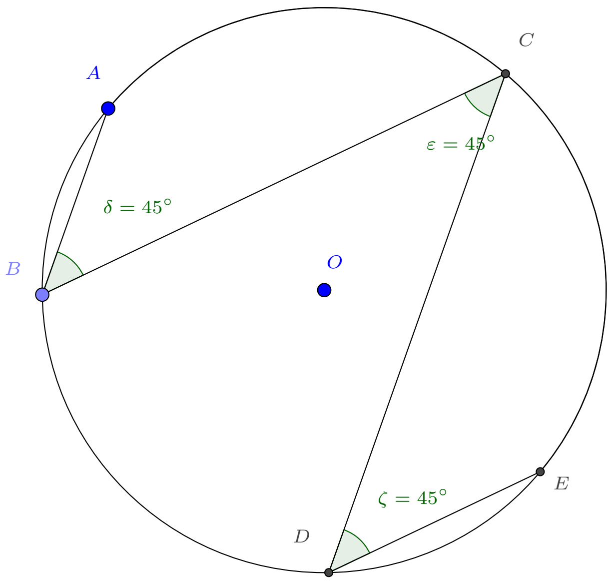
Soit ABC un triangle direct, et P, Q R trois points situés sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement, et distincts des sommets. Montrer que les cercles circonscrits à ARQ, BPR et CQP sont concourants.



Indication ▼ Correction ▼ [007126]

Exercice 5268 Ligne brisée

Une ligne brisée $ABCDE$ formée d'angles de 45 degrés est inscrite dans un cercle. Elle partage le disque en deux régions, chacune d'un côté différent de la ligne. Calculer l'aire de ces deux régions.



Indication ▼ Correction ▼ [007127]

Exercice 5269 Pentagramme

Soit $\mathscr{C}$ un cercle, $[BC]$ une corde, et $A \in \mathscr{C}$ tels que les arcs AB et AC soient égaux. Soient $[AD]$ et $[AE]$ deux autres cordes d'extrémités A, qui coupent $[BC]$ en F et en G, respectivement. Montrer que $DEFG$ est inscriptible.

Correction ▼ [007128]

Exercice 5270

Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles se coupant en P et Q, et considérons une droite $\mathscr{D}$ coupant $\mathscr{C}_1$ en A et B, et coupant $\mathscr{C}_2$ en C et D. Montrer que $(PA,PC) = (DQ,BQ)$.
Plus précisément, montrer que les angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{DQB}$ sont égaux si $\mathscr{D}$ coupe le segment $[PQ]$ et que A, C, B et D sont alignés dans cet ordre. Que peut-on dire dans les autres cas ?

Correction ▼ [007129]

Exercice 5271

On donne deux segments $[AB]$ et $[CD]$ non parallèles et de longueur différente. On admet qu'il existe une similitude directe ϕ envoyant A sur C et B sur D. Le but de l'exercice est de construire le centre O de cette similitude.

1. Montrer que l'angle de la similitude est $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$.
2. On note $Q = (AB) \cap (CD)$. Montrer que $AQCO$ est inscriptible.
3. Terminer le raisonnement et construire O.
4. Que faire si les segments sont parallèles ? De même longueur ? Réfléchir à d'autres méthodes pour construire le centre, sans utiliser de cercles.

Correction ▼ [007130]

Exercice 5272 Triangle orthique

Soit ABC un triangle non rectangle et A', B', C' les pieds des hauteurs. Montrer que les hauteurs de ABC sont des bissectrices du triangle $A'B'C'$, dit *triangle orthique*.

Indication ▼ Correction ▼ [007131]

Exercice 5273 Ptolémée, preuve géométrique du sens direct

On considère l'énoncé suivant :

[Ptolémée] Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, direct. Alors A,B,C,D sont cocycliques si et seulement si $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot AD$.
L'objectif de cet exercice est de prouver le sens direct du théorème.
On suppose A,B,C,D cocycliques.

1. Faire une figure au brouillon et montrer que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ et trois relations similaires sur d'autres angles.
2. Soit K le point de la diagonale $[AC]$ tel que $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$. Faire une figure et construire K en expliquant (faire la figure de telle sorte que K soit lisible).
3. Montrer que les triangles ABK et DBC sont semblables, de même que ABD et KBC, par des similitudes dont on précisera les centres et les rapports. Note : il suffit pour cela de montrer qu'ils ont mêmes angles. En déduire des relations sur les côtés de ces triangles.
4. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [007132]

Exercice 5274 Une application de Ptolémée

Soit ABC un triangle équilatéral et M un point du cercle circonscrit appartenant à l'arc BC ne contenant pas A. Montrer que $MA = MB + MC$. [007133]

Exercice 5275 Trisection

1. Soit Γ un cercle, O son centre et M un point n'appartenant pas à Γ. Deux sécantes issues de M coupent Γ respectivement en A et B, et en C et D. Démontrer l'égalité :
$$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}).$$
2. Soient A et B deux points d'un cercle Γ de centre O et de rayon r. Sur la droite (OA), soit C le point extérieur au cercle tel que la droite (CB) recoupe le cercle en un point M vérifiant $MC = r$. (On ne demande pas de construire ce point, le placer approximativement sur la figure.) Montrer que $\widehat{ACB} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}$.

Indication ▼ [007134]

Exercice 5276 Problème « DPP »

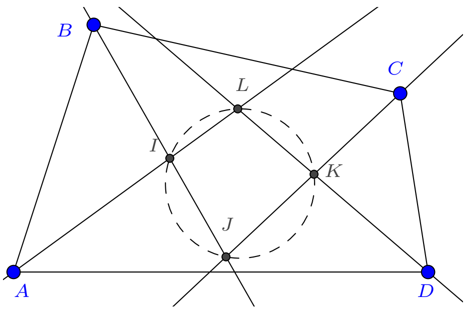
Soit $\mathscr{D}$ une droite et A et B deux points situés d'un seul côté de $\mathscr{D}$. L'objectif est de construire un cercle passant par les deux points et tangent à la droite.

1. Construire un tel cercle si les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont parallèles. Dans la suite, on supposera qu'elles sont sécantes.
2. (Analyse) Soit $\mathscr{C}$ un tel cercle et T son point de tangence avec $\mathscr{D}$. Montrer que $(AB,AT) = (TB,\mathscr{D})$.
3. (Synthèse) Soit I le point d'intersection de (AB) avec $\mathscr{D}$, B' le symétrique de B par rapport à I, et B'' le symétrique de B par rapport à $\mathscr{D}$. Montrer que le cercle circonscrit à $AB'B''$ (de diamètre $[AB']$ dans le cas où $B' = B''$) coupe $\mathscr{D}$ en deux points qui conviennent pour le choix de T.

[007135]

Exercice 5277 Bissectrices d'un quadrilatère convexe

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On note $\mathscr{B}_A$ (resp. $\mathscr{B}_B$, $\mathscr{B}_C$, $\mathscr{B}_D$) la bissectrice intérieure en A (resp. en B, C, D). Soient $I = \mathscr{B}_A \cap \mathscr{B}_B$, $J = \mathscr{B}_B \cap \mathscr{B}_C$, $K = \mathscr{B}_C \cap \mathscr{B}_D$ et $L = \mathscr{B}_D \cap \mathscr{B}_A$. Montrer que $IJKL$ est inscriptible.



Indication ▼ Correction ▼ [007136]

Exercice 5278 Médiatrices d'un quadrilatère convexe

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Que dire du quadrilatère formé par les intersections des médiatrices des quatre côtés ? En particulier, que dire si $ABCD$ est un parallélogramme ? Un losange ?

Correction ▼ [007137]

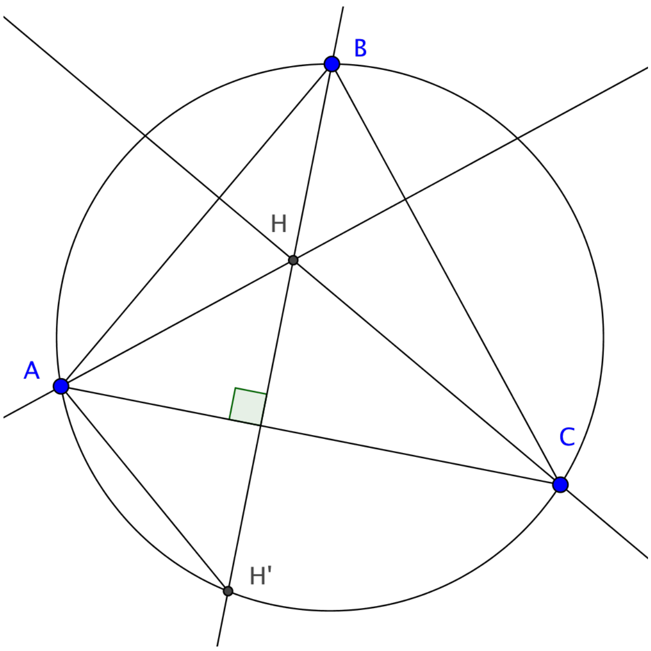
Exercice 5279 Carré à retrouver

On considère un carré $ABCD$ et on place quatre points E, F, G, et H sur les côtés de ce carré (en-dehors des sommets). Puis, on efface le carré. L'objectif est de reconstruire le carré en utilisant le théorème de l'angle inscrit.

Si A est le sommet entre E et F, montrer que la diagonale du carré partant de A passe par l'intersection du cercle de diamètre $[EF]$ avec la médiatrice de $[EF]$. En déduire une construction des diagonales du carré, puis du carré. [007138]

Exercice 5280 Symétrique de l'orthocentre

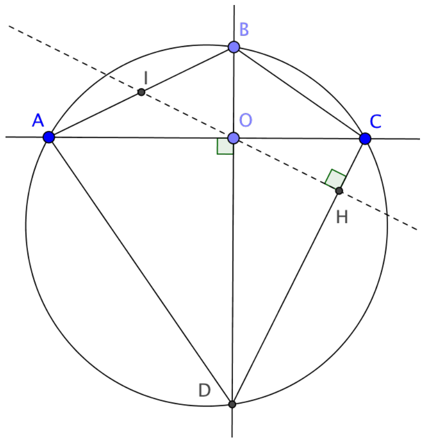
Soit ABC un triangle, H son orthocentre et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. La hauteur issue de B recoupe $\mathscr{C}$ en H'. Montrer que H' est le symétrique de H par rapport à la droite (AC).



Indication ▼ Correction ▼ [007139]

Exercice 5281 Un théorème de Brahmagupta

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscriptible dont les diagonales sont perpendiculaires, et soit O leur point d'intersection. Soit H le projeté orthogonal de O sur $[CD]$, et I l'intersection de (OH) avec $[AB]$. L'objectif est de montrer que I est le milieu de $[AB]$.



1. Montrer qu'il est suffisant d'établir que $IO = IA$.
2. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [007140]

Exercice 5282 Puissance d'un point par rapport à un cercle

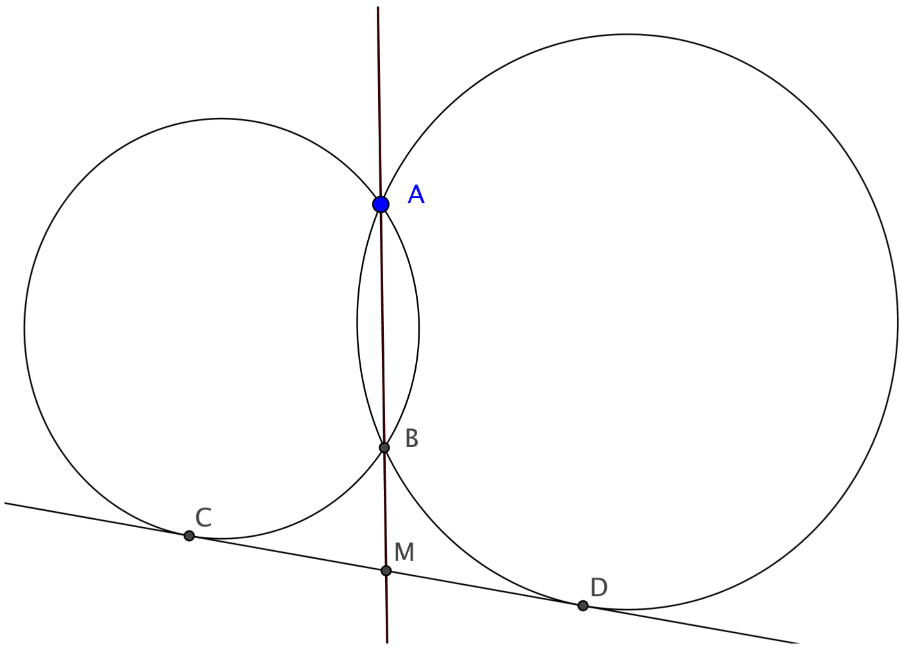
Soit $\mathscr{C}$ un cercle et P un point du plan.

1. Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par P et intersectant le cercle en deux points A et B. Montrer que la quantité $\overline{PA} \cdot \overline{PB} := \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ ne dépend pas de la droite choisie. On l'appelle la *puissance du point P par rapport au cercle* $\mathscr{C}$, et on la note $p_{\mathscr{C}}(P)$.
2. Avec les mêmes notations, si P est à l'extérieur du cercle et $\mathscr{D}$ est tangente au cercle en T, montrer que $p_{\mathscr{C}}(P) = PT^2$.
3. Montrer que $p_{\mathscr{C}}(P)$ vaut $OP^2 - r^2$, où r est le rayon du cercle.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points dont la puissance par rapport au cercle vaut λ.
5. Réciproquement, soient (AB) et (CD) deux droites se coupant en P. On suppose que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$. Montrer que $ABCD$ est inscriptible.

Correction ▼ [007141]

Exercice 5283

Soient deux cercles se coupant en deux points distincts A et B, et $\mathscr{D}$ une tangente commune, touchant les cercles en C et D. Montrer que (AB) coupe $[CD]$ en son milieu.



Indication ▼ Correction ▼ [007142]

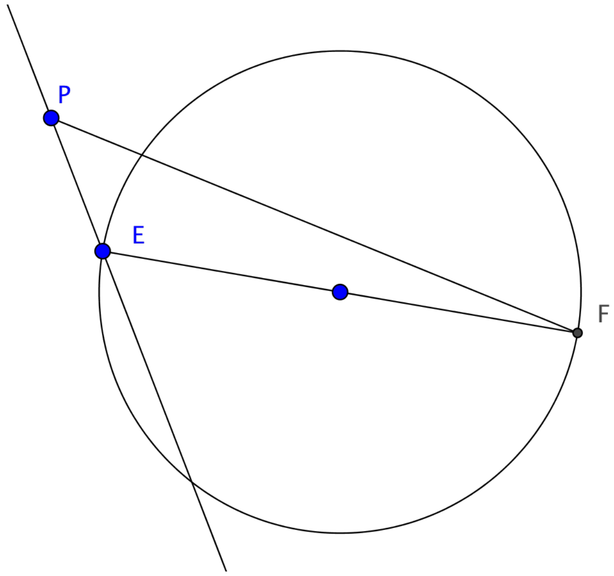
Exercice 5284

Soit ABC un triangle rectangle en A, et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer $AH^2 = HB \cdot HC$.

Indication ▼ Correction ▼ [007143]

Exercice 5285

Soit $\mathscr{C}$ un cercle et P un point du plan. On considère une droite $\mathscr{D}$ passant par P et intersectant le cercle en au moins un point E. Soit F le point diamétralement opposé à E. Montrer que $p_{\mathscr{C}}(P) = \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$.



Indication ▼ Correction ▼ [007144]

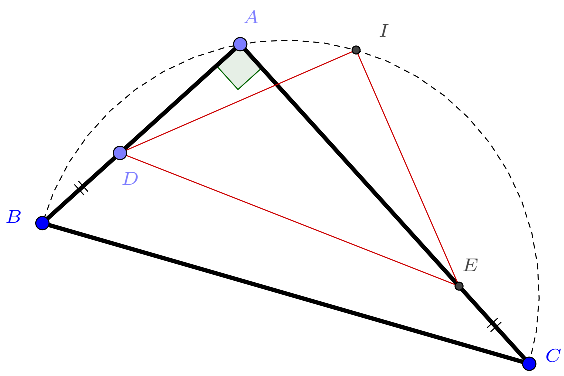
Exercice 5286 Nombre d'or

Soit $ABCD$ un carré direct de côté 1, et soient E et F deux points tels que $AEFD$ soit un rectangle direct, avec $AE > 1$. Dans la suite on note $l = AE$.
Montrer que qu'il existe une similitude directe s envoyant A (resp. E, F et D) sur C (resp. B, E et F) ssi l est égal au nombre d'or $(1+\sqrt{5})/2$.

Correction ▼ [007152]

Exercice 5287

Soit ABC un triangle rectangle en A et non isocèle. La médiatrice de $[BC]$ recoupe le demi-cercle circonscrit en I. On considère deux points $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ tels que $BD = CE$. Montrer que IDE est rectangle isocèle en I.



Indication ▼ Correction ▼ [007153]

Exercice 5288

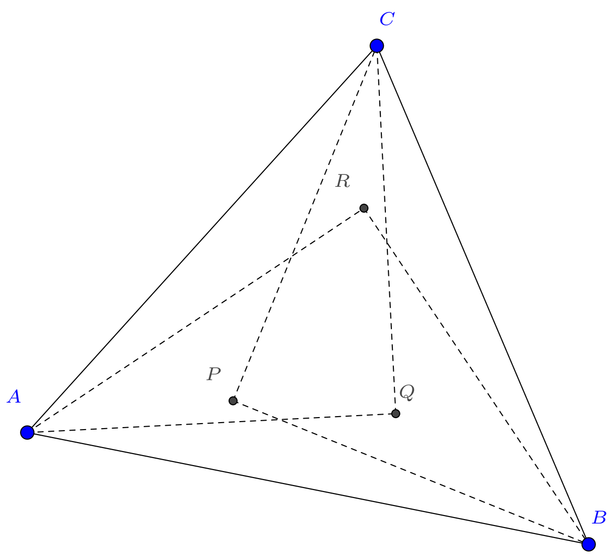
Soient A et B_0 deux points et soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On considère la suite de points $(B_n)_{n\in|||}$ définie par la relation de récurrence $\forall n \in |||$, $B_{n+1} = s(B_n)$.

1. Faire une figure avec $AB_0 = 8$ et placer les points B_n jusqu'à $n = 4$.
2. Montrer que pour tout $n \in |||$, les triangles AB_nB_{n+1} et $AB_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.
3. Dans la suite, on considère le sous-ensemble du plan $S = \bigcup_{n\in|||}[B_nB_{n+1}]$. C'est une spirale polyédrale. Sa longueur est-elle finie ou infinie ? Dans le premier cas, calculer sa longueur.

Correction ▼ [007154]

Exercice 5289 Point intérieur de Vecten

Soit ABC un triangle direct non rectangle isocèle, et soit P (resp. Q, R) tel que BCP (resp. CAQ, ABR) soit direct isocèle rectangle en P (resp. Q et R).

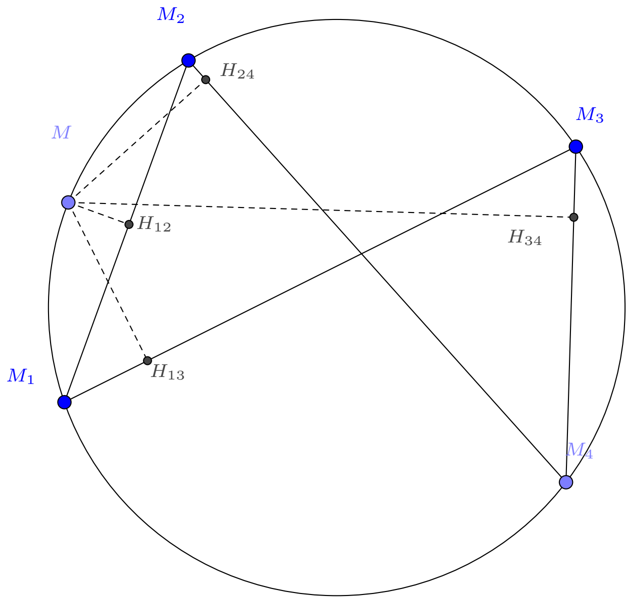


1. Montrer que $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont orthogonaux et de même norme.
2. Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CE) sont concourantes.

Indication ▼ Correction ▼ [007155]

Exercice 5290

Soient M, M_1, M_2, M_3 et M_4 cinq points distincts sur un cercle $\mathscr{C}$. Montrer que le produit des distances de M aux droites (M_1M_2) et (M_3M_4) est égal au produit des distances de M aux droites (M_1M_3) et (M_2M_4).



Indication ▼ Correction ▼ [007156]

Exercice 5291

1. Soit $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de la fonction sinus. Décrire les isométries de $\mathscr{S}$.
2. Même question pour le graphe de la fonction tangente.

Indication ▼ Correction ▼ [007157]

Exercice 5292 Isométries d'un triangle

Soit $\mathscr{T} = ABC$ un triangle et soit g une isométrie de $\mathscr{T}$, c'est-à-dire une isométrie du plan telle que $g(\mathscr{T}) = \mathscr{T}$.

1. Montrer que g envoie les sommets sur les sommets.
2. Montrer que g admet au moins un point fixe.
3. Montrer que g n'est ni une translation ni une réflexion glissée.

Correction ▼ [007158]

Exercice 5293 Isométries d'un triangle équilatéral

Soit $\mathscr{T} = ABC$ un triangle équilatéral et $G = Isom(\mathscr{T})$ son groupe d'isométries.

1. Trouver six isométries laissant $\mathscr{T}$ invariant.
2. Montrer qu'une isométrie de $\mathscr{T}$ doit envoyer un sommet sur un sommet.
3. Écrire un morphisme injectif ϕ entre G et $\mathfrak{S}_3$.
4. Montrer qu'il est bijectif.
5. Décrire le groupe $H = Isom^+(\mathscr{T})$ et écrire un isomorphisme entre ce groupe et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. À quel sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$ correspond H ?

Correction ▼ [007159]

Exercice 5294 Isométries d'un triangle isocèle

Soit $\mathscr{T} = ABC$ un triangle isocèle non équilatéral. Déterminer son groupe d'isométries ainsi qu'un isomorphisme entre ce groupe et un groupe classique.

Correction ▼ [007160]

Exercice 5295 Isométries d'un carré

Soit $\mathscr{C} = ABCD$ un carré plein du plan (c'est-à-dire l'enveloppe convexe de ses sommets) et O son centre.

1. Soit $g \in \mathrm{Isom}(\mathscr{C})$ une isométrie du carré, c'est-à-dire une isométrie du plan préservant le carré. Montrer qu'elle permute les sommets, puis que c'est une rotation de centre O ou bien une réflexion d'axe contenant O.
2. Déterminer entièrement le groupe $G = \mathrm{Isom}(\mathscr{C})$.
3. Décrire le groupe $H = \mathrm{Isom}^+(\mathscr{C})$ des isométries directes du carré et écrire un isomorphisme entre ce groupe et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [007161]

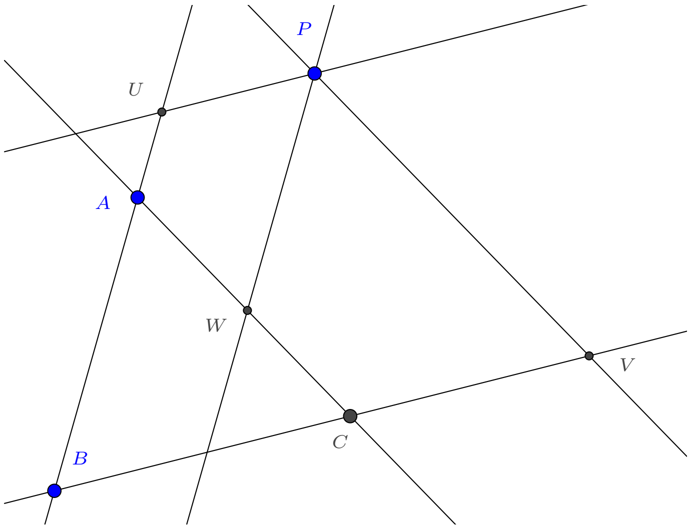
Exercice 5296 Isométries d'un rectangle

Soit $\mathscr{C} = ABCD$ un rectangle plein, non carré. Déterminer son groupe d'isométries, et préciser un isomorphisme entre ce groupe et un groupe usuel abstrait.

Correction ▼ [007162]

Exercice 5297

Soit ABC un triangle équilatéral direct, et P un point n'appartenant pas aux droites (AB), (BC) et $CA)$. La parallèle à (BC) (resp. à (CA) et (AB)) passant par P coupe (AB) (resp. (BC) et (CA)) en U (resp. V, W).

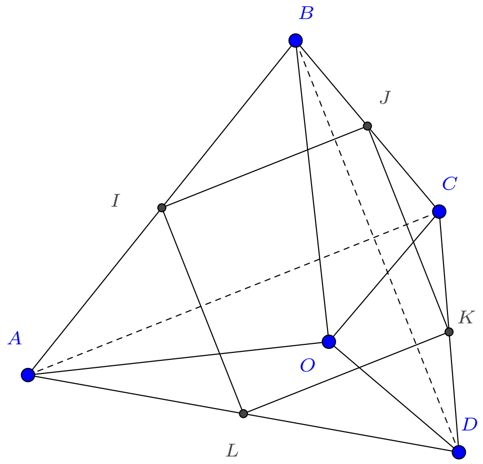


1. Montrer que $AUPW$ et $PCVW$ sont inscriptibles.
2. Dresser une liste d'égalités d'angles (de droites) que l'on peut déduire.
3. Faire une (grande) figure dans le cas où P est sur le cercle circonscrit à ABC.
4. Montrer que les points U, V et W sont alignés ssi $ABCP$ est inscriptible.

Indication ▼ Correction ▼ [007165]

Exercice 5298

Soient AOB et COD deux triangles directs, isocèles rectangles en O. Soient I, J, K et L les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



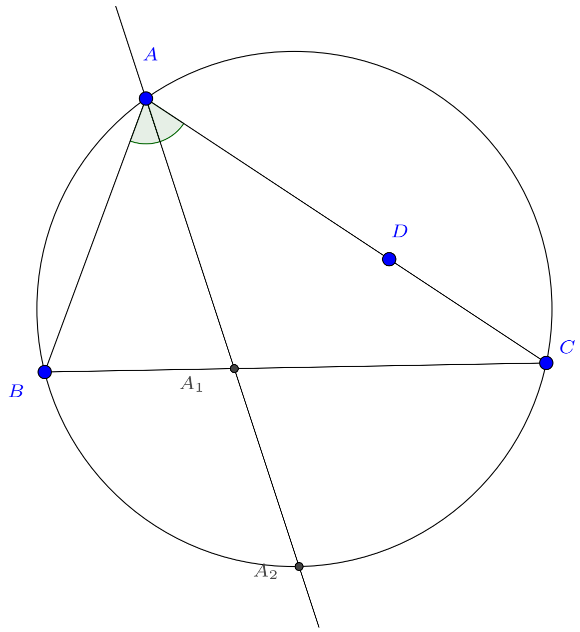
1. Montrer que $(AC) \perp (BD)$ et que $AC = BD$.
2. Montrer que $IJKL$ est un carré.

Correction ▼ [007167]

Exercice 5299

Soit ABC un triangle non isocèle en A. La bissectrice intérieure Δ de $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en A_1 et le cercle circonscrit à ABC en A_2.

1. Soit D le symétrique de B par rapport à Δ. Justifier que $D \in (AC)$.
2. Montrer que A_1A_2CD est inscriptible.
3. Montrer que $AA_1 \cdot AA_2 = AB \cdot AC$.



Correction ▼ [007168]

212 242.02 Géométrie affine euclidienne de l'espace

Exercice 5300

On considère les 4 points A, B, C, D donnés. $(A,\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$ définit-il bien un nouveau repère ? Dans ce cas, trouver les formules de changements de repère exprimant les coordonnées (x,y,z) dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en fonction de celles (x',y',z') dans $(A,\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$.

1. $A(2,-1,0)$, $B(7,-1,-1)$, $C(-3,0,-2)$, $D(3,-6,-3)$
2. $A(4,1,4)$, $B(7,3,1)$, $C(9,0,0)$, $D(5,2,3)$
3. $A(0,-1,3)$, $B(5,-6,4)$, $C(-4,1,-2)$, $D(-3,3,6)$
4. $A(1,1,0)$, $B(1,5,2)$, $C(0,-1,1)$, $D(3,4,-1)$
5. $A(2,-1,4)$, $B(0,0,1)$, $C(3,2,-1)$, $D(1,3,4)$
6. $A(4,4,2)$, $B(5,3,2)$, $C(4,3,3)$, $D(3,5,2)$
7. $A(1,3,1)$,$B(1,2,2)$,$C(2,-1,-4)$, $D(0,8,6)$.

[002031]

Exercice 5301

Les formules suivantes définissent-elles bien un changement de repère ? Dans ce cas, donner le changement de repère inverse.

1. $\begin{cases} x' = y - z + 1 \\ y' = -x - 4y + 5z + 2 \\ z' = x - 5y + 5z + 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = 5x + 4y + 3z - 2 \\ y' = 2x + 3y + z + 2 \\ z' = 4x - y + 3z + 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 2z - 2 \\ y' = x + y - 5z + 1 \\ z' = -3x - 4y + 4z - 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = 3x - 5y + z + 2 \\ y' = 2x - y + z - 1 \\ z' = -3x - 4y - z - 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 2x - z + 1 \\ y' = -2x + 2y + 2z - 2 \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = x - 2y - 3z + 5 \\ y' = -3x + 4y + z - 2 \\ z' = 2x - y + 6z + 3 \end{cases}$

[002032]

Exercice 5302

On considère les droites et les plans suivants dont les équations sont données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Donner leurs équations dans le nouveau repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$, sachant que dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(4,-1,2)$, $B(2,-5,4)$, $C(5,0,-3)$, $D(1,-5,6)$.

1. $P : x + y = 1$
2. $P : 2x - 3y + 4z - 1 = 0$
3. $P : x - y + z + 3 = 0$
4. $P : \begin{cases} x = 2t + 3s + 1 \\ y = t - s + 2 \\ z = 4t - 2s - 3 \end{cases}$
5. $(D) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 4z = 3 \end{cases}$
6. $(D) : \begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ 4x - 3y - z = -2 \end{cases}$

[002033]

Exercice 5303

1. On considère le point $A(-2,4,1)$, les vecteurs $\vec{u}(1,1,1)$, $\vec{v}(2,2,-4)$, $\vec{w}(3,-1,1)$ et le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. On note x',y'et z' les coordonnées dans ce repère. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x,y,z en fonction de x',y',z'.
2. On considère la droite (D) : $\left\{\begin{array}{l} y-z=3 \\ x+y=2 \end{array}\right.$. Utiliser le changement de repère pour donner une équation de D dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
3. Donner les formules analytiques du changement de repère inverse.

Correction ▼ Vidéo ■ [002034]

Exercice 5304

1. Soit f la transformation de l'espace définie analytiquement par

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & -3x+2y-2z+4 \\ y' = & -8x+5y-4z+8 \\ z' = & -4x+2y-z+4 \end{array}\right.$$

   (a) Déterminer l'ensemble P des points invariants par f.
   (b) Montrer que pour M d'image M', le milieu de $[MM']$ est dans P, (MM') est parallèle à une direction fixe.
   (c) En déduire une description simple de f.
2. Soit f la transformation de l'espace définie analytiquement par

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = \frac{1}{3}(& 2x-y-z+1) \\ y' = \frac{1}{3}(& -x+2y-z+1) \\ z' = \frac{1}{3}(& -x-y+2z+1) \end{array}\right.$$

   (a) Déterminer l'ensemble P des points invariants par f.
   (b) Montrer que pour M d'image M' le vecteur $\vec{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe.
   (c) En déduire une description simple de f.

[002038]

Exercice 5305

1. Définir analytiquement la projection orthogonale sur le plan d'équation $2x+2y-z=1$.
2. Définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-z=2 \end{array}\right.$.
3. Donner l'expression analytique de la projection sur le plan (P) contenant le point $C(2,-1,1)$ et ayant pour vecteurs directeurs $\vec{u}(0,-1,1)$ et $\vec{u'}(-2,0,1)$, selon la droite (AB), où $A(1,-1,0)$ et $B(0,-1,3)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [002039]

Exercice 5306

Tout ce problème se situe dans l'espace euclidien tridimensionnel muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère les deux droites d et D données par les systèmes d'équations cartésiennes suivant :

$$d\left\{\begin{array}{ll} x+y-3z & =0 \\ y+z & =0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad D\left\{\begin{array}{ll} x-1 & =0 \\ y-z-1 & =0 \end{array}\right.$$

(a) i. Donner un point et un vecteur directeur de d. Donner un point et un vecteur directeur de D.

ii. Dire si les droites d et D sont parallèles, sécantes ou non coplanaires.

iii. Justifier l'existence de deux plans parallèles (en donnant pour chacun de ces deux plans un point et deux vecteurs directeurs) tels que d est contenue dans l'un et D est contenue dans l'autre.

(b) i. Soient $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(4,-1,1)$ dans $\mathscr{R}$, $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $(0,1,1)$ dans $\mathscr{R}$ et Ω le point de coordonnées $(1,1,0)$ dans $\mathscr{R}$.

Déterminer une équation cartésienne pour le plan P de repère cartésien $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, en déduire une équation cartésienne pour le plan Q de repère cartésien $(\Omega,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

ii. Donner des équations paramétriques pour la droite Δ normale à P passant par O. Déterminer les deux points $\Delta\cap P$ et $\Delta\cap Q$ puis calculer la distance entre eux.

Interpréter cette distance.

2. On considère les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{a}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{b}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{c}=(\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

(a) Montrer que $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ est un repère orthonormé. Est-il direct ?

(b) Ecrire les formules de changement de repères de $\mathscr{R}$ à $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$.

(c) Quelle est l'équation dans le repère $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ du plan d'équation $x+2y-2z=0$ dans $\mathscr{R}$? Même question avec le plan d'équation $x+2y-2z=3$ dans $\mathscr{R}$.

[002042]

Exercice 5307

Tout ce problème se situe dans l'espace euclidien tridimensionnel muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. On définit les trois points : $A=(3,\sqrt{6},3)$, $B=(3,-\sqrt{6},3)$ et $C=(4,0,0)$.

1. (a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan P contenant O, A et B.

   (b) Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

   (c) Les points O,A,B et C sont-ils coplanaires ?

2. Soit G le barycentre des points O, A, B et C, c'est à dire, par définition l'unique point G de l'espace tel que : $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

   (a) Montrer que $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

   (b) En déduire les coordonnées de G dans $\mathscr{R}$.

3. (a) Montrer que la droite (GC) est perpendiculaire au plan P.

   (b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite (GC) avec le plan P.

4. Montrer que la transformation de l'espace définie par les formules : $(x'=x,y'=-y,z'=z)$ est une isométrie. Quels sont ses points fixes ? Déterminer les images des points O,A,B,C par cette isométrie. Que remarque-t-on ?

[002043]

Exercice 5308

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On définit les points

$$A:(1,2,3)\ ;\quad B:(2,3,1)\ ;\quad C:(3,1,2)\ ;\quad D:\ (1,1,1)$$

et le plan

$$\Pi: 2x-3y+4z=0.$$

1. Montrer que les points A,B,C ne sont pas alignés.
2. Montrer que les points A,B,C,D ne sont pas coplanaires.

3. Donner une équation cartésienne du plan P passant par A,B,C.
4. Calculer la distance de D au plan P.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite $d = P \cap \Pi$.

[002044]

Exercice 5309

Soient A, B et C trois points distincts et non alignés de l'espace affine tridimensionnel $\mathscr{E}$. On note P le plan qui contient A, B et C. Soit O un point de $\mathscr{E}$ n'appartenant pas à P.

1. (a) Expliquer rapidement pourquoi $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère cartésien de $\mathscr{E}$.
   (b) Dans ce repère $\mathscr{R}$, écrire les coordonnées des points O, A, B et C, et déterminer une équation cartésienne du plan P.
2. Soit A' le point de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$. On note P' le plan parallèle à P passant par A'. P' coupe (OB) en B' et (OC) en C'.
   Dans $\mathscr{R}$, écrire les coordonnées des points A', B' et C' et déterminer des équations paramétriques pour les droites (BC') et $(B'C)$, en déduire des équations cartésiennes de ces droites.
   Calculer les coordonnées des points $I = (BC') \cap (B'C)$, $J = (AC') \cap (A'C)$ et $K = (AB') \cap (A'B)$.
3. Soit A'' le point de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA''} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$. On note P'' le plan parallèle à P passant par A''. P'' coupe (OB) en B'' et (OC) en C''.
   Montrer que les droites (IA''), (JB''), (KC'') sont parallèles.

[002045]

Exercice 5310 Équation au produit vectoriel

Soient A, B, C trois points distincts de l'espace.
Déterminer le lieu des points M tels que $\vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} = 2\vec{MC} \wedge \vec{MA}$.

Correction ▼ [004958]

Exercice 5311 $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + k\vec{MC}\| = \|\vec{MD} + \vec{ME}\|$

Soient A,B,C,D,E cinq points de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.
Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + k\vec{MC}\| = \|\vec{MD} + \vec{ME}\|$.

Correction ▼ [004959]

Exercice 5312 Ensi Chimie P 93

Trouver les coordonnées des projetés du point $C(3,4,-2)$ sur les droites définies par les équations :
$D_1 : \frac{x-5}{13} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+3}{-4}$.
$D_2 : \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

Correction ▼ [004960]

Exercice 5313 Projections sur 4 plans

Dans un *rond* on donne les plans $\begin{cases} P & x+y=1 \\ Q & y+z=1 \\ R & x+z=1 \\ S & x+3y+z=0 \end{cases}$ et le point $A : (1,1,\lambda)$.

Donner une CNS sur λ pour que les projections de A sur les quatre plans soient coplanaires.

Correction ▼ [004961]

Exercice 5314 Calculs de points et plans

Dans un *rond* on donne les points $A : (1,2,3)$, $B : (2,3,1)$, $C : (3,1,2)$, $D : (1,0,-1)$.

1. Chercher le centre et le rayon de la sphère circonscrite à $ABCD$.
2. Chercher les équations cartésiennes des plans (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).
3. Chercher le centre et le rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre $ABCD$.

Correction ▼ [004962]

Exercice 5315 Perpendiculaire commune à deux droites

Dans un *rond* on donne les droites $D : \begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y-z=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Chercher la perpendiculaire commune, Δ, à D et D' (On donnera les points $H \in D \cap \Delta$ et $K \in D' \cap \Delta$).

Correction ▼ [004963]

Exercice 5316 Perpendiculaire commune à deux droites

Dans un *rond* on donne les droites $D : \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=0. \end{cases}$

Calculer $d(D,D')$.

Correction ▼ [004964]

Exercice 5317 Tétraèdre dont les faces ont même aire

Soit $ABCD$ un tétraèdre dont les quatre faces ont même aire. Montrer que les côtés non coplanaires ont deux à deux mêmes longueurs.

Correction ▼ [004965]

Exercice 5318 Distance entre les côtés d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a. Chercher la distance entre deux côtés non coplanaires.

Correction ▼ [004966]

Exercice 5319 Distance d'un point à une droite

Dans un *rond* on donne la droite $D : \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$ et $M(x,y,z)$. Calculer $d(M,D)$.

Correction ▼ [004967]

Exercice 5320 Projection orthogonale

Dans un *rond* on donne le plan $P : x+2y+3z=4$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur P.

Correction ▼ [004968]

Exercice 5321 Projection orthogonale

Dans un *rond* on donne les points $A : (1,0,-1)$, $B : (-1,1,1)$, $C : (2,-1,1)$, $D : (1,2,-2)$, $E : (-2,-2,0)$. Déterminer, par un point et un vecteur directeur, la projection de (DE) sur le plan (ABC).

Correction ▼ [004969]

Exercice 5322 Symétrique d'un plan

Dans un *rond* on donne les plans $P : x+y+z=1$ et $Q : 2x-y+z=1$. Chercher une équation cartésienne du plan Q' symétrique de Q par rapport à P.

Correction ▼ [004970]

Exercice 5323 Repères orthonormés

Soient $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ et $(O, \vec{OA'}, \vec{OB'}, \vec{OC'})$ deux repères orthonormés directs de l'espace.
Montrer que $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$ sont coplanaires. [004971]

Exercice 5324 Angle d'un plan et d'une droite

Soient P un plan, D une droite tels que $\overline{(P,D)} \equiv \theta (\bmod \pi)$.
Montrer que pour toute droite $\Delta \subset P$, on a $\cos(D, \Delta) \geqslant \cos\theta$. Quand y a-t-il égalité ? [004972]

Exercice 5325 Angle entre deux faces d'un dodécaèdre

Quel est l'angle entre deux faces d'un dodécaèdre régulier ? (on donne : $4\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$)
Correction ▼ [004973]

Exercice 5326 Ensi P 90

Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations $\begin{cases} x^2+y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2+y^2 = 25 \\ z = 2. \end{cases}$
Correction ▼ [004974]

Exercice 5327 Sphère définie par ses intersections

Soit S une partie de l'espace contenant au moins deux points et telle que pour tout plan P, $P \cap S$ est un cercle, un singleton ou vide. Montrer que S est une sphère.
Correction ▼ [004975]

Exercice 5328 CNS pour que deux vissages commutent

Soient f, g deux vissages d'angles $\neq \pi$. Trouver une CNS pour que $f \circ g = g \circ f$. (On étudiera $f \circ g \circ f^{-1}$)
Correction ▼ [004976]

Exercice 5329 Composée de 3 demi-tours

Soient D_1, D_2, D_3, trois droites, et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les $\frac{1}{2}$-tours correspondants.
Démontrer que $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est un $\frac{1}{2}$-tour si et seulement si D_1, D_2, D_3 ont une perpendiculaire commune ou sont parallèles.
Correction ▼ [004977]

Exercice 5330 Composée de demi-tours par rapport aux arêtes d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, et d_{AB}, d_{AC}, d_{AD} les $\frac{1}{2}$-tours autour des droites $(AB), (AC), (AD)$. Simplifier $f = d_{AB} \circ d_{AC} \circ d_{AD}$.
Correction ▼ [004978]

Exercice 5331 Isométries transformant un triangle en un triangle donné

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Combien y a-t-il d'isométries transformant ABC en $A'B'C'$?
Indication : si f et g sont deux telles isométries, alors $f \circ g^{-1}$ est une isométrie conservant ABC.
Correction ▼ [004979]

Exercice 5332 Groupes d'isotropie

Déterminer *toutes* les isométries

1. d'un tétraèdre régulier.
2. d'un cube.
3. de deux droites non coplanaires.

Correction ▼ [004980]

Exercice 5333 Composée de projections

Soient D_1, D_2, D_3 trois droites de l'espace non toutes parallèles. Pour $M_1 \in D_1$ on construit : M_2, projeté de M_1 sur D_2, M_3, projeté de M_2 sur D_3, M_4, projeté de M_3 sur D_1.
Montrer qu'il existe un unique point $M_1 \in D_1$ tel que $M_4 = M_1$.

Correction ▼ [004981]

Exercice 5334 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O,i,j,k), on donne les points $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$ et $D(1,0,4)$. Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD).

Correction ▼ [005501]

Exercice 5335 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O,i,j,k), on donne : la droite (D) dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x=2+3t \\ y=-t \\ z=1+t \end{array}\right.$, le plan P dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda+\mu \\ y=-1-3\lambda+2\mu \\ z=1+\lambda \end{array}\right.$, le plan P' dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x=-5-\nu \\ y=3+\nu+3\eta \\ z=\nu+\eta \end{array}\right.$, Etudier $D\cap P$ et $P\cap P'$

Correction ▼ [005502]

Exercice 5336 **T

Matrice dans la base canonique orthonormée directe de la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ autour de $(1,2,2)$ qui transforme j en k.

Correction ▼ [005503]

213 243.00 Conique

Exercice 5337 *IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Eléménts caractéristiques de la conique dont une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ est

— 1. $y^2 = x$,
  2. $y^2 = -x$,
  3. $y = x^2$,
  4. $y = -x^2$.

— 1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$,
  2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$,
  3. $x^2 + 2y^2 = 1$.

— 1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,
  2. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,
  3. $x^2 - y^2 = 1$.

Correction ▼ [005540]

Exercice 5338 *IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}=\left(0,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. Eléménts caractéristiques de la courbe dont une équation dans $\mathscr{R}$ est

— 1. $y=x^2+x+1$,
  2. $y^2+y-2x=0$,
  3. $y=\sqrt{2x+3}$.

— 1. $x^2+x+2y^2+y=0$,
  2. $y=-2\sqrt{-x^2+x}$.

— $x^2-y^2+x+y+1=0$.

Correction ▼ [005541]

Exercice 5339 **IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}=(0,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Nature et éléments caractéristiques de la courbe dont une équation en repère orthonormé est

1. $y=\frac{1}{x}$,
2. $41x^2-24xy+34y^2-106x+92y+74=0$,
3. $x^2+2xy+y^2+3x-2y+1=0$,
4. $(x-y+1)^2+(x+y-1)^2=0$,
5. $x^2+y^2-3x-y+3=0$,
6. $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$,
7. $(x+y+1)(x-y+3)=3$,
8. $(2x+y-1)^2-3(x+y)=0$.

Correction ▼ [005542]

Exercice 5340 *IT

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

1. $r=\frac{1}{1+2\cos\theta}$,
2. $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$,
3. $r=\frac{1}{2+\cos\theta}$,
4. $r=\frac{1}{1-\sin\theta}$,
5. $r=\frac{1}{2-\cos\theta}$.

Correction ▼ [005543]

Exercice 5341 ***

Déterminer l'image du cercle trigonométrique par la fonction $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & \frac{1}{1+z+z^2}\end{array}$.

Correction ▼ [005544]

Exercice 5342 ***

1. **Droite de** SIMSON. Soit (A,B,C) un triangle et M un point du plan. Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R de M sur les cotés (BC), (CA) et (AB) du triangle (ABC) sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à (ABC). La droite passant par P, Q et R s'appelle la droite de SIMSON du point M relativement au triangle ABC (ou au cercle (ABC)).
2. **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. En particulier, fournir la construction des points de contacts.

Correction ▼ [005546]

Exercice 5343 **

$(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[A,B]$. (D) est la tangente en A à $(\mathscr{C})$. P est un point variable sur $(\mathscr{C})$ et (T) la tangente en P à $(\mathscr{C})$. (T) recoupe (D) en S. La perpendiculaire à (AB) passant par P coupe (BS) en M. Ensemble des points M ?

Correction ▼ [005547]

Exercice 5344 **

Etudier les courbes dont une équation en repère orthonormé est :

1. $2x^2+6xy+5y^2+4x+6y+1=0$.
2. $x^2+2xy+y^2+3x-2y+1=0$.
3. $2x^2-4xy-3x+3y+1=0$.
4. $-5x^2+6\sqrt{3}xy+y^2-4=0$.
5. $4x^2+12xy+9y^2-2x+1=0$.
6. $(x-y+1)^2+(x+y-1)^2=0$.
7. $x^2+y^2-3x-y+2=0$.
8. $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$.
9. $(x+2y-4)(x-y-1)=3$.
10. $(2x+y-1)^2-3(x+y)=0$.

Correction ▼ [005815]

Exercice 5345 **

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

1. $r=\frac{2}{1-2\cos\theta}$,
2. $r=\frac{6}{2+\cos\theta}$,
3. $r=\frac{2}{1-\sin\theta}$.

Correction ▼ [005816]

Exercice 5346 ***

1. Montrer que toute courbe de degré inférieur ou égal à 2 admet une représentation paramétrique de la forme
$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\frac{P(t)}{R(t)} \\ y(t)=\frac{Q(t)}{R(t)} \end{array}\right.$$
où P, Q et R sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et montrer réciproquement que toute courbe paramétrée du type précédent est une courbe de degré inférieur ou égal à 2.
2. Etudier la courbe $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{2t+1}{t^2+2t-1} \\ y=\frac{t^2-1}{t^2+2t-1} \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005817]

214 243.01 Ellipse

Exercice 5347

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F et F', M un point fixé de $\mathscr{E}$ et M' un point qui se promène sur $\mathscr{E}$. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles de centres M et M' de rayons MF' et $M'F'$. Soient I le point de $(FM)\cap\mathscr{C}$ tel que $M\in[FI]$ et J le deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

1. Montrer que (MM') est bissectrice de l'angle $F'MJ$.
2. Que devient J si M' tend vers M (on ne demande pas de preuve) ?
3. Montrer que la tangente à $\mathscr{E}$ en M est bissectrice extérieure de l'angle FMF'.

[002065]

Exercice 5348

Montrer que la courbe paramétrée $x(t) = \dfrac{1}{t^2+t+1}$ et $y(t) = \dfrac{t}{t^2+t+1}$ est une ellipse et la tracer. [002071]

Exercice 5349 Orthoptique d'une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F, F', de centre O, de dimensions a et b.
Soient $M, M' \in \mathscr{E}$ tels que les tangentes à $\mathscr{E}$ sont perpendiculaires en un point T.
Montrer que $TF^2 + TF'^2 = 4a^2$. Quel est le lieu de T quand M et M' varient ?

Correction ▼ [004912]

Exercice 5350 Tangentes à une ellipse

Soient $\mathscr{E} : \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$, et $\mathscr{E}' : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. CNS sur u, v, w pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à $\mathscr{E}'$?
2. Soient (MP), (MQ) deux tangentes à $\mathscr{E}'$ avec $M, P, Q \in \mathscr{E}$. Montrer que (PQ) est aussi tangente à $\mathscr{E}$.

Correction ▼ [004913]

Exercice 5351 Points mobiles avec $PQ =$ constante

Soient P un point mobile sur Ox, et Q un point mobile sur Oy tels que PQ reste constante.

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le lieu, $\mathscr{C}_\alpha$, de $\mathrm{Bar}(P : 1-\alpha, Q : \alpha)$.
2. Soit R le quatrième point du rectangle $OPQR$. Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}_\alpha$ en un point M est perpendiculaire à (RM).

Correction ▼ [004914]

Exercice 5352 FMT est rectangle en F

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyer F, directrice D. Soit $M \in \mathscr{E}$ hors de l'axe focal, et T le point d'intersection de la tangente en M et de la directrice D. Montrer que FMT est rectangle en F.

Correction ▼ [004915]

Exercice 5353 $1/OM^2 + 1/OP^2$

Soit $\mathscr{E}$ un ellipse de centre O et de dimensions a, b. Soient $M, P \in \mathscr{E}$ tels que OMP soit rectangle en O.

1. Montrer que $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.
2. En déduire que (MP) reste tangente à un cercle fixe de centre O.

[004916]

Exercice 5354 Cercle sur une tangente

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de sommets A, A', et $M \in \mathscr{E}$. La tangente en M coupe les tangentes en A, A' en P, P'. Montrer que le cercle de diamètre $[P, P']$ passe par les foyers de $\mathscr{E}$. [004917]

Exercice 5355 ***

Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation $P(x) = P(y)$ dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

Correction ▼ [005550]

Exercice 5356 ***

$(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[AB]$. $(\mathscr{D})$ est la tangente en A au cercle $(\mathscr{C})$. P est un point variable sur le cercle $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{T})$ la tangente en P au cercle $(\mathscr{C})$. $(\mathscr{T})$ recoupe $(\mathscr{D})$ en S. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par P coupe la droite (BS) en M. Ensemble des points M ?

Correction ▼ [005820]

Exercice 5357 **

Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation $P(x) = P(y)$ dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

Correction ▼ [005822]

215 243.02 Parabole

Exercice 5358

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$, M un point de $\mathscr{P}$ et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$. Montrer que la tangente à $\mathscr{P}$ en M est la médiatrice de $[FH]$. En déduire un procédé de construction d'une parabole. [002066]

Exercice 5359

Déterminer l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole. [002067]

Exercice 5360

Déterminer astucieusement le sommet et l'axe de la parabole $x(t) = t^2 + t + 1$ et $y(t) = t^2 - 2t + 2$. [002070]

Exercice 5361 Orthoptique d'une parabole

Soit P une parabole de foyer F et de directrice D. Soit $M \in P$, et M' le point de P tel que les tangentes en M et M' sont orthogonales.

1. Montrer que ces tangentes se coupent au milieu de $[H, H']$.
2. Montrer que M, F, M' sont alignés.
   En déduire dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné, toutes les paraboles tangentes aux axes de coordonnées.

Correction ▼ [004903]

Exercice 5362 Cercle circonscrit

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et A, B deux points distincts de $\mathscr{C}$. Soit Δ le diamètre parallèle à (AB).
Pour $M \in \mathscr{C}$, on note P, Q les intersections de (MA) et (MB) avec Δ. Chercher le lieu du centre du cercle circonscrit à MPQ.

Correction ▼ [004904]

Exercice 5363 Projection sur le diamètre d'un cercle

On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et $A \in \mathscr{C}$. Pour $M \in \mathscr{C}$, on construit le projeté N sur le diamètre perpendiculaire à (OA), et I, le point d'intersection de (OM) et (AN). Quel est le lieu de I ?

Correction ▼ [004905]

Exercice 5364 $MF + MH = 2a$

Soit F un point, D une droite ne passant pas par F, et $a > \frac{1}{2}d(F,D)$.
Trouver l'ensemble des points M tels que $MF + d(M,D) = 2a$.

Correction ▼ [004906]

Exercice 5365 Paraboles passant par un point

Soient D une droite et $F \in D$.
Montrer que pour tout point $M \notin D$, il passe exactement deux paraboles de foyer F et d'axe D.
Montrer que les tangentes à ces paraboles en M sont orthogonales. [004907]

Exercice 5366 Longueur minimale d'une corde normale, Ensi Physique 93

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de paramètre p et $A \in \mathscr{P}$. Soit B le point où la normale à $\mathscr{P}$ en A recoupe $\mathscr{P}$. Déterminer la longueur minimale de AB.

Correction ▼ [004908]

Exercice 5367 Cordes perpendiculaires, Centrale P' 1996

On considère une parabole dans le plan euclidien.

1. Exprimer l'équation d'une droite passant par deux points A et B de la parabole à l'aide d'un déterminant d'ordre 3.
2. A, B, C étant trois points sur la parabole, exprimer le fait que (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
3. On fixe A sur la parabole, B et C sont deux points de la parabole variables tels que (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Montrer que (BC) passe par un point fixe M.
4. Quel est le lieu de M quand A varie ?

Correction ▼ [004909]

Exercice 5368 Normales concourantes, Centrale P' 1996

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{P}$.

1. Discuter l'existence et le nombre de points $M \in \mathscr{P}$ distincts de M_0 tels que la normale à $\mathscr{P}$ en M passe par M_0.
2. Dans le cas où il y a deux solutions, M_1 et M_2, trouver le lieu géométrique du centre de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.

Correction ▼ [004910]

Exercice 5369 Croisillons sur une parabole, Centrale MP 2000

Pour $p > 0$ on donne la courbe Γ d'équation $y^2 = 2px$. Soit un carré $ABCD$ tel que $B, D \in \Gamma$ et A, C appartiennent à l'axe de symétrie de Γ.

1. Quelle relation lie les abscisses de A et C ?
2. On construit une suite (M_n) de points de Ox, M_n d'abscisse x_n, telle que $x_{n+1} > x_n$ et M_nM_{n+1} est la diagonale d'un carré dont les deux autres sommets appartiennent à Γ. Déterminer un équivalent de x_n quand $n \to \infty$.

Correction ▼ [004911]

Exercice 5370 **

Déterminer l'orthoptique d'une parabole , c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole, perpendiculaires l'une à l'autre.

Correction ▼ [005545]

Exercice 5371 ***

Soit, dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la courbe (Γ) d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = x^2+x+1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$.

Montrer que (Γ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

Correction ▼ [005548]

Exercice 5372 ***

Equation cartésienne de la parabole tangente à $(0x)$ en $(1,0)$ et à $(0y)$ en $(0,2)$.

Correction ▼ [005552]

Exercice 5373 **

Déterminer l'orthoptique d'une parabole, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole qui soient perpendiculaires.

Correction ▼ [005818]

Exercice 5374 ***

1. (Droite de SIMSON) Soient ABC un triangle et M un point du plan.
   Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R du point M sur les côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle ABC sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite passant par les points P, Q et R s'appelle la droite de SIMSON du point M relativement au cercle (ABC).
2. (Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle) Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. Fournir en particulier la construction des points de contacts.

Correction ▼ [005819]

Exercice 5375 **

L'espace de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé (O,i,j,k). On note (Γ) la courbe d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2+x+1 \\ x+y+z-1=0 \end{array}\right. .$$

Montrer que (Γ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

Correction ▼ [005821]

Exercice 5376 **

Equation cartésienne de la parabole $(\mathscr{P})$ tangente à (Ox) en $(1,0)$ et à (Oy) en $(0,2)$.

Correction ▼ [005824]

216 243.03 Hyperbole

Exercice 5377 Projection non orthogonale

Soient F un point, D une droite ne passant pas par F, et $\vec{\Delta}$ une direction ni égale ni perpendiculaire à $\vec{D}$. Pour $M \in \mathscr{P}$, on note H le projeté de M sur D parallèlement à $\vec{\Delta}$. Quel est l'ensemble des points M tels que $MF = MH$?

Correction ▼ [004918]

Exercice 5378 Triangle rectangle sur une hyperbole

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole équilatère de dimension a. On se place dans un ROND $(O,\vec{i},\vec{j})$ construit sur les asymptotes de $\mathscr{H}$.

1. Déterminer l'équation de $\mathscr{H}$ dans ce repère.
2. Soit ABC un triangle rectangle en A dont les trois sommets sont sur $\mathscr{H}$. Montrer que la tangente en A est orthogonale à (BC).
3. Soit ABC un triangle quelconque dont les sommets sont sur $\mathscr{H}$. Montrer que l'orthocentre y est aussi.

Correction ▼ [004919]

Exercice 5379 Cercle sur une tangente

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de sommets A,A', et $M \in \mathscr{H}$. La tangente en M coupe les tangentes en A,A' en P,P'. Montrer que le cercle de diamètre $[P,P']$ passe par les foyers de $\mathscr{H}$. [004920]

Exercice 5380 Triangle équilatéral

Soient A,F deux points distincts, D leur médiatrice, $\mathscr{H}$ l'hyperbole de foyer F, directrice D, excentricité 2, et $\mathscr{C}$ un cercle passant par A et F, de centre I.

1. Pour $M \in \mathscr{C}$, montrer que $M \in \mathscr{H} \Leftrightarrow 3\overline{(\vec{IM},D)} \equiv \overline{(\vec{IF},D)}\ [2\pi]$.
2. En déduire que si $I \notin (AF)$, $\mathscr{C}$ coupe $\mathscr{H}$ aux sommets d'un triangle équilatéral.

Correction ▼ [004921]

Exercice 5381 $\overline{(\vec{OA},\vec{OM})} \equiv 2\overline{(\vec{AM},\vec{AO})}$

Soient O,A deux points distincts du plan. Trouver les points M tels que $\overline{(\vec{OA},\vec{OM})} \equiv 2\overline{(\vec{AM},\vec{AO})}$.

Correction ▼ [004922]

Exercice 5382 Lieu géométrique

Soient A,A' deux points distincts et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[A,A']$. Pour $P \in \mathscr{C}$, on construit : P' le symétrique de P par rapport à (AA'), et M le point d'intersection de (AP) et (A',P'). Quel est le lieu de M ?

Correction ▼ [004923]

Exercice 5383 Triangle sur une hyperbole, Ensi P 91

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole équilatère et ABC un triangle dont les sommets appartiennent à $\mathscr{H}$. Montrer que l'orthocentre, H, du triangle appartient aussi à $\mathscr{H}$. Comparer H et le point Q où le cercle circonscrit à ABC recoupe $\mathscr{H}$.

Correction ▼ [004924]

Exercice 5384 *

Que vaut l'excentricité de l'hyperbole équilatère (une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires) ?

Correction ▼ [005549]

Exercice 5385 ***

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole équilatère de centre O et P et Q deux points de $(\mathscr{H})$ symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe $(\mathscr{H})$ en trois points formant un triangle équilatéral de centre P.

Correction ▼ [005551]

Exercice 5386 ***

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole équilatère de centre O et P et Q deux points de $(\mathscr{H})$ symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe $(\mathscr{H})$ en trois points formant un triangle équilatéral de centre P.

Correction ▼ [005823]

217 243.04 Quadrique

Exercice 5387 Étude d'équations

Déterminer les natures des surfaces d'équation :

1. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0$.
2. $(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)=0$.
3. $x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx+4=0$.
4. $x^2-2y^2-z^2+2xz-4yz+3=0$.
5. $2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz+4x-2y-z+3=0$.
6. $xy+xz+yz+1=0$.
7. $2x^2+2y^2-z^2+5xy-yz+xz=0$.
8. $xy+yz=1$.
9. $x^2+4y^2+5z^2-4xy-2x+4y=0$.
   On fera le minimum de calculs nécéssaires pour pouvoir conclure.

Correction ▼ [004925]

Exercice 5388 Repère non orthonormé

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+2gx+2hy+2iz+j=0$ dans un repère non orthonormé. Montrer que c'est quand même une quadrique. [004926]

Exercice 5389 Centre de symétrie

Soit $\mathscr{S}$ une quadrique d'équation $f(x,y,z)=0$. On note q la forme quadratique associée à f.

1. Montrer que, pour tout point A et tout vecteur $\vec{h}$, on a : $f(A+\vec{h})=f(A)+(\vec{\nabla}f(A)\mid\vec{h})+q(\vec{h})$.
2. On suppose que $\mathscr{S}$ n'est pas incluse dans un plan. Montrer qu'un point Ω est centre de symétrie de $\mathscr{S}$ si et seulement si $\vec{\nabla}f(\Omega)=\vec{0}$.
3. En déduire que si 0 n'est pas valeur propre de la matrice de q, alors $\mathscr{S}$ admet un centre unique.

[004927]

Exercice 5390 Cône s'appuyant sur une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équations : $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ et $\Omega=(x_0,y_0,z_0)$ avec $z_0\neq 0$. On note $\mathscr{C}$ le cône de sommet Ω engendré par $\mathscr{E}$.

1. Chercher une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

2. Quels sont les points Ω tels que $\mathscr{C} \cap Oyz$ soit un cercle ?

Correction ▼ [004928]

Exercice 5391 Sections circulaires

1. On considère la forme quadratique $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ avec $a \in [b,c]$.
   (a) Montrer qu'il existe $y,z \in \mathbb{R}$ tels que $y^2 + z^2 = 1$ et $by^2 + cz^2 = a$.
   (b) En déduire qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & * \\ 0 & a & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.
2. Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde de centre O. Montrer qu'il existe un plan P qui coupe $\mathscr{E}$ selon un cercle de centre O. Montrer que les sections de $\mathscr{E}$ par des plans parallèles à P sont des cercles.
3. Peut-on généraliser à une quadrique quelconque ?

Correction ▼ [004929]

Exercice 5392 Rotation d'une droite

1. Soit D la droite d'équations $\begin{cases} y = 1 \\ x = \lambda z \end{cases}$ où λ est un réel non nul fixé. Déterminer une équation cartésienne et la nature de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation de D autour de Oz.
2. En déduire que tout hyperboloïde de révolution à une nappe est réunion d'une famille de droites (*surface réglée*).
3. Généraliser à un hyperboloïde à une nappe quelconque.

Correction ▼ [004930]

Exercice 5393 Droites sur un paraboloïde hyperbolique

Soit $\mathscr{P}$ le paraboloïde d'équation $z = xy$. Montrer que par tout point $M \in \mathscr{P}$, il passe deux droites et deux seulement incluses dans $\mathscr{P}$. [004931]

Exercice 5394 Hyperbole en rotation

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations : $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 = 0 \\ x + z = 1. \end{cases}$

1. Déterminer la nature et les éléments remarquables de $\mathscr{C}$.
2. Chercher une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de Oz et reconnaître $\mathscr{S}$.

Correction ▼ [004932]

Exercice 5395 Volume d'un ellipsoïde

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{3z^2}{4} + xz = 1$. Montrer que $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde et en calculer le volume intérieur.

Correction ▼ [004933]

Exercice 5396

Équation d'un cône

Déterminer les réels λ tels que la surface d'équation : $x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) = \lambda$ soit un cône. Préciser alors le sommet et la nature du cône.

Correction ▼ [004934]

Exercice 5397 Plan tangent à un ellipsoïde

Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ et P un plan d'équation $ux+vy+wz=1$. Montrer que P est tangent à E si et seulement si $a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1$. [004935]

Exercice 5398 Normale à un ellipsoïde

Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, M un point de $\mathscr{E}$, et P,Q,R les intersections de la normale en M à $\mathscr{E}$ avec les plans Oyz, Oxz, Oxy. Montrer que $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$ sont dans un rapport constant (indépendant de M).

Correction ▼ [004936]

Exercice 5399 Points équidistants de deux droites

Soient D,D' deux droites non coplanaires et $\mathscr{S}$ l'ensemble des points équidistants de D et D'. Montrer que $\mathscr{S}$ est un paraboloïde hyperbolique. (Utiliser un repère judicieux) [004937]

Exercice 5400 $MF=eMH$

On considère un point F, un plan P ne passant pas par F et un réel $e>0$. Montrer que l'ensemble, $\mathscr{S}$, des points M tels que $MF=ed(M,P)$ est une quadrique de révolution. Préciser les différents cas possibles. [004938]

Exercice 5401 $MF=ed(M,D)$

Dans l'espace, on considère un point F, une droite D ne passant pas par F et un réel $e>0$. Montrer que l'ensemble, $\mathscr{S}$, des points M tels que $MF=ed(M,D)$ est une quadrique. Préciser les différents cas possibles.

Correction ▼ [004939]

Exercice 5402 $d(M,P)^2+d(M,D)^2=\text{cste}$

On considère un plan P et une droite D sécants. Déterminer le lieu des points M tels que $d(M,P)^2+d(M,D)^2=a$ (constante fixée).

Correction ▼ [004940]

Exercice 5403 Points équidistants d'un plan et d'une droite

Dans l'espace, soit P le plan d'équation $z=0$ et D la droite d'équations : $\begin{cases} y=0 \\ x\cos\theta-z\sin\theta=0. \end{cases}$ $(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2})$

Quel est le lieu des points M tels que $d(M,P)=d(M,D)$?

Correction ▼ [004941]

Exercice 5404 Sphères équidistantes d'une sphère et d'un plan

Dans l'espace, on considère un plan P et une sphère S. Quel est le lieu des centres des sphères tangentes à S et à P ?

Correction ▼ [004942]

Exercice 5405 Appellations incontrolées

La liste des quadriques semble comporter des oublis : paraboloïde parabolique, cône hyperbolique,...Dresser la liste de toutes les surfaces oubliées et constater qu'elles sont connues sous d'autres appellations. [004943]

Exercice 5406 ** I

Nature et « éléments caractéristiques » de la quadrique $(\mathscr{S})$ dont une équation dans un repère orthonormé donné $\mathscr{R} = (O, i, j, k)$ de l'espace de dimension 3 est :

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4x + 4y - 1 = 0$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$.
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$.
4. $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$.
5. $x^2 - 4x - 3y - 2 = 0$.
6. $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$.
7. $(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y) = 0$.
8. $xy + yz = 1$.
9. $xy + yz + zx + 2y + 1 = 0$.

Correction ▼ [005825]

Exercice 5407 **

Déterminer la quadrique contenant le point $A(2,3,2)$ et les deux paraboles $(\mathscr{P})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} z=0 \\ y^2=2x \end{array}\right.$ et $(\mathscr{P}')$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y^2=2z \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005826]

Exercice 5408 ***

Démontrer que toute équation du second degré symétrique en x, y et z est l'équation d'une surface de révolution (une surface $(\mathscr{S})$ est dite de révolution d'axe $(\mathscr{D})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ est invariante par toute rotation d'axe $(\mathscr{D})$).

Correction ▼ [005827]

Exercice 5409 ***

Former l'équation de la surface de révolution $(\mathscr{S})$ engendrée par la rotation de la droite $(\mathscr{D})$ $\left\{\begin{array}{l} x=z+2 \\ y=2z+1 \end{array}\right.$ autour de la droite (Δ) d'équations $x = y = z$. Quelle surface obtient-on ?

Correction ▼ [005828]

Exercice 5410 ***

Equation du cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$ dans les cas suivants :

1. $S(0,0,0)$ et $(\mathscr{C}) : x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ t \in \mathbb{R}^*$.
2. $S(1,-1,0)$ et $(\mathscr{C}) : \left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x^2+y^2=z \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005829]

Exercice 5411 ***

Trouver une équation du cône de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$ quand

1. $S(0,5,0)$ et $(\mathscr{S}) : x^2 + y^2 + z^2 = 9$,
2. $S(0,0,0)$ et $(\mathscr{S}) : x^2 + xy + z - 1 = 0$. (Préciser la courbe de contact.)

(**Définitions.** Le cône $(\mathscr{C})$ de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$ est la réunion des tangentes à $(\mathscr{S})$ passant par S. D'autre part, une droite est tangente à la surface $(\mathscr{S})$ en un point M si et seulement si elle passe par M et est contenue dans le plan tangent à $(\mathscr{S})$ en M).

Correction ▼ [005830]

Exercice 5412 ***

Pour quelles valeurs de λ la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)-\lambda=0$ est-elle un cône du second degré ? En préciser alors le sommet et une directrice.

Correction ▼ [005831]

Exercice 5413 *

Montrer que l'arc paramétré $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}e^t(\cos t-\sin t) \\ y=\frac{1}{2}e^t(\cos t+\sin t) \\ z=e^t \end{array}\right.$ est tracé sur un cône du second degré de sommet O.

Correction ▼ [005832]

Exercice 5414 ***

Equation cartésienne du cylindre $(\mathscr{C})$ de direction $\overrightarrow{u}$ et de directrice (C) dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}(1,0,1)$ et (C) : $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=a\sin t\cos t$ (a et b tous deux non nuls).
2. $\overrightarrow{u}(0,1,1)$ et (C) : $\left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005833]

Exercice 5415 **

Equation du cylindre $(\mathscr{C})$ de section droite la courbe (C) d'équations $\left\{\begin{array}{l} z=x \\ 2x^2+y^2=1 \end{array}\right.$

Correction ▼ [005834]

Exercice 5416 ** I

Equation cartésienne du cylindre de révolution $(\mathscr{C})$ de rayon R et d'axe $(\mathscr{D})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=z+2 \\ y=z+1 \end{array}\right.$. Déterminer R pour que la droite (Oz) soit tangente au cylindre.

Correction ▼ [005835]

Exercice 5417 *

Trouver les plans tangents à l'ellipsoïde d'équation $x^2+2y^2+3z^2=21$ qui sont parallèles au plan d'équation $x+4y+6z=0$.

Correction ▼ [005836]

Exercice 5418 **

Trouver les plans tangents à la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $x-8yz=0$ et contenant la droite $(\mathscr{D})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} y=1 \\ x+4z+2=0 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005837]

Exercice 5419 ** I

1. Equation du cylindre de révolution $(\mathscr{C})$ d'axe la droite d'équations $x=y+1=3z-6$ et de rayon 3.
2. Equation du cône de révolution $(\mathscr{C})$ d'axe la droite d'équations $x=y+1=3z-6$, de sommet $S(0,-1,2)$ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{3}$.

Correction ▼ [005838]

218 243.99 Autre

Exercice 5420

Soit $\mathscr{E} = \left\{ M(z)/2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = 1 \right\}$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $\mathscr{E}' = R(\mathscr{E})$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{E}'$ et en déduire le tracé de $\mathscr{E}$. [002068]

Exercice 5421

1. $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$
2. $xy + 3x + 5y - 4 = 0$
3. $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$

[002069]

Exercice 5422 Équations du second degré

Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé :

1. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 35x - 20y = 0.$
2. $5x^2 + 7y^2 + 2xy\sqrt{3} - (10 + 2\sqrt{3})x - (14 + 2\sqrt{3})y - 4 + 2\sqrt{3} = 0.$
3. $x^2 + xy + y^2 = 1.$
4. $x^2 + 2y^2 + 4xy\sqrt{3} + x + y\sqrt{3} + 1 = 0.$
5. $mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$ $(m \in \mathbb{R})$.

Correction ▼ [004900]

Exercice 5423 Courbe paramétrée

Montrer que le support de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$ est une ellipse, et en préciser les éléments.

Correction ▼ [004901]

Exercice 5424 Points alignés avec le foyer

Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer F, directrice D, excentricité e. On considère deux points de $\mathscr{C}$, $M \neq M'$ alignés avec F. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M et M' se coupent sur D ou sont parallèles.

Correction ▼ [004902]

219 244.01 Courbes paramétrées

Exercice 5425

Tracer les courbes paramétrées suivantes

$$x(t) = \cos^2(t) \qquad y(t) = \cos^3(t)\sin(t)$$

$$x(t) = \frac{t}{1+t^4} \qquad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$$

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \qquad y(t) = t + \frac{1}{t}$$

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y(t) = t\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x(t) = \tan(t) + \sin(t) \qquad y(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$x(t) = \sin(2t) \qquad y(t) = \sin(3t)$$

[002046]

Exercice 5426

On fait rouler sans glissement un cercle de rayon 1 sur l'axe (Ox). Déterminer et tracer la courbe décrite par un point du cercle. [002047]

Exercice 5427

Tracer la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ en la coupant par les droites $y = tx$ où $t \in \mathbb{R}$. [002048]

Exercice 5428

Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = \int_0^t \cos(2u)\sin(u)du, \quad y(t) = \int_0^t \sin(2u)\cos(u)du.$$

[002049]

Exercice 5429

Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = t^2 + 2t, y(t) = \frac{1+2t}{t^2}.$$

[002050]

Exercice 5430

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, donner des équations paramétriques pour une droite ; un cercle ; une ellipse ; une hyperbole ; une parabole. [002699]

Exercice 5431

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer la tangente en tout point, les points d'inflexion et de rebroussement, les branches infinies, les points doubles ; construire et tracer la courbe.

1. $x = \sin 4t, \quad y = \cos 3t$;
2. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$;
3. $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$;
4. $x = \cos t, \quad y = \dfrac{\sin^2 t}{2 + \sin t}$;
5. $x = \dfrac{t^3}{1-t^2}, \quad y = \dfrac{1+t}{(1-t)^2}$;
6. $x = \cos^3 t + \sin t, \quad y = \sin^3 t + \cos t$;
7. $x = 3\cos t - 2\sin^3 t, \quad y = \cos 4t$.

[002700]

Exercice 5432

On considère l'ensemble Γ des points du plan
(x,y) qui vérifient $0 < x < 2$ et $x = 2\sin(y/x)$.
Montrer

que c'est un arc dont on trouvera une représentation paramétrique. Construire Γ.

[002701]

Exercice 5433

On considère l'arc paramétré du plan défini par

$$x = \frac{t^2+1}{t^3-1}, \quad y = \frac{2t}{t^3-1}.$$

Étudier ses branches infinies. Trouver ses points d'inflexion et montrer qu'ils sont alignés. Tracer l'arc. [002702]

Exercice 5434

Soit l'arc paramétré défini par

$$x = \frac{t-\sin t}{t^2}, \quad y = \frac{1-\cos t}{t^2}.$$

Montrer qu'il peut être prolongé continûment pour tout $t \in \mathbb{R}$ et qu'il possède un axe de symétrie. Montrer qu'il possède une infinité de points de rebroussement situés sur un même cercle, et que les tangentes en ces points sont concourantes. Tracer l'arc. [002703]

Exercice 5435

Épicycloïdes, hypocycloïdes -

Soit $R > 0$ un réel, et C_R le cercle de centre O et de rayon R dans le plan.

1. On considère le cercle γ de rayon 1 tangent extérieurement à C_R en $A = (R, 0)$; on fait rouler γ le long de C_R sans glisser. Trouver des équations paramétriques de l'ensemble Γ_R des points occupés par A. Dans quels cas cet ensemble est-il un arc ? Sinon quel est-il ?
2. On suppose à présent que $R > 1$ et que γ est tangent intérieurement à C_R ; mêmes questions sur l'ensemble Γ'_R ainsi construit.
3. Tracer Γ_R et Γ'_R pour $R = 6$ et $R = 8/3$.

[002704]

Exercice 5436

Montrer que les deux droites de l'espace d'équations paramétriques $x = 2+2t, y = 2+4t, z = 2-4t$ et $x = 4+t, y = 6+2t, z$ sont identiques. [002705]

Exercice 5437

Montrer que la courbe de l'espace d'équations paramétriques

$$x = 4\sqrt{2}\cos t, \quad y = t + 2\sin t, \quad z = -2\cos t$$

est plane. [002706]

Exercice 5438

Hélice -

Étudier la courbe paramétrée de l'espace définie par

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t.$$

Tracer ses projections orthogonales sur les trois plans xOy, yOz, xOz. Montrer que la projection de cette courbe sur le plan xOy parallèlement à la direction d'une de ses tangentes est une cycloïde.

[002707]

Exercice 5439

Trouver en tout point l'équation du plan osculateur à la courbe

$$x = \frac{t^3}{t^2+1}, \quad y = \frac{t^2}{t^2+1}, \quad z = \frac{t}{t^2+1}.$$

[002708]

Exercice 5440

On considère l'arc de l'espace défini en coordonnées paramétriques par

$$M(t): \qquad x = t^3, \quad y = t^2, \quad z = t.$$

Déterminer l'intersection $\mu(t)$ de sa tangente en $M(t)$ avec le plan osculateur en $O = M(0)$, et montrer que la tangente à l'arc $t \mapsto \mu(t)$ n'est autre que l'intersection des plans osculateurs en O et en $M(t)$. [002709]

Exercice 5441

Loxodromie de sphère -

On considère la courbe paramétrique de l'espace définie par

$$x = \cos(k \log \sin t) \sin t, \quad y = \sin(k \log \sin t) \sin t, \quad z = \cos t,$$

pour $0 < t < \pi$, où $k > 0$ est un réel fixé.

1. Montrer qu'elle est tracée sur une sphère de centre O, et qu'elle est symétrique par rapport à O. Montrer qu'elle possède deux points limites que l'on précisera.
2. Calculer sa tangente en tout point. Montrer qu'elle fait un angle constant avec les méridiens de la sphère, angle que l'on déterminera en fonction de k.
3. Tracer les projections de la courbe sur les trois plans xOy, yOz et xOz. Quelle est l'allure de cette courbe dans l'espace ?

[002710]

Exercice 5442

Étudier la courbe définie par

$$\theta = t - 2\sin t, \qquad \rho = \tan t$$

Trouver asymptotes et points doubles. [002716]

Exercice 5443

Construire la courbe ayant pour équation implicite $(x^2+y^2)^2 - ax(x^2+2y^2) = 0, (a > 0)$.

[002717]

Exercice 5444 Rebroussements

Étudier les points stationnaires des courbes paramétrées suivantes :

1. $x = \sin t, \quad y = \frac{\cos^2 t}{2-\cos t}$. (Bicorne)
2. $x = (1+\cos^2 t)\sin t, \quad y = \sin^2 t \cos t$.
3. $x = (1+\cos t)\sin 2t, \quad y = \cos 2t$.
4. $x = 2t^3 + 3t^2, \quad y = 3t^2 + 6t$.
5. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^3 - t^2 - t + 1$.

[004982]

Exercice 5445 Branches infinies

Étudier les branches infinies des courbes paramétrées suivantes :

1. $x=t^5-t^3+\frac{t}{4}, \quad y=\frac{3t}{3t^2+1}$.
2. $x=2\cos^2 t+\ln|\sin t|, \quad y=\sin 2t$.
3. $x=\sqrt{\frac{t^2-2}{t^4-1}}, \quad y=tx$. L'aire comprise entre la courbe et ses asymptotes est-elle finie ?
4. $x=\frac{t^3-t}{2t-1}, \quad y=tx$.
5. $x=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}, \quad y=\frac{1}{t}+\frac{1}{(t+1)^2}$.
6. $x=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}, \quad y=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}$.
7. $x=\frac{3t}{1+t^3}, \quad y=tx$.
8. $x=\frac{te^t}{t+1}, \quad y=\frac{e^t}{t+1}$.
9. $x=2t^3+3t^2, \quad y=3t^2+6t$.
10. $x=t^3-3t, \quad y=t^3-t^2-t+1$.
11. $x=\frac{t}{t^2-1}, \quad y=\frac{t^2}{t-1}$.

[004983]

Exercice 5446 Inflexions

Déterminer les points d'inflexion des courbes paramétrées suivantes :

1. $x=\sin t, \quad y=\frac{\cos^2 t}{2-\cos t}$. (Bicorne)
2. $x=\sin\frac{t}{2}, \quad y=\tan t$.
3. $x=\frac{e^t}{t}, \quad y=te^t$.
4. $x=\sin t\cos 2t, \quad y=\cos t\sin 2t$.

Correction ▼ [004984]

Exercice 5447 Matexo

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations paramétriques : $x(t)=\frac{t^2+1}{t^3-1}, y(t)=\frac{2t}{t^3-1}$.

1. Montrer que les points de paramètres t,u,v (distincts) sont alignés si et seulement si $tuv=t+u+v+1$.
2. Prouver que $\mathscr{C}$ admet exactement trois points d'inflexion et qu'ils sont alignés.

Correction ▼ [004985]

Exercice 5448 Construction

Construire la courbe d'équations paramétriques : $x=\frac{t}{t^2-1}, y=\frac{t^2}{t-1}$.
Déterminer les coordonnées du point double et vérifier que les tangentes en ce [004986]

Exercice 5449 Construction

Dessiner la courbe d'équation cartésienne : $x^3+y^3=3xy$ (folium de Descartes) On prendra $t=\frac{y}{x}$ comme paramètre. [004987]

Exercice 5450 Construction

Construire les courbes d'équation polaire :

1. $\rho=\frac{\cos(\theta/2)}{1+\sin\theta}$.

2. $\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$. (Strophoïde, calculer l'aire limitée par la boucle)
3. $\rho = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}$. Vérifier que la courbe traverse ses asymptotes au point double.
4. $\rho = \frac{1}{\cos\theta + \sin 2\theta}$.
5. $\rho = \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}$.
6. $\rho = \frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta - 1}$.
7. $\rho = \cos\frac{\theta}{3}$.
8. $\rho = 1 + \sin 3\theta$.
9. $\rho = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$.
10. $\rho = \ln\theta$.

[004988]

Exercice 5451 Strophoïde

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon 1, $A \in \Gamma$, et D le diamètre de Γ perpendiculaire à (OA).
Pour $M \in \Gamma \setminus \{A\}$, on construit le point N intersection de D et (AM), puis le point P tel que $\vec{AP} = \vec{MN}$.

[004989]

Exercice 5452 Cochléoïde

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $\rho = \frac{\sin\theta}{\theta}$ (cochléoïde)
2. Une droite passant par O coupe $\mathscr{C}$ en un certain nombre de points. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points sont concourantes.

Correction ▼ [004990]

Exercice 5453 Chimie P 91

Soient O et A deux points distincts dans un plan $\mathscr{P}$. Déterminer le lieu des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $\overline{(\vec{OA}, \vec{AM})} \equiv 3\overline{(\vec{OA}, \vec{OM})} (\mathrm{mod}\, \pi)$.

Correction ▼ [004991]

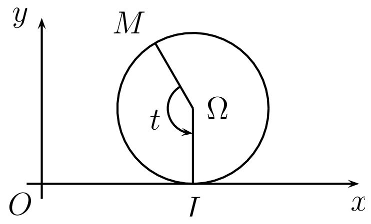
Exercice 5454 Ensi Chimie P' 93

Déterminer les points doubles de la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{\theta}{\theta^2 - 1}$.

Correction ▼ [004992]

Exercice 5455 Quelques grands classiques

1. (**) **L'astroïde.**
   (a) a est un réel strictement positif donné. Etudier et construire la courbe de paramétrisation : $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right.$.
   (b) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de la tangente au point courant $M(t)$ avec respectivement (Ox) et (Oy). Calculer la longueur $A(t)B(t)$.
2. (**) **La cycloïde.**
   (a) Un cercle $(\mathscr{C})$, de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et (Ox) et on note Ω le centre de $(\mathscr{C})$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $(\mathscr{C})$ (M est mobile, mais solidaire de $(\mathscr{C})$). On pose $t = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$.



Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point M (on prendra t pour paramètre).

(b) Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R(t-\sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.

3. (**) **Une courbe de** LISSAJOUS. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{array}\right.$

4. (**) **La lemniscate de** BERNOULLI. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{array}\right.$

5. (***) **Les tractrices.**

   (a) Trouver les trajectoires orthogonales à la famille des cercles de rayon R ($R > 0$ donné) et centrés sur (Ox).

   (b) Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R(\ln|\tan\frac{t}{2}| + \cos t) \\ y = R\sin t \end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.

Correction ▼ [005523]

Exercice 5456

Construire les courbes de paramétrisations :

1. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \\ y = \frac{t^2}{t^2-1} \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x = (t+2)e^{1/t} \\ y = (t-2)e^{1/t} \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} x = (t-1)\ln(|t|) \\ y = (t+1)\ln(|t|) \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t}{t^2-1} \\ y = \frac{t+2}{(t-1)^2} \end{array}\right.$
6. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{array}\right.$
7. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{array}\right.$
8. $\left\{\begin{array}{l} x = t^2+t^3 \\ y = t^2+t^3-2t^4-2t^5 \end{array}\right.$

Correction ▼ [005524]

Exercice 5457

La courbe orthoptique d'une courbe $(\mathscr{C})$ est le lieu des points du plan d'où l'on peut mener (au moins) deux tangentes à $(\mathscr{C})$, orthogonales. Déterminer l'orthoptique de $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

1. $(\mathscr{C})$ est un astroïde de paramétrisation $\left\{\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right.$, $a>0$ donné.
2. $(\mathscr{C})$ est l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x=t^2-2t \\ y=2t^3-3t^2 \end{array}\right.$.
3. $(\mathscr{C})$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a,b)\in]0,+\infty[^2$.

Correction ▼ [005525]

Exercice 5458

Trouver les droites à la fois tangentes et normales à l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x=3t^2 \\ y=4t^3 \end{array}\right.$ [005526]

Exercice 5459

Dans chacun des cas suivants, trouver une paramétrisation rationnelle de la courbe proposée puis construire

$$1)\ x(y^2-x^2)=2y^2-x^2 \quad 2)\ x^3-y^3+xy-2x+2y+3=0$$

[005527]

Exercice 5460

Trouver une équation cartésienne des supports des arcs suivants :

1. $\left\{\begin{array}{l} x=t^2 \\ y=-t^2 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x=t^2 \\ y=t^3 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{t}{1+t^4} \\ y=\frac{t^3}{1+t^4} \end{array}\right.$

[005528]

Exercice 5461

Représenter les courbes d'équation cartésienne $y=f(x)$, donner l'équation de leur tangente au point d'abscisse $x=0$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente, pour :

1. $f(x)=\sin^2 x+\cos x$
2. $f(x)=x+\ln(1+e^x)$

Correction ▼ Vidéo ■ [006981]

Exercice 5462

1. Donner une paramétrisation $(x(t),y(t))$ de la courbe d'équation
$$y=\sqrt{-x^2-3x+4}$$
en précisant le domaine de variation du paramètre t.
2. Montrer que le support de la courbe paramétrée par
$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos t+3 \\ y(t)=\sin t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$$
ne peut pas être décrit par une équation de la forme $y=f(x)$.

3. Montrer que le support de la courbe paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos^2 t-2 \\ y(t)=\sin^4 t+4\sin^2 t+4 \end{array}\right. \qquad (t\in\mathbb{R})$$

est le graphe d'une fonction f que l'on précisera, ainsi que son domaine de définition.

Correction ▼ Vidéo ■ [006982]

Exercice 5463

Étudier et tracer les courbes paramétrées suivantes :

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos^3 t \\ y(t)=\sin^3 t \end{array}\right.$ *(L'astroïde)*
2. $\left\{\begin{array}{l} x(t)=t-\operatorname{th} t \\ y(t)=\frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=1-\cos t \end{array}\right.$ *(La cycloïde)*

Correction ▼ Vidéo ■ [006983]

Exercice 5464

Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=t\ln t \\ y(t)=\frac{\ln t}{t} \end{array}\right. \qquad (t\in]0;+\infty[)$$

1. Comparer les points de paramètres t et $1/t$, en déduire un domaine d'étude de $\mathscr{C}$.
2. Représenter $\mathscr{C}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [006984]

Exercice 5465

Montrer que la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\frac{1}{t^2-t} \\ \\ y(t)=\frac{t}{t^2-1} \end{array}\right.$$

possède un point double et que les tangentes en ce point sont perpendiculaires.

Correction ▼ Vidéo ■ [006985]

Exercice 5466

Montrer que la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\frac{4t-3}{t^2+1} \\ \\ y(t)=\frac{2t-1}{t^2+2} \end{array}\right.$$

admet un unique point singulier, et tracer l'allure de la courbe au voisinage de ce point.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006986]

Exercice 5467

On considère la courbe paramétrée définie par

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=t+\frac{4}{t} \\ \\ y(t)=\frac{t}{3}+2+\frac{3}{t+1} \end{array}\right.$$

1. Dresser le tableau de variations conjointes de x et y.
2. Calculer les tangentes horizontales, verticales et les asymptotes.
3. Trouver le point singulier de la courbe, étudier son type et écrire l'équation de la tangente à la courbe en ces points.
4. Tracer la courbe.

Correction ▼ Vidéo ■ [006987]

Exercice 5468

Trouver les droites à la fois tangentes et orthogonales à la courbe

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 4t^3 \end{cases}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006988]

220 244.02 Coordonnées polaires

Exercice 5469

Tracer les courbes en polaires suivantes

$$\rho(\theta) = \sin(2\theta)$$

$$\rho(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

$$\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}$$

$$\rho(\theta) = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$$

$$\rho(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}$$

[002051]

Exercice 5470

Soit C un cercle du plan de centre $(1,0)$ et de rayon a. Déterminer et tracer le lieu des projetés orthogonaux de O sur les tangentes de C. [002052]

Exercice 5471

Déterminer et tracer les courbes dont la tangente en tout point M fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec $\overrightarrow{OM}$. [002053]

Exercice 5472

Grâce aux coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par la relation $2xy(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$. [002054]

Exercice 5473

Tracer la courbe d'équation polaire :

$$r = 1 + \cos\theta.$$

[002055]

Exercice 5474

Tracer les courbes d'équations polaires :

$$r = \frac{\tan\theta}{\cos\theta} \ ; \ r^2 = \frac{1}{\sin(2\theta)}.$$

[002056]

Exercice 5475

1. Montrer qu'un cercle C de diamètre a et passant par le pôle O peut être représenté en coordonnées polaires par l'équation $\rho = a\cos(\theta-\theta_0)$. On considère un réel $b>0$ et la conchoïde de C de valeur b, c'est-à-dire la courbe Γ définie comme suit : à tout point P de C, on associe le point M situé sur la demi-droite OP, du côté opposé à O par rapport à P et tel que $PM = b$; Γ est le lieu des points M. Donner une équation polaire de Γ. Construire Γ en distinguant quatre cas : $a>b$, $a=b$, $a<b<2a$ et $b \geqslant 2a$. Déterminer en particulier les points d'inflexion dans chaque cas.
2. En s'inspirant de la question précédente, tracer les conchoïdes d'une droite $\rho = a/\cos(\theta-\theta_0)$.

[002711]

Exercice 5476

Étudier en fonction des paramètres $a,b>0$ les courbes d'équation $\rho = a/(1+b\cos\theta)$ (en particulier branches infinies, position par rapport aux asymptotes). Montrer que ce sont des coniques, et en déterminer les foyers. [002712]

Exercice 5477

Étudier et tracer les courbes définies en coordonnées polaires ci-après ; s'il y a des branches infinies, les préciser, et préciser la position de la courbe par rapport aux éventuelles asymptotes ; trouver aussi les points doubles :

rosace à quatre branches	ρ	$=$	$a\sin 2\theta$
	ρ	$=$	$\sin\theta+\cos\frac{\theta}{2}$
strophoïde droite	ρ	$=$	$a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$
	ρ	$=$	$1+2\cos\frac{3\theta}{2}$
scarabée	ρ	$=$	$5\cos 2\theta-3\cos\theta$
courbe du diable	ρ^2	$=$	$49+\frac{1}{\cos 2\theta}$
spirale d'Archimède	ρ	$=$	$a\theta$
	ρ	$=$	$\theta+1/\theta$ (asymptote ?)
spirale parabolique	θ	$=$	$(\rho-1)^2$
cochléoïde	ρ	$=$	$a\frac{\sin\theta}{\theta}$
courbe du spiral	ρ	$=$	$\frac{a}{1+e^{\theta/5}}$
	ρ	$=$	$\frac{1-2\cos\theta}{1+\sin\theta}$ (parabole asymptote)
épi	ρ	$=$	$\frac{a}{\sin(5\theta/3)}$

[002713]

Exercice 5478

Une *spirale logarithmique* est une courbe d'équation en coordonnées polaires $\rho=ae^{k\theta}$. Montrer qu'elle coupe ses rayons vecteurs suivant un angle constant, qu'on déterminera en fonction de k. [002714]

Exercice 5479

Montrer que la courbe définie par

$$\rho=1+\tan\frac{\theta}{2}$$

admet une asymptote ; préciser la position de la courbe par rapport à elle. [002715]

Exercice 5480 Courbes en polaires

Construire les courbes en polaires suivantes :

1. $\rho=\dfrac{\cos\theta/2}{1+\sin\theta}$
2. $\rho=\dfrac{\cos 2\theta}{\cos}\theta$
3. $\rho=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta-1}$
4. $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin 2\theta}$
5. $\rho=\cos\theta+\dfrac{1}{\cos}\theta$
6. $\rho=\dfrac{\cos 2\theta}{2\cos\theta-1}$

7. $\rho = \cos\dfrac{\theta}{3}$
8. $\rho = 1+\sin 3\theta$
9. $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$
10. $\rho = \ln\theta$
11. $\rho = \frac{\sin\theta}{\theta}$

Correction ▼ [004993]

Exercice 5481 ***

Construire l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant $r = \frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}}$ (commencer par étudier toutes les symétries de l'ensemble considéré).

Correction ▼ [005205]

Exercice 5482

Construire les courbes suivantes :

1. $r=\sqrt{\cos(2\theta)}$,
2. $r=\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$,
3. $r=ae^{b\theta}$, $(a,b)\in]0,+\infty[^2$,
4. $r=2\cos(2\theta)+1$,
5. $r=\tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.

Correction ▼ [005530]

Exercice 5483

Etude complète de la courbe d'équation polaire $r=\frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$.

Correction ▼ [005531]

Exercice 5484 La cardioïde

Soit la courbe d'équation polaire $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$.

1. Construire la courbe.
2. Longueur et développée.

Correction ▼ [005532]

Exercice 5485

Construire la courbe d'équation cartésienne $x^2(x^2+y^2)-(y-x)^2=0$ après être passé en polaires .

Correction ▼ [005533]

Exercice 5486

Développée de la spirale logarithmique d'équation polaire $r=ae^{\theta}$ $(a>0)$.

Correction ▼ [005534]

Exercice 5487

Étudier les courbes d'équations polaires suivantes :

1. $r(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{\tan(2\theta)}}$ pour $\theta\in]0,\frac{\pi}{4}[$
2. $r(\theta)=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ pour $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *(La cissoïde droite)*

3. $r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$ *(La lemniscate de Bernoulli)*

Correction ▼ Vidéo ■ [006989]

Exercice 5488

On considère les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ *(des limaçons de Pascal)* respectivement données en polaires par

$$r_1(\theta) = 1 + \cos\theta \qquad r_2(\theta) = 3 + \cos\theta$$

Pour $i = 1,2$, on note $N_i(\theta)$ la droite orthogonale au point $M_i(\theta) \in \mathscr{C}_i$. Vérifier que pour tout $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, les droites $N_1(\theta)$ et $N_2(\theta)$ sont sécantes, en un point $P(\theta)$. Déterminer le lieu du point P quand θ varie.

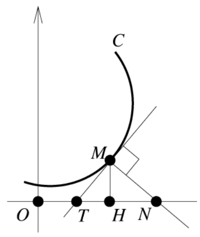
Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006990]

---

221 244.03 Courbes définies par une condition

Exercice 5489 Sous-tangente, sous-normale

Soit $\mathscr{C}$ une courbe du plan. A un point M un point de $\mathscr{C}$, on associe les points H, T et N selon le dessin :



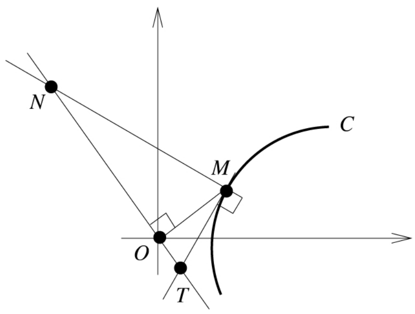
Déterminer les courbes d'équation $y = f(x)$ vérifiant la condition suivante :

1. $\overline{HT} = \text{cste}$.
2. $\overline{HN} = \text{cste}$.
3. $MN = \text{cste}$.
4. $MT = \text{cste}$.
5. $AN = MN$ où A est le point de coordonnées $(0,a)$.

Correction ▼ [004994]

Exercice 5490 Sous-tangente, sous-normale

Soit $\mathscr{C}$ une courbe du plan. A un point M un point de $\mathscr{C}$, on associe les points T et N selon le dessin :



Déterminer les courbes vérifiant la condition suivante :

1. $\overline{OT} = \text{cste}$.
2. $\overline{ON} = \text{cste}$.

Correction ▼ [004995]

Exercice 5491 Milieu fixe

Soit D une droite du plan et $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée. Pour $M \in \mathscr{C}$ on note T et N les points d'intersection de D avec la tangente et la normale à $\mathscr{C}$ en M. Déterminer $\mathscr{C}$ telle que le milieu de $[T,N]$ reste fixe.
$\left(\text{On paramètrera } \mathscr{C} \text{ par } t = \frac{y'}{x'}\right)$

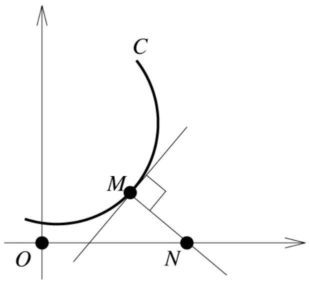
Correction ▼ [004996]

Exercice 5492 Distance TN constante

Soit D une droite du plan et $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée. Pour $M \in \mathscr{C}$ on note T et N les points d'intersection de D avec la tangente et la normale à $\mathscr{C}$ en M. Déterminer $\mathscr{C}$ telle que la distance TN reste constante.
$\left(\text{On paramètrera } \mathscr{C} \text{ par } t = \frac{y'}{x'}\right)$

Correction ▼ [004997]

Exercice 5493 Ensi Chimie P' 93



Trouver les courbes $\mathscr{C}$ telles que $MN = ON$.

Correction ▼ [004998]

Exercice 5494 Ensi Physique P 94

Trouver les arcs biréguliers du plan dont le cercle osculateur est en tout point tangent à une droite fixe.

Correction ▼ [004999]

Exercice 5495 L'homothétique du cercle osculateur reste tangent à Ox

Déterminer les courbes planes telles que l'image du cercle osculateur en un point M par l'homothétie de centre M et de rapport 2 reste tangente à Ox.
On prendra φ comme paramètre et on cherchera une équation différentielle sur le rayon de courbure R.

Correction ▼ [005000]

Exercice 5496 Ensi P 91

On se place dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Donner l'ensemble des trajectoires orthogonales de la famille des cercles de rayon constant a $(a > 0)$ centrés sur Ox.

Correction ▼ [005001]

Exercice 5497 Équations intrinsèques

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On étudie les courbes planes paramétrées par une abscisse curviligne, s, telles que la courbure au point M_s soit $c = f(s)$.

1. Montrer que si l'on impose la position de M_0 et la tangente en ce point, le problème admet une solution unique.
2. Dans le cas général, démontrer que les courbes solutions se déduisent d'une courbe particulière en appliquant un déplacement du plan arbitraire.
3. Étudier les équations : $c = \text{cste}$, $c = \frac{1}{s}$ (spirale logarithmique).

[005002]

Exercice 5498 Équations intrinsèques

Chercher les courbes planes vérifiant l'équation intrinsèque :

1. $R = s$.
2. $Rs = 1$.
3. $R^2 = 2as$, $a > 0$ donné.
4. $R = 1 + s^2$.
5. $R^2 + s^2 = a^2$.

Correction ▼ [005003]

Exercice 5499 I reste sur un cercle

Trouver les courbes planes $\mathscr{C}$ telles que le centre de courbure reste sur un cercle $\mathscr{C}(O, r)$ fixe. (On prendra φ comme paramètre)

Correction ▼ [005004]

Exercice 5500 $M - s/2M'$ reste sur Ox

Soit $\mathscr{C}$ une courbe plane et s une abscisse curviligne sur $\mathscr{C}$. A chaque point $M \in \mathscr{C}$ d'abscisse curviligne s, on associe le point $N = M - \frac{s}{2}\vec{T}$. Trouver $\mathscr{C}$ telle que N reste sur Ox.

Correction ▼ [005005]

Exercice 5501 $MC = kMN$

Trouver les courbes Γ du plan ayant la propriété suivante : Soit $M \in \Gamma$, C le centre de courbure de Γ en M et N le projeté de O sur la normale à Γ en M. Alors $\vec{MC} = k\vec{MN}$ où k est un réel fixé.
Étudier les cas particuliers : $k = 1$, $k = \frac{2}{3}$, $k = 2$, $k = \frac{1}{3}$ et $k = -1$.

Correction ▼ [005006]

Exercice 5502

Soit T l'intersection de (Ox) et de la tangente en M et H le projeté orthogonal de M sur (Ox). Trouver les courbes telles que

1. $MT = a$ ($a > 0$ donné)
2. $HT = a$ (sans rapport avec 1))

[005529]

222 244.04 Branches infinies

Exercice 5503 Branches infinies

Déterminer les branches infinies pour les courbes paramétrées suivantes :

1. $x = 4t^5 - 4t^3 + t$, $y = \dfrac{t}{3t^4 + 1}$
2. $x = 2\cos^2 t + \ln|\sin t|$, $y = \sin 2t$
3. $x = \sqrt{\dfrac{t^2 - 2}{t^4 - 1}}$, $y = tx$
4. $x = \dfrac{t^3 - t}{2t - 1}$, $y = tx$
5. $x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{(t+1)^2}$

6. $x = \sin\frac{t}{2}$, $y = \tan t$
7. $x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}$, $y = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$
8. $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = tx$
9. $x = \frac{te^t}{t+1}$, $y = \frac{e^t}{t+1}$
10. $x = 2t^3 + 3t^2$, $y = 3t^2 + 6t$
11. $x = t^3 - 3t$, $y = t^3 - t^2 - t + 1$
12. $x = \frac{t}{t^2-1}$, $y = \frac{t^2}{t-1}$

Correction ▼ [005007]

223 244.05 Points de rebroussement

Exercice 5504 Rebroussements

1. $x = 2t^3 + 3t^2$, $y = 3t^2 + 6t$
2. $x = t^3 - 3t$, $y = t^3 - t^2 - t + 1$
3. $x = \sin t$, $y = \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t}$
4. $x = (1 + \cos^2 t)\sin t$, $y = \sin^2 t \cos t$
5. $x = (1 + \cos t)\sin 2t$, $y = \cos 2t$

Correction ▼ [005008]

224 244.06 Enveloppes

Exercice 5505 Esem 91

Soit $\mathscr{C}$ le cercle : $x^2 + y^2 = 1$. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'angle polaire θ et D_θ la droite passant par M d'angle polaire 2θ. Trouver l'enveloppe des droites D_θ.

Correction ▼ [005009]

Exercice 5506 Ensi Physique 93

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et S un point du plan différent de O. Donner l'enveloppe des normales en M à (SM) lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

Correction ▼ [005010]

Exercice 5507 Cordes sur une parabole

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Chercher l'enveloppe des cordes $[A,B]$ de $\mathscr{P}$ de hauteur $h > 0$ donnée.

Correction ▼ [005011]

Exercice 5508 Cordes sur une parabole

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Pour $A, B \in \mathscr{P}$ distincts, on note C le point d'intersection des tangentes en A et B. Trouver l'enveloppe des droites (AB) lorsque l'aire du triangle ABC reste constante.

Correction ▼ [005012]

Exercice 5509 Cordes sur une parabole

Soient M, M' deux points d'une parabole $\mathscr{P}$ tels que (MM') passe par le foyer F. Quels sont :

1. L'enveloppe des droites (MM') ?
2. Le lieu des milieux des segments $[M,M']$?
3. L'enveloppe des médiatrices de $[M,M']$?

Correction ▼ [005013]

Exercice 5510 Rayons réfléchis sur une parabole

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

1. Un rayon incident arrive suivant une parallèle à Ox et se réfléchit à "l'intérieur" de $\mathscr{P}$ avec le même angle. Trouver l'enveloppe des rayons réfléchis.
2. Même question, mais le rayon incident est parallèle à Oy.

Correction ▼ [005014]

Exercice 5511 Cercle osculateur à une parabole

Soit $\mathscr{P}$ une parabole, $M \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ le cercle osculateur à $\mathscr{P}$ en M. Montrer que, sauf cas particulier, $\mathscr{C}$ recoupe $\mathscr{P}$ en un deuxième point P. Déterminer l'enveloppe des droites (MP).

Correction ▼ [005015]

Exercice 5512 Cordes d'une hyperbole

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyer F. Trouver l'enveloppe des cordes $[P,Q]$ de $\mathscr{H}$ vues depuis F sous un angle droit.

Correction ▼ [005016]

Exercice 5513 Cardioïde

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. Chercher l'enveloppe des droites $D_\theta = (A_\theta\, A_{2\theta})$.

Correction ▼ [005017]

Exercice 5514 Cycloïde

Chercher l'enveloppe d'un diamètre Δ d'un cercle $\mathscr{C}$ roulant sans glisser sur une droite D. Comparer le point caractéristique à la projection orthogonale du point de contact I sur Δ.

Correction ▼ [005018]

Exercice 5515 Hypocycloïde

Soit $\mathscr{C}$ un cercle passant par O centré sur Ox. Pour $M \in \mathscr{C}$, on note D_M la droite symétrique de (OM) par rapport à l'horizontale passant par M. Déterminer l'enveloppe des droites D_M et la construire.

Correction ▼ [005019]

Exercice 5516 Cordes de $\rho = a/\cos(3\theta)$

Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{a}{\cos 3\theta}$, $a > 0$. Chercher l'enveloppe des cordes vues de O sous un angle droit.

Correction ▼ [005020]

Exercice 5517 Perpendiculaire à OM sur une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de centre O, de paramètres a et b. Pour $M \in \mathscr{E}$, soit D la perpendiculaire en M à (OM).

1. Donner les équations paramétriques de l'enveloppe des droites D.

2. Tracer les enveloppes sur ordinateur pour différentes valeurs de a/b.
3. Étudier les points stationnaires de l'enveloppe quand il y en a.

Correction ▼ [005021]

Exercice 5518 $AM \perp D$

Soit D une droite du plan et A un point non élément de D. Soit M un point variable sur D. Trouver l'enveloppe de la normale en M à (AM).

Correction ▼ [005022]

Exercice 5519 Concavité

Soient u, v, w de classe $\mathscr{C}^2$, D_t la droite d'équation : $u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$, et Γ l'enveloppe des droites D_t.

On note : $\delta = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$, et on suppose pour tout t : $\delta\Delta w(t) \neq 0$.

Montrer que Γ tourne sa concavité vers O si et seulement si pour tout t : $\delta\Delta w(t) > 0$. [005023]

225 244.07 Propriétés métriques : longueur, courbure,...

Exercice 5520

Déterminer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x}(1 - \frac{x}{3})$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$. [002059]

Exercice 5521

Déterminer une abscisse curviligne, la longueur et la développée de l'astroïde. [002060]

Exercice 5522

Calculer le rayon de courbure de $\rho(\theta) = \cos(\frac{\theta}{3})$ en fonction de ρ. [002061]

Exercice 5523

Soit $\mathscr{P}$ la parabole $y^2 = x$. Déterminer une équation paramétrée et une équation cartésienne de Γ la développée de $\mathscr{P}$. Tracer Γ. [002062]

Exercice 5524

Soit Γ la courbe $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

1. Tracer cette courbe.
2. Calculer le rayon de courbure.
3. Soient I le centre de courbure en M et H le projeté orthogonal de I sur (OM). Déterminer $\overrightarrow{MH}$.
4. En déduire une construction géométrique de la développée de Γ.

[002063]

Exercice 5525

Soit $M(s)$ un arc C^2 birégulier paramétré par une abscisse curviligne. Soit $\mathscr{R}$ le repère de Frénet $(M(0), \vec{t}(0), \vec{n}(0))$. On note $(X(s), Y(s))$ les coordonnées dans ce repère d'un point $M(s)$ de la courbe.

1. Montrer que si R_0 est le rayon de courbure en $M(0)$ alors $R_0 = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{X^2(s)}{2Y(s)}$.
2. En déduire le rayon de courbure au point $\theta = 0$ de la courbe $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(\frac{\theta}{2})$.

[002064]

Exercice 5526 Calcul de longueur

Déterminer la longueur d'un arc $\overset{\frown}{M_0M_t}$ ou $\overset{\frown}{M_0M_\theta}$ pour les courbes :

1. $x = t - \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t, \quad y = 2\operatorname{ch} t$
2. $\rho = \operatorname{th} \frac{\theta}{2}$.

Correction ▼ [005024]

Exercice 5527 Calcul de longueur

Soit la courbe paramétrée par : $x = 2t^3 + 3t^2, \quad y = 3t^2 + 6t$. Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AO}$ où A est le point de rebroussement.

Correction ▼ [005025]

Exercice 5528 Calcul de longueur

Calculer la longueur totale des courbes suivantes :

1. $x = (1 + \cos^2 t)\sin t, \quad y = \sin^2 t \cos t$.
2. $\rho = \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Correction ▼ [005026]

Exercice 5529 TPE MP 2003

Nature, construction et longueur de la courbe d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

Correction ▼ [005027]

Exercice 5530 Comparaison de longueurs (ENS MP 2002)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue concave, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, L_1 la courbe paramétrée $x \mapsto (x, f(x))$ et L_2 un chemin continu $\mathscr{C}^1$ par morceaux joignant les extrémités de L_1 et situé au-dessus de L_1. Montrer que la longueur de L_2 est supérieure ou égale à celle de L_1.

Correction ▼ [005028]

Exercice 5531 Centre de courbure

Déterminer les coordonnées du centre de courbure au point M pour les courbes suivantes :

1. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2$.
2. $x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t$.
3. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$. (Cycloïde, indiquer une relation géométrique simple entre la courbe décrite par M et celle décrite par I)
4. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$. (Astroïde) Construire le courbe $\mathscr{C}$ et sa développée, puis prouver par le calcul qu'elles sont semblables.
5. Hyperbole d'équation $xy = 1$.
6. Ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
7. $\rho = e^\theta$. (Spirale logarithmique)
8. $\rho = 1 + \cos\theta$. (Cardioïde)

Correction ▼ [005029]

Exercice 5532 Points sur une hyperbole (Ensi P 91)

Soit la courbe Γ définie par : $xy = a^2$, $(a > 0)$. Pour chaque point M on définit le point Ω par : $2\vec{\Omega M} = \vec{MN}$, où N est le point où Γ recoupe sa normale en M. Montrer que Ω est le centre de courbure de Γ en M.

Correction ▼ [005030]

Exercice 5533 Cercle circonscrit à trois points

Soit $\mathscr{C}$ une courbe plane paramétrée par une abscisse curviligne s. Soit s_0 fixé.

1. Donner le DL à l'ordre 2 de M_s pour $s \to s_0$ dans le repère de Frenet en M_{s_0}.
2. On suppose $c(s_0) \neq 0$. Montrer que pour h assez petit, les points M_{s_0-h}, M_{s_0}, M_{s_0+h} ne sont pas alignés.
3. Soit Γ_h le cercle circonscrit à ces trois points, et R_h son rayon. Chercher $\lim_{h\to 0} R_h$.

[005031]

Exercice 5534 Propriétés de la cycloïde

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ pour $t \in]0, 2\pi[$ (arche de cycloïde). On note S le point de paramètre π, et D la tangente à $\mathscr{C}$ en S.

Soit $M \in \mathscr{C} \setminus \{S\}$, I le point d'intersection de la normale à $\mathscr{C}$ en M et de Ox, et J le point d'intersection de la tangente en M avec D.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que I et J ont même abscisse.
3. On prend S comme origine des abscisses curvilignes. Trouver une relation entre s et $\vec{MJ}$.

[005032]

Exercice 5535 Normales à une cardioïde

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ (cardioïde).

1. Dessiner $\mathscr{C}$.
2. Une droite D passant par O coupe $\mathscr{C}$ en deux points M_1 et M_2. Soient Δ_1, Δ_2 les normales à $\mathscr{C}$ en ces points et P le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2. Quelle est la courbe décrite par P lorsque D tourne autour de O ?

Correction ▼ [005033]

Exercice 5536 Calcul de courbure par TFI

Déterminer le rayon de courbure de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation : $2x^2 + y^2 = 1$ aux points intersection de $\mathscr{C}$ et des axes Ox et Oy.

Correction ▼ [005034]

Exercice 5537 Calcul de courbure par TFI

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $x^4 + y^4 + x^3 + y^3 = 2$. En utilisant le théorème des fonctions implicites, calculer la courbure de $\mathscr{C}$ en $A = (-1, 1)$.

Correction ▼ [005035]

Exercice 5538 Calcul de courbure (Chimie P' 90)

Déterminer l'ensemble des centres de courbure en O aux courbes intégrales de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' - 2y = 1$ telles que $y(0) = 0$.

Correction ▼ [005036]

Exercice 5539 Courbe parallèle à une parabole

Soit $\mathscr{C} : t \mapsto M_t$ une courbe plane paramétrée sans point stationnaire. Les courbes parallèles à $\mathscr{C}$ sont les courbes de la forme : $t \mapsto M_t + \lambda \vec{N}$, ou $\vec{N}$ est le vecteur normal en M_t et λ est constant.

1. Montrer que le parallélisme est une relation d'équivalence entre arcs sans points stationnaires.
2. Construire les parallèles à la parabole d'équation $y = x^2$ pour $\lambda = \pm 2$.

[005037]

Exercice 5540 Points équidistants sur la tangente

Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée, $(M, \vec{t}, \vec{n})$ le repère de Frenet en un point M de $\mathscr{C}$. Soit $a > 0$ fixé et $P_1 = M + a\vec{t}$, $P_2 = M - a\vec{t}$. On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes décrites par P_1 et P_2 quand M décrit $\mathscr{C}$ et c_1, c_2 les courbures correspondantes. Soit C le centre de courbure à $\mathscr{C}$ en M.
Montrer que $c_1 + c_2 = \frac{2}{CP_1}$ et que les trois normales sont concourantes.

Correction ▼ [005038]

Exercice 5541 Paraboles de cercle osculateur donné

Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ et Δ une droite variable passant par O.

1. Chercher l'équation de la parabole $\mathscr{P}$ d'axe parallèle à Δ, passant par O, dont $\mathscr{C}$ est le cercle osculateur en O.
2. Quelle est l'enveloppe des paraboles précédentes ?

Correction ▼ [005039]

Exercice 5542 Développante

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$ d'équations paramétriques : $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2$.
2. Chercher les équations paramétriques des développantes de $\mathscr{C}$.
3. Tracer la développante qui rencontre $\mathscr{C}$ à l'origine.

Correction ▼ [005040]

Exercice 5543 Développante

Déterminer la développante de la chainette $\mathscr{C}$ d'équation $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ qui rencontre $\mathscr{C}$ pour $x = 0$. (Tractrice) Dessiner les deux courbes.

Correction ▼ [005041]

Exercice 5544

Longueur L de (Γ) dans chacun des cas suivants :

1. Γ est l'astroïde de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right.$ ($a > 0$ donné).
2. Γ est l'arche de cycloïde de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{array}\right.$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
3. Γ est l'arc de parabole d'équation cartésienne $x^2 = 2py$, $0 \leqslant x \leqslant a$ ($p > 0$ et $a > 0$ donnés).
4. Γ est la cardioïde d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$ ($a > 0$ donné).

Correction ▼ [005535]

Exercice 5545

Déterminer et construire la développée

1. $\left\{\begin{array}{l} x = R\left(\cos t + \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) \\ y = R\sin t \end{array}\right.$

2. $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$.

3. $y = x^3$

Correction ▼ [005536]

Exercice 5546

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \ln x$ en lequel la valeur absolue du rayon de courbure est minimum.

Correction ▼ [005537]

Exercice 5547

Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(\cos x)$, pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Calculer l'abscisse curviligne s quand O est l'origine des abscisses curvilignes et l'orientation est celle des x croissants. Trouver une relation entre R et s. Tracer (Γ) et sa développée.

Correction ▼ [005538]

Exercice 5548

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note (Γ_λ) la courbe d'équation $y = \lambda x e^{-x}$. Quel est le lieu des centres de courbure C_λ en O à (Γ_λ) quand λ décrit $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005539]

226 244.08 Courbes dans l'espace

Exercice 5549 Ensi P 90

On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par : $x(t) = \frac{t^4}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$, $z(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.
A quelle condition M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points de $\mathscr{C}$ de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3, t_4 sont-ils coplanaires ?

Correction ▼ [005042]

Exercice 5550 Courbure de M cste $\Rightarrow$ courbure de I cste

Soit $\mathscr{C}$ une courbe de l'espace, et Γ la courbe décrite par le centre de courbure, I, en un point M de $\mathscr{C}$. On suppose que la courbure de $\mathscr{C}$ est constante et sa torsion non nulle.

1. Montrer que la courbure de Γ est aussi constante.
2. Chercher la torsion de Γ en I en fonction de la courbure et la torsion de $\mathscr{C}$ en M.

Correction ▼ [005043]

Exercice 5551 Éléments de courbure de T

Soit $s \mapsto M_s$ une courbe de l'espace de classe $\mathscr{C}^3$ paramétrée par une abscisse curviligne, et P le point tel que $\vec{OP} = \frac{d\vec{M}}{ds}$. Chercher les éléments de courbure de la trajectoire de P.

Correction ▼ [005044]

Exercice 5552 Enveloppe de normales

Soit $s \mapsto M_s$ une courbe de l'espace de classe $\mathscr{C}^3$ paramétrée par une abscisse curviligne. Pour tout s on choisit une normale à la courbe en M_s : Δ_s. A quelle condition les droites Δ_s admettent-elles une enveloppe ?

Correction ▼ [005045]

Exercice 5553 Équations intrinsèques en dimension 3

Trouver les courbes de l'espace vérifiant les équations intrinsèques : $c = \tau = \frac{1}{s\sqrt{2}}$.

Correction ▼ [005046]

227 244.99 Autre

Exercice 5554

Soit $f : [0,1] \to [0,1]^2$ de classe C^1, montrer que f ne peut être bijective. [002057]

Exercice 5555

Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue, et $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Montrer :

$$\begin{array}{rcl} \forall \varepsilon & > & 0, \exists \gamma' \in C([0,1],\mathbb{C}) \text{ tel que :} \\ 1 & : & \forall t \in [0,1], \left|\gamma(t) - \gamma'(t)\right| < \varepsilon, \\ 2 & : & \forall t \in [0,1], \gamma(t) \neq z. \end{array}$$

[002058]

Exercice 5556

Un cercle de rayon R roule sans glisser sur l'axe Ox dans le sens des x croissants. Soit C la courbe décrite par le point M lié à la circonférence qui, dans la position initiale, coïncide avec l'origine O (cycloïde). Soit M(θ) la position du point M quand le cercle a tourné d'un angle θ à partir de la position initiale et $\Omega(\theta)$ le point de contact correspondant entre la circonférence et l'axe Ox.

— Déterminer l'abscisse de $\Omega(\theta)$ et les coordonnées $x(\theta)$ et $y(\theta)$ du point M(θ). Montrer que la courbe C est périodique et représenter graphiquement la première période.
— Déterminer, en fonction de θ, le vecteur tangent $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}/d\theta$, le vecteur tangent unitaire $\overrightarrow{\mathrm{T}}$, et l'élément de longueur ds.
— Déterminer le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ et le rayon de courbure ρ au point paramétré par θ. Montrer que le centre de courbure est situé sur la droite définie par M(θ) et $\Omega(\theta)$, et préciser sa position sur cette droite.
— (facultatif) L'angle de rotation est défini en fonction du temps par la fonction $\theta(t)$. Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ du point M à l'instant t. Montrer que $\overrightarrow{v}$ s'exprime en fonction de ΩM, $d\theta/dt$ et $\overrightarrow{\mathrm{T}}$, et donner un vecteur $\overrightarrow{\omega}$ orthogonal au plan du mouvement tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$. Obtenir géométriquement à un instant donné quelconque le vecteur vitesse d'un point P quelconque de la circonférence.

[002691]

Exercice 5557

Un segment AB de longueur l se déplace dans le plan de façon que le point A reste constamment sur l'axe Ox et le point B sur l'axe Oy, l'angle $\theta = (\vec{O}x, \vec{AB})$ variant de 0 à 2π. Soit M le point de AB tel que AM=αl, $\alpha = C^{te}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Calculer les coordonnées de M en fonction de θ et déterminer la courbe qu'il décrit.

— A l'instant zéro un oiseau s'envole d'un point A d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\overrightarrow{v}$. Au même instant un chasseur situé au point B tire un coup de fusil en vue d'abattre l'oiseau. La vitesse de la balle de fusil est en valeur absolue égale à u. On suppose évidemment que l'on a $u > \|\overrightarrow{v}\|$. Déterminer la direction dans laquelle le chasseur doit tirer pour abattre l'oiseau et l'instant t_0 de l'impact : on écrira deux équations déterminant la vitesse vectorielle $\overrightarrow{u}$ de la balle de fusil et l'instant t_0, et on en donnera les solutions. Donner l'expression de la distance d parcourue par l'oiseau entre les instants 0 et t_0.
Appliquer numériquement les résultats précédents aux deux cas définis par $A(0,0,a)$, $B(b,0,0)$, $\overrightarrow{v} = (0,v,0)$ avec :
— Envol à partir du repos : a=15m, b=10m, v=5m/s, u=300m/s
— Passage en plein vol : a=20m, b=0, v=90km/h, u=300m/s

[002694]

Exercice 5558

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px, p > 0$.

— Montrer que la tangente à $\mathscr{P}$ au point $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ a pour équation $yy_0 = p(x + x_0)$.
— Un rayon lumineux, porté par la droite d'équation $y = y_0$ et se propageant en sens inverse de l'axe des x, se réfléchit au point M_0 sur la tangente à $\mathscr{P}$ selon la loi de Descartes. Déterminer l'équation du rayon réfléchi.
— Vérifier que les rayons réfléchis correspondant aux diverses valeurs de y_0 passent tous par un même point F situé sur l'axe des x (foyer de la parabole).
Citer des applications pratiques de cette propriété.

[002695]

Exercice 5559

On dispose d'un oscilloscope à deux voies. On applique sur la voie X une tension sinusoïdale de pulsation ω, et sur la voie Y une tension de même amplitude et de pulsation 2ω. En plaçant l'oscilloscope en mode X–Y et pour un choix approprié du gain de chaque voie, on observe sur l'écran une courbe paramétrée définie en coordonnées cartésiennes par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \sin \omega t \\ y(t) = a \sin 2\omega t \end{cases}$$

— Déterminer la période du mouvement T.
— Donner le tableau des variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle [0,T], et en déduire l'allure de la courbe.
— Déterminer les coordonnées des points de la courbe d'abscisse ou d'ordonnée maximum.
— Déterminer les symétries de la courbe et donner les transformations correspondantes du paramètre t.

[002696]

Exercice 5560

Sur l'écran d'un oscilloscope on observe la courbe dont les équations paramétriques sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = a \sin \omega t \\ y(t) = a \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

— Exprimer puis factoriser la somme et la différence $x + y$ et $x - y$.
— Soient X et Y les coordonnées par rapport aux axes déduits des axes Ox et Oy par une rotation de $\pi/4$. Donner les équations paramétriques de la courbe dans ce système de coordonnées.
— Tracer la courbe et discuter de sa forme et du sens de parcours sur celle-ci en fonction du paramètre $\varphi \in [0, 2\pi]$ (considérer les valeurs multiples de $\pi/2$ et les régions qu'elles délimitent).
— La courbe étant supposée donnée, en déduire géométriquement la valeur de φ.

[002697]

228 245.00 Analyse vectorielle : forme différentielle, champ de vecteurs, circulation

229 245.01 Forme différentielle, champ de vecteurs, circulation

Exercice 5561

On considère le champ de vecteurs $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$P(x,y) = (2x\mathrm{e}^{x^2-2y}; -2\mathrm{e}^{x^2-2y}).$$

1. Vérifier que la forme différentielle associée à P est fermée.
2. En déduire que P est un champ de gradients et en déterminer un potentiel.

3. Calculer la circulation de P le long du chemin

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\ln(1+t); e^t + 1).$$

[002072]

Exercice 5562

Soient a, b des nombres tels que $0 < a < b$ et soit

$$D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid a \leqslant xy \leqslant b,\ y \geqslant x,\ y^2 - x^2 \leqslant 1\}.$$

En effectuant le changement de variable $u = xy, v = y^2 - x^2$, calculer

$$I = \iint_D (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

[002073]

Exercice 5563

Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy + e^y, x^2 + xe^y)$. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la parabole $x = y^2$ entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$. [002074]

Exercice 5564

Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (xy, -z, xz)$. $\vec{V}$ est-il un champ de gradient ? Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'hélice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ pour $t \in [0, 2\pi]$. [002075]

Exercice 5565

Montrer que $\omega(x,y) = \dfrac{(1 - x^2 + y^2)y}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx + \dfrac{(1 + x^2 - y^2)x}{(1 + x^2 + y^2)^2} dy$ est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$ et l'intégrer. [002076]

Exercice 5566

Sur $D =]0, +\infty[^2$ on définit $\omega(x,y) = (\dfrac{x}{x+y} + \ln(x^2 + xy))dx + \dfrac{\varphi(y)}{x+y} dy$.

1. Trouver une CNS sur φ pour que ω soit fermée.
2. Montrer qu'alors ω est exacte et l'intégrer.

[002077]

Exercice 5567

Soit $\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ une forme différentielle C^1 sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^3$.

1. A quelle condition ω est-elle exacte ?
2. On suppose qu'elle n'est pas exacte et on cherche alors $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^*$ de classe C^1 telle que $\lambda\omega$ soit exacte. On dit alors que λ est un facteur intégrant. En éliminant λ dans la condition trouvée à la question précédente, trouver une condition nécessaire sur P, Q, R pour qu'il existe un facteur intégrant.

[002078]

Exercice 5568

Soit $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\right\}$ et $\omega(x,y,z) = 2xzdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz$.

1. En utilisant l'exercice précédent (exercice 5567), montrer que ω admet un facteur intégrant.

2. Chercher un facteur intégrant ne dépendant que de z.
3. On suppose qu'un mouvement dans U vérifie l'équation différentielle $2x(t)z(t)\dot{x}(t) - 2y(t)z(t)\dot{y}(t) - (x^2(t) - y^2(t))\dot{z}(t)$. Trouver une intégrale première du mouvement.

[002079]

Exercice 5569

Calculer l'aire d'une astroïde. [002080]

Exercice 5570

On rappelle que la formule de Stokes générale affirme que si ω est une forme différentielle de degré $p-1$, Ω une variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension p et de bord $\partial\Omega$, alors

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

Dans le cas où $p=1$, $\Omega = [a,b]$ un segnment et $\omega = f$ une fonction réelle, que donne cette formule ? Et si Ω est la réunion de plusieurs intervalles ? Plus généralement, si Ω est une courbe de $\mathbb{R}^3$, et g une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$, quel est le travail de g le long de Ω ? Montrer qu'il ne dépend pas du chemin parcouru. [002480]

Exercice 5571

Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$ de bord $\Gamma = \partial\Sigma$, et $\mathbf{U}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. En considérant la forme différentielle $\omega = \mathbf{U}_1\,dx + \mathbf{U}_2\,dy + \mathbf{U}_3\,dz$, montrer la forme vectorielle de la formule de Stokes :

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \oint_\Gamma \mathbf{U}\cdot d\mathbf{r},$$

où $\mathbf{n}$ désigne le vecteur normal à Σ. Expliciter cette formule dans les cas où Σ est donnée : a) sous la forme directe $z = f(x,y)$, avec $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$; b) sous la forme intrinsèque $f(x,y,z) = 0$; c) sous la forme paramétrique $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, avec $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. [002481]

Exercice 5572

Calculer

$$\oint_\Gamma (2xy^2 + \sin z)\,dx + 2x^2y\,dy + x\cos z\,dz$$

le long de la courbe Γ donnée par $x = \cos t, y = z = \sin t$, $0 \leqslant t < 2\pi$.

[002482]

Exercice 5573

Montrer que si Σ est une surface fermée de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{U}$ un champ de vecteurs C^1 sur Σ, alors $\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0$. En déduire la valeur de $\int_S \operatorname{rot}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,ds$, où $\mathbf{U} = (-y^3, x^3+z, z^3)$ et S l'hémisphère $z > 0$ de la sphère unité. [002483]

Exercice 5574

Soit $\mathbf{U} = (e^x + y^2, -ye^x, x^2 + y^2)$; calculer $\div\mathbf{U}$ et en déduire $\int_\Sigma \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$, où Σ est une surface fermée de $\mathbb{R}^3$. [002484]

Exercice 5575

Sous les conditions du théorème de Stokes, montrer les identités suivantes, où $\mathbf{V}$ est un champ de vecteur arbitraire, Σ une surface de bord Γ, et ϕ et ψ des fonctions C^1 :

$$\begin{aligned}
\oint \phi\,d\mathbf{r} &= \int_\Sigma d\sigma \wedge \nabla\varphi, \\
\oint_\Gamma d\mathbf{r} \wedge \mathbf{U} &= \int_\Sigma (\mathbf{n}\wedge\nabla)\wedge\mathbf{U}\,d\sigma, \\
\oint_\Gamma \varphi\nabla\psi\cdot d\mathbf{r} &= \int_\Sigma \nabla\phi\wedge\nabla\psi\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.
\end{aligned}$$

[002485]

Exercice 5576

Déduire de la formule générale de Stokes la formule de Green en deux dimensions : si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de bord $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux, et si P, Q sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 dans Ω, alors

$$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

[002486]

Exercice 5577

Soit C une courbe fermée du plan, et P et Q deux polynômes de degré 1 en x, y ; montrer que la valeur de $\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ne change pas si l'on effectue une translation sur C. En déduire la valeur de $\oint_C (3x + 4y)\,dx + (x-3y)\,dy$, où C est un cercle quelconque de rayon $a > 0$. [002487]

Exercice 5578

Soit C le bord du carré $[-1,1] \times [-1,1]$. Calculer

$$\oint_C (e^{x^3} + 3y^2)\,dx + \sqrt{\cos y}\,dy.$$

[002488]

Exercice 5579

Soit C la cycloıde d'équations $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$, et
C_0 l'arc de C joignant
$O = (0,0)$ à $A = (\pi, 2)$; calculer $\int_{C_0}$
$(2\mathrm{x}^2 + 3y^2)\,dx + (6xy + 4y^2)\,dy$.

[002489]

Exercice 5580

Soit C une courbe fermée du plan enclosant une aire S, et a, b deux réels.

1. Calculer $\oint_C ay\,dx + bx\,dy$. En déduire que
$$S = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$
2. En utilisant la formule précédente, calculer l'aire comprise entre l'axe Ox et l'arche de la cycloïde d'équations $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$, avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
3. De même, trouver l'aire intérieure à la boucle du folium de Descartes d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$, qui est comprise dans le quadrant $x > 0$, $y > 0$ (on pourra chercher une représentation paramétrique de la boucle du folium en posant $y = tx$).

[002490]

Exercice 5581

Déduire de la formule générale de Stokes la formule de Green en trois
dimensions : si V est un volume de $\mathbb{R}^3$ de bord $\Sigma = \partial V$, et
$\mathbf{U}$ un champ de
vecteur C^1 dans V, alors

$$\int_V div\mathbf{U}\,dv = \oint_\Sigma \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

En déduire que le volume de V est donné par

$$|V| = \oint_\Sigma x\,dydz = \oint_\Sigma y\,dzdx = \oint_\Sigma z$$

dx dy
= $1\frac{}{3\oint_\Sigma x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy.}$

[002491]

Exercice 5582

Sous les conditions de la formule de Green, montrer les identités suivantes, où $\mathbf{U}$ est un champ de vecteur arbitraire, et φ une fonction C^1 :

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla\varphi\, dv &= \oint_\Sigma \varphi\,\mathbf{n}\, d\sigma, \\
\int_V \operatorname{rot}\mathbf{U}\, dv &= \oint_\Sigma \mathbf{n}\wedge\mathbf{U}\, d\sigma.
\end{aligned}$$

[002492]

Exercice 5583

Soit $\mathbf{U} = (x/r^3, y/r^3, z/r^3)$; calculer directement $I_S = \oint_S \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,ds$ dans le cas où S est une boule de rayon r et de centre $O = (0,0,0)$. Calculer également $\div\mathbf{U}$. Que constatez-vous ? Expliquer pourquoi la formule de Green ne s'applique pas. Calculer I_S respectivement dans le cas où S est une surface fermée dont l'intérieur ne contient pas O (resp. contient O). Que se passe-t-il si O se trouve sur S ? [002493]

Exercice 5584

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathbf{U}$ un champ vectoriel arbitraire, $\mathbf{a}$ un vecteur constant, $\mathbf{r}$ le champ vectoriel de coordonnées (x,y,z) et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Calculer $\Delta\frac{1}{r}$; $\operatorname{div}(\mathbf{r}/r^3)$; $\operatorname{div}(\mathbf{U}\wedge\mathbf{r})$; $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{U})$; $\operatorname{rot}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{r})$. [002685]

Exercice 5585

Soit a, b, c des constantes et $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées

$$(x+2y+az,\ bx-3y-z,\ 4x+cy+2z).$$

Déterminer pour quelles valeurs de a, b, c, $\mathbf{U}$ est irrotationnel. Dans ce cas, de quel potentiel dérive-t-il ? Mêmes questions avec le champ de coordonnées

$$\left(\frac{xzr^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{yzr^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{-r^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

où $r^2 = x^2+y^2+z^2$. [002686]

Exercice 5586

Un *champ électromagnétique* est caractérisé par deux champs de vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, également fonctions du temps t, et satisfaisant les *équations de Maxwell*

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}.$$

où c est une constante et ρ une fonction scalaire de (x,y,z,t). Montrer qu'il existe un champ de vecteurs $\mathbf{A}$ tel que $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}$, et un champ scalaire ϕ tel que $\mathbf{E}$ s'exprime en fonction de $\mathbf{A}$ et ϕ. Calculer $\operatorname{div}\mathbf{A}$ à l'aide de ϕ, et montrer que $\mathbf{A}$ et ϕ satisfont une équation des ondes. [002687]

Exercice 5587 **

Les formes différentielles suivantes sont elles exactes ? Si oui, intégrer et si non chercher un facteur intégrant.

1. $\omega = (2x+2y+e^{x+y})(dx+dy)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\omega = \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > x\}$
3. $\omega = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} - ydy$
4. $\omega = \frac{1}{x^2y}dx - \frac{1}{xy^2}dy$ sur $(]0,+\infty[)^2$ (trouver un facteur intégrant non nul ne dépendant que de x^2+y^2).

Correction ▼ [005897]

Exercice 5588 **

Calculer l' intégrale de la forme différentielle ω le long du contour orienté C dans les cas suivants :

1. $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ et C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x+1$ joignant les points $(0,-1)$ et $(0,1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.
2. $\omega = (x-y^3)dx + x^3dy$ et C est le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.
3. $\omega = xyzdx$ et C est l'arc $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t \sin t$, t variant en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Correction ▼ [005906]

Exercice 5589 **

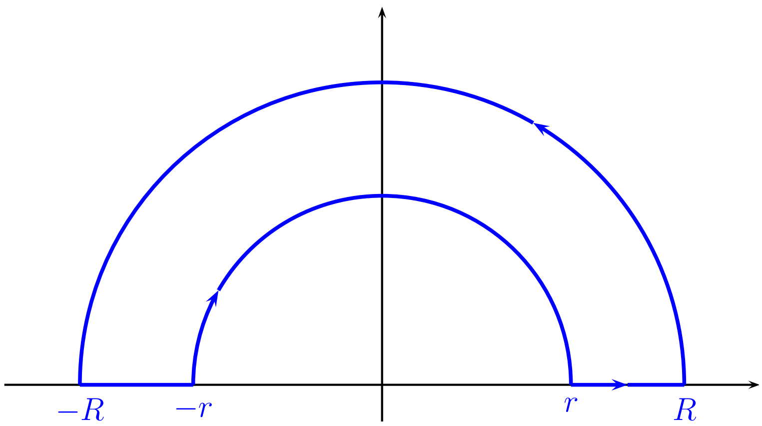
Soit $\omega = x^2dx + y^2dy$. Calculer l'intégrale de ω le long de tout cercle du plan parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Même question avec $\omega = y^2dx + x^2dy$.

Correction ▼ [005907]

Exercice 5590 *** I

(Un calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$).

1. r et R sont deux réels strictement positifs tels que $r < R$. On considère le contour Γ orienté suivant



Calculer l'intégrale de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}((x\sin x - y\cos x)dx + (x\cos x + y\sin x)dy)$$

le long de ce contour orienté.
2. En déduire $\int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx$ en fonction d'une autre intégrale.
3. En faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Correction ▼ [005909]

Exercice 5591 **** Inégalité isopérimétrique

Une courbe fermée (C) est le support d'un arc paramétré γ de classe C^1 régulier et simple. On note $\mathscr{L}$ sa longueur et $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe fermée (C). Montrer que

$$\mathscr{A} \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.$$

Pour cela, on supposera tout d'abord $\mathscr{L} = 2\pi$ et on choisira une paramétrisation normale de l'arc. On appliquera ensuite la formule de PARSEVAL aux intégrales permettant de calculer $\mathscr{L}$ et $\mathscr{A}$ et on comparera les sommes des séries obtenues.

Correction ▼ [005913]

Exercice 5592

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et dans ce cas, les intégrer :

1. $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2. $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$
3. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$
4. $\omega_4 = yz^2dx + (xz^2+z)dy + (2xyz+2z+y)dz.$

Correction ▼ [006873]

Exercice 5593

On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi\cos\theta \\ y & = & r\cos\varphi\sin\theta \\ z & = & r\sin\varphi \end{array}\right.$$

1. Calculer dx, dy, dz.
2. Vérifier que $xdx + ydy + zdz = rdr$. En déduire $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial r}{\partial z}$.

Correction ▼ [006874]

Exercice 5594

On considère la forme différentielle $\omega = (x^2+y^2+2x)dx + 2ydy$.

1. Montrer que ω n'est pas exacte.
2. Trouver une fonction $\psi(x)$ telle que $\psi(x)\omega = df$. Préciser alors f. (On dit que ψ est un facteur intégrant.)

Correction ▼ [006875]

Exercice 5595

On considère le champ vectoriel $\vec{V}(x,y) = (1+2xy, x^3-3)$. Ce champ est-il un champ de gradient ?

Correction ▼ [006876]

Exercice 5596

Quel est le champ vectoriel qui dérive du potentiel

$$U(x,y,z) = 1 + x + xy + xyz?$$

Correction ▼ [006877]

Exercice 5597

Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{V}(x,y) = (3x, x+y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

Correction ▼ [006878]

Exercice 5598

Calculer le travail W de la force $\vec{F}(x,y,z) = (yz,zx,xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$ où t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Correction ▼ [006879]

Exercice 5599

On donne le champ vectoriel

$$\vec{V}(x,y,z) = (y^2\cos x, 2y\sin x + e^{2z}, 2ye^{2z}).$$

1. Montrer que ce champ est un champ de gradient.
2. Déterminer le potentiel $U(x,y,z)$ dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.
3. Quelle est la circulation de ce champ de $A(0,1,0)$ à $B(\frac{\pi}{2},3,0)$?

Correction ▼ [006880]

Exercice 5600

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy$ où

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0; y \geqslant 0; x+y \leqslant 1\}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [006881]

Exercice 5601

On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

1. Dans quel domaine cette forme différentielle est-elle définie ?
2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_C \omega$ où C est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
3. La forme ω est-elle exacte ?

Correction ▼ [006882]

230 245.02 Torseurs

Exercice 5602 Moment parallèle à un plan

Soient $\mathscr{T}$ un torseur et $\mathscr{P}$ un plan. Déterminer le lieu des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $\mathscr{T}(M) \in \vec{\mathscr{P}}$.

Correction ▼ [004944]

Exercice 5603 Torseurs de sommes orthogonales

Soient $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ deux torseurs de sommes non nulles, orthogonales. Montrer que le comoment de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ est nul si et seulement si les axes centraux sont concourants. [004945]

Exercice 5604 Somme de glisseurs

Soit $\mathscr{R} = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On considère les glisseurs :

$\mathscr{G}_1$ d'axe $\begin{cases} y = mx \\ z = 1 \end{cases}$ et de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + m\vec{j}$.

$\mathscr{G}_2$ d'axe $\begin{cases} y=-mx \\ z=-1 \end{cases}$ et de vecteur $\vec{v}=\vec{i}-m\vec{j}$.
Déterminer l'axe central de $\mathscr{G}_1+\mathscr{G}_2$. [004946]

Exercice 5605 Glisseurs associés à un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de l'espace. Pour $X,Y \in \{A,B,C,D\}$ distincts, on note $\mathscr{G}_{XY}$ le glisseur d'axe la droite (XY) et de vecteur $\vec{XY}$.
Montrer que $(\mathscr{G}_{AB},\mathscr{G}_{AC},\mathscr{G}_{AD},\mathscr{G}_{BC},\mathscr{G}_{BD},\mathscr{G}_{CD})$ est une base de l'espace des torseurs.

Correction ▼ [004947]

Exercice 5606 Produit vectoriel de torseurs

Soient $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ deux torseurs de sommes $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$. On définit le champ $\mathscr{T}$ par :

$$\mathscr{T}(M)=\vec{R}_1\wedge\mathscr{T}_2(M)+\mathscr{T}_1(M)\wedge\vec{R}_2.$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est un torseur de somme $\vec{R}_1\wedge\vec{R}_2$ (produit vectoriel de $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$).
2. Si $\vec{R}_1\wedge\vec{R}_2\neq\vec{0}$, montrer que l'axe central de $\mathscr{T}$ est la perpendiculaire commune des axes centraux de $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$.

[004948]

---

231 246.00 Autre

232 246.01 Plan tangent, vecteur normal

Exercice 5607

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^4-x^3+xy-y^2-z=0$.

1. Déterminer les plans tangents à la surface $\mathscr{S}$ parallèle au plan $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.
2. Etudier localement la position relative de la surface $\mathscr{S}$ et de son plan tangent en chacun des points ainsi obtenu.
3. Etudier la position relative globale de la surface $\mathscr{S}$ et du plan $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

Correction ▼ [005915]

Exercice 5608

Trouver toutes les droites tracées sur la surface d'équations $x^3+y^3+z^3=1$ puis vérifier que ces droites sont coplanaires. [005916]

---

233 246.02 Surfaces paramétrées

Exercice 5609 Chimie P 91

Équation de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oz où Γ est la courbe d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=a\cos^3 u \\ y=a\sin^3 u \\ z=a\cos 2u. \end{cases}$ $(a>0)$

Correction ▼ [005047]

Exercice 5610 Ensi Physique 93

Soit la courbe d'équations dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 & = 0 \\ x + z & = 1. \end{cases}$$

Déterminer la surface engendrée par la rotation de (Γ) autour de Oz.

Correction ▼ [005048]

Exercice 5611 Le plan tangent coupe Oz en un point fixe

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = f(\rho,\theta) \end{cases}$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Donner l'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en un point $M(\rho,\theta)$.
2. Déterminer f de sorte que, le long d'une ligne $\theta =$ cste, le plan tangent coupe Oz en un point fixe.
3. Exemple : $f(\rho,\theta) = \theta$. Dessiner la surface $\mathscr{S}$.

Correction ▼ [005049]

Exercice 5612 Pseudo-sphère

Dessiner la surface $\mathscr{S}$ d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = a\cos u/\operatorname{ch} v \\ y = a\sin u/\operatorname{ch} v \\ z = a(v - \operatorname{th} v) \end{cases}$ où a est un réel strictement positif (pseudo-sphère).

Correction ▼ [005050]

Exercice 5613 Les normales coupent $Oz \Leftrightarrow$ révolution

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation $z = f(x,y)$. Montrer que $\mathscr{S}$ est de révolution si et seulement si en tout point M, la normale à $\mathscr{S}$ en M est parallèle ou sécante à Oz.

Correction ▼ [005051]

Exercice 5614

Que dire d'une surface $\mathscr{S}$ telle que toutes les normales sont concourantes ? (cf ex.5613) [005052]

Exercice 5615 Contour apparent

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

1. Reconnaître $\mathscr{S}$.
2. Soit D la droite d'équations : $2x + y = 0$, $z = 0$. Déterminer les points M de $\mathscr{S}$ tels que le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M est parallèle à D. (Contour apparent de $\mathscr{S}$ dans la direction de D)

Correction ▼ [005053]

Exercice 5616 Cylindre circonscrit

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = u/(u^2+v^2) \\ y = v/(u^2+v^2) \\ z = 1/(u^2+v^2). \end{cases}$

1. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points de $\mathscr{S}$ où le plan tangent est parallèle à la droite D d'équations : $x = y = z$.

3. Déterminer l'équation cartésienne du cylindre de génératrices parallèles à D s'appuyant sur $\mathscr{C}$. (Cylindre circonscrit à $\mathscr{S}$)

Correction ▼ [005054]

Exercice 5617 Équation de cône

Soit $\mathscr{C}$ le cercle intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ et du plan d'équation $x+y=1$, et $S=(1,1,1)$. Déterminer l'équation cartésienne du cône de sommet S s'appuyant sur $\mathscr{C}$.

Correction ▼ [005055]

Exercice 5618 Cône = cylindre ?

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne : $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}=\frac{1}{(x-z)^2}$.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est à la fois un cylindre et un cône.
2. Comment est-ce possible ?

[005056]

Exercice 5619 Position d'une surface de révolution par rapport au plan tangent

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation cartésienne $z=f(\rho)$ où $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ et f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que la position de $\mathscr{S}$ par rapport à son plan tangent est donnée par le signe de $f'(\rho)f''(\rho)$. Interpréter géométriquement ce fait. [005057]

Exercice 5620 Intersection de deux cylindres

Soient $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ les surfaces d'équations $x^2+y^2+xy=1$ et $y^2+z^2+yz=1$, et $\mathscr{C}=\mathscr{S}_1\cap\mathscr{S}_2$.

1. Donner en tout point de $\mathscr{C}$ le vecteur tangent à $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes planes.
3. Quelle est la projection de $\mathscr{C}$ sur Oxz ?

Correction ▼ [005058]

Exercice 5621 Conoïde

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A=(a,0,0)$ et de rayon r $(0<r<a)$ et $\mathscr{S}'$ la surface constituée des droites horizontales tangentes à $\mathscr{S}$ et sécantes à Oz. Déterminer l'équation cartésienne de $\mathscr{S}'$.

Correction ▼ [005059]

Exercice 5622 Surface cerclée

Soit $A=(0,1,0)$ et $\mathscr{S}$ la surface constituée des cercles verticaux de diamètre $[A,B]$ où B est un point variable sur Ox. Chercher une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Correction ▼ [005060]

Exercice 5623 Chimie P' 91

On considère la droite Δ d'équations : $x=a$, $z=0$. P est un point décrivant Δ et $\mathscr{C}_P$ le cercle tangent à Oz en O et passant par P. Faire un schéma et paramétrer la surface engendrée par les cercles $\mathscr{C}_P$ quand P décrit Δ.

Correction ▼ [005061]

Exercice 5624 Ensi Chimie P' 93

Soit (Γ) : $\begin{cases} x(t)=a\cos(t)/\operatorname{ch}(mt)\\ y(t)=a\sin(t)/\operatorname{ch}(mt)\\ z(t)=a\operatorname{th}(mt).\end{cases}$

1. Montrer que (Γ) est tracée sur une surface (Σ) simple. Montrer que (Σ) est de révolution autour de Oz et donner son équation.
2. Montrer que (Γ) coupe les méridiennes de (Σ) suivant un angle constant (loxodromie).
3. Réciproquement, déterminer toutes les loxodromies de (Σ).
4. Dessiner la projection de (Γ) sur xOy.

Correction ▼ [005062]

234 260.01 Probabilité et dénombrement

Exercice 5625

Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Correction ▼ [005983]

Exercice 5626

Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

Correction ▼ [005984]

Exercice 5627

Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction ▼ [005985]

Exercice 5628

Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?

Correction ▼ [005986]

Exercice 5629

Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Correction ▼ [005987]

Exercice 5630

Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Correction ▼ [005988]

Exercice 5631

La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Correction ▼ [005989]

Exercice 5632

Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Correction ▼ [005990]

Exercice 5633

La famille Potter comporte 2 enfants ; les événements A : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et B : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ? Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

Correction ▼ [005991]

Exercice 5634

On lance deux dés à 6 faces. Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles et la probabilité P associée à cette expérience. Donner la probabilité d'obtenir :

1. un double,
2. au plus un nombre pair,
3. exactement un nombre pair,
4. deux nombres qui se suivent.

[006889]

Exercice 5635

Au loto, on choisit 6 numéros principaux, qui sont 6 nombres différents entre 1 et 49, et un numéro complémentaire, qui est un nombre entre 1 et 49 différent des 6 précédents. Quelle est la probabilité d'avoir :

1. les six bons numéros principaux ?
2. cinq bons numéros parmi les 6 principaux ?
3. cinq bons numéros parmi les principaux et le bon numéro complémentaire ?

[006890]

Exercice 5636

Une urne contient une boule rouge, trois boules vertes et seize boules blanches. La boule rouge permet de gagner 10 euros, chaque boule verte permet de gagner 5 euros et les boules blanches ne rapportent rien. Un joueur tire simultanément cinq boules. Quelle est la probabilité pour que ce joueur gagne exactement 10 euros ?

Correction ▼ [006891]

Exercice 5637

On lance trois dés non pipés. On note le nombre de points (1, 2, 3, 4, 5 ou 6) qui apparaît sur la face supérieure de chaque dé. Calculer la probabilité d'avoir :

1. trois 3,
2. deux 2 et un 1,
3. un 1, un 3, un 5,
4. la somme des points égale à 9,
5. la somme des points égale à 10.

Remarque : Ces calculs ont été effectués à l'origine par Galilée pour expliquer la différence entre 4. et 5.

Correction ▼ [006892]

Exercice 5638

Les trois mousquetaires (donc quatre personnes) ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard. Calculer la probabilité pour que :

1. Les deux bottes soient les siennes.
2. Les deux bottes forment une paire (une paire est la réunion d'un pied droit et d'un pied gauche).
3. Les deux bottes soient deux pieds droits.
4. Les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes.

[006893]

Exercice 5639

On tire simultanément 6 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 2 dames et 3 trèfles ? [006894]

Exercice 5640

On veut transmettre un message électronique composé des digits 0 et 1. Les conditions imparfaites de transmission font en sorte qu'il y a une probabilité égale à 0,1 qu'un 0 soit changé en un 1 et un 1 en un 0 lors de la réception, et ce de façon indépendante pour chaque digit. Pour améliorer la qualité de la transmission, on propose d'émettre le bloc 00000 au lieu de 0 et le bloc 11111 au lieu de 1 et de traduire une majorité de 0 dans un bloc lors de la réception par 0 et une majorité de 1 par 1.

1. Quelle est la probabilité de recevoir une majorité de 1 si 00000 est émis ?
2. Quelle est la probabilité de recevoir une majorité de 1 si 11111 est émis ?

Correction ▼ [006895]

235 260.02 Probabilité conditionnelle

Exercice 5641

Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Correction ▼ [005992]

Exercice 5642

Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants ; sur une table, il y a 3 urnes H, F, E contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne H si cette personne est un homme, dans l'urne F si cette personne est une femme, dans l'urne E si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur n'est pas plus magicien que vous et moi et pronostique le genre de la personne au hasard : que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

Correction ▼ [005993]

Exercice 5643

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.9 ; quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ? Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

Correction ▼ [005994]

Exercice 5644

Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.
On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n
Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?

Correction ▼ [005995]

Exercice 5645

Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Correction ▼ [005996]

Exercice 5646

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :
Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.
Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Correction ▼ [005997]

Exercice 5647

Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.
On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Correction ▼ [005998]

Exercice 5648

Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à q la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.
Le trimoteur peut voler si le moteur central *ou* les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ? Application numérique : $p = 0.001\%$, $q = 0.02\%$.

Correction ▼ [005999]

Exercice 5649

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

— Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
— Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?

2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Correction ▼ [006000]

Exercice 5650

Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

Correction ▼ [006001]

Exercice 5651

Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité $P(B)$ pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité $P(C)$ pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité $P(D)$ pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Correction ▼ [006002]

Exercice 5652

Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Correction ▼ [006003]

Exercice 5653

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :

— Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
— Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. Ecrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.
2. A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n. Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Correction ▼ [006004]

Exercice 5654

Aurore arrive en retard en cours avec une probabilité $1/2$. Elle ne va pas en cours avec une probabilité $1/6$. Aujourd'hui, le cours commence sans elle. Quelle est la probabilité qu'elle vienne aujourd'hui ? [006896]

Exercice 5655

On a décelé dans une certaine population une probabilité de 0,01 pour qu'un enfant soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un enfant qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est de 0,9. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive au test est de 0,95.
Quelle est la probabilité qu'un enfant pris au hasard ait une réaction positive au test ? Quelle est la probabilité qu'un enfant pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M ?

Correction ▼ [006897]

Exercice 5656

Les ampoules de la marque X sont fabriquées dans deux usines, A et B. 20% des ampoules de l'usine A et 5% de l'usine B sont défectueuses. Chaque semaine l'usine A produit $2n$ ampoules et l'usine B produit n ampoules (où $n \geqslant 1$ est un entier). On tire une une ampoule au hasard dans la production d'une semaine.

1. Quelle est la probabilité que l'ampoule tirée ne soit pas défectueuse ?
2. Si l'ampoule tirée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine A ?

[006898]

Exercice 5657

Une personne lance deux dés à 6 faces et dit qu'elle a obtenu au moins un nombre pair. Quelle est la probabilité que les deux nombres obtenus soient pairs ? [006899]

Exercice 5658

Il y a 5% de daltoniens chez les hommes et $0,25\%$ chez les femmes. Il y a 48% d'hommes et 52% de femmes dans la population. Quelle est la probabilité pour qu'un daltonien soit un homme ?

Remarque : la forme la plus courante du daltonisme est génétique, due à un gène récessif porté par le chromosome X. Un homme (XY) est daltonien dès que le chromosome X porte ce gène. Une femme (XX) n'est daltoniene que si les 2 chromosomes X portent ce gène. Ceci explique les taux très différents chez les hommes et les femmes.

Correction ▼ [006900]

Exercice 5659

Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires et 20 boules blanches. On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

Correction ▼ [006901]

236 260.03 Variable aléatoire discrète

Exercice 5660

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :

   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».
2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Correction ▼ [006005]

Exercice 5661

On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements :
A : au moins une ampoule est défectueuse ;
B : les 3 ampoules sont défectueuses ;
C : exactement une ampoule est défectueuse.

Correction ▼ [006006]

Exercice 5662

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20». Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Correction ▼ [006007]

Exercice 5663

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction ▼ [006008]

Exercice 5664

Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction ▼ [006009]

Exercice 5665

Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

Correction ▼ [006010]

Exercice 5666

Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Correction ▼ [006011]

Exercice 5667

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit X la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard». Quelle est la loi de probabilité de X, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P[X = 5]$.

Correction ▼ [006012]

Exercice 5668

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m (utiliser une loi de Poisson). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m.

Correction ▼ [006013]

Exercice 5669

Soit n un entier strictement positif. Quelle est la loi du nombre de garçons dans une famille de n enfants ? (Préciser les hypothèses que vous faites) [006902]

Exercice 5670

Une usine fabrique des transistors. Chaque transistor a une probabilité de 3% d'être défectueux. Quelle est la loi du nombre de transistors défectueux dans un lot de 100 transistors ? Que vaut son espérance et que représente-t-elle ? [006903]

Exercice 5671

L'entreprise Luminex fabrique des lampes, dont 80% durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille $n = 15$.

1. Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ?
3. Quelle est la probabilité que 13 lampes ou plus, dans un échantillon de taille 15, durent plus de 3000 heures ?

Correction ▼ [006904]

Exercice 5672

Un transporteur aérien a observé que 25% en moyenne des personnes ayant réservé un siège pour un vol ne se présentent pas au départ. Il décide d'accepter jusqu'à 23 réservations alors qu'il ne dispose que de 20 sièges pour ce vol.

1. Soit X la variable aléatoire "nombre de clients qui viennent après réservation quand 23 places ont été réservées". Quelle est la loi de X (précisez les hypothèses que vous faites pour modéliser la situation) ? Quelle est son espérance ?
2. Si 23 personnes ont réservé, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siège ?

Correction ▼ [006905]

Exercice 5673

On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où pile a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de pile divisé par 10).

1. Quelle est la loi de X ?
2. Avec quelle probabilité X est-elle strictement au dessus de 0,5 ?
3. Avec quelle probabilité X est-elle comprise entre 0,4 et 0,6 (bornes incluses) ?
4. Déterminer le plus petit entier $a > 0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $[0,5-\frac{a}{10}, 0,5+\frac{a}{10}]$ soit supérieure à 95%.
5. On lance la pièce 10 fois. Elle tombe 3 fois sur pile et 7 fois sur face. D'après vous la pièce est-elle bien équilibrée (on justifiera sa réponse en utilisant la question 3 ? Même question si on obtient 1 fois pile et 9 fois face.

Correction ▼ [006906]

Exercice 5674

Un standard téléphonique reçoit en moyenne 2 appels par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps.

1. Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 3 minutes ? Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun appel en 3 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le nombre d'appels en 2 minutes soit supérieur ou égal à 5 ?

Correction ▼ [006907]

Exercice 5675

Dans une dictature militaire, le dictateur veut augmenter le nombre de naissances de garçons. Il impose la règle suivante : si une femme donne naissance à une fille, elle doit continuer à faire des enfants ; si elle donne naissance à un garçon, elle doit arrêter d'avoir des enfants. On suppose que chaque femme a au moins un enfant et pas plus de 5 enfants.

1. Soit X le nombre de filles par femme. Quelle est la loi de X ?
2. Quel est le nombre moyen de filles d'une femme ? Le nombre moyen de garçons ? Cette règle est-elle efficace pour augmenter le nombre de garçons ?

Correction ▼ [006908]

Exercice 5676 Loi multinomiale

On lance quatre dés. Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 et deux 3 ? [006909]

Exercice 5677

On lance deux dés à 6 faces. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le maximum des deux chiffres obtenus. [006910]

Exercice 5678

On considère $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Parmi les choix suivants, quels sont ceux qui donnent une probabilité P sur Ω ?

$$\begin{array}{ll}
a) & P(1)=1/4, \quad P(2)=3/8, \quad P(3)=1/16, \quad P(4)=3/16. \\
b) & P(1)=0, \quad P(2)=1/3, \quad P(3)=1/6, \quad P(4)=1/2. \\
c) & P(1)=1/5, \quad P(2)=1/4, \quad P(3)=1/3, \quad P(4)=1/2. \\
d) & P(1)=1/4, \quad P(2)=1/2, \quad P(3)=-1/4, \quad P(4)=1/2.
\end{array}$$

[006911]

Exercice 5679

Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires $Z = (X,Y)$, avec X prenant ses valeurs dans $\{-1,1\}$ et Y prenant ses valeurs dans $\{-1,0,1\}$.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$1/12$	$1/3$	$1/12$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$

1. Déterminer la probabilité que X et Y soient égales.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Déterminer les lois de $X+Y$ et de XY.

[006912]

Exercice 5680

Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires (X,Y), avec X et Y prenant chacune leurs valeurs dans $\{1,2,3\}$.

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0	$1/9$	$2/9$
2	$2/9$	0	$1/9$
3	$1/9$	$2/9$	0

1. Calculer la probabilité que X et Y soit égales.
2. Déterminer les lois de X et de Y.

[006913]

Exercice 5681

Charles ne supporte pas les chats et Sophie déteste les chiens. Charles n'élève pas plus d'un chien et Sophie pas plus d'un chat. La probabilité pour que Charles ait un chien est de $0,2$. Si Charles n'a pas de chien, la probabilité pour que Sophie ait un chat est de $0,1$. On note X le nombre de chiens de Charles, Y le nombre de chats de Sophie et Z le nombre d'animaux du couple.

1. Calculer la probabilité pour qu'ils n'aient pas d'animaux.
2. On suppose de plus que la probabilité que Z soit égal à 1 est de $0,1$.
   (a) Calculer la probabilité pour que Z soit égal à 2.
   (b) Déterminer l'espérance et l'écart-type de Z.
   (c) Établir la loi de probabilité du couple (X,Y). Quelle est la loi de probabilité de Y ?
   (d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction ▼ [006914]

Exercice 5682

Dans une pile de n ($n \geqslant 2$) feuilles dactylographiées, se trouvent les deux lettres que l'on doit envoyer. On enlève une par une les feuilles du paquet jusqu'à ce que l'une des lettres à envoyer se trouve sur le dessus du paquet. On note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de feuilles enlevées. On recommence l'opération jusqu'à trouver la deuxième lettre et on note X_2 la variable aléatoire donnant le nombre de feuilles qu'il a fallu retirer du paquet après avoir trouvé la première lettre et avant que la deuxième lettre soit sur le dessus du paquet. Sans information supplémentaire, on peut supposer que toutes les positions possibles pour les deux lettres sont équiprobables.

1. Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles pour cette expérience aléatoire et la probabilité P mise sur Ω.

2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) puis la loi de X_1 et de X_2.
3. Calculer la probabilité de l'événement "$X_1 = X_2$".
4. On note $Z = X_1 + X_2 + 2$. Que représente la variable aléatoire Z ? Déterminer sa loi.

[006915]

237 260.04 Lois de distributions

Exercice 5683

Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 0mm, écart-type : 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Correction ▼ [006014]

Exercice 5684

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1. Soit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm» ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.
2. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire «épaisseur de la plaque numéro i en mm» et Z la variable aléatoire «épaisseur des n plaques en mm». Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance ?

Correction ▼ [006015]

Exercice 5685

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées ; on estime à 0.1% la proportion de plaques inutilisables. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard. Pour $n = 2000$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» ? (on utilisera une loi de probabilité adaptée) ; quelle est la probabilité pour que N soit inférieure ou égal à 3 ? Quelle est la probabilité pour que N soit strictement inférieure à 3 ?

Correction ▼ [006016]

Exercice 5686

Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. Chaque crêpe a une épaisseur qui suit une loi normale de paramètres $m = 0.6$mm et $\sigma = 0.1$. Soit X la variable aléatoire «épaisseur du paquet en mm». Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6mm.

Correction ▼ [006017]

Exercice 5687

Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :
- 56% ont un taux inférieur à 165 cg ;
- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg ;
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10 000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

Correction ▼ [006018]

Exercice 5688

Pour chacune des variables aléatoires qui sont décrites ci-dessous, indiquez quelle est la loi exacte avec les paramètres éventuels (espérance, variance) et indiquez éventuellement une loi approchée.

1. Nombre annuel d'accidents à un carrefour donné où la probabilité d'accident par jour est estimée à $\frac{4}{365}$.
2. Nombre de garçons dans une famille de 6 enfants; nombre de filles par jour dans une maternité où naissent en moyenne 30 enfants par jour.
3. Dans un groupe de 21 personnes dont 7 femmes, le nombre de femmes dans une délégation de 6 personnes tirées au hasard.

Correction ▼ [006019]

Exercice 5689

On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0.02$ est défectueuse.

1. On contrôle un lot de 1000 pièces :

   Soit X la variable aléatoire : «nombre de pièces défectueuses parmi 1000». Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale); quel est son espérance, son écart-type ?
2. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 18 et 22 ($P[18 \leqslant X \leqslant 22]$); on fera les calculs avec et sans correction de continuité. On fera également les calculs avec la vraie loi pour comparer.

Correction ▼ [006020]

Exercice 5690

On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion $p = 0,05$ est fausse et sur des pièces de 2 euros dont une proportion $p' = 0,02$ est fausse. Il y a dans un lot 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de 2 euros.

1. On prend une pièce au hasard dans ce lot : quelle est la probabilité qu'elle soit fausse ?
2. Sachant que cette pièce est fausse, quelle est la probabilité qu'elle soit de un euro ?
3. On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit X la variable aléatoire : «nombre de pièces fausses parmi 1000». Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale); quelle est son espérance, son écart-type ?
4. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52.

Correction ▼ [006021]

Exercice 5691

On jette un dé 180 fois. On note X la variable aléatoire : «nombre de sorties du 4».

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32.

Correction ▼ [006022]

Exercice 5692

Aux dernières élections présidentielles en France, le candidat A a obtenu 20% des voix. On prend au hasard dans des bureaux de vote de grandes villes des lots de 200 bulletins : on note X la variable aléatoire «nombre de voix pour A dans les différents bureaux».

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Comment peut-on l'approcher ?
3. Quelle est alors la probabilité pour que : X soit supérieur à 45 ? X compris entre 30 et 50 ?

4. Pour un autre candidat B moins heureux le pourcentage des voix est de 2%. En notant Y le nombre de voix pour B dans les différents bureaux, sur 100 bulletins, reprendre les questions 1 et 2. Quelle est alors la probabilité pour que : Y soit supérieur à 5 ? Y compris entre 1 et 4 ?

Correction ▼ [006023]

Exercice 5693

On suppose qu'il y a une probabilité égale à p d'être contrôlé lorsqu'on prend le tram. Monsieur A fait n voyages par an sur cette ligne.

1. On suppose que $p = 0.10$, $n = 700$.
   (a) Quelle est la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année ?
   (b) Monsieur A voyage en fait toujours sans ticket. Afin de prendre en compte la possibilité de faire plusieurs passages avec le même ticket, on suppose que le prix d'un ticket est de 1,12 euros. Quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?
2. On suppose que $p = 0.50$, $n = 300$. Monsieur A voyage toujours sans ticket. Sachant que le prix d'un ticket est de 1,12 euros, quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?

Correction ▼ [006024]

---

238 260.05 Espérance, variance

Exercice 5694

On lance deux dés à 6 faces. Soit X_1 le résultat du premier dé, X_2 le résultat du deuxième dé, et $S = X_1 + X_2$.

1. Calculer $E(X_1)$ et $Var(X_1)$.
2. En déduire $E(S)$ et $\mathrm{Var}(S)$.

Correction ▼ [006916]

Exercice 5695

Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules blanches.

1. On effectue des tirages successifs en remettant après chaque tirage la boule sortie dans l'urne. Sur trois tirages, combien de boules rouges va-t-on tirer en moyenne ? En moyenne, combien faudra-t-il effectuer de tirages avec remise avant de tirer une boule rouge ?
2. On effectue maintenant 3 tirages sans remise. Combien de boules rouges va-t-on tirer en moyenne ?

[006917]

Exercice 5696

Pour une élection, une population de N individus a eu à choisir entre voter pour le candidat A ou le candidat B. On note m le nombre de personnes ayant voté pour A. On interroge au hasard k individus différents dans cette population ($1 \leqslant k \leqslant N$).

1. On désigne par $a_1, \dots, a_m$ les m personnes qui ont voté pour A. Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, on note X_i l'indicatrice de l'événement "la personne a_i est interrogée". Quelle est la loi de X_i ?
2. Déterminer l'espérance ainsi que la matrice de covariance de $(X_1, \dots, X_m)$.
3. On pose $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$. Quelle est la loi de S ?
4. Déterminer le nombre moyen de personnes votant pour A sur k personnes tirées au hasard.
5. Déterminer la variance de S.

[006918]

Exercice 5697

Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires (X,Y), avec X prenant ses valeurs dans $\{0,3\}$ et Y prenant ses valeurs dans $\{0,1\}$. Calculer la covariance entre X et Y, puis la corrélation entre X et Y.

$X \setminus Y$	0	1
0	$1/3$	0
3	$1/6$	$1/2$

Correction ▼ [006919]

Exercice 5698

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{1,\dots,N\}$. On pose $X = U - V$ et $Y = U + V$. Déterminer la covariance entre X et Y.

Correction ▼ [006920]

239 260.06 Droite de régression

240 260.07 Fonctions génératrices

241 260.99 Autre

242 261.01 Densité de probabilité

Exercice 5699

Madame Michel et Monsieur Lustucru vont chaque semaine au marché hebdomadaire de Kerplou. Madame Michel arrive à une heure aléatoire entre 8h et 12h et elle reste 30 minutes ; on suppose que son heure d'arrivée suit une loi uniforme. Monsieur Lustucru arrive à 10h pile et reste également 30 minutes. Quelle est la probabilité pour qu'ils se trouvent ensemble au marché à un certain moment ?

Correction ▼ [006924]

Exercice 5700

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme de densité $\mathbb{1}_{[0,1]}$ et $Z = X + Y$. Calculer la loi de Z.

Correction ▼ [006925]

Exercice 5701 Fonction de répartition, indépendance

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$ et $Z = \min(X_1,\dots,X_n)$. Déterminer la loi de Z.

Correction ▼ [006926]

243 261.02 Loi faible des grands nombres

Exercice 5702

On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. Peut-on estimer la probabilité que la production de demain dépasse 75 pièces ?

2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que l'écart-type de la production quotidienne est de 5 pièces ?

Correction ▼ [006927]

Exercice 5703

Pour étudier les particules émises par une substance radioactive, on dispose d'un détecteur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules qui atteignent le détecteur pendant un intervalle de temps Δt. Le nombre maximal de particules que le détecteur peut compter pendant un intervalle de temps Δt est de 10^3. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10^2$. Donner une majoration de la probabilité que X dépasse 10^3.

(On rappelle que l'espérance et la variance d'une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ sont égales à λ.)

Correction ▼ [006928]

244 261.03 Convergence en loi

245 261.04 Loi normale

Exercice 5704

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $N(m,\sigma^2)$. Quelle est la probabilité que X soit supérieure à m ?
2. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale $N(0,1)$. Quelle est la loi de $-Y$? la loi de $\sigma Y+m$?
3. En utilisant la table de $\mathscr{N}(0,1)$, déterminer $P(0\leqslant Y\leqslant 0,8)$, $P(-0,6\leqslant Y\leqslant 0)$ et $P(Y\leqslant 0,8)$.

[006921]

Exercice 5705

Soient X_1, X_2, X_3, trois variables aléatoires de loi normale indépendantes telles que $E(X_1)=100$, $\mathrm{Var}(X_1)=100$, $E(X_2)=20$, $\mathrm{Var}(X_2)=4$, $E(X_3)=50$, $\mathrm{Var}(X_3)=25$. On forme la combinaison linéaire $Y=X_1+2X_2-X_3$. Déterminer $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$. Quelle est la loi de Y ? [006922]

Exercice 5706

Une machine est conçue pour confectionner des paquets d'un poids de 500g, mais ils n'ont pas exactement tous le même poids. On a constaté que la distribution des poids autour de la valeur moyenne de 500g avait un écart-type de 25g.

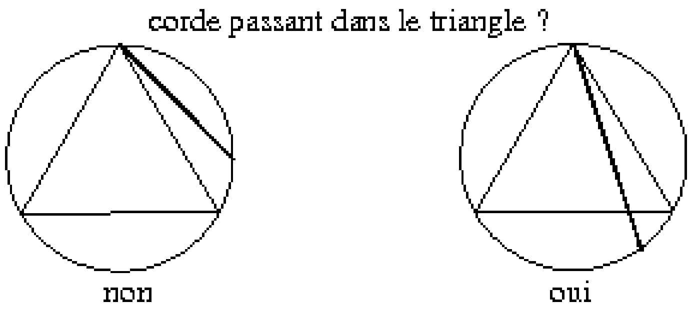
1. Par quelle loi est-il raisonnable de modéliser le poids des paquets ?
2. Sur 1000 paquets, quel est le nombre moyen de paquets pesant entre 480g et 520g ? (*utiliser la table de* $\mathscr{N}(0,1)$)
3. Combien de paquets pèsent entre 480g et 490g ?
4. Sur 1000 paquets, quel est le nombre moyen de paquets pesant plus de 450g ?
5. Trouver a tel que les 9/10 de cette production aient un poids compris entre $500-a$ et $500+a$.

Correction ▼ [006923]

246 261.99 Autre

Exercice 5707 Le paradoxe des cordes de Bertrand

On considère un cercle. On choisit une corde au hasard et on cherche la probabilité pour que cette corde passe à l'intérieur d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont un des sommets est une des extrémités de la corde (voir la figure) ou, de façon équivalente, pour que cette corde soit plus longue que le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle.



Cet exercice est volontairement formulé de façon imprécise. Essayez de trouver la solution de façon intuitive (pas de théorème à utiliser ici). Il est fort probable que vous ne trouviez pas tous la même probabilité. Historiquement, ce genre de paradoxe a motivé l'introduction d'une théorie rigoureuse du hasard.

Correction ▼ [006954]

247 262.01 Estimation

Exercice 5708

Le staff médical d'une grande entreprise fait ses petites statistiques sur le taux de cholestérol de ses employés ; les observations sur 100 employés tirés au sort sont les suivantes.

taux de cholestérol en cg :(centre classe)	effectif d'employés :
120	9
160	22
200	25
240	21
280	16
320	7

1. Calculer la moyenne m_e et l'écart-type σ_e sur l'échantillon.
2. Estimer la moyenne et l'écart-type pour le taux de cholestérol dans toute l'entreprise.
3. Déterminer un intervalle de confiance pour la moyenne.
4. Déterminer la taille minimum d'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure à 10.

Correction ▼ [006028]

Exercice 5709

Sur 12 000 individus d'une espèce, on a dénombré 13 albinos. Estimer la proportion d'albinos dans l'espèce. On comparera les méthodes d'approximation des lois réelles par d'autres lois classiques.

Correction ▼ [006029]

248 262.02 Tests d'hypothèses, intervalle de confiance

Exercice 5710

Un échantillon de 10 000 personnes sur une population étant donné, on sait que le taux moyen de personnes à soigner pour un problème de cholestérol élevé est de 7,5%. Donner un intervalle dans lequel on soit «sûr» à 95%, de trouver le nombre exact de personnes à soigner sur les 10 000.

Correction ▼ [006025]

Exercice 5711

Un vol Marseille - Paris est assuré par un Airbus de 150 places; pour ce vol des estimations ont montré que la probabilité pour qu'une personne confirme son billet est $p = 0.75$. La compagnie vend n billets, $n > 150$. Soit X la variable aléatoire «nombre de personnes parmi les n possibles, ayant confirmé leur réservation pour ce vol».

1. Quelle est la loi exacte suivie par X ?
2. Quel est le nombre maximum de places que la compagnie peut vendre pour que, à au moins 95%, elle soit sûre que tout le monde puisse monter dans l'avion, c'est-à-dire n tel que : $P[X > 150] \leqslant 0.05$?
3. Reprendre le même exercice avec un avion de capacité de 300 places; faites varier le paramètre $p = 0.5$; $p = 0.8$.

Correction ▼ [006026]

Exercice 5712

Un petit avion (liaison Saint Brieuc-Jersey) peut accueillir chaque jour 30 personnes; des statistiques montrent que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui se présentent au comptoir parmi 30 personnes qui ont réservé».

1. Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale); quelle est son espérance, son écart-type ?
2. Donner un intervalle de confiance au seuil 95%, permettant d'estimer le nombre de clients à prévoir.

Correction ▼ [006027]

Exercice 5713

Une compagnie aérienne a demandé des statistiques afin d'améliorer la sûreté au décollage et définir un poids limite de bagages. Pour l'estimation du poids des voyageurs et du poids des bagages, un échantillon est constitué de 300 passagers qui ont accepté d'être pesés : on a obtenu une moyenne m_e de 68kg, avec un écart-type σ_e de 7 kg.

1. Définir un intervalle de confiance pour la moyenne des passagers. (On admet que le poids des passagers suit une loi normale de moyenne m, d'écart-type σ.)
2. Montrer que l'on peut considérer que le poids des passagers est une variable aléatoire X de moyenne 70 kg, d'écart-type 8 kg.
3. En procédant de même pour le poids des bagages, on admet les résultats :
   — Si le poids maximum autorisé est de 20 kg, le poids des bagages peut être considéré comme une variable aléatoire Y de moyenne 15 kg, d'écart-type 5 kg.
   — La capacité de l'avion est de 300 passagers; l'avion pèse, à vide, 250 tonnes. Le décollage est interdit si le poids total dépasse 276.2 tonnes. Quelle est la probabilité pour que le décollage soit interdit ?

Correction ▼ [006030]

Exercice 5714

Afin de mieux satisfaire leurs clients, une grande société fournisseur d'accès internet fait ses statistiques sur le nombre d'appels reçus en *hotline*, elle pourra ainsi évaluer le temps d'attente pour le client et le nombre d'employés à mettre au standard; les résultats de l'enquête portent sur 200 séquences consécutives de une minute, durant lesquelles le nombre d'appels moyen a été de 3 appels par minute. On suppose que les appels sont répartis également dans le temps : on partage un intervalle de temps en unités de une seconde; alors dans chaque unité de temps, il y a au plus un appel.

1. Quelle est la loi de probabilité du nombre d'appels reçus en 4 minutes ?
2. Montrer que l'on peut approcher cette loi par une loi de Poisson.
3. Donner un intervalle de confiance pour le nombre moyen d'appels en 4 minutes.

Correction ▼ [006031]

Exercice 5715

On s'intéresse au problème des algues toxiques qui atteignent certaines plages de France ; après étude on constate que 10% des plages sont atteintes par ce type d'algues et on veut tester l'influence de rejets chimiques nouveaux sur l'apparition de ces algues. Pour cela 50 plages proches de zones de rejet chimiques, sont observées ; on compte alors le nombre de plages atteintes par l'algue nocive : on constate que 10 plages sont atteintes par l'algue. Pouvez-vous répondre à la question «Les rejets chimiques ont-t-il modifié, de façon significative, avec le risque $\alpha = 0.05$, le nombre de plages atteintes ?»

Correction ▼ [006032]

Exercice 5716

On veut étudier la liaison entre les caractères : «être fumeur» (plus de 20 cigarettes par jour, pendant 10 ans) et «avoir un cancer de la gorge», sur une population de 1000 personnes, dont 500 sont atteintes d'un cancer de la gorge. Voici les résultats observés :
Tableau observé

Observé	cancer	non cancer	marge
fumeur	342	258	600
non fumeur	158	242	400
marge	500	500	1000

Faire un test d'indépendance pour établir la liaison entre ces caractères.

Correction ▼ [006033]

Exercice 5717

On mesure une certaine grandeur physique G avec un appareil dont la précision est caractérisée par l'écart-type σ. On fait l'hypothèse que les mesures suivent une loi normale.

1. On effectue une seule mesure, on trouve $g_1 = 1,364$. On suppose connue la précision de l'appareil de mesure : $\sigma = 4,3.10^{-3}$ (unité arbitraire). Déterminer un intervalle de confiance contenant, avec une probabilité de 90%, la valeur G.
2. On ignore la précision de l'appareil de mesure. On effectue 5 mesures. On trouve :

1,365	1,371	1,368	1,359	1,362

   Donner des estimations de G et de σ. Déterminer un intervalle de confiance contenant, avec une probabilité de 90%, la valeur G.

Correction ▼ [006929]

Exercice 5718

On interroge 1000 électeurs, 521 d'entre eux ont déclaré avoir l'intention de voter pour le candidat A. Indiquer avec une probabilité de 0,95 entre quelles limites se situe la proportion du corps électoral favorable à A au moment du sondage.

Correction ▼ [006930]

Exercice 5719

La firme Comtec vient de développer un nouveau dispositif électronique. Avant de le mettre en production, on veut en estimer la fiabilité en termes de durée de vie. D'après le bureau de Recherche et Développement de l'entreprise, l'écart-type de la durée de vie de ce dispositif serait de l'ordre de 100 heures.
Déterminer le nombre d'essais requis pour estimer, avec un niveau de confiance de 95%, la durée de vie moyenne d'une grande production de sorte que la marge d'erreur dans l'estimation n'excède pas $\pm$ 50 heures. Même question pour une marge d'erreur n'excédant pas $\pm$ 20 heures.

Correction ▼ [006931]

Exercice 5720

On effectue un sondage sur un échantillon de 10 000 personnes à la veille d'un référendum : 4903 d'entre elles s'apprêtent à voter oui, et 5097 à voter non. Quel risque d'erreur court-on en prédisant la victoire du non ?
[006932]

Exercice 5721

Chaque jour, un train subit un retard aléatoire au départ, évalué en minutes, indépendant des retards des autres jours et dont la loi est approximativement $\mathscr{E}(\lambda)$ (*on rappelle qu'une loi exponentielle* $\mathscr{E}(\lambda)$ *a pour espérance* $1/\lambda$ *et pour écart-type* $1/\lambda$). Sur 400 jours, le retard moyen est de 10 minutes. Donner un intervalle de confiance de niveau approximativement 95% pour λ.

Correction ▼ [006933]

Exercice 5722

Sur un lot de 700 boulons soumis à des essais de rupture, 300 ont résisté. Sur un second lot de 225, 125 ont résisté. Peut-on admettre, au seuil de 5%, que ces deux lots appartiennent à la même population ?

Correction ▼ [006934]

Exercice 5723

A l'issue d'une expérience de 1000 tirages, un générateur de chiffres aléatoires a donné les résultats suivants :

chiffre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
nombre d'apparitions	87	103	90	110	81	108	85	123	90	123

Tester au niveau 5% l'hypothèse selon laquelle le générateur simule de façon satisfaisante un tirage uniforme sur les entiers $\{0,\ldots,9\}$.

Correction ▼ [006935]

Exercice 5724

Le couvert végétal du domaine vital d'un élan d'Amérique se composait de feuillus (25,8% de la superficie), de forêts mixtes (38% de la superficie), de résineux (25,8% de la superficie) et d'un marécage (10,4% de la superficie). Dans ce domaine, l'élan fut localisé à 511 reprises au cours de l'année : 118 fois dans les feuillus, 201 fois dans les forêts mixtes, 110 fois dans les résineux et 82 fois dans le marécage. [Source : B. Scherrer "Biostatistique", éditeur Gaetan Morin, 1984, page 556]
L'élan fréquente-t-il indifféremment les quatre types de végétation de son domaine vital ? [006936]

Exercice 5725

A la suite de la formulation des lois de Mendel, Bateson a effectué des croisements avec des pois de senteur afin d'étudier la couleur (pourpre ou rouge) et la forme du pollen (allongée ou ronde). Ces croisements ont été fait sur des hybrides qui sont de couleur pourpre et ont un pollen de forme allongé ; en supposant que la couleur et la forme du pollen sont chacun controlés par un gène qui a deux formes différentes (appelées allèles) notées S et s pour la couleur et T, t pour la forme du pollen, le génotype d'un pois hybride pour ces deux caractères est (Ss,Tt). Les majuscules désignent les allèles dominants (ici la couleur pourpre et la forme allongée du pollen). Les résultats des croisements sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	couleur pourpre	couleur rouge
pollen allongé	1528	117
pollen rond	106	381

En faisant l'hypothèse que les quatre possibilités de transmission des allèles pour chacun de ces deux gènes sont équiprobables, peut-on affirmer que les gènes contrôlant ces deux caractères sont transmis indépendamment l'un de l'autre ?

Comment s'assurer que l'hypothèse sur la transmission équiprobable des quatre possibilités de transmission des allèles est valide pour chacun de ces deux gènes ? [006937]

249 262.99 Autre

250 300.00 Groupe quotient, théorème de Lagrange

Exercice 5726

Soit G un groupe non réduit à un élément. Un sous-groupe M de G est dit *maximal* si le seul sous-groupe de G, distinct de G et contenant M, est M lui-même. Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que $6\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe maximal de $\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $5\mathbb{Z}$ est un sous-groupe maximal de $\mathbb{Z}$.
2. On pose $G := \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Soit H_1 le sous-groupe de G engendré par $\overline{4}$ et H_2 le sous-groupe de G engendré par $\overline{2}$.
   (a) Expliciter les éléments de H_1 et H_2.
   (b) Montrer que H_1 n'est pas un sous-groupe maximal de G et que H_2 est un sous- groupe maximal de G.

[001434]

Exercice 5727

Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [001435]

Exercice 5728

Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$. [001436]

Exercice 5729

Soit G le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si $q \in \mathbb{Q}$, on note $\mathrm{cl}(q)$ la classe de q modulo $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathrm{cl}(\frac{35}{6}) = \mathrm{cl}(\frac{5}{6})$ et déterminer l'ordre de $\mathrm{cl}(\frac{35}{6})$.
2. Montrer que si $x \in G$ il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ tel que $x = \mathrm{cl}(\alpha)$.
3. Montrer que tout élément de G est d'ordre fini et qu'il existe des éléments d'ordre arbitraire.

[001437]

Exercice 5730

Décrire le groupe-quotient $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$ et montrer qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [001438]

Exercice 5731

Montrer que tout quotient d'un groupe monogène est monogène. [001439]

Exercice 5732

Soient G le groupe-produit $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et H le sous-groupe de G engendré par $(\overline{3}, \overline{2})$. Écrire la décomposition de G suivant les classes à gauche modulo H. Décrire le groupe-quotient G/H. [001440]

Exercice 5733

Soit G un groupe $Z(G) = \{h \in G; \forall g \in g, gh = hg\}$.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que si $G/Z(G)$ est monogène G est cyclique.

[001441]

Exercice 5734

Soit G un groupe ; on note $D(G)$ le groupe engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$; $g,h \in G$.

1. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G.
2. Montrer que $G/D(G)$ est commutatif ; plus généralement montrer qu'un sous-groupe distingué H de G contient $D(G)$ si et seulement si G/H est commutatif.

Correction ▼ [001442]

Exercice 5735

Soit G un groupe ; on note, pour tout $g \in G$ φ_g l'application $x \mapsto gxg^{-1}$ de G dans lui-même et $\mathrm{Int}(G) = \{\varphi_g; g \in G\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Soit $f : G \to \mathrm{Int}(G)$ l'application $g \mapsto \varphi_g$. Montrer que f est un homomorphisme de groupe. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$.
3. En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$.

[001443]

Exercice 5736

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$. On suppose que K est distingué dans G.

1. Montrer que $HK = KH$ et que HK est un sous-groupe de G.
2. Montrer que H et K sont des sous-groupes de KH et que $K \cap H$ est un sous-groupe distingué de H et que K est distingué dans KH.
3. Soit $\varphi : H \to (HK)/K$ la restriction à H de l'application quotient. Calculer le noyau et l'image de φ. En déduire que les groupes $H/(K \cap H)$ et $(HK)/K$ sont isomorphes.

[001444]

Exercice 5737

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes distingués de G avec $H \subset K$.

1. Montrer que K/H est un sous-groupe distingué de G/H.
2. Montrer que le quotient $(G/H)/(K/H)$ est isomorphe à G/K.

[001445]

Exercice 5738

Soit G le sous-groupe de $Gl(2,\mathbb{R})$ engendré par les matrices $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit H le sous-groupe de G engendré par AB. Calculer $|H|$
2. Montrer que H est distingué dans G. Calculer le quotient G/H; en déduire $|G|$.

Correction ▼ [001446]

Exercice 5739

Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que l'application $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x,y) \mapsto 3x + 6y$ est un morphisme de groupes.

(b) Déterminer le noyau $\ker f$ de f et montrer qu'il n'existe pas $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\ker f = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$.

(c) Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(-2,1)$ est isomorphe au groupe $3\mathbb{Z}$.

2. Soit G le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2,0)$ et $(0,2)$. Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{Z}^2/G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [001447]

Exercice 5740

1. Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$. (indication : utiliser la division euclidienne).
2. Rappeler pourquoi ces sous-groupes sont distingués. On peut donc considérer les groupes quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
4. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe engendré par un cycle de longueur n dans S_N ($N \geqslant n$).
5. Plus généralement, montrer qu'il existe, à isomorphisme près, un seul groupe monogène (ie engendré par un seul élément) d'ordre n, appelé groupe cyclique d'ordre n.

[001448]

Exercice 5741

Rappel : si A est un anneau (en particulier, si A est un corps), on note $GL_n(A)$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficient dans A, qui sont inversibles. $GL_n(A)$ forme un groupe pour la loi $\times$ de multiplication des matrices, appelé groupe linéaire. Une matrice carrée de dimension n est dans $GL_n(A)$ ssi son déterminant est un inversible de l'anneau A (ce qui revient à dire, lorsque A est un corps, que son déterminant est non nul). Pour simplifier, on suppose dans l'exercice que A est un corps, noté $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes.
2. On note $SL_n(\mathbb{K}) = \ker(\det)$. Dire pourquoi $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathbb{K})$ et montrer que $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$.
3. Reconnaître $GL_1(\mathbb{K})$ et $SL_1(\mathbb{K})$.
4. Montrer que les matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures) de $GL_n(\mathbb{K})$ forment un sous-groupe. Sont-ils distingués ?
5. Montrer que $Z(GL_n(\mathbb{K}))$ est le sous-groupe formé par les homothéties.

[001449]

251 301.00 Ordre d'un élément

Exercice 5742

On dispose d'un échiquier et de dominos. Les dominos sont posés sur l'échiquier soit horizontalement, soit verticalement de façon à couvrir deux cases contiguës. Est-il possible de couvrir ainsi entièrement l'échiquier à l'exception des deux cases extrêmes, en haut à gauche et en bas à droite ? Reprendre cette question dans le cas où l'on exclut deux cases quelconques à la place des deux cases extrêmes ci-dessus.

Indication ▼ [002101]

Exercice 5743

(I) Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X ordonné par l'inclusion. Soit φ une application croissante de $\mathscr{P}(X)$ dans lui-même.

(a) Montrer que l'ensemble E des parties A de X qui vérifient $\varphi(A) \subset A$ est non vide et admet un plus petit élément A_0.

(b) Montrer que $\varphi(A_0) = A_0$.

(II) Soit deux ensembles X et Y munis de deux injections g de X dans Y et h de Y dans X.

(a) Montrer que l'application de $\mathscr{P}(X)$ dans lui-même défini par

$$\varphi(A) = X - h(Y - g(A))$$

est croissante.

(b) Déduire de ce qui précède qu'il existe une bijection de X sur Y.

Indication ▼ Correction ▼ [002102]

Exercice 5744

Soit X un ensemble non vide et ordonné. Montrer qu'il existe une partie Y totalement ordonnée de X qui vérifie la propriété

$$\forall x \notin Y \quad \exists y \in X \quad x \text{ et } y \text{ non comparables}$$

L'ensemble Y est-il unique ?

Correction ▼ [002103]

Exercice 5745

Un jardinier doit planter 10 arbres en 5 rangées de 4 arbres. Donner une disposition possible. Quel est le nombre minimal d'arbres dont il doit disposer pour planter 6 rangées de 5 arbres ? Généraliser.

Indication ▼ [002104]

Exercice 5746

Soit n et p deux entiers, $p \leqslant n$. Démontrer, grâce à un dénombrement, la formule suivante :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$$

Indication ▼ [002105]

Exercice 5747

Soit n un entier impair non divisible par 3. Montrer que 24 divise $n^2 - 1$.

Indication ▼ [002106]

Exercice 5748

On considère sur $\mathbb{R}$ la loi de composition définie par $x \star y = x + y - xy$. Cette loi est-elle associative, commutative ? Admet-elle un élément neutre ? Un réel x admet-il un inverse pour cette loi ? Donner une formule pour la puissance n-ième d'un élément x pour cette loi.

Indication ▼ Correction ▼ [002107]

Exercice 5749

Soit E un monoïde unitaire. On dit qu'un élément a de E admet un *inverse à gauche* (resp. *inverse à droite*) s'il existe $b \in E$ tel que $ba = e$ (resp. $ab = e$).

(a) Supposons qu'un élément a admette un inverse à gauche b qui lui-même admet un inverse à gauche. Montrer que a est inversible.

(b) Supposons que tout élément de E admette un inverse à gauche. Montrer que E est un groupe.

Correction ▼ [002108]

Exercice 5750

Soit E un ensemble muni d'une loi $\star$ associative

(i) admettant un élément neutre à gauche e (i.e. $\forall x \in E \quad e \star x = x$) et
(ii) tel que tout élément possède un inverse à gauche (i.e. $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad y \star x = e$).
Montrer que E est un groupe pour la loi $\star$.

Indication ▼ Correction ▼ [002109]

Exercice 5751

Les rationnels non nuls forment-ils un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^\times$?

Indication ▼ [002110]

Exercice 5752

Montrer que l'ensemble $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}^*$, ainsi que l'ensemble $\{\frac{1+2m}{1+2n} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Indication ▼ [002111]

Exercice 5753

Montrer que l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes de déterminant non nul est un groupe pour la multiplication.

Indication ▼ [002112]

Exercice 5754

On considère l'ensemble E des matrices carrées à coefficients réels de la forme

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^\times, \quad b \in \mathbb{R}$$

muni du produit des matrices.

(a) Montrer que E est ainsi muni d'une loi de composition interne associative.

(b) Déterminer tous les éléments neutres à droite de E.

(c) Montrer que E n'admet pas d'élément neutre à gauche.

(d) Soit e un élément neutre à droite. Montrer que tout élément de E possède un inverse à gauche pour cet élément neutre, i.e.

$$\forall g \in E \quad \exists h \in E \quad hg = e$$

Indication ▼ [002113]

Exercice 5755

Soit G un groupe vérifiant

$$\forall x \in G \quad x^2 = e$$

Montrer que G est commutatif. Déduire que si G est fini, alors l'ordre de G est une puissance de 2.

Correction ▼ [002114]

Exercice 5756

Soit G un groupe d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément $x \in G$, $x \neq e$ tel que $x^2 = e$.

Indication ▼ Correction ▼ [002115]

Exercice 5757

Soit G un groupe d'ordre impair. Montrer que l'application f de G sur lui-même donnée par $f(x) = x^2$ est une bijection. En déduire que l'équation $x^2 = e$ a une unique solution, à savoir $x = e$.

Indication ▼ [002116]

Exercice 5758

Soient G un groupe fini et m un entier premier à l'ordre de G. Montrer que pour tout $a \in G$ l'équation $x^m = a$ admet une unique solution.

Indication ▼ [002117]

Exercice 5759

Soit G un groupe et $H < G$, $K < G$ deux sous-groupes de G. On suppose qu'il existe deux éléments $a, b \in G$ tels que $Ha \subset Kb$. Montrer que $H < K$.

Correction ▼ [002118]

Exercice 5760

Soit H une partie non vide d'un groupe G. On pose $H^{-1} = \{x^{-1}; x \in H\}$. Montrer les équivalences suivantes :

(a) $H < G \Leftrightarrow HH^{-1} \subset H$

(b) $H < G \Leftrightarrow \forall a \in H \quad Ha = H$.

Indication ▼ [002119]

Exercice 5761

Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.

(a) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H < K$ ou $K < H$.

(b) Montrer qu'un groupe ne peut être la réunion de deux sous-groupes propres.

Correction ▼ [002120]

Exercice 5762

Montrer que dans un groupe G, toute partie non vide finie stable par la loi de composition est un sous-groupe. Donner un contre-exemple à la propriété précédente dans le cas d'une partie infinie.

Correction ▼ [002121]

Exercice 5763

(a) Montrer que les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où n est un entier.

(b) Un élément x d'un groupe est dit d'ordre fini s'il existe un entier k tel que $x^k = e_G$. Montrer que $\{k \in \mathbb{Z} \mid x^k = e_G\}$ est alors un sous-groupe non nul de $\mathbb{Z}$. On appelle ordre de x le générateur positif de ce sous-groupe.

(c) Soit x un élément d'un groupe G. Montrer que x est d'ordre d si et seulement si le sous-groupe $< x >$ de G engendré par x est d'ordre d.

Indication ▼ [002122]

Exercice 5764

On pose $SL_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$.

(a) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

(b) On considère les deux matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Démontrer que A et B sont d'ordres finis mais que AB est d'ordre infini.

Indication ▼ [002123]

Exercice 5765

Soit G un groupe abélien et a et b deux éléments d'ordres finis. Montrer que ab est d'ordre fini et que l'ordre de ab divise le ppcm des ordres de a et b. Montrer que si les ordres de a et b sont premiers entre eux, l'ordre de ab est égal au ppcm des ordres de a et de b.

Correction ▼ [002124]

Exercice 5766

Soit G un groupe commutatif. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de G forme un sous-groupe de G.

Indication ▼ [002125]

Exercice 5767

Déterminer tous les sous-groupes de $\mu_2 \times \mu_2$.

Indication ▼ [002126]

Exercice 5768

Soient G un groupe fini et commutatif et $\{G_i\}_{i\in I}$ la famille des sous-groupes propres maximaux de G. On pose $F = \bigcap_{i\in I} G_i$. Montrer que F est l'ensemble des éléments a de G qui sont tels que, pour toute partie S de G contenant a et engendrant G, $S - \{a\}$ engendre encore G.

Correction ▼ [002127]

Exercice 5769

Déterminer tous les groupes d'ordre $\leqslant 5$. En déduire qu'un groupe non commutatif possède au moins 6 éléments. Montrer que le groupe symétrique S_3 est non commutatif.

Indication ▼ [002128]

Exercice 5770

Le centre d'un groupe G est l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutents à tous les éléments de G. Vérifier que $Z(G)$ est un sous-groupe abélien de G. Montrer que si G possède un unique élément d'ordre 2, alors cet élément est dans le centre $Z(G)$.

Indication ▼ [002129]

Exercice 5771

Soient G un groupe et H et K deux sous-groupes de G.
(a) Montrer que l'ensemble $HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
(b) Montrer que si H et K sont finis alors $|HK| = \dfrac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$.

Correction ▼ [002130]

Exercice 5772

Déterminer tous les sous-groupes du groupe symétrique S_3.

Correction ▼ [002131]

Exercice 5773

Montrer que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.

Indication ▼ Correction ▼ [002132]

Exercice 5774

Soit G un groupe d'ordre $2p$ avec p un nombre premier. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre p.

Correction ▼ [002133]

Exercice 5775

Soient $n \geqslant 0$ un entier et p un nombre premier tels que p divise $2^{2^n}+1$. Montrer que p est de la forme $p = k2^{n+1}+1$ où k est un entier.

Indication ▼ Correction ▼ [002134]

Exercice 5776

Montrer que tout entier $n > 0$ divise toujours $\varphi(2^n-1)$ (où φ est la fonction indicatrice d'Euler).

Indication ▼ Correction ▼ [002135]

Exercice 5777

Soit G un groupe multiplicatif (c'est-à-dire dont la loi est notée multiplicativement). Soient a et b deux éléments de G. Montrer que si ab est d'ordre fini, alors ba l'est également et son ordre est celui de ab. [002661]

Exercice 5778

Montrer que les éléments d'ordre fini d'un groupe commutatif G forment un sous-groupe de G. En est-il de même si G n'est pas commutatif ? [002662]

Exercice 5779

Soit G un groupe commutatif multiplicatif, a et b deux éléments de G d'ordres n et m. Que peut-on dire de l'ordre de ab ? Que peut-on dire de plus si l'intersection des sous-groupes G_a et G_b engendrés par a et b est réduite à $\{1_G\}$? [002663]

Exercice 5780

Montrer qu'un groupe fini dont l'ordre est un nombre premier est cyclique. [002664]

Exercice 5781

Soient σ et τ deux transpositions de $\{1,\dots,n\}$. Montrer que $\sigma\circ\tau$ est d'ordre 1, 2 ou 3. [002665]

252 302.00 Groupe symétrique, décomposition en cycles disjoints, signature

Exercice 5782

Pour tout $n \in |||^*$, calculer la signature de la permutation $[n\ n-1\ n-2\dots\ 3\ 2\ 1] \in S_n$. [002666]

Exercice 5783

Soit $n \in |||^*$. Calculer la somme des nombres d'inversions de toutes les permutations de $\{1,2,\dots,n\}$. [002667]

Exercice 5784

Matrices de permutation

Soit $n \in |||^*$ et K un corps. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : S_n &\to M_n(K) \\ \sigma &\mapsto (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \end{aligned}$$

où $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ si } k=l \\ 0 \text{ si } k\neq l \end{cases}$ (symbole de Kronecker) induit un morphisme de groupes de S_n dans $GL_n(K)$. [002668]

Exercice 5785

Soit $\sigma \in S_n$ et $c = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ un cycle. Quelle est la nature de la permutation $\sigma\circ c\circ\sigma^{-1}$? [002669]

Exercice 5786

Expliciter les 24 rotations de l'espace laissant un cube de sommets $A_1, A_2, \ldots, A_8$ invariant.
Décomposer en cycles les permutations de S_8 correspondantes.
Ecrire les produits "typiques" de 2 quelconques de ces permutations. [002670]

253 303.00 Sous-groupe distingué

Exercice 5787

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes d'ordre fini de G tels que $H \cap K = \{e_G\}$.

1. Montrer que le cardinal de HK est égal $|H||K|$.
2. En déduire que si $|G| = pq$ où p est premier et $p > q$ alors G a au plus un sous-groupe d'ordre p. Montrer que si ce sous-groupe existe il est distingué dans G.

Correction ▼ [001428]

Exercice 5788

Soit G un groupe, A une partie non vide de G. On note $N(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$ et $C(A) = \{g \in G; \forall a \in A; gag^{-1} = a\}$. Montrer que $N(A)$ et $C(A)$ sont des sous-groupes de G et que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$. [001429]

Exercice 5789

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. En déduire que si H est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G.
2. On suppose désormais que $\forall h \in H, k \in K : hk = kh$. Montrer que l'application $f : H \times K \to G$ définie par $\forall h \in H, k \in K : f(h,k) = hk$ est un homomorphisme de groupes.
3. Calculer le noyau et l'image de f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit un isomorphisme de groupes.

[001430]

Exercice 5790

1. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $\forall g \in G : gHg^{-1} \subset H$.

   ii) $\forall g \in G : gHg^{-1} = H$.

   iii) $\forall g \in G : gH = Hg$.
2. En déduire que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.

[001431]

Exercice 5791

Soient $T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) : a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que T est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que U est un sous-groupe distingué de T.

[001432]

Exercice 5792

Soit G un groupe.

1. Un sous-groupe H de G est distingué si : $\forall x \in G, xH = Hx$, ce qui est équivalent à dire que H est le noyau d'un morphisme de G dans un groupe. Rappeler la démonstration de cette équivalence.
2. Si H est un sous-groupe d'indice 2 de G, montrer que H est distingué.
3. Si G est abélien, montrer que tout sous-groupe de G est distingué.
4. Le centre de G est l'ensemble $Z(G) = \{z \in G : \forall x \in G, xz = zx\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué.

[001433]

Exercice 5793

Soit G un groupe tel que l'application $x \to x^{-1}$ soit un morphisme. Montrer que G est commutatif.

Indication ▼ [002136]

Exercice 5794

Soient G un groupe et $n \geqslant 1$ un entier tels que l'application $x \to x^n$ soit un automorphisme de G. Montrer que pour tout élément x de G, x^{n-1} appartient au centre de G.

Correction ▼ [002137]

Exercice 5795

Montrer que le groupe des automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe symétrique S_3.

Correction ▼ [002138]

Exercice 5796

Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G est distingué dans G.

Correction ▼ [002139]

Exercice 5797

Soit G un groupe et H un sous-groupe. On suppose que le produit de deux classes à gauche modulo H est une classe à gauche modulo H. Montrer que H est distingué dans G.

Correction ▼ [002140]

Exercice 5798

Soit G un groupe et $\simeq$ une relation d'équivalence sur G. On suppose que cette relation est compatible avec la loi de groupe, c'est-à-dire que

$$\forall x,y \in G \quad \forall x',y' \in G \quad x \simeq x' \quad \text{et} \quad y \simeq y' \quad \text{alors} \quad xy \simeq x'y'$$

Montrer que la classe H de l'élément neutre 1 est un sous-groupe distingué de G et que

$$\forall x,x' \in G \quad x \simeq x' \quad \text{est} \quad \text{équivalent} \quad \text{à} \quad x'x^{-1} \in H$$

Correction ▼ [002141]

Exercice 5799

Soit G un groupe et $K \subset H \subset G$ deux sous-groupes. On suppose que H est distingué dans G et que K est caractéristique dans H (i.e. stable par tout automorphisme de H). Montrer qu'alors K est distingué dans G.

Donner un exemple de groupe G et de deux sous-groupes $K \subset H \subset G$, H étant distingué dans G et K étant distingué dans H, mais K n'étant pas distingué dans G.

Correction ▼ [002142]

Exercice 5800

(a) Montrer que pour tous entiers premiers entre eux $m,n > 0$, les deux groupes $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes. En déduire que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

(b) Le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ? Montrer que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, que $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Etudier le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$.

Indication ▼ [002143]

Exercice 5801

(a) Montrer que si m et n sont des entiers premiers entre eux et qu'un élément z d'un groupe G vérifie $z^m = z^n = e$ où e désigne l'élément neutre de G, alors $z = e$.

(b) Montrer que si m et n sont deux entiers premiers entre eux, l'application

$$\phi : \mu_m \times \mu_n \to \mu_{mn}$$

qui au couple (s,t) fait correspondre le produit st est un isomorphisme de groupes

Indication ▼ [002144]

Exercice 5802

Montrer que les groupes μ_4 et $\mu_2 \times \mu_2$ ne sont pas isomorphes. De façon générale montrer que si m et n sont des entiers qui ne sont pas premiers entre eux, les groupes μ_{mn} et $\mu_m \times \mu_n$ ne sont pas isomorphes.

Correction ▼ [002145]

Exercice 5803

Soit n et d deux entiers tels que d divise n. On définit une application $f : \mu_n \to \mu_d$ qui à s associe $s^{n/d}$. Montrer que f est un morphisme surjectif de groupes dont le noyau est $\mu_{n/d}$.

Indication ▼ [002146]

Exercice 5804

Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes finis. Soit G' un sous-groupe de G. Montrer que l'ordre de $f(G')$ divise les ordres de G' et de H.

Indication ▼ [002147]

Exercice 5805

Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes finis. Soit G' un sous-groupe de G d'ordre premier à l'ordre de H. Montrer que $G' \subset \ker(f)$.

Indication ▼ [002148]

Exercice 5806

Soit G un groupe fini et H et K deux sous-groupes de G. On suppose que H est distingué dans G, que $|H|$ et $|G/H|$ sont premiers entre eux et $|H| = |K|$. Montrer que $H = K$.

Correction ▼ [002149]

Exercice 5807

Soit f un morphisme de groupes $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^\times_{>0}$, $\mathbb{Q}$ étant muni de l'addition et $\mathbb{Q}^\times_{>0}$ muni de la multiplication. Calculer $f(n)$ en fonction de $f(1)$ pour tout entier $n > 0$. Montrer que les deux groupes précédents ne sont pas isomorphes.

Correction ▼ [002150]

Exercice 5808

Trouver tous les morphismes du groupe additif $\mathbb{Q}$ dans lui même.
Même question de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$.
Même question de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Indication ▼ [002151]

Exercice 5809

Etant donnés deux entiers $m,n>0$, déterminer tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, puis tous les automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indication ▼ [002152]

Exercice 5810

Soit G un groupe et H un sous groupe distingué de G d'indice n. Montrer que pour tout $a \in G$, $a^n \in H$. Donner un exemple de sous-groupe H non distingué de G pour lequel la conclusion précédente est fausse.

Correction ▼ [002153]

Exercice 5811

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe distingué d'ordre n et d'indice m. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre n.

Correction ▼ [002154]

Exercice 5812

Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que le groupe quotient est isomorphe à $\mathbb{R}^\times$.

Indication ▼ [002155]

Exercice 5813

On considère les groupes suivants :

$$T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}\quad \mu_n=\{z\in\mathbb{C}\,|\,z^n=1\}\quad \mu_\infty=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\exists n\quad z^n=1\}$$

(a) Montrer les isomorphismes suivants :

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z}\simeq T\quad \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times_{>0}\simeq T\quad \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times\simeq T\quad T/\mu_n\simeq T\quad \mathbb{C}^\times/\mu_n\simeq\mathbb{C}^\times$$

(b) Montrer que $\mu_\infty\simeq\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Quels sont les sous-groupes finis de μ_∞ ?

(c) Montrer qu'un sous-groupe de type fini de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}$ est de la forme $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$. En déduire la forme des sous-groupes de type fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et de μ_∞.

(d) Soit p un nombre premier. Montrer que $\mu_{p^\infty}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\exists n\in|||\quad z^{p^n}=1\}$ est un sous-groupe de μ_∞. Est-il de type fini ?

Correction ▼ [002156]

Exercice 5814

Soit G un sous-groupe d'indice fini du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$. Montrer que $G=\mathbb{C}^\times$.

Correction ▼ [002157]

Exercice 5815

Soit G un groupe et H un sous-groupe contenu dans le centre $Z(G)$ de G. Montrer que H est distingué dans G et que, si le groupe quotient G/H est cyclique, $G=Z(G)$.

Indication ▼ [002158]

Exercice 5816

Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 où p est un nombre premier est abélien. (On utilisera que le centre d'un p-groupe est non trivial, ce qui est une conséquence classique de la "formule des classes" (voir chapitre suivant)).

Indication ▼ [002159]

Exercice 5817

(a) Soit p un nombre premier. Montrer que tout morphisme de groupes entre $\mathbb{F}_p^n$ et $\mathbb{F}_p^m$ est une application $\mathbb{F}_p$ -linéaire.

(b) Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^*$.

(c) Déterminer le nombre d'automorphismes de $\mathbb{F}_p^n$.

Correction ▼ [002160]

Exercice 5818

Déterminer le centre du groupe $GL_n(\mathbb{F}_p)$ des automorphismes de $(\mathbb{F}_p)^n$.

Indication ▼ [002161]

Exercice 5819

Soit p un nombre premier. Montrer qu'un groupe abélien fini, dont tous les éléments différents de l'élément neutre sont d'ordre p, est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

Correction ▼ [002162]

Exercice 5820

(a) Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On note φ la surjection canonique $\varphi : G \to G/H$. Montrer que l'ordre d'un élément x de G est un multiple de l'ordre de $\varphi(x)$.

(b) Pour tout $x \in G$ on pose τ_x l'application de G dans G définie par $\tau_x(y) = xyx^{-1}$. Montrer que τ_x est un automorphisme de G et que l'application

$$x \to \tau_x$$

est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{Aut}(G)$. Quel est le noyau de ce morphisme ?

(c) On suppose que G est fini et que H est un sous-groupe distingué dont l'ordre est le plus petit nombre premier p divisant l'ordre de G. Montrer que pour tout $x \in G$ l'ordre de la restriction à H de τ_x est un diviseur de $p-1$ et de l'ordre de G. En déduire que τ_x restreint à H est l'identité pour tout x et donc que H est contenu dans le centre de G.

Indication ▼ [002163]

Exercice 5821

Soit G un groupe. On appelle groupe des commutateurs de G et l'on note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G et que le quotient $G/D(G)$ est abélien. Montrer que $D(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué de G tel que le quotient de G par ce sous-groupe soit abélien.

Indication ▼ [002164]

Exercice 5822

Soit G un groupe d'ordre p^3 où p est un nombre premier. Montrer que si G n'est pas commutatif, $Z(G) = D(G)$ et que ce sous-groupe est d'ordre p.

Correction ▼ [002165]

254 304.00 Action de groupe

Exercice 5823

Soit $\sigma \in S_5$ défini par

$$\sigma = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

(a) Ecrire la décomposition de σ en produit de cycles de supports disjoints. Quelle est la signature de σ ?

(b) Donner la liste des éléments de $<\sigma>$. Déterminer $<\sigma> \cap A_5$.

Indication ▼ [002166]

Exercice 5824

(a) Montrer que le produit de deux transpositions distinctes est un 3-cycle ou un produit de deux 3-cycles. En déduire que A_n est engendré par les 3-cycles.

(b) Montrer que $A_n = <(123),(124),\ldots,(12n)>$.

Correction ▼ [002167]

Exercice 5825

On appelle cycle une permutation σ vérifiant la propriété suivante : il existe une partition de $\{1,\ldots,n\}$ en deux sous-ensembles I et J tels que la restriction de σ à I est l'identité de I et il existe $a \in J$ tel que $J = \{a,\sigma(a),\ldots,\sigma^{r-1}(a)\}$ où r est le cardinal de J. Le sous-ensemble J est appelé le support du cycle σ.
Un tel cycle sera noté $(a,\sigma(a),\ldots,\sigma^{r-1}(a))$

(a) Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. On considère le sous-groupe C engendré par σ dans S_n. Montrer que la restriction de σ à chacune des orbites de $\{1,\ldots,n\}$ sous l'action de C est un cycle, que ces différents cycles commutent entre eux, et que σ est le produit de ces cycles.

(b) Décomposer en cycles les permutations suivantes de $\{1,\ldots,7\}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

(c) Montrer que si σ est un cycle, $\sigma = (a,\sigma(a),\ldots,\sigma^{r-1}(a))$, la conjuguée $\tau\sigma\tau^{-1}$ est un cycle et que $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a),\tau(\sigma(a)),\ldots,\tau(\sigma^{r-1}(a)))$.

(d) Déterminer toutes les classes de conjugaison des permutations dans S_5 (on considérera leur décomposition en cycles). Déterminer tous les sous-groupes distingués de S_5.

Indication ▼ [002168]

Exercice 5826

Montrer que les permutations circulaires engendrent S_n si n est pair, et A_n si n est impair.

Correction ▼ [002169]

Exercice 5827

Soit I un sous-ensemble de $\{1,\ldots,n\}$ et σ un cycle de support I. Soit τ une autre permutation. Montrer que τ commute avec σ si et seulement si τ laisse invariant I et la restriction de τ à I est égale à une puissance de la restriction de σ à I.

Correction ▼ [002170]

Exercice 5828

Soit H un sous-groupe distingué de S_n contenant une transposition. Montrer que $H = S_n$.

Correction ▼ [002171]

Exercice 5829

Dans le groupe symétrique S_4 on considère les sous-ensembles suivants :

$$H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(\{1,2\}) = \{1,2\}\}$$

$$K = \{\sigma \in S_4 \mid \forall a,b \quad a \equiv b \;[\text{mod } 2] \Rightarrow \sigma(a) \equiv \sigma(b) \;[\text{mod } 2]\}$$

Montrer que H et K sont des sous-groupes de S_4. Les décrire.

Correction ▼ [002172]

Exercice 5830

Montrer que l'ordre d'une permutation impaire est un nombre pair.

Indication ▼ [002173]

Exercice 5831

Montrer que toute permutation d'ordre 10 dans S_8 est impaire.

Correction ▼ [002174]

Exercice 5832

(a) Montrer que tout 3-cycle est un carré. En déduire que le groupe alterné A_n est engendré par les carrés de permutations.

(b) Montrer que A_n est le seul sous-groupe de S_n d'indice 2.

Correction ▼ [002175]

Exercice 5833

Trouver toutes les classes de conjugaison de S_4. Donner la liste des sous-groupes distingués de S_4.

Correction ▼ [002176]

Exercice 5834

Etant donnés un groupe G et un sous-groupe H, on définit le normalisateur $\mathrm{Nor}_G(H)$ de H dans G comme l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gHg^{-1} = H$.

(a) Montrer que $\mathrm{Nor}_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H comme sous-groupe distingué.

(b) Montrer que le nombre de sous-groupes distincts conjugués de H dans G est égal à l'indice $[G : \mathrm{Nor}_G(H)]$ et qu'en particulier c'est un diviseur de l'ordre de G.

Indication ▼ [002177]

Exercice 5835

Montrer que pour $m \geqslant 3$, un groupe simple d'ordre $\geqslant m!$ ne peut avoir de sous-groupe d'indice m.

Indication ▼ Correction ▼ [002178]

Exercice 5836

Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini n. Montrer que l'intersection H' des conjugués de H par les éléments de G est un sous-groupe distingué de G et d'indice fini dans G. Montrer que c'est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans H.

Indication ▼ [002179]

Exercice 5837

a) Montrer qu'un groupe G vérifiant

$$\forall a,b \in G \quad a^2b^2 = (ab)^2$$

est commutatif.

(b) Le but de cette question est de donner un exemple de groupe G vérifiant la propriété

$$\forall a,b \in G \quad a^3b^3 = (ab)^3$$

et qui n'est pas commutatif.

(i) montrer qu'il existe un automorphisme σ de $\mathbb{F}_3^2$ d'ordre 3.

(ii) montrer que le groupe G défini comme le produit semi-direct de $\mathbb{F}_3^2$ par $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3$ agissant sur $\mathbb{F}_3^2$ via σ répond à la question.

Correction ▼ [002180]

Exercice 5838

Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini dans G. On définit sur G la relation xRy si et seulement si $x \in HyH$.

(a) Montrer que R est une relation d'équivalence et que toute classe d'équivalence pour la relation R est une union finie disjointe de classes à gauche modulo H.

Soit $HxH = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d(x)} x_i H$ la partition de la classe HxH en classes à gauche distinctes.

(b) Soit $h \in H$ et i un entier compris entre 1 et $d(x)$; posons $h * x_i H = hx_i H$. Montrer que cette formule définit une action transitive de H sur l'ensemble des classes $x_1 H, \ldots, x_{d(x)} H$ et que le fixateur de $x_i H$ dans cette action est $H \cap x_i H x_i^{-1}$. En déduire que

$$d(x) = [H : H \cap xHx^{-1}]$$

et qu'en particulier $d(x)$ divise l'ordre de G.

(c) Montrer que H est distingué dans G si et seulement si $d(x) = 1$ pour tout $x \in G$.

(d) On suppose que G est fini et que $[G : H] = p$, où p est le plus petit nombre premier divisant l'ordre de G. Le but de cette question est de montrer que H est distingué dans G.

(i) Montrer que pour tout $x \in G$, $d(x) \leqslant p$. En déduire que $d(x) = 1$ ou $d(x) = p$.

(ii) Montrer que si H n'est pas distingué dans G, il existe une unique classe d'équivalence pour la relation R et que $G = H$, ce qui contredit l'hypothèse $[G : H] = p$.

Correction ▼ [002181]

Exercice 5839

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X.

(a) On suppose que toute orbite contient au moins deux éléments, que $|G| = 15$ et que $\operatorname{card}(X) = 17$. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune.

(b) On suppose que $|G| = 33$ et $\operatorname{card}(X) = 19$. Montrer qu'il existe au moins une orbite réduite à un élément.

Correction ▼ [002182]

Exercice 5840

(a) Soit G un groupe et H un sous-groupe. Montrer que la formule

$$g.g'H = gg'H$$

définit une action de G sur l'ensemble quotient G/H. Déterminer le fixateur d'une classe gH.

(b) Soit G un groupe et X et Y deux ensembles sur lesquels G agit (on parlera de G-ensembles). Soit f une application de X dans Y. On dira que f est compatible à l'action de G (ou que f est un morphisme de G-ensembles) si pour tout élément x de X et tout g dans G, $f(g.x) = g.f(x)$. Montrer que si f est bijective et compatible à l'action de G il en est de même de f^{-1}. On dira dans ce cas que f est un isomorphisme de G-ensembles.

(c) Soit G un groupe agissant transitivement sur un ensemble X (i.e. pour tout couple d'éléments x et y de X il existe au moins un élément g du groupe tel que $g.x = y$). Montrer qu'il existe un sous-groupe H de G tel que X soit isomorphe en tant que G-ensemble à G/H (on prendra pour H le fixateur d'un point quelconque de X).

(d) i) Soit H et K deux sous-groupes de G. Montrer qu'il existe une application f de G/H vers G/K compatible avec l'action de G si et seulement si H est contenu dans un conjugué de K. Montrer que dans ce cas f est surjective. Montrer que G/H et G/K sont isomorphes en tant que G-ensembles si et seulement si H et K sont conjugués dans G.

ii) Soit X et Y deux G-ensembles transitifs. Montrer qu'il existe une application de X vers Y compatible avec l'action de G si et seulement si il existe deux éléments x et y de X et Y tels que le fixateur de x soit contenu dans un conjugué du fixateur de y. Montrer que X et Y sont isomorphes si et seulement si les fixateurs de x et de y sont conjugués dans G.

Correction ▼ [002183]

Exercice 5841

Soit G un groupe fini et X un G-ensemble transitif. On dira que X est *imprimitif* si X admet une partition $X = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant r} X_i$ telle que tout élément g de G respecte cette partition, i.e. envoie un sous-ensemble X_i sur un sous-ensemble X_k (éventuellement $k = i$) et telle que $2 \leqslant r$ et les parties X_i ne sont pas réduites à un élément. Dans le cas contraire on dit que X est *primitif*.

(a) Montrer que dans la décomposition précédente, si elle existe, tous les sous-ensembles X_i ont même nombre m d'éléments.

(b) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que G/H est imprimitif si et seulement s'il existe un sous-groupe propre K de G différent de H tel que $H \subset K \subset G$ (on regardera la partition de G/H en classes modulo K).

(c) Déduire de ce qui précède que X est primitif si et seulement si le fixateur d'un élément x de X est maximal parmi les sous-groupes propres de G.

(d) On suppose ici que X est primitif et que H est un sous-groupe distingué de G dont l'action n'est pas triviale sur X. Montrer qu'alors H agit transitivement sur X.

Indication ▼ Correction ▼ [002184]

Exercice 5842

Montrer qu'un sous-groupe primitif de S_n qui contient une transposition est S_n tout entier.

Indication ▼ Correction ▼ [002185]

Exercice 5843

Soit G un groupe fini et X un G-ensemble. Si k est un entier $(1 \leqslant k)$, on dit que X est k-transitif, si pour tout couple de k-uplets $(x_1, \dots, x_k)$ et $(y_1, \dots, y_k)$ d'éléments de X distincts deux à deux, il existe au moins un élément g de G tel que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $g.x_i = y_i$. Un G-ensemble 1-transitif est donc simplement un G-ensemble transitif.

(a) Montrer que si X est k-transitif, il est aussi l-transitif pour tout l, $1 \leqslant l \leqslant k$.

(b) Montrer que X est 2-transitif si et seulement si le fixateur d'un élément x de X agit transitivement sur $X \setminus \{x\}$.
(c) Montrer que si X est imprimitif, il n'est pas 2-transitif.

(d) Montrer qu'un groupe cyclique C d'ordre premier considéré comme C-ensemble par l'action de translation de C sur lui-même, est primitif mais n'est pas 2-transitif.

(e) Montrer que l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ muni de l'action du groupe S_n est k-transitif pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant n$. En déduire que l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ muni de l'action du groupe S_n est primitif.

(f) Montrer que le fixateur de 1 dans S_n est isomorphe à S_{n-1}. Dans la suite on identifie S_{n-1} à ce fixateur. Déduire de l'exercice 19 que S_{n-1} est un sous-groupe propre maximal de S_n.

Indication ▼ [002186]

Exercice 5844

Décrire le groupe D_n des isométries du plan affine euclidien qui laissent invariant un polygone régulier à n côtés. Montrer que D_n est engendré par deux éléments σ et τ qui vérifient les relations : $\sigma^n = 1$, $\tau^2 = 1$ et $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Quel est l'ordre de D_n ? Déterminer le centre de D_n. Montrer que $D_3 \simeq S_3$.

Indication ▼ [002187]

Exercice 5845

Montrer que le groupe des isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3 qui laissent invariant un tétraèdre régulier de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 est isomorphe à S_4 et que le sous-groupe des isométries directes qui laissent invariant le tétraèdre est isomorphe à A_4.

Exercice 5846

Déterminer le groupe des isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3 qui laissent invariant un cube.
[002189]

Exercice 5847

Soit G un groupe, H un sous-groupe d'indice n dans G.

1. A l'aide des classes à gauche modulo H dans G, construire un homomorphisme $\phi : G \mapsto \mathscr{S}_n$.
2. Montrer que si $N \subset H$ et N est normal dans G, on a $N < \text{Ker } \phi < H$.
3. En déduire que tout groupe fini G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.

[006379]

Exercice 5848

Soit K un corps fini à q éléments, $GL(n,K)$ l'ensemble des matrices (n,n) inversibles à coefficients dans K. Montrer par récurrence sur n que $|GL(n,K)| = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})$ en considérant l'action de $Aut(K^n)$ sur l'espace vectoriel K^n (de base $\{v_1,\dots,v_n\}$), l'orbite et le stabilisateur d'un vecteur de base (v_1 par exemple).
[006380]

Exercice 5849

Soit φ une action d'un groupe G opèrant dans X (notée $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$).

1. Montrer que $G_{g(x)} = gG_xg^{-1}$, où $g \in G$ et G_x désigne le stabilisateur du point x.
2. Si l'action φ est transitive et fidèle et G est abélien alors montrer que φ est simplement transitive.

[006381]

Exercice 5850

Soit $G =< \gamma_1, \gamma_2 >$ opère sur le plan complexe $\mathbb{C}$ où $\gamma_1 : z \mapsto z+1$ et $\gamma_2 : z \mapsto z+i$.

1. Montrer que $G \cong \mathbb{Z}^2$ et G agit isométriquement sur $\mathbb{C}$.
2. Trouver un ensemble fondamental F pour cette action et l'ensemble d'orbites $\mathbb{C}/\!\sim\, = \mathbb{C}/G = \overline{F}/\!\sim$ en identifiant les points équivalents sur le bord de $\overline{F}$.

[006382]

Exercice 5851

1. Montrer que la quantité suivante (appelée forme de Killing) est un produit scalaire sur le groupe matriciel $M_n(\mathbb{R})$.
$$< X,Y >= \text{tr } (X^TY). \quad X,Y \in M_n(\mathbb{R})$$
2. Montrer que la forme de Killing reste invariante par rapport à l'action de $O(n)$ par conjugaison :
$$< gXg^{-1}, gYg^{-1} > = < X,Y >, \;\; X,Y \in M_n(\mathbb{R}),\; g \in O(n).$$

[006383]

Exercice 5852

Soient G un groupe et S un système de générateurs de G contenant avec chaque élément s son inverse s^{-1}. Rappelons la construction du graphe de Cayley $C(G,S)$. L'ensemble V des sommets de $C(G,S)$ est en bijection avec l'ensemble des éléments de G. Deux sommets g_1 et g_2 sont joints par une arête si $g_1^{-1} \cdot g_2 = s \in S$. La longueur de cette arête est déclarée par définition égale à 1. Un chemin $l \subset C(G,S)$ entre deux sommets g et h est une succession finie d'arêtes $\{e_1,\dots,e_n\}$ joignant g et h. La longueur $|l|$ de l vaut par définition n : le nombre des arêtes qui le constituent.

1. Montrer que la fonction $d : G \times G \mapsto |||$ donnée par
$$d(g,h) = \inf\{\text{longueurs des chemins joignant } g \text{ et } h\}$$
est une distance et qu'il existe un chemin $l \subset C(G,S)$ qui la réalise c.-à.-d. $|l| = d(g,h)$.
2. Pour chaque $g \in G$ posons $|g| = d(0,g)$. Montrer que $|g| = \inf\{k \mid g = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k},\ s_{i_j} \in S\}$.
3. Montrer que G agit isométriquement sur les sommets de $C(G,S)$, c.-à.-d. $\forall g \in G\ d(g\gamma_1, g\gamma_2) = d(\gamma_1,\gamma_2)$ où $\gamma_i \in V\ (i = 1,2)$. En déduire que $d(f,h) = |f^{-1} \cdot h|\ (f,h \in V)$.
4. Soit $F_2 =< a,b >$ un groupe libre sur les générateurs a et b (voir l'exercice 5936). Donner un fragment (initial) de son graphe de Cayley $C(F_2,\{a,b\})$.
5. Démontrer que le graphe de Cayley d'un groupe libre est toujours un arbre (un graphe sans lacet s'appelle arbre).

[006384]

255 305.00 Groupe cyclique

Exercice 5853

Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique. [002659]

Exercice 5854

Montrer qu'un groupe G dont les seuls sous-groupes sont G et $\{e_G\}$ est cyclique et que son ordre est premier.
[002660]

256 306.00 Théorème de Sylow

Exercice 5855

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que si H et G/H sont des p-groupes, il en est de même de G.

Indication ▼ [002190]

Exercice 5856

Soit G un p-groupe et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que $H \cap Z(G)$ n'est pas réduit à l'élément neutre.

Correction ▼ [002191]

Exercice 5857

Soit G un p-groupe d'ordre p^r.

(a) Montrer que pour tout entier $k \leqslant r$, G possède un sous-groupe distingué d'ordre p^k.

(b) Montrer qu'il existe une suite $G_0 = \{1\} \subset G_1 \subset \ldots \subset G_r = G$ de sous-groupes G_i distingués d'ordre p^i $(i = 1,\ldots,r)$.

(c) Montrer que pour tout sous-groupe H de G d'ordre p^s avec $s < r$, il existe un sous-groupe d'ordre p^{s+1} de G qui contient H.

Indication ▼ Correction ▼ [002192]

Exercice 5858

Soit G un groupe d'ordre $2p$, où p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. Montrer que G contient un unique sous-groupe H d'ordre p et que ce sous-groupe est distingué. Vérifier que les seuls automorphismes d'ordre 2 d'un groupe cyclique d'ordre p sont l'identité et le passage à l'inverse. En déduire que le groupe G est soit cyclique, soit non commutatif, auquel cas il possède deux générateurs s et t vérifiant les relations $s^p = 1$, $t^2 = 1$ et $tst^{-1} = s^{-1}$.

Correction ▼ [002193]

Exercice 5859

Soit G un groupe non commutatif d'ordre 8.

(a) Montrer que G contient un élément a d'ordre 4 et que le sous-groupe H de G engendré par a est distingué dans G.

(b) On suppose ici qu'il existe un élément b de $G \setminus H$ qui est d'ordre 2. Soit K le sous-groupe engendré par b. Montrer que dans ce cas G est isomorphe au produit semi-direct de H par K, le générateur b de K agissant sur H via l'automorphisme $x \to x^{-1}$. Le groupe est alors isomorphe au groupe diédral D_4.

(c) Dans le cas contraire, soit b un élément d'ordre 4 de G n'appartenant pas à H. Montrer que a^2 est le seul élément d'ordre 2 de G, que le centre $Z(G)$ de G est égal à $\{1, a^2\}$. On pose $-1 = a^2$. Montrer que a et b vérifient les relations suivantes : $a^2 = b^2 = -1$, $bab^{-1} = a^{-1}$. Enfin on pose $ab = c$. Vérifier les relations suivantes :

$$a^2 = b^2 = c^2 = -1 \quad ab = -ba = c \quad bc = -cb = a \quad ca = -ac = b$$

(l'écriture $-x$ signifiant ici $(-1)x$). Ce dernier groupe est le groupe des quaternions.

Correction ▼ [002194]

Exercice 5860

Montrer que le groupe diédral D_6 est isomorphe au produit direct $\mu_2 \times S_3$.

Indication ▼ [002195]

Exercice 5861

(a) Soit G un groupe non abélien d'ordre 12. Soit H un 3-Sylow de G. On considère le morphisme $\theta : G \to S_{G/H}$ correspondant à l'action de G par translation de G sur G/H. Montrer que ce morphisme n'est pas injectif si et seulement si H est distingué dans G. En déduire que si H n'est pas distingué dans G, le groupe G est isomorphe à A_4.

(b) On suppose que G n'est pas isomorphe à A_4. Montrer qu'alors G admet un unique 3-Sylow $H = \{1, a, a^2\}$. Montrer ensuite que si G contient un élément b d'ordre 4, a et b vérifient les relations :

$$a^3 = b^4 = 1 \quad bab^{-1} = a^2 = a^{-1}$$

Montrer que dans le cas contraire $G \simeq D_6$.

(c) Donner la liste des classes d'isomorphisme de groupes d'ordre 12.

Correction ▼ [002196]

Exercice 5862

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On se donne un nombre premier p et l'on suppose que H admet un unique p-Sylow S. Montrer que S est distingué dans G.

Indication ▼ [002197]

Exercice 5863

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On se donne un nombre premier p et un p-Sylow P de G. Montrer que $H \cap P$ est un p-Sylow de H et que HP/H est un p-Sylow de G/H.

Correction ▼ [002198]

Exercice 5864

Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Correction ▼ [002199]

Exercice 5865

Pour p un nombre premier, déterminer le nombre de p-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_p.

Correction ▼ [002200]

Exercice 5866

(a) Donner l'ensemble $\mathscr{D}$ des ordres possibles des éléments du groupe alterné A_5 et pour chaque $d \in \mathscr{D}$, indiquer le nombre d'éléments de A_5 d'ordre d.

(b) Montrer que, pour $d = 2$ et $d = 3$, les éléments d'ordre d sont conjugués, et que les sous-groupes d'ordre 5 sont conjugués.

(c) Déduire une preuve de la simplicité de A_5.

Indication ▼ [002201]

Exercice 5867

Déterminer les sous-groupes de Sylow du groupe alterné A_5.

Indication ▼ Correction ▼ [002202]

Exercice 5868

Soit G un groupe simple d'ordre 60.

(a) Montrer que G admet 6 5-Sylow, et que l'action de conjugaison sur ses 5-Sylow définit un morphisme injectif $\alpha : G \to S_6$, une fois une numérotation des 5-Sylow de G choisie. Montrer que l'image $\alpha(G) = H$ est contenue dans A_6.

(b) On considère l'action de A_6 par translation à gauche sur l'ensemble $A_6/.H$ des classes à gauche. Montrer qu'elle définit un isomorphisme $\varphi : A_6 \to A_6$, une fois une numérotation des éléments de $A_6/.H$ choisie.

(c) Montrer que $\varphi(H)$ est le fixateur de la classe de l'élément neutre H, et en conclure que $G \simeq A_5$.

Correction ▼ [002203]

Exercice 5869

Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts et G un groupe d'ordre pq. Montrer que G admet un unique q-Sylow Q qui est distingué et que $G = QP$, où P est un p-Sylow de G. Montrer que G est isomorphe au produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre q par un groupe cyclique d'ordre p. Montrer que si $q-1$ n'est pas divisible par p, ce produit semi-direct est en fait un produit direct.

Indication ▼ [002204]

Exercice 5870

Montrer qu'un groupe d'ordre 35 est cyclique.

Indication ▼ [002205]

Exercice 5871

Soient p et q deux nombres premiers et G un groupe d'ordre p^2q. On suppose que p^2-1 n'est pas divisible par q et que $q-1$ n'est pas divisible par p. Montrer que G est abélien.

Correction ▼ [002206]

Exercice 5872

Soient p et q deux nombres premiers. Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre p^2q.

Indication ▼ Correction ▼ [002207]

Exercice 5873

Soit G un groupe d'ordre 399.

(a) Montrer que G admet un unique 19-Sylow P qui est distingué dans G.

(b) Soit Q un 7-Sylow. Montrer que $N = PQ$ est un sous-groupe d'ordre 133 de G et que ce groupe est cyclique.

(c) On suppose que Q n'est pas distingué dans G. Montrer que G admet 57 sous-groupes cycliques d'ordre 133 distincts deux à deux. Quel serait le nombre d'éléments d'ordre 133 dans G ? Aboutir à une contradiction. En déduire que Q est distingué dans G et que N est distingué dans G.

(d) Montrer que $G = NR$, où R est un 3-Sylow. En déduire que G est isomorphe au produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre 133 par un groupe cyclique d'ordre 3.

Correction ▼ [002208]

Exercice 5874

Soit G un groupe simple d'ordre 60.

(a) Montrer que G n'admet pas de sous-groupe d'ordre 20.

(b) Montrer que si G admet un sous-groupe K d'ordre 12, alors K admet 4 3-Sylow.

(c) Montrer que si H et K sont deux sous-groupes distinct d'ordre 4 de G alors $H \cap K = \{1\}$.

(d) Montrer que si H est un 2-Sylow, alors $H \neq \mathrm{Nor}_G(H)$.

(e) Montrer que G possède 5 2-Sylow.

(f) Conclure en considérant l'action de G par conjugaison sur les 5-Sylow.

Indication ▼ [002209]

---

257 307.00 Autre

258 310.00 Isométrie euclidienne

Exercice 5875

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1. Montrer que $A \in GL(E)$ appartient à $\mathscr{O}(n)$ si et seulement si ${}^T AA = I$.
2. Montrer que si $A \in \mathscr{O}(n)$ alors $\det A = \pm 1$.
3. Montrer que $A \in U(n)$ si et seulement si ${}^T A\bar{A} = I$.

[006385]

Exercice 5876

Soit L un espace hermitien. Est-il vrai que $A \in IsoL$ implique $Ax = Ux + b$ avec $U \in U(n)$. [006386]

Exercice 5877

Soit E est un espace euclidien de dimension n. Montrer que $Iso(E) \not\simeq \mathscr{O}(n) \times T(E)$. [006387]

Exercice 5878

Déterminer la nature des applications suivantes : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Bx$ où $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. [006388]

Exercice 5879

1. Notons $l \subset \mathbb{R}^2$ une droite affine et τ_l la réflexion par rapport à l. Montrer que si $f \in Iso(\mathbb{R}^2)$ vérifie $f_{|l} \equiv id$ alors soit $f = id$ soit $f = \tau_l$.

2. Soient l et m deux droites affines dans $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in Iso(\mathbb{R}^2)$ telles que $\alpha\tau_l\alpha^{-1} = \tau_m$.
   (b) Montrer que $\tau_l.\tau_m$ est une translation si et seulement si l et m sont parallèles.

[006389]

Exercice 5880

Notons $R(a,\alpha)$ la rotation d'angle α autour du point $a \in \mathbb{R}^2$ et t_b la translation $t_b : x \mapsto x+b$. Montrer que

1. $\exists\, \beta \in Iso(\mathbb{R}^2) :\ \beta R(a,\alpha)\beta^{-1} \in SO(2)$.
2. $R(a,\alpha) = \tau_l \cdot \tau_m$ où m est une droite quelconque passant par a et l est une droite passant par a fixée.
3. t_b et t_c sont conjuguée ssi $||b|| = ||c||$.

[006390]

Exercice 5881

Une application du type $G(l,a) = \tau_l.t_a$ s'appelle *réflexion glissée* si le vecteur a est parallèle à la droite $l \subset \mathbb{R}^2$.

1. Si $G = \tau_l.t_a$ est une réflexion glissée alors montrer que $\tau_l.t_a = t_a.\tau_l$ et $G^2 = t_{2a}$.
2. Montrer que $G = \tau_l t_a$ est une réflexion si l et a sont perpendiculaires et est une réflexion glissée si l et a ne sont pas perpendiculaires.
3. En regardant l'ensemble des points fixes $fix(f) := \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) = x\}$ d'une isométrie $f \in Iso(\mathbb{R}^2)$ montrer que :
   (a) si $fix(f) \neq \emptyset$ alors $f = R(a,\alpha)$ ou $f = \tau_l$
   (b) si $fix(f) = \emptyset$ alors $f = t_a$ ou $f = G(l,a)$ (*indication : utiliser la question 2. et l'exercice 5880, question 2*).

[006391]

Exercice 5882

Notons $l \subset \mathbb{R}^2$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que l'ensemble I_l des $g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ telles que $g(l) = l$ est un sous-groupe de $Iso(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les translations qui appartiennent à I_l.
3. Montrer que si $g \in I_l$ possède un point fixe alors g a un point fixe sur l.
4. Soit $g \in I_l$, montrer qu'il existe une translation t de I_l telle que $g.t$ possède un point fixe.
5. Décrire I_l.

[006392]

Exercice 5883

Soit E un espace euclidien de dimension n et $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ un sous-ensemble de E.

1. Montrer que $Aff(X) := \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i | x_i \in X, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$ est le plus petit sous-espace affine de E contenant X.
2. Soit $S = \{x_0, ..., x_n\}$ un sous-ensemble de E, montrer que S est un repère affine de E si et seulement si S n'est contenu dans aucun hyperplan.

[006393]

Exercice 5884

Etudier la composée de deux rotations, puis la composée de deux réflexions glissées et finalement la composée d'une rotation et d'une réflexion glissée. [006394]

Exercice 5885

Soit f une application qui préserve les rapports de longueur : $\forall x,y,z,t \in \mathbb{R}^2$,on a : $\frac{d(f(x),f(y))}{d(f(z),f(t))} = \frac{d(x,y)}{d(z,t)}$. (Par définition une telle application est une *similitude*)

1. Monter $\exists k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $d(f(x),f(y)) = kd(x,y)$.
2. Montrer qu'un similitude s'écrit comme composée d'une homothétie et d'une isométrie.

[006395]

Exercice 5886

Soit ABC un triangle isocèle en A non equilatéral, le but de cet exercice est d'étudier l'ensemble des isométries de $\mathscr{P}$ qui préservent globalement ABC.

1. Montrer que cet ensemble est groupe.
2. Montrer que si f préserve ABC alors f fixe le barycentre G de ABC.
3. En étudiant les distances GA, GB, GC montrer que $f(A) = A$
4. En déduire (en utilisant la classification des isométries de $\mathbb{R}^2$) le groupe de symétries de ABC.

[006396]

Exercice 5887 Étude des sous-groupes commutatifs d'isométries

Soient f, g deux isométries du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que si g et f commutent alors $g = f \circ g \circ f^{-1}$ et f conserve (globalement) l'ensemble des points fixes de g.
2. Décrire les cas dans lesquels f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$).
3. En déduire une description des sous-groupes commutatifs d'isométries.

[006397]

---

259 311.00 Géométrie différentielle élémentaire de Rn

Exercice 5888

1. Soient $\xi(t)$ et $\eta(t)$ deux courbes paramétrées de $\mathbb{R}^3$ de classe C^1, montrer que $\frac{d}{dt}[\xi,\eta] = [\frac{d\xi}{dt},\eta] + [\xi,\frac{d\eta}{dt}]$, où $[,]$ désigne le produit vectoriel.
2. Montrer que $\kappa = -\frac{<r',[r'',r''']>}{k^2}$, où $s \mapsto r(s)$ une courbe de classe C^2 paramétrée par sa longueur, κ et k sont respectivement sa torsion et sa courbure.

[006398]

Exercice 5889

Pour la courbe $r = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $b > 0$ trouver courbure, torsion et repère de Frenet. [006399]

Exercice 5890

1. Montrer qu'une courbe $s \mapsto r(s)$ est plane ssi $< r',[r'',r'''] >= 0$.
2. Soit $s \mapsto r(s)$ une courbe de classe C^2 paramétrée par sa longueur. On considère la nouvelle courbe $s \mapsto n(s)$ où n est le vecteur normal unitaire. Notons s^* le paramètre naturel de cette courbe. Montrer que $\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{k^2+\kappa^2}$.

[006400]

Exercice 5891

1. Montrer que si une courbe $s \mapsto r(s)$ est tracée sur une sphère de rayon R et si $\kappa(s) \neq 0, k(s) \neq 0$ $(\forall s)$ alors $R^2 =< r, r >= \frac{1}{k^2}(1 + \frac{(k')^2}{(\kappa k)^2}))$.
2. Soit $s \mapsto r(s)$ une courbe à courbure constante qui est tracée sur la sphère S^2. Montrer que son image r est un arc de cercle. La propriété d'être à courbure constante dépend-t-elle de la paramétrisation de la courbe ?

[006401]

Exercice 5892

1. Montrer que 3 points x, y et z sont colinéraires dans $\mathbb{R}^n$ avec y entre x et z (rappelons que ça signifie que $y = x + t(z - x)$ $t \in [0, 1]$) ssi
$$||x - y|| + ||y - z|| = ||x - z||.$$
2. Montrer que si $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ est une courbe alors $|\gamma([a, b])| \geqslant ||\gamma(a) - \gamma(b)||$ et que l'égalité a lieu ssi γ est une géodésique (où $|\cdot|$ désigne la longueur d'une courbe).

[006402]

260 312.00 Géométrie et trigonométrie sphérique

Exercice 5893

Soit $\alpha : [a, b] \to S^n$ une courbe avec $b - a < \pi$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

1. α est une courbe géodésique.
2. Il existe deux vecteurs orthogonaux $A, B \in S^n$ tels que $\alpha(t) = A\cos(t - a) + B\sin(t - a)$.
3. La courbe α vérifie l'équation $\alpha'' + \alpha = 0$.

[006403]

Exercice 5894

Soit S^n est la sphère unité dans l'espace linéaire E de dimension $n + 1$.

1. Montrer que la distance sphérique induit sur S^n une topologie équivalente à celle induite de l'espace ambiant E.
2. Montrer que l'intersection d'un sous-espace linéaire L de E de dimension k avec S^n est une sphère de dimension $k - 1$ (si $k = 2$ cette intersection est un cercle appelée grand cercle de S^n).

[006404]

Exercice 5895

Nous noterons $[X, Y]$ le produit vectoriel de deux vecteurs X et Y dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que trois vecteurs X, Y, et Z dans $\mathbb{R}^3$ sont libres ssi les vecteurs $[X, Y]$, $[Y, Z]$ et $[Z, X]$ sont libres.
Indication : Démontrer d'abord l'identité suivante :
$$[[X, Y], Z] =< X, Z > Y - < Y, Z > X$$

[006405]

Exercice 5896

Soit $T = \triangle ABC \subset S^2$ un triangle sphérique d'angles intérieurs $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$

1. Montrer qu'il existe un triangle $T' = \triangle A'B'C'$ dit polaire tel que

$$a' = \pi - \alpha,\ b' = \pi - \beta,\ c' = \pi - \gamma,$$

où comme d'habitude on note a', b', c' les longueurs des côtés opposés aux sommets A', B', C'. *Indication.* Poser : $C' = \frac{[A,B]}{||[A,B]||}, A' = \frac{[B,C]}{||[B,C]||}, B' = \frac{[C,A]}{||[C,A]||}$

2. Montrer que $(T')' = \mathrm{sign}(< A,[B,C] >) \cdot T$. En déduire que

$$\angle A' = \pi - a,\ \angle B' = \pi - b,\ \angle C' = \pi - c,$$

[006406]

Exercice 5897

En utilisant le résultat et les notations de l'exercice 5896 montrer que :

1. $\cos\gamma = \cos c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta$
2. $\cos\beta = \cos b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\gamma$
3. $\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \cos\beta \cdot \cos\gamma$

[006407]

Exercice 5898

Le but de cet exercice est démontrer que pour chaque triplet $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\alpha+\beta+\gamma > \pi$ il existe un triangle sphérique d'angles intérieurs égaux à $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

1. Montrer que $\forall\ \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\ \forall\ d \in]0,\alpha]$ il existe un triangle sphérique $\triangle ABC$ tel que $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle A = \alpha$ et $a = |BC| = d$ (dans les notations précédentes).
2. En utilisant 1. et les formules de l'exercice 5897 démontrer le résultat.

[006408]

---

261 313.00 Groupe orthogonal et quaternions

Exercice 5899

Le but de cet exercice est d'introduire une topologie sur le groupe linéaire $GL(E)$. Soit $A \in GL(E)$, alors on introduit la norme :

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| \qquad (1).$$

Montrer que les topologies suivantes sur $GL(E)$ sont équivalentes :

1. $A_n \to A$ si la suite a^n_{ij} des coefficients de A_n converge vers a_{ij}.
2. $A_n \to A$ si $||A_n - A|| \to 0$.
3. $A_n \to A$ si l'application $A_n : x \to A_n(x)$ converge vers l'application $A(x)$ uniformément sur chaque compact $K \subset E$.

[006409]

Exercice 5900

1. En utilisant la norme (1) démontrer que $O(n)$ est compact dans $GL(E)$.
2. En utilisant le résultat du cours qu'une matrice orthogonale est une matrice en blocs démontrer que $O(n)$ contient deux composantes connexes : $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = +1\}$ et $O^-(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = -1\}$. $O^-(n)$ est-il un sous-groupe de $O(n)$?

[006410]

Exercice 5901

Rappelons qu'une application $g \in SO(3)$ est dite *retournement* si g est une rotation d'angle π autour d'une droite fixée $L \subset \mathbb{R}^3$ $(g|_L \equiv \mathrm{id})$. Soit $g \in SO(3)$ un retournement d'axe la droite $L \in \mathbb{R}^3$ $(0 \in L)$. Montrer que $g_1 \in SO(3)$ est un retournement ssi il existe $f \in SO(3)$ tel que $g_1 = fgf^{-1}$ et l'axe de g_1 est $f(L)$. [006411]

Exercice 5902

1. Soit $S = \{z + tj \mid z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}\}$ un sous-ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions. Montrer que S est invariant par l'application :
$$\rho_j\ :\to jqj^{-1},\ q \in \mathbb{H}.$$
2. En identifiant S avec $\mathbb{R}^3$ décrire $\rho_j : S \to S$.
3. Montrer que l'application $\rho_k : q \to kqk^{-1}$ laisse S invariant (i.e. $\rho_k(S) = S$). Décrire ρ_k.

[006412]

Exercice 5903

1. Montrer que S^3 est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ considéré comme groupe multiplicatif. Est-il normal ?
2. Montrer que si $\exists\, q \in S^3\ :\ \forall\, q_1 \in \mathbb{R}^3 = \{y \cdot i + u \cdot j + v \cdot k \mid y, v, u \in \mathbb{R}\}\ :\ qq_1q^{-1} = q_1$ alors $q = \pm \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$.

[006413]

Exercice 5904

Soit $q, r \in (\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4)$ alors montrer que $< q, r >= \frac{1}{2}(\overline{q}r + \overline{r}q)$ où $<\ ,\ >$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^4$, et on note $\overline{q} = \overline{z} - wj$ si $q = z + wj$. [006414]

Exercice 5905

1. On considère l'application $\xi_s(q) = -sqs^{-1}$ $(s \in (\mathbb{R}^3)^*,\ q \in \mathbb{R}^3)$. Montrer que ξ_s est la reflection dans $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan $s^\perp$.
2. Démontrer la surjectivité de l'application $\varphi : S^3 \to SO(3)$ où $\varphi(s) = \rho_s$, et $\rho_s(q) = sqs^{-1}$ $(s \in S^3,\ q \in \mathbb{R}^3)$.

[006415]

Exercice 5906

Si $q \in S^3$ tel que $q = \cos\theta + I\sin\theta,\ I \in S^2$, alors montrer que $\rho_q \in SO(3)$ est la rotation d'angle 2θ autour de l'axe OI. [006416]

262 314.00 Géométrie projective

Exercice 5907

Trouver la formule explicite suivante pour la projection stéréographique $\pi : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \to S^n$:

$$\pi(x) = \Big(\frac{2x_1}{1+||x||^2},\ \dots,\ \frac{2x_n}{1+||x||^2},\ \frac{||x||^2-1}{||x||^2+1}\Big),$$

où $x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
Indication : Écrire $\pi(x) - e_{n+1} = t(x - e_{n+1}),\ t \in \mathbb{R}$. [006417]

Exercice 5908

Soit L un espace vectoriel de dimension $n+1$.

1. Montrer que si M_i $(i \in I)$ sont des sous-espaces vectoriels de L alors $P(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} P(M_i)$.
2. Soient M_i $(i \in \{1,...,k\}$ des sous-espaces linéaires de L, montrer que
$$< P(M_1),...,P(M_k) >= P(M_1 + ... + M_k).$$
3. Soient $p : L^* \to P(L) = L^*/\sim$ l'application de la projectivisation (qui associe à chaque $x \in L^*$ sa classe $[x] \in P(L)$) et S un sous-ensemble de l'espace $P(L)$. Alors montrer que $< S >= P(D)$, où D est le sous-espace de L engendré par $p^{-1}(S)$.

[006418]

Exercice 5909

1. Montrer que le plan projectif P_1 et la droite P_2 dans $\mathbb{P}^3$ soit se coupent en un point soit $P_2 \subset P_1$.
2. Soient $P_i = P(M_i)$ deux sous-espaces projectifs $(i = 1,2)$. Montrer que si $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ alors la somme $M_1 + M_2$ est directe.

[006419]

Exercice 5910

Montrer que la fibration de Hopf $FH : S^3 \to S^2$ ($FH^{-1}(x)$ est un grand cercles de S^3 $(\forall\, x \in S^2)$) s'écrit comme ceci :
$$FH(z,z') = (2z'\bar{z}, |z'|^2 - |z|^2).$$

[006420]

Exercice 5911

1. Montrer que tout sous-espace projectif de dimension $k-1$ dans $\mathbb{P}^n$ peut être recouvert par au moins k cartes affines.
2. Trouver le nombre d'éléments d'un espace projectif de dimension n sur un corps avec q éléments.

[006421]

Exercice 5912

1. Montrer que le groupe projectif $PGL(L)$ agit transitivement sur l'ensemble de sous-espaces projectifs de la dimension k fixée.
2. Montrer que $PGL(L)$ agit transitivement sur l'ensemble de couples ordonnés
$\{(P_1,P_2) \mid \dim P_1 = k_1,\ \dim P_2 = k_2,\ \dim(P_1 \cap P_2) = k_3\}$, où k_1,k_2,k_3 sont fixés.
3. Montrer que $PGL(L)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux projectifs
$\mathscr{D} = \{(P_1,...,P_k)\ |P_1 \subset ... \subset P_k,\}$ où la longueur k est fixée et P_i est un sous-espace projectif de $P(L)$ de dimension i fixée $(i = 1,...,k)$.

[006422]

Exercice 5913

1. Montrer que toute homographie $\gamma \in PGL_n\mathbb{C}$ possède au moins un point fixe
2. Montrer que toute homographie $\gamma : \mathbb{RP}^{2n} \to \mathbb{RP}^{2n}$ a toujours au moins un point fixe.

3. Soit $\gamma \in PGL(L)$ tel que $\text{card}(\text{fix}(\gamma)) < \infty$ et $\dim P(L) = n$ alors montrer que $\text{card}(\text{fix}(\gamma)) \leqslant n+1$ où $\text{fix}(\gamma) = \{x \mid \gamma(x) = x\}$.

[006423]

Exercice 5914

Cet exercice ne concerne pas directement la géométrie projective mais sera utilisé par la suite.

1. Montrer que chaque réflexion par rapport à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ est une application conforme dans $\mathbb{R}^n$. En déduire que chaque isométrie euclidienne et chaque isométrie sphérique sont conformes dans $\mathbb{R}^n$ et sur S^n respectivement.
2. Montrer qu'une application linéaire $A : E \mapsto E$ conserve les angles non-orientés entre les vecteurs non-nuls ssi A est une matrice conforme.
3. Montrer qu'une application $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ est conforme dans D ssi elle conserve les angles dans D.

[006424]

Exercice 5915

Démontrer que toute application de Möbius $\gamma \in M(2)$ est conforme sur $\overline{\mathbb{C}}$. [006425]

Exercice 5916

Rappelons qu'un cercle généralisé est soit un cercle euclidien $\Sigma(z_o, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ soit une droite à laquelle on ajoute le point $\{\infty\}$ (à l'aide la projection stéréographique). On note $M = \{\frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0\}$.

1. Montrer que le groupe $PGL_2\mathbb{C}$ agit trois fois transitivement sur $\overline{\mathbb{C}}$.
2. Vérifier que chaque cercle généralisé dans $\overline{\mathbb{C}}$ s'écrit sous la forme :
$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0,\ B^2 + C^2 > 4AD$$
3. Soit $C_1 \in \mathbb{C}$ un cercle généralisé, alors montrer que un sous-espace $C_2 \subset \mathbb{C}$ est un cercle généralisé ssi il existe $\gamma \in M$ telle que $\gamma(C_1) = C_2$.
4. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un cercle généralisé et $f \in M(2)$ tel que $f|_K \equiv \text{id}_\text{K}$ alors montrer que soit $f \equiv \text{id}$ soit f est la réflexion par rapport à K.

[006426]

Exercice 5917

Montrer que
$$M(2) = \left\{ \frac{a_2\bar{z} + b_2}{c_2\bar{z} + d_2}\ ;\ \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \,\middle|\, a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{C}\ ;\ a_i d_i - b_i c_i \neq 0 \right\}$$
et en déduire que $|M(2) : M| = 2$ où $M = M_+(2)$ est le groupe des transformations de Möbius paires. [006427]

Exercice 5918

Soit τ_Σ la réflexion par rapport au cercle euclidien $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ alors montrer que
$$|\tau_\Sigma(z) - \tau_\Sigma(w)| = r^2 \frac{|z - w|}{|z - z_0||w - z_0|}$$

[006428]

Exercice 5919

1. Montrer que chaque application $g \in M$ possède soit un point fixe dans $\overline{\mathbb{C}}$ soit deux points fixes. Cette affirmation reste-t-elle vraie pour les éléménts de $M(2)$?
2. Notons $\mathrm{fix}(g)$ l'ensemble $\{x \in \overline{\mathbb{C}} \mid g(x) = x\}$ des points fixes de g. Montrer que si $\gamma = fgf^{-1}$ alors $\mathrm{fix}(\gamma) = f(\mathrm{fix}(g))$.
3. Soient C_i $(i = 1,2)$ deux cercles généralisés. Montrer que $\exists\ \gamma \in M\ :\ \tau_{C_1} = \gamma\tau_{C_2}\gamma^{-1}$, où τ_{C_i} désigne l'inversion par rapport à C_i.

[006429]

Exercice 5920

Soient C_i $(i = 1,2)$ deux cercles généralisés. Montrer que τ_{C_1} et τ_{C_2} commutent si et seulement si le cercle C_1 est orthogonal à C_2 (e.g. si C_i sont deux cercles euclidiens alors ils sont orthogonaux ssi les angles entre deux rayons aux points de l'intersection C_1 et C_2 sont égaux à $\frac{\pi}{2}$). [006430]

---

263 315.00 Géométrie et trigonométrie hyperbolique

Exercice 5921

On notera $\mathbb{H}^2$ le plan de Poincaré dans l'un de deux modèles du disque ou du demi-plan, muni de la distance hyperbolique ρ.

1. Montrer que $\mathbb{H}^2$ est un espace métrique complet mais pas compact.
2. Dans le modèle du demi-plan on suppose que z,w sont deux points distincts dans $\mathbb{H}^2$, montrer que $\rho(z,w) = |\ln([z^*,z,w,w^*])|$, où $[z^*,z,w,w^*]$ désigne le birapport de quatre points, où z^*,w^* sont les extrémités de la géodésique passant par z et w dans l'ordre indiqué sur le Figure 1 :

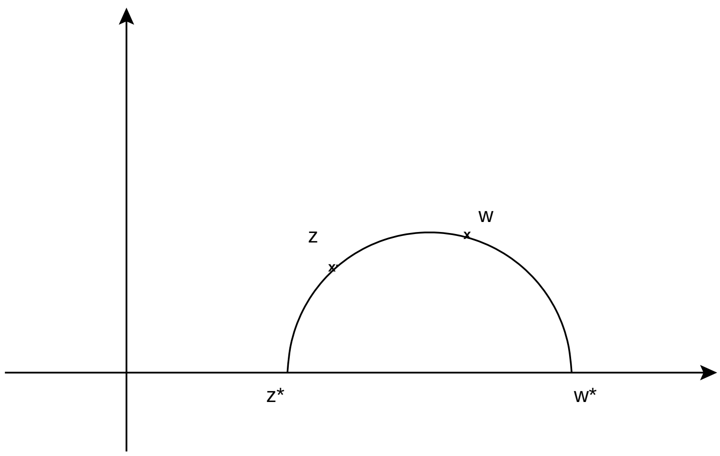


FIGURE 1 – Une géodésique

[006431]

Exercice 5922

Soit $\triangle abc$ un triangle dans $\mathbb{H}^2$ (c-à-d le sous-ensemble de $\mathbb{H}^2$ bordé par trois géodésiques dont les points de l'intersection sont a,b,c) d'angles intérieurs α,β,γ. On suppose que $\gamma = \frac{\pi}{2}$; en utilisant les notations indiquées sur le Figure 2 démontrer les identités suivantes :

1. $\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b$
2. $\mathrm{th}\, b = \sinh a \cdot \tan\beta$
3. $\cosh a \cdot \sin\beta = \cos\alpha$

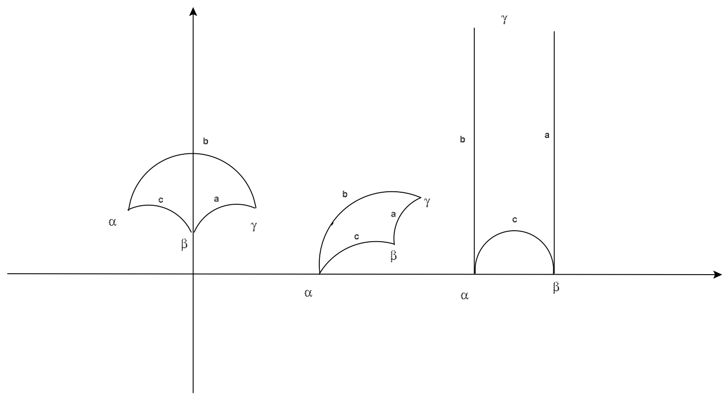


FIGURE 2 – Triangles géodésiques

[006432]

Exercice 5923

Soient α, β, γ trois nombres positifs tels que $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma < \pi$; $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ alors montrer qu'il existe un triangle hyperbolique d'angles intérieurs α, β, γ. [006433]

Exercice 5924

En utilisant le théorème du cours que la somme d'angles intérieurs d'un polygone convexe à n sommets dans $\mathbb{H}^2$ est inférieure à $(n-2)\pi$ démontrer que :

1. Soient $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ une collection ordonnée de nombres tels que $0 \leqslant \theta_i < \pi$ $(i = 1, ..., n)$. Pour qu'il existe un polygone convexe d'angles intérieurs θ_i il faut et il suffit que $\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n < (n-2)\pi$.
2. Un polygone à n côtés et d'angles droits existe ssi $n \geqslant 5$.

[006434]

Exercice 5925

1. Démontrer que chaque homographie non-triviale $g \in M^+(2) \setminus \{\mathrm{id}\}$ possède soit un point fixe soit deux. Un élément $g \in M^+(2)$ est dit *parabolique* si son ensemble des points fixes : $\mathrm{fix}(g) = \{x \in \overline{\mathbb{C}} \mid f(x) = x\}$ est un singleton. Montrer qu'un élément est parabolique ssi il est conjugué dans $M^+(2)$ à la translation $z \mapsto z+1$.
2. Un élément $f \in M^+(2)$ est dit *elliptique* s'il est conjugué dans $M^+(2)$ à une rotation $z \mapsto k \cdot z$ où $|k| = 1$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
   Un élément $g \in M^+(2)$ est dit *loxodromique* s'il est conjugué dans $M^+(2)$ à $z \mapsto k \cdot z$ où $|k| \neq 1$. De plus, un élément loxodromique est dit *hyperbolique* si $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; un élément loxodromique est dit srtictement loxodromique si $k = \lambda \cdot e^{i\theta}$, $\lambda > 0$, $\theta \neq 2\pi m$. Pour un élément $g \in M^+(2)$ on utilise la même lettre pour une de deux matrices dans $SL_2\mathbb{C}$ qui le représentent (en fait c'est g ou $-g$). Montrer que pour tout élément $g \in M^+(2)$ l'une des possibilités suivantes peut avoir lieu :
   (a) g est parabolique ssi $\mathrm{tr}^2(g) = 4$, où tr^2 est la trace carré de la matrice g.
   (b) g est elliptique ssi $\mathrm{tr}^2(g) \in [0, 4[$.
   (c) g est hyperbolique ssi $\mathrm{tr}^2(g) \in]4, \infty[$.
   (d) g est strictement loxodromique **ssi** $\mathrm{tr}^2(g) \notin [0, \infty[$.
3. En utilisant le modèle du demi-plan démontrer que les points fixes d'un élément parabolique ou hyperbolique se trouvent toujours sur le bord $\overline{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{H}^2$.
   En utilisant le modèle du disque démontrer qu'un élément elliptique a exactement un des deux points fixes dans $\mathbb{H}^2$.

[006435]

Exercice 5926

Soit $g \in M$ une homographie. Montrer que

1. Si g est parabolique $\mathrm{fix}(g) = \{x\}$ alors
$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n \to \pm\infty} g^n(z) = x.$$
2. Si g est loxodromique et $\mathrm{fix}(g) = \{x, y\}$ alors
$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{y\} : \lim_{n \to +\infty} g^n(z) = x,$$
et le point x est dit *point fixe attractif* de g.
$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{x\} : \lim_{n \to +\infty} g^{-n}(z) = y,$$
et le point y est dit *point fixe répulsif* de g.

[006436]

Exercice 5927

Montrer que si un élément $g \in M$ n'est pas strictement loxodromique conjugué à $z \to ke^{i\theta}$ $(\theta \neq \pi + \pi m,\ k > 0)$ alors il existe deux familles $\mathscr{C}_i$ $(i = 1, 2)$ de cercles généralisés vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall\, C \in \mathscr{C}_1\ :\ g(C) = C$
2. $\forall\, C \in \mathscr{C}_2\ :\ g(C) = \mathscr{C}_2 \setminus \{C\}$
3. $\forall\, C_1 \in \mathscr{C}_1,\ \forall\, C_2 \in \mathscr{C}_2\ :\ C_2 \perp C_1$.

De plus, si $g \in M$ est strictement loxodromique conjugué à $z \to ke^{i\theta}$ $(\theta \neq \pi + \pi m,\ k > 0)$ alors montrer que g n'a pas de cercle invariant. [006437]

264 316.00 Autre

265 320.00 Groupe

Exercice 5928

Soit G un groupe et S une partie de G.

1. Montrer que $H := \{a_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots a_{i_n}^{\varepsilon_n}, a_i \in S, \varepsilon_i \in \{-1, +1\}\}$ est le sous-groupe engendré par S (i.e le plus petit sous-groupe de G contenant S), noté $< S >$.
2. Soit A une partie de G, on appelle *centralisateur* de A, l'ensemble : $C_A := \{g \in G : \forall a \in A\ ga = ag\}$.
   (a) Montrer que C_A est un sous-groupe de G.
   (b) Montrer que $C_A = C_{<A>}$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que $< S >$ soit abélien, $< S >$ soit normal dans G.

[006369]

Exercice 5929

Soit G un groupe et A, B deux sous-groupes de G, on note $AB := \{g = ab : a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

2. Montrer que si AB est un sous-groupe de G alors $AB =< A,B >$.

[006370]

Exercice 5930

Dans $GL(2,\mathbb{R})$: le groupe des matrices $(2,2)$ inversibles à coefficients réels.

1. (a) Montrer que $H := \left(\begin{smallmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), p \in \mathbb{Z}$ est un sous-groupe abélien.
   (b) Montrer qu'il est cyclique, est-il normal ?
2. Soient $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices.
   (a) Montrer que A et B appartiennent à $SL(2,\mathbb{Z})$, calculer leur ordre et montrer que H est contenu dans $< A,B >$.
   Que pensez-vous des assertions suivantes ?
   — "un groupe engendré par des éléments d'ordre fini est fini."
   — "tous les éléments d'un groupe engendré par des éléments d'ordre fini sont d'ordre fini."
   (b) Le groupe engendré par A et B est-il abélien ?
   (c) Calculer l'intersection du groupe cyclique engendré par A et du groupe cyclique engendré par B.

[006371]

Exercice 5931

1. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique (monogène) est cyclique.
2. Rappelons qu'un groupe s'appelle localement cyclique si chaque sous-ensemble fini engendre un sous-groupe cyclique . Montrer que $\mathbb{Q}$ est localement cyclique, mais pas cyclique et en déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas de type fini.

[006372]

Exercice 5932

Soit G un groupe.

1. Soient A, B deux sous-groupes de G.
   (a) On suppose que A est d'indice fini dans G, montrer alors que $A \cap B$ est d'indice fini dans B.
   (b) On suppose que A et B sont d'indice fini dans G, montrer alors que $A \cap B$ est d'indice fini dans G, généraliser au cas d'un nombre fini de sous-groupes.
2. Montrer que $\cap\{A : A$ est d'indice fini dans $\mathbb{Z}\} = \{\mathrm{id}\}$. (Comparer avec 1.b).

[006373]

Exercice 5933

1. Supposons que H est d'indice fini dans G montrer qu'il existe $K < \infty$ tel que $\forall\, g \in G\ \exists n_g \in \mathbb{N}^*\ :\ g^{n_g} \in H$ et $n_g \leqslant K$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ ne possède pas de sous-groupe d'indice fini (autre que lui-même).

[006374]

Exercice 5934

1. Soit G un groupe et A un sous-groupe de G d'indice fini. Montrer qu'il existe un sous-groupe B de A normal dans G et d'indice fini dans G.
   (*Indication* : poser $B = \bigcap_{g \in G} gAg^{-1}$.)

2. Montrer qu'un groupe infini simple ne contient pas de sous-groupe propre d'indice fini.

[006375]

Exercice 5935

Soit G un groupe, A et B deux sous-groupes de G tels que $A \subset B$. On suppose que A est d'indice fini dans G. Montrer que $|G:A| = |G:B||B:A|$. [006376]

Exercice 5936

Le but de cet exercice est de donner la construction d'un groupe libre et d'introduire la notion de présentation d'un groupe.

Soit $S = \{s_i\}_{i\in I}$ un ensemble quelconque qu'on appellera alphabet. Un mot dans l'alphabet S est par définition une succession finie (ou vide) :

$$w = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_k}^{\varepsilon_k},\ où\ \varepsilon_i = \pm 1\ et\ s_{i_j} \in S,\ k \in ||| \tag{1}$$

Notons W l'ensemble de tous les mots. Un mot $w \in W$ est dit réduit si son écriture (1) ne contient pas deux lettres consécutives du type s_i^{ε} et $s_i^{-\varepsilon}$. Les mots w_1 et w_2 sont dits voisins si $w_2 = gs_i^{\varepsilon}s_i^{-\varepsilon}h$ et $w_1 = gh$. Deux mots f et g s'appellent équivalents (on note $f \sim g$) s'il existe une succession finie de mots : $f = w_0, w_1, ..., w_n = g$ où les mots w_i et w_{i-1} sont voisins ($i \in \{1, ..., n\}$).

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

   Etant donné un mot $f = a_1...a_t$ (où $a_j = s_{i_j}^{\varepsilon_j}$) définissons une suite de transformations appelée R-procédé : $R_0 = e$ (le mot vide), $R_1 = a_1$ et

   $$R_{i+1} = \begin{cases} R_i a_{i+1} & \text{si } R_i \text{ n'est pas un mot réduit du type } Xa_{i+1}^{-1} \\ X & \text{si } R_i \text{ est un mot réduit du type } Xa_{i+1}^{-1} \end{cases}.$$

   Autrement dit un R-procédé consiste à faire toutes les simplifications de droite à gauche.

2. On suppose que $w_1 = a_1...a_r a_{r+1}...a_t$ et $w_1 = a_1...a_r s_j^{\varepsilon} s_j^{-\varepsilon} a_{r+1}...a_t$ sont deux mots et que R^i désigne le R-procédé appliqué au mot w_i. Montrer que $R_t^1 = R_{t+2}^2$ c.-à.-d. $R^1(w_1) = R^2(w_2)$. En déduire que chaque classe de $W/\sim$ contient un mot réduit et un seul.

   Pour deux classes $[w_i] \in W/\sim$ $(i = 1, 2)$ définissons maintenant leur produit comme suit (de gauche à droite) :

   $$[w_1][w_2] = [w_1 w_2] \tag{2}.$$

3. Démontrer que (2) ne dépend pas du choix des représentants des classes $[w_i]$. Montrer que l'ensemble $F = W/\sim$ muni de l'opération (2) est un groupe.

   Ce groupe s'appelle groupe libre engendré par S, on appelle les éléments de S générateurs libres de F.

   Soit maintenant G un groupe quelconque engendré par un système X où $X = \{x_i\}_{i\in I}$ et F est le groupe libre engendré par S. Supposons qu'il existe une bijection $f : S \mapsto X$ telle que $f(s_i) = x_i$ $(i \in I)$.

4. (a) Montrer que f se prolonge en un homomorphisme $f : F \mapsto G$.

   (b) En particulier, en déduire que si $\text{Card}(S) = \text{Card}(S')$, alors le groupe libre engendré par S est isomorphe au le groupe libre engendré par S'.

   Si de plus $\text{Card}(S) = n$ ce groupe est noté F_n.

   Notons $H = \mathrm{K}er\ f$, et appelons un sous-ensemble $H' \subset H$ ensemble des relations de G si le plus petit sous-groupe normal de G contenant H' coïncide avec H. La donnée du couple S, H' définit le groupe G à un isomorphisme près (G est isomorphe au groupe quotient X/H). La donnée d'un tel couple est notée $< S \mid H' >$ et s'appelle présentation de G.

5. Montrer que le groupe libre ne contient pas d'élément non-trivial d'ordre fini.

[006377]

Exercice 5937

Montrer que le groupe G donné par sa présentation :

$$< x_1,...,x_n \mid [x_i,x_j],\ \forall\ i,j \in \{1,...,n\}\ > \tag{3}$$

est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. [006378]

Exercice 5938

1. Soit l'ensemble $E = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ muni de l'opération binaire $(x_1,y_1)*(x_2,y_2) = (x_1x_2,\, x_2y_1+y_2)$. Est-ce que $(E,*)$ est un monoïde ? Un groupe ? Est-ce que l'opération est commutative ?
2. Mêmes questions pour l'ensemble de matrices

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{Z}, a+b=c+d \right\},$$

muni de la multiplication des matrices.

[006438]

Exercice 5939

Soit l'ensemble $G = [0,1[$ muni de la loi de composition interne $x*y = \{x+y\}$, où $\{x\}$ represente la partie fractionelle du nombre réel x. Montrer que $(G,*)$ est un groupe. Montrer que $\mathbb{Q}\cap G$ est un sous-groupe. [006439]

Exercice 5940

Soit l'ensemble de matrices

$$K := \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}\setminus\{1/2\} \right\},$$

muni de la multiplication des matrices. Montrer que c'est un groupe commutatif (abélien). [006440]

Exercice 5941

Soient a,b,c les éléments d'un groupe. Montrer que l'équation $xaxba = xbc$ admet une solution et une seule. [006441]

Exercice 5942

Dans le groupe des entiers modulo 11 muni de l'opération de multiplication, lesquels parmi les ensembles suivants forment des sous-groupes ?

$$(a)\{1,3,4,5,9\}, \quad (b)\{1,3,5,7,8\}, \quad (c)\{1,8\}, \quad (d)\{1,10\}, \quad (e)\{1,3,10\}.$$

[006442]

Exercice 5943

Montrer qu'un groupe ayant au plus 4 éléments est abélien. (*Indication* : Comparer les éléments e,a,b,ab,ba.) [006443]

Exercice 5944

Lesquels des ensembles de nombres suivants sont des groupes ?

1. Les nombres irrationnels munis de l'addition ; de la multiplication ;
2. Les nombres complexes de valeur absolue 1 munis de l'addition ; de la multiplication ;
3. Les nombres complexes munis de l'opération binaire $z * z' = |z| \cdot z'$.

[006444]

Exercice 5945

Lesquelles parmi les tables de Cayley suivantes décrivent un groupe ?

*	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

*	a	b	c	d	e
a	e	d	b	c	a
b	c	e	d	a	b
c	d	a	e	b	c
d	b	c	a	e	d
e	a	b	c	d	e

[006445]

Exercice 5946

Montrer que si un ensemble E est muni d'une opération binaire qui vérifie les propriétés

— (P_1) $(ab)c = a(cb)$;
— (P_2) il existe $e \in E$ tel que $ea = a$, $\forall a$;
— (P_3) pour tout $a \in E$ il existe $b \in E$ tel que $ba = e$;

alors c'est un groupe abélien. [006446]

Exercice 5947

Montrer que, dans un groupe G, pour tout élément $a \in G$, l'ensemble des $x \in G$ tels que $ax = xa$ est un sous-groupe (apellé le *centralisateur de a dans G*).
Montrer que l'ensemble des $x \in G$ tels que $ax = xa$, $\forall a \in G$, est un sous-groupe (apellé le *centre de G*). [006447]

Exercice 5948

Combien de générateurs différents a un groupe cyclique d'ordre 6 ? [006448]

Exercice 5949

Soit G un un groupe engendré par deux éléments x et y qui vérifient les relations $x^2 = y^3 = e$, $xy = yx$. Ecriver tous les éléments de G et sa table de multiplication. [006449]

Exercice 5950

Trouver une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes :

1. $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_3\ ;$$
2. $$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_4\ ;$$
3. $$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_5\ .$$

Quelle est leur signature ? [006450]

Exercice 5951

Déterminer la signature des permutations :

1.
$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & n-k+1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\in \mathbf{S}_n \ ;$$

2.
$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-p & n-p+1 & \dots & n \\ p+1 & p+2 & \dots & n & 1 & \dots & p \end{pmatrix}\in \mathbf{S}_n \ ,$$

où p est fixé, $1 \leqslant p \leqslant n-1$ et $n \geqslant 2$.

[006451]

Exercice 5952

Décomposer en produit de cycles à supports deux à deux disjoints les permutations suivantes

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in \mathbf{S}_7 \ ,$$

$$\sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\in \mathbf{S}_9 \ .$$

En déduire la signature. [006452]

Exercice 5953

Ecrire les produits suivants comme produits de cycles disjoints.

$$(a)(1234)(567)(261)(47) \qquad (b)(12345)(67)(1357)(163) \qquad (c)(14)(123)(45)(14)$$

Trouver la signature de chaque produit. [006453]

Exercice 5954

1. Vérifier que pour tout cycle $(i_1\, i_2 \dots i_p)$, $p \geqslant 2$, dans S_n et toute permutation $\sigma \in S_n$,
$$\sigma(i_1\, i_2 \dots i_p)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\, \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p)) \, .$$
2. Vérifier que pour tous entiers distincts $i, j \in \{1,2,\dots n\}$ on a $(i\, j) = (i k)(j k)(i k)$.
3. En déduire que les familles de transpositions $\{(1\, i) \mid i \in \{1,2,\dots n\}\}$ et $\{(i\, i+1) \mid i \in \{1,2,\dots n-1\}\}$ engendrent S_n.
4. Soient $\tau = (1 2)$ et $c = (1 2 \dots n)$. Calculer $c^{i-1}\tau c^{1-i}$ pour tout $i \in \{1,2,\dots n-1\}$. Montrer que toute permutation de S_n s'écrit comme un produit de puissances de τ et c.

[006454]

Exercice 5955

Dans le groupe symétrique S_4 trouver les sous-groupes suivants

1. le sous-groupe des éléments σ tels que l'image par σ de l'ensemble $\{1,2\}$ est $\{1,2\}$.
2. le sous-groupe des éléments τ tels que si $a \equiv b$ mod 2 alors $\tau(a) \equiv \tau(b)$ mod 2. (*Indication* : (13)(24) fait partie de ce sous-groupe).

[006455]

---

266 321.00 Sous-groupe, morphisme

Exercice 5956

1. Trouver l'ordre des permutations suivantes
$$(abcdef)(ghij)(klm)\,; \quad (123456)(1234)(123)\,.$$
2. Montrer que toute permutation d'ordre 10 dans S_8 est impaire.

[006456]

Exercice 5957

Soit l'ensemble $E = \{a,b,c,d,e\}$ qui, muni de l'opération binaire $*$, devient un groupe. Trouver la table de multiplication de ce groupe sachant que $a*b = d$, $c*a = e$, $d*c = b$. [006457]

Exercice 5958

1. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. Montrer que n est premier si et seulement si tout groupe d'ordre n a seulement deux sous-groupes.
2. Montrer qu'un groupe d'ordre p^m, $m \geqslant 1$, où $p \in |||$ est nombre premier, contient un sous-groupe d'ordre p.

[006458]

Exercice 5959

Montrer que les groupes suivants ne sont pas isomorphes :

1. $(\mathbb{Z},\,+)$ et $(\mathbb{Z}[X],\,+)$;
2. $(\mathbb{Q},\,+)$ et $(\mathbb{Q}[i],\,+)$, où $\mathbb{Q}[i] := \{a+ib \in \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

[006459]

Exercice 5960

Soit $K = \{e,a,b,c\}$ un groupe d'ordre 4 tel que $x^2 = e, \forall x$.

1. Ecrire la table de multiplication de K.
2. Montrer que K est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\,+)$ et n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Montrer que tout groupe d'ordre 4 est ou bien isomorphe à K ou bien à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

[006460]

Exercice 5961

Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini d'ordre n. Trouver toutes les morphismes de groupe $\phi : (\mathbb{Q},\,+) \to (G,\cdot)$. [006461]

Exercice 5962

Soit $(G,\cdot)$ un groupe. On appelle sous-groupe *caractéristique* de G un sous-groupe invariant par tout automorphisme de G. Montrer que tout sous-groupe caractéristique est distingué. [006462]

Exercice 5963

1. Montrer que S_3 contient un sous-groupe H distingué d'ordre 3 et que G/H est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Montrer que les seuls groupes d'ordre 6 sont, à isomorphisme près, le groupe cyclique et S_3.

[006463]

Exercice 5964

Combien d'automorphismes a un groupe cyclique d'ordre p, où p est un nombre premier ? Et un groupe cyclique d'ordre pq, où p et q sont des nombres premiers distincts ? [006464]

Exercice 5965

Montrer que les seuls groupes distingués de S_5 sont $\{e\}$, S_5, A_5. [006465]

Exercice 5966

Soit $(G,\cdot)$ un groupe. On appelle *commutateur* un élément de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$. On note $[x,y] := xyx^{-1}y^{-1}$.

1. Montrer que l'ensemble $G' = [G,G]$ des produits de commutateurs est un sous-groupe distingué de G. Montrer que G/G' est un groupe abélien. En particulier cela implique que $G' = \{e\} \Leftrightarrow G$ abélien.
2. Soit $N \lhd G$ tel que G/N est abélien. Montrer que $G' \subset N$.
3. Trouver G' pour $G = S_3,\ A_5,\ S_5$.
4. Montrer que si $\phi : G \to A$ est un morphisme de G à un groupe abélien A, alors il existe un morphisme $\psi : G/G' \to A$ tel que $\phi = \psi \circ \pi$, où $\pi : G \to G/G'$ est la projection canonique.

[006466]

Exercice 5967

Soit $V_4 := \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (23)(14)\} \subset S_4$.

1. Montrer que c'est un sous-groupe distingué de S_4.
2. Montrer que $V_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Soit $H = \{e,\ (12)(34)\}$. Montrer que $H \lhd V_4$ mais que H n'est pas un sous-groupe distingué de S_4.
4. Montrer que S_4/V_4 est isomorphe à S_3.

[006467]

Exercice 5968

1. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.
2. Soit $d \in |||^*$ un diviseur de $n \in |||^*$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[006468]

Exercice 5969

1. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe d'indice p, où p est le plus petit facteur premier de $|G|$. Montrer que $H \lhd G$.
2. Soit $H < S_4$, H de cardinal 12. Montrer que $H = A_4$.
3. Montrer que A_4 n'est pas simple.
4. Montrer que A_4 n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

[006469]

Exercice 5970

Démontrer les propriétés suivantes

1. $(\mathbb{C}/\mathbb{R},+) \simeq (\mathbb{R},+)$;
2. $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{S}^1$;

3. $\mathbb{C}^*/\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}^*/\{\pm 1\}$;
4. $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* \simeq \{\pm 1\}$;
5. $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}, +) \simeq \mathbb{C}^*$;
6. $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \simeq \mathbb{S}^1/\{\pm 1\}$.

[006470]

Exercice 5971

Prouver que les permutations

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

sont conjuguées dans S_6. [006471]

Exercice 5972

Soit G un sous-groupe du groupe symétrique S_n, $n \geqslant 2$, contenant une permutation impaire. Montrer que $GA_n = S_n$ et en déduire que G contient au moins un sous-groupe distingué d'indice 2. [006472]

Exercice 5973

Soit $SL(n,\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid det\, M = \pm 1\}$ et soit l'action du groupe $SL(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$SL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,$$

$$(M, X) \to MX\ .$$

1. Trouver les orbites de cette action. Montrer que le centre de $SL(n,\mathbb{R})$ est $\{\pm I\}$.
2. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, son stabilisateur est conjugué au sous-groupe
$$P = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & SL(n-1,\mathbb{R}) \end{pmatrix}\ .$$
3. Soit $SL(2,\mathbb{Z})$ muni de son action sur $\mathbb{Z}^2$ définie par
$$SL(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2\,,$$
$$(M, X) \to MX\ .$$
Trouver ses orbites. Montrer que l'ensemble $\Gamma(2)$ des matrices M tels que $M = I$ (mod 2) est un sous-groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$. Trouver ses orbites dans $\mathbb{Z}^2$.

[006473]

Exercice 5974

Soit D_∞ le groupe des isométries de la droite affine $\mathbb{R}$ formé par l'ensemble des éléments de la forme τ_1^n et $\tau_1^n \circ \sigma$, où $n \in \mathbb{Z}$, $\tau_1(x) = x+1$ et $\sigma(x) = -x$. On appelle D_∞ *le groupe diédral infini*.

1. Montrer que $H =< \tau_1 >$ est le seul sous-groupe cyclique infini d'indice 2 de D_∞. Montrer que H est un sous-groupe distingué de D_∞.
2. Montrer que, pour tout sous-groupe S d'ordre 2 de D_∞, on a $D_\infty = SH$.
3. Soit $K < D_\infty$ tel que $K \not\subset H$. Montrer que $D_\infty = HK$. En déduire que $K \cap H$ est d'indice 2 dans K. Montrer que $K \cap H \neq (e)$ implique $K \simeq D_\infty$.
4. Montrer que tout sous-groupe propre de D_∞ est isomorphe soit à $\mathbb{Z}$, soit à (± 1), soit à D_∞.
5. On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des sous-groupes $K < D_\infty$ tels que $K \not\subset H$ et $K \cap H = H_n$, où $H_n :=< \tau_1^n >$. Prouver que $\mathscr{S}_n$ contient n éléments.

[006474]

---

267 322.00 Groupe fini

Exercice 5975

1. Soit les applications $T : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $T(x) = x+4$, $T(\infty) = \infty$, et $g : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-2x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}\ ; \\ \infty & \text{si} \quad x = \frac{1}{2}\ ; \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad x = \infty \end{cases}$$

   Montrer que $T^k([-2,2]) \subset]-\infty, -2]\cup[2, \infty[$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$ et que $g^m(]-\infty, -1]\cup[1, \infty[) \subset [-1, 1]$, $\forall m \in \mathbb{Z}^*$.
2. Soit G le groupe des applications bijectives $h : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, muni de l'opération de composition. Montrer que G a une action naturelle sur $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.
3. Montrer que le sous-groupe Γ de G engendré par T et g est un groupe libre. *Indication* : Regarder les orbites des nombres dans l'intervalle $]1,2[$.

[006475]

Exercice 5976

1. Soit G le groupe engendré par deux éléments a,b, défini par les relations $a^m = b^2 = e$, $(ab)^2 = e$, où $m \in |||^* \cup\{\infty\}$. Montrer que $G \simeq D_m$, où D_m est le groupe diédral de degré m.
2. Montrer que pour tout groupe H engendré par deux éléments α, β, qui vérifient les relations $\alpha^m = \beta^2 = e$, $(\alpha\beta)^2 = e$ il existe un epimorphisme de D_m dans H.

[006476]

Exercice 5977

Soit H_i et N_i deux paires de groupes et $\phi_i : H_i \to Aut\,(N_i)$ deux morphismes, $i = 1,2$. Montrer que s'il existe deux isomorphismes $\alpha : H_1 \to H_2$ et $\beta : N_1 \to N_2$ tels que $\phi_2(\alpha(h_1)) = \beta\circ\phi_1(h_1)\circ\beta^{-1}, \forall h_1 \in H_1$, alors $N_1 \rtimes_{\phi_1} H_1 \simeq N_2 \rtimes_{\phi_2} H_2$. [006477]

Exercice 5978

Soit H et N deux groupes et ϕ, $\psi : H \to Aut\,(N)$ deux morphismes. Montrer que

1. s'il existe $\alpha \in Aut\,(H)$ tel que $\psi = \phi\circ\alpha$, alors $N \rtimes_\phi H \simeq N \rtimes_\psi H$.
2. s'il existe $u \in Aut\,(N)$ tel que $\psi(h) = u\phi(h)u^{-1}$, alors $N \rtimes_\phi H \simeq N \rtimes_\psi H$.

[006478]

Exercice 5979

1. (Théorème d'Euler) Soit $n \in |||^*$ et $a \in \mathbb{Z}^*$ premier avec n. Démontrer que $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$, où ϕ est la fonction d'Euler.
2. (Théorème de Fermat) Soit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a^p \equiv a(\bmod\ p)$.

[006479]

Exercice 5980

Soit ϕ un automorphisme de S_n. Montrer que si ϕ transforme toute transposition en une transposition alors ϕ est un automorphisme intérieur. *Indication* : Utiliser le fait que S_n est engendré par $\{(12),\ (13),\dots,\ (1n)\}$.
[006480]

Exercice 5981

1. Montrer que tout groupe d'ordre pq avec p, q premiers distincts, est un produit semi-direct de deux sous-groupes cycliques.
2. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre pq.

[006481]

Exercice 5982

Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E.

1. On suppose que l'action est telle que toute orbite de G contient au moins 2 points. Si $|G| = 15$ et card E=17, trouver le nombre d'orbites de G dans E et le cardinal de chacune.
2. Montrer que si $|G| = 33$ et card E=19, il existe au moins une orbite qui contient un unique point.

[006482]

Exercice 5983

Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble fini X et soit $Fix(G) := \{x \in X \mid gx = x, \forall g \in G\}$. Montrer que card X = card $Fix(G)$ (mod p). En déduire que le centre d'un p-groupe est toujours non-trivial. [006483]

Exercice 5984

Montrer qu'un groupe infini G qui a un sous-groupe propre d'indice fini H n'est pas simple. *Indication* : Etudier l'action de G sur G/H. [006484]

Exercice 5985

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $GL(V)$ le groupe des automorphismes linéaires. Pour $f \in GL(V)$ et $a \in V$ on considère l'application $A_{f,a} : V \to V$, $A_{f,a}(v) = f(v) + a$.

1. Montrer que $\mathscr{A} := \{A_{f,a} \mid f \in GL(V),\ a \in V\}$ muni de l'opération de composition est un groupe. Ce groupe s'appelle *le groupe des transformations affines*.
2. Trouver deux sous-groupes de $\mathscr{A}$ isomorphes à $(GL(V), \cdot)$ et à $(V, +)$, respectivement.
3. Montrer que $\mathscr{A}$ est produit semi-direct des deux sous-groupes obtenus dans 2.

[006485]

Exercice 5986

Prouver que tout sous-groupe d'ordre 35 est cyclique. [006486]

Exercice 5987

Soit G un groupe fini avec $|G| = p^2q$, où p, q sont deux nombres premiers distincts tels que $p^2 \not\equiv 1$ (mod q) et $q \not\equiv 1$ (mod p). Montrer que G est abélien. [006487]

Exercice 5988

1. Prouver qu'un groupe d'ordre p^2q ne peut pas être simple.
2. Montrer qu'un groupe d'ordre 63 n'est pas simple.

[006488]

Exercice 5989

Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 12. Reconnaître parmi eux D_6 et A_4. Même question pour les groupes d'ordre 18. [006489]

Exercice 5990

Soit G un groupe d'ordre 399. Vérifier que G a un sous-groupe distingué d'ordre 19 et un sous-groupe distingué d'ordre 133. En déduire que G est un produit semi-direct de deux groupes cycliques. [006490]

Exercice 5991

Soit G un groupe de cardinal 24. Montrer que, si aucun de ses sous-groupes de Sylow n'est distingué, $G \simeq S_4$. *Indication* : Faire opérer G sur ses 3-sous-groupes de Sylow. [006491]

Exercice 5992

Soit G un groupe et K un sous-groupe fini distingué. Montrer que tout p-sous-groupe de Sylow distingué de K est distingué dans G. [006492]

Exercice 5993

Soit G un groupe fini, H un sous-groupe distingué et p un nombre premier divisant $[G : H]$. Montrer que Σ est un p-sous-groupe de Sylow de G/H si et seulement si il existe un p-sous-groupe de Sylow S de G tel que $\Sigma = SH/H$. [006493]

Exercice 5994

Soit G un groupe abélien de type fini. Montrer que si tout élément de G est d'ordre fini, alors G est fini. [006494]

Exercice 5995

Montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un groupe abélien infini dont tout élément est d'ordre fini. En déduire qu'il ne peut pas avoir une famille finie de générateurs. [006495]

Exercice 5996

Soit G un groupe fini abélien. Montrer que pour tout diviseur d de $|G|$ il existe un sous-groupe de G d'ordre d. [006496]

Exercice 5997

1. Trouver les invariants et la décomposition canonique du groupe abélien fini dont les diviseurs élémentaires (appellées aussi *invariants primaires*) sont $2^3,\ 2,\ 3^2,\ 3,\ 3$.
2. Trouver les diviseurs élémentaires/invariants primaires, les invariants et la décomposition canonique de $G = \mathscr{C}_{30} \times \mathscr{C}_{18}$.
3. Trouver les diviseurs élémentaires/invariants primaires, les invariants et la décomposition canonique des groupes abéliens suivants :
   (a) G_1 engendré par a et b tels que $10a = 9b = 0$;
   (b) G_2 engendré par a, b et c tels que $15a = 6b = 4c = 0$.

[006497]

Exercice 5998

Soit $\mathbb{C}$ muni des opérations binaires

$$z_1 * z_2 = z_1 + z_2,\ z_1 \perp z_2 = z_1 z_2 + Im\, z_1 Im\, z_2\ .$$

1. Montrer que $(\mathbb{C}, *, \perp)$ est un anneau. Trouver ses éléments inversibles.
2. Montrer que l'ensemble de matrices

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} ;\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   muni de l'addition et la multiplication des matrices est un anneau.

3. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \to D$,

$$f(x+iy) := \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

[006498]

Exercice 5999

Soit A un anneau non nécessairement commutatif. Soit $a, b \in A$ tels que a, b, $ab-1$ sont inversibles. Montrer que $a-b^{-1}$ et $(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$ sont inversibles. Montrer qu'on a l'égalité

$$[(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}]^{-1} = aba-a.$$

[006499]

Exercice 6000

Montrer que les anneaux de polynômes $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ ne sont pas isomorphes. [006500]

Exercice 6001

Soit A un anneau non nécessairement commutatif, A^* le groupe des éléments inversibles et I un idéal bilatère de A. Soit $U = \{a \in A^* \mid a \equiv 1 \; mod \; I\}$. Montrer que I est un sous-groupe distingué de A^*. [006501]

---

268 323.00 Anneau, corps

Exercice 6002

1. Trouver

$$999 \cdot 1998 \mod 1999, \qquad 136^7 \mod 137, \qquad 1997 \cdot 1998 \cdot 1999 \cdot 2000 \mod 2001.$$

2. Trouver $2792^{217} \mod 5$ et $10^{1000} \mod 13$.

[002240]

Exercice 6003

1. Examiner les carrés $a^2 \mod n$ pour $n = 3, 4, 8$.
2. Examiner $a^3 \mod 9$ et $b^4 \mod 16$.

[002241]

Exercice 6004

Passer $\mod n$ avec un module approprié et montrer que chacune des équations suivantes n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$:

1. $3x^2+2 = y^2$;
2. $x^2+y^2 = n$ pour $n = 2003, 2004$;
3. $x^2+y^2+z^2 = 1999$;
4. $x^3+y^3+z^3 = 5$;
5. $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{15}^4 = 7936$.

[002242]

Exercice 6005

On dit que $a \mod n$ est inversible si il existe $b \mod n$ tel que $ab \equiv 1 \mod n$.

1. Trouver tous les éléments inversibles modulo 5, 6, 9, 11.
2. Trouver $\text{pgcd}(107,281)$ et sa representation linéaire en utilisant *l'algorithme d'Euclide*.
3. Trouver l'inverse de $107 \mod 281$ et l'inverse de $281 \mod 107$.
4. Montrer que $a \mod n$ est inversible ssi a et n sont premiers entre eux.

[002243]

Exercice 6006

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$:

1. $2x+3 \equiv 10 \mod 13$;
2. $\begin{cases} 2x+3y \equiv 5 \mod 7 \\ 5x+2y \equiv 2 \mod 7; \end{cases}$
3. $x^2+2x+14 \equiv 0 \mod 17$.

[002244]

Exercice 6007 Le petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un nombre premier à p. Montrer que :

1. $am \equiv an \mod p$ ssi $m \equiv n \mod p$;
2. La suite $a,\ 2a,\ 3a,\dots,(p-1)a \mod p$ est une permutation de la suite $1,\ 2,\ 3,\dots,(p-1) \mod p$;
3. $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

[002245]

Exercice 6008

1. Examiner $7^n+11^n \mod 19$.
2. Trouver $2792^{217} \mod 5$ et $10^{1000} \mod 13$.
3. Montrer que 13 divise $2^{70}+3^{70}$ et 11 divise $2^{129}+3^{118}$.

[002246]

Exercice 6009 Théorème de Wilson

Soit $p=2m+1$ un nombre premier. Montrer que :

1. $(p-1)! \equiv -1 \mod p$;
2. $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1} \mod p$.

[002247]

Exercice 6010

Soit $p>2$ un nombre premier.

1. Soit a premier à p. Supposons que la congruence $x^2 \equiv a \mod p$ possède une solution. Montrer que $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \mod p$.
2. La congruence $x^2 \equiv -1 \mod p$ a une solution ssi $p \equiv 1 \mod 4$.

[002248]

Exercice 6011

Donner la définition d'un corps. Les opérations binaires $+$ et $\cdot$, sont-elles équivalentes dans la définition ?

Correction ▼ [002249]

Exercice 6012

Trouver toutes les solutions des équations :

1. $ax+b=c \ (a,b,c \in K, K$ est un corps$)$;
2. $2x \equiv 3 \mod 10$ et $2x \equiv 6 \mod 10$ dans l'anneau $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002250]

Exercice 6013

Soit A un anneau. Démontrer que :

1. $\forall a \in A \ \ 0_A \cdot a = 0_A$;
2. $(-1_A) \cdot a = -a$;
3. $|A| \geqslant 2 \iff 1_A \neq 0_A$ dans A.

Correction ▼ [002251]

Exercice 6014

1. Si $x \cdot y$ est inversible dans un anneau A, alors x et y sont inversibles.
2. Dans un anneau, un élément inversible n'est pas diviseur de zéro et un diviseur de zéro n'est pas inversible.

Correction ▼ [002252]

Exercice 6015

Démontrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Indication ▼ Correction ▼ [002253]

Exercice 6016

Lesquels de ces sous-ensembles donnés de $\mathbb{C}$ sont des anneaux ? Lesquels sont des corps ?

1. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} 10^{-n}\mathbb{Z}$;
2. $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (m,n)=1, p \nmid n\}$ (p est un nombre premier fixé) ;
3. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{-1}, \ \ \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{2}$;
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{-1}, \ \ \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$.

Correction ▼ [002254]

Exercice 6017

Les éléments inversibles d'un anneau A forment le groupe multiplicatif $(A^\times, \cdot)$.

1. Trouver $A^\times$ pour les anneaux 1. et 2. de l'exercice 6016.
2. Trouver le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$ en utilisant la norme complexe.
3. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est infini.

[002255]

Exercice 6018

Un élément a d'un anneau A s'appelle nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$. Trouver tous les éléments inversibles, les diviseurs de zéro, les nilpotents des anneaux suivants :

1. $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$;
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
3. Démontrer que, pour tout nilpotent x de A, l'élément $1+x$ est inversible.

[002256]

Exercice 6019

Soit I un idéal d'un anneau A. On note par $(a) = a \cdot A$ l'idéal principal engendré par a. Montrer que :

1. $I = A$ si et seulement si I contient une unité ;
2. $(a) = A$ ssi a est inversible ;
3. Un anneau A est un corps ssi (0) est le seul idéal propre de A.

[002257]

Exercice 6020

Montrer que les éléments nilpotents d'un anneau forment un idéal. [002258]

Exercice 6021 Sommes et produits d'idéaux

1. Soient I, J deux idéaux d'un anneau A. Montrer que
$$I \cap J, \qquad I+J = \{x+y \,|\, x \in I, y \in J\}$$
sont des idéaux de A.
2. Montrer que $I+J$ est le plus petit idéal de A contenant I et J.
3. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$, $I = (n) = n\mathbb{Z}$, $J = (m) = m\mathbb{Z}$. Trouver $I \cap J$ et $I+J$.
4. Montrer que
$$I \cdot J = \{x_1y_1 + x_2y_2 + \dots x_ny_n \,|\, n \in \mathbb{N},\ x_k \in I,\ y_k \in J \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n\}$$
est un idéal. Il s'appelle *produit des idéaux* I et J.
5. On considère les idéaux $I = (x_1, \dots x_n) = Ax_1 + \dots + Ax_n$ et $J = (y_1, \dots y_m) = Ay_1 + \dots + Ay_m$. Décrire les idéaux $I+J$, $I \cdot J$, I^2 en fonction de x_k, y_l.

[002259]

Exercice 6022 Idéaux étrangers

1. Montrer que $I \cdot J \subset I \cap J$ et $(I+J) \cdot (I \cap J) \subset I \cdot J$
2. On dit que deux idéaux I et J de A sont *étrangers* si $I+J = A$. Montrer que $I \cap J$=$I \cdot J$ si I, J sont étrangers.

[002260]

Exercice 6023

Soient A un anneau et I et J les idéaux de A tels que $I+J = (1)$. Démontrer que $I^n + J^m = (1)$ quels que soient entiers positifs non-nuls n et m.

Correction ▼ [002300]

Exercice 6024

Trouver toutes les solutions des systèmes suivantes :

1. $$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 4 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 11 \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} x \equiv 997 \mod 2001 \\ x \equiv 998 \mod 2002 \\ x \equiv 999 \mod 2003 \end{cases}.$$

Correction ▼ [002301]

Exercice 6025

Démontrer que les anneaux suivants sont isomorphes

$$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/168\mathbb{Z}.$$

Correction ▼ [002302]

Exercice 6026

1. Montrer que $20^{15} - 1$ est divisible par $11 \times 31 \times 61$.
2. Trouver le reste de la division de 2^{6754} par 1155.

Correction ▼ [002303]

Exercice 6027

1. Quels sont les restes des division de 10^{100} par 13 et par 19 ?
2. Quel est le reste de la division de 10^{100} par $247 = 13 \cdot 19$? En déduire que $10^{99} + 1$ est multiple de 247.

Correction ▼ [002304]

Exercice 6028

Soit $C = A \times B$ le produit direct de deux anneaux. Décrire les ensembles des éléments inversibles, des diviseurs de zéro et des éléments nilpotents de l'anneau C.

Correction ▼ [002305]

Exercice 6029

1. Déterminér la structure des anneaux quotients suivants :
$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + x + 1), \quad \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^8 - 1).$$
2. Considérons l'anneau quotient $K[x]/(f^n g^m)$ où f et g sont deux polynômes distincts irréductibles sur le corps K. Décrirer les diviseurs de zéro et les éléments nilpotents de l'anneau $K[x]/(f^n g^m)$.
3. Quels idéaux a-t-il cet anneau ?
4. Soit K le corps fini à p éléments. Trouver le nombre des éléments du groupe multiplicatif de l'anneau $K[x]/(f^m g^l)$.
5. Donner une généralisation de la question 4) dans le cas du produit de n polynômes irréductibles sur un corps fini K à q éléments.

Correction ▼ [002306]

Exercice 6030

Trouver les facteurs multiples des polynômes suivants :

1. $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;
2. $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$.

Correction ▼ [002307]

Exercice 6031

Trouver le polynôme $f \in \mathbb{Z}[x]$ du dergé le plus petit tel que

$$\begin{cases} f \equiv 2x \mod (x-1)^2 \\ f \equiv 3x \mod (x-2)^3 \end{cases}.$$

[002308]

Exercice 6032

Soit $\sqrt{d}$ non rationel. Dans l'anneau

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{n + m\sqrt{d} \,|\, n,m \in \mathbb{Z}\}$$

on definit la “conjugaison" $\bar{z}$:

$$\text{si } z = n + m\sqrt{d}, \text{ alors } \bar{z} = n - m\sqrt{d}.$$

On peut aussi définir la norme $N_d : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ par $N_d(z) = z\bar{z} = (n + m\sqrt{d})(n - m\sqrt{d})$.

0. Montrer que les aplications $\bar{z}$ et $N(z)$ sont multiplicatives :

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \qquad N_d(z_1 \cdot z_2) = N_d(z_1) \cdot N_d(z_2).$$

Correction ▼ [002309]

Exercice 6033

1. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est inversible ssi $N_d(z) = \pm 1$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
2. Montrer que si $N_d(z) = \pm p$, où p est un premier, alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Donner quelques exemples d'éléments irreductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ pour $d = -1$, 2, -6, p, où p un premier.
3. On note $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Montrer que 3 et $2 + \sqrt{-5}$ sont irréductibles dans A.
4. Trouver tous les irréductibles de A de norme 9.
5. Trouver tous les diviseurs de 9 et de $3(2 + \sqrt{-5})$ dans l'anneau A à association près.
6. Trouver un *pgcd* $(3, 2 + \sqrt{-5})$, et montrer que 3 et $2 + \sqrt{-5}$ n'ont pas de *ppcm* dans l'anneau A.
7. Montrer que l'idéal $I = (3, 2 + \sqrt{-5}) \subset A$ n'est pas principal. Donc l'anneau A n'est pas principal. Est-il factoriel ?
8. Montrer que 9 et $3(2 + \sqrt{-5})$ n'ont pas de *pgcd* dans A. Possèdent-ils un *ppcm* ?

Correction ▼ [002310]

Exercice 6034

Soit $\mathbb{Z}_{36} = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers modulo 36.

1. Décrire tous les éléments inversibles, tous les diviseurs de zéro et tous les éléments nilpotents de l'anneau $\mathbb{Z}_{36}$. (*Un élément a d'un anneau A est dit nilpotent si il existe n tel que $a^n = 0$.*)
2. Trouver tous les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}_{36}$.
3. Soit A un anneau arbitraire. Montrer que

$$(a \in A^{\times} \text{ et } b \in A^{\times}) \iff (a \cdot b) \in A^{\times}.$$

4. Donner un exemple d'un polynôme inversible de degré 1 sur $\mathbb{Z}_{36}$.
5. Décrire tous les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}_{36}[x]$.

Correction ▼ [002311]

Exercice 6035

Montrer que les polynômes suivantes sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$:

1. $P = x^{2004} + 4x^{2002} + 2000x^4 + 2002$;
2. $Q = x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 6x + 25$.

Correction ▼ [002312]

Exercice 6036

Soit p un nombre premier impair. Montrer que la congruence
$x^2 \equiv -1 \mod p$ a une solution si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.

Correction ▼ [002313]

Exercice 6037

Soient $f = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ deux polynômes sur le corps $\mathbb{Z}_2$.

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide trouver le p.g.c.d. de f et g et sa représentation linéaire.
2. Les polynômes f et g sont-ils irréductibles ?
3. Soit (g) l'idéal principal engendré par g. Combien d'éléments contient l'anneau quotient $A = \mathbb{Z}_2[x]/(g)$?
4. Soit $\pi : \mathbb{Z}_2[x] \to A$ la projection canonique. On pose $\pi(x) = \bar{x} \in A$. Trouver l'inverse de l'élément $\pi(f)$ dans l'anneau quotient A.
5. L'anneau quotient $B = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ est-il un corps ? Justifier la réponse, i.e. donner une démonstration si B est un corps ou trouver un élément non-inversible dans B dans le cas contraire.

Correction ▼ [002314]

Exercice 6038

Les ensembles suivants sont-ils des anneaux vis-à-vis des opérations usuelles d'addition et de multiplication ? Sont-ils des corps ?

$$(a)\ \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid q \in \{1, 2, 4\} \right\}\ ; \quad (b)\ \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid q \in \{2^n\ ;\ n \in |||\} \right\}\ ; \quad (c)\ \mathbb{Z} + \sqrt{5}\mathbb{Z}\ ;$$

$$(d)\ \mathbb{Z} + \sqrt[3]{5}\mathbb{Z}\ ; \quad (e)\ \mathbb{Z} + \sqrt[3]{2}\mathbb{Z} + \sqrt[3]{4}\mathbb{Z};$$

[006502]

Exercice 6039

1. Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux et un seul de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. m et n étant des entiers positifs, trouver des conditions pour qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[006503]

Exercice 6040

Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ a exactement trois sous-anneaux. [006504]

Exercice 6041

Dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ montrer que les multiples de 5 forment un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. [006505]

Exercice 6042

Soit $M_n(F)$ l'anneau des matrices sur un corps F.

1. Montrer que si X est une matrice non-dégénérée, alors $XY \neq 0$ et $YX \neq 0$, $\forall Y \neq 0$.
2. Soit $X \in M_n(F)$ et soit l'application linéaire $f_X : F^n \to F^n$, $f_X(v) := Xv$. Trouver une écriture de la relation $XY = 0$, $X, Y \in M_n(F)$ en termes de noyaux et images des applications f_X, f_Y. Même question pour la relation $YX = 0$. En déduire que toute matrice dégénérée non-nulle est un diviseur de 0.
3. Montrer que tout idéal bilatère de $M_n(F)$ contient, avec une matrice de rang r, toutes les matrices diagonales de rang r.
4. Montrer qu'un idéal qui contient une matrice non-dégénérée coïncide avec $M_n(F)$.
5. Montrer que les seuls idéaux de $M_n(F)$ sont 0 et $M_n(F)$.

[006506]

Exercice 6043

1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux est un idéal.
2. Montrer par un contre-exemple que l'image d'un idéal par un morphisme d'anneaux n'est pas toujours un idéal. Montrer que l'affirmation précédente est toutefois vraie si le morphisme est surjectif.
3. Qu'est-ce qu'on peut dire sur l'image réciproque et l'image d'un idéal premier/maximal par un morphisme d'anneaux eventuellement surjectif ?

[006507]

Exercice 6044

Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. [006508]

Exercice 6045

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps. [006509]

Exercice 6046

Soit A un anneau principal. Montrer que $(a_1, \dots, a_n) = (d)$ si et seulement si $d \sim \operatorname{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$. [006510]

Exercice 6047

Montrer que tout morphisme de corps est injectif. [006511]

Exercice 6048

Soit p un nombre premier et A un anneau intègre de caractéristique p.

1. Montrer que $p \cdot a = 0$ pour tout $a \in A$.
2. Montrer que $p | C_p^k$, $\forall k = 1, \dots p-1$, et en déduire que l'application $F_p : A \to A$, $F_p(a) = a^p$, est un endomorphisme d'anneaux. On appelle F_p *l'endomorphisme de Frobenius*.
3. Montrer que $F_p(a) = a$ pour tout a dans le plus petit sous-anneau A_0 de A contenant 1.
4. Montrer que F_p est un automorphisme si A est fini.
5. Montrer que $(\Sigma a_i b_i)^{p^k} = \Sigma a_i^{p^k} b_i^{p^k}$, $\forall a_i, b_i \in A$, $k \in |||^*$.

[006512]

Exercice 6049

Soit A un anneau intègre et $a, b, c \in A \setminus \{0\}$. Montrer que, chaque fois que les pgcd suivants existent, on a les égalités :

1. $\operatorname{pgcd}(ca, cb) \sim c \operatorname{pgcd}(a, b)$
2. $\operatorname{pgcd}(\operatorname{pgcd}(a, b), c) \sim \operatorname{pgcd}(a, \operatorname{pgcd}(b, c))$.

   Si A est en plus factoriel, montrer que

3. pgcd$(a,b) \sim 1$ et pgcd$(a,c) \sim 1$ implique pgcd$(a,bc) \sim 1$.
4. Si $a|bc$ et pgcd$(a,b) \sim 1$ alors $a|c$.
5. Si $b|a$ et $c|a$ et pgcd$(b,c) \sim 1$ alors $(bc)|a$.

[006513]

Exercice 6050

Montrer que dans $\mathbb{Z}[i]$ 3 est premier et 2 ne l'est pas. [006514]

Exercice 6051

Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ et $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ne sont pas des anneaux factoriels. [006515]

Exercice 6052

1. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau factoriel.
2. Dans $\mathbb{Z}[X]$ montrer que l'ensemble des polynômes de terme constant un nombre pair est un idéal mais non-principal. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau non-principal.
3. Montrer que l'idéal (X) est premier mais non maximal dans $\mathbb{Z}[X]$.

[006516]

Exercice 6053

Montrer que l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_{19}$ du corps quadratique $\mathbb{Q}[i\sqrt{19}]$ est principal mais non-euclidien. [006517]

Exercice 6054

Soit A un anneau commutatif et soit

$$Nil\ (A) := \{a \in A \mid \exists n \in N,\ a^n = 0\}\ .$$

1. Montrer que $Nil\ (A)$ est un idéal de A.
2. Montrer que si P est un idéal premier de A, alors $Nil\ (A) \subset P$.
3. Montrer que pour tout $x \notin Nil\ (A)$ il existe un idéal premier P tel que $x \notin P$ (*Indication* : Utiliser le théorème de Zorn).
4. En déduire que
$$Nil\ (A) = \bigcap_{P \text{ premier}} P\ .$$

[006518]

Exercice 6055

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{d}),\ d = 7,\ 11$, est un corps.
2. Montrer que $a+b\sqrt{7} \to a+b\sqrt{11}$ n'est pas un isomorphisme de corps entre $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$.
3. Montrer que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ ne sont pas isomorphes.

[006519]

Exercice 6056

F et F' étant deux corps, montrer que $F \times F'$ a seulement deux idéaux non-triviaux, et que c'est un anneau principal. [006520]

Exercice 6057

Montrer que $\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid q \text{ impair }\}$ est un anneau principal. [006521]

Exercice 6058

Résoudre les congruences simultanées suivantes :

1. $x \equiv 2 \pmod 7$, $x \equiv 3 \pmod 6$;
2. $3x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 6 \pmod 7$, $x \equiv 1 \pmod 6$.

[006522]

Exercice 6059

Montrer que deux congruences dans $\mathbb{Z}$ de la forme

$$mx \equiv c \pmod a, \; nx \equiv d \pmod b$$

ont une solution commune $x \in \mathbb{Z}$ quand les coefficients vérifient les conditions $\text{pgcd}(a,b) = 1$, $\text{pgcd}(a,m) = 1$, $\text{pgcd}(n,b) = 1$. [006523]

Exercice 6060

1. Pour les anneaux de polynômes sur un corps F montrer que $F[x]/(x^2-1) \simeq F[x]/(x^2-4)$, $F[x]/(x^2+1) \simeq F[x]/(x^2+2x+2)$, $F[x,y]/(x+y) \simeq F[x]$, $F[x]/(x+1) \simeq F$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{Z}[i]$. Déduire du dernier isomorphisme que (x^2+1) est un idéal premier non-maximal.

[006524]

Exercice 6061

Si M est un idéal maximal d'un anneau intègre A montrer que l'anneau local A_M a exactement un idéal maximal. [006525]

269 324.00 Polynôme

Exercice 6062

1. Soit A un anneau quelconque. Alors l'anneau de polynômes $A[x]$ n'est pas un corps.
2. Montrer que pour un anneau intègre A, les polynômes unitaires linéaires de $A[x]$ sont irréductibles.
3. Décrire tous les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[x]$ et de $\mathbb{R}[x]$.
4. Démontrer que pour tout corps K, l'anneau de polynômes $K[x]$ a une infinité de polynomes unitaires irréductibles.

Correction ▼ [002261]

Exercice 6063

1. Montrer que l'idéal (x,n) où $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ de l'anneau $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas principal.
2. Soit A un anneau intègre. Montrer que $A[x]$ est principal ssi A est un corps.

Correction ▼ [002262]

Exercice 6064

Soit $f(x) \in A[x]$ un polynôme sur un anneau A. Supposons que $(x-1) \mid f(x^n)$. Montrer que $(x^n-1) \mid f(x^n)$.

Correction ▼ [002263]

Exercice 6065

Pour $n,m \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(x-2)^m+(x-1)^n-1$ par $(x-1)(x-2)$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

Correction ▼ [002264]

Exercice 6066

1. Si K est un corps, montrer qu'un polynôme P de degré 2 ou 3 dans $K[x]$ est irréductible si et seulement si il n'a pas de zéro dans K.
2. Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. En utilisant la partie précédente, montrer que les polynômes $5x^3+8x^2+3x+15$ et $x^5+2x^3+3x^2-6x-5$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$.
4. Décrire tous les polynômes irréductibles de degré 4 et 5 sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002265]

Exercice 6067

1. Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_3=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_3[x]$.

$$x^2+x+1, \qquad x^3+x+2, \qquad x^4+x^3+x+1\ .$$

Correction ▼ [002266]

Exercice 6068

En utilisant les réductions $\mod 2$ ou $\mod 3$ montrer que les polynômes $x^5-6x^3+2x^2-4x+5,\ \ 7x^4+8x^3+11x^2-24x-$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$.

Correction ▼ [002267]

Exercice 6069

Soient

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1, \quad g(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1$$

où $a_1,\dots a_n \in \mathbb{Z}$ soient deux à deux distincts. Montrer que f et g sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[x]$.

Correction ▼ [002268]

Exercice 6070

Soient $f,g \in \mathbb{Q}[x]$. Supposons que f soit irréductible et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(\alpha)=g(\alpha)=0$. Alors f divise g.

Correction ▼ [002269]

Exercice 6071

Pour quel n, m dans $\mathbb{Z}$ la fraction

$$\frac{11n+2m}{18n+5m}$$

est réductible ?

Correction ▼ [002270]

Exercice 6072

Trouver le pgcd$(x^n-1,\ x^m-1)$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

Correction ▼ [002271]

Exercice 6073

Trouver le pgcd(f,g) dans $\mathbb{Z}_2[x]$ et sa représentation linéaire $fu+gv$ où $d,u,v \in \mathbb{Z}_2[x]$:

1. $$f = x^5+x^4+1, \qquad g = x^4+x^2+1;$$
2. $$f = x^5+x^3+x+1, \qquad g = x^4+1.$$

Correction ▼ [002272]

Exercice 6074

Trouver le pgcd(f,g) dans $\mathbb{Z}_3[x]$ et $\mathbb{Z}_5[x]$ de $f = x^4+1$, $g = x^3+x+1$.

Correction ▼ [002273]

Exercice 6075

Trouver le pgcd(f,g) dans $\mathbb{Z}[x]$ de $f = x^4+x^3-3x^2-4x-1$ et $g = x^3+x^2-x-1$.

Correction ▼ [002274]

Exercice 6076

Montrer que f est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$:

1. $f = x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;
2. $f = x^5-12x^3+36x-12$;
3. $f = x^4-x^3+2x+1$;
4. $f = x^{p-1}+\cdots+x+1$, où p est premier.

Correction ▼ [002275]

Exercice 6077

Soient $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ et K son corps de fractions. Montrer que x^2-x+1 est irréductible dans $A[x]$ sans pour autant être irréductible dans $K[x]$. Expliquer la contradiction apparente avec le corollaire du lemme de Gauss.

Correction ▼ [002276]

Exercice 6078

Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$.

1. Supposons que $P(0)$, $P(1)$ soient impairs. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$. (*Indication :* Utiliser la réduction modulo 2.)
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'aucun des entiers $P(0),\dots,P(n-1)$ ne soit divisible par n. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002277]

Exercice 6079

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$. Soit $\frac{a}{b}$ sa racine rationnelle : $P(\frac{a}{b}) = 0$, pgcd$(a,b) = 1$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}\ \ (a-bk)$ divise $P(k)$.
2. Quelles racines rationnelles ont les polynômes $f(x) = x^3-6x^2+15x-14$ et $g(x) = 2x^3+3x^2+6x-4$?

Correction ▼ [002278]

Exercice 6080

1. Soient $P \in \mathbb{Z}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, $m = P(n)$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z} \quad m \mid P(n+km)$.
2. En déduire qu'il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{Z}[x]$, non constant, tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ soit un nombre premier.

Correction ▼ [002279]

Exercice 6081

Dans le cours nous avons déjà montré que le produit de polynômes primitifs est aussi primitif et que

$$c(f \cdot g) = c(f) \cdot c(g) \qquad \forall\, f, g \in \mathbb{Z}[x].$$

1. Etant donné $f \in \mathbb{Q}[x]$, alors $f = \alpha \cdot f_0$ où $f_0 \in \mathbb{Z}[x]$ est un polynôme primitif et $\alpha \in \mathbb{Q}$.
2. Soit $g \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme primitif, $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha \cdot g \in \mathbb{Z}[x]$. Alors $\alpha \in \mathbb{Z}$.
3. Considèrons deux polynômes d, f sur $\mathbb{Z}$. Si d est primitif et d divise f dans $\mathbb{Q}[x]$ alors d divise f dans $\mathbb{Z}[x]$.
4. Supposons que $d = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Q}[x]}(f,g)$ soit le p.g.c.d. dans l'anneau $\mathbb{Q}[x]$ de deux polynômes primitifs f et g de $\mathbb{Z}[x]$. Soit $d = \alpha \cdot d_0$ sa représentation de type 1). Montrer que : $d_0 = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}[x]}(f,g)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[x]$.
5. Soient f, $g \in \mathbb{Z}[x]$, $f = c(f)f_0$, $g = c(g)g_0$. Alors

$$\mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}[x]}(f,g) = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}}(c(f),c(g)) \cdot \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Z}[x]}(f_0,g_0).$$

Correction ▼ [002280]

Exercice 6082

Démontrer que tout morphisme d'un corps dans un anneau non-trivial est injectif.

Correction ▼ [002281]

Exercice 6083

Soit R un anneau intègre dans lequel toute chaîne décroissante d'idéaux est finie. Démontrer que R est un corps.

Correction ▼ [002282]

Exercice 6084

Montrer que dans un anneau fini tout idéal premier est maximal.

Correction ▼ [002283]

Exercice 6085

Montrer que un idéal propre I de l'anneau A est premier ssi quand le produit de deux idéaux est contenue dans I, alors l'un de deux est contenu dans I. En déduire que si M est un idéal maximal de A, alors le seul idéal premier de A qui contient M^n est M.

Correction ▼ [002284]

Exercice 6086

Soit A un anneau. Trouver les anneaux quotients

$$A[x]/(x), \quad A[x,y]/(x), \quad A[x,y]/(x,y), \quad A[x_1,x_2,\ldots,x_n]/(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

où (x), (x,y), $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sont les idéaux engendrés réspectivement par x, x et y, x_1, x_2, ... ,x_n. Sous quelle condition sur l'anneau A ces idéaux sont-ils premiers (maximaux) ?

Correction ▼ [002285]

Exercice 6087

1. Trouver le nombre d'éléments de l'anneau quotient $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$.
2. L'idéal principal endendré par 2 est-il premier dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$?

Correction ▼ [002286]

Exercice 6088

Soit A un anneau intègre. On appelle *élément premier* de A un élément qui engendre un idéal principal premier.

1. Montrer que un élément premier est irréductible.
2. D'après le cours tout élément irréductible dans un anneau factoriel est premier. Montrer que dans un anneau factoriel, tout idéal premier non nul contient un élément irréductible.
3. Nous avons vu que l'élément $3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ est irréductible. Montrer que 3 n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
4. L'élément 2 est-il irréductible dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$?

Correction ▼ [002287]

Exercice 6089

1. Soit A un anneau principal, I un idéal de A. Montrer que tous les idéaux de l'anneau quotient A/I sont principaux.
2. Trouver tous les idéaux des anneaux suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]/(f)$ où (f) est l'idéal principal engendré par un polynôme f.
3. Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}[x]/(f)$.

Correction ▼ [002288]

Exercice 6090

Soit I et J deux idéaux de l'anneau A. Considérons la projection canonique
$\pi_I : A \to A/I$ et l'image $\bar{J} = \pi_I(J)$ de l'idéal J.

1. Montrer que $\bar{J}$ est un idéal de l'anneau quotient A/I.
2. Démontrer qu'on a l'isomorphisme suivant : $(A/I)/\bar{J} \cong A/(I+J)$.
   (*Indication :*. Considérer le morphisme $a+I \mapsto a+(I+J)$ de l'anneau A/I vers l'anneau $A/(I+J)$.)

Correction ▼ [002289]

Exercice 6091

Soit f un morphisme de l'anneau A vers l'anneau B.

1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier est aussi un idéal premier. Cette proposition est-elle vraie pour idéaux maximaux ?
2. Montrer par un exemple, que l'image $f(I)$ d'un idéal I de A n'est pas forcément un idéal de B. Démontrer cependant que si f est surjectif, alors $f(I)$ est un idéal pour tout idéal I de A. (Voir le cours.)
3. Toujours sous l'hypothèse que f est surjective, montrer que l'image d'un idéal maximal par f est soit B tout entier, soit un idéal maximal de B.
4. Considérons la reduction de polynômes sur $\mathbb{Z}$ modulo m : $r_m : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_m[x]$ et deux idéaux premiers principaux (x) et (x^2+1). Les idéaux $r_6((x))$ et $r_2((x^2+1))$ sont-ils premiers ?

Correction ▼ [002290]

Exercice 6092

Soit A un anneau, B un sous-anneau de A, I un idéal de A.

1. Montrer que $B\cap I$ est un idéal de B, $B+I=\{b+i\,|\,b\in B,\ i\in I\}$ est un sous-anneau de l'anneau A et I est un idéal de ce sous-anneau.
2. Montrer que l'anneau quotient $B/(B\cap I)$ est isomorphe à l'anneau quotient $(B+I)/I$. (*Indication :* Considérer le composé de l'inclusion $B\to B+I$ avec la projection canonique $B+I\to(B+I)/I$.)

Correction ▼ [002291]

Exercice 6093

Soit (x^3-x+2) l'idéal principal engendré par x^3-x+2 dans l'anneau $\mathbb{Q}[x]$.

1. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Q}[x]/(x^3-x+2)$ est un corps.
2. Soit y l'image de x dans $\mathbb{Q}[x]/(x^3-x+2)$ par la surjection canonique. Calculer son inverse.
3. Montrer que $1+y+y^2$ est non nul et calculer son inverse.

Correction ▼ [002292]

Exercice 6094

Soit $f\in A[x]$ un polynôme primitif de degré positif sur l'anneau factoriel A. Soit $\pi\in A$ un élément irréductible. Supposons que le coefficient dominant de f ne soit pas divisible par π et que $f \mod \pi$ soit irréductible dans l'anneau quotient $A/(\pi)$. Montrer que f est irréductible dans $A[x]$.

Correction ▼ [002293]

Exercice 6095

Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ?

1. $X^5+121X^4+1221X^3+12221X^2+122221X+222222$ dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. $f(X,Y)=X^2Y^3+X^2Y^2+Y^3-2XY^2+Y^2+X-1$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$ et $\mathbb{F}_2[X,Y]$.
3. $f(X,Y)=Y^7+Y^6+7Y^4+XY^3+3X^2Y^2-5Y+X^2+X+1$ dans $\mathbb{Q}[X,Y]$.

Correction ▼ [002294]

Exercice 6096

L'idéal principal (x^2+y^2+1) est-il maximal dans les anneaux $\mathbb{C}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$, $\mathbb{Q}[x,y]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x,y]$?

Correction ▼ [002295]

Exercice 6097

1. Soit $f\in\mathbb{Z}[x]$. Considérons la reduction du polynôme f modulo m : $f \mod m\in\mathbb{Z}_m[x]$. Montrer que
$$\mathbb{Z}[x]/(m,f)\cong\mathbb{Z}_m[x]/(f \bmod m)$$
où (m,f) est l'idéal engendré par m et f dans $\mathbb{Z}[x]$ et $(f \bmod m)$ est l'idéal engendré par $f \mod m$ dans $\mathbb{Z}_m[x]$. (*Indication :* Utiliser l'exercice 10 de fiche 4.)
2. Si p est un nombre premier et f est un polynôme tel que $f \mod p$ est irréductible sur le corps $\mathbb{Z}_p$, alors l'idéal (p,f) est maximal dans $\mathbb{Z}[x]$.

[002296]

Exercice 6098

Soit A un anneau factoriel.

1. Pour $a,b\neq 0$ on a $(a)\cdot(b)=(a)\cap(b)$ ssi $\operatorname{pgcd}(a,b)\sim 1$.
2. Si (a,b) est principal, alors $(a,b)=(\operatorname{pgcd}(a,b))$.

Correction ▼ [002297]

Exercice 6099

1. Montrer que les idéaux $(5,x^2+3)$, $(x^2+1,x+2)$, (x^3-1,x^4-1) ne sont pas principaux dans $\mathbb{Z}[x]$.
2. Les idéaux $(x,x+1)$, $(5,x^2+4)$ et $(x^2+1,x+2)$ sont-ils premiers ou maximaux dans $\mathbb{Z}[x]$?

Correction ▼ [002298]

Exercice 6100

Démontrer que si J est un idéal premier de l'anneau $\mathbb{Z}[x]$, alors

$$J=(0),\quad (p),\quad (f)\quad \text{ou}\quad (p,g),$$

où p est premier, $f\in\mathbb{Z}[x]$ est un polynôme irréductible de degré positif et g est un polynôme, tel que sa réduction modulo p est irréductible sur $\mathbb{Z}_p$. Le dernier cas, $J=(p,g)$, nous donne la forme générale d'un idéal maximal dans $\mathbb{Z}[x]$. *Le plan de la démonstration est le suivant.*

1. Soit B un sous-anneau de l'anneau A, I un idéal premier de A. Montrer que $B\cap I$ est soit un idéal premier de B, soit l'anneau B lui-même.
2. Soit J un id'eal premier de $\mathbb{Z}[x]$. Montrer que $\mathbb{Z}\cap J=(0)$ ou (p) où p est premier.
3. Supposons que $\mathbb{Z}\cap J=(0)$. Montrer que si $J\neq(0)$, alors J est engendré par un polynôme primitif de J de degré minimal.
4. Supposons que $\mathbb{Z}\cap J=(p)$. Soit $r_p:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}_p[x]$ la réduction modulo p. Montrer que l'idéal $r_p(J)$ est premier et que $J=(p,g)$.
5. Montrer que J est maximal ssi $J=(p,g)$ où p est premier et $r_p(g)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}_p[x]$.

Correction ▼ [002299]

Exercice 6101

Soit $\mathbb{F}$ un corps et $P,\ Q\in\mathbb{F}[X]$ tels que pgcd$(P,\ Q)=1$. Montrer qu'il existe $U,\ V\in\mathbb{F}[X]$ tels que $UP+VQ=1$, $d^0\,U<d^0\,Q$, $d^0\,V<d^0\,P$. [006526]

Exercice 6102

Trouver tous les automorphismes de l'anneau $\mathbb{F}[X]$, où $\mathbb{F}$ est un corps. [006527]

Exercice 6103

Utiliser l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{Q}[X]$ pour exprimer le pgcd demandé sous forme de combinaison linéaire des deux polynômes donnés :

1. $(X^4+2X^3-X^2-4X-2,X^4+X^3-X^2-2X-2)$,
2. $(X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1,X^4+2X^3+X+2)$,
3. $(3X^3-2X^2+X+2,X^2-X+1)$.

[006528]

Exercice 6104

Montrer que tout monomorphisme $A\to A'$ d'anneaux intègres engendre un monomorphisme des corps des fractions. [006529]

Exercice 6105

Si Q est le corps des fractions de l'anneaux intègre A, démontrer que le corps des fractions $Q(X)$ est isomorphe au corps des fractions de $A[X]$. [006530]

Exercice 6106

Soit $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[X]$ et soit $c\in\mathbb{Q}$ une racine de P. Montrer que $c=\frac{p}{q}$, où $p|a_0$ et $q|a_n$. [006531]

Exercice 6107

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ un nombre sans facteurs carrés, $a \notin \{-1,\ 0,\ 1\}$. Montrer que $X^n - a$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ pour tout $n \in |||^*$.
2. Montrer que $2X^{10} - 21$, $3X^5 - 35$, $X^5 + 1000X^2 + 6$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.
3. Démontrer l'irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes $X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 6X + 2$ et $X^5 - 12X^3 + 36X - 12$.

[006532]

Exercice 6108

Montrer que le polynôme $X^2 - 1$ a quatre zéros dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Est-ce que ceci contredit un théorème du cours ?
[006533]

Exercice 6109

Montrer que $X^2 + 1$ est irréductible en tant qu'élément de $\mathbb{Q}[X]$ mais réductible en tant qu'élément de $\mathbb{F}_5[X]$.
[006534]

Exercice 6110

1. Si $\mathbb{F}$ est un corps, montrer qu'un polynôme P de degré 2 ou 3 dans $\mathbb{F}[X]$ est irréductible si et seulement si il n'a pas de zéro dans $\mathbb{F}$.
2. Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_3[X]$.

$$X^2 + X + 1, \qquad X^3 + X + 2, \qquad X^4 + X^3 + X + 1\ .$$

[006535]

Exercice 6111

Lesquels parmi les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$?

$$X^3 + 4X^2 - 5X + 7\ ; \quad X^3 - 6X^2 - 4X - 13\ ; \quad X^3 + 4X^2 - 4X + 25\ ;$$
$$X^3 - X^2 - X - 1\ ; \quad X^4 + 7X^2 + 4X + 1\ ; \quad X^6 + X^3 + 1\ ; \quad X^6 + X^2 + 1\ .$$

[006536]

Exercice 6112

1. Soit A un anneau commutatif et $I \subset A$ un idéal. Montrer que $I[X]$ est un idéal de $A[X]$. Montrer que $A[X]/I[X] \simeq A/I[X]$. Montrer que si I est premier, $I[X]$ est premier.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que $\mathbb{Z}[X]/(p) \simeq \mathbb{F}_p[X]$.
3. Montrer que les idéaux premiers non-nuls de $\mathbb{Z}[X]$ sont :
   (a) (p), où $p \in |||$ est un nombre premier ;
   (b) $(R(X))$, où $R \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme irréductible ;
   (c) $(p, R(X))$, où $p \in |||$ est un nombre premier et $R \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme irréductible dont la réduction modulo p, $\overline{R}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$, est un polynôme irréductible.

[006537]

Exercice 6113

Soient $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ et K son corps de fractions. Montrer que $X^2 - X + 1$ est primitif et irréductible dans $A[X]$ sans pour autant être irréductible dans $K[X]$. Est-ce que ceci contredit un théorème du cours ? [006538]

Exercice 6114

Soit $p \in |||^*$ un nombre premier. Montrer que les polynômes $P = \Sigma_{i=1}^{p} C_p^i X^{i-1}$ et $Q = 1 + \Sigma_{i=1}^{p-1} X^i$ sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$. [006539]

Exercice 6115

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 0$.

1. Montrer que
   (a) $X^n - a^n$, $a \in \mathbb{F}^*$, n'a pas de racines multiples ssi $p|n$;
   (b) a est l'unique racine de $X^p - a^p$ et sa multiplicité est p.
2. Soit $a \in \mathbb{F}_p$. Ecriver la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme $X^p + a \in \mathbb{F}_p[X]$.

[006540]

Exercice 6116

Soit D un anneau intègre fini contenant n éléments distincts $c_1, c_2, \dots, c_n$. Soit le polynôme $P_0 := \Pi_{i=1}^{n}(X - c_i)$.

1. Démontrer que deux polynômes Q, R dans $D[X]$ ont la même fonction polynomiale associée si et seulement si $P_0|Q - R$.
2. Calculer le polynôme P_0 pour $D = \mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$.

[006541]

Exercice 6117

Soit A un anneau commutatif. Montrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :

(i) A est un corps fini ;
(ii) tout polynôme $P \in A[X]$ de degré $n \geqslant 1$ a au plus n racines dans A et toute fonction $f : A \to A$ est polynomiale.

[006542]

Exercice 6118

Calculer la dérivée du polynôme $(3X^2 + 2X - 4)(4X^3 - 2X + 3) \in \mathbb{F}_5[X]$. [006543]

Exercice 6119

1. Montrer que si $A[X]$ est principal, alors A est principal.
2. Montrer que si $A[X]$ est principal est si A n'est pas un corps, alors il existe un corps K tel que $K[X]$ soit un corps.
3. En déduire que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps. *Remarque* : Ceci implique que si $A[X]$ est principal alors $A[X]$ est euclidien.

[006544]

Exercice 6120

Soit K un corps et soit $K(X)$ le corps des fractions de l'anneau $K[X]$. Montrer que si P est un élément de $K[X]$ qui admet au moins une racine simple alors, pour tout $n \in |||^*$, $Y^n - P$ est un élément irréductible de $K[X,Y]$ et de $K(X)[Y]$. [006545]

Exercice 6121

Montrer que si K est un corps de caractéristique différente de 2 alors X^2+Y^2-1 est irréductible dans $K[X,Y]$.

[006546]

Exercice 6122

1. Calculer la somme des carrés des racines de l'équation $x^3+2x-3=0$.
2. Calculer $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+x_3^3x_1+x_3x_1^3$, où $x_1,\ x_2,\ x_3$ sont les racines de l'équation $x^3-x^2-4x+1=0$.

[006547]

Exercice 6123

Exprimer à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux :

1. $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;
2. $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$;
3. $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$.

[006548]

Exercice 6124

Soient $x_1,x_2,\dots,x_n$ les zéros du polynôme $X^n+a_1x_{n-1}+\cdots+a_n$. Démontrer que tout polynôme symétrique en $x_2,x_3,\dots,x_n$ peut être représenté sous forme de polynôme en x_1. [006549]

Exercice 6125

Calculer le résultant des polynômes :

1. $2X^3-3X^2-X+2$ et X^4-2X^2-3X+4 ;
2. $3X^3+2X^2+X+1$ et $2X^3+X^2-X-1$;
3. $a_0X^2+a_1X+a_2$ et $b_0X^2+b_1X+b_2$.

[006550]

Exercice 6126

Pour quelle valeur de λ les polynômes suivants ont-ils un zéro en commun ?

1. $X^3-\lambda X+2$ et $X^2+\lambda X+2$;
2. $X^3+\lambda X^2-9$ et $X^3+\lambda X-3$.

[006551]

270 325.00 Extension de corps

Exercice 6127

Soit K un corps et $k,\ A,\ B$ des sous-corps tels que $k\subset A$ et $k\subset B$, $[A:k]=m,\ [B:k]=n$. Soit L le plus petit sous-corps de K qui contient $A\cup B$.

1. Montrer que $[L:A]\leqslant n,\ [L:B]\leqslant m,\ [L:k]\leqslant mn$. Caractériser le cas $[L:k]=mn$ à l'aide d'une propriété de A par rapport à B.
2. Si $[K:k]=4$, $m=n=2$ montrer l'équivalence des propriétés suivantes

   (b$_1$) $A\neq B$;

   (b$_2$) $L=K$;

   (b$_3$) il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $\{1,\ a,\ b,\ ab\}$ soit une base de L sur k.

[006552]

Exercice 6128

Est-ce qu'un extension algébrique est toujours finie ? [006553]

Exercice 6129

Comparer les corps de décomposition des polynômes $X^2+X+1,\ X^2+3 \in \mathbb{Q}[X]$. [006554]

Exercice 6130

Soit E une extension du corps k. On dit que E est une *extension quadratique* de k si $[E:k]=2$.

1. On suppose k de caractéristique $\neq 2$. Montrer que les extensions quadratiques de k (s'il en existe) sont des corps de rupture des polynômes irréductibles de la forme $X^2-a,\ a \in k$. En déduire toutes les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$ à isomorphisme près.
2. On suppose k de caractéristique 2. Montrer que les extensions quadratiques de k (s'il en existe) sont des corps de rupture des polynômes irréductibles de l'une des deux formes : X^2-a ou $X^2-X-a,\ a \in k$. Une extension quadratique du premier type et une extension quadratique du deuxième type peuvent-elles être isomorphes au dessus de k ?

[006555]

Exercice 6131

1. Montrer qu'un corps fini n'est jamais algébriquement clos.
2. Quelle est la clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_{p^n}$?

[006556]

Exercice 6132

Soit K un corps et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soient $a,b \in \overline{K} \setminus K$. Etablir l'équivalence des conditions :

1. il existe un automorphisme ϕ de $\overline{K}$ au dessus de K tel que $\phi(a)=b$;
2. a et b ont le même polynôme minimal $f(X) \in K[X]$.

[006557]

Exercice 6133

Pour quels nombres premiers $p,\ q$ a-t-on $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{q})$? [006558]

Exercice 6134

Soient $K \subset L \subset M$ des extensions. On suppose $K \subset L$ et $L \subset M$ algébriques. Montrer que $K \subset M$ est algébrique. [006559]

Exercice 6135

Donner les polynômes minimaux sur $\mathbb{Q}$ des éléments suivants de $\mathbb{C}$: $j\sqrt{2},\ \sqrt{2}+\sqrt[3]{7},\ i+j,\ i+\sqrt{2},\ j+\sqrt{3}$. [006560]

Exercice 6136

Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré n et $E \supset K$ son corps de décomposition. Montrer que $[E:K]$ divise $n!$. [006561]

Exercice 6137

1. Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré n et $E \supset K$ une extension de degré m. Montrer que si $(m,n) = 1$ alors P est irréductible dans $E[X]$.
2. Montrer que $X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[i]$.

[006562]

Exercice 6138

Soit $p,\ q \in |||^*$ deux nombres premiers distincts. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p},\ \sqrt{q})$. Trouver le polynôme minimal de $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ sur $\mathbb{Q}$. Déterminer tous les plongements de $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ dans $\mathbb{C}$. [006563]

Exercice 6139

Soit $p \neq 2$ un nombre premier. Montrer que -1 est un carré modulo p ssi p est de la forme $4k+1$. [006564]

Exercice 6140

1. Est-ce que 2 et 3 sont des carrés modulo 7 ?
2. Est-ce que 23 est un carré modulo 59 ?

[006565]

Exercice 6141

Soient $k,\ K$ deux corps finis, $k \subset K$, $[K:k] = m$. Montrer que pour tout d diviseur de m il existe un unique corps intermédiaire $k \subset L \subset K$ tel que $[K:L] = d$. [006566]

---

271 326.00 Extension d'anneau

Exercice 6142

Donner un exemple d'extension infinie et d'extension finie de $\mathbb{C}$. [006567]

Exercice 6143

Soit $p > 2$ un nombre premier et soit $\left(\frac{x}{p}\right)$ le symbole de Legendre pour $x \in \mathbb{F}_p^*$. Montrer qu'on a $\sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} \left(\frac{x}{p}\right) = 0$.
[006568]

Exercice 6144

Soit p un nombre premier.

1. Soit a une racine de $X^p - X - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$, $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Montrer que $a+k$ est aussi une racine de $X^p - X - 1$, pour tout $k \in \mathbb{F}_p$.
2. Montrer que $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$ et sur $\mathbb{Z}$.

[006569]

Exercice 6145

1. Soit K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme de degré n. Montrer que P est irréductible sur K ssi P n'a pas de racines dans les extensions E de K de degré au plus $\frac{n}{2}$.
2. Montrer que $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$.
3. Montrer que $X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 13X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Q}$ et est réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout nombre premier p.

[006570]

Exercice 6146

Soit $K \subset E$ une extension finie.

1. Montrer que la trace Tr_K^E est une forme linéaire sur E en tant que K-espace vectoriel.
2. Calculer la norme $N_K^E(\alpha\beta)$ en fonction de $N_K^E(\alpha)$ et de $N_K^E(\beta)$. Calculer $N_K^E(a)$, où $a \in K$.

[006571]

Exercice 6147

1. Écrire une base de $\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]$ sur $\mathbb{Q}$.
2. Dans cette base, écrire la matrice de l'application m_α^E, où $\alpha = i + \sqrt{2}$. Déduire le polynôme minimal de α dans $\mathbb{Q}[X]$ à partir de cette matrice.
3. Retrouver le polynôme minimal de α dans $\mathbb{Q}[X]$ par calcul direct.

[006572]

Exercice 6148

Soient A un anneau intégralement clos, K son corps de fractions et $P \in A[X]$ un polynôme unitaire. Si P est réductible dans $K[X]$, montrer qu'il est réductible dans $A[X]$. *Indication* : Considérer les racines de P dans une extension de K. [006573]

Exercice 6149

Donner un exemple d'anneau intègre qui n'est pas intégralement clos. [006574]

Exercice 6150

Pour tout $n \geqslant 1$, on désigne par $f(n)$ le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré n sur $\mathbb{F}_q$. Montrer qu'on a

$$\sum_{d|n} d f(d) = q^n \ .$$

En déduire les valeurs de $f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ et $f(p)$ pour p premier. [006575]

Exercice 6151

Soient R un anneau, A un sous-anneau de R et x un élément inversible de R. Montrer que tout $y \in A[x] \cap A[x^{-1}]$ est entier sur A. *Indication* : On montrera qu'il existe un entier n tel que le A-module $M = A + Ax + \cdots + Ax^n$ vérifie $yM \subset M$. [006576]

Exercice 6152

Combien de solutions rationnelles ont les équations suivantes ?

$$a)\ x^2 + 2y^2 = 5\ ; \qquad b)\ 19x^2 - 12xy + 2y^2 = 4\ ; \qquad c)\ x^2 + y^2 = 3.$$

[006577]

Exercice 6153

Éliminer x du système d'équations

$$\begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y = 0 \\ x^2 + x - y^2 = 1 \end{cases}$$

[006578]

Exercice 6154

Démontrer les formules

$$R(fg,h) = R(f,h)R(g,h), \;\; D(fg) = D(f)D(g)(R(f,g))^2 \,.$$

[006579]

272 327.00 Autre

273 350.00 Variété

274 351.00 Immersion, submersion, plongement

275 352.00 Sous-variété

Exercice 6155

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $S_\lambda = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2+x_2^2-x_3^2 = \lambda\}$.

1. Déterminez les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Dessiner S_λ en fonction de λ.
2. Pour $x,y \in \mathbb{R}^3$, soit $B(x,y) = x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$. Soit $x \in S_\lambda$, exprimer T_xS_λ à l'aide de B.

Correction ▼ [002547]

Exercice 6156

On muni $\mathbb{R}^n$ de la norme $||x|| =< x,x >= \sum_{i=1}^n x_i^2$ où $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $< x,y >= \sum_{i=1}^n x_iy_i$. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire telle que $< u(x),y >=< x,u(y) >$ et soit $Q = \{x \in \mathbb{R}^n; < u(x),x >= 1\}$ Montrez que Q est une sous-variété et déterminez le plan tangent.

Correction ▼ [002548]

Exercice 6157

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(\theta,\varphi) = (\cos\theta(1+1/2\cos\varphi), \sin\theta(1+1/2\cos\varphi), 1/2\sin\varphi)$ et soit $T = f(\mathbb{R}^2)$.

1. Soit R_θ la rotation d'angle θ autour de $(0z)$, et soit $C = \{(1+1/2\cos\varphi, 0, 1/2\sin\varphi); \varphi \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = \Cup_{\theta\in\mathbb{R}} R_\theta(C)$. Dessiner T.
2. Montrer que $f(\theta,\varphi) = f(\theta_0,\varphi_0)$ si et seulement si il existe $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ et $\varphi = \varphi_0 + 2l\pi$.
3. Montrer que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, $f(U)$ est un ouvert de T.
4. Montrer que T est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

[002549]

Exercice 6158

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par $f(A) = det(A)$.

1. Montrer que $\lim_{\lambda\to 0} \frac{det(I+\lambda X)-1}{\lambda} = tr(X)$ (penser au polynôme caractéristique). En déduire $D_{Id_n}f(X)$.
2. En remarquant que $\frac{det(A+\lambda X)-det(A)}{\lambda}$ est égal à $det(A)\frac{det(I+\lambda A^{-1}X)-1}{\lambda}$, pour A inversible, calculer $D_Af(X)$ lorsque A est inversible.
3. Montrer que $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension n^2-1, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in M_n(\mathbb{R}); tr(X) = 0\}$.

[002550]

Exercice 6159

Soit E l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n. Soit $f : \mathscr{M}(\mathbb{R}) \to E$ définie par $f(A) = {}^tAA$.

1. Montrer que $D_A f(X) = {}^tAX + {}^tXA$.
2. Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $S \in E$ et $X = 1/2AS$. Montrer que $D_A f(X) = S$. En déduire que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}); {}^tX = -X\}$.

[002551]

Exercice 6160

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \to E$ un difféomorphisme de classe C^1. On suppose que $f^n = Id$ et $f(a) = a$. On pose $A = D_a f$ et $u(x) = \sum_{p=1}^n A^{-p} f^p(x)$ pour $x \in E$.

1. Montrer que u est un difféomorphisme local en a tel que $u \circ f = A \circ u$.
2. Soit F l'ensemble des points fixes de f. Montrer que F est une sous-variété de E.
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x, y + y^3 - x^2)$. Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. En déduire que 2/ n'est plus nécessairement vrai si on supprime l'hypothèse $f^n = Id$.

[002552]

Exercice 6161

Déterminer, parmi les sous-ensembles définis ci-dessous, ceux qui sont des sous-variétés :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$;
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; xy = 0\}$;
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 - x = 0\}$;
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y^2 = x^3\}$;
5. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 = \tan(\alpha) z^2\}$;

[006280]

Exercice 6162

Soient α et β des fonctions de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\varphi(x) = (\alpha(x), 0, \beta(x))$. Donner des conditions à α, β pour que $\mathscr{C} = \varphi(\mathbb{R})$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application $f(x,y) = (\alpha(x)\cos(y), \alpha(x)\sin(y), \beta(x))$. On cherche encore des conditions pour α, β sous lesquelles $\mathscr{S} = f(\mathbb{R}^2)$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
3. Notons $p = f(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$. Quel est le lien entre les espaces tangents $T_p\mathscr{S}$ et $T_p\mathscr{C}$.

[006281]

Exercice 6163

1. Montrer que l'équation $xy + xz + yz + 2x + 2y - z = 0$ définit au voisinage de $(0,0,0)$ une surface. Donner l'équation du plan tangent de cette surface à l'origine.
2. Montrer que les équations $4xy + 2xz + 4y - z = 0$ et $xy + xz + yz + 2x + 2y - z = 0$ définissent au voisinage de l'origine une courbe. Déterminer l'espace tangent de cette courbe à l'origine.

[006282]

Exercice 6164

Soit $F = (F_1, \dots, F_k)$ une application C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^k$. Notons $M = \{x \in U \; ; \; F(x) = 0\}$ et soit $a \in M$.

1. Établir l'équivalence des propriétés suivantes :

— $DF(a)$ est surjective.
— Les formes linéaires $DF_1(a), \ldots, DF_k(a)$ sont linéairement indépendantes.
— $\operatorname{Ker} DF(a) = \bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} DF_i(a)$ est de dimension $m-k$.

2. Un point $a \in M$ est dit *point régulier* si $DF(a)$ est surjective. Montrer que l'ensemble des points réguliers de M est un ouvert de M.

[006283]

Exercice 6165

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme homogène de degré $\alpha > 0$ à n variables.

1. En calculant la dérivée de $\lambda \mapsto f(\lambda x)$ de deux manières différentes, établir l'identité d'Euler :
$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n .$$
2. Soit a un réel non nul. Montrer que $X_a = f^{-1}(\{a\})$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$. Établir ensuite que, pour $a_1 > a_2 > 0$, X_{a_1} et X_{a_2} sont difféomorphes.
3. Supposons que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec $\varphi(X_{a_1}) = X_{a_2}$ et soit $p \in X_{a_1}$. Exprimer l'espace tangent $T_{\varphi(p)} X_{a_2}$ en fonction de $T_p X_{a_1}$.

[006284]

Exercice 6166

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application C^∞ donnée par $f(A) = \det(A)$.

1. Montrer que
$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\det(I + \lambda X) - 1}{\lambda} = \operatorname{tr}(X) \quad , \ X \in M_n(\mathbb{R}) .$$
En déduire $Df(I)(X)$.
2. En remarquant que
$$\frac{\det(A + \lambda X) - \det(A)}{\lambda} = \det(A) \frac{\det(I + \lambda A^{-1} X - 1)}{\lambda} ,$$
pour A une matrice inversible, calculer $Df(A)(X)$ lorsque A est inversible.
3. Montrer que $Sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) ; \det(A) = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ (on pourra faire le lien avec l'exercice 6165) dont l'espace tangent en I est
$$T_I Sl_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) ; \operatorname{tr}(X) = 0\} .$$

[006285]

Exercice 6167

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \to E$ un difféomorphisme de classe C^1. On suppose que $f^n = id$ et $f(a) = a$. On pose $A = Df(a)$ et $u(x) = \sum_{p=1}^n A^{-p} f^p(x)$ pour $x \in E$.

1. Montrer que u est un difféomorphisme local en a tel que $u \circ f = A \circ u$.
2. Soit F l'ensemble des points fixes de f. Montrer que F est une sous-variété de E.
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x, y + y^3 - x^2)$. Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. En déduire que 2) n'est plus nécessairement vrai si on supprime l'hypothèse $f^n = id$.

[006286]

---

276 353.00 Espace tangent, application linéaire tangente

Exercice 6168

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction dérivable et soit $M = f^{-1}(\mathbf{0})$. On suppose que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

1. Donner la définition d'un vecteur tangent à M au point $x \in M$. Donner la définition d'un champ de vecteurs sur M.
2. Soit f une fonction sur M et α une 1-forme sur M. Donner la définition de df sans utiliser une carte de M. Donner la définition de $d\alpha$.
3. Soit X un vecteur tangent à M au point $x \in M$. Montrer que $\big(\ df|_x(X) \equiv\ \big)\ Xf = \mathbf{0}$. En déduire que $X \in \ker(J(x))$ (où $J(x)$ est la matrice jacobienne de f en x).
4. Soit X un vecteur tangent $\underline{\text{à } \mathbb{R}^n}$ au point $x \in M$, et supposons que $Xf = \mathbf{0}$, et que $\operatorname{rang}(J(x)) = p$. Montrer que $k = n - p$ et que X est un vecteur tangent $\underline{\text{à } M}$.

[006793]

277 354.00 Champ de vecteurs

Exercice 6169 Questions de cours

1. Donner les définitions de :
   (a) une norme sur un espace vectoriel,
   (b) un espace vectoriel normé complet,
   (c) une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension k,
   (d) un champ de vecteurs sur M,
   (e) un champ de vecteurs complet sur M.
2. Enoncer le théorème des fonctions implicites.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ compact, soit $\mathscr{C}^0(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue } \}$, et $||f||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$. Montrer que $(\mathscr{C}^0(A), ||\ ||_\infty)$ est un espace de Banach.

[006776]

Exercice 6170

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k, et soit X un champ de vecteurs sur M. On définit $D = \{ m \in M \mid X(m) \neq 0 \}$ et $S = \overline{D} =$ fermeture D. On vous demande de démontrer l'énoncé : "si S est compact, alors X est complet". Les questions suivantes peuvent vous guider.

1. Pour $x \notin S$ trouver la courbe intégrale maximale $\gamma : J_x \to M$ passant par x.
2. Montrer que si $x \in S$, et si $\gamma : J \to M$ est une courbe intégrale passant par x, alors $\forall\, t \in J\ :\ \gamma(t) \in S$.
3. En utilisant la compacité de S, montrer que X est complet (sur M !).

[006777]

Exercice 6171

Soient $M \subset \mathbb{R}^n$ et $N \subset \mathbb{R}^p$ deux sous-variétés de dimension k et ℓ respectivement. Soit $F : M \to N$ une application différentiable et soit X un champ de vecteurs sur M. Trouver un contre exemple pour l'énoncé :

$$F(m) = F(\widehat{m}) \Longrightarrow TF(m)(X(m)) = TF(\widehat{m})(X(\widehat{m}))\ .$$

Rappel : $TF(m) \equiv F'(m)$ est la "dérivée" de F au point m. [006778]

Exercice 6172

Soit $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la carte de la sphère S^2 donnée par la projection stéréographique du pôle nord. En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec le plan complex $\mathbb{C}$, on définit l'application $F : \mathbb{R}^4 \to S^2$ par :

$$F(x,y,z,t) = \phi_2(\frac{z+it}{x+iy}) .$$

1. Calculer l'expression explicite de F et montrer que la restriction de F à la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ est une application $F : S^3 \to S^2$ qui est bien définie.
2. Sur $\mathbb{R}^4$ on définit le champ de vecteurs

$$X(x,y,z,t) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial z} .$$

   Calculer le flot de X ; est ce que X est complet ?
3. En utilisant le résultat de 2., montrer que si $m \in S^3$, alors $X(m) \in T_m S^3$.
4. Pour tout $m \in S^3$ calculer $TF(m)(X(m)) \in T_{F(m)} S^2$.

[006779]

Exercice 6173

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1^2+x_2^2-1, x_3^2+x_4^2-1)$, soit $M = f^{-1}(0,0)$, et soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$X|_x = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha(x_3\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3}) ,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Montrer que pour tout $(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv x \in M$ le vecteur $X|_x$ est tangent à M.
2. Exprimer les vecteurs tangents $X|_x$, $x \in M$ dans la carte

$$(\theta,\psi) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\psi), \sin(\psi)) .$$

3. Calculer le flot ϕ_t du champ de vecteurs $X|_x$, $x \in M$ sur M (par exemple en utilisant la carte (θ,ψ)). Est ce que ce champ est complet ?
4. Déterminer les 6-uplets $(\alpha,t,x_1,x_2,x_3,x_4)$, $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in M$, tels que $\phi_t(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3,x_4)$.

[006794]

Exercice 6174

Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre défini par l'équation $x^2+y^2 = 1$. Dans la carte $(\theta,z) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$ de M on donne le champ de vecteurs X défini par :

$$X(\theta,z) = \frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_{(\theta,z)} + \tfrac{1}{2}z(z^2-1)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{(\theta,z)} .$$

1. Dire pourquoi X définit un champ de vecteurs sur M.
2. Esquisser le champ X dans la carte et calculer son flot ϕ_t sur M.
3. Le champ X est-il complet ?
4. Calculer les points (t,θ,z) tel que $\phi(t,\theta,z) = (\theta,z)$ **sur le cylindre** M.

[006800]

Exercice 6175

1. Donner la définition d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

2. Enoncer le théorème des fonctions implicites.
3. Soit $M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2+1=0 \ , \ z>0 \}$. Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

   On définit la projection stéréographique s de $\mathbb{R}^3 \setminus \{ (x,y,z) \mid z=-1 \}$ sur $\mathbb{R}^2 \cong \{ (x,y,z) \mid z=0 \}$ par la procédure suivante. Pour un point $P=(x,y,z)$ on trace la droite $d=\overline{PS}$ où $S=(0,0,-1)$. L'image $s(P)$ est l'intersection de la droite d avec le plan $z=0$.
4. Calculer explicitement l'application s.
5. Calculer l'image $D=s(M)$.
6. Calculer "l'inverse" de l'application $s : M \to D$.

   Soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ donné par

$$X_{|(x,y,z)} = x\frac{\partial}{\partial z}_{|(x,y,z)} + z\frac{\partial}{\partial x}_{|(x,y,z)} \ \cong \ (z,0,x) \ .$$

7. Calculer le flot du champ X.
8. Montrer que X est tangent à M, c'est-à-dire que pour tout $(x,y,z) \in M$ le vecteur $X_{|(x,y,z)}$ appartient à l'espace tangent $T_{(x,y,z)}M$.
9. Calculer l'expression de X dans la carte D de M.
10. Calculer le flot du champ sur D obtenu en i).

[006802]

Exercice 6176

Pour la sphère S^2 on considère la carte $U =]0,\infty[\times]0,2\pi[$ donnée par :

$$\varphi : \ U \to S^2 \quad , \quad (r,\theta) \mapsto (\frac{2r}{r^2+1}\cos(\theta), \frac{2r}{r^2+1}\sin(\theta), \frac{r^2-1}{r^2+1}) \ .$$

Dans la carte U on donne le champ de vecteurs X par :

$$X_{|(r,\theta)} = f(r)\frac{\partial}{\partial r}_{|(r,\theta)} \ \cong \ (f(r),0) \ .$$

1. Calculer le champ sur S^2, c'est-à-dire les vecteurs $\varphi'(r,\theta)X_{|(r,\theta)}$.
2. Soit $f(r)=r^2$. Existe-t-il un champ de vecteurs continue Y sur la sphère S^2 **entière** telle que $Y_{|\varphi(r,\theta)} = \varphi'(r,\theta)X_{|(r,\theta)}$ pour tout (r,θ) ?
3. Même question qu'en 2. dans le cas $f(r) = \dfrac{r^2-1}{r^2+1}$.
4. Quelle condition nécessaire et suffisante (la plus simple possible) doit vérifier la fonction continue $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ pour qu'il existe un champ de vecteurs continue Y sur la sphère S^2 **entière** telle que $Y_{|\varphi(r,\theta)} = \varphi'(r,\theta)X_{|(r,\theta)}$ pour tout (r,θ) ?

[006803]

Exercice 6177

Soit $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs $Y(x,y) = (1,1+y^2)$.

1. Trouver les solutions maximales du champ Y, y compris leur domaine de définition.
2. Esquisser le portrait de phase du champ Y.
3. Déterminer le flot du champ Y, y compris son domaine de définition.

[006823]

Exercice 6178

Soit $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs $Y(x,y) = (x^2, xy)$.

1. Trouver les solutions maximales du champ Y, y compris leur domaine de définition.
2. Esquisser le portrait de phase du champ Y.
3. Déterminer le flot du champ Y, y compris son domaine de définition.

[006829]

Exercice 6179

Soit $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs $Y(x,y) = (x^2y, xy^2)$.

1. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est solution de l'équation $\gamma'(t) = Y(\gamma(t))$, que peut-on dire de la dérivée de y/x par rapport à t ?
2. Trouver les solutions maximales du champ Y (y compris leur domaine de définition).
3. Esquisser le portrait de phase du champ Y.
4. Déterminer le flot du champ Y (y compris son domaine de définition).

[006840]

Exercice 6180

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ et soit $Y : U \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs $Y(x,y) = (1, \dfrac{2x}{3y^2})$.

1. Trouver les solutions maximales du champ Y, y compris leur domaine de définition (n'oubliez pas qu'on est dans U).
2. Esquisser le portrait de phase du champ Y.
3. Déterminer le flot du champ Y, y compris son domaine de définition.

[006846]

278 355.00 Forme différentielle

Exercice 6181

Soit $\alpha(x,y,z,t) = x\,dy - (1+t^2)y\,dx - z^3\,dt$ une 1-forme sur $\mathbb{R}^4$, soit $D = \{\,(x,y,z,t) \in S^3 \mid t = 0, z \geqslant 0\,\}$, et soit $C = \partial D$ le bord de D.

1. Calculer la 2-forme $d\alpha$ sur $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que D est une demi-sphère de dimension 2 et que C est un cercle.
3. En utilisant des coordonnées sphériques, donner une carte $\phi_D : I_1 \times I_2 \to D \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$, et une carte $\phi_C : I_3 \to C \subset D \subset \mathbb{R}^4$, où les $I_j \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles ouverts.
4. Calculer explicitement $\int_D d\alpha$ et $\int_{\partial D} \alpha$. Est ce que votre résultat confirme le théorème de Stokes ?

[006780]

Exercice 6182

Dans tout ce qui suit, on note (x,y) les coordonnées sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $z = x+iy$, et on sépare systématiquement les parties réelle et imaginaire de tous les objets. Soit $z_o \in \mathbb{C}$, et soit C_r, $r \in \mathbb{R}^+$ la courbe donnée par l'équation $|z - z_o| = r$.

1. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{z_o\} \to \mathbb{C}$ l'application $f(z) = (z - z_o)^n$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'intégrale $\int_{C_r} f(z)\,dz$ (indication : utiliser une variante des coordonnées polaires).

   Soit $g, h : \mathbb{C} \setminus \{z_o\} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 verifiant les équations :
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \qquad \& \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} ,$$
   et soit $f : \mathbb{C} \setminus \{z_o\} \to \mathbb{C}$ l'application $f(x,y) = g(x,y) + ih(x,y)$.
2. Montrer que la 1-forme $\frac{f(z)}{z-z_o}\,dz$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_o\}$ est fermée (ne pas oublier de séparer la partie réelle et imaginaire). En déduire (Stokes !) que $\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz$ est indépendant de $r \in \mathbb{R}^+$.
3. En faisant un développement limité de g et de h d'ordre 1 autour $z_o = (x_o, y_o)$, montrer que
$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_o}\,dz = 2\pi i\, f(z_o) .$$
   Indication : utiliser le résultat de 1. ; vous avez le droit d'être un petit peu vague en ce qui concerne les ε dans le développement limité.

[006785]

Exercice 6183

Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre défini par l'équation $x^2 + y^2 = 1$, soit $V \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble défini par $V = \{\, (x,y,z) \mid z \geqslant 0 \ \&\ (x/2)^2 + (2y)^2 + z^2 \leqslant 1 \,\}$, soit $K = M \cap V$, et soit ∂K le bord de K. Soit finalement α la 1-forme sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\alpha = z^2 x\,dy - z^2 y\,dx + (xz - yz^3)\,dz$.

1. Calculer $d\alpha$.
2. Exprimer α et $d\alpha$ dans la carte $(\theta, z) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$ de M.
3. Exprimer K et ∂K dans cette carte.
4. Calculer séparément $\int_K d\alpha$ et $\int_{\partial K} \alpha$ sans utiliser le théorème de Stokes. Est ce que votre résultat confirme ce théorème ?

[006795]

Exercice 6184

Soit $\alpha = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ une 1-forme fermée ($d\alpha = 0$) sur $\mathbb{R}^2$, et soient (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x,y) trois points. On définit les courbes $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ par :
$$\gamma_i(t) = (1-t)(x_i, y_i) + t(x,y) ,$$
et les fonctions $h_0, h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par : $h_i(x,y) = \int_{\gamma_i} \alpha$.

1. Montrer que $dh_i = \alpha$ (indication : calculer $\frac{d}{dt} f(\gamma_i(t))$ et $\frac{d}{dt} g(\gamma_i(t))$ et utiliser $d\alpha = 0$).
2. Montrer que $h_1 - h_0$ est constante et donner une expression explicite en terme de α pour cette constante (indication : utiliser le théorème de Stokes).
3. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ on donne la 1-forme $\alpha = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Montrer que $d\alpha = 0$, et dire pourquoi il n'existe pas de fonction $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha = dh$.
4. Pourquoi la construction donnée en 1. ne marche-t-elle pas dans le cas de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (voir 3.) ?

[006801]

Exercice 6185

Dans $\mathbb{R}^3$ on se donne $M = \{\, (x,y,z) \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \,\}$, avec la carte φ définie par :
$$\varphi \ : \ ]0, 2\pi[\ \times \mathbb{R} \quad , \quad (\theta, z) \mapsto (\left(\sqrt{z^2+1}\right)\cos(\theta), \left(\sqrt{z^2+1}\right)\sin(\theta), z) .$$
On considère aussi la 2-forme $\alpha = z\,dx \wedge dy$ sur $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer la 3-forme $d\alpha$.
2. Calculer la 2-forme α sur M dans la carte φ.

   Soit $a < b$, et soit $\widehat{M}$ la partie de M comprise entre $z = a$ et $z = b$, c'est-à-dire $\widehat{M} = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2-1=0\ ,\ a \leqslant z \leqslant b \}$.
3. Calculer $\int_{\widehat{M}} \alpha$. (Nota Bene : pour l'orientation ne pas oublier que θ est la première coordonnée, et que z est la deuxième dans la carte φ.)

   Soit V la partie de $\mathbb{R}^3$ donné par les inégalités $a \leqslant z \leqslant b$ et $x^2+y^2-z^2-1 \leqslant 0$. On vous demande d'utiliser le théorème de Stokes pour calculer le volume de V, qui est donné par la formule $\int_V d\alpha$. Les questions suivantes vous amènent à ce but.
4. Énoncer le théorème de Stokes.
5. Décrire le bord ∂V de V.
6. Calculer $\int_{\partial V} \alpha$.

[006804]

279 356.00 Orientation

280 357.00 Intégration sur les variétés

281 358.00 Autre

282 370.00 Différentiabilité, calcul de différentielles

Exercice 6186

1. Montrez que $d(x,y) = |x-y|$ est bien une distance sur l'ensemble des réels.
2. Pour tout couple d'éléments $X = (x_1,\dots,x_n)$ et $Y = (y_1,\dots,y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on définit $d(X,Y) = \sup_{i=1..n} |x_i - y_i|$. Montrez que d est bien une distance sur $\mathbb{R}^n$.
3. Faire de même avec $d(X,Y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \dots + |x_n-y_n|$.

[002494]

Exercice 6187

Décrire la boule de centre l'origine et de rayon 1 dans les espaces suivants :

1. $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$.
2. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$.
3. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sup(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$.
4. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$.

Montrez que les 3 dernières distances sont équivalentes.

Correction ▼ [002495]

Exercice 6188

Soit E l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues. Montrez que l'application $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ est une norme sur E. Montrez que E n'est pas complet.

Correction ▼ [002496]

Exercice 6189

Etudiez la continuité des applications suivantes :

1. $f(x) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
2. $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
3. $f(x) = \frac{exp(\frac{-1}{x^2+y^2})}{|x|+|y|}$.

[002497]

Exercice 6190

Soient E et F deux espaces normés réels et $f : E \to F$ une application bornée sur la boule unité de E et vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Montrez que f est linéaire continue.

Correction ▼ [002498]

Exercice 6191

Soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. On définit la norme de M (ou de l'application linéaire associée) de la manière suivante :

$$||M|| = \sup_{X \in S_1(0,1)} ||M.X||_2$$

où $S_1(0,1)$ est la sphère unité pour la norme $||.||_1$. Dans chacun des cas suivant, calculez la norme de M.

1. $||(x,y)||_1 = ||(x,y)||_2 = sup(|x|,|y|)$.
2. $||(x,y)||_1 = ||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
3. $||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ et $||(x,y)||_2 = sup(|x|,|y|)$.

Correction ▼ [002499]

Exercice 6192

Continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$

[002500]

Exercice 6193

Calculez la norme des opérateurs suivants :

1. Le shift sur l^∞ défini par $S(x)_{n+1} = x_n, S(x)_0 = 0$ (sur l^∞ on définit $||(x_n)||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$).
2. $X = \mathscr{C}([0,1])$ avec la norme sup et l'opérateur $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.
3. $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme sup et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ où $g \in X$ est une fonction qui s'annule qu'en $x = 1/2$.
4. $X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X.
5. X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \to \mathbb{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j \to \infty} x_j$.

Correction ▼ [002501]

Exercice 6194

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ avec la norme $||f|| = \int_0^1 |f(t)|dt$. Montrez que la forme linéaire $T : X \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(0)$ n'est pas continue en 0. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ? [002502]

Exercice 6195

Soit f une application f de E dans F espaces vectoriels normés de dimension finie.
On rappelle les implications suivantes : si $x_0 \in E$, "f de classe C^1 en x_0" $\Rightarrow$ "f différentiable en x_0" $\Rightarrow$ "f continue en x_0". On sait de même que "f différentiable en x_0" $\Rightarrow$ "f admet des dérivées partielles en x_0" montrer que les réciproques sont fausses en général en s'inspirant de :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{1}x & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

ou de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Correction ▼ [002503]

Exercice 6196

1. Soit f une application de E dans F espaces vectoriels normés et supposons f différentiable en a ; montrer que pour tout vecteur $u \in E^*$, la dérivée de f en a dans la direction u existe , i.e. $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(a+hu) - f(a)\big)$ et l'exprimer à l'aide de $f'(a)$.
2. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$. Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

[002504]

Exercice 6197

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y, \quad F(x,x) = g'(x).$$

Montrer que F est de classe C^1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Correction ▼ [002505]

Exercice 6198

Soit E^n l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$. Etudier la différentiabilité des applications $P \mapsto \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))\,dt$ et $P \mapsto P' - P^2$.

Correction ▼ [002506]

Exercice 6199

Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, propre (i.e. $||f(x)||$ tend vers ∞ quand $||x|| \to \infty$), telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ $Df(x)$ soit injective. On va montrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $g(x) = ||f(x) - a||^2$;

1. Calculer $Dg(x)$.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point x_0 de $\mathbb{R}^2$, et que $Dg(x_0) = 0$; en déduire le résultat.

Correction ▼ [002507]

Exercice 6200

Soit, dans $\mathbb{R}^n$, F un sous-espace fermé, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x,F)$. On rappelle que f est 1-lipschitzienne, et que pour chaque x il existe $y \in F$ tel que $f(x) = d(x,y)$.

1. On suppose que f est différentiable en $x \notin F$. Montrer que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leqslant 1$.
2. On considère la fonction $\varphi : t \in [0,1] \to f((1-t)x+ty)$; en calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $Df(x).\frac{x-y}{||x-y||} = 1$ et $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = 1$.
3. En déduire que y est unique.

Correction ▼ [002508]

Exercice 6201

Soit E un espace de Banach et $\mathscr{L}(E)$ l'espace des endomorphismes linéaires continus de E.

1. Soit $A \in \mathscr{L}(E)$; montrer que l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \to e^{tA}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que la norme de E est associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $x \in E$. Montrer que l'application $\Phi : t \to \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. On suppose que A est antisymétrique. Montrer que pour tout t, e^{tA} est unitaire.

[002509]

Exercice 6202

Soit $\alpha > 0$. Étudier la différientiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) .$$

[002510]

Exercice 6203

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ existe, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. [002511]

Exercice 6204

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme et soit f une application de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note F l'application $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ de X dans X. Montrer que pour chaque $\varphi \in X$, $DF(\varphi)$ est l'opérateur linéaire de multiplication par $f' \circ \varphi$ dans X :

$$DF(\varphi) \cdot (h) = h f' \circ \varphi ,$$

et que DF est continue. [002512]

Exercice 6205

Soit $\mathscr{F}$ l'algèbre des matrices carrés $p \times p$ munie d'une norme.

1. Soit $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ l'application qui associe à une matrice A son determinant $f(A) = \det(A)$. Montrer qu'elle est différentiable et déterminer Df.
2. Pour $n \geqslant 1$, on considère l'application $\varphi_n(A) = A^n$ de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$. Montrer qu'elle est différentiable en toute matrice $A \in \mathscr{F}$.
3. On désigne par U l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{F}$. Montrer que U est un ouvert de $\mathscr{F}$ et calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ de U dans U.

[002513]

Exercice 6206

1. Que peut-on dire de la différentiabilité de l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x_1,x_2)=\|x\|_\infty=\max(|x_1|,|x_2|)$?
2. Généraliser ceci à $f:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\|x\|_\infty$, avec $\mathscr{F}=\mathbb{R}^n$ ou $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites convergentes vers zero.

[002514]

Exercice 6207

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'application $x=(x_1,x_2)\mapsto\|x\|_1=|x_1|+|x_2|$. Est-ce qu'elle est différentiable ? Considérons maintenant l^1 l'espace des suites réelles muni de la norme $\|x\|_1=\sum_{j=1}^\infty|x_j|$.

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur l^1 il existe une suite bornée $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,....)$ telle que
$$L(x)=\sum_{j=1}^\infty \alpha_j x_j\ .$$
2. Montrer que la norme $\|.\|_1:l^1\to\mathbb{R}$ n'est pas différentiable en aucun point de l^1 (raisonner par l'absurde en utilisant (1.)).

[002515]

Exercice 6208

Dans un espace normé $(\mathscr{F},N)$, on considére l'application $x\mapsto N(x)$. Rappeler que, lorsque cette application N est différentiable en $x\in\mathscr{F}$, alors
$$DN(x)\cdot(h)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(N(x+th)-N(x)\right)\ .$$
En déduire que N n'est pas différentiable en $0\in\mathscr{F}$. Supposons N différentiable en $x\in\mathscr{F}$, alors justifier que N l'est aussi en λx, où $\lambda>0$, et que $DN(x)=DN(\lambda x)$. En considérant la dérivée en $\lambda=1$ de l'application $\lambda\mapsto N(\lambda x)$, montrer que $DN(x)\cdot(x)=N(x)$ et en déduire $|||DN(x)|||=1$. [002516]

Exercice 6209

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ et de la norme associée $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac12}$. Soit u un endomorphisme continu de $\mathscr{E}$ que l'on suppose symétrique, i.e.
$$\langle u(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle\quad\text{pour tout }\ x,y\in\mathscr{E}\ .$$

1. Montrer que l'application $x\in\mathscr{E}\mapsto\langle u(x),x\rangle$ est différentiable sur $\mathscr{E}$ et calculer sa différentielle. L'application $x\mapsto\|x\|^2$ est donc différentiable.
2. On définit une application $\varphi:\mathscr{E}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x)=\frac{\langle u(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}$. Établir qu'il s'agit d'une application différentiable. Calculer ensuite $D\varphi$. Montrer que, pour un élément non nul $a\in\mathscr{E}$, on a $D\varphi(a)=0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.

[002517]

Exercice 6210

1. Soit f une application réelle continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x\overset{<}{\to}b$; alors f se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point b.
2. Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$, et de dérivée croissante ; montrer que f est convexe sur I i.e. $f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+tf(y)$ pour tous $x<y$ de I et $t\in[0,1]$. (Poser $z=(1-t)x+ty$ et appliquer les AF à $[x,z]$ puis $[z,y]$.)

Correction ▼ [002518]

Exercice 6211

Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = e^{ix}$.

Correction ▼ [002519]

Exercice 6212 partiel du 5 décembre 1999

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et $g = f \circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe C^1.
2. Calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de f notée $Df(x,y)$; calculer la matrice jacobienne de g au point $(0,0)$ notée $Dg(0,0)$.
3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \overline{B_\rho((0,0))}$ (la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon ρ) on a $||Dg(x,y)|| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0,0))}$.

Correction ▼ [002520]

Exercice 6213

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (\cos x - \sin y,\ \sin x - \cos y)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois

1. Montrer que $||DF(x,y)|| \leqslant \sqrt{2}$ pour tout (x,y).
2. En déduire que la suite récurrente définie par x_0, y_0 et pour $n \geqslant 1$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$
converge pour tout (x_0, y_0). Donnez l'équation que vérifie sa limite ?

Correction ▼ [002521]

Exercice 6214

Soit f une application différentiable de $]a,b[\subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que
$$||f'(x)|| \leqslant k||f(x)||, \quad \forall x \in]a,b[.$$
Montrer que si f s'annule en un point $x_0 \in]a,b[$, f est identiquement nulle dans $]a,b[$ (montrer que $E = \{x \in]a,b[\ ;\ f(x) = 0\}$ est ouvert). [002522]

Exercice 6215

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de E et f une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $||f'(x)|| \leqslant k|f(x)|, \ \forall x \in U$. Montrer que pour x assez voisin de $a \in U$,
$$|f(x)| \leqslant e^{k||x-a||}\,|f(a)|.$$
Indication : considérer l'application $t \in [0,1] \to f(a + t(x-a))$). [002523]

Exercice 6216

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (x^2 + y^2, y^2)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois avec elle-même. On considère $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \lim_{k\to\infty} F^{(k)}(x,y) = (0,0)\}$.

1. Vérifier que $(x,y) \in \Omega \iff F(x,y) \in \Omega$.

2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $||(x,y)|| < \varepsilon \Longrightarrow ||F'(x,y)|| \leqslant \frac{1}{2}$; en déduire que 0 est intérieur à Ω puis que Ω est ouvert.
3. Montrer que Ω est connexe.

[002524]

Exercice 6217

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (x^2 + y^2, y^2) .$$

Soit $\Omega = \{p \in \mathbb{R}^2 ; \lim_{k\to\infty} F^k(p) = (0,0)\}$.

1. Vérifier que $p \in \Omega$ si et seulement si $F(p) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|||DF(p)||| < \frac{1}{2}$ si $\|p\| < \delta$. En déduire que $(0,0)$ est dans l'intérieur de Ω puis que Ω est un ouvert.
3. Utiliser l'homogénéité de F pour montrer que Ω est connexe.

[002525]

Exercice 6218

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective sur Ω et telle que $Df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega$. Montrer que, pour tous $a, b \in \Omega$,

$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b-a)\| \leqslant \|b-a\| \sup_{c\in[a,b]} \|Df(c) - Df(a)\| .$$

Correction ▼ [002526]

Exercice 6219

Soit H un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$, et $f(x) = ||x||$ de H dans $\mathbb{R}$; montrer que f est différentiable en tout point de $H\backslash\{0\}$, et calculer sa différentielle. (indic. étudier directement $||x+h||$ ou considérer la fonction composée $x \to ||x||^2 \to \sqrt{||x||^2}$.) Décrire le noyau Ker$f'(x)$ en tout $x \neq 0$. [006255]

Exercice 6220

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n\backslash\{a\} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{a-x}{||x-a||^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{a\}$.
2. Montrer que $f'(x).h = \frac{Sh}{||x-a||^2}$ où S est la symétrie orthogonale d'axe $x-a$. Que peut-on dire de la transformation $f'(x)$ de $\mathbb{R}^n$?

[006256]

Exercice 6221

Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, où E, F, G sont des evn de dimension finie.

1. Calculer $B'(a)$ sa différentielle en un point $a = (a_1, a_2)$ de $E \times F$.
2. En déduire, pour f et g deux applications différentiables de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, la différentielle de $t \to f(t) \wedge g(t)$ et de $t \to \langle f(t), g(t)\rangle$ en tout $t \in I$.
3. Application : Soit A un opérateur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax \perp x$ pour tout x ; montrer que e^{tA} est une isométrie pour tout réel t. (Dériver $t \to ||e^{tA}x||^2$.)

[006257]

Exercice 6222

Soit E et F deux evn sur $\mathbb{C}$. Une application de E dans F $\mathbb{C}$-linéaire est $\mathbb{R}$-linéaire, mais la réciproque est fausse.

1. Soit $\varphi : E \to F$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer que φ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ pour tout $x \in E$. En déduire les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui sont $\mathbb{C}$-linéaires.

   Soit U un ouvert de E et $f : U \to F$. On suppose f $\mathbb{R}$-différentiable en $a \in U$. Il est clair que f est $\mathbb{C}$-différentiable en a si et seulement si $f'(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'écrit $f(z) = u(z) + iv(z) = f(x+iy)$ avec u et v réelles, qu'on identifie à $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, traduire à l'aide de a) "f est $\mathbb{C}$-différentiable en $a = \alpha + i\beta$". En quels points les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont-elles $\mathbb{C}$-différentiables : $f_1(z) = e^x$; $f_2(z) = |z|^2$; $f_3(z) = e^{x-iy}$?
3. (extrait de septembre 99) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-différentiable en $a = \alpha + i\beta \in U$, telle que $f(a) \neq 0$. Montrer que si $g = |f|$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $a = \alpha + i\beta \in U$, alors $f'(a) = 0$.

Correction ▼ [006258]

Exercice 6223

1. Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = e^{ix}$.
2. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, on a vu que $f'(]a,b[)$ est connexe. Montrer que ceci est faux pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = (x^2\cos(\frac{1}{x}), x^2\sin(\frac{1}{x}))$.

[006259]

Exercice 6224

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R}^n)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E constitué de fonctions différentiables, telles que

$$||f'(x)|| \leqslant M, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall f \in F, \; ||f|| \leqslant 1$$

où M est une constante fixée à l'avance. Montrer que la boule unité de F est compacte ; que peut-on dire de F ?
[006260]

Exercice 6225

Soient E, F des espaces normés, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application continue.

1. Soit a un point de Ω. Si f est différentiable dans $\Omega \setminus \{a\}$ et si l'application $x \in \Omega \setminus \{a\} \mapsto Df(x)$ admet une limite $T \in \mathscr{L}(E,F)$ quand x tend vers a dans Ω, montrer que f est différentiable au point a et que $Df(a) = T$ (appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $g : x \mapsto f(x) - T(x)$).
2. Supposons f différentiable dans Ω. Montrer que $Df : \Omega \to \mathscr{L}(E,F)$ est continue en $a \in \Omega$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\|f(a+h) - f(a+k) - Df(a)(h-k)\| \leqslant \varepsilon\|h-k\| \quad \text{si } \|h\| < \delta \text{ et } \|k\| < \delta\ .$$
3. Supposons maintenant qu'il existe une application continue $x \in \Omega \mapsto T_x \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $x \in \Omega$ et tout $h \in E$
$$\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T_x(h)\ .$$
   Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $Df(x) = T_x$ pour tout $x \in \Omega$. (On pourra considérer la fonction $g(t) = f(x+th) - tT_x(h)$.)

[006261]

Exercice 6226

Soient E, F des espaces de Banach, Ω un ouvert connexe de E et $f_n : \Omega \to F$ une suite d'applications différentiables. On suppose que cette suite vérifie :

(i) Il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_0))$ converge dans F.

(ii) La suite (Df_n) converge uniformément sur toute boule fermée $B_F(a,r) \subset \Omega$.

Alors, montrer que (f_n) converge uniformément sur toute boule fermée de Ω et que, si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ et $L_x = \lim_{n\to\infty} Df_n(x)$, alors f est différentiable avec $Df(a) = L_a$, $a \in \Omega$. [006262]

Exercice 6227

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective sur Ω et telle que $Df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega$.

1. Montrer que, pour tous $a, b \in \Omega$,
$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b-a)\| \leqslant \|b-a\| \sup_{c\in[a,b]} \|Df(c) - Df(a)\| .$$
2. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 telle que $f_n \to f$ et $Df_n \to Df$ uniformément sur tout compact de Ω. On va montrer : *pour tout compact K de Ω il existe n_0 tel que f_n soit injective sur K pour $n \geqslant n_0$.*
   — En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existerait K compact et, pour une infinité d'entiers n, des points $a_n, b_n \in K$ tels que $f_n(a_n) = f_n(b_n)$.
   — Quitte à extraire, montrer qu'alors $b_n - a_n \to 0$.
   — Utiliser (1.) pour en déduire une contradiction.

[006263]

Exercice 6228

1. Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
2. Soit $B_\varepsilon(x_o)$ la boule de rayon ε dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \overline{B_\varepsilon(x_o)} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que f est Lipschitzienne et donner une expression de son rapport.

[006796]

Exercice 6229

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application dérivable.

1. Énoncer l'inégalité des accroissements finis. (Pour cette question on peut supposer que U est con**v**exe.)
2. Démontrer, à l'aide de 1., la proposition suivante :
   Si pour tout $x \in U$ la dérivée de f en x est nulle : $Df(x) = 0$, alors pour tout x dans U il existe un voisinage V de x dans U (par exemple une boule centrée en x) tel que f est constante sur V.
3. À l'aide de 2., démontrer que si en plus U est co**nn**exe, alors f est constante sur U.

[006832]

Exercice 6230

Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : O \to \mathbb{R}^p$ une fonction. Supposons qu'il existe une fonction continue $L : O \times O \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ (l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ muni de la norme d'opérateurs) telle que pour tout $x, y \in O$ on a
$$f(x) - f(y) = L(x,y)(x-y) .$$
Démontrer que f est de classe C^1 sur O et que $Df(x) = L(x,x)$. [006839]

283 371.00 Différentielle d'ordre supérieur, formule de Taylor

Exercice 6231

Calculez $D^2 f(x)$ dans les cas suivants :

1. $f \in L(E,G)$ continue

2. $f : E \times F \to G$, bilinéaire continue.
3. $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^2$

Correction ▼ [002553]

Exercice 6232

Etudier les extrémas locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$
2. $f(x,y) = x^2y - x^2/2 - y^2$
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
4. $f(x,y) = \sin^2 x - \operatorname{sh}^2 y$
5. $f(x,y) = x^3 + y^3$
6. $f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$

Correction ▼ [002554]

Exercice 6233

Trouver le volume maximum d'une boite rectangulaire inscrite dans la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Correction ▼ [002555]

Exercice 6234

Déterminez le parallélipipède rectangle de volume V donné dont la surface totale est minimale. [002556]

Exercice 6235 Rappel du Cours

Soient E_1, E_2 et F des espaces normés et $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. Montrer que B est de classe C^∞ et déterminer les différentielles D^kB. [006287]

Exercice 6236

Soient E et F des espaces de Banach et $f : E \to F$ une application de classe C^2.

1. Soit $h \in E$ et $\varphi_h : E \to F$ l'application définie par $\varphi_h(x) = Df(x)(h)$. Justifier que
$$D^2f(a)(k,h) = D\varphi_h(a)(k) \quad \text{pour tout } \ k \in E\ .$$
2. Supposons que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que $D^2f(0)(x,x) = 2f(x)$ pour tout $x \in E$.
3. Soit $a, h, k \in E$ et soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \to F$ définie par $\Psi(t,s) = f(a + th + sk)$. Calculer $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t \partial s}(0,0)$.

[006288]

Exercice 6237

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $Df(x)$ est un automorphisme orthogonal, i.e. $Df(x)$ est linéaire bijective et conserve le produit scalaire :
$$\langle Df(x)(h), Df(x)(k)\rangle = \langle h,k\rangle \quad \text{pour tout } \ h,k \in \mathbb{R}^n\ .$$
Montrer que l'application f est elle même un automorphisme orthogonal.
Indications :

1. Déterminer la différentielle de $x \mapsto \langle Df(x)(h), Df(x)(k)\rangle$.
2. Vérifier que $A(h,k,l) = \langle Df(x)(h), D^2f(x)(k,l)\rangle$ est antisymétrique par rapport aux deux premières variables et symétrique par rapport aux deux dernières variables.
3. En déduire que $A(h,k,l) = 0$ pour tous $h,k,l \in \mathbb{R}^n$ puis conclure.

[006289]

Exercice 6238

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0$.
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \ .$$

(Indication : poser $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$ et $G = F \circ \varphi$).

[006290]

Exercice 6239

Soient E, F, G des Banach et $u : E \to F$, $v : F \to G$ deux applications C^2. Calculer, à l'aide de la définition, la différentielle seconde de $w = v \circ u$. [006291]

Exercice 6240

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et soit $n \geqslant 1$. Établir l'équivalence des propriétés suivantes :
   — $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$.
   — $f(x) = x^n g(x)$ avec $g \in C^\infty$.
2. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose $f(0) = Df(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g_{i,j} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telles que $f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{i,j}(x)$.

[006301]

Exercice 6241

Déterminer approximativement la valeur de $1,05^{1,02}$ avec une erreur d'au plus $\varepsilon < 10^{-2}$ (Indication : Appliquer Taylor à la fonction $f(x,y) = x^y$). [006302]

Exercice 6242

Montrer que si $x = 1,32 \pm 10^{-2}$ et $y = 0,45 \pm 10^{-2}$, alors $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = 0,14 \pm 10^{-2}$. [006303]

Exercice 6243

Ecrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de (0,0) pour la fonction $f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$. En déduire la limite $\frac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$ quand (x,y) tend vers (0,0). [006304]

Exercice 6244

Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^2 au voisinage du cercle $x^2 + y^2 = 1$. On pose $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = a$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = b$. Pour tout nombre réel θ, soit $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculez $F''(0)$ en fonction de a et b. [006305]

284 372.00 Difféomorphisme, théorème d'inversion locale et des fonctions implicites

Exercice 6245

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = ((x-2)^2 + y^2 - 4)((x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1).$$

1. Tracer rapidement la courbe C d'équation $f(x,y)=0$.
2. En quels points de C la relation $f(x,y)=0$ permet-elle de définir une fonction implicite de la forme $y=\phi(x)$?

[001858]

Exercice 6246

Montrer que les relations proposées définissent au voisinage du couple (a,b) indiqué une fonction implicite $y=\phi(x)$.
Donner un développement limité à l'ordre 3 de ϕ en a.

1. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1=0 \qquad (a,b)=(0,1)$.
2. $f(x,y)=2e^{x+y-1}+\ln(x-y)-2x+y^3 \qquad (a,b)=(1,0)$.

[001859]

Exercice 6247

Montrer que la relation

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-2z(x+y)-2x+y-2z-1=0$$

définit au voisinage de $(0,0,-1)$ une fonction implicite $z=\phi(x,y)$. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en $(0,0)$. [001860]

Exercice 6248

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)\neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est différentiable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit f définie par $f(x)=x+x^2\sin\frac{\pi}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.
   Montrer que $f'(0)$ existe et est $\neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

Correction ▼ [002527]

Exercice 6249

1. Montrer que l'application $\varphi:(r,\theta)\to(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur le plan privé de la demi-droite $\mathbb{R}^-$. Si $f(x,y)=g(r,\theta)$ donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et celles de g.
2. Soit U le plan privé de l'origine, et $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$.
   Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.
3. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y)=(x+y,xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U\subset\mathbb{R}^2$ tel que g soit un difféomorphisme de U sur $g(U)$.
4. Soit h l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y)\to(e^x\cos y,e^x\sin y)$.
   Montrer que h est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$; que $h'(x,y)$ est un élément de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$; mais que h n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $h(\mathbb{R}^2)$.

Correction ▼ [002528]

Exercice 6250

Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pas

$$\varphi(x,y)=(\sin(y/2)-x,\sin(x/2)-y).$$

1. Justifier que φ est de classe C^1, calculer sa différentielle et voir que $D\varphi(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$ et justifier que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.
3. Montrer que φ^{-1} est lipschitzienne (on prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x,y)\| = |x| + |y|$).
4. En déduire que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
5. Calculer $D\varphi^{-1}(p)$ où $p = (1-\pi/2, \sqrt{2}/2-\pi)$.

Correction ▼ [002529]

Exercice 6251

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Df(x)(h), h\rangle \geqslant \alpha\langle h, h\rangle.$$

1. En considérant la fonction $t \to \varphi(t) = \langle f(a+t(b-a)), b_a)\rangle$, montrez que
$$\langle f(b)-f(a), b-a\rangle \geqslant \alpha\langle b-a, b-a\rangle \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R}^n.$$
En déduire que f est une application fermée.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E, Df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est une application ouverte.
3. Conclure que f est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

Correction ▼ [002530]

Exercice 6252

Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soit $(x,y,z) \to (X,Y,Z)$ l'application inversion de pôle 0, de puisssance 1, définie dans U, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, par les formules

$$X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

Calculer la matrice jacobienne de cette transformation (on posera $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) et vérifier que cette matrice est égale à son inverse. [002531]

Exercice 6253

Reconsidérez l'exercice 6251 dans l'esprit suivant : "si f est un difféomorphisme, la matrice inverse de la matrice jacobienne de f est la matrice jacobienne de f^{-1}." [002532]

Exercice 6254

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et I la matrice unité dans E. En considèrant $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(A) = A^2$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $||A-I|| < \alpha$ admette une racine carrée. [002533]

Exercice 6255

1. Montrer que si a, b sont voisins de 1, on peut trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y + e^{xy} = a,\ x + e^{-xy} = b$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f(x,y) = (x\sin(xy)+y, y\cos(xy)+x)$, et soit (a_n, b_n) une suite tendant vers $(0,0)$. Montrer que si $f(a_n, b_n) = 0$ pour tout n, la suite (a_n, b_n) stationne.

[002534]

Exercice 6256

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 $\varphi = (f, g)$. On considère u, v réels et on cherche x, y tels que

$$(*) \quad f(x,y) = u,\ g(x,y) = v.$$

1. On suppose que la différentielle de φ est de rang 2 en tout point de U. Montrer que pour tout (u,v) le système $(*)$ admet une solution, unique localement. Que peut-on dire si la différentielle est de rang 2 en un point de U seulement ?
2. A-t-on des solutions si la différentielle est de rang 0 ?
3. On suppose maintenant que la différentielle de φ est de rang 1 en tout point de U. Si f'_x ne s'annule pas sur U, montrer que $\psi : (x,y) \to (f(x,y),y)$ définit un difféomorphisme d'un ouvert $V \subset U$ sur $\psi(V)$. En déduire G telle que $g(x,y) = G(f(x,y))$ sur V. Que peut-on dire des solutions du système $(*)$?

[002535]

Exercice 6257

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque, et B_r la boule fermée $||x|| \leqslant r$. Soit f un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts U et V de E, contenant 0, tel que $f(0) = 0$. On pose $A = f'(0) \in \mathscr{L}(E)$. Soit $0 < \varepsilon < 1$.

1. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in B_R$,
$$||A^{-1}(f(x)) - x|| \leqslant \varepsilon \; ||x||.$$
2. Montrer qu'il existe $R' > 0$ tel que pour $0 \leqslant r \leqslant R'$,
$$(1-\varepsilon)\, A(B_r) \subset f(B_r) \subset (1+\varepsilon)\, A(B_r).$$
3. En déduire que $\lim_{r\to 0} \frac{\text{vol } f(B_r)}{\text{vol } (B_r)} = |\det A|$.

[002536]

Exercice 6258

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x + a\sin y, y + b\sin x)$.

1. Montrer que si $|ab| < 1$, f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
2. Montrer que si $|ab| = 1$, f n'est plus un difféomorphisme mais reste un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

[002537]

Exercice 6259

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que
$$||f(x) - f(y)|| \geqslant k||x - y||$$
pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, k étant une constante > 0. On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{R}^n$.

[002538]

Exercice 6260

Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ une application continue dans $\overline{G}$ et C^1 dans G. Pour tout $x \in G$, on suppose $Df(x)$ inversible. Démontrer que, sous ces conditions, l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ atteint son maximum en un point du bord $\partial G = \overline{G} \setminus G$. [002539]

Exercice 6261

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert connexe de E et soit $f : \Omega \to E$ une application de classe C^1 telle que $|||Df(x)||| \leqslant c$, pour tout $x \in \Omega$, où $0 \leqslant c < 1$. Montrer que $Id_{|E} - f$ est un difféomorphisme C^1 de Ω sur son image. [002540]

Exercice 6262

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Correction ▼ [002541]

Exercice 6263

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Démontrer que, pour x suffisamment proche de 0, il existe un nuique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$. Vérifier, sans résolution explicite, que $y'(x) = -x/y$. [002542]

Exercice 6264

On considère le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonctionde x, y et z' en fonction de x, z. [002543]

Exercice 6265

Considérons $F(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x)$ un polynôme à coefficients variables. On suppose :

1. Les fonctions $x \to a_j(x)$ sont C^1, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.
2. pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, le polynôme $y \to F(x_0, y)$ a un zéro simple $y_0 \in \mathbb{R}$.

Démontrer que, dans ces conditions, $F(x,y)$ possède, pour x voisin de x_0, un zéro $y(x)$ qui lui est proche de y_0 et que la dépendance $x \to y(x)$ est C^1. [002544]

Exercice 6266

Donner l'allure de $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Correction ▼ [002545]

Exercice 6267

Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité d'ordre trois en 0. [002546]

Exercice 6268

Soit $i = \sqrt{-1}$. Calculer la matrice jacobienne de l'application $(x,y) \to (X,Y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $X + iY = (x+iy)^3$. [006264]

Exercice 6269

Démontrer le résultat suivant (théorème d'inversion globale) :

Soit E, F deux Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de classe C^1 sur U. Alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si :

(i) f est injective ;

(ii) $f'(x) \in \text{Isom}(E,F)$ pour tout $x \in U$. [006265]

Exercice 6270

1. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $(x,y,z) \to (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image que l'on précisera.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et F l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $(x,y,z) \to (e^{x-y+2z}+e^{-x+y+2z}, e^{2x}+e^{2y}-2\lambda e^{x-y}, e^{2x}+e^{2y}-2e^{-x+y})$. Montrer que F s'écrit $G\circ\varphi$, G à préciser, et que c'est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.

[006266]

Exercice 6271

On va proposer trois démonstrations possibles de l'exercice classique suivant : soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans lui-même, telle que $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout x réel, où $k \in]0,1[$. Alors F définie par $F(x,y) = (x+f(y), y+f(x))$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ **sur** lui-même.

1. Remarquer que F est injective et $F'(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ pour tout (x,y).
   Reste à établir la surjection.
2. 1ère méthode : Montrer que F est propre ($\lim ||F(x,y)|| = +\infty$ quand $||(x,y)|| \to +\infty$) et que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $g(x,y) = ||F(x,y)-(a,b)||^2$ est différentiable et atteint sa borne inférieure en un point annulant $g'(x,y)$; conclure.
3. 2ème méthode : Montrer que $F(\mathbb{R}^2)$ est à la fois ouverte et fermée. Conclure.
4. 3ème méthode : Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, appliquer le théorème du point fixe à l'application $\phi(x,y) = (a-f(y), b-f(x))$; conclure.

[006267]

Exercice 6272

Soit P un polynôme de degré 3 normé, de racines $x_1 < x_2 < x_3$:

$$P(t,x_1,x_2,x_3) = \Pi_{l=1}^3 (t-x_l) = t^3 + \sum_{k=1}^{3} a_k t^{k-1}.$$

Les coefficients a_k sont des fonctions polynômiales, donc de classe C^1, des racines. On pose $\Omega = \{x_1 < x_2 < x_3\}$ et on définit $f : x \in \Omega \to (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$. On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.

1. Vérifier que f est injective sur Ω.
2. On appelle J la matrice jacobienne de f, et V la matrice de coefficients $v_{ij} = x_i^{j-1}$. En calculant $\dfrac{\partial P}{\partial x_k}(t,x_1,x_2,x_3)$ de deux façons, montrer que VJ est une matrice diagonale inversible si $x \in \Omega$. Conclure.
3. En déduire la dérivée de f^{-1} en tout point de $f(\Omega)$.

[006268]

Exercice 6273

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$ et C l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = 0$.
   En quels points (a,b) peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites ? Calculer la dérivée de la fonction implicite lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C.
2. Montrer que l'équation $e^x+e^y+x+y-2 = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité à l'ordre 3 en 0.
3. Montrer que les équations $x+y-zt = 0$, $xy-z+t = 0$ définissent au voisinage de $(0,1)$ deux fonctions implicites $x = \varphi_1(z,t)$, $y = \varphi_2(z,t)$ avec $\varphi_1(0,1) = 1$, dont on calculera les différentielles en ce point.

[006269]

Exercice 6274

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \to F(u,v) \in \mathbb{R}$ une application de classe C^1, telle que $F(0,0)=0$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) \neq 0$. On considère $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x,y,z) = (xy, x^2-y^2-z)$ et l'application $f = F \circ \varphi$. Montrer que l'équation $f(x,y,z)=0$ définit au voisinage de $(0,0)$ une application $z = \psi(x,y)$ vérifiant

$$x\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2(x^2+y^2).$$

[006270]

Exercice 6275 novembre 1999

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : O \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $(a,b,c) \in O$ tel que $f(a,b,c)=0$.

1. Donner une condition suffisante pour qu'on puisse résoudre : et x en fonction de (y,z) et y en fonction de (x,z) et z en fonction de (x,y). Plus précisément, donner une condition suffisante pour qu'il existe U voisinage de a, V voisinage de b, W voisinage de c avec $U \times V \times W \subset O$, et $\varphi : V \times W \to U$, $\chi : U \times W \to V$, $\psi : U \times V \to W$ des fonctions de classe C^1 tels que pour $(x,y,z) \in U \times V \times W$:
$$f(x,y,z)=0 \Longleftrightarrow x = \varphi(y,z) \Longleftrightarrow y = \chi(x,z) \Longleftrightarrow z = \psi(x,y).$$
2. Si la condition donnée en 1. est satisfaite, démontrer que pour $(x,y,z) \in U \times V \times W$ tel que $f(x,y,z)=0$ on a
$$\partial_1 \varphi(y,z) \partial_2 \chi(x,z) \partial_1 \psi(x,y) = -1.$$

[006271]

Exercice 6276

On considère $E = M_n(\mathbb{R})$, $F = GL(n,\mathbb{R})$ et l'application Ψ de $F \times E$ dans E définie par $\Psi(A,B) = AB - I$. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que $\varphi : A \in F \to A^{-1}$ est différentiable en tout point de F et retrouver sa différentielle. [006272]

Exercice 6277

On considère le système d'équations d'inconnues x et y :

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \quad y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution (x_0, y_0), et que la fonction ainsi définie est continue..
2. Montrer en considérant la fonction $F(x,y,t) = (x - \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \quad y - \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2})$, que le système admet une unique solution $x = x(t)$, $y = y(t)$ constituée de fonctions C^∞.
3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $x(t), y(t)$ au point $(0,0)$.

[006273]

Exercice 6278

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0,y_0,z_0) = (0,0)$. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0,z_0)$ et $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. [006274]

Exercice 6279

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $F(x,y) = x^2+y^2-1$. Démontrer que, pour x suffisamment proche de 0, il existe un unique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$. Vérifier, sans résolution explicite, que $y'(x) = -\frac{x}{y}$. [006275]

Exercice 6280

On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2 & = & 0 \\ x^2+2y^2+z^2 & = & 4 \end{cases}.$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x,y(x),z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonction de x,y et z' en fonction de x,z. [006276]

Exercice 6281

Considérons $F(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x)$ un polynôme à coefficients variables. On suppose :

1. les fonctions $x \mapsto a_j(x)$ sont C^1, $j = 0,1,\ldots,n-1$,
2. pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, le polynôme $y \mapsto F(x_0,y)$ a un zéro simple $y_0 \in \mathbb{R}$.

Démontrer que, dans ces conditions, $F(x,y)$ possède, pour x voisin de x_0, un zéro $y(x)$ qui lui est proche de y_0 et que la dépendance $x \mapsto y(x)$ est C^1. [006277]

Exercice 6282

Donner l'allure de $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^4+y^3-x^2-y^2+x-y = 0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$. [006278]

Exercice 6283

Montrer que l'équation $e^x+e^y+x+y-2 = 0$ définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité d'ordre trois en 0. [006279]

Exercice 6284

1. Donner la définition d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.
2. Enoncer le théorème des fonctions implicites.

   Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1 et soit $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \mathbf{0}\}$. Supposons en plus que f vérifie la condition : $\forall x \in M : \mathrm{rang}(J(x)) = p$, où $J(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,p}$ est la matrice Jacobienne de f en x de taille $n \times p$.
3. Montrer, en utilisant le théorème des fonctions implicites, que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k = n-p$.

[006792]

Exercice 6285

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et $F = M(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels; on identifie F avec l'ensemble d'applications linéaires de E dans E. Soit $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateurs sur F.

1. Démontrer que $\forall A,B \in F : \|AB\|_{op} \leqslant \|A\|_{op} \cdot \|B\|_{op}$.
2. Démontrer que pour $A \in F$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ est une série normalement convergente sur tout compact de F. (Nota Bene : $A^0 = Id \in F$ désigne la matrice identité.) On note $\exp : F \to F$ l'application $A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$.
3. Calculer $D_{\mathbf{0}}\exp$, où $\mathbf{0}$ est l'application nulle de E dans E. Quelle est la taille de la matrice $D_{\mathbf{0}}\exp$? Déduire qu'il existe un voisinage U de $\mathbf{0} \in F$ et un voisinage V de $Id = \exp(\mathbf{0})$ tels que exp est un (C^1-)difféomorphisme de U sur V. Justifier votre réponse !

[006820]

Exercice 6286

Soit $f : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert O et $(x_o, y_o, z_o) \in O$ tel que $f(x_o, y_o, z_o) = 0$.

1. Donner une condition suffisante pour qu'on puisse résoudre : et x en fonction de (y,z), et y en fonction de (x,z), et z en fonction de (x,y). Plus précisément, donner une condition suffisante pour qu'il existe U un voisinage de x_o, V un voisinage de y_o, W un voisinage de z_o, $U \times V \times W \subset O$, et $\phi : V \times W \to U$, $\chi : U \times W \to V$ et $\psi : U \times V \to W$ des fonctions de classe C^1 telles que $\forall (x,y,z) \in U \times V \times W$:
$$f(x,y,z) = 0 \iff x = \phi(y,z) \iff y = \chi(x,z) \iff z = \psi(x,y) \ .$$
Justifier votre réponse.
2. Si la condition donnée en 1. est satisfaite, démontrer que $\forall (x,y,z) \in U \times V \times W$ tels que $f(x,y,z) = 0$ on a
$$(\partial_1 \phi)(y,z) \cdot (\partial_2 \chi)(x,z) \cdot (\partial_1 \psi)(x,y) = -1 \ .$$
(Remarque, cette relation est beaucoup utilisée en thermodynamique, où elle est écrite comme $(\frac{x}{y})_z \cdot (\frac{y}{z})_x \cdot (\frac{z}{x})_y = -1$, avec l'interprétation que $(\frac{x}{y})_z$ est la dérivée de x par rapport à y en gardant z constant.)

[006821]

Exercice 6287

Dans cet exercice, $\mathscr{O}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Quand dit-on qu'une fonction $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ est de classe C^k $(k \geqslant 1)$?
2. Démontrer par récurrence sur k que si $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{O} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont de classe C^k, alors $h : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)/g(x)$ est aussi de classe C^k.
3. Démontrer par récurrence sur k que la composée de deux fonctions de classe C^k est aussi de classe C^k.
4. Soit $Gl(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels 2×2 inversibles. Démontrer que l'application $I : Gl(2,\mathbb{R}) \to Gl(2,\mathbb{R})$, $I(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ est de classe C^k pour tout $k \geqslant 1$.
5. Énoncer le théorème de l'inversion locale pour une fonction $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^n$.
6. On se restreint au cas $n = 2$ et on se place dans les conditions du théorème de l'inversion locale. Démontrer que si f est de classe C^k, $k > 1$, alors la réciproque f^{-1} (donnée par le théorème de l'inversion locale) est de classe C^k.

[006833]

285 373.00 Extremum, extremum lié

Exercice 6288

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - xy^2$. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f, qu'il n'est pas un extremum local, mais que pourtant la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en ce point un minimum local. [001823]

Exercice 6289

Ecriver la formule de Taylor de second ordre pour chacune des fonctions suivantes au point (x_0, y_0) donné.

1. $f(x,y) = \sin(x+2y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
2. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
3. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \cos xy$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
4. $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;

5. $f(x,y)=e^{(x-1)^2}\cos y,\ (x_0,y_0)=(1,0)$.

[001824]

Exercice 6290

Pour chacune des fonctions suivantes etudiez la nature du point critique donné :

1. $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y)=x^2+2xy+y^2+6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+xyz$ au point critique $(0,0,0)$;
4. $f(x,y)=x^3+2xy^2-y^4+x^2+3xy+y^2+10$ au point critique $(0,0)$.

[001825]

Exercice 6291

Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

1. $f(x,y)=x^3+6x^2+3y^2-12xy+9x$;
2. $f(x,y)=\sin x+y^2-2y+1$;
3. $f(x,y,z)=\cos 2x\cdot\sin y+z^2$;
4. $f(x,y,z)=(x+y+z)^2$.

[001826]

Exercice 6292

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^3-3x(1+y^2)$.

1. Étudier les extremums locaux de f.
2. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x,y)\in D$. Montrer que si $f(x,y)=M$ ou $f(x,y)=m$, alors $x^2+y^2=1$.
4. Étudier la fonction $t\mapsto f(\cos t,\sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

[001827]

Exercice 6293

Trouver le point du plan $(2x-y+z=16)$ le plus proche de l'origine. [001828]

Exercice 6294

Déterminer les extremums de $f(x,y)=xy(1-x^2-y2)$ sur $[0,1]^2$. [001829]

Exercice 6295

Soit $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$. Montrer que f admet au plus un extremum. Ecrire $f(x,y)+9$ comme la somme de deux carrés et en déduire que f admet -9 comme valeur minimale. [001830]

Exercice 6296

Déterminer un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné. [001831]

Exercice 6297

Soit $f(x,y)=(x^2-y)(3x^2-y)$.
Montrer que f admet un minimum local en 0 suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de minimum local en $(0,0)$. [001832]

Exercice 6298

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xe^y + ye^x$.
Montrer que $(-1,-1)$ est le seul extremum possible. A l'aide d'un développement limité de $\varphi(h) = f(-1+h,-1+h)$ et de $\psi(h) = f(-1+h,-1-h)$, montrer que f n'a pas d'extremum. [001833]

Exercice 6299

Déterminer les extrémums de $f : (x,y,z) \to x^2+y^2+z^2+2xyz$. [001834]

Exercice 6300

Déterminer $\max\limits_{|z|\leqslant 1} |\sin z|$. On rappelle que : $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. [001835]

Exercice 6301

Si f est concave sur un ouvert convexe $U \subset \mathbb{R}^2$ et si :

$$\exists a \in U, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0,$$

alors f admet un maximum local en a. [001836]

Exercice 6302

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, on définit $\int(A)$ comme l'ensemble $\{x \in A | \exists \rho > 0, B(x,\rho) \subset A\}$. On supposera A fermée bornée et $\int(A) \neq \emptyset$. On suppose que f est une fonction C^1 sur A telle que f est constante sur $A \setminus \mathrm{Int}(A)$. Montrer qu'il existe $z \in \mathrm{Int}(A)$ tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(z) = 0.$$

[001837]

Exercice 6303

Chercher les extrémums sur $\mathbb{R}^2$ des applications :

$$(x,y) \to x^4+y^4-4xy;$$
$$(x,y) \to (x-y)e^{xy};$$
$$(x,y) \to xe^y+ye^x;$$
$$(x,y) \to e^{x\sin y};$$
$$(x,y) \to x^3+y^3.$$

[001838]

Exercice 6304

Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler une condition nécessaire pour que f présente un extremum local en (x_0,y_0).
   Dans la suite de l'exercice, $\mathbf{a} = (x_0,y_0)$ vérifie cette condition, c'est-à-dire est un *point critique* de f. On pose

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}),$$
$$Q(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2, \quad \Delta = B^2-AC,$$
$$R(t) = At^2+2Bt+C, \quad S(t) = Ct^2+2Bt+A.$$

2. On suppose $\Delta < 0$ et $A(\text{ou } C) > 0$.
   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $R(t) \geqslant \delta$ et $S(t) \geqslant \delta$ pour un certain $\delta > 0$.
   (b) On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et on suppose que $\sin\theta.\cos\theta \neq 0$. Montrer successivement :
   $$Q(x,y) \geqslant r^2\delta\sin^2\theta,$$
   $$Q(x,y) \geqslant r^2\delta\cos^2\theta,$$
   $$Q(x,y) \geqslant \tfrac{r^2}{2}\delta.$$
   En déduire que
   $$\forall (x,y) \quad Q(x,y) \geqslant \frac{r^2}{2}\text{Inf}(\delta, 2A, 2C).$$
   (c) Montrer que **a** est un point de minimum local strict de f. On écrira pour cela la formule de Taylor-Young pour f en ce point.
3. On suppose $\Delta < 0$ et $A(\text{ou } C) < 0$.
   Montrer que (x_0, y_0) est un point de maximum local strict de f.
4. On suppose maintenant $\Delta > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $S(t_1) > 0$ et $S(t_2) < 0$.
   (b) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\tan\theta_1 = t_1$ et $\tan\theta_2 = t_2$. En examinant les fonctions
   $$g(t) := f(x_0 + t\cos\theta_1, y_0 + t\sin\theta_1), \quad h(t) := f(x_0 + t\cos\theta_2, y_0 + t\sin\theta_2)$$
   pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit, montrer que **a** n'est ni un point de maximum local, ni un point de minimum local de f.
5. Dessiner l'allure du graphe de f au voisinage du point $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ dans les trois cas étudiés ci-dessus (questions 1, 3 et 4).
6. Que peut-on dire en général quand $\Delta = 0$? Pour répondre à cette question, on pourra s'appuyer sur l'étude des deux cas suivant au voisinage de $(0,0)$:
   $$f_1(x,y) = x^2 + x^4 + y^4 \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = x^2 - y^4.$$

[001839]

Exercice 6305

Existe-t-il un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné ? Le déterminer par une méthode géométrique. [001840]

Exercice 6306

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que :
$$\lim_{\|x\|\to\infty} |f(x)| = +\infty.$$
Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure. [001841]

Exercice 6307

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $(x,y) \mapsto 6xy + (y-x)^3$. On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$.

1. Dessiner Δ. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur Δ.
2. Calculer les extrema de f sur le bord de Δ puis dans l'intérieur de Δ.
3. En déduire les bornes de f sur Δ.

[001842]

Exercice 6308

$S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Soit f l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par $f(z) = |\sin z|$.

1. Pour quelle raison f est-elle bornée sur D ? On note $M = \sup_{z\in D} f(z)$ et $m = \inf_{z\in D} f(z)$. Est-ce que M et m sont atteints ? Donner la valeur de m.
2. Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}, x,y \in \mathbb{R}$. Montrer que $|\sin z|^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)$. (On rappelle que $\sin z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$ et $\operatorname{ch} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.)
3. En déduire que M est atteint en un point de S.
4. Montrer que $M = \dfrac{e^2-1}{2e}$.

[001843]

Exercice 6309

On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est nulle.
3. Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et calculer la valeur de ces dérivées en $(0,0)$. Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles en $(0,0)$?

[001844]

Exercice 6310

Déterminer les extremums (locaux et/ou globaux) de :

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = x^3 - y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[006306]

Exercice 6311

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ, la nature des extremums de la fonction $f(x,y) = y(x^2+y^2-2\lambda y)$. [006307]

Exercice 6312

Soit $f : (t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(t,x,y) \in \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que

— $\frac{\partial^2 f}{\partial (x,y)^2}$ soit une matrice définie positive en tout point et
— $(x,y) \mapsto f(0,x,y)$ atteint son minimum en (x_0,y_0).

Montrer que, si t est voisin de 0, l'application $(x,y) \mapsto f(t,x,y)$ atteint son minimum en $(x(t),y(t))$, où $t \mapsto (x(t),y(t))$ est une application de classe C^1 sur ce voisinage de 0. [006308]

Exercice 6313

Soit $g(x,y,z) = xyz - 32$, $\mathscr{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ g(x,y,z) = 0\}$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application $f(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz$. Déterminer $\min\{f(x,y,z) \ ; (x,y,z) \in S\}$. [006309]

Exercice 6314

Déterminer le point p du plan $\Sigma = \{(x,y,x+y) \ ; \ x,y \in \mathbb{R}\}$ qui réalise la distance $\operatorname{dist}(\Sigma\ ,\ (1,0,0))$. [006310]

Exercice 6315

1. Déterminer les extremums de la fonction $f(x,y) = xy$ sur le cercle unité $S = \{(,x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x^2+y^2 = 1\}$.
2. Même question pour la fonction $f(x,y) = xy^2$.

[006311]

Exercice 6316

Déterminer le minimum et maximum de la fonction $f(x,y,z) = 5x+y-3z$ sur l'intersection du plan $\Sigma = \{x+y+z=0\}$ avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. [006312]

Exercice 6317

Déterminer les extremums de la fonction $f(x,y,z) = 2x+3y+2z$ sur l'intersection du plan d'équation $x+z=1$ avec le cylindre $\mathscr{X} = \{x^2+y^2=2\} \subset \mathbb{R}^3$. [006313]

Exercice 6318

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un fermé non vide de E et $x \in E$ un point, appartenant ou non à F. Montrer qu'il existe un point $\bar{x} \in F$ tel que
$$\|x-\bar{x}\| = \inf_{z\in F} \|x-z\|.$$
(Question subsidiaire : ce point est-il unique ?)
2. On se place désormais dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels, muni de la norme
$$\left\| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$
et on considère l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de déterminant égal à 1.
   (a) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ n'est *pas* bornée.
   (c) Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la fonction qui à une matrice M associe $f(M) = \|M\|$. On cherche la ou les matrices M réalisant l'infimum de la fonction f sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, autrement dit la ou les matrices les plus proches de la matrice nulle.
      i. Montrer que $f_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ est minorée et atteint son infimum.
      ii. Calculer le gradient de f. Est-il toujours défini ?
      iii. Trouver le ou les extrema de $f_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$. Montrer qu'il s'agit du minimum et en déduire
$$\inf_{M\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \|M\|.$$

Correction ▼ [006883]

286 374.00 Autre

Exercice 6319

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Une fonction $f(x,y)$ est dite *radiale* si ses valeurs au point (x,y) ne dépendent que de la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ à l'origine, c'est à dire si $f(x,y) = F(r) = F(\sqrt{x^2+y^2})$, où $F = F(r)$ est une fonction d'une seule variable.

Montrez que les seules fonctions radiales et harmoniques, dans $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, sont les fonctions $C\ln(r)+D = C\ln(\sqrt{x^2+y^2})+D$, où C et D sont des constantes. [006292]

Exercice 6320

Vérifiez que les fonctions suivantes sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2$:

1. $e^x \cos y$;
2. $x^3 - 3xy^2$;
3. pour tout entier $k \geqslant 0$, la fonction $f(x,y) = r^k \cos(k\theta)$, où r et θ sont les coordonnées polaires de (x,y).

[006293]

Exercice 6321

Exprimez en coordonnées polaires : $y^2 \dfrac{\partial^n f}{\partial x^2} - 2xy \dfrac{\partial^n f}{\partial x \partial y} + x^2 \dfrac{\partial^n f}{\partial y^2} - x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$. [006294]

Exercice 6322

Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des z.

1. Vérifiez que la fonction $f(x,y,z)$, qui vaut $e^z \cos\frac{\theta}{2}\frac{\sin r}{\sqrt{r}}$ en coordonnées cylindriques, est harmonique sur U.
2. Soit λ une constante réelle. Montrer qu'une fonction du type $f(x,y,z) = e^z \cos(\lambda\theta)u(r)$ est harmonique dans U si et seulement si $u = u(r)$ est solution de l'équation différentielle (dite de *Bessel*) :
$$r^2 u''(r) + ru'(r) + [r^2 - \lambda^2]u(r) = 0. \qquad (E_\lambda)$$
3. Vérifiez, que pour $\lambda = 3/2$, la fonction $u(r) = \dfrac{\sin r - r\cos r}{r\sqrt{r}}$ convient.

[006295]

Exercice 6323

Dans $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine, montrez que les seules fonctions harmoniques et *radiales* (c'est-à-dire ne dépendant que de la distance ρ de (x,y,z) à l'origine) sont les fonctions $f(x,y,z) = \frac{C}{\rho} + D = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + D$, où C et D sont des constantes. [006296]

Exercice 6324

Soient ρ, θ, φ les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$. On pose $\sin\varphi = t$. Montrer que, pour qu'une fonction de la forme $f(x,y,z) = \rho^n P(t)$, où n est un entier $\geqslant 0$, soit harmonique, il faut et il suffit que la fonction $t \mapsto P(t)$ soit solution de l'équation différentielle (dite *de Legendre*) :

$$(1-t^2)P''(t) - 2tP'(t) + n(n+1)P(t) = 0. \qquad (D_n)$$

Pour $n = 0,1,2,3,4,5$, vérifiez, en le calculant par la méthode des coefficients indéterminés, qu'il y a un polynôme $P_n(t)$, et un seul, de degré n, solution de (D_n), et tel que $P_n(1) = 1$. [Remarque : ce fait vaut pour tout n ; les polynômes P_n s'appellent polynômes de Legendre]. [006297]

Exercice 6325

Dans $\mathbb{R}^n$, on pose $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n^2}$, et $\rho = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Soit une fonction *radiale* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\rho)$. Montrer que $\Delta f = F''(\rho) + (n-1)F'(\rho)$. Si $n \geqslant 3$, en déduire que les seules fonctions radiales et harmoniques dans $\mathbb{R}^n$ privé de l'origine sont les $f(x,y,z) = \frac{C}{\rho^{n-2}} + D$, où C et D sont des constantes. [006298]

Exercice 6326

$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + \langle \nabla f \mid \nabla g \rangle$. [006299]

Exercice 6327

Une fonction f de classe C^4 (par exemple à 2 variables) est dite *biharmonique* si

$$\Delta(\Delta f) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \equiv 0.$$

Ces fonctions interviennent en théorie de l'Elasticité. Bien entendu toute fonction harmonique est biharmonique. Montrez que, si f et g sont deux fonctions harmoniques, alors la fonction $xf + (x^2 + y^2)g$ est biharmonique. [006300]

287 380.00 Solution maximale

Exercice 6328

1. Pour chacune des équations suivantes où $y = y(x)$ est rélle de variable réelle, décrire les solutions en précisant leur intervalle maximal de définition et dessiner les trajectoires :

$$\text{(i) } y' = e - y \text{ (ii) } y' - y = e^x \text{ (iii) } xy' - 2y = 0.$$

2. Quelles sont les courbes isoclines de l'équation $y' = y^2 - x$; en déduire l'allure des trajectoires.

[002557]

Exercice 6329

On considère l'équation

$$x' = 3x^{2/3} :(1)$$

avec condition initiale $x(0) = 0$.

1. Soit φ une solution de (1) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$; on pose $\lambda = \inf\{t \leqslant 0; \varphi(t) = 0\} \leqslant +\infty$. Montrez que φ est identiquement nulle sur (λ, μ).
2. Montrer que φ vaut $(t-\lambda)^3$ si $t \leqslant \lambda$, 0 sur $[\lambda, \mu]$ et $(t-\mu)^3$ si $t \geqslant \mu$; en déduire toutes les solutions maximales de (1) définies sur $\mathbb{R}$ avec $x(0) = 0$.

Correction ▼ [002558]

Exercice 6330

On considère l'équation différentielle $x' = |x| + |t|$.

1. Montrez que pour tout réel x_0, il existe une solution maximale (φ, J) telle que $\varphi(0) = x_0$.
2. Détermner la solution maximale correspondant à $x_0 = 1$, en distinguant les cas $t \geqslant 0$ et $t < 0$, et vérifiez qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Combien de fois est-elle dérivable ?

Correction ▼ [002559]

Exercice 6331

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t,x) = 4\frac{t^3 x}{t^4 + x^2}$ si $(t,x) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On s'interesse à l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

1. L'application f, est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ? Que peut-on en déduire pour l'équation (2) ?

2. Soit φ une solution de (2) qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une application psi par $\varphi(t) = t^2\psi(t), t \in I$. Déterminer une équation différentielle (E) telle que ψ soit solution de cette équation, puis résoudre cette équation (E).
3. Que peut-on en déduire pour l'existence et l'unicité de l'équation différentielle (2) avec donnée initiale $(t_0, x_0) = (0, 0)$

Correction ▼ [002560]

Exercice 6332

Soit l'équation différentielle

$$x''' - xx'' = 0$$

où x est une application trois fois dérivable, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Mettre cette équation différentielle sous la forme canonique $y'(t) = f(t, y(t))$, où f est une application que l'on déterminera.
2. Soient $t_0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale φ de l'équation (3) qui satisfasse aux conditions initiales
$$\varphi(t_0) = a, \varphi'(t_0) \text{ et } \varphi''(t_0) = c.$$
3. Soit φ une telle solution maximale. Calculer la dérivée de la fonction
$$t \to \varphi''(t)exp\left(-\int_{t_0}^{t} \varphi(u)du\right)$$
En déduire que la fonction φ est soit convexe, soit concave sur son intervalle de définition. Déterminer φ dans le cas où $\varphi''(t_0) = 0$.

Correction ▼ [002561]

Exercice 6333

On considère l'équation $xx'' = (x')^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, $x_0 \neq 0$ et x_0' étant donnés dans $\mathbb{R}$, il existe une unique solution φ définie au voisinage de 0, telle que $\varphi(0) = x_0$ et $\varphi'(0) = x_0'$.
2. Si de plus $x_0' \neq 0$, on peut supposer que φ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de x_0 (pourquoi ?) ; on note ψ l'application réciproque et on pose $z(x) = \varphi'(\psi(x))$. Calculez $z'(x)$, trouver l'équationb satisfaite par z et expliciter z ; en déduire une expression de φ.
3. Quelle est la solution φ de léquation telle que $\varphi(0) = x_0 \neq 0$ et $\varphi'(0) = 0$.

[002562]

Exercice 6334

1. Pour chacune des équations suivantes où $y = y(x)$ est réelle de variable réelle, décrire les solutions en précisant leur intervalle maximal de définition et dessiner les trajectoires :
$$(i)\ y' = e^{-y}; \quad (ii)\ y' - y = e^x; \quad (iii)\ xy' - 2y = 0; \quad (iv)\ x^2y' - y = x^2 - x.$$
2. Quelles sont les courbes isoclines de l'équation $y' = y^2 - x$; en déduire l'allure des trajectoires.

[006314]

Exercice 6335

Soit f, g deux fonctions réelles continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et on suppose que $g^{-1}(0)$ est fini ou discret ; montrer que la solution de l'équation $y' = f(x)g(y),\ y(x_0) = y_0$ s'obtient sous forme implicite, et préciser son intervalle de définition.

Exemples : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ g(y)=\sqrt{1-y^2}$; $f(x)=1,\ g(y)=y-y^2$. [006315]

Exercice 6336

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''+y'+y=0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et étudier le comportement des solutions en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f''+f'+f$ soit T-périodique. Montrer que $f(x+T)-f(x)$ est solution de (E). En déduire que si f est bornée sur $\mathbb{R}$, f est elle-même T-périodique.

[006316]

Exercice 6337

On considère les deux équations différentielles du second ordre

$$(\mathscr{E}_1) \qquad y''=\sin x \qquad (\mathscr{E}_2) \qquad y''+\omega^2 y=\sin x$$

où ω est un nombre réel de module strictement inférieur à 1.

1. Trouver la solution y de l'équation $\mathscr{E}_1$ vérifiant $y(0)=0,\ y(\pi)=4\pi$.
2. Décrire la solution générale de l'équation $\mathscr{E}_2$, et prouver ainsi que la solution y_ω vérifiant $y_\omega(0)=0,\ y_\omega(\pi)=4\pi$, a pour expression
$$y_\omega(x)=4\pi\frac{\sin\omega x}{\sin\pi\omega}-\frac{\sin x}{1-\omega^2}.$$
3. Trouver, à x fixé, la limite de $y_\omega(x)$ quand ω tend vers 0. Interprétation.
4. On restreint x à parcourir l'intervalle $[0,\pi]$, et on suppose $0\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{2}$. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que $|\pi\sin\omega x-x\sin\pi\omega|\leqslant\pi^3\omega^3$. En déduire : $|y_\omega(x)-y(x)|\leqslant A\omega^2$, où A est une constante.

[006317]

Exercice 6338

On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(\mathscr{E}) \qquad y''+y=f(x)$$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. On suppose que f est un polynôme de degré n. On note E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$. Montrer que l'application u, définie sur E par $u(P)=P''+P$, est une application injective de E dans lui-même.

   En déduire que l'équation $(\mathscr{E})$ a une et une seule solution polynômiale g qui est de même degré que f.
2. On suppose maintenant que f est une fonction continue quelconque sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction
$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$
est une solution particulière de $(\mathscr{E})$; en déduire la solution générale de l'équation.
3. Montrer que si f vérifie l'inégalité $f(t)\leqslant\frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sont des fonctions bornées. A-t-on la même conclusion si la fonction f est seulement bornée sur $\mathbb{R}$?

[006318]

Exercice 6339 Méthode de Picard

On construit de proche en proche la suite de fonctions réelles (y_n) par la relation

$$y_0(x)=1, \quad y_n(x)=1+\int_0^x (y_{n-1}(t))^2 dt.$$

1. On suppose d'abord $x \in [0,1[$. Montrer que la suite (y_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{1-x}$. En déduire que y_n tend, quand $n \to \infty$, vers une limite qui est la solution de l'équation différentielle $y' = y^2$ valant 1 en 0.
2. Si $-1 < x \leqslant 0$, montrer que (y_{2n}) et (y_{2n+1}) sont des suites adjacentes, telles que, pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{1-x} \leqslant y_{2n} \leqslant 1$ et $1+x \leqslant y_{2n+1} \leqslant \frac{1}{1-x}$; retrouver la solution de l'équation sur $]-1,1[$ valant 1 en 0.

[006319]

Exercice 6340

1. En suivant la méthode d'itération de Picard, trouver la solution des équations avec condition initiale :
   (i) $x'(t) = ax(t) + b$; $x(0) = 0$.
   (ii) $x'(t) = \sin x(t)$; $x(0) = 0$.
2. Soit A une matrice $n \times n$ constante. Trouver par la méthode de Picard la solution de $X'(t) = A\,X(t); X(0) = X_0$; retrouver ainsi la solution de
   $x''(t) = -x(t)$; $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
3. Soit cette fois $A(t)$ une famille de matrices $n \times n$ de fonctions continues, telle que pour s,t, on ait $A(s)A(t) = A(t)A(s)$. Trouver la solution de l'équation $X'(t) = A\ X(t); X(0) = X_0$ (on montrera que $B(s)B(t) = B(t)B(s)$ où $B(t) = \int_0^t A(u)\,du$).

[006320]

Exercice 6341

On considère l'équation $(1)\quad x' = 3x^{2/3}$ avec condition initiale $x(0) = 0$.

1. Soit φ une solution de (1) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$; on pose $\lambda = \inf\{t \leqslant 0;\ \varphi(t) = 0\} \geqslant -\infty$ et $\mu = \sup\{t \geqslant 0;\ \varphi(t) = 0\} \leqslant +\infty$. Montrer que φ est identiquement nulle sur (λ, μ).
2. Montrer que φ vaut $(t-\lambda)^3$ si $t \leqslant \lambda$, 0 sur $[\lambda, \mu]$ et $(t-\mu)^3$ si $t \geqslant \mu$; en déduire toutes les solutions maximales de (1) définies sur $\mathbb{R}$ avec $x(0) = 0$.

[006321]

Exercice 6342

On considère l'équation différentielle $x' = |x| + |t|$;

1. Montrer que pour tout x_0 réel, il existe une solution maximale (φ, J) telle que $\varphi(0) = x_0$.
2. Déterminer la solution maximale correspondant à $x_0 = 1$, en distinguant les cas $t \geqslant 0$ et $t < 0$, et vérifier qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Combien de fois est-elle dérivable ?

[006322]

Exercice 6343

On considère l'équation différentielle $x' = |x| + |t|$.

1. Montrer que pour tout réel x_0, il existe une solution maximale (φ, J) telle que $\varphi(0) = x_0$.
2. Déterminer la solution maximale correspondant à $x_0 = 1$, en distinguant les cas $t \geqslant 0$ et $t < 0$, et vérifier qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Combien de fois est-elle dérivable ?

[006323]

Exercice 6344

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t,x) = 4\frac{t^3 x}{t^4 + x^2}$ si $(t,x) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)) \ . \tag{9}$$

1. L'application f, est-elle continue et/ou localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ? Que peut-on en déduire pour l'équation (9) ?

2. Soit φ une solution de (9) qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une application ψ par $\varphi(t) = t^2\psi(t)$, $t \in I$. Déterminer une équation différentielle (9') telle que ψ soit solution de cette équation, puis résoudre cette équation (9').
3. Que peut-on en déduire pour l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle (9) avec donnée initiale $(t_0, x_0)) = (0,0)$?

[006324]

Exercice 6345

Soit l'équation différentielle

$$x''' - xx'' = 0 \ . \tag{10}$$

où x est une application trois fois dérivable, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Mettre cette équation différentielle sous la forme canonique
$$y'(t) = f(t, y(t)) \ ,$$
où f est une application que l'on déterminera.
2. Soient $t_0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale φ de l'équation (10) qui satisfasse aux conditions initiales
$$\varphi(t_0) = a \ , \ \varphi'(t_0) = b \ \ et \ \ \varphi''(t_0) = c \ .$$
3. Soit φ une telle solution maximale. Calculer la dérivée de la fonction
$$t \mapsto \varphi''(t) \exp\left(-\int_a^t \varphi(u)\,du\right) \ .$$
En déduire que la fonction φ est soit convexe, soit concave sur son intervalle de définition. Déterminer φ dans le cas où $\varphi''(a) = 0$.

[006325]

Exercice 6346

Introduction. Si A est une matrice $n \times n$ à coefficients réels, on sait que les solutions de l'équation

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) \tag{*}$$

sont définies (au moins) sur l'intervalle $[0, \infty[$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$). Dans la question 1. on vous demande de démontrer que, sous certaines hypothèses sur A, on a $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.
Le but des questions 2. et 3. est de démontrer les mêmes résultats pour l'équation perturbée

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) + g(\varphi(t)) \tag{**}$$

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes. La question 3. utilise des résultats des questions 1. et 2.

1. Soit $M(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels et $M(n,\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients complexes. Soit $\| \ \ \| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ la norme définie par $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_i |x_i|$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $B \in M(n,\mathbb{C})$ on a :
   $$\max_{i=1,\dots,n} \left| \sum_{j=1}^n B_{ij} x_j \right| \leqslant (\max_i \sum_j |B_{ij}|) \cdot (\max_j |x_j|) \ ,$$
   c'est-à-dire $\|Bx\| \leqslant (\max_i \sum_j |B_{ij}|) \cdot \|x\|$.

(b) Soit $D \in M(n,\mathbb{C})$ une matrice diagonale avec $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ sur la diagonale. Montrer que $\forall x \in \mathbb{C}^n$: $\|Dx\| \leqslant (\max_i |\lambda_i|)\cdot \|x\|$.

(c) Soit $A \in M(n,\mathbb{C})$ diagonalisable et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ses valeurs propres. Soit $\alpha = \max_i \operatorname{Re}\lambda_i$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\forall t \in [0,\infty[$: $\|e^{tA}x\| \leqslant Ke^{\alpha t}\|x\|$.

(d) Soit $A \in M(n,\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ses valeurs propres (attention, ici A est à coefficients réels). Soit en plus $\alpha = \max_i \operatorname{Re}\lambda_i$ strictement inférieur à 0. Déduire de ce qui précède que si $\varphi(t)$ est solution de l'équation (*), alors $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$.

2. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ comme dans l'introduction.
   (a) Démontrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x,y \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \eta,\ \|y\| < \eta \Longrightarrow \|g(x)-g(y)\| \leqslant \varepsilon\cdot\|x-y\|$.
   (b) Quelle est la solution de domaine de définition maximal (à préciser) de l'équation (**) vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = 0$?
   (c) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0. Démontrer qu'une application continue $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est solution de l'équation (**) avec condition initiale $\varphi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si on a sur I :
$$\varphi(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(\varphi(s))\,ds\ .$$
   Indication : pour $\Longrightarrow$ on pourra considérer la fonction $\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t)$.

3. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ comme dans l'introduction ; soit A et α comme dans 1.(d) et K comme dans 1.(c) Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta < 0$. En posant $\varepsilon = (\beta-\alpha)/K$, la question 2.(a) nous donne un $\eta > 0$. Soit finalement $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| < \eta/K$.
   On définit une suite de fonction $\varphi_p : [0,\infty[\to \mathbb{R}^n$ par les formules $\varphi_0(t) = e^{tA}x_0$ et
$$\varphi_{p+1}(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(\varphi_p(s))\,ds\ .$$
   (a) Démontrer par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,\infty[: \|\varphi_p(t)\| \leqslant Ke^{t\beta}\|x_0\|$.
   (b) Démontrer que $\chi(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\|$ est une fonction bornée sur $[0,\infty[$.
   (c) Démontrer par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,\infty[$:
$$\|\varphi_{p+1}(t) - \varphi_p(t)\| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{-\alpha}\right)^p \cdot \sup_{s\in[0,\infty[} \|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\|\ .$$
   (d) En déduire que $\forall p,q \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,\infty[$:
$$\|\varphi_{p+q}(t) - \varphi_p(t)\| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{-\alpha}\right)^p \cdot \left(1 - \frac{\beta-\alpha}{-\alpha}\right)^{-1} \cdot \sup_{s\in[0,\infty[} \|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\|\ .$$
   (e) Démontrer que la suite (φ_p) converge vers une fonction $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}^n$ et que la convergence est uniforme.
   (f) Démontrer que φ est continue et solution de l'équation (**) vérifiant $\varphi(0) = x_0$.
   (g) Démontrer que $\forall t \in [0,\infty[: \|\varphi(t)\| \leqslant Ke^{t\beta}\|x_0\|$.
   (h) Déduire de ce qui précède qu'il existe un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^n$ (à préciser) tel que $\forall x_0 \in U$ il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ vérifiant
      i. φ est l'unique solution de (**) vérifiant $\varphi(0) = x_0$,
      ii. $[0,\infty[\subset I$,
      iii. $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$.

[006809]

Exercice 6347

Pour une fonction réelle x de la variable t on considère le système
$$x'''' + 2x'' + x = 0 \qquad \& \qquad x(0) = 2\ . \tag{*}$$

1. Le système (*) a-t-il une solution unique ? Pourquoi ?

   Si votre réponse à la question 1. est oui, répondre à la question 2., si votre réponse à la question 1. est non, répondre à la question 3..

2. Trouver la solution unique de (*). Est-elle périodique ?
3. Trouver toutes les solutions de (*). Y-a-t-il des solutions périodiques ? Si oui, les expliciter.

[006822]

Exercice 6348

Pour une fonction **réelle** x de la variable t on considère le système

$$\begin{cases} x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x'' - 2x' + x = 0 \\ x(0) = 0 \quad , \quad x''(0) = -2 \quad , \quad x^{(3)}(0) = 0 \end{cases} \tag{*}$$

1. Le système (*) a-t-il une solution unique ? Pourquoi ?

   Si votre réponse à la question 1. est oui, répondre à la question 2., si votre réponse à la question 1. est non, répondre à la question 3..

2. Trouver la solution unique de (*). Est-elle périodique ?
3. Trouver toutes les solutions de (*). Y-a-t-il des solutions périodiques ? Si oui, les expliciter.

[006828]

Exercice 6349

Soit $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x,t,c) = x - \ln(x) - t + \ln(t) - c$.

1. Démonter que si une fonction dérivable de t, $x = \gamma_c(t)$ est solution de l'équation $f(\gamma_c(t),t,c) = 0$, alors elle est solution de l'équation différentielle $t(x-1)x' = (t-1)x$.
2. Existe-t-il une fonction $g(t,c)$ définie dans un voisinage de $(2,0)$ vérifiant $g(2,0) = 2$ et $f(g(t,c),t,c) = 0$ (justifier) ? Si oui, calculer le développement limité (le polynôme de Taylor) d'ordre 2 de cette solution.

[006837]

Exercice 6350

Pour une fonction **réelle** x de la variable t on considère le système

$$\begin{cases} x^{(4)} - 2x^{(3)} + x'' + 2x' - 2x = 0 \\ x(0) = 0 \quad , \quad x''(0) = 0 \end{cases} \tag{*}$$

1. Le système (*) a-t-il une solution unique ? Pourquoi ?

   Si votre réponse à la question 1. est oui, répondre à la question 2., si votre réponse à la question 1. est non, répondre à la question 3..

2. Trouver la solution unique de (*). Est-elle périodique ?
3. Trouver toutes les solutions de (*). Y-a-t-il des solutions périodiques ? Si oui, les expliciter.

[006845]

Exercice 6351

On considère l'équation différentielle (de Ricatti) sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{E}) \qquad x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

où $a,b,c \in C(\mathbb{R},R)$. Soit $x_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$, quatre solutions distinctes définies sur I. On pose $B = \dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\dfrac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}$.

1. Montrer que B est bien défini sur I.
2. Montrer que B est une fonction constante sur I (utiliser la dérivée logarithmique).

[006326]

Exercice 6352

On considère l'équation différentielle (de Bernoulli) sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{E}) \qquad y' + y + xy^2 = 0.$$

1. Recherche des solutions qui ne s'annulent jamais. Transformer l'équation par le difféomorphisme $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to (x, \frac{1}{y})$ en une équation $(\mathscr{E}')$ qu'on résoudra. En déduire une famille (φ_λ) de solutions de $(\mathscr{E})$ avec leur intervalle maximal de définition.
2. Montrer que par tout point (x_0, y_0) du plan avec $y_0 \neq 0$, il passe une solution φ_λ. En déduire toutes les solutions de $(\mathscr{E})$.

[006327]

Exercice 6353

Soit f un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et, $(1) \quad x' = f(x)$, l'équation associée.

1. Soit $x_0 \in U$ tel que $f(x_0) = 0$. Si $\varphi : J \to U$ est une solution de (1) telle que $\varphi(t_0) = x_0$ pour un $t_0 \in J$, alors $\varphi(t) = x_0$ pour tout $t \in J$.
2. Si f est bornée sur U et $\varphi : J \to U$ est une solution de (1) où $J =]a,b[$, $b \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{t\to b} \varphi(t)$ existe.
3. Soit $\varphi : J \to U$ une solution de (1) où $J \supset]0,+\infty[$, et supposons en outre que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = a \in U$. Montrer que $f(a) = 0$.

[006328]

Exercice 6354

Soit f un champ de vecteurs de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et on suppose (pour simplifier) que, pour toute donnée initiale x de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique solution passant par x au temps $t = 0$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. On note $\phi(t,x)$ cette solution (ou ϕ le flot du champ).

1. Montrer qu'on a $\phi(s, \phi(t,x)) = \phi(s+t, x)$ pour tous $s,t \in \mathbb{R}$. et la vérifier sur l'équation $x' = x^2, x(0) = \alpha \geqslant 0$ aprés avoir précisé le domaine de définition du flot.
2. On fait $n = 2$; décrire le flot lorsque $f(x,y) = (-x,y); \quad (y,x); \quad (-y,x)$, et vérifier la relation précédente.

[006329]

Exercice 6355 Fonctions implicites et Cauchy-Lipschitz

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to R$, de classe C^2, et (a,b) un point tel que $f(a,b) = 0$, et $f'_y(a,b) \neq 0$. Montrer que si $y = \varphi(x)$ est la fonction implicite associée à $f(x,y) = 0$, φ est solution de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}; \; y(a) = b.$$

Réciproque. [006330]

Exercice 6356 Inégalité de Gronwall

Soit u,v deux applications de $[0,\beta]$ dans $\mathbb{R}$ continues et positives telles que

$$u(t) \leqslant C + \int_0^t u(s)v(s)\,ds$$

où C est une constante positive ou nulle. Montrer que $u(t) \leqslant Ce^{\int_0^t v(s)\,ds}$. [006331]

Exercice 6357

Soit f une application K-lipschitzienne sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. On va démontrer que le flot de solutions de $x' = f(x)$, supposé défini sur un intervalle $[t_0,t_1]$, dépend continument de la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

1. Soit $x_1,\ x_2$ deux telles solutions ; montrer que si $t \in [t_0,t_1]$,

$$||x_1(t) - x_2(t)|| \leqslant ||x_1(t_0) - x_2(t_0)||e^{K(t-t_0)}$$

2. En déduire le résultat et le vérifier sur l'exemple : $x' = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

[006332]

Exercice 6358

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$, $f(t,x)$ une fonction continue de $I \times E$ dans E telle que $||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leqslant k(t)\ ||x_1 - x_2||$, où k est une fonction continue $\geqslant 0$ définie sur I.

1. On considère J intervalle compact $\subset I$ et l'opérateur T défini sur $C(J,\mathbb{R}^n)$ par

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))\,ds;$$

montrer que pour p assez grand, T^p est contractante ; en déduire que l'équation $x' = f(t,x)$ admet une unique solution définie sur J tout entier telle que $x(t_0) = x_0$.

2. Montrer que l'équation $x' = f(t,x)$ admet une unique solution telle que $x(t_0) = x_0$, définie sur I tout entier (on pourra écrire I comme union d'intervalles compacts).
3. Exemples : Montrer que les solutions maximales des équations
$y'' = -\sin y, y(0) = a, y'(0) = b$ (qu'on mettra sous forme canonique), et $x' = A(t).x, x(0) = x_0$ où $A(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ est constituée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

[006333]

Exercice 6359

On considère l'équation $xx'' = (x')^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, $x_0 \neq 0$ et x'_0 étant donnés dans $\mathbb{R}$, il existe une unique solution φ définie au voisinage de 0, telle que $\varphi(0) = x_0$ et $\varphi'(0) = x'_0$.
2. Si de plus $x'_0 \neq 0$, on peut supposer que φ est un C^1–difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de x_0 (pourquoi ?) ; on note ψ l'application réciproque et on pose $z(x) = \varphi'(\psi(x))$. Calculer $z'(x)$, trouver l'équation satisfaite par z et expliciter z ; en déduire une expression de φ.
3. Quelle est la solution φ de l'équation telle que $\varphi(0) = x_0 \neq 0$ et $\varphi'(0) = 0$.

[006334]

Exercice 6360

1. On cherche à résoudre le problème

$$x' = t^2 + tx \quad , \quad x(0) = 0 \, .$$

Écrire l'équation intégrale associée et utiliser les cylindres de sécurités pour justifier que le procédé itératif de Picard donne une suite de fonctions (x_n) convergent uniformément sur $[-1/2, 1/2]$ vers une solution du problème. Partant de $x_0 \equiv 0$, déterminer ensuite cette suite (x_n) et la solution du problème donné.

2. Résoudre avec ce procédé itératif le problème

$$x' = tx \quad , \quad x(0) = 1 \, ,$$

puis aussi

$$\begin{array}{ll} x_1' = x_2 x_3 \, , & x_1(0) = 0 \, , \\ x_2' = -x_1 x_3 \, , & x_2(0) = 1 \, , \\ x_3' = 2 \, , & x_3(0) = 0 \, , \end{array}$$

en commençant avec $x_0(t) = (0, 1, 0)$.

[006335]

Exercice 6361

Calculer les premiers termes de l'itération de Picard avec les conditions initiales données. Si possible trouver des solutions explicites, y compris leurs domaines de définition.

1. $x' = x + 2 \, ; x(0) = 2$.
2. $x' = x^{4/3} \, ; x(0) = 0$.
3. $x' = x^{4/3} \, ; x(0) = 1$.
4. $x' = 1/(2x) \, ; x(1) = 1$.

[006336]

---

289 382.00 Système linéaire à coefficients constants

Exercice 6362

On rappelle les différentes méthodes pour résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants $X'(t) = A.X(t)$ sur E de dimension finie :

1. On met A sous forme triangulaire et on résout de proche en proche le nouveau système obtenu par changement de base avant de revenir au système initial.
2. On met A sous forme de Dunford, $P^{-1}AP = D + N$, où D semi-simple et N nilpotente, qui commutent. On calcule ainsi $e^{tA}.X_0$, la solution valant X_0 au temps $t = 0$.
3. On utilise le théorème de Cayley-Hamilton pour établir des relations entre les puissances de A et calculer ainsi e^{tA}.
4. (cf. Cartan) On décompose $E = \oplus_i E_i$ en sous-espaces caractéristiques, on calcule e^{tA_i} où $A_i = A_{|E_i}$, puis $X(t) = \sum_i e^{tA_i} v_i$, si $X_0 = \sum_i v_i$.
5. On cherche une base de solutions par identification sous la forme de polynômes-exponentielles, suivant le résultat du cours.

Résoudre les systèmes différentiels de matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 \\ -1 & 2 & -20 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[006337]

Exercice 6363

Soit A un opérateur de $\mathbb{R}^n$ et $x' = Ax$ le système associé.

1. On suppose que A laisse un sous-espace E invariant; montrer que si φ est une solution de condition initiale $\varphi(t_0) \in E$ alors $\varphi(t) \in E$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Que peut-on dire des solutions du système si A est nilpotente ; ?
3. On suppose que A a une valeur propre de partie réelle < 0; montrer qu'il existe au moins une solution φ telle que $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.
4. A quelles conditions le système n'a-t-il que des solutions bornées ?

[006338]

Exercice 6364

Montrer que $\left(I+\frac{A}{n}\right)^n$ converge vers e^A quand $n \to \infty$ en majorant la différence. Retrouver ainsi la valeur de $\det e^A$. [006339]

Exercice 6365

Soit $E = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathscr{L}(E,E)$ et le système différentiel $X' = AX$.

1. On suppose que $X = e^{r_1 t}u_1 + e^{r_2 t}u_2$ est solution, où $u_i \in E$ et $r_i \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que $e^{r_1 t}u_1$ et $e^{r_2 t}u_2$ sont solutions.
2. On suppose que $e^{rt}(u+tv)$ est solution où $u, v \in E$ et $v \neq 0$. Montrer que u n'est pas proportionnel à v et que $\dim\ \mathrm{Ker}(A - rI_E)^2 \geqslant 2$.

[006340]

Exercice 6366

Trouver la solution générale de l'équation $y^{(4)} + y = 0$ sous forme réelle. On admet que la fonction $f(a) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(at)}{1+t^4}\,dt$ vérifie cette équation. Sachant que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, montrer que pour $a \geqslant 0$

$$f(a) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\Big(\cos(\frac{a}{\sqrt{2}}) + \sin(\frac{a}{\sqrt{2}})\Big).$$

[006341]

Exercice 6367

Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{cases}$$

en utilisant d'abord les valeurs propres de la matrice A définissant ce système, puis en calculant A^n et e^{tA}. [006342]

Exercice 6368

1. Soit le système

$$x' = Ax \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de A puis un système de solutions de $x' = Ax$.

2. Même exercice avec

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix} \text{ ou encore } A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

[006343]

Exercice 6369

On considère le système linéaire $x'(t)=A(t)x(t)$, où $A\in\mathscr{C}([0,\infty))$. Soit φ une solution non-triviale de ce système et soit

$$\gamma=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|\varphi(t)\| \ ,-\infty\leqslant\gamma\leqslant\infty\,.$$

1. Montrer que γ ne dépend pas du choix de la norme $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que γ est une valeur finie si on suppose que les coefficients de la matrice $A(t)$ sont des fonctions bornées (on utilisera l'inégalité de Gronwall).
3. Dans le cas où A est une matrice constante diagonalisable, montrer que γ est forcément la partie réelle d'une valeur propre de A.

[006344]

Exercice 6370

Résoudre le système $x'=2x-y$, $y'=x+2y$. Quelle est la solution vérifiant $x(0)=1$, $y(0)=-2$? [006345]

Exercice 6371

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $A\in M(n,\mathbb{R})$ une matrice préservant E. Si $x(t)$ est une solution de l'équation $x'=Ax$ telle que $x(t_0)\in E$, montrer que $\forall t\in\mathbb{R}: x(t)\in E$. [006346]

Exercice 6372

Classifier et esquisser les portraits de phase des équations $x'=Ax$ pour $A\in M(2,\mathbb{R})$ ayant zéro comme valeur propre. [006347]

Exercice 6373

Pour quelle(s) valeur(s) de k l'origine est-elle un puits pour l'équation $x'=Ax$?

1. $\begin{pmatrix}a & -k\\ k & 2\end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix}3 & 0\\ k & -4\end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix}k^2 & 1\\ 0 & k\end{pmatrix}$,
4. $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & k\end{pmatrix}$.

[006348]

Exercice 6374

Trouver les solutions du système $x'=-y$, $y''=-x-y+y'$. [006349]

Exercice 6375

Soit $A \in M(n,\mathbb{R})$. Montrer que si toutes les solutions de l'équation $x' = Ax$ sont périodiques de même période, alors A est semi-simple et le polynôme caractéristique est une puissance de $\lambda^2 + b^2$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$.
[006350]

Exercice 6376

Soit $A \in M(4,\mathbb{R})$ semi-simple, et soient $\pm ai$, $\pm bi$, $a > 0$, $b > 0$ les valeurs propres.

1. Montrer que si a/b est rationnelle, alors toutes les solutions de $x' = Ax$ sont périodiques.
2. Montrer que si a/b est irrationnelle, alors il existe une solution non-périodique $x(t)$ telle que $M < |x(t)| < N$ pour certaines constantes $M,N > 0$.

[006351]

Exercice 6377

Si A est nilpotente, quelle est la forme des solutions de l'équation $x' = Ax$?

[006352]

Exercice 6378

Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit

1. diagonalisable, semi-simple, nilpotente.

[006353]

Exercice 6379

Trouver toutes les solutions périodiques de l'équation $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$. [006354]

290 383.00 Etude qualititative : équilibre, stabilité

Exercice 6380

Soit $A \in M(n,\mathbb{R})$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Quand dit-on que $0 \in \mathbb{R}^n$ est une source pour l'équation différentielle linéaire $x' = Ax$?
2. Démontrer que $0 \in \mathbb{R}^n$ est une source pour l'équation $x' = Ax$ si et seulement si pour toute solution $x(t)$ de l'équation différentielle on a $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$.

[006841]

291 384.00 Equation aux dérivées partielles

Exercice 6381

Résoudre à l'aide des coordonnées polaires l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

[001845]

Exercice 6382

Résoudre l'équation des cordes vibrantes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{x-y}{2}$ (on suppose que f est C^2). [001846]

Exercice 6383

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=f$$

en passant en coordonnées polaires. [001847]

Exercice 6384

Résoudre en utilisant le changement de variable $x=u, y=uv$ l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

[001848]

Exercice 6385

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application C^1 homogène de degré $s>0$, i.e. telle que :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}^{+*},\forall x\in\mathbb{R}^2, f(\lambda x)=\lambda^s f(x).$$

Montrer que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $s-1$ et :

$$sf(x)=x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

[001849]

Exercice 6386

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dérivable. On pose $F(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)$.
Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}$. [001850]

Exercice 6387

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction C^2. On pose $g(x,y)=f(x^2-y^2,2xy)$.
Calculer $\triangle(g)$ en fonction de $\triangle(f)$. [001851]

Exercice 6388

On cherche les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+2u\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=0 \qquad \text{pour tout } (u,v)\in\mathbb{R}^2. \tag{11}$$

Soit $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y)=(x,y+x^2)$.

1. En calculant l'application réciproque, montrer que ϕ est bijective. Vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Posons $g=f\circ\phi$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.
   (b) Montrer que f est solution de (11) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial x}=0$.
3. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que f vérifie (11) si et seulement s'il existe une fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(u,v)=h(v-u^2)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

[001852]

Exercice 6389

Soient $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f\left(e^x \sin x, \ln(1+x^2)\right)$.
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

[001853]

Exercice 6390

Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ et $V =]0,+\infty[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} \Psi\ : & V & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

1. Montrer que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective de V sur U. Déterminer Ψ^{-1}.
2. Soit $f\ :\ U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. On pose

$$F(r,\theta) = f \circ \Psi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et calculer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

   (b) Montrer que f vérifie l'équation

$$(E) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \forall (a,b) \in U$$

   si et seulement si F vérifie l'équation

$$(E') \qquad \frac{\partial F}{\partial r}(r_0,\theta_0) = \theta_0 \quad \forall (r_0,\theta_0) \in V.$$

   (c) Déterminer toutes les fonctions $f\ :\ U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U qui vérifient l'équation (E).

[001854]

Exercice 6391

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. On cherche les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(D,\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

1. Vérifier que $\varphi(x,y) = y/x$ est solution de (E).
2. Soit $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E).
3. Soit f une solution de (E). Montrer que $f(u,uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

[001855]

Exercice 6392

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra effectuer le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$.

[001856]

Exercice 6393

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. En utilisant des propriétés de la différentielle, montrer que $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$. [001857]

292 385.00 Autre

Exercice 6394

On considère l'équation différentielle $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$.
Ecrire le système différentiel du premier ordre associé et déterminer le noyau résolvant $R(t,t_0)$ de ce système.
En déduire e^{tA} pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. [006355]

Exercice 6395

1. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} e^{-2t}\cos t & -\sin t \\ e^{-2t}\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est la résolvante du système linéaire $x'(t) = A(t).x(t)$ où

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1-\sin 2t \\ 1-\sin 2t & -2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

   En déduire la solution du système $x'(t) = A(t).x(t) + b(t)$ avec $b(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \end{pmatrix}$

2. On considère maintenant l'équation différentielle $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = f(t)$ où f est une application continue sur $\mathbb{R}$. En appliquant la méthode de variation de Lagrange, trouver la solution du système telle que $x(0) = x_0$.

[006356]

Exercice 6396

On considère les équations

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

où p, q et r sont des fonctions continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Etablir ce qui suit :

1. Pour tout $x_0 \in I$, et tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, (1) admet une solution maximale définie sur I tout entier, telle que $y(x_0) = a, y'(x_0) = b$.
2. Soit $x_0 \in I$; les solutions de (1) forment un espace vectoriel V de dimension 2 dont une base est (y_1, y_2) avec $y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1$.
3. Soit u et v deux solutions de (1) et $W = u'v - uv'$ leur wronskien; trouver une équation différentielle satisfaite par W ; en déduire que W est soit identiquement nul, soit jamais nul, et que $W \neq 0 \Longleftrightarrow (u,v)$ est une base de V. Quel est le rapport entre W et la résolvante du système associé ?
4. La solution y de (2) vérifiant $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1$, où x_0 fixé dans I, est

$$y(x) = y(x_0)y_1(x) + y'(x_0)y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{r(t)\Big(y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)\Big)}{W(t)}\, dt.$$

5. Exemple : Résoudre $y'' + 4y = \tan x$.

[006357]

Exercice 6397

On considère l'équation différentielle linéaire sur $\mathbb{R}^n$

$$(1) \quad y' = A(x).y$$

où $A(x)$ est continue sur un intervalle I.

1. Montrer que si l'on suppose $A(x)A(x') = A(x')A(x)$ pour tous $x, x' \in I$, la résolvante de (1) est
$$R(x,x_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} A(s)\,ds\right) =: \exp B(x).$$
(Indic. : remarquer que $B(x)B(x') = B(x')B(x)$.)
2. Montrer que si $A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ -b(x) & a(x) \end{pmatrix}$, A vérifie l'hypothèse de a) et $B(x)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}$.
3. Résoudre l'équation $y' = A(x).y$ lorsque $a(x) = -\frac{x}{2(1+x^2)}$ et $b(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$.
4. Résoudre l'équation $y' = A(x).y + C(x)$ lorsque $A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(x) & 1 \\ -1 & \mathrm{sh}(x) \end{pmatrix}$ et $C(x) = \begin{pmatrix} \sin x \ \mathrm{sh}(x) \\ \cos x \ \mathrm{sh}(x) \end{pmatrix}$.

[006358]

Exercice 6398

Soit E un espace de Banach et $t \to A(t)$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{L}(E,E)$. On suppose que A est périodique de période ω. Cela n'implique pas nécessairement que les solutions de $\quad (1) \quad x' = A(t).x$ soient également ω-périodiques.

1. Dans le cas où E est un espace de dimension 2 et A est une matrice constante, donner une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de (1) soient ω-périodiques.
2. Dans le cas général, soit $R(t,a)$ le noyau résolvant associé à (1).
   (a) Montrer que $R(t+\omega, a+\omega) = R(t,a)$ pour tout t.
   (b) Montrer que la solution $x(t)$ de (1) telle que $x(0) = x_0$ est ω-périodique si et seulement si $R(\omega,0)x_0 = x_0$.
   (c) A quelle condition l'équation $x' = A(t).x$ a-t-elle une solution ω-périodique ?.
3. On considère l'équation $(1) \quad x'' + f(t)x = 0$ où f est une fonction continue, ω-périodique. Calculer $\det R(a+\omega, a)$; (1) a-t-elle toujours une solution ω-périodique ?

[006359]

Exercice 6399

On considère l'équation du pendule $x'' + \sin x = 0$.
On sait que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Soit φ la solution maximale de condition initiale $\varphi(0) = a, \varphi(0) = 0$; montrer que $\varphi'(t)^2 = 2(\cos x(t) - \cos a)$ et en déduire que $|x(t)| \leqslant a$ pour tout t.
2. Soit $y'' = -y,\ y(0) = a,\ y'(0) = 0$ le problème linéarisé correspondant. Montrer que Z définie par $Z = (x-y,\ x'-y')$ vérifie un système différentiel du premier ordre de la forme $Z'(t) = AZ(t) + B(t)$, où A est antisymétrique. En déduire, pour tout t, $|x(t) - y(t)| \leqslant \frac{a^3}{6}|t|$.

[006360]

Exercice 6400

Soit V un champ de vecteurs défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On dit qu'une application $h : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est une *intégrale première* de V, si $h \circ \varphi(t)$ est constante sur J pour toute solution (φ, J) de l'équation autonome associée. On suppose le champ de classe C^1 sur Ω.

1. Montrer que h est une intégrale première de V si et seulement si
$h'(x).V(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.
2. Donner une intégrale première sur $\mathbb{R}^n$ du système différentiel $X' = AX$ où A est une matrice antisymétrique $n \times n$ (commencer avec $n = 2$).
3. Soit f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, et on note $F(x) = \int_0^x f(u)\, du$. Montrer que la fonction $(x,y) \to y^2 + 2F(x)$ est une intégrale première sur $\mathbb{R}^2$ du champ de vecteurs $V(x,y) = (y,\ -f(x))$ défini sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que F tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. Montrer que si une solution $(x(t), y(t))$ de $X' = V(X)$ est définie sur un intervalle quelconque I, les fonctions x et y sont bornées sur I (remarquer que F est bornée inférieurement).

[006361]

Exercice 6401 Extrait de l'épreuve de septembre 97

Soit f une application de classe C^1 d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$. On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x).$$

1. Soit F un difféomorphisme de classe C^1 de Ω sur un ouvert Ω_1 de $\mathbb{R}^n$ tel que $F(0) = 0$, et on note G le difféomorphisme inverse. Montrer que si φ est solution de (1), $\psi = F \circ \varphi$ est solution de l'équation

$$(2) \qquad \frac{dy}{dt} = g(y),$$

où g est une application de classe C^1 de Ω_1 dans $\mathbb{R}^n$ que l'on déterminera.
On suppose maintenant $n = 3$.
2. Montrer que l'application F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $F(x_1,x_2,x_3) = (2x_2 - x_3, x_1 - x_2^2, x_3)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ tel que $F(0) = 0$.
3. Déduire à l'aide de a) et b) les solutions de l'équation différentielle

$$\begin{array}{rcc} \frac{dx_1}{dt} & = & 2(x_1 - x_2^2) - 2x_2 + x_3 + 2x_2(x_1 - x_2^2 + 5x_2 - x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} & = & x_1 - x_2^2 + 5x_2 - x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} & = & 2(x_1 - x_2^2) + 4x_2 + x_3 \end{array}$$

[006362]

Exercice 6402 Calcul fonctionnel holomorphe

Soit $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < \rho = \sup\{|\lambda|;\ \lambda$ valeur propre de $A\}$. On va montrer sur un exemple que l'on peut calculer $f(A)$ pour toute f somme d'une série entière de rayon $> \rho$.
Soit donc A un opérateur de $\mathbb{R}^n$ tel que $(A-I)^2(A-2I) = 0$.

1. On note $E_1 = \ker(A-I)^2$, $E_2 = \ker(A-2I)$, p_i le projecteur sur E_i (parallèlement à l'autre). Calculer p_1 et p_2 en fonction de A (Solution : $p_1 = -A(A-2I)$ et $p_2 = (A_I)^2$.)
2. Calculer $A^n x$ pour $x \in E_1$, puis $x \in E_2$. Déduire de a) l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 0$ (Solution : $A^n = (I + n(A-I))A(2I-A) + 2^n(A_I)^2$).
3. Soit f un polynôme de degré > 2 et P le polynôme minimal de A. Montrer que $\frac{f(x)}{P(x)} = g(x) + \frac{f(2)}{x-2} - \frac{xf(1)}{(x-1)^2} - \frac{f'(1)}{x-1}$ où g est lui-même un polynôme. En déduire $f(A)$ pour f polynôme puis f somme d'une série entière de rayon > 2.
4. Trouver ainsi e^{tA} si $t \in \mathbb{R}$ et résoudre le système $x' = A.x$ où $A =$ **? ?**

[006363]

Exercice 6403

On considère A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3 et montrer que $e^{tA} = \begin{pmatrix} f & g & h \\ h & f & g \\ g & h & f \end{pmatrix}$, où $f(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{3n}}{3n!},\ g(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{3n+1}}{3n+1!},\ h(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{3n+2}}{3n+2!}$.
   Montrer que $f(t) = \frac{1}{3}(e^t + e^{jt} + e^{j^2 t})$ et donner l'expression de h.
2. On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞. Montrer qu'une solution particulière de l'équation $(\mathscr{E}) \quad y''' - y = \varphi(t) \quad$ est
$$y(t) = \int_0^t h(t-s)\varphi(s)\, ds.$$
3. On suppose φ 1-périodique (ie $\varphi(t+1) = \varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$). Soit y une solution de $(\mathscr{E})$ telle que $y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1),\ y''(0) = y''(1)$. Montrer que y est 1-périodique.
   Montrer que $(\mathscr{E})$ possède une et une seule solution 1-périodique.

[006364]

Exercice 6404

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $t \to A(t), t \to B(t)$ deux applications de J dans $\mathscr{L}(E)$ où $J =]\alpha, +\infty[$.
On considère les deux équations

$$(1)\ x' = A(t).x \qquad (2)\ x' = \big(A(t) + B(t)\big).x,$$

et $a \in J$. On note $R(t,a)$ la résolvante de (1) telle que $R(a,a) = I_E$.

1. Si y est une solution de (2), montrer que la fonction z définie par $y(t) = R(t,a).z(t)$ est solution d'une équation de la forme $(3)\ z' = C(t).z$, où $C(t) = R(a,t)B(t)R(t,a)$.
2. On suppose que $||R(t,s)|| \leqslant k$ pour tous $t,s \in J$ où k est une constante et que $||B(t)|| \leqslant \varepsilon(t)$ où ε est continue sur J.
   Montrer que $||C(t)|| \leqslant k^2 \varepsilon(t)$.
3. On suppose de plus que $\int_a^\infty \varepsilon(t)\ dt$ converge. Montrer (à l'aide de Gronwall) que si z est telle que $z(a) \neq 0$, $||z(t)||$ est uniformément bornée sur $[a, +\infty[$, puis que z a une limite lorsque $t \to +\infty$.

[006365]

Exercice 6405

Soit $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application bornée et soit φ la solution maximale du problème

$$x'(t) = f(t, x(t)) \ \ ,\ \ x(t_0) = x_0 \ \ ,$$

que l'on suppose définie sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. (Rappeler pourquoi une telle solution existe). Montrer que φ est définie sur $I = \mathbb{R}$ tout entier. (Indication : supposer $\beta = \sup\{t\ ;\ t \in I\} < \infty$. Établir que φ est bornée sur $[t_0, \beta[$ et que $\lim_{t \to \beta} \varphi(t)$ existe. Conclure). [006366]

Exercice 6406

Soit f une application C^1 et bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0, x_0' \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le problème

$$x''(t) = f(x(t)) \ \ ,\ \ x(0) = x_0\ , x'(0) = x_0'$$

admet une unique solution maximale définie sur $\mathbb{R}$.
Exemple : $x'' + \sin(x) = 0$, l'équation du pendule simple . [006367]

Exercice 6407

Soit $a > 0$ et soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 vérifiant

$$|\langle x, f(t,x)\rangle| \leqslant a\langle x,x\rangle \quad \text{pour tout } \ (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\ .$$

Soit φ une solution de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ que l'on suppose définie sur l'intervalle I.

1. On pose $N(t) = \langle\varphi(t),\varphi(t)\rangle$. Montrer que l'application N est dérivable sur I, calculer sa dérivée et montrer qu'elle vérifie $|N'(t)| \leqslant 2aN(t)$.
2. Soient t et t_0 deux points de I. Comparer $N(t)$ et $N(t_0)$.
3. Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle en considération sont définies sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que les solutions maximales du système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) &=& 2x_1(t)+tx_2(t)+x_2^2(t) \\ x_2'(t) &=& -tx_1(t)+x_2(t)-x_1(t)x_2(t) \end{array}\right.$$

   sont définies sur $\mathbb{R}$.

[006368]

Exercice 6408

Soit $W = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\,\}$ et $\Omega = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0\,\}$. On veut étudier le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = \dfrac{2y}{x} \end{cases} \tag{*}$$

1. Pour chaque condition initiale $(x_0,y_0)\in W$, trouver la solution $(x(t),y(t))$ sur un intervalle maximal I du système $(*)$ (préciser I). Tracer quelques courbes intégrales dans W pour des conditions initiales variées dans W.
2. Pour chaque condition initiale $(x_0,y_0)\in\Omega$, trouver la solution $(x(t),y(t))$ sur un intervalle maximal I du système $(*)$ (préciser I). Tracer quelques courbes intégrales dans Ω pour des conditions initiales variées dans Ω.
3. Trouver toutes les courbes $\gamma : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ de classe C^1 vérifiant $\gamma(0) = (-1,1)$ et telles que γ est solution de $(*)$ partout où $\gamma(t)$ appartient à Ω.
4. Même question pour des courbes γ de classe C^2.
5. Même question pour des courbes γ de classe C^3.

[006810]

---

293 400.00 Tribu, fonction mesurable

Exercice 6409

Montrer les égalités ensemblistes suivantes :

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right[\qquad \text{et} \qquad]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$$

Correction ▼ [005933]

Exercice 6410

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré et $f\ :\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction (Σ-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$)-mesurable. Montrer que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x) = \left\{\begin{array}{lll} -A & \text{si} & f(x) < -A \\ f(x) & \text{si} & |f(x)| \leqslant A \\ A & \text{si} & f(x) > A \end{array}\right.$$

est (Σ-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$)-mesurable.

Correction ▼ [005934]

Exercice 6411

Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E) = \sharp E = \sum_{k \in E} 1,$$

où $E \in \Sigma$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Montrer que f est (Σ-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$)-mesurable et que :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Correction ▼ [005935]

Exercice 6412

Soit (Ω, Σ) un espace mesurable. On dit que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est une *fonction simple* ou *étagée* si φ est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, i.e. si φ s'écrit :

$$\varphi = \sum_{j \in J} c_j \mathbf{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i \neq j$, $c_i \neq c_j$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$. Soit φ une fonction simple positive. On rappelle que l'intégrale de φ par rapport à une mesure μ est définie par :

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\mu = \int_0^{\infty} \mu\left(S_{\varphi}(t)\right) dt,$$

où $S_{\varphi}(t) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > t\}$.

1. Montrer que
$$\int_{\Omega} \varphi \, d\mu = \sum_{j \in J} c_j \mu(E_j).$$
2. Montrer que pour toute fonction réelle mesurable positive, $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions simples positives telle que :
   (a) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   (b) $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

Correction ▼ [005936]

Exercice 6413

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$ (i.e f est une fonction réelle mesurable positive). Pour tout $E \in \Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A \cdot f \, d\mu.$$

Monter que λ définit une mesure sur (Ω, Σ).

Correction ▼ [005937]

Exercice 6414

Soit $p > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

Calculer l'intégrale de f par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ de deux manières différentes :

(i) En utilisant les coordonnées polaires et les méthodes standard de calcul d'intégrales ;

(ii) En calculant la mesure des ensembles $S_f(a) = \{x \in \Omega, f(x) > a\}$ et la définition de l'intégrale de Lebesgue.

Correction ▼ [005938]

294 401.00 Mesure

Exercice 6415

Montrer que $\mathscr{A}$ est une σ-algèbre si et seulement si $\mathscr{A}$ est une algèbre et une classe monotone.

Correction ▼ [005926]

Exercice 6416

Soit (Ω,Σ) un espace mesurable (i.e. un ensemble Ω muni d'une tribu $\Sigma \subset \mathscr{P}(\Omega)$). Soit μ une mesure finie sur (Ω,Σ). Montrer les propriétés suivantes : $(A,B,A_i$ sont des élements de de $\Sigma)$

1. Si $A_1,A_2,\dots,A_k$ sont deux à deux disjoints, alors
$$\mu\left(\cup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i).$$
2. Si $B \subset A$ alors $\mu(A\setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
3. *Monotonie :* Si $B \subset A$ alors $\mu(B) \leqslant \mu(A)$.
4. *Principe inclusion-exclusion :* $\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$.
5. $\mu\left(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty}\mu(A_i)$. *(Rappelons que l'on a égalité si l'union est disjointe.)*

Correction ▼ [005927]

295 402.00 Lemme de Fatou, convergence monotone

Exercice 6417

1. Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Montrer que
$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n \, d\mu.$$
2. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(s)\zeta(s),$$
où Γ est la fonction d'Euler et où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. (On pourra considérer les fonctions $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}$.)

Correction ▼ [005939]

Exercice 6418

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = \mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone croissante vers $f = \mathbf{1}_{[0,+\infty)}$. Bien que les fonctions f_n soient uniformément bornées par 1 et que les intégrales des f_n sont finies, on a :
$$\int_\Omega f\,d\mu = +\infty.$$
Est-ce que le théorème de convergence monotone s'applique dans ce cas ?

Correction ▼ [005940]

Exercice 6419

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,+\infty)}$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone décroissante et converge uniformément vers 0, mais

$$0 = \int_\Omega f\,d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n\,d\mu = +\infty.$$

Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Correction ▼ [005941]

Exercice 6420

Soit $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f, mais que

$$\int_\Omega f\,d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n\,d\mu$$

Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Correction ▼ [005942]

Exercice 6421

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f_n = -\frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ mais que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu < \int_\Omega f\,d\mu.$$

Est-ce que cela contredit le lemme de Fatou ?

Correction ▼ [005943]

Exercice 6422

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ est une suite croissante et
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$
2. Calculer la limite
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-bx}\,d\lambda(x)$$
où $b > 1$.

Correction ▼ [005950]

296 403.00 Théorème de convergence dominée

Exercice 6423

Soit $f \in \mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$ tel que $\int_\Omega f\,d\mu < +\infty$. Montrer que

$$\mu\{x \in \Omega,\ f(x) = +\infty\} = 0.$$

On pourra considérer les fonctions $f_n = n\mathbf{1}_{\{f\geqslant n\}}$.

Correction ▼ [005944]

Exercice 6424

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < +\infty$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f_n| \leqslant C$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Correction ▼ [005945]

Exercice 6425

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Que vaut la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos^n(\pi x) d\lambda(x) \ ?$$

Correction ▼ [005946]

Exercice 6426

On rappelle qu'une fonction $f\ : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite intégrable si $f_+ := \max\{f,0\}$ et $f_- = \max\{-f,0\}$ vérifient $\int_\Omega f_+ \, d\mu \ < \ +\infty$ et $\int_\Omega f_- \, d\mu \ < \ +\infty$. On note $\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ l'ensemble des fonctions réelles intégrables. Pour $f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$, on pose

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f_+ \, d\mu - \int_\Omega f_- \, d\mu.$$

1. Montrer l'équivalence
$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$$
et
$$\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \ \leqslant \ \int_\Omega |f| \, d\mu. \tag{12}$$
2. Montrer que si f est mesurable, g intégrable et $|f| \ \leqslant |g|$, alors f est intégrable et
$$\int_\Omega |f| \, d\mu \ \leqslant \ \int_\Omega |g| \, d\mu.$$
3. On rappelle qu'une fonction $f\ : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite intégrable si la partie réelle $\mathrm{Re} f$ et la partie imaginaire $\mathrm{Im} f$ de f sont intégrables. On pose alors
$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int_\Omega \mathrm{Im} f \, d\mu.$$
Montrer que l'inégalité (12) est vérifiée.

Correction ▼ [005947]

Exercice 6427

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré. On dit que f_n converge vers f *en mesure* si pour tout ε,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\{x\in\Omega,\ |f_n(x) - f(x)| \ > \varepsilon\} \ = 0.$$

Montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f μ-presque partout.

Correction ▼ [005948]

Exercice 6428

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.

Correction ▼ [005949]

Exercice 6429

Montrer que

1. $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m dx = m!$ (pour tout $m\in\mathbf{N}$).
2. $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1.$

Correction ▼ [005951]

Exercice 6430

Montrer le théorème suivant, Ω étant un espace mesurable. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)

Théorème.(Dérivation sous le signe $\int$)

Soit $f\ :\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction telle que

(i) Pour tout $s\in[s_1,s_2]$, la fonction $x\mapsto f(x,s)$ est intégrable;

(ii) pour presque tout x, la fonction $s\mapsto f(x,s)$ est dérivable sur (s_1,s_2);

(ii) il existe $g\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathbb{R}^+)$ tel que pour tout $s\in[s_1,s_2]$ et pour presque tout $x\in\Omega$ on ait $|\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}|\leqslant g(x)$.

Alors la fonction $I(s):=\int_\Omega f(x,s)\,d\mu(x)$ est dérivable sur (s_1,s_2) et

$$\frac{dI}{ds}=\int_\Omega \frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\,d\mu(x).$$

Correction ▼ [005952]

Exercice 6431

Soit $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Sa *transformée de Fourier* est la fonction $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(y):=\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixy}f(x)dx,$$

montrer que

1. $\hat{f}$ est continue,
2. $\hat{f}$ est bornée et $\sup|\hat{f}|\leqslant\|f\|_{L^1}$ $(=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx)$,
3. Si $x\to xf(x)$ est intégrable, alors $\hat{f}$ est dérivable et on a

$$\frac{d}{dy}\hat{f}=-\widehat{ixf(x)}.$$

Correction ▼ [005953]

297 404.00 Intégrales multiples, théorème de Fubini

Exercice 6432

Soit $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Montrer que

$$\int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 f(x,y)dx\right)dy\neq\int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 f(x,y)dy\right)dx.$$

Y a-t-il contradiction avec le théorème de Fubini? (on pourra calculer l'intégrale de $|f|$ sur l'anneau $S_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\varepsilon\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$.)

Correction ▼ [005957]

Exercice 6433

Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}\sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times(0,+\infty)$; en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}(\sin y)^2 e^{-y}\,dy.$$

Correction ▼ [005958]

Exercice 6434

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et que le *produit de convolution* de f et g défini par

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

vérifie $f*g(x) = g*f(x)$ et

$$\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1\,\|g\|_p.$$

Correction ▼ [005959]

Exercice 6435

Soient $a,b>0$, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x)=e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x)=e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. Calculer $f*g(x)$.

Correction ▼ [005960]

Exercice 6436

1. Pour tout $t>0$, on pose :

$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $t>0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1$.

   (b) Montrer que, pour tout $\delta>0$, $\lim_{t\to 0}\int_{\{|x|>\delta\}} f_t(x)\,dx = 0$.

   (On dit que f_t est une *approximation de la distribution de Dirac*.)

2. Soit g une fonction continue bornée. Montrer que f_t*g est bien définie et que

$$\lim_{t\to 0} f_t*g(x) = g(x).$$

Correction ▼ [005961]

Exercice 6437

Soient $f,g \in L^1(\mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{-2\pi i(y,x)}\,dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\,dx$.
2. $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$.

Correction ▼ [005962]

Exercice 6438

Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne définie, pour $x \in \mathbb{R}^n$, par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$, où $a > 0$.

Correction ▼ [005963]

298 405.00 Intégrale dépendant d'un paramètre

299 406.00 Espace Lp

Exercice 6439

Soit $k \in |||$ et $\alpha \in]0,1]$. On rappelle qu'on note $C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions g de classe C^k sur $\mathbb{R}$, dont la k-ième dérivée est höldérienne, c'est-à-dire vérifie

$$\exists C > 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R}, \qquad |g^{(k)}(x) - g^{(k)}(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha.$$

(En particulier, si $\alpha = 1$, ce sont les fonctions de k-ième dérivée lipschitzienne.)

— Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact, et $g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$. En déduire que si $g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$, alors $f * g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$.

— Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support quelconque, et $g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ *bornée*. Montrer que $f * g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ et est bornée. En déduire que si $g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$, bornée ainsi que toutes ses dérivées, alors $f * g$ aussi.

Correction ▼ [002692]

Exercice 6440

1. Soit $a,b \geqslant 0$ et soit $p,q \in (1,+\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(on dit que p et q sont conjugués au sens de Young)*. Montrer l'inégalité de Young :
$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
On pourra considérer la fonction $\theta\ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$.
2. Soit de nouveau $p,q \in (1,+\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\lambda > 0$
$$\int_\Omega |fg|\,d\mu \leqslant \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$
Optimiser cette inégalité par rapport à λ et montrer l'inégalité de Hölder :
$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_q.$$
Cette inégalité est-elle vraie pour $p = 1$ et $q = +\infty$?
3. Soient p et p' dans $[1,+\infty[$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si f appartient à $L^p(\mu) \cap L^{p'}(\mu)$, alors f appartient à $L^r(\mu)$ pour tout r compris entre p et p'.
4. Montrer que si μ est une mesure finie alors
$$L^\infty(\mu) \subset \bigcap_{p \geqslant 1} L^p(\mu),$$
et, pour tout f,
$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

5. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, alors $f \cdot g \in L^r(\mu)$ et
$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Correction ▼ [005954]

Exercice 6441

Théorème 1.(Théorème de Riesz) Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, l'espace $L^p(\mu)$ est complet.

Théorème 2. Soit p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$ convergeant vers une fonction $f \in L^p(\mu)$. Alors il existe une sous-suite de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement presque-partout vers f.

Le but de cet exercice est de démontrer les théorèmes 1 et 2.

1. *Cas de $L^\infty(\mu)$.*
   (a) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Pour $k,m,n \geqslant 1$, considérons les ensembles
   $$A_k := \{x\in\Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}\ ;\quad B_{m,n} := \{x\in\Omega, |f_m(x)-f_n(x)| > \|f_m-f_n\|_\infty\}.$$
   Montrer que $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$ est de mesure nulle.
   (b) Montrer que sur le complémentaire de E, la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.
   (c) En déduire que $L^\infty(\mu)$ est complet.
2. *Cas de $L^p(\mu)$.*
   (a) Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_p \leqslant 2^{-k}$.
   (b) Posons
   $$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}-f_{n_i}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}}-f_{n_i}|,$$
   où g est à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $\|g_k\|_p < 1$, puis que $\|g\|_p \leqslant 1$.
   (c) En déduire que la série
   $$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\right)$$
   est absolument convergente pour presque tout $x \in \Omega$. Notons $f(x)$ sa somme lorsque celle-ci est finie et posons $f(x)=0$ sinon. Vérifier que f est la limite ponctuelle des $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour presque tout $x\in\Omega$.
   (d) Montrer que $f-f_m \in L^p(\mu)$, $f\in L^p(\mu)$ et que $\|f-f_m\|_p \to 0$ quand $m\to+\infty$. Conclure.

Correction ▼ [005955]

Exercice 6442

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1<p<+\infty$. Montrer que la fonction $N : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$N(t) = \int_\Omega |f(x)+t\cdot g(x)|^p \, d\mu$$
est différentiable et que sa dérivée en $t=0$ est donnée par :
$$\frac{dN}{dt}_{|t=0} = p\int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) \, d\mu,$$

où par convention $|f(x)|^{p-2}f(x) = 0$ lorsque $f = 0$.

Correction ▼ [005956]

Exercice 6443

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Montrer que si $q \leqslant p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :
$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$
2. Soit $\mathscr{B}^n(0,1)$ la boule unité centrée en 0 de $\mathbb{R}^n$. En considérant les fonctions
$$f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$$
montrer que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathscr{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ est stricte.

Correction ▼ [005964]

Exercice 6444

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞.

1. Montrer que si $q \leqslant p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :
$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$
2. En considérant les suites $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$, montrer que pour $q < p$, l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte.

Correction ▼ [005965]

Exercice 6445

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. — Pour quelle valeur de α la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?
   — Pour quelle valeur de β la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?
   — Soit $1 \leqslant q < p \leqslant +\infty$. En utilisant (a) et (b), trouver une fonction f qui appartienne à $L^q(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^p(\mathbb{R}^n)$ et une fonction g qui appartienne à $L^p(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^q(\mathbb{R}^n)$.
2. — Soit $1 \leqslant q < p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$.
   — Soit r tel que $q < r < p$. Montrer que
   $$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$
   où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. On pourra écrire $r = r\alpha + r(1-\alpha)$ et utiliser l'inégalité de Hölder pour un couple de réels conjugués bien choisi.
   — En déduire que si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors f_n converge vers f dans $L^r(\mathbb{R}^n)$, i.e $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.
3. Soit $f \in L^p([0,+\infty[) \cap L^q([0,+\infty[)$ avec $1 \leqslant q < 2 < p$. Montrer que la fonction h définie par $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$ appartient à $L^1([0,+\infty[)$ et trouver des constantes $C_{p,q}$ et γ telles que $\|h\|_1 \leqslant C_{p,q}\|f\|_q^\gamma \|f\|_p^{(1-\gamma)}$.

Correction ▼ [005966]

Exercice 6446

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{[n,2n]}(x).$$

1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.
2. Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p>2$.

Correction ▼ [005967]

Exercice 6447

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{n}\mathbf{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.
2. Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p<2$.

Correction ▼ [005968]

300 407.00 Transformée de Fourier

Exercice 6448

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Plancherel.

Définition. Soient $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i(y,x)}\, dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Théorème de Plancherel. Si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.
2. Montrer que la fonction $g_\varepsilon(k) = |\hat{f}(k)|^2 e^{-\varepsilon\pi|k|^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \bar{f}(x) f(y) e^{2\pi i(k,x-y)} e^{-\varepsilon\pi|k|^2}\, dxdydk.$$
4. Sachant que la transformée de Fourier de la gaussienne $h_\varepsilon(x) = e^{-\pi\varepsilon|x|^2}$ ($\varepsilon>0$, $x\in\mathbb{R}^n$) est donnée par $\hat{h}_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|k|^2}{\varepsilon}}$, montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}} \bar{f}(x) f(y)\, dxdy.$$
5. Soit $\{s_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la famille de fonctions définies par :
$$s_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}} \bar{f}(x)\, dx.$$
Quelle est la limite dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de s_ε lorsque ε tend vers 0 ?

6. Montrer que
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^n}(\lim_{\varepsilon\to 0} s_\varepsilon) f(y)\,dy.$$
7. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \|\hat{f}\|_2^2$.
8. En déduire que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Correction ▼ [005977]

Exercice 6449

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction radiale, i.e. telle que $f(x) = h(r)$ où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $r = |x|$ et $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f s'écrit :
$$\hat{f}(k) = \frac{2}{|k|}\int_0^{+\infty} h(r) r \sin(2\pi|k|r)\,dr.$$

Correction ▼ [005978]

301 408.00 Autre

Exercice 6450

Le but de cet exercice est de prouver le Théorème de Carathéodory.

Définition. Une mesure extérieure sur un ensemble Ω est une application $m_* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,+\infty]$ telle que

(i) $m_*(\emptyset) = 0$;

(ii) (monotonie) $A \subset B \Rightarrow m_*(A) \leqslant m_*(B)$;

(iii) (σ-sous-additivité) Pour toute suite d'ensembles $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ on a
$$m_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_*(A_i).$$

Théorème de Carathéodory Soit m_* une mesure extérieure sur Ω. Un ensemble $A \subset \Omega$ est dit m_*-mesurable si pour tout $Q \subset \Omega$ on a
$$m_*(Q) \geqslant m_*(Q\cap A) + m_*(Q\cap A^c).$$
Notons $\mathscr{M}_{m_*} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties m_*-mesurables. Alors

1. $\mathscr{M}_{m_*}$ est une σ-algèbre.
2. $m = m_*|_{\mathscr{M}_{m_*}}$ est une mesure sur $(\Omega, \mathscr{M}_{m_*})$.
3. L'espace mesuré $(\Omega, \mathscr{M}_{m_*}, m)$ est complet, i.e. si $E \in \mathscr{M}_{m_*}$ et $m(E) = 0$, alors tout sous-ensemble $A \subset E$ appartient à $\mathscr{M}_{m_*}$.

Début de l'exercice :

1. (a) Rappeler la définition d'une σ-algèbre.
   (b) Vérifier que $\emptyset$ et $\Omega \in \mathscr{M}_{m_*}$, et $A \in \mathscr{M}_{m_*} \Rightarrow A^c \in \mathscr{M}_{m_*}$.
   (c) Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ un suite quelconque d'ensembles m_*-mesurables. On pose $B_1 = \emptyset$, $B_2 = A_1$ et $B_j = \cup_{i=1}^{j-1} A_i$, pour $j \geqslant 2$. Soit Q un sous-ensemble de Ω. Montrer par récurrence que l'assertion (P_k) suivante est vérifiée pour tout $k \geqslant 1$:
$$(P_k) \qquad m_*(Q) = m_*(Q\cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c \cap A_j).$$

(d) Soit $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Déduire de la question précédente que

$$m_*(Q) \geqslant m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

e) En remarquant que $Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q \cap B_j^c \cap A_j)$, montrer :

$$m_*(Q \cap A^c) + m_*(Q \cap A) \leqslant m_*(Q),$$

et conclure.

2. (a) Rappeler la définition d'une mesure.
   (b) En utilisant la question 1.d), montrer la σ-additivité de m.
3. Montrer que m est complète.

Correction ▼ [005928]

Exercice 6451

On définit la mesure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $m_* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, par la formule

$$m_*(A) = \inf \left\{ \sum_{i-1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\}.$$

Montrer qu'il s'agit bien d'une mesure extérieure.

Correction ▼ [005929]

Exercice 6452

On définit m_* : $\mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$m_*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que m_* est une mesure extérieure.
2. Quels sont les ensembles m_*-mesurables ?
3. Vérifier le théorème de Carathéodory sur cet exemple.

Correction ▼ [005930]

Exercice 6453

1. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.
   Indication : On pourra d'abord calculer $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ en passant en coordonnées polaires.
2. *Calcul de l'aire de la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{S}_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{A}_{n-1}$ son aire. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\, dx_1 \dots dx_n$$

   en fonction de $\mathscr{A}_{n-1}$. En déduire l'expression de $\mathscr{A}_{n-1}$ en fonction de la fonction Γ :

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx.$$

3. *Calcul du volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 1\}$ la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{V}_n$ son volume. Montrer que $\mathscr{V}_n = \frac{\mathscr{A}_{n-1}}{n}$. En déduire que :

$$\mathscr{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

4. *Application :* Que vaut l'aire de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^2$? $\mathbb{R}^3$? Que vaut le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}^2$? $\mathbb{R}^3$?

Correction ▼ [005931]

Exercice 6454

Cet exercice fournit une autre méthode de calcul du volume de la boule unité $\mathscr{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$ et de l'aire de la sphère $\mathscr{S}_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. On conserve les notations de l'exercice précédent.

1. Montrer que $\mathscr{V}_n = I_n \cdot \mathscr{V}_{n-1}$, où $I_n = \int_0^\pi (\sin\theta)^n \, d\theta$.
2. Vérifier que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
3. Calculer $\mathscr{V}_n$ pour $n = 1, 2, \ldots, 7$.
4. Calculer $\mathscr{A}_{n-1}$ pour $n = 1, 2, \ldots, 6$.

Correction ▼ [005932]

Exercice 6455

Définition.
On dit qu'un espace métrique E est *séparable* s'il existe un sous-ensemble $\mathscr{F} \subset E$ dénombrable et dense.

Théorème L'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable pour $1 \leqslant p < +\infty$.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

1. Pour $j = 1, 2, 3, \ldots$ et $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, on considère les cubes
$$\Gamma_{j,m} := \{x \in \mathbb{R}^n, \; 2^{-j} m_i < x_i \leqslant 2^{-j}(m_i + 1), \; i = 1, \ldots, n\}.$$
Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} \Gamma_{j,m} = \mathbb{R}^n$.
2. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $\mathscr{F}_j$ de fonctions φ de la forme :
$$\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_{j,m} \mathbf{1}_{\Gamma_{j,m}},$$
où les constantes $c_{j,m} \in \mathbb{Q}$ et sont nulles sauf un nombre fini. Montrer que l'ensemble
$$\mathscr{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{F}_j$$
est dénombrable.
3. Le but de cette question est de montrer que toute fonction continue à support compact peut être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille $\mathscr{F}$. Soit $\tilde{f}$ une fonction continue à support compact et soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   — Montrer que pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $j \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,
   $$x, y \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon'.$$
   — Soit $\varepsilon' > 0$ fixé et j comme dans la question précédente. On considère la fonction $\tilde{f}_j$ définie par :
   $$\tilde{f}_j(x) = 2^{nj} \int_{\Gamma_{j,m}} \tilde{f}(y) \, dy \quad \text{lorsque} \quad x \in \Gamma_{j,m},$$
   i.e. la valeur de $\tilde{f}_j$ en un point $x \in \mathbb{R}^n$ est la valeur moyenne de la fonction $\tilde{f}$ sur le cube $\Gamma_{j,m}$ de coté 2^{-j} qui contient x. Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,
   $$x \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_j(x)| < \varepsilon',$$
   et en déduire que
   $$\|\tilde{f} - \tilde{f}_j\|_p < \text{Volume}(\gamma)^{\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon'$$
   où γ est un cube de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n, -2^J \leqslant x_i \leqslant 2^J\}$ en dehors duquel $\tilde{f}$ est nulle.

— En déduire qu'il existe $f_j \in \mathscr{F}_j$ telle que $\|\tilde{f} - f_j\|_p < \varepsilon$. (On rappelle que les éléments de $\mathscr{F}_j$ ne prennent que des valeurs rationnelles.)

4. Montrer que toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$, peut être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille $\mathscr{F}$. Conclure.

Correction ▼ [005969]

Exercice 6456

Théorème. L'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

1. Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ telle que
   — Pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E.
   — $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
   — I n'est pas dénombrable.
   Montrer que E n'est pas séparable. (On pourra raisonner par l'absurde).
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $f_a = \mathbf{1}_{\mathscr{B}(a,1)}$ où $\mathscr{B}(a,1)$ est la boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon 1 centrée en a. Montrer que la famille
$$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f - f_a\|_\infty < \frac{1}{2}\},$$
   où a parcourt les points de $\mathbb{R}^n$, satisfait (a), (b) et (c). Conclure.

Correction ▼ [005970]

Exercice 6457

Définition. Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesuré (Ω, Σ). On dit que ν est absolument continue par rapport à μ et on écrit $\nu << \mu$ si
$$\mu(S) = 0 \Rightarrow \nu(S) = 0$$
pour tout $S \in \Sigma$.

Théorème de Radon-Nikodym. Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesuré (Ω, Σ). Si ν est absolument continue par rapport à μ, alors il existe une fonction positive $h \in L^1(\Omega, \mu)$ telle que pour toute fonction positive mesurable F on a :
$$\int_\Omega F(x)\, d\nu(x) = \int_\Omega F(x) h(x)\, d\mu(x). \tag{13}$$

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème de Radon-Nikodym.

1. Posons
$$\alpha = \mu + 2\nu, \qquad \omega = 2\mu + \nu.$$
   On considère l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \alpha)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure α et l'application linéaire $\varphi\ : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ donnée par :
$$\varphi(f) = \int_\Omega f(x)\, d\omega(x).$$
   Montrer que $\varphi\ : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ est une application linéaire continue.
2. En déduire qu'il existe $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ tel que pour tout $f \in L^2(\Omega, \alpha)$:
$$\int_\Omega f(2g - 1)\, d\nu = \int_\Omega f(2 - g)\, d\mu.$$
3. Montrer que les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ où $l \in \mathbb{N}^*$ vérifient $\mu(S_{jl}) = \nu(S_{jl}) = 0$. En déduire que l'on peut choisir la fonction g de telle manière que $\frac{1}{2} \leqslant g \leqslant 2$. Montrer que l'ensemble $Z = \{x \in \Omega\ : g(x) = \frac{1}{2}\}$ est de μ-mesure 0.

4. Montrer que la fonction
$$h(x) = \frac{2-g(x)}{2g(x)-1}$$
est bien définie, positive, appartient à $L^1(\Omega,\mu)$ et satisfait (13).

Correction ▼ [005971]

Exercice 6458

1. On définit la fonction Bêta par $B(a,b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1}ds$, montrer que
$$B\left(1+\frac{d}{2},\frac{m}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{d/2} r^{m-1}dr$$
2. Démontrer que $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
3. Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}\,dx$ en fonction de la fonction Bêta.

Correction ▼ [005972]

Exercice 6459 Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$

Soit Ω' l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par
$$\Omega' = \{(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid 0<r, 0<\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}<\pi, 0<\theta_{n-1}<2\pi\}.$$
Soit l'application S de Ω' dans $\mathbb{R}^n$ définie par
$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & r\cos\theta_1, \\ x_2 & = & r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \vdots & & \\ x_{n-2} & = & r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\cos\theta_{n-2} \\ x_{n-1} & = & r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n & = & r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \end{array}$$
où $(x_1,\ldots,x_n)$ sont les coordonnées cartésiennes de $x\in\mathbb{R}^n$.

1. Soit $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1} \geqslant 0\}$. Montrer que Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ dont le complémentaire est de mesure nulle, et que S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω.
2. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\begin{array}{lcl} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx & = & \int_{\Omega'} (f\circ S)(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\, r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\,\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\,dr\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1} \\ & = & \int_{\Omega'} (f\circ S)(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\, r^{n-1}\,dr\,d\sigma, \end{array}$$
où $d\sigma$ est la mesure uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume $\mathscr{V}_4$ de la boule unité de $\mathbb{R}^4$ et l'aire $\mathscr{A}_3$ de la sphère unité $\mathscr{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$.

Correction ▼ [005973]

Exercice 6460 Théorème de Newton

Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(|x|)$, où $|x|$ désigne la norme de x dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que pour $r = |x|$, on a
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy = 4\pi\frac{1}{r}\int_0^r g(s)s^2\,ds + 4\pi\int_r^{+\infty} g(s)s\,ds.$$

2. Que peut-on en déduire pour une distribution de masse $f(x)=g(|x|)$ lorsque g est à support dans $[0,R]$?

Correction ▼ [005974]

Exercice 6461

Soit $x\in\mathbb{R}^d$, $d=1,2$ et $r=|x|$. On considère $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x)=h(r)=r^2(1+r^2)^{-2}.$$

1. Calculer pour $d=1$ le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f.
2. Même question pour $d=2$.
3. Calculer $\|f\|_2^2$ pour $d=1$ puis $d=2$.

Correction ▼ [005975]

Exercice 6462

Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x)=e^{-x^2+ax}$, où $a\in\mathbb{R}$. Calculer le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f.

Correction ▼ [005976]

Exercice 6463

Définition. Soit $h\in\mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur de translation par h, noté τ_h, agissant sur une fonction $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ par $\tau_h f(x):=f(x-h),\quad \forall x\in\mathbb{R}^n$.

Théorème. Si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1\leqslant p<+\infty$, alors $\lim_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_p=0$, i.e. $\tau_h f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque h tend vers 0.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème. Soit $1\leqslant p<+\infty$.

1. Montrer que si f est continue à support compact dans la boule $\mathscr{B}(0,M)$ centrée en 0 et de rayon M, et si $|h|\leqslant 1$, alors
$$|f(x-h)-f(x)|^p\leqslant \mathbf{1}_{B(0,M+1)}2^p\|f\|_\infty^p.$$
où $\mathscr{B}(0,M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.
2. En déduire que pour f continue à support compact, on a
$$\lim_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_p=0.$$
3. Démontrer le théorème pour une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<+\infty$.
4. Que se passe-t-il pour $p=\infty$?

Correction ▼ [005979]

Exercice 6464

Théorème Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

(i) $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_n=1$

(ii) il existe une constante $K>0$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_n|(x)\,dx\leqslant K$

(iii) Pour tout $\varepsilon>0$, on a $\lim_{n\to+\infty}\int_{\|x\|>\varepsilon}|\varphi_n(x)|\,dx=0$.

Alors pour tout $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n*f-f\|_p=0$.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème, et soit $1\leqslant p<+\infty$.

1. En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), et en utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x)=|\varphi_n|(x)\,dx$, montrer que
$$|\varphi_n*f-f|^p(x)\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_n|(x)\,dx\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right).$$

2. En déduire que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leqslant K^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n(y)|\, dy.$$

3. Soit $\delta > 0$, montrer que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leqslant K^{\frac{p}{q}} \left(\sup_{|y|\leqslant\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)|\, dy \right).$$

4. En déduire le théorème cherché.

Correction ▼ [005980]

Exercice 6465

Soit f une fonction dans $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $0 < \alpha < n$. Posons $c_\alpha := \pi^{-\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)$. En utilisant l'identité

$$c_\alpha |k|^{-\alpha} = \int_0^\infty e^{-\pi|k|^2\lambda} \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\, d\lambda,$$

montrer que

$$c_\alpha \left(|k|^{-\alpha} \hat{f}(k)\right)^\vee (x) = c_{n-\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y) dy,$$

où la notation $h^\vee$ désigne la transformée de Fourier inverse d'une fonction h donnée par $h^\vee(x) := \hat{h}(-x)$.

Correction ▼ [005981]

---

302 420.00 Espace topologique, espace métrique

Exercice 6466

Soit (E,d) un espace métrique.

1. Montrer que $d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ est une distance sur E. Enoncer des conditions suffisantes sur une fonction f, définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ pour que $(x,y) \longrightarrow f(d(x,y))$ soit une distance sur E.
2. Montrer que l'application d'' définie sur $E \times E$ par $d''(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ est une distance sur E. *Indication* : On utilisera la croissance de la fonction $u \longrightarrow \dfrac{u}{1+u}$.
3. Comparer les distances d et d'' .
4. Dans le cas où E est l'ensemble des nombres réels et où d est la distance valeur absolue, construire $B_{d''}(0,a)$ où a est un réel.

[001867]

Exercice 6467

Soit (E,d) un espace métrique complet, et f une application de E dans E telle qu'il existe $k \in \mathbb{R},\ 0 < k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x,y)\ \ \forall x \in E,\ \forall y \in E$.

1. Montrer que f est continue sur (E,d).
2. Soient $x_0 \in E$ et pour $n \geqslant 0,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans (E,d).
3. Montrer que cette suite converge vers un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de $f(l) = l$. Montrer que ce point fixe est unique.
4. Application : montrer que le système $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 & = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{array} \right.$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

[001868]

Exercice 6468

1. Rappeler les définitions d'une borne supérieure (inférieure) d'un ensemble de nombres réels. Si A et B sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbb{R}$, comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ les nombres suivants :

   (i) $\sup(A+B)$, (ii) $\sup(A\cup B)$, (iii) $\sup(A\cap B)$, (iv) $\inf(A\cup B)$, (v) $\inf(A\cap B)$.
2. Pour $x\in\mathbb{R}^n$ et $A\subset\mathbb{R}^n$ on définit $d(x,A)=\inf_{a\in A}||x-a||$. Trouver $d(0,\mathbb{R}-\mathbb{Q})$, $d(\sqrt{2},\mathbb{Q})$, $d(M,\mathscr{D})$ où $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{D}$ est la droite de vecteur unitaire (a,b,c).
3. Pour $A,B\subset\mathbb{R}^n$ on définit $d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}||a-b||$. Trouver $d(A,B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ xy=1\}$ et B une asymptote.
4. On définit $\operatorname{diam} A=\sup_{a,b\in A}||a-b||$. Quel est $\operatorname{diam}(]0,1[\cap\mathbb{Q})$? $\operatorname{diam}([0,1]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q})$?

Indication ▼ Correction ▼ [002340]

Exercice 6469

Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. (*Indication :* si $x\in O$ ouvert, considérer J_x qui est l'union des intervalles ouverts inclus dans O et contenant x). Énoncer un résultat similaire pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [002341]

Exercice 6470

On va montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p+q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Remarquer que D est stable par addition et multiplication.
2. Posons $u=\sqrt{2}-1$; montrer que pour tous $a<b$, on peut trouver $n\geqslant 1$ tel que $0<u^n<b-a$, puis $m\in\mathbb{Z}$ vérifiant $a<mu^n<b$.

   En déduire le résultat.

Indication ▼ Correction ▼ [002342]

Exercice 6471

Montrer que dans tout espace métrique (E,d) une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a,r)$ ne coincide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a,r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbb{R}^2,||.||_\infty)$, $E=[0,1]\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,1]$ et la boule centrée en $(\frac{1}{2},0)$ de rayon $1/2$).

Indication ▼ Correction ▼ [002343]

Exercice 6472

$(E,||.||)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a,r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$.
2. Montrer que $\overline{B}(a,r)\subset\overline{B}(b,R)\iff r\leqslant R$ et $||a-b||\leqslant R-r$.

Correction ▼ [002344]

Exercice 6473

1. Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $||(x,y)||=\max(|x+y|,|x-2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.
2. Soit p,q deux normes sur $\mathbb{R}^n$, B_p et B_q leurs boules unités fermées. Montrer que

$$B_q\subset B_p\iff p\leqslant q.$$

   Que signifie $\frac{1}{2}B_p\subset B_q\subset 2B_p$? Exemples.

Correction ▼ [002345]

Exercice 6474

On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (à vérifier) $d(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Montrer que Y est fermé dans X. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

Indication ▼ Correction ▼ [002346]

Exercice 6475

Soit $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \ ; \ f(0) = 0\}$. On pose

$$||f|| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) + f'(x)|, \text{ et } N(f) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| + \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)|.$$

Montrer que ce sont deux normes équivalentes sur E.

Indication ▼ Correction ▼ [002347]

Exercice 6476

On désigne par $d(a,b)$ la distance euclidienne usuelle de $a,b \in \mathbb{R}^2$ et on pose

$$\delta(a,b) = \begin{cases} d(a,b) & \text{si } a,b \text{ sont alignés avec l'origine } O \\ d(0,a) + d(0,b) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$ (“distance SNCF") plus fine que la distance usuelle.
   Dans la suite, on suppose $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie associée à δ.
2. Soit H le demi-plan $\{(x,y) \ ; \ y > 0\}$; montrer que H est un ouvert ; déterminer $\overline{H}$.
3. Quelle est la topologie induite sur une droite vectorielle ; sur le cercle unité Γ ?
4. Lesquelles des transformations suivantes sont continues : homothéties de centre O ; rotations de centre O ; translations ?

[002348]

Exercice 6477

1. Montrer que $||f||_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt$ sont deux normes sur $C([0,1],\mathbb{R})$. Sont-elles équivalentes ?
2. Les deux métriques associées sont-elles topologiquement équivalentes ?

Indication ▼ Correction ▼ [002349]

Exercice 6478

Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. Comparer les normes $N_1(f) = ||f||_\infty$, $N_2(f) = ||f||_\infty + ||f||_1$, $N_3(f) = ||f'||_\infty + ||f||_\infty$, $N_4(f) = ||f'||_1 + ||f||_\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [002350]

Exercice 6479

Soit (x_n) une suite d'un espace topologique X séparé ; on note A l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

1. Toute valeur d'adhérence a de la suite est un point de $\overline{A}$: donner un exemple où a est un point isolé de A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans $\overline{A} \backslash A$.
2. Montrer que tout point d'accumulation de A est valeur d'adhérence de la suite.

Correction ▼ [002351]

Exercice 6480

Soit $\mathbb{R}^n$ considéré comme groupe additif muni de sa topologie usuelle. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que 0 est isolé dans G. Montrer que tout point est isolé, que G est discret et fermé dans $\mathbb{R}^n$.
   On se restreint maintenant au cas $n = 1$.
2. Montrer qu'alors, G est soit $\{0\}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a > 0$.
3. Montrer que si 0 est point d'accumulation, G est partout dense dans $\mathbb{R}$. En déduire ainsi les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$.
4. On considère $\alpha \notin \mathbb{Q}$; montrer que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite $(e^{2i\pi n\alpha})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Correction ▼ [002352]

Exercice 6481

Soit $X = \{a,b,c,d\}$. Lesquelles parmi les collections de sous-ensembles suivants déterminent une topologie sur X ? Justifier.

1. $\emptyset$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b\}$;
2. $\emptyset$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{b,d\}$;
3. $\emptyset$, X, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$.

Correction ▼ [002418]

Exercice 6482

Soit $\mathbb{R}$ et soit $\mathscr{T}$ une collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ contenant $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et tous les complementaires d'ensembles finis. Est-ce une topologie sur $\mathbb{R}$? Est-ce une topologie séparée ?

Correction ▼ [002419]

Exercice 6483

On appelle *base* d'une topologie $\mathscr{T}$ un sous-ensemble $\mathscr{B}$ de $\mathscr{T}$ tel que tout ouvert $\mathscr{O} \in \mathscr{T}$ s'écrit comme $\mathscr{O} = \bigcup_{i\in I} B_i$, où $B_i \in \mathscr{B}$ pour tout $i \in I$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{T}$ si et seulement si pour tout ouvert $\mathscr{O}$ et tout point $x \in \mathscr{O}$ il existe un $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B \subset \mathscr{O}$.
2. Soit $\mathscr{T}_n$ la topologie sur $\mathbb{R}^n$ induite par la métrique euclidienne
$$\mathrm{dist}(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}\,.$$
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{B}$ de boules ouvertes ayant leur centre dans $\mathbb{Q}^n$et leur rayon dans $\mathbb{Q}$ est une base de $\mathscr{T}_n$.
3. Soit $\mathscr{B}'$ l'ensemble de parallelipipèdes ouverts dans $\mathbb{R}^n$ dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées. Est-ce que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{T}_n$?
4. Est-ce que $\{]-\infty,a[\ ;\ a\in\mathbb{R}\} \cup \{]b,+\infty[\ ;\ b\in\mathbb{R}\}$ est une base pour $\mathscr{T}_1$?
5. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$ on note par δ_a la droite d'équation $y = ax$ dans $\mathbb{R}^2$, et on note par Y la réunion des droites δ_a. Soit $\mathscr{T}$ la topologie sur Y induite par la topologie sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathscr{T}'$ la topologie de base $\mathscr{B}'$ composée par tous les segments ouverts $]M,N[\subset \delta_a$, $O \notin]M,N[$, et par toutes les reunions $\bigcup_{a\in\mathbb{Q},O\in]M_a,N_a[}]M_a,N_a[$. Les deux topologies $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont-elles équivalentes ?

Correction ▼ [002420]

Exercice 6484

Soit X un espace muni d'une métrique $\mathrm{dist} : X\times X \to \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si $f:\mathbb{R}_+\to R_+$ est une fonction croissante telle que $f(0)=0$ et $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$ alors $\mathrm{dist}_f(x,y)=f(\mathrm{dist}(x,y))$ est une métrique sur X.
2. Montrer que
$$\mathrm{dist}'(x,y)=\frac{\mathrm{dist}(x,y)}{1+\mathrm{dist}(x,y)},\ \forall x,y,$$
est une métrique sur X.
3. Montrer que les métriques dist et dist$'$ sont topologiquement équivalentes.

Correction ▼ [002421]

Exercice 6485

Soit (E,d) un espace métrique. On dit que d est *ultramétrique* si elle vérifie :
$$\forall(x,y,z)\in E^3 \qquad d(x,z)\leqslant \sup\left(d(x,y),d(y,z)\right).$$
Cette inégalité entraine évidemment l'inégalité triangulaire.

1. Montrer que E muni de la distance d définie par
$$d(x,y)=1 \text{ si } x\neq y, \qquad d(x,x)=0$$
est un espace ultramétrique.

   On suppose maintenant que (E,d) est ultramétrique.
2. Montrer que si $d(x,y)\neq d(y,z)$, on a $d(x,z)=\sup\left(d(x,y),d(y,z)\right)$.
3. Montrer qu'une boule ouverte (resp. fermée) est une partie à la fois ouverte et fermée.
4. Montrer que si deux boules ont un point commun l'une est contenue dans l'autre. Montrer de plus que si ces boules ont même rayon et sont toutes les deux des boules ouvertes (resp. fermées) elles sont confondues.
5. Montrer que si deux boules ouvertes distinctes B_1,B_2 de rayon r sont contenues dans une boule fermée de même rayon, alors leur distance est égale à r :
$$d(B_1,B_2):=\inf_{(a,b)\in B_1\times B_2} d(a,b)=r.$$

Correction ▼ [002422]

Exercice 6486

Soit p un nombre premier. Pour $n\in\mathbb{N}$ on définit $\nu(n)$ comme étant l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Pour $x=\pm\frac{a}{b}$, $(a,b\in\mathbb{N}^*)$, on définit $\nu(x)=\nu(a)-\nu(b)$.

1. Montrer que $\nu(x)$ est indépendant du choix de la représentation $\pm\frac{a}{b}$.
2. Montrer que $\nu(xy)=\nu(x)+\nu(y)$, $x,y\in\mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\nu(x+y)\geqslant\min(\nu(x),\nu(y))$ pour $x,y\in\mathbb{Z}$, puis pour $x,y\in\mathbb{Q}$.
4. Montrer que sur $\mathbb{Q}$, d définie par :
$$d(x,y)=p^{-\nu(x-y)} \text{ si } x\neq y, \qquad d(x,x)=0$$
est une distance ultramétrique.

Correction ▼ [002423]

Exercice 6487

1. Soit E un espace métrique et $A\subset E$ une de ses parties. On désigne par $\overline{A}$ l'adhérence de A et par $\mathrm{Fr}(A)$ la frontière de A dans E. On a $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}$.

(a) Montrez que $x \in \mathrm{Fr}(A)$, si et seulement si il existe une suite (x_n) d'éléments de A et une suite (y_n) d'éléments du complémentaire $E \setminus A$ de A dans E, qui convergent l'une et l'autre vers x.

(b) Soit $E =]-\infty,-1] \cup [0,1[\cup [2,+\infty[$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$. Avec $A = [0,\frac{1}{2}]$, qu'elle est la frontière de A dans E. Considérée comme sous-partie de $\mathbb{R}$, qu'elle serait la frontière de A dans $\mathbb{R}$?

2. Soient E et F deux espaces métriques respectivement au moyen des distances d et d'.

(a) Précisez ce que l'on entend par la distance $\sup(d,d')$ sur $E \times F$. Dîtes rapidement pourquoi cette distance définit sur $E \times F$ le produit des topologies métriques sur E et F.

(b) Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrez que l'intérieur $A \times B \setminus \mathrm{Fr}(A \times B)$ de $A \times B$ dans $E \times F$ est le produit cartésien de l'intérieur $A \setminus \mathrm{Fr}(A)$ de A dans E avec l'intérieur $B \setminus \mathrm{Fr}(B)$ de B dans F.

3. E et F sont toujours comme dans la deuxième question çi dessus.

(a) Si (ξ_n, ξ_n') est une suite de points dans le complémentaire $E \times F \setminus A \times B$ de $A \times B$ dans $E \times F$, montrez qu'au moins une des deux alternatives suivantes (i) ou (ii) est vérifiée :

(i) il existe une suite extraite ξ_{n_k} dont tous les termes sont dans $E \setminus A$.

(ii) il existe une suite extraite ξ'_{n_k} dont tous les termes sont dans $F \setminus B$.

(b) Déduire, de tout ce qui précède, que la frontière $\mathrm{Fr}(A \times B)$ de $A \times B$ dans $E \times F$ est donnée par la formule :

$$\mathrm{Fr}(A \times B) = \big(\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)\big)$$

4. Supposons E et F comme çi dessus mais avec l'hypothèse supplémentaire d'être connexes, et avec des inclusions strictes $A \subset E$ et $B \subset F$.

(a) Soient, dans $E \times F$, les points $(x,x') \notin A \times B$ et $(y,y') \notin A \times B$. Supposons que $x \in A$ et $y \notin A$; Montrez qu'il existe une partie connexe entièrement contenue dans le complémentaire de $A \times B$ qui contient (x,x') et (y,y').

(b) En déduire, sous les présentes hypothèses de cette quatrième question, que le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$ est connexe.

Correction ▼ [002424]

Exercice 6488

1. Soit $X = \{0,1\}$ muni de la famille d'ouverts $\{\emptyset, \{0\}, X\}$. Cette topologie est-elle séparée ?
2. Soit X un ensemble non vide. Décrire la topologie dont les singletons forment une base d'ouverts.
3. Décrire la topologie sur $\mathbb{R}$ dont la famille des intervalles fermés forme une base d'ouverts ; même question avec les intervalles ouverts symétriques.
4. Soit X un ensemble infini. Montrer que la famille d'ensembles constituée de l'ensemble vide et des parties de X de complémentaire fini définit une topologie sur X.

[006034]

Exercice 6489

Soit X un espace topologique, et f une application quelconque de X dans un ensemble Y. On dit qu'une partie A de Y est ouverte, si $f^{-1}(A)$ est un ouvert de X. Vérifier qu'on a défini ainsi une topologie sur Y. [006035]

Exercice 6490

Montrer qu'on peut construire sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une topologie séparée en prenant comme ouverts, les ouverts de $\mathbb{R}$ et les ensembles de la forme $\{x / |x| > a\} \cup \{\infty\}$ où a est réel. Comment construire une topologie séparée sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$? [006036]

Exercice 6491

Soit X un ensemble non vide et Σ une famille de parties de X stable par intersection finie et contenant X. Montrer que la plus petite topologie $\mathscr{T}$ contenant Σ (la topologie engendrée par Σ) est constituée des unions d'ensembles de Σ, ou, de façon équivalente,

$$A \in \mathscr{T} \iff \forall x \in A\ \exists S \in \Sigma\ ;\ x \in S \subset A.$$

Montrer que l'on peut affaiblir l'hypothèse de stabilité par intersection finie en :
$(*)$ $\quad \forall S_1, S_2 \in \Sigma,\ \forall x \in S_1 \cap S_2,\ \exists S_3 \in \Sigma\ ;\ x \in S_3 \subset S_1 \cap S_2.$ [006037]

Exercice 6492

Soit C l'ensemble des fonctions continues réelles sur $[0,1]$. Pour toute $f \in C$ et $\varepsilon > 0$ on définit

$$M(f,\varepsilon) = \{g / \int_0^1 |f-g| < \varepsilon\}.$$

Montrer que la famille M des ensembles $M(f,\varepsilon)$ lorsque $f \in C$ et $\varepsilon > 0$ est une base de topologie. Même question avec la famille

$$U(f,\varepsilon) = \{g / \sup_x |f(x)-g(x)| < \varepsilon\}.$$

[006038]

Exercice 6493

U dans $\mathbb{N}$ est dit ouvert s'il est stable par divisibilité, c.a.d. tout diviseur de $n \in U$ est encore dans U. Montrer qu'on a défini ainsi une topologie sur $\mathbb{N}$ qui n'est pas la topologie discrète. [006039]

Exercice 6494

On considère dans $\mathbb{N}^*$, la famille de progressions arithmétiques

$$P_{a,b} = \{a + bn / n \in \mathbb{N}^*\},$$

où a et b sont deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que l'intersection de deux telles progressions est soit vide, soit une progression arithmétique de même nature, plus précisément,
$$P_{a,b} \cap P_{a',b'} = P_{\alpha,\beta}$$
où α est le minimum de l'ensemble $P_{a,b} \cap P_{a',b'}$, et $\beta = \mathrm{ppcm}(b,b')$.
2. En déduire que cette famille d'ensembles (en y adjoignant $\emptyset$) forme une base de topologie sur $\mathbb{N}^*$ dont on décrira les ouverts.
3. Montrer que cette topologie est séparée.

[006040]

Exercice 6495

1. Montrer que si B est un ouvert de l'espace topologique X et $A \cap B = \emptyset$, alors $\overline{A} \cap B = \emptyset$, mais que $\overline{A} \cap \overline{B}$ n'est pas nécessairement vide.
2. Montrer à l'aide d'exemples que l'égalité $\overline{\cup_i A_i} = \cup_i \overline{A_i}$ n'a pas lieu en général pour une infinité d'indices.

[006041]

Exercice 6496

Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants :
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ 0 < x < 1, y = 0\}$; $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x = 0\}$ $\{\frac{1}{n}, n \geqslant 1\}$; le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. [006042]

Exercice 6497

Si A est une partie de l'espace topologique X, on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1. Montrer que α et β sont des applications croissantes pour l'inclusion de $\mathscr{P}(X)$ dans $\mathscr{P}(X)$.
2. Montrer que si A est ouvert, $A \subset \alpha(A)$ et si A est fermé, $\beta(A) \subset A$. En déduire que $\alpha^2 = \alpha$ et $\beta^2 = \beta$.
3. Construire $A \subset \mathbb{R}$ tel que les cinq ensembles :
   $A, \overline{A}, \overset{\circ}{A}, \alpha(A), \beta(A)$ soient tous distincts.

[006043]

Exercice 6498

Déterminer l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe

$$G = \{(x,y)/y = \sin\frac{1}{x}, 0 < x \leqslant 1\}.$$

[006044]

Exercice 6499

Dans un espace topologique, on définit la frontière d'une partie A comme étant $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

1. Montrer que $\partial A = \partial(A^c)$ et que $A = \partial A \Longleftrightarrow A$ fermé d'intérieur vide.
2. Montrer que $\partial(\overline{A})$ et $\partial(\overset{\circ}{A})$ sont toutes deux incluses dans ∂A, et donner un exemple où ces inclusions sont strictes.
3. Montrer que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, et que l'inclusion peut être stricte ; montrer qu'il y a égalité lorsque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ (établir $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$).
   Montrer que $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ reste vrai lorsque $\partial A \cap \partial B = \emptyset$ (raisonner par l'absurde).

[006045]

Exercice 6500

1. Soit X un espace topologique, et D un sous-ensemble (partout) dense dans X. Montrer qu'il est aussi équivalent de dire
   (i) Le complémentaire de D est d'intérieur vide.
   (ii) Si F est un fermé contenant D, alors $F = X$.
   (iii) D rencontre tout ouvert non vide de X.
   Montrer qu'un ensemble $A \subset X$ rencontre toute partie dense dans X si et seulement si il est d'intérieur non vide.
2. Soit E et G deux ouverts denses dans X ; montrer que $E \cap G$ est encore dense dans X. En déduire que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est une intersection décroissante d'ouverts denses.

[006046]

Exercice 6501

Etablir les propriétés suivantes de l'adhérence d'un ensemble dans un espace topologique :

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
2. Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Montrer que la formule $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ n'est pas vraie en général ; montrer que 3. n'est pas vrai en général pour une infinité d'ensembles. [006047]

Exercice 6502

Etablir l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
2. $a \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si il existe un voisinage de a entièrement contenu dans A.

Etablir pour l'intérieur d'un ensemble des propriétés analogues à celles de l'exercice 6501. [006048]

Exercice 6503

On rappelle la construction de l'ensemble triadique de Cantor : on part du segment $[0,1]$ dont on supprime l'intervalle médian $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$; à la deuxième étape, on supprime les intervalles $]\frac{1}{9},\frac{2}{9}[$ et $]\frac{7}{9},\frac{8}{9}[$ etc. On note K_n la réunion des intervalles restants à la n-ième étape, et $K = \bigcap K_n$. Quelle est l'adhérence et l'intérieur de K ? [006049]

Exercice 6504

Soit X un espace topologique, et D un sous-ensemble dense dans X. Montrer qu'il est aussi équivalent de dire

1. Le complémentaire de D est d'intérieur vide.
2. Si F est un fermé contenant D, alors $F = X$.
3. D rencontre tout ouvert de X.

Montrer qu'un ensemble $A \in X$ rencontre toute partie dense dans X si et seulement si il est d'intérieur non vide. [006050]

Exercice 6505

Soit E et G deux ouverts denses dans X ; montrer que $E \cap G$ est encore dense dans X. [006051]

Exercice 6506

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $a > 0$, l'ensemble des x vérifiant $|f(x)| > a$ est fini. Montrer que $\{x/f(x) = 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Le vérifier sur l'exemple suivant : on énumère les rationnels $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots$ et on pose $f(r_n) = \frac{1}{n}$ si $n \geqslant 1$, $f(x) = 0$ ailleurs. [006052]

Exercice 6507

Montrer que $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n}), n \geqslant 1\}$ est dense dans $[0,1]$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. [006053]

Exercice 6508

Soit E un ensemble non vide, et $X = E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$ d'éléments de E. Pour $x, y \in X$, on pose $p(x,y) = \min\{n/x_n \neq y_n\}$ si $x \neq y$, et ∞ si $x = y$.

1. Montrer que $d(x,y) = \frac{1}{p(x,y)}$ (avec $\frac{1}{\infty} = 0$) est une distance sur X qui vérifie l'inégalité ultramétrique
$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).$$
2. Quelles sont les boules ouvertes et les boules fermées pour cette métrique ?

[006054]

Exercice 6509 Espace quasi-séparé

Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists V$ voisinage de x ; $y \notin V$.
   (ii) $\forall x \in X,\ \{x\}$ est fermé.
   (iii) $\forall x \in X,\ \cap \{V \ ;\ V$ voisinage de $x\} = \{x\}$.
2. Soit $(X, \mathscr{T})$ ainsi et $A \subset X$ tel que $\overline{A} \neq A$. Montrer que si $x \in \overline{A} \backslash A$, tout voisinage de x coupe A en une infinité de points.

[006060]

Exercice 6510 Exemple de topologie non séparée

Dans $\mathbb{C}$, on note $[z_0 \to [$ la demi-droite $\{\rho e^{i\theta_0}\ ;\ \rho \geqslant \rho_0\}$, si $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$. On déclare ouvert toute réunion (éventuellement vide) de telles demi-droites.

1. Montrer qu'on a ainsi défini sur $\mathbb{C}$ une topologie $\mathscr{T}$ non séparée.
2. Montrer que l'adhérence du point $\{z_0\}$ pour cette topologie est $[0, z_0]$.
3. En déduire que les fermés de $\mathscr{T}$ sont les ensembles étoilés par rapport à 0 (A est dit "étoilé par rapport à 0" si, pour tout $z \in A$, le segment $[0,z]$ est encore dans A).

Correction ▼ [006061]

Exercice 6511

Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique séparé. Montrer que la diagonale Δ de $X \times X$ est fermée dans $X \times X$.
[006062]

Exercice 6512

1. Quels sont les ouverts de $[1,2] \cup \{3\}$ induits par ceux de $\mathbb{R}$?
2. Quelle est la topologie induite sur $\mathbb{Z}$ par celle de $\mathbb{R}$?
3. Quels sont les ouverts du cercle $\Gamma = \{z / |z| = 1\}$? du demi-plan $\{z / \operatorname{Im} z > 0\}$? du demi-plan $\{z / \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ dans $\mathbb{C}$?

[006063]

Exercice 6513

Soit Y un sous-ensemble de l'espace topologique X, muni de la topologie induite. Décrire les ouverts (fermés) induits de Y lorsque Y est ouvert (fermé).

Soit $A \subset Y$. Montrer que l'adhérence de A dans Y, $\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}$; a-t-on pour l'intérieur de A dans Y, $\overset{\circ}{A}{}^Y = Y \cap \overset{\circ}{A}$?
[006064]

Exercice 6514

On dit qu'un espace topologique X a la propriété (P) si la famille de parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées est une base pour les ouverts de X.

1. Montrer qu'un espace topologique discret a cette propriété.
2. Montrer que la topologie induite sur $\mathbb{Q}$ par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ n'est pas la topologie discrète, mais qu'elle possède aussi la propriété (P).
3. Autre exemple ?

[006065]

Exercice 6515

Si A est une partie bornée d'un espace métrique (E,d), on pose $\operatorname{diam} A = \sup_{a,b \in A} d(a,b)$.

1. Montrer que $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.
2. Trouver le diamètre de $\{f \in C([0,1])\ ;\ 0 \leqslant f \leqslant 1\}$; de $\{f \in C([0,1])\ ;\ 0 \leqslant f \leqslant 1,\ f(0) = 0\}$, C étant muni de la métrique d_1.

[006082]

Exercice 6516

Peut-on construire dans $\mathbb{R}$ un ensemble infini, fermé, constitué uniquement d'irrationnels ? [006090]

Exercice 6517

Montrer que sur $\mathbb{R}^n$, les distances d euclidienne, d_∞ et d_1 définissent la même topologie. [006091]

Exercice 6518

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geqslant 0\}$. Vérifier qu'il est ouvert et qu'il peut s'écrire comme une union dénombrable de fermés (un tel ensemble est dit de type F_σ).
2. Dans $\mathbb{R}^n$, on considère le sous-ensemble des points à coordonnées entières, et le sous-ensemble des points à coordonnées rationnelles. Vérifier que le premier est fermé mais que le second n'est ni ouvert ni fermé.

[006092]

Exercice 6519

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, muni de la distance $d(A,B) = \max_{i,j} |a_{i,j} - b_{i,j}|$ où $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Dans le cas $n = 2$, décider si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés :
   $\mathscr{A}$ = matrices ayant deux valeurs propres distinctes et > 0.
   $\mathscr{B}$ = matrices ayant deux valeurs propres > 0.

[006093]

Exercice 6520

On note X l'espace des suites réelles $x = (x(n))$ et on le munit de la topologie dont les ouverts élémentaires sont

$$V(x; n_1, n_2, \cdots n_k; \varepsilon) = \{y \in X / |x(n_i) - y(n_i)| < \varepsilon,\ i = 1 \cdots k\}.$$

Vérifier qu'on a bien défini une base de topologie.
Comparer la topologie qu'elle engendre sur l^∞ et c_0 avec la topologie métrique de l'exercice précédent. [006094]

Exercice 6521

Soit X un espace topologique. On considère les propriétés suivantes :
(i) X contient un dénombrable dense.
(ii) la topologie sur X possède une base dénombrable d'ouverts.
Montrer que (ii) implique (i) et que la réciproque a lieu si X est métrisable. Un espace vérifiant (i) est dit séparable. [006095]

Exercice 6522

Soit X un espace métrique séparable (cf exercice 6521), et A une partie quelconque de X. Montrer que A est encore séparable. [006096]

Exercice 6523

On considère dans $\mathbb{R}$ les trois topologies $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$, $\mathscr{T}_3$, engendrées respectivement par les intervalles de la forme $]a,b[$, $[a,b[$, $[a,b]$, a et b décrivant $\mathbb{R}$. Comparer les topologies, et décrire les fonctions continues de $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_1)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_2)$; de $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_1)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_3)$. [006097]

Exercice 6524

Soit $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ deux topologies sur X. Montrer que $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$ ssi $(X,\mathscr{T}') \stackrel{\text{id}}{\to} (X,\mathscr{T})$ est continue. Montrer qu'alors $\overline{A}^{\mathscr{T}'} \subset \overline{A}^{\mathscr{T}}$; quelle inclusion a-t-on entre $\overset{\circ}{A}^{\mathscr{T}'}$ et $\overset{\circ}{A}^{\mathscr{T}}$? [006098]

Exercice 6525

Comparer sur $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, l'espace des suites de $0-1$, les topologies définies par les distances

$d(x,y) = \dfrac{1}{\min\{n/x_n \neq y_n\}}$ si $x \neq y$, $\quad$ 0 sinon,

et

$\delta(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. [006099]

Exercice 6526

On se donne une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, et on note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. A quelles conditions sur f, $\delta(x,y) = d(f(x), f(y))$ définit-elle une distance sur $\mathbb{R}$ équivalente topologiquement à la distance usuelle (ie définissant la même topologie.) ? [006100]

Exercice 6527

Soit E un ensemble non vide, et $X = E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$ d'éléments de E. Pour $x,y \in X$, on pose $p(x,y) = \min\{n/x_n \neq y_n\}$ si $x \neq y$, et ∞ si $x = y$.
Montrer que $d(x,y) = \frac{1}{p(x,y)}$ (avec $\frac{1}{\infty} = 0$) est une distance sur X qui vérifie l'inégalité ultramétrique

$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).$$

[006101]

Exercice 6528

On dit qu'une distance est *ultramétrique* si elle vérifie l'inégalité triangulaire renforcée :

$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).$$

Etablir les assertions suivantes :

1. Si $d(x,y) \neq d(y,z)$, alors $d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$. En déduire que tout triangle dans E est isocèle.
2. Toute boule ouverte $B(x,r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé, et
$$B(x,r) = B(y,r) \ \ \forall y \in B(x,r).$$
3. Toute boule fermée $B'(x,r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé, et
$$B'(x,r) = B'(y,r) \ \ \forall y \in B'(x,r).$$
4. Si deux boules ont un point commun, elles sont emboîtées.

[006102]

Exercice 6529

Soit (X,d) un espace métrique, et soit φ une fonction réelle définie pour $x \geqslant 0$, vérifiant (i) $\varphi(0) = 0$, (ii) φ croissante, (iii) $\varphi(u) > 0$ si $u > 0$, (iv) $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)$.

1. Montrer que $\delta(x,y) = \varphi(d(x,y))$ définit une distance sur X.
2. Vérifier que les fonctions $\varphi_1(u) = \inf(u,1)$, $\varphi_2(u) = \frac{u}{1+u}$, $\varphi_3(u) = \log(1+u)$, et $\varphi_4(u) = u^\alpha$ où $0 < \alpha < 1$ remplissent les conditions (i) (ii) et (iii) ; plus généralement, montrer que toute fonction f strictement croissante, concave, telle que $f(0) = 0$ remplit ces conditions.
3. On suppose de plus que la fonction φ est continue en 0. Montrer que les métriques d et δ sont topologiquement équivalentes.

4. Montrer que $\delta_1 = \varphi_1(d)$ et $\delta_2 = \varphi_2(d)$ sont lipschitz-équivalentes.

[006103]

Exercice 6530

Soit (X,d) un espace métrique avec métrique bornée. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fermés non vides de X, et on définit pour A et B dans $\mathscr{F}$,

$$\delta(A,B) = \|d_A - d_B\|_\infty$$

où d_A est la fonction bornée $x \to d(x,A)$. Montrer qu'on a défini ainsi une métrique sur $\mathscr{F}$, et que l'application $a \to \{a\}$ est une isométrie de X dans $\mathscr{F}$. [006104]

Exercice 6531

Trouver les valeurs d'adhérence de la suite :
$0,1,0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\cdots,0,\frac{1}{2^k},\frac{2}{2^k},\cdots,\frac{2^k-1}{2^k},1,0,...$ [006105]

Exercice 6532

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{iu_n} et $e^{i\sqrt{2}u_n}$ convergent. Montrer que (u_n) a au plus une valeur d'adhérence.
2. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{itu_n} converge pour $t \in T$ où T est non dénombrable. Même conclusion.

[006106]

Exercice 6533

Soit (u_n) une série positive divergente telle que u_n décroit vers 0 et on pose $A = \{\pm u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n,\ n \geqslant 1\}$. Montrer que $\overline{A} = \mathbb{R}$. [006107]

Exercice 6534

Soit dans un espace métrique (X,d) une suite (x_n) telle que les trois sous-suites (x_{2n}), (x_{2n+1}), et (x_{3n}) convergent. Montrer que la suite elle-même converge. [006108]

Exercice 6535

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite d'un espace métrique (X,d). On suppose que $\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = a_m$, et que $\lim_{m\to\infty} a_m = a$. Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite initiale (a_{p,n_p}) telle que $\lim_{p\to\infty} a_{p,n_p} = a$. [006109]

Exercice 6536

Soit (F_n) une suite décroissante de fermés dans un espace topologique X, et soit (x_n) une suite convergente dans X telle que pour chaque n, $x_n \in F_n$. Vérifier que $\lim_{x\to\infty} x_n \in \bigcap F_n$.
Que peut-on dire si la suite de fermés n'est plus décroissante ? [006110]

Exercice 6537

On va montrer que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur $[-1,1]$. Pour commencer, on approche la fonction $|t|$.

1. Montrer que la suite de polynômes définis par récurrence :

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - p_n^2(t)),\ \ p_0(t) = 0,$$

converge vers $|t|$.
2. En déduire que toute fonction affine par morceaux sur $[-1,1]$ est limite d'une suite de polynômes.

3. Montrer que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur $[-1,1]$.

[006111]

Exercice 6538

1. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de réels $x_n = (1+\frac{1}{n})\sin(n\frac{\pi}{6})$; de la suite $(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})_{m\geqslant 1, n\geqslant 1}$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}\alpha+\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si α est irrationnel. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $x_n = \cos(2\pi n\alpha)$.

   (*Indication :* on pourra montrer que tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ est soit $\mathbb{R}$, soit discret, de la forme $a\mathbb{Z}$.)

[006112]

Exercice 6539

On sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle est un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle : si F est fini, trouver une suite qui prend une infinité de fois chaque valeur de F ; si F est infini, montrer que F contient un dénombrable dense D et trouver une suite qui prend une infinité de fois chaque valeur de D. [006113]

Exercice 6540

Soit (ε_k) une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (S_n) est un intervalle de $\mathbb{Z}$. [006114]

Exercice 6541

On considère une suite (x_n) de $[0,1]$ telle que $x_{n+1}-x_n$ tend vers 0.

1. Montrer que l'ensemble A de ses valeurs d'adhérence est un intervalle fermé de $[0,1]$.
2. On suppose de plus que cette suite est une suite récurrente i.e. définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est continue de $[0,1]$ dans lui-même, et un point initial $x_0 \in [0,1]$. Montrer alors que la suite converge (on commencera par remarquer que si $x\in A$, alors $x = f(x)$, et que si $x_m \in A$ pour un indice m, alors la suite converge.)
3. Soit $x = (x_n)$ une suite de l^∞ ; montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite y de terme général $y_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ est un intervalle. En déduire que l'application f de l^∞ dans lui-même qui associe y à x, n'est pas bijective.

[006115]

Exercice 6542

On considère l'espace métrique $E = C([0,1])$ muni de d_∞, et pour $f\in E$, on note $M(f)$ le maximum de f sur $[0,1]$. Montrer que l'application $f\to M(f)$ est 1-lipschitzienne. [006136]

Exercice 6543

Soit (f_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction qui n'est pas un polynôme. Montrer que la suite des degrés tend vers l'infini. [006137]

Exercice 6544

On considère la suite de polynômes sur $[-1,1]$

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt}.$$

1. Montrer que pour tout ε, cette suite converge uniformément vers 1 sur l'intervalle $[\varepsilon, 1]$, et vers -1 sur l'intervalle $[-1, -\varepsilon]$.
   Indication : Comparer $\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt$ à $\int_0^1 (1-t)^n\, dt$.
2. En déduire que la suite $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$ converge uniformément vers $|x|$ sur $[-1, 1]$.
3. Montrer que dans l'exercice 6537 la convergence est aussi uniforme sur $[-1, 1]$, en établissant une relation de récurrence satisfaite par l'erreur $\varepsilon_n(t) = |t| - p_n(t)$.

[006138]

Exercice 6545

Une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est dite réglée, si elle a en tout point une limite à droite et une limite à gauche (et bien sûr, une limite à droite en 0, une limite à gauche en 1.) Montrer qu'une limite uniforme de fonctions en escalier est une fonction réglée (la réciproque sera établie ultérieurement). [006139]

Exercice 6546

Soit E l'espace $C_b(\mathbb{R}, C)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la métrique de la convergence uniforme d.

1. On rappelle qu'un espace topologique est séparable s'il contient un dénombrable dense. Montrer que dans un espace métrique séparable, toute collection d'ouverts deux à deux disjoints est au plus dénombrable.
2. Soit λ et μ deux réels distincts. Montrer que $d(e^{i\lambda x}, e^{i\mu x}) \geqslant 2$. En déduire que E n'est pas séparable.

[006140]

Exercice 6547 Questions de cours

1. Donner les définitions d'une topologie, d'un espace topologique Hausdorff, d'un espace topologique quasi compact, d'un espace topologique compact, d'un espace topologique connexe, et d'un espace topologique connexe par arcs.
2. Donner un exemple d'un espace topologique connexe mais pas connexe par arcs (une démonstration n'est pas demandée !).
3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que A est quasi compact si et seulement si A est fermé et borné (énoncer clairement les théorèmes utilisés !).
4. Soit X un espace topologique. Montrer que si X ne contient qu'un seul élément, alors X est compact.
5. Soit (X, d) un espace métrique. Donner la définition d'une suite de Cauchy dans X. Sous quelle condition dit-on qu'une suite x_n converge vers $a \in X$ (noté $x_n \to a$) ?
6. Soit (X, d) un espace métrique et x_n une suite dans X. Montrer que (1) si x_n est une suite de Cauchy, alors x_n est bornée, et (2) si $x_n \to a$, alors x_n est une suite de Cauchy.

[006772]

Exercice 6548

Soient X et Y des espaces topologiques, et soit $Y^X = \{f : X \to Y\}$ l'espace de toutes les fonctions de X dans Y. Pour $A \subset X$ et $B \subset Y$ on définit $V(A, B) \subset Y^X$ par $V(A, B) = \{f : X \to Y \mid f(A) \subset B\}$. La topologie compacte-ouverte sur Y^X a une sous-base constituée des ensembles $V(A, B)$ où $A \subset X$ est compact et $B \subset Y$ est ouvert. Montrer que Y^X avec la topologie compacte-ouverte est Hausdorff si et seulement si Y est Hausdorff. (Indication : pour le "seulement si" penser à une fonction constante.) [006774]

Exercice 6549

1. Donner la définition d'un espace topologique T_1.
2. Montrer qu'un espace topologique X est T_1 si et seulement si : $\forall x \in X \ : \ \{x\}$ est fermé.

3. Soit X un espace topologique contenant un nombre fini de points. Montrer que si X est T_1, alors sa toplogie est la topologie discrète.
4. Soit X un espace topoogique T_1 ayant la propriété : $\forall x \in X, \forall A \subset X\ :\ A$ fermé et $x \notin A \implies \exists U, V$ ouverts : $x \in U,\ A \subset V,\ U \cap V = \emptyset$. Montrer que X est T_2.

[006786]

Exercice 6550

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un fermé tel que $K \subset B(x_0, R)$ (où $B(x_0, R)$ est la boule ouverte de centre x_0 et rayon R). Montrer qu'il existe un $R' < R$ tel que $K \subset B(x_0, R')$. (indication : regarder $\sup d(x, x_0)$) [006787]

Exercice 6551

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, posons $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \mid f(x,y) = 0 \}$ et $V = \{ g : M \to \mathbb{R} \mid g$ dérivable, $\forall x \in M\ :\ g'(x) = 0 \}$.

1. Montrer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que V est un espace vectoriel.
2. Calculer la dimension de l'espace V dans les cas suivants :
   — $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$,
   — $f(x,y) = \sin(x)$,
   — $f(x,y) = y^2 - x(x-1)(x-t)$.
   Dans le dernier cas on vous demande de calculer la dimension de V en fonction de $t \in [0,1]$ (indication : esquisser l'ensemble $f(x,y) = 0$ et distinguer les cas $t = 0$, $t = 1$, $0 < t < 1$).

[006798]

Exercice 6552

1. Soit X un espace T_2 et K un sous ensemble quasi compact. Montrer que K est fermé.
2. Donner la définition d'un espace T_4. Montrer qu'un espace X est T_4 si et seulement si : pour tout fermé A contenu dans un ouvert U il existe un ouvert V tel que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

   Soient $f, g : X \to Y$ deux fonctions continues et Y un espace Hausdorff.
3. Montrer que $\{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$ est fermé.
4. Montrer que si f et g coïncident sur un ensemble dense dans X, alors $f = g$.

[006799]

Exercice 6553

Soit X un espace topologique, Y un espace topologique séparé, $U \subset X$ un sous ensemble dense de X, et soit $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Démontrer que $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé. En déduire que si f et g coincident sur U, alors f et g coincident sur X. [006843]

---

303 421.00 Compacité

Exercice 6554

Soit X un espace métrique.

1. Soit A et B deux compacts disjoints dans X. Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints (commencer par le cas où B est réduit à un point).
2. Soit K un compact non vide de X et U un ouvert de X contenant K. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication :

$$d(x,K) < r \Rightarrow x \in U\ .$$

Indication ▼ Correction ▼ [002370]

Exercice 6555

Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

Indication ▼ Correction ▼ [002371]

Exercice 6556

Soient $K,F \subset \mathbb{R}^n$ des parties non vides, K compact et F fermé. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a-b\| = \mathrm{dist}(K,F)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002372]

Exercice 6557

Soit E un espace compact et soit (F,d) un espace métrique. Soit $f : E \to F$ une application localement bornée, ce qui signifie que, pour tout $y \in E$, il existe un voisinage V_y de y sur lequel f est bornée. Montrer que f est bornée sur E.

Correction ▼ [002373]

Exercice 6558

Soit X un espace métrique.

1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de X et soit $(x_n)_n$ une suite convergente telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{n\geqslant 0} F_n \ .$$
Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n\geqslant 0} F_n = \emptyset$.
2. Soit maintenant $(K_n)_n$ une suite décroissante de *compacts* non vides de X. Vérifier que $K = \bigcap_{n\geqslant 0} K_n$ est non vide et que tout ouvert Ω qui contient K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Correction ▼ [002374]

Exercice 6559

Soit X un espace topologique et $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \to \int_0^1 f(x,y)\,dy$ est continue.

Correction ▼ [002375]

Exercice 6560

Soit E un espace normé. Si A et B sont deux parties de E, on note $A+B$ l'ensemble $\{a+b\ ;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A+B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermé.

Indication ▼ Correction ▼ [002376]

Exercice 6561

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Montrer que, si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante : l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété :
$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty \ .$$

Indication ▼ Correction ▼ [002377]

Exercice 6562

Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$. On munit E de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Montrer que la boule unité fermée de E n'est pas compact (on pourra construire une suite dont aucune sous suite n'est de Cauchy).

Que peut-on dire de la boule unité fermée de l^∞ (l'espace des suites bornées muni de la norme sup) ?

Correction ▼ [002378]

Exercice 6563

Soit (X,d) un espace métrique, soit (Y,δ) un espace métrique compact et soit $f : X \to Y$ une application dont le graphe

$$G = \{(x, f(x))\, x \in X\} \subset X \times Y$$

est fermé dans $X \times Y$. Notons $p : G \to X$ et $q : G \to Y$ les restrictions des deux projections $p(x,y) = x$ et $q(x,y) = y$. Montrer que p est un homéomorphisme de G sur X. En déduire que f est continue. [002379]

Exercice 6564

Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \text{pour tout } x,y \in X\ , x \neq y\,.$$

Le but ici est de montrer que f a un unique point fixe $p \in X$.

1. Justifier que f peut avoir au plus un point fixe.
2. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n\geqslant 0} X_n$ n'est pas vide.
3. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zero.
4. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \to p$, lorsque $n \to \infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [002380]

Exercice 6565

Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) \geqslant d(x,y) \quad \text{pour tout } \ x,y \in E\,.$$

On se propose de montrer que f est une isométrie surjective. Soient $a,b \in E$ et posons, pour $n \geqslant 1$, $a_n = f^n(a) = f \circ f^{n-1}(a)$ et $b_n = f^n(b)$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \geqslant 1$ tel que $d(a,a_k) < \varepsilon$ et $d(b,b_k) < \varepsilon$ (Considérer une valeur d'adhérence de la suite $z_n = (a_n, b_n)$).
2. En déduire que $f(E)$ est dense dans E et que $d(f(a), f(b)) = d(a,b)$ (Considérer la suite $u_n = d(a_n,b_n)$).

Correction ▼ [002381]

Exercice 6566

On se donne une métrique d sur $X = [0,1]$ telle que l'identité $i : (X, |.|) \to (X,d)$ soit continue (i.e. la topologie définie par d est moins fine que la topologie usuelle de X).

1. Montrer que tout sous-ensemble de X compact pour la topologie usuelle est aussi compact pour la topologie définie par d ; puis montrer cette propriété pour les fermés.
2. En déduire que la topologie définie par d est la topologie usuelle.

Correction ▼ [002382]

Exercice 6567

1. Soit X un espace topologique séparé. Montrer qu'il est compact et discret si et seulement si il est fini.
2. Montrer que dans un espace topologique séparé, l'ensemble constitué d'une suite convergente et de sa limite est compact.

[006164]

Exercice 6568

Soit X un espace topologique compact et $f_1, f_2, \dots, f_n$, n fonctions continues réelles qui séparent les points de X. Montrer que X est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$. [006165]

Exercice 6569

Soit X, Y deux espaces topologiques séparés et (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de X. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que $f(\cap_n K_n) = \cap_n f(K_n)$. [006166]

Exercice 6570

Soit X un espace topologique séparé et A et B deux compacts disjoints dans X. Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints. (Commencer par le cas où B est réduit à un point). [006167]

Exercice 6571

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles définies sur un espace topologique compact X, convergeant simplement vers une fonction f ; on suppose que les fonctions f_n et f sont continues. Montrer que la convergence est uniforme sur X.
Application : montrer que la suite de fonctions f_n définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \sum_1^{n-1} x^k (1-x)^{n-k}$ converge vers 0 uniformément sur $[0,1]$. [006168]

Exercice 6572

Soit X un espace topologique compact et $C(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X avec la norme uniforme.
Soit J un idéal propre de $C(X)$; on va montrer par l'absurde que toutes les fonctions de J s'annulent en un même point de X.

1. Sinon, montrer qu'on peut trouver n points de X, $x_1, \cdots, x_n$, $V_1, \cdots, V_n$ où V_i voisinage de x_i et n fonctions de J, $f_1, \cdots, f_n$ tels que
$$X = \cup_i V_i, \ \ f_{i|V_i} \neq 0.$$
2. Construire alors une fonction g dans J ne s'annulant jamais et en déduire que $\mathbf{1} \in J$, d'où la contradiction.

[006169]

Exercice 6573

Soit X un espace topologique et $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \to \int_0^1 f(x,y)\,dy$ est continue. [006170]

Exercice 6574

Soit $X = [a,b]$ et on se donne une métrique d sur X telle que la topologie définie par d est moins fine sur X que la topologie usuelle. Montrer que tout sous-ensemble de X compact pour la topologie usuelle est aussi compact pour la topologie définie par d ; puis montrer cette propriété pour les fermés.
En déduire que la topologie définie par d est la topologie usuelle. [006171]

Exercice 6575

Soit X un espace topologique séparé et (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de X. Montrer que $K = \cap K_n$ est non vide et que si Ω est un ouvert contenant K, il contient tous les K_n à partir d'un certain rang.
[006172]

Exercice 6576

Soit f et g deux fonctions réelles continues sur un espace topologique compact X, telles que $f \geqslant 0$, et $f(x) > 0$ si $g(x) \leqslant 0$. Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$Af(x) + g(x) > 0, \; \forall x \in X.$$

(*Indication :* raisonner par l'absurde, et considérer les ensembles $A_n = \{x \in X / nf(x) + g(x) \leqslant 0\}$). [006173]

Exercice 6577

Soit X un espace topologique compact et $f_1, f_2, \dots, f_n$, n fonctions continues réelles qui séparent les points de X. Montrer que X est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$. [006174]

Exercice 6578

Montrer que toute fonction réglée sur $[0,1]$ s'approche uniformément par des fonctions en escalier. [006175]

Exercice 6579

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles définies sur un espace topologique compact X, convergeant simplement vers une fonction f ; on suppose que les fonctions f_n et f sont continues.
Montrer que la convergence est uniforme sur X. [006176]

Exercice 6580

Soit X un espace topologique compact et $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X avec la norme uniforme.

1. Soit J un idéal propre de $C(X)$; montrer que toutes les fonctions de J s'annulent en un même point de X. *Indication :* raisonner par l'absurde, utiliser le fait qu'une fonction continue $\neq 0$ en x, est $\neq 0$ sur un voisinage de x et recouvrir X avec de tels voisinages.

   Pour $f \in J$, on note $Z_f = f^{-1}(\{0\})$, l'ensemble des zéros de f.
2. Soit J un idéal de $C(X)$ et $Z = \cap_{f \in J} Z_f$; Z est fermé.
   (a) Soit K un fermé de X disjoint de Z. Par un raisonnement analogue à celui du 1., construire $f \in J$, $f \geqslant 0$ et ne s'annulant pas sur K.
   Etudier la limite F de $\frac{nf}{1+nf}$ dans $C(X)$.
   (b) Montrer que si $g \in C(X)$ s'annule sur un ouvert contenant Z, alors $g \in J$ et $Z \neq \emptyset$.
   (c) Soit $g \in C(X)$ nulle sur Z ; par un bon choix de K, montrer que $g \in \overline{J}$.

   En déduire la description des idéaux fermés de $C(X)$.

[006177]

Exercice 6581

Montrer que les sous-groupes compacts du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sont contenus dans $\mathbb{U}$ le sous-groupe des nombres complexes de module 1. [006178]

Exercice 6582

On rappelle la construction de l'ensemble triadique de Cantor : on part du segment $[0,1]$ dont on supprime l'intervalle médian $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$; à la deuxième étape, on supprime les intervalles $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ et $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$ etc. On note K_n la réunion des intervalles restants à la n-ième étape, et $K = \bigcap K_n$. Montrer que K est un compact d'intérieur vide, sans point isolé. [006179]

Exercice 6583

On considère dans $M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices de déterminant égal à 1. Est-il compact ? On note $O(n)$ le sous-ensemble des matrices orthogonales (${}^tA.A = I$) ; montrer que $O(n)$ est compact. [006180]

Exercice 6584

Montrer que dans un evn, la boule unité fermée est compacte si et seulement si la sphère unité est compacte. [006181]

Exercice 6585

Soit A une partie d'un espace normé E. On note $\mathrm{co}(A)$, l'enveloppe convexe de A ie l'ensemble $\{\sum_{\text{finie}} \lambda_j a_j,\ \lambda_j \geqslant 0, \sum \lambda_j = 1\}$ des combinaisons convexes de points de A.

1. Montrer que si A est fini, $\mathrm{co}(A)$ est compacte.
2. Montrer que si E est de dimension finie n et A compact, $\mathrm{co}(A)$ est compacte (on admettra que tout point de $\mathrm{co}(A)$ est combinaison convexe d'au plus $n+1$ points de A).

[006182]

Exercice 6586

Soit (X,d) un espace métrique.

1. Soit A une partie compacte de X ; montrer qu'il existe $x,y \in A$ tels que $\mathrm{diam}A = d(x,y)$.
2. Soit A et B deux parties compactes disjointes de X. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $d(a,b) \geqslant \delta\ \forall a \in A, b \in B$. En déduire une démonstration simple de l'exercice 10 dans le cadre métrique.
3. Montrer que le résultat est encore vrai si l'une est compacte et l'autre fermée, mais devient faux si les deux parties sont seulement fermées.

[006183]

Exercice 6587

Soit f une surjection continue de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. On va montrer que l'image réciproque de tout point est non bornée. On raisonne par l'absurde :
Sinon, il existe $a \in \mathbb{R}$ et un disque fermé D du plan tel que $f^{-1}(\{a\}) \subset D$; en étudiant $f(D^c)$ et $f(D)$ montrer que $f(\mathbb{R}^2)$ ne peut être égal à $\mathbb{R}$ tout entier. [006184]

Exercice 6588

Soit $F_1, F_2, ..., F_p$, p fermés d'un espace métrique compact E, tels que $F_1 \cap ... \cap F_p = \emptyset$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute partie A de E rencontrant tous les F_i ait un diamètre $\geqslant \varepsilon$ (raisonner par l'absurde). [006185]

Exercice 6589

Soit $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ où les X_i sont n espaces métriques, et on note p_i la projection de X sur X_i. Montrer que $A \subset X$ est compact si et seulement si A est fermé dans X et les $p_i(A)$ sont tous compacts. [006186]

Exercice 6590

1. Montrer que la boule unité fermée d'un evn de dimension finie est compacte.
2. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E de dimension finie. Montrer que $d(x,F) = \inf\{d(x,y),\ y \in F,\ ||y|| \leqslant 2||x||\}$; en déduire que F est fermé dans E.
3. Soit (f_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction qui n'est pas un polynôme. Montrer que la suite des degrés tend vers l'infini (raisonner par l'absurde).

[006187]

Exercice 6591 Partiel de décembre 1998

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ de boule unité fermée $\overline{B}$ et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On a montré dans le liste précédente que si $F \neq E$, $\quad \sup_{x\in\overline{B}} d(x,F) = 1$.
On va montrer qu'un evn dont la boule unité fermée est compacte est nécessairement de dimension finie. On suppose donc que $\overline{B}$ est compacte.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre fini de points $x_1,\cdots,x_k \in \overline{B}$ tels que $\overline{B} \subset \cup_{j=1}^k B(x_j,\varepsilon)$.
2. Montrer que E est de dimension finie : pour cela, considérer le sous-espace vectoriel engendré par $x_1,\cdots,x_k$.

[006188]

Exercice 6592

Voici quelques applications du fait important suivant : dans un espace métrique compact, toute suite ayant une seule valeur d'adhérence converge.

1. Soit (a_n) une suite bornée de réels, telle que (e^{ita_n}) converge pour un ensemble non dénombrable de $t \in \mathbb{R}$; montrer que la suite (a_n) converge.
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et G son graphe. Montrer que si G est connexe par arcs, f est continue.
3. Soit f une application de X dans Y, espaces métriques et G le graphe de f. Montrer que G est fermé dans $X \times Y$ si f est continue. Montrer que la réciproque est vraie lorsque Y est compact.
4. Soit X un espace métrique, Y un espace métrique compact et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une application continue telle que, pour tout $x \in X$, l'équation $f(x,y) = 0$ ait une unique solution $y \in Y$. Montrer que l'application $u : x \in X \to y \in Y$ ainsi définie est continue.

[006189]

Exercice 6593

On considère une suite (x_n) de $[0,1]$ telle que $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0. Soit A l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

1. Justifier le fait que A est non vide. Si $\alpha \notin A$, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et n_0 tels que les points x_n, $n \geqslant n_0$, soient en dehors de $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$. Montrer ainsi que A est un intervalle (si α et $\beta \in A$, $\frac{\alpha+\beta}{2} \in A$).
2. On suppose de plus que cette suite est une suite récurrente i.e. définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est continue de $[0,1]$ dans lui-même, et un point initial $x_0 \in [0,1]$. Montrer alors que la suite converge (on commencera par remarquer que si $x \in A$, alors $x = f(x)$, et que si $x_m \in A$ pour un indice m, alors la suite converge.)
3. Soit $x = (x_n)$ une suite de l^∞ ; montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite y de terme général $y_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ est un intervalle. En déduire que l'application f de l^∞ dans lui-même qui associe y à x, n'est pas bijective.

[006190]

Exercice 6594

On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$, et h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$: $t \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

1. Montrer que le cercle privé d'un point, $\mathbb{S}^1 \setminus \{a\}$, est homéomorphe à l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que h est une bijection continue de $[0,1[$ sur $\mathbb{S}^1$, mais n'est pas un homéomorphisme.

[006191]

Exercice 6595

Démontrer de plusieurs façons que le cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ est compact. [006192]

Exercice 6596

Soit (X,d) un espace métrique, A et B deux parties de X. On pose $d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b)$.

1. Si A et B sont disjointes, l'une compacte et l'autre fermée, montrer que $d(A,B) > 0$.
2. Montrer, par un contre-exemple, que ceci peut être faux si les deux parties sont seulement fermées.

[006193]

Exercice 6597

Soit E un espace normé, X et Y deux sous-ensembles de E. Montrer que

1. $X+Y$ est ouvert si X est ouvert ;
2. $X+Y$ est compact si X et Y sont compacts ;
3. $X+Y$ est fermé si X est compact et Y fermé.

Que peut-on dire de $X+Y$ si X et Y sont seulement fermés ? [006194]

Exercice 6598

Soit E un espace normé, X et Y deux parties compactes de E. Montrer que la réunion des segments joignant un point $x \in X$ à un point $y \in Y$ est encore compacte. [006195]

Exercice 6599

Soit K un convexe compact symétrique de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 comme point intérieur. Alors K est la boule unité fermée associée à une norme de $\mathbb{R}^n$: considérer pour cela

$$p(x) = \inf\{t > 0 / \frac{x}{t} \in K\}$$

[006196]

Exercice 6600

Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence quand $x \to 0$ de $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$. [006197]

Exercice 6601

1. Soit X un espace métrique compact et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.
2. Application : Soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications de X dans X, ayant chacune un point fixe ; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.
3. Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de K dans K vérifiant

   $$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x-y\|;$$

   En considérant les fonctions f_n définies sur K par $f_n(x) = \frac{1}{n}f(x_0) + (1-\frac{1}{n})f(x)$, où $x_0 \in K$, montrer que f a un point fixe. Est-il unique ? Que se passe-t-il si K n'est plus convexe ?

[006198]

Exercice 6602

Soit A une partie d'un espace normé E. On note $\mathrm{co}(A)$, l'enveloppe convexe de A ie l'ensemble $\{\sum_{finie} \lambda_j a_j,\ \lambda_j \geqslant 0, \sum \lambda_j = 1\}$ des combinaisons convexes de points de A.

1. Montrer que si A est fini, $\text{co}(A)$ est compacte.
2. Montrer que si E est de dimension finie et A compact, $\text{co}(A)$ est compacte.

[006199]

Exercice 6603

Soit $E = C_b(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; pour $f \in E$, on note f_a la translatée de f par a, ie la fonction $x \to f(x-a)$, et O_f l'ensemble des translatées de f.

1. Montrer que si f est périodique, O_f est compact (considérer l'application $a \to f_a$).
2. Soit f une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions périodiques ; montrer que O_f est précompact.
3. On suppose cette fois O_f précompact ; on va montrer que f est uniformément continue.
   (a) De toute suite (f_{a_n}) de O_f on peut extraire une sous-suite convergente dans E.
   (b) Si $x_n - y_n$ tend vers 0, montrer que $(f_{x_n - y_n})$ n'a qu'une valeur d'adhérence f ; en déduire que $f(x_n) - f(y_n)$ tend vers 0.
   (c) Montrer que f est uniformément continue.

[006200]

Exercice 6604

Soit E l'ensemble des suites infinies de nombres réels $x = (x_1, x_2, \cdots)$ à valeurs 0 ou 1. Si x et y sont deux éléments de E, on pose

$$d(x,y) = \sup_{k \geqslant 1}(\frac{1}{k}|x_k - y_k|)$$

1. Montrer que d est une distance sur E.
2. Soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe une partie finie E_ε de E qui possède la propriété suivante : les boules fermées de rayon ε centrées en un point de E_ε recouvrent E.
3. Montrer que E est compact.

[006201]

Exercice 6605

Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^2$.

1. Si K est d'intérieur vide, montrer que K est homéomorphe au segment $[0,1]$.
2. Si K n'est pas d'intérieur vide, montrer que K est homéomorphe au disque unité fermé en considérant l'application $p(x) = \inf\{a > 0\ ;\ \frac{x}{a} \in K\}$; on montrera que 0 est un point intérieur, que $\delta||x|| \leqslant p(x) \leqslant C||x||$ puis que p est continue.

[006202]

Exercice 6606

Soit (A_n) une suite décroissante de compacts connexes non vides dans un espace topologique séparé. Montrer que $\cap_n A_n$ est encore un compact connexe non vide. (Pour la connexité on pourra raisonner avec de fermés et utiliser l'exercice 6570.) [006203]

Exercice 6607

Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble de X.

1. Montere que si X est quasi compact et A est fermé dans X, alors A est quasi compact.
2. Montrer que si X est Hausdorff et A est quasi compact, alors A est fermé dans X.

[006783]

Exercice 6608

Soit (X,d) un espace métrique compact, et soit $f: X \to X$ une application continue verifiant $\forall x \neq y\ :\ d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Montrer qu'il existe un point fixe unique pour f. (indication : regarder $\inf d(x, f(x))$) [006788]

Exercice 6609

Soit K un compact contenu dans U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit K_ε défini par $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,K) \leqslant \varepsilon\}$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble K_ε est compact.
2. Montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que K_ε soit contenu dans U (indication : regarder la fonction $x \mapsto d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$ définie sur K).

[006797]

Exercice 6610

Soit (X,d) un espace métrique. On suppose que *toutes* les boules fermées (c'est-à-dire les ensembles de la forme $\{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}$) sont compactes.

1. Démontrer que X est complet.
2. Démontrer que si $A \subset X$ est fermé et borné, alors A est compact.

[006817]

Exercice 6611

Soit (X,d) un espace métrique compact et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. Démontrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence $x \in X$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. (Indication : on suppose que la suite ne converge pas vers x.) [006818]

Exercice 6612

Soit X un espace topologique compact. Soit $\mathscr{F}$ une collection de fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. La collection $\mathscr{F}$ a les deux propriétés suivantes :

1. Si f et g appartiennent à $\mathscr{F}$, alors leur produit $f \cdot g$ appartient à $\mathscr{F}$.
2. Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x et une fonction $f \in \mathscr{F}$ tel que f est identiquement nulle sur U.

Démontrer que la fonction qui est identiquement nulle sur X appartient à $\mathscr{F}$. [006827]

Exercice 6613

Soit X un espace topologique séparé et soit ∞ un point qui n'appartient pas à X. On pose $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ et on définit $\mathscr{T}_\infty \subset \mathscr{P}(X_\infty)$ par : $A \in \mathscr{T}_\infty$ si et seulement si

$$\infty \notin A \Rightarrow\ A \text{ est un ouvert de } X\,;$$
$$\infty \in A \Rightarrow\ X \setminus A \text{ est un compact de } X.$$

1. Démontrer que si A appartient à $\mathscr{T}_\infty$, alors $A \cap X$ est un ouvert de X.
2. Démontrer que $\mathscr{T}_\infty$ est une topologie sur X_∞.
3. Démontrer que X est dense dans X_∞.
4. Démontrer que X_∞ est compact.

[006835]

Exercice 6614

Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \,;\, f(x) < \lambda\}$ et $\{x \,;\, f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de X.
2. Montrer que si f est continue, pour tout ω ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega)$ est un F_σ ouvert de X (F_σ= réunion dénombrable de fermés).

Indication ▼ Correction ▼ [002353]

Exercice 6615

1. Soit C l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ muni de la métrique $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|\,dx$, puis de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_x |f(x)-g(x)|$. Vérifier que l'application $f \to \int_0^1 |f|dx$ de C dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne dans les deux cas.
2. Soit c l'espace des suites réelles convergentes, muni de la métrique $d(x,y) = \sup_n |x(n)-y(n)|$. Si on désigne par $\ell(x)$ la limite de la suite x, montrer que ℓ est une application continue de c dans $\mathbb{R}$. En déduire que c_0 est fermé dans c.

Indication ▼ Correction ▼ [002354]

Exercice 6616

Soit f,g deux applications continues de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé. Montrer que $\{f = g\}$ est fermé dans X ; en déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de X, alors $f = g$.

Indication ▼ Correction ▼ [002355]

Exercice 6617

Une application de X dans Y est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y ; *fermée* si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application fermée.
2. Montrer que l'application $(x,y) \in X \times Y \to x \in X$ est ouverte mais pas nécessairement fermée (considérer l'hyperbole équilatère de $\mathbb{R}^2$).
3. Montrer que la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\frac{1}{2}]$, comme application de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$, est surjective, ouverte, fermée, mais pas continue.
4. Montrer que toute application ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone.

Indication ▼ Correction ▼ [002356]

Exercice 6618

1. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout A dans X. Que peut-on dire alors de l'image par f d'un ensemble dense dans X ?
2. Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, et que f est ouverte si et seulement si $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002357]

Exercice 6619

1. Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$; montrer que f est "presque lipschitzienne" au sens : $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon \,;\, \forall x,y \in [0,1] \quad |f(x)-f(y)| \leqslant C_\varepsilon |x-y| + \varepsilon$.

2. Montrer qu'une fonction f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$ où a et b sont des constantes.

[002358]

Exercice 6620

Soit f une fonction continue de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, si f est uniformément continue, elle est bornée. Réciproque ? [002359]

Exercice 6621

Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge. Montrer que f tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Retrouver ainsi le fait que la fonction $\sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

Indication ▼ Correction ▼ [002360]

Exercice 6622

Soit f une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a soit $f(x) = a - x$, soit $f(x) = a + x$, où $a = f(0)$. (Se ramener à $a = 0$.) [006066]

Exercice 6623

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On va montrer que f est soit nulle, soit la fonction identité.

1. Remarquer que $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$ et ainsi, que f est croissante.
2. Montrer que pour tout x réel on peut construire une suite (r_k) et une suite (s_k) de rationnels telles que $r_k \uparrow x$ et $s_k \downarrow x$. En déduire le résultat.

[006067]

Exercice 6624

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que t est une période de f si $f(x+t) = f(x)$ pour tout x réel. Soit E le groupe des périodes de f, supposé non vide et $T = \inf\{t \in E\ ;\ t > 0,\}$.

1. Montrer que si $T = 0$ alors f est constante.
2. Si $T > 0$, f est T-périodique et $E = \mathbb{Z}.T$.

[006068]

Exercice 6625

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ω sa fonction oscillation définie pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ par

$$\omega(x_0, \delta) = \sup_{\{|x_0 - y| = \delta, |x_0 - z| = \delta\}} |f(y) - f(z)|.$$

1. Remarquer que f est continue en x_0 si et seulement si
$$\omega(x_0) = \inf_{\delta > 0} \omega(x_0, \delta) = 0.$$
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $O_\varepsilon = \{x\ ;\ \omega(x) < \varepsilon\}$ est un ouvert.
En déduire que $C(f)$, l'ensemble des points de continuité de f, est un G_δ.

[006069]

Exercice 6626

Existe-t-il une application continue f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x)$ soit rationnel si x est irrationnel, et $f(x)$ irrationnel si x est rationnel ? [006070]

Exercice 6627

On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$.

1. Montrer que la fonction φ est continue, 1-périodique, et étudier la fonction f telle que
$$f(x) = \sum_n \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}.$$
2. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$, et on considère les deux suites de terme
$$z_k = \frac{1}{2^k} E(2^k x_0), \quad y_k = z_k + \frac{1}{2^k}.$$
Montrer que la suite (z_k) croît vers x_0 et que la suite (y_k) décroît vers x_0. Calculer $\frac{f(z_k)-f(y_k)}{z_k-y_k}$ et en déduire que f n'est pas dérivable en x_0.
On a ainsi construit une fonction continue, nulle part dérivable.

[006071]

Exercice 6628

Soit X un ensemble infini muni de la topologie dont les seuls ouverts sont : l'ensemble vide, et les parties de complémentaire fini. Montrer que si Y est un espace séparé, toute application continue de X dans Y est constante. [006072]

Exercice 6629

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et on note B_E la boule unité fermée de E. Soit u une application de E dans F telle que
(i) $u(x+y) = u(x) + u(y)$, $\forall x, y \in E$.
(ii) $u(B_E)$ est bornée dans F.

1. Calculer $u(rx)$, $x \in E$, r rationnel.
2. Montrer que u est continue en 0, plus précisément :
$$\exists M > 0\ ;\ \forall x \neq 0\ \ ||u(x)|| \leqslant M||x||.$$
3. Montrer que u est continue et linéaire.

[006073]

Exercice 6630

Soit O un ouvert de l'espace topologique produit $X \times Y$. Montrer que pour tout $x \in X$, l'ensemble $A_x = \{y \in Y/(x,y) \in O\}$ est un ouvert de Y. Le vérifier sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/xy > 1,\ x+y < 4\}$. [006074]

Exercice 6631

Montrer que si f est continue de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé, son graphe G est fermé dans $X \times Y$. Etudier la réciproque en considérant l'hyperbole équilatère. [006075]

Exercice 6632

Soit $f : X \to Y$, espaces topologiques. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue.
(ii) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ pour toute partie B de Y.
(iii) $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$ pour toute partie B de Y.
En déduire $\partial f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\partial B)$ pour toute partie B de Y. [006076]

Exercice 6633

Soit C l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ muni de la métrique $d(f,g)=\int_0^1 |f-g|\,dx$, puis de la métrique $d(f,g)=\sup_x |f(x)-g(x)|$. Vérifier que l'application $f\to\int_0^1 f dx$ de C dans $\mathbb{R}$ est continue dans les deux cas. [006077]

Exercice 6634

Soit c l'espace des suites réelles convergentes, muni de la métrique $d(x,y)=\sup_n |x(n)-y(n)|$. Si on désigne par $l(x)$ la limite de la suite x, montrer que l est une application continue de c dans $\mathbb{R}$. [006078]

Exercice 6635

Soit X un ensemble infini muni de la topologie dont les seuls ouverts sont : l'ensemble vide, et les parties de complémentaire fini. Montrer que si Y est un espace séparé, toute application continue de X dans Y est constante. [006079]

Exercice 6636

Soit X un espace métrique et Y un sous-ensemble de X. Montrer que Y est fermé si et seulement si il existe une application continue $f: X\to\mathbb{R}$ telle que $Y=\{x/f(x)=0\}$. [006080]

Exercice 6637

Soit f une application ouverte de X dans $\mathbb{R}^n$, et A une partie de X. Montrer que pour tout a dans l'intérieur de A,

$$\|f(a)\|<\sup_{x\in A}\|f(x)\|.$$

[006081]

Exercice 6638

Soit (X,d) un espace métrique; montrer que l'application $(x,y)\to d(x,y)$ est continue sur le produit $X\times X$. [006083]

Exercice 6639

Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E; retrouver les propriétés de la fonction $d_A : x\to d(x,A)$:

1. d_A est 1-lipschitzienne; $d(x,A)=d(x,\overline{A})$ et $d_A(x)=0$ si et seulement si $x\in\overline{A}$.
2. Montrer que $\{x\in E\ ;\ d(x,A)<\varepsilon\}$ est un ouvert contenant A.
3. Montrer que tout fermé de E est un G_δ et que tout ouvert est un F_σ.

[006084]

Exercice 6640 Support d'une fonction continue

Soit $f: E\to\mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un espace topologique E. On appelle support (fermé) de f, $S=S(f)=\overline{\{x\in E\ ;\ f(x)\neq 0\}}$.

1. Montrer que $S=\overline{\mathring{S}}$.
2. Réciproque. On suppose E métrique et $A\subset E$ fermé vérifiant $A=\overline{\mathring{A}}$. Montrer qu'il existe $f: E\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $A=S(f)$.

[006085]

Exercice 6641

1. Montrer qu'un espace métrique possède une propriété forte de séparation, à savoir : deux fermés disjoints F_1 et F_2 peuvent être séparés par deux ouverts disjoints, en considérant $\{x/d(x,F_1) > d(x,F_2)\}$.
2. Montrer que la propriété précédente est équivalente à l'existence d'une fonction continue f valant 0 sur F_1 et 1 sur F_2 (considérer $f(x) = \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$).

[006086]

Exercice 6642

Soit (X,d) un espace métrique avec métrique bornée. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fermés non vides de X, et on définit pour A et B dans $\mathscr{F}$,

$$\delta(A,B) = \|d_A - d_B\|_\infty$$

où d_A est la fonction bornée $x \to d(x,A)$.
Montrer qu'on a défini ainsi une métrique sur $\mathscr{F}$, et que l'application $a \to \{a\}$ est une isométrie de X dans $\mathscr{F}$.

[006087]

Exercice 6643

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ (munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$) ne sont pas homéomorphes. On peut par ailleurs montrer que deux sous-ensembles dénombrables denses de $\mathbb{R}$ sont toujours homéomorphes.
2. Trouver un homéomorphisme de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$; de $]-1,1[$ sur $]a,b[$.
3. Montrer que si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et c un point n'appartenant pas à I, les ensembles I et $I \cup \{c\}$ ne sont pas homéomorphes bien qu'en bijection.

[006116]

Exercice 6644

Soit f une injection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que f est strictement monotone.
2. Montrer que l'image par f d'un intervalle ouvert est encore un intervalle ouvert ; en déduire que f est ouverte et donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

[006117]

Exercice 6645

Soit f une application de X dans Y séparé. Montrer que si f est continue, son graphe G est fermé dans $X \times Y$, et l'application $x \to (x, f(x))$ est un homéomorphisme de X sur le graphe G de f.
Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse en général (mais vraie si Y est compact). [006118]

Exercice 6646

Montrer que le carré unité fermé et le disque fermé dans $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes. [006119]

Exercice 6647

Montrer que la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ tout entier, et que deux boules ouvertes sont homéomorphes entre elles. [006120]

Exercice 6648

On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$, et h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$: $t \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

1. Montrer que le cercle privé d'un point, $\mathbb{S}^1 \backslash \{a\}$, est homéomorphe à l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que h est une bijection continue de $[0,1[$ sur $\mathbb{S}^1$, mais n'est pas un homéomorphisme.

3. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1\backslash\{a\}$, cette fois plongé dans $\mathbb{C}$. Montrer que f admet un “logarithme continu", c'est-à-dire qu'il existe g continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f = e^{ig}$.

[006121]

Exercice 6649

Soit F l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}^2$ qui à x associe $(\exp(2i\pi x), \exp(2i\pi x\sqrt{2}))$ dont l'image est la courbe γ.

1. Montrer que F est continue injective.
2. Montrer que l'adhérence de γ dans $\mathbb{C}^2$ est $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
3. Montrer que F^{-1} n'est continue en aucun point de γ.

[006122]

Exercice 6650 Projection stéréographique

Soit $S^{n-1} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ \|x\|^2 = \sum_1^n x_i^2 = 1\}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, p son pôle nord i.e. le point $p = (0, \cdots, 0, 1)$, et $A = S^{n-1}\backslash\{p\}$.

1. Montrer que le “plan" de l'équateur E est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.
2. A tout point x de A on associe $h(x)$ le point d'intersection de la droite issue de p passant par ce point, avec le plan E. Expliciter h, puis h^{-1} et montrer ainsi que la sphère est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.
   (On établira $h(x) = p + \frac{x-p}{1-x_n}$ et $h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+\|y\|^2} + p\ \frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2}$).
3. En déduire un homéomorphisme de $\mathbb{S}^1$ sur $\overline{\mathbb{R}}$.

[006123]

Exercice 6651

1. Montrer que si deux fonctions continues sur un espace topologique X coïncident sur un ensemble dense dans X, elles sont égales.
2. Soit f une fonction réelle définie continue sur $[-1,1]$. Montrer que si pour tout n, $\int_{-1}^1 f(x)\ x^n\ dx$ est nulle, alors f est nulle.
   (*Indication :* Considérer l'application $g \to \int_{-1}^1 f(x)\ g(x)\ dx$.)

[006131]

Exercice 6652

Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, et f une application continue de F dans $\mathbb{R}$. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Peut-on remplacer “fermé" par “ouvert" ? [006132]

Exercice 6653

Soit $n \to r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, et f la fonction définie sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ par

$$f(x) = \sum_{r_n < x} 2^{-n}.$$

Montrer que f est continue, mais qu'elle ne peut être prolongée en aucune fonction continue sur $[0,1]$. [006133]

Exercice 6654

Soit (X,d) un espace métrique ; on rappelle tout d'abord les propriétés de la fonction $d_A : x \to d(x,A)$ où A est une partie de X :

1. d_A est 1-lipschitzienne, et $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$. On en déduit que tout fermé est un G_δ et que tout ouvert est un F_σ.

2. Montrer qu'un espace métrique possède une propriété forte de séparation, à savoir : deux fermés disjoints F_1 et F_2 peuvent être séparés par deux ouverts disjoints, en considérant $\{x/d(x,F_1) > d(x,F_2)\}$.
3. Montrer que la propriété précédente est équivalente à l'existence d'une fonction continue f valant 0 sur F_1 et 1 sur F_2.
4. Soit F_1, F_2,...,F_n, n fermés disjoints dans X, et c_1, c_2,...c_n, n nombres réels. Montrer que la fonction f valant c_i sur F_i peut se prolonger en une fonction continue à X tout entier.

[006134]

Exercice 6655

Soit (X,d) un espace métrique, et Y un sous-espace non vide de X. On va montrer que toute fonction $f : Y \to \mathbb{R}$, k-lipschitzienne, admet un prolongement $g : X \to \mathbb{R}$ qui est aussi k-lipschitzien. Soit donc f ainsi ; pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, on pose

$$f_y(x) = f(y) + kd(x,y).$$

1. Montrer que pour x fixé, l'ensemble $\{f_y(x)\}$ lorsque y parcourt Y est minoré. On pose $g(x) = \inf_{y\in Y}\{f_y(x)\}$.
2. Montrer que l'application g ainsi définie sur X, réalise un prolongement k-lipschitzien de f.
3. Donner une condition suffisante pour que ce prolongement soit unique.

[006135]

Exercice 6656

1. Montrer qu'une fonction de (X,d) dans (Y,δ) n'est pas uniformément continue, si et seulement si on peut trouver $\varepsilon > 0$ et deux suites de points de X, (x_n) et (y_n) vérifiant
(i) $d(x_n,y_n)$ tend vers 0.
(ii) $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$.
2. Parmi les fonctions de variable réelle suivantes, lesquelles sont uniformément continues : $\sin(x^2)$, $x\sin x$, $\sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$?

[006241]

Exercice 6657

Soit $E = C_b(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; pour $f \in E$, on note f_a la translatée de f par a, ie la fonction $x \to f(x-a)$, et O_f l'ensemble des translatées de f. Soit f une fonction continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que O_f est compact et connexe (considérer l'application $a \to f_a$).

[006242]

Exercice 6658

Soit (f_n) une suite d'applications croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers une fonction f continue. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$. *Indication :* $\varepsilon > 0$ *étant fixé*, montrer qu'il existe $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1$ tels que $f(x_{j+1}) - f(x_j) \leqslant \varepsilon,\ 1 \leqslant j \leqslant k-1$ et établir $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \sup_j |f_n(x_j) - f(x_j)| + \varepsilon$. [006243]

Exercice 6659

Parmi les métriques suivantes définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont uniformément équivalentes à la métrique usuelle ?

1. $|x^3 - y^3|$
2. $|\arctan x - \arctan y|$
3. $\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

[006244]

Exercice 6660

Soit d_1 et d_2 deux distances sur un espace X. On considère les quatre assertions suivantes :
(i) Les métriques sont topologiquement équivalentes.
(ii) Les métriques sont uniformément équivalentes.
(iii) Les métriques sont Lipschitz-équivalentes (il existe A et B constantes telles que $A\,d_1 \leqslant d_2 \leqslant B\,d_1$).
(iv) (X,d_1) et (X,d_2) sont simultanément complets.
Etablir les implications entre ces propriétés et donner des contre-exemples lorsque les implications n'ont pas lieu. [006245]

Exercice 6661

Soit d_1 et d_2 deux distances sur un espace X. Montrer qu'elles sont uniformément équivalentes si et seulement si (X,d_1) et (X,d_2) ont les mêmes applications réelles uniformément continues.
Indication : Raisonner par contraposition et considérer pour (x_n) et (y_n) vérifiant $\lim d_1(x_n,y_n) = 0$ et $d_2(x_n,y_n) \geqslant \varepsilon$, $A = \overline{\{x_1,x_2,...\}}$, $B = \overline{\{y_1,y_2,...\}}$ dans (X,d_2), et

$$f(x) = \frac{d_2(x,A)}{d_2(x,A)+d_2(x,B)}$$

[006246]

Exercice 6662

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et soit g une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$. [006247]

Exercice 6663

Soit X un espace métrique.

1. Montrer que si X n'est pas complet, il existe une suite de Cauchy (a_n), non convergente, et telle que $a_p \neq a_q$ pour $p \neq q$.
2. Soit (b_n) une suite de Cauchy non convergente ; montrer que l'ensemble $B = \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est fermé dans X.
3. Déduire des questions précédentes que si X n'est pas complet, on peut trouver une fonction continue $f : X \to [0,1]$ qui n'est pas uniformément continue.
   Indication : Si (a_n) est définie par 1., construire $f : X \to [0,1]$ telle que $f(a_{2n}) = 0$ et $f(a_{2n+1}) = 1$.

[006248]

Exercice 6664

Soit f une application bijective d'espaces métriques $f : X \to Y$ uniformément continue et d'inverse continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi. [006249]

Exercice 6665

Soit (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques ; soit f une application surjective de X sur Y telle que $\delta(f(x),f(x')) = d(x,x')$ pour tous x,x' dans X. Vérifier que f est un homéomorphisme uniformément continu ainsi que f^{-1}. Donner des exemples sur $\mathbb{R}^n$ et décrire les isométries de $\mathbb{R}$. [006250]

Exercice 6666

On considère l^1 et l^2 les espaces de suites réelles absolument et de carré sommables, et l'application F (non linéaire) de l^1 dans l^2 définie par $F(a) = b$ si $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ avec $b_n = \operatorname{sign}(a_n)\sqrt{|a_n|}$. Vérifier que F est un homéomorphisme de l^1 sur l^2, uniformément continu mais d'inverse non uniformément continu. [006251]

Exercice 6667

1. (D'abord un cas particulier) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les objets suivants : le demi-espace $D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 1 \}$, le plan $P = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$, la sphère unité $S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-1 = 0 \}$, et le pole nord $N = (0,0,1)$.

   (a) On définit une application $p : D \to P$ par la procédure suivante : pour un point $A \in D$, la droite dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par A et N coupe le plan P en $p(A)$. Trouver l'expression explicite de l'application p et en déduire qu'elle est continue.

   (b) On définit une application $i : P \to S^2$ par la procédure suivante : pour $B \in P$, la droite dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par B et N coupe la sphère unité S^2 en $i(B)$. Trouver l'expression explicite de l'application i et en déduire qu'elle est continue.

   (c) En utilisant les applications p et i, montrer que P est homéomorphe à $S^2 \setminus \{N\}$.

   (d) Montrer que S^2 est compacte.

2. (Le cas général) Soit X un espace topologique Hausdorff et ∞ un élément qui n'appartient pas à X. On définit $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ et on dit qu'un sous-ensemble $U \subset \widehat{X}$ est ouvert si et seulement si : ou bien $\infty \notin U$ et U ouvert dans X, ou bien $\infty \in U$ et $X \setminus U$ est quasi compact dans X.

   (a) Montrer que si U est un ouvert de $\widehat{X}$ contenant ∞, alors $X \setminus U$ est fermé dans X.

   (b) Montrer que les ouverts dans $\widehat{X}$ forment bien une topologie.

   (c) Montrer que $\widehat{X}$ avec la topologie décrite ci-dessus est quasi compact.

   (d) En considérant $X \subset \widehat{X}$, on donne X la topologie induite par $\widehat{X}$. Montrer que cette topologie coïncide avec la topologie de départ de X.

[006775]

Exercice 6668

Soit X un espace topologique et Y un espace topologique séparé. Soit $f,g : X \to Y$ deux applications continues.

1. Démontrer que $U = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ est un ouvert de X.
2. Soit $D \subset X$ une partie dense. Démontrer que si $f|_D = g|_D$, alors $f = g$.

[006816]

305 423.00 Application linéaire bornée

Exercice 6669

Soient E_1, E_2 et F des espaces normés sur $\mathbb{R}$ et soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Montrer que B est continue si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\| \quad \text{pour tout } x = (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2 \,.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002361]

Exercice 6670

Soient E et F deux espaces normés et $L : E \to F$ une application linéaire vérifiant : $(L(x_n))_n$ *est bornée dans* F *pour toute suite* $(x_n)_n$ *de* E *tendant vers* $0 \in E$. Montrer que L est continue.

Indication ▼ Correction ▼ [002362]

Exercice 6671

Soient E et F deux espaces normés réels et $f : E \to F$ une application bornée sur la boule unité de E et vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in E \ .$$

Montrer que f est linéaire continue.

Indication ▼ Correction ▼ [002363]

Exercice 6672

Calculer la norme des opérateurs suivants :

— Le shift sur l^∞ défini par $S(x)_{n+1} = x_n$, $S(x)_0 = 0$.

— $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.

Calculer la norme des formes linéaires suivantes :

— $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ où $g \in X$ est une fonction qui ne s'annule qu'en $x = 1/2$.

— $X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X.

— $X = l^1$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans l^∞.

— X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \to \mathbb{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Indication ▼ Correction ▼ [002364]

Exercice 6673

Soit $X = \mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes. Pour $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$ on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$, $U(P)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} a_k x^k$ et $V(P)(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^k$.

1. Montrer que $\|.\|$ définit une norme et que U et V définissent des applications linéaires de X dans X.
2. Examiner si U et V sont continues ?

Indication ▼ Correction ▼ [002365]

Exercice 6674

Soit l^∞ l'espace des suites réelles muni avec la norme uniforme, i.e. $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. On considére l'application $A : l^\infty \to l^\infty$ définie par

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots) \ .$$

Montrer que :

1. A est injective et continue avec $\|A\| = 1$. Par contre, A n'est pas surjective.
2. A admet un inverse à gauche mais qu'il n'est pas continu.

Correction ▼ [002366]

Exercice 6675

Soit X un espace normé, $L : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle et $H = L^{-1}(\{0\})$ son noyau.

1. Montrer que, si L est continue, alors H est un sous-espace fermé dans X. Établir la relation
$$\mathrm{dist}(a, H) = \frac{|L(a)|}{\|L\|} \quad \text{pour tout } a \in X \ .$$
2. Réciproquement, supposons que le noyau H est un fermé. Démontrer alors que $\mathrm{dist}(a,H) > 0$ dès que $a \in X \setminus H$ et en déduire que L est continue de norme au plus $|L(a)|/\mathrm{dist}(a,H)$.
3. Peut-on généraliser ceci a des applications linéaires entre espaces normés ?

Indication ▼ Correction ▼ [002367]

Exercice 6676

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ avec la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Montrer que la forme linéaire $f \in X \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ?

Correction ▼ [002368]

Exercice 6677

Soit $X = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})\ ;\ (1+x^2)|f(x)| \text{ soit bornée}\}$. On pose $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$. Vérifier que N est une norme, puis montrer que la forme linéaire suivante L est continue et calculer sa norme :

$$L : X \to \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\,.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002369]

Exercice 6678

On désigne par E l'espace $C([-1,1])$ muni de la norme uniforme et par T la forme linéaire définie par

$$Tf = \int_{-1}^{1} \sin(\pi t)\ f(t)\ dt$$

pour $f \in E$. Vérifier que T est continue et calculer la norme de T. [006204]

Exercice 6679

Soit $E = C([0,1])$, $\mu(x) = \int_0^1 x(t)\ dt$, $\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x(\frac{k}{n})$.

1. Calculer $\|\mu\|$ et $\|\mu_n\|$.
2. Montrer que $\mu_n(x)$ converge vers $\mu(x)$ pour toute x dans E, mais que $\|\mu - \mu_n\| = 2$.

[006205]

Exercice 6680

On désigne par E l'espace $C([0,1])$ muni de la norme uniforme et l'opérateur A défini par

$$Af(x) = \int_0^x t f(t)\ dt + x\int_x^1 f(t)\ dt$$

pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$.

1. Vérifier que A est continu et calculer sa norme opérateur.
2. L'équation $Af = f$ a-t-elle dans E des solutions f non nulles ?

[006206]

Exercice 6681

Soit K un compact convexe d'un evn E. Soit u une application linéaire continue de E dans E telle que $u(K) \subset K$. On va montrer que u a un point fixe dans K.

1. On peut supposer que $0 \notin K$. Pour chaque $n \geqslant 1$, on désigne par S_n l'application définie sur E par $S_n(x) = \frac{1}{n}(x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x))$. Montrer que $S_n(K) \subset K$.
2. Montrer que pour tous entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ en nombre fini,
$S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}(K) \subset S_{n_1}(K) \cap S_{n_2}(K) \cap \cdots \cap S_{n_k}(K)$.
En déduire que $A = \cap_{n\geqslant 1} S_n(K)$ est non vide.
3. Montrer que tout $x \in A$ est point fixe de u.

Correction ▼ [006207]

Exercice 6682

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = \sup\{|\langle x,y\rangle| \ ; \ ||y|| \leqslant 1\}$.
2. Montrer que l'espace des formes linéaires $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ (plus généralement $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ où $\dim E$ finie) est isométriquement isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (ou E).

[006208]

Exercice 6683

Sur $M_n(\mathbb{R})$ on note $|A| = \sup_{||x||\leqslant 1} ||Ax||$ la norme opérateur de la matrice A, où $||x||$ désigne la morme euclidienne de x. Montrer que

$$|A| = \sup_{||x||\leqslant 1, ||y||\leqslant 1} |\langle Ax,y\rangle|$$

et en déduire que $|A| \leqslant \left(\sum |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. [006209]

Exercice 6684

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne et f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $|| \int_{[0,1]} f(t)\ dt|| \leqslant \int_{[0,1]} ||f(t)||\ dt$. [006210]

---

306 424.00 Espace vectoriel normé

Exercice 6685 Normes sur $\mathbb{R}^2$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x,y) = \mathrm{Max}(\sqrt{x^2+y^2}, |x-y|)$ et $N_2(x,y) = \sqrt{x^2/9+y^2/4}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.
2. Montrer que $N_2 \leqslant \|.\|_\infty \leqslant \|.\|_2 \leqslant N_1 \leqslant \|.\|_1 \leqslant 4N_2$.
3. Déterminer le plus petit réel $k > 0$, tel que $\|.\|_1 \leqslant kN_2$. (utiliser Cauchy-Schwarz)

[001865]

Exercice 6686

On considère les trois normes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| \ \ , \ \ \|X\|_2 = (x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}} \ \ , \ \ \|X\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\}.$$

Représenter graphiquement les boules unités de chacune d'entre elles. Peut-on "comparer" ces trois normes ?
Ecriver les définitions des distances d_1,d_2 et d_∞ associées à chacune d'entre elles. [001869]

Exercice 6687

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies et continues sur [-1,1].

1. Montrer que les trois applications suivantes sont des normes sur E :
$$f \longrightarrow \|f\|_1 = \int_{-1}^{+1} |f(x)|dx, \quad f \longrightarrow \|f\|_2 = (\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$f \longrightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,+1]} \{|f(x)|\}$$
2. On considère la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ de fonctions définies par $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1,-\frac{1}{n}] \\ nx & \text{si } x \in]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{n},1] \end{cases}$

La suite f_n est-elle de Cauchy dans $(E,\|.\|_1)$, $(E,\|.\|_2)$ et dans $(E,\|.\|_\infty)$? Conclusions ?

[001870]

Exercice 6688

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0)=0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes :

$$N_1(f)=\|f\|_\infty \text{ et } N_2(f)=\|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $N_1(f)\leqslant N_2(f)$. En déduire que l'application identique de (E,N_2) vers (E,N_1) est continue.
2. A l'aide de la fonction $f_n(x)=\frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de (E,N_1) vers (E,N_2) n'est pas continue.

[001871]

Exercice 6689

Lorsqu'un espace vectoriel E est en outre muni d'une multiplication, l'application $N:\ E\to\mathbb{R}$ est dite norme multiplicative si :

— N est une norme,

— pour tous A et B dans E, $N(A.B)\leqslant N(A).N(B)$.

Soit $E=M_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes. $A\in E$ se note $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

1. Montrer que $N_\infty(A)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\}$ définit une norme multiplicative sur E.
2. Montrer que $N_\infty(A)=\max\limits_{\{X\in\mathbb{R}^n,\ \|X\|_\infty=1\}}\{\ \|A.X\|_\infty\}$.
3. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\ 1\leqslant i\leqslant n,\ |a_{i,i}|>\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{i,j}|$ et D la matrice diagonale formée avec les éléments diagonaux de A. Soit aussi F un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère la suite des $X^{(p)}\in\mathbb{R}^n$ définie pour $p\geqslant 0$ par :
$$\begin{cases} X^{(0)} & =X_0\in\mathbb{R}^n \\ X^{(p+1)} & =(I-D^{-1}A)X^{(p)}+D^{-1}F \quad \text{pour p}\geqslant 0\end{cases}$$
Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

[001872]

Exercice 6690 partiel 1999

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, x un élément de E et A un compact de E.

1. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y\|$ est continue.
2. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y-x\|$ est continue.
3. Montrer que la distance de x à A est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $a\in A$ tel que
$$\inf_{y\in A}\|y-x\|=\|a-x\|.$$

[001873]

Exercice 6691

Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit L une application linéaire de E dans F.

1. Montrer que L est continue en 0 si et seulement si elle est continue en tout point de E.
2. On suppose qu'il existe une constante $K>0$ telle que
$$\|L(x)\|_F\leqslant K\|x\|_E \qquad \forall x\in E.$$
Montrer que L est continue.

3. Dans la suite, on suppose que L est continue et on pose

$$K = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F.$$

   (a) Supposons que $K = +\infty$. Montrer qu'alors il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n et telle que $\|L(x_n)\|_F$ tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe une suite y_n tendant vers 0 et telle que $\|L(y_n)\|_F = 1$.

   (b) En déduire que $K \in \mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in E$ on a

$$\|L(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E.$$

[001874]

Exercice 6692

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

On considère l'application $L : E \to \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(1)$.

1. Montrer que L est une application linéaire.
2. En considérant les fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$, montrer que L n'est pas continue.

[001875]

Exercice 6693

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in|||}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente. [001876]

Exercice 6694

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit une norme sur E en posant

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)|\,dt.$$

On va montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela, on définit une suite $(f_n)_{n\in|||^*}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer que

$$\|f_n - f_p\| \leqslant \sup(\frac{2}{n}, \frac{2}{p})$$

   et en déduire que (f_n) est de Cauchy.
3. Supposons qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Montrer qu'alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|\,dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)|\,dt = 0$$

   pour tout $0 < \alpha < 1$.

4. Montrer qu'on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{-\alpha}|f_n(t)+1|\,dt=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{1}|f_n(t)-1|\,dt=0$$
pour tout $0<\alpha<1$. En déduire que
$$\begin{array}{ll} f(t)=-1 & \forall t\in[-1,0[\\ f(t)=1 & \forall t\in]0,1]. \end{array}$$
Conclure.

[001877]

Exercice 6695

Soit $E=\mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application continue g de E dans E est dite *contractante* s'il existe $K\in]0,1[$ tel que
$$\|g(x)-g(y)\|\leqslant K\|x-y\| \qquad \forall x,y\in E.$$
On rappelle aussi que toute application contractante admet un unique point fixe.
Soit f une application continue de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^n.

1. Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.
2. Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même pour $f(x)$.
3. En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.

[001878]

Exercice 6696

Soit $E=\mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0,A)$, par la formule
$$d(x_0,A)=\inf_{x\in A}\|x-x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0\in E$ il existe $y\in A$ tel que $d(x_0,A)=\|y-x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0,B)\geqslant d(x_0,A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0,A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta>0$ telle que
$$\|a-b\|\geqslant\delta \qquad \forall(a,b)\in A\times B.$$
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

[001879]

Exercice 6697

$N:(x,y)\longmapsto|5x+3y|$ est-elle une norme de $\mathbb{R}^2$? [001880]

Exercice 6698

1. Montrer que $\forall p\geqslant 1$, l'application $\left(\begin{array}{cccc} N_p: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\sum_{k=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \end{array}\right)$ est une norme (on utilisera la convexité de x^p).

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, montrer que $\lim_{p\to+\infty} N_p(x) = \max(x_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$, et que cela définit une norme, appelée **norme infinie**, et notée N_∞.
3. Établir les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \sqrt{n}N_2(x) \leqslant nN_\infty(x).$$

   Que peut-on en déduire ?
4. Dessiner les boules unités des normes 1,2, et ∞ dans $\mathbb{R}^2$.

[001881]

Exercice 6699

Soit $\begin{pmatrix} N: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{k=1}^n |\sum_{i=1}^k x_i| \end{pmatrix}$. Montrer que N est une norme. [001882]

Exercice 6700

A est dit *convexe* s'il contient tout segment reliant deux quelconques de ses points :

$$\forall (x,y) \in A^2,\ [x,y] = \{x+t(y-x), t \in [0,1]\} \subset A.$$

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N. Montrer que toute boule fermée (ou ouverte) est convexe et symétrique par rapport à son centre. [001883]

Exercice 6701

Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Montrer :

$$\forall (x,y) \in (E\setminus\{0\})^2,\ N(x-y) \geqslant \frac{1}{2}\sup(N(x),N(y))\cdot N\left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)}\right).$$

[001884]

Exercice 6702

Soit E un espace vectoriel normé, et $(a,a') \in E^2$, $(r,r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer :

1. $B(a,r) = \{a\} + B(0,r)$
2. $B(a,r) = B(a',r') \Leftrightarrow a = a'$ et $r = r'$
3. $B(a+a', r+r') = B(a,r) + B(a',r')$
4. $B(a,r) \cap B(a',r') \neq \emptyset \Leftrightarrow \|a'-a\| < r+r'$.

[001885]

Exercice 6703

Soit (E,N) une espace vectoriel. Montrer les équivalences :

$$\begin{array}{rcl} A \subset E \text{ est borné} & \Leftrightarrow & \exists (a,r) \in E\times\mathbb{R}^+ : A \subset B(a,r) \\ & \Leftrightarrow & \exists R \geqslant 0 : A \subset B(0,R) \\ & \Leftrightarrow & \exists R \geqslant 0 : A \subset B_f(0,R) \\ & \Leftrightarrow & A \text{ est inclus dans une boule de } E. \end{array}$$

[001886]

Exercice 6704 Topologie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$

1. Quelles sont toutes les normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$?
   On se place désormais dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

2. Quelles sont les boules ouvertes ? fermées ?
3. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$:
   (a) soit $(I_a)_{a\in A}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints. Montrer que A est au plus dénombrable.
   (b) soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, et $a \in O$. On pose $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x > a\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x < a\}$. Etudier l'existence de $\inf A$ et $\sup B$.
   (c) en déduire que :
   — tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts
   — tout fermé de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles fermés.

[001887]

Exercice 6705

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0)=0$.

1. On pose pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty$ et $N'(f) = \|f'\|_\infty$. Montrer que N et N' sont des normes.
2. Montrer que N et N' ne sont pas équivalentes.

[001888]

Exercice 6706

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0)=0$.

1. On pose pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E
2. Montrer que, si $f \in E$ alors, pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t(f(t)+f'(t))dt$.
3. On pose, pour tout $f \in E$, $N'(f) = \|f+f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme sur E, équivalente à N.

[001889]

Exercice 6707

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E et x un élément de E. Comparer les deux assertions :

i) Pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap B(x,\varepsilon)$ est infini.

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément y distinct de x dans $A \cap B(x,\varepsilon)$.

[001890]

Exercice 6708

Soit A l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. On munit $C[0,1]$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que A est fermé et calculer son intérieur.
2. On munit $C[0,1]$ de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$. Montrer que l'intérieur de A est vide et que A est fermé.

[001891]

Exercice 6709

Soit $(E, \|\quad\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\mu(E) = \sup_{x,y\in E-(0,0)} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}.$$

1. Montrer que $1 \leqslant \mu(E) \leqslant 2$.
2. Calculer $\mu(\mathbb{R}^2)$ lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne puis de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$.

[001892]

Exercice 6710

Soit $\|\quad\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{i,j\in 1,\cdots n} \in M_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n;\|x\|=1} \|Ax\|.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\quad\|_1$. Montrer que $\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n}(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|)$.

[001893]

Exercice 6711

On munit $C[0,1]$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

1. Soit $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f\in C[0,1];\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)|$. Montrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini.
2. Calculer $N(\psi)$ lorsque $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
3. Posons, pour toute fonction $f \in C[0,1]$: $\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$. Montrer que $N(\varphi) = 1$.

[001895]

Exercice 6712

On munit E, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles telles que $f(0) = 0$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f\in E;\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)|$. Montrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini. Montrer que $\varphi \mapsto N(\varphi)$ est une norme sur l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E.
2. Calculer $\mu = N(\psi)$ lorsque ψ est définie en posant, pour toute fonction $f \in E$: $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
3. Peut-on trouver une fonction $f \in E$ telle que $|\psi(f)| = \mu$ et $\|f\|_\infty = 1$?

[001896]

Exercice 6713

On munit $E = C^1[0,1]$ et $F = C[0,1]$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

1. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f\in E;\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)|$. Montrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini.
2. Montrer que l'application $f \mapsto f'$ n'est pas continue.

[001897]

Exercice 6714

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$.

1. Soient $x, y \in E$ et I le segment $[x,y]$. Calculer $S \cap I$.

2. Les normes $\| \quad \|_1$ et $\| \quad \|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sont-elles euclidiennes ?

[001898]

Exercice 6715

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer quil existe une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inversibles convergeant vers A (en un sens que l'on précisera).
2. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Calculer les valeurs propres de N. Montrer que $\det(I+N) = 1$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AN = NA$. Calculer $\det(A+N)$.

[001899]

Exercice 6716

I Préliminaires

1. Soit $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{P}$ est de dimension infinie.
2. Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(X) = \sup \bar{X}$.

II

On note $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions *lipschitziennes* de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire telles qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x,y \in [0,1]$, $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$. On note $\mathbb{C}^1$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, c'est à dire dérivables à dérivée continue.

1. Montrer que $\mathscr{L}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, que $\mathscr{L}$ contient $\mathbb{C}^1$ et est de dimension infinie.
2. On pose, pour tout $f \in \mathscr{L}$:

$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

$$N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in]0,1]} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x|}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$$\lambda(f) = \|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

   (a) Montrer que N_1, N_2, $\| \ \|_\infty$ et λ sont des normes sur $\mathscr{L}$.
   (b) En considérant la suite $f_n(x) = \sin(2\pi nx)$, montrer que N_2 n'est pas équivalente à $\| \ \|_\infty$.
   (c) Montrer que N_1 n'est équivalente ni à $\| \ \|_\infty$, ni à N_2.
   (d) Construire une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{L}$ qui converge vers 0 pour $\| \ \|_\infty$ mais pas pour N_2. En déduire (de nouveau) que N_2 n'est pas équivalente à $\| \ \|_\infty$.
   (e) Montrer que λ et N_1 sont équivalentes.
3. On pose, pour tout $f \in \mathbb{C}^1$: $\nu_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $\nu(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
   (a) Montrer que ν_1 et ν sont des normes sur $\mathbb{C}^1$.
   (b) Montrer que $\nu_1(f) = N_1(f)$, pour tout $f \in \mathbb{C}^1$.
   (c) Les normes ν et ν_1 sont-elles équivalentes ?

4. Soit $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite de *Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, si $m, n \geqslant N$ alors $\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon$. On dit que $(E, \| \, \|)$ est *complet* si toute suite de Cauchy y est convergente. On rappelle que $\mathbb{R}$ muni de la norme $x \mapsto |x|$ est complet.
   (a) Soit C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(C^0, \| \, \|_\infty)$ est complet.
   (b) L'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^1, \nu)$ est-il complet ? Qu'en est-il de $(\mathbb{C}^1, \nu_1)$?
   (c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathscr{L}, \lambda)$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f.
   (d) Démontrer que pour n assez grand $f - f_n$ est lipschitzienne.
   (e) En déduire que $(\mathscr{L}, \lambda)$ est complet.

III

On munit $\mathbb{C}^1$ d'une norme N et et C^0 de la norme $\| \, \|_\infty$. On note d l'application $f \mapsto f'$ de $\mathbb{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{C}^0$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{C}^1 \to C^0$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup\limits_{f ; N(f) \leqslant 1} \|\varphi(f)\|_\infty$. Démontrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini. Vérifier que N est une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathbb{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{C}^0$.
2. Montrer que l'application d n'est pas continue si $N = \| \, \|_\infty$.
3. On munit $\mathbb{C}^1$ de la norme ν. Montrer que d est continue et calculer $N(d)$.

Correction ▼ [001900]

Exercice 6717

1. Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et K sa boule unité fermée. Montrer que
   (i) K est symétrique,
   (ii) K est convexe, fermé, borné,
   (iii) 0 est un point intérieur à K.
2. Réciproquement, montrer que si K possède les trois propriétés ci-dessus, il existe une norme dont K soit la boule unité fermée, en considérant
   $p(x) = \inf\{a > 0 \, ; \, \frac{x}{a} \in K\}$.

Correction ▼ [006055]

Exercice 6718

Montrer que dans un espace normé, la boule unité est convexe.
Réciproquement, supposons que l'espace vectoriel soit muni d'une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, et telle que $\{y / N(y) \leqslant 1\}$ soit convexe. Montrer que

$$N(x+y) \leqslant 2 \sup(N(x), N(y)), \quad x, y \in E.$$

[006056]

Exercice 6719

On considère dans $\mathbb{R}^2$, les deux applications

$$n((x,y)) = \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|,$$

$$m((x,y)) = \int_0^1 |x+ty| \, dt.$$

1. Montrer que n et m définissent deux normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner les boules unités fermées associées, et trouver des constantes effectives A,B, telles que $A\,n((x,y)) \leqslant m((x,y)) \leqslant B\,n((x,y))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[006057]

Exercice 6720

1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les 4 boules euclidiennes fermées de rayon 1 centrées aux points $(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$; A leur réunion contient 0 comme point intérieur. Trouver le rayon de la plus grande boule ouverte centrée en 0 et contenue dans A.
2. On se pose plus généralement le problème dans $\mathbb{R}^n$: A désigne l'union $\cup_j \overline{B}(e_j,1) \cup_j \overline{B}(-e_j,1)$ où (e_j) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $x \in A$ si et seulement si $\|x\|_2^2 \leqslant 2\|x\|_\infty$. En déduire que le rayon de la plus grande boule ouverte centrée en 0 et contenue dans A est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

[006058]

Exercice 6721

Soit N un entier $\geqslant 1$, et E, l'espace des polynômes trigonométriques p de degré $\leqslant N$, $p(t) = \sum_{-N}^{N} c_k \exp(ikt)$. On pose, pour $p \in E$, $\|p\|_\infty = \sup_{t\in[0,2\pi]} |p(t)|$, et $\|p\| = \sum_{-N}^{N} |c_k|$. Montrer, à l'aide de l'identité de Parseval, que ces deux normes vérifient

$$\|p\|_\infty \leqslant \|p\| \leqslant \sqrt{2N+1}\|p\|_\infty.$$

[006059]

Exercice 6722

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Vérifier que l'application $(\lambda,x) \to \lambda x$ est continue ; que $(x,y) \to x+y$ est lipschitzienne ainsi que l'application $x \to \|x\|$; et que les translations et les homothéties sont des homéomorphismes de E.
2. Montrer que la boule unité ouverte est homéomorphe à E tout entier (considérer l'application $x \to \frac{x}{1-||x||}$).
3. Montrer que deux boules ouvertes de $(E,||.||)$ sont homéomorphes entre elles.
4. Montrer que le seul sous-espace ouvert de E est E lui-même, et que tout sous-espace propre est d'intérieur vide dans E.
5. Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est encore un sous-espace vectoriel ; en déduire qu'un hyperplan de E est fermé ou partout dense dans E.

[006088]

Exercice 6723 extrait du partiel de décembre 98

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ de boule unité fermée $\overline{B}$ et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On va montrer que si $F \neq E$,

$$\sup_{x\in\overline{B}} d(x,F) = 1.$$

1. Etablir les propriétés pour $x,x' \in E, y \in F, \lambda \in \mathbb{C}$:
   (i) $d(x,F) \leqslant ||x||$.
   (ii) $d(\lambda x,F) = |\lambda| d(x,F)$.
   (iii) $d(x-y,F) = d(x,F)$
   (iv) $d(x+x',F) \leqslant d(x,F)+d(x',F)$.
2. Soit $x \in \overline{B}$ tel que $\alpha = d(x,F) > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in F$ tel que :

$$\alpha \leqslant ||x-y|| < \alpha(1+\varepsilon).$$

3. Montrer qu'il existe $x' \in \overline{B}$ tel que : $\frac{1}{1+\varepsilon} = d(x', F) < 1$.
4. En déduire le résultat.

[006089]

---

307 425.00 Espace métrique complet, espace de Banach

Exercice 6724

L'espace $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes ?

1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x,y) = \log(1 + |x-y|)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002395]

Exercice 6725

On considère pour $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$, où f est une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que cette distance est complète si et seulement si f est d'image fermée dans $\mathbb{R}^2$.

Indication ▼ Correction ▼ [002396]

Exercice 6726

On considère l'espace des fonctions continues $X = \mathscr{C}([a,b])$.

1. Soit $\omega \in X$ une fonction qui ne s'annule pas sur $[a,b]$. Posons
$$d_\omega(f,g) = \sup_{t \in [a,b]} |\omega(t)(f(t) - g(t))| .$$
L'espace (X, d_ω) est-il complet ?
2. Montrer que l'espace $(X, \|.\|_1)$ n'est pas complet (où $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$).

Indication ▼ Correction ▼ [002397]

Exercice 6727

Soit $X = \mathscr{C}^1([a,b])$.

1. Est-ce un espace complet si on le muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$?
2. Considérons maintenant, pour $f \in X$, la norme
$$N(f) = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| + \sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\| .$$
L'espace (X, N) est-il complet ?

Indication ▼ Correction ▼ [002398]

Exercice 6728

Soit X l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, et soit
$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad \text{pour } x, y \in X .$$

1. Montrer que X n'est pas complet pour la métrique ρ.
2. Trouver un espace de suites Y tel que (Y, ρ) soit complet et tel que X soit dense dans Y.
3. Que donne l'exercice si on remplace ρ par la norme uniforme ?

Indication ▼ Correction ▼ [002399]

Exercice 6729

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une série $\sum u_k$ est normalement convergente si la série $\sum \|u_k\|$ est convergente. On veut démontrer que E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E ; montrer qu'on peut en extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que la série de terme général $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ soit normalement convergente. En déduire que si toute série normalement convergente est convergente, alors E est complet.
2. Soit $\sum u_k$ une série normalement convergente. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que S_n est une suite de Cauchy. En déduire que si E est complet, alors toute série normalement convergente est convergente.

Indication ▼ Correction ▼ [002400]

Exercice 6730

Soient E,F des espaces normés et $A_n, A \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence entre :

1. $A_n \to A$ dans $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Pour toute partie bornée $M \subset E$, la suite $A_n x$ converge uniformément vers Ax, $x \in M$.

Correction ▼ [002401]

Exercice 6731 Cours

Soit E un espace normé et F un espace de Banach. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace de Banach.

Correction ▼ [002402]

Exercice 6732

Soit δ la métrique sur $\mathbb{R}$ définie par $\delta(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$. Montrer, à l'aide du théorème de prolongement de fonction uniformément continue, que l'identité $i : (\mathbb{R},\delta) \to (\mathbb{R},|.|)$ n'est pas uniformément continue. [002403]

Exercice 6733

1. Pour $n,m \in \mathbb{N}^*$, on pose $d(n,m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}^*$ qui induit la topologie discrète sur $\mathbb{N}^*$; est-elle complète ?
2. Montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace métrique complet pour la distance $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

[006211]

Exercice 6734

Soit E un espace normé. Montrer qu'il est complet si et seulement si la sphère unité $S = \{x / \|x\| = 1\}$ est complète. [006212]

Exercice 6735

1. Pour $x,y \in \mathbb{R}^*$ on pose $d(x,y) = |x-y| + |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.
   Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}^*$ qui induit la topologie usuelle et que $(\mathbb{R}^*, d)$ est complet.
2. Plus généralement soit U un ouvert d'un espace complet (X,d) ; comment peut-on définir une métrique δ sur U, équivalente à la métrique initiale, qui fasse de U un espace complet ?

[006213]

Exercice 6736

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E ; montrer qu'on peut en extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que la série de terme général $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ soit normalement convergente.
2. En déduire que E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

[006214]

Exercice 6737

1. Montrer que l'espace $C([0,1])$ est complet pour la norme uniforme mais pas pour la norme $||.||_1$.
2. Montrer que l'espace S des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, muni de la norme uniforme, n'est pas complet. Trouver un espace métrique complet contenant S comme sous-espace dense.

[006215]

Exercice 6738

1. Soit f un homéomorphisme d'espaces métriques $f : X \to Y$; montrer que X peut être complet sans que Y le soit.
2. On suppose de plus que f est uniformément continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.
3. On considère $E = \{f \in C^1([0,1]) \; ; \; f(0) = 0\}$, muni de la métrique $d(f,g) = \inf(1, \sup|f'(t) - g'(t)|)$. Montrer que E est complet pour cette métrique.

[006216]

Exercice 6739

Soit E un Banach, A,B deux sous-espaces de E tels que $A \cap B = \{0\}$, A étant fermé et B de dimension finie.

1. Pour $b \in B$, on définit $[b] = d(b,A) = \inf_{a\in A} ||a+b||$. Vérifier que $[.]$ est une norme sur B.
2. En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que $||a+b|| \geqslant C||b||$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$.
3. Montrer que $A \oplus B$ est encore un sous-espace fermé de E.

[006217]

Exercice 6740

Soit (X,d) un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy dans X. Vérifier :

1. La suite (x_n) est bornée même si la métrique est non bornée, mais il existe des suites bornées dont aucune sous-suite n'est de Cauchy.
2. Si (x_n) contient une sous-suite convergente, elle est convergente.
3. Soit (ε_k) une suite quelconque de réels > 0 ; il existe une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) telle que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leqslant \varepsilon_k$.
4. Soit (y_n) une suite quelconque de X. Si $\sum_1^\infty d(y_n, y_{n+1}) < \infty$, la suite (y_n) est de Cauchy. Réciproque ?
5. On suppose cette fois la distance d ultramétrique. Dans ce cas (y_n) est de Cauchy si et seulement si $d(y_n, y_{n+1})$ tend vers 0.

[006218]

Exercice 6741

Vérifier que $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace métrique complet pour la distance $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. [006219]

Exercice 6742

Sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, définissons

$$\begin{aligned} d(n,m) &= 0 \;\text{ pour } m = n \\ &= 1 + \frac{1}{n+m} \;\text{ pour } m \neq n \end{aligned}$$

1. Montrer que d est une métrique sur $\mathbb{N}$ pour laquelle il est complet.
2. Construire dans $(\mathbb{N},d)$ une suite de boules fermées non vides emboîtées dont les rayons ne tendent pas vers 0, et d'intersection vide.

[006220]

Exercice 6743

Soit U un ouvert d'un espace complet (X,d) ; on note $F = U^c$ et $f(x,y) = |\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}|$ pour $x,y \in U$.
Montrer que $\delta(x,y) = \max(d(x,y), f(x,y))$ définit une distance sur U équivalente (topologiquement) à d et que (U,δ) est complet. [006221]

Exercice 6744

Soit X un espace métrique et (a_n) une suite de Cauchy dans X.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, la suite de réels $(d(a_n,x))$ a une limite. On note $f(x)$ cette limite ; montrer que l'application $x \to f(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\inf_{x\in X} f(x)$. Quand cette borne inférieure est-elle atteinte ?
3. Déduire de ce qui précède que si X n'est pas complet, il existe une application $\phi : X \to \mathbb{R}$ continue et non bornée.

[006222]

Exercice 6745

On considère pour f et g dans $E = C(\mathbb{R}, C)$,

$$d(f,g) = \sum_n \frac{1}{2^n} \min(1, \sup_{|x|\leqslant n} |f(x) - g(x)|).$$

Vérifier que d est une métrique sur E pour laquelle il est complet.
Montrer que la convergence pour d n'est autre que la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$. [006223]

Exercice 6746

Soit (X,d) un espace métrique et Y une partie de X ; on considère f une application surjective de X sur Y, et on pose pour u et v dans Y

$$D(u,v) = d(f^{-1}(\{u\}), f^{-1}(\{v\})) = \inf_{x\in f^{-1}(\{u\}), y\in f^{-1}(\{v\})} d(x,y).$$

1. Montrer que pour u et v dans Y, $D(u,v) \geqslant 0$; que $D(u,u) = 0$ et $D(u,v) = D(v,u)$; D vérifie-t-elle l'inégalité triangulaire ?
2. On suppose que pour u dans Y, $f^{-1}(\{u\})$ est un fermé de Y, et que pour u et v dans Y

$$d(x, f^{-1}(\{v\})) = d(x', f^{-1}(\{v\}))$$

pour tous x et x' dans $f^{-1}(\{u\})$. Montrer alors que D est une distance.

3. On suppose les conditions de 2. vérifiées. Montrer que Y est complet si X est complet.

[006224]

Exercice 6747

On considère sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$ les normes suivantes :

1. $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f(x)|$
2. $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f'(x)| + |f(0)|$

3. $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f'(x)+f(x)| + |f(0)|$

Lesquelles sont complètes sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$? [006225]

Exercice 6748

Soit $(B, \|.\|)$ un espace de Banach et M, N deux sous-espaces de B tels que $B = M \oplus N$. On met sur B une nouvelle norme $\|z\|' = \|x\| + \|y\|$ si $z = x+y$.

1. Vérifier que $\|.\|'$ est bien une norme sur B et que $(B, \|.\|')$ est complet si et seulement si M et N sont fermés.
2. Montrer que si les projections P_M et P_N sur M et N sont continues, $(B, \|.\|')$ est encore un Banach.

[006226]

Exercice 6749

On considère $E = c$, l'espace des suites réelles convergentes ; montrer que, muni de la norme uniforme, E est complet et décrire son dual topologique. [006227]

Exercice 6750

On considère E l'espace des séries convergentes, et on pose

$$\|\xi\| = \sup_n |\sum_{k=1}^{n} \xi_k|$$

1. Vérifier que ceci définit une norme sur E pour laquelle il est complet.
2. L'espace l^1 des séries absolument convergentes est un sous-espace de E ; montrer que les normes $\|.\|$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes sur l^1 (en considérant une série de terme général $\xi_k = \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.)
3. Montrer que l^1 est dense dans $(E, \|.\|)$.

[006228]

Exercice 6751

Pour tout $k > 0$ on note H_k le sous-espace de $C([0,1])$ constitué des fonctions lipschitziennes de constante k ie des fonctions f vérifiant $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$ pour tous x et y dans $[0,1]$. On pose aussi $H = \bigcup_{k>0} H_k$.

1. Montrer que H contient les fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$, mais que la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dans H.
2. Montrer que pour tout k, H_k est un espace de Banach pour la norme uniforme.
3. Montrer qu'il existe une suite de fonction de H qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\sqrt{x}$. En déduire que H n'est pas complet pour la norme uniforme.
4. Montrer que si on pose
$$\|f\| = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + |f(0)|,$$
on définit ainsi une norme sur l'espace E, pour laquelle l'espace est complet.

[006229]

Exercice 6752

Soit E un espace de Banach, $A \in \mathscr{L}(E)$, et $s,t \in \mathbb{R}$.

1. On rappelle que $e^{tA} = \sum_0^\infty \frac{t^n A^n}{n!} \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\|e^{tA}\| \leqslant e^{|t|\|A\|}$ et que $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.
2. Soit $u_0 \in E$ et u la fonction vectorielle de variable réelle définie par $u(t) = e^{tA}u_0$. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

[006230]

Exercice 6753

Soit E un espace de Banach et F un sous-espace fermé de E.

1. Montrer que $N(\bar{x}) = \inf_{y \in F} \|x+y\| = d(x,F)$ définit une norme sur l'espace vectoriel quotient E/F.
2. Montrer à l'aide du critère sur les séries que E/F muni de N est un espace de Banach.

[006231]

Exercice 6754

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ compact, soit $\mathscr{C}^0(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue } \}$, et $||f||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$. Montrer que $(\mathscr{C}^0(A), || \ ||_\infty)$ est un espace de Banach. [006781]

Exercice 6755

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k, et soit X un champ de vecteurs sur M. On définit $D = \{ m \in M \mid X(m) \neq 0 \}$ et $S = \overline{D} =$ fermeture D. On vous demande de démontrer l'énoncé : “si S est compact, alors X est complet”. Les questions suivantes peuvent vous guider.

1. Pour $x \notin S$ trouver la courbe intégrale maximale $\gamma : J_x \to M$ passant par x.
2. Montrer que si $x \in S$, et si $\gamma : J \to M$ est une courbe intégrale passant par x, alors $\forall\, t \in J \ : \ \gamma(t) \in S$.
3. En utilisant la compacité de S, montrer que X est complet (sur M !).

Nota Bene : S n'est pas un sous-variété d'un $\mathbb{R}^m$; montrer le résultat (du cours !) “si M est compact, alors X est complet” rapporte moins de points. [006784]

Exercice 6756

Soit (X,d) un espace métrique et soit $a : \mathbb{N} \to X$ une suite dans X.

1. Quand est-ce que a est une suite de Cauchy, une suite convergente ?
2. Donner les définitions d'un point d'accumulation de la suite a, et de “(X,d) est complet”.
3. Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
4. Montrer que si a est de Cauchy et si x est un point d'accumulation de a, alors a converge vers x.
5. Montrer que si X est compact, alors X est complet.

[006789]

Exercice 6757

Soit B et C deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$, et soit $E = \{ f : B \to C \mid f \text{ continue}\}$. On définit $d(f,g) = \sup_{x\in B} |f(x) - g(x)|$.

1. Montrer que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est une métrique sur E.
2. Montrer que (E,d) est un espace métrique complet.

[006791]

Exercice 6758

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Le but de cet exercice est de montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente converge.

1. Soit E complet et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E telle que $\sum_{n=0}^\infty \|a_n\|$ converge. Démontrer que la suite $s_N = \sum_{n=0}^N a_n$ est une suite de Cauchy ; en déduire que $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converge.
2. On suppose que toute série absolument convergente converge, c'est-à-dire si $\sum_{n=0}^\infty \|b_n\|$ converge, alors $\sum_{n=0}^\infty b_n$ converge. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Trouver une suite strictement croissante $i \mapsto n_i \in \mathbb{N}$ telle que $\forall i : \|a_{n_{i+1}} - a_{n_i}\| < 2^{-i}$. En déduire que $\sum_{i=0}^\infty (a_{n_{i+1}} - a_{n_i})$ converge. Déduire de ce résultat que E est complet.

308 426.00 Théorème du point fixe

Exercice 6759

Soit $\alpha_n > 0$ tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge. Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application pour laquelle

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \alpha_n d(x,y) \quad \text{pour tout } x,y \in X \text{ et } \; n \in \mathbb{N}\,.$$

Montrer que, sous ces conditions, f possède un unique point fixe $p \in X$, que pour tout point initial $x_0 \in X$, la suite des itérées $(x_n = f^n(x_0))_{n\geqslant 0}$ converge vers p et que la vitesse de convergence d'une telle suite est contrôlée par

$$d(p,x_n) \leqslant \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu \right) d(x_1,x_0)\,.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002404]

Exercice 6760

Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $f : X \to X$ une application telle que l'une de ces itérées f^n est strictement contractante, i.e. il existe $\rho < 1$ tel que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \rho d(x,y) \quad \text{pour tout} \quad x,y \in X\,.$$

Montrer que f possède un unique point fixe. Faire le rapprochement avec l'exercice 6759.

Indication ▼ Correction ▼ [002405]

Exercice 6761

Soit $X = (\mathscr{C}^1([0,1]), N)$ avec $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in X$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\,dt\,.$$

On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in X$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x-x^2)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002406]

Exercice 6762

Soient $y \in \mathscr{C}([a,b])$ et $k \in \mathscr{C}([a,b] \times [a,b])$ des fonctions continues. On se propose de résoudre l'équation (intégrale de Fredholm) suivante :

$$x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt = y(s) \quad \text{pour } s \in [a,b] \tag{14}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}([a,b])$. Pour ce faire on suppose que le "noyau" k satisfait l'hypothèse suivante :

$$\lambda := \max_{a\leqslant s\leqslant b} \int_a^b |k(s,t)|\,dt < 1 \quad \left(\text{ou même} \quad \max_{a\leqslant s,t\leqslant b} |k(s,t)| < \frac{1}{b-a} \right).$$

1. Rappeler que $(\mathscr{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$ est un espace complet.
2. Soit $x \in \mathscr{C}([a,b]) \mapsto Ax \in \mathscr{C}([a,b])$ l'application donnée par

$$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt + y(s)\,.$$

Noter que (14) équivaut à $Ax = x$ et qu'on cherche donc un point fixe de $x \mapsto Ax$. Déduire des hypothèses faites sur k qu'un tel point fixe $x \in \mathscr{C}([a,b])$ existe et que toute suite $A^n x_0$, $x_0 \in \mathscr{C}([a,b])$, converge uniformément vers ce point fixe x.

3. *Dépendance continue de la solution $x = x(y)$.*
Soient $y_1, y_2 \in \mathscr{C}([a,b])$ deux fonctions et $x_1, x_2 \in \mathscr{C}([a,b])$ les deux solutions associées de (14) ou, de façon équivalente, les points fixes des applications associées $x \mapsto A_i x$. Montrer que
$$\|x_1 - x_2\|_\infty = \|A_1 x_1 - A_2 x_2\|_\infty \leqslant \|y_1 - y_2\|_\infty + \lambda \|x_1 - x_2\|_\infty .$$
En déduire que
$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\lambda} \|y_1 - y_2\|_\infty$$
et donc que la solution x de (14) dépend continuement de la fonction y.

Correction ▼ [002407]

Exercice 6763

1. Soit X un espace métrique et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.
2. Application : Soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications continues de X dans X, ayant chacune un point fixe; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.
3. Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de K dans K vérifiant
$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|;$$
En considérant les fonctions f_n définies sur K par $f_n(x) = \frac{1}{n} f(x_0) + (1 - \frac{1}{n}) f(x)$, où $x_0 \in K$, montrer que f a un point fixe. Est-il unique ? Que se passe-t-il si K n'est plus convexe ?

[006232]

Exercice 6764

Soit E un espace métrique compact, f une application continue de E dans E et on note Ω l'ensemble de ses points fixes.

1. Montrer que Ω est un compact, qui est non vide dans le cas où $E = [a,b]$.
2. Si $\Omega = \emptyset$, montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $d(x, f(x)) \geqslant r$ pour tout $x \in E$.
3. On suppose que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tous $x \neq y$ de E. Montrer que Ω est réduit à un point a et que pour tout choix initial de $x_0 \in E$, la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

[006233]

Exercice 6765

Pour $x, y \in X =]0, +\infty[$ on pose $\delta(x,y) = |\log x - \log y|$

1. Montrer que X muni de δ est complet alors qu'il ne l'est pas pour la métrique usuelle de $\mathbb{R}$.
2. Soit f une application de classe C^1 de X dans X vérifiant pour tout $x \in X$
$$x|f'(x)| \leqslant k f(x)$$
où k est un réel de $]0,1[$ fixé. Montrer que f a un seul point fixe dans X.

[006234]

Exercice 6766

1. On considère une matrice $A = (a_{ij})$ à coefficients réels telle que $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$. En utilisant le théorème du point fixe, montrer que quels que soient les réels $b_1, b_2, \cdots b_n$, le système d'équations linéaires

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

   admet toujours une solution unique. En déduire $\det(I - A) \neq 0$.
2. Montrer sous les mêmes hypothèses que le système non linéaire

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} \sin(a_{ij} x_j) = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

   admet une unique solution.

[006235]

Exercice 6767

On va montrer qu'il existe une et une seule h continue sur $[0,1]$ vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(t) = \cos(th(t))$ pour tout $t \in [0,1]$. On note E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la métrique uniforme.

1. h est solution si et seulement si h est continue et $h(s) = \int_0^s \cos(th(t))\, dt$.
2. L'opérateur $T : E \to E$ défini par $Tf(s) = \int_0^s \cos(tf(t))\, dt$ est $1/2$-contractant. Conclure.

[006236]

Exercice 6768

Soit $a, b \in E$ evn, $B_1 = \{x \in E / \|x - a\| = \|x - b\| = \frac{1}{2}\|a - b\|\}$, et pour $n > 1$, $B_n = \{x \in B_{n-1} / \|x - y\| \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1}),\ \forall y \in B_{n-1}\}$, où $\delta(B)$ désigne le diamètre de l'ensemble B.

1. Montrer que $\delta(B_n) \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1})$, et que $\bigcap_n B_n = \{\frac{a+b}{2}\}$.
2. Soit f une isométrie de E *sur* F evn, telle que $f(0) = 0$. Montrer en considérant la suite $(f(B_n))$ que pour tous $a, b \in E$,

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

   En déduire que f est une isométrie linéaire. Que peut-on dire plus généralement d'une isométrie f de E sur F ?

[006237]

Exercice 6769

On va montrer qu'il existe une et une seule h continue sur $[0,1]$ vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(t) = \cos(th(t))$ pour tout $t \in [0,1]$. On note E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la métrique uniforme.

1. h est solution si et seulement si h est continue et $h(s) = \int_0^s \cos(th(t))\, dt$.
2. L'opérateur $T : E \to E$ défini par $Tf(s) = \int_0^s \cos(tf(t))\, dt$ est $1/2$-contractant. Conclure.

[006238]

Exercice 6770

On désigne par E l'espace $C([0,1])$ muni de la norme uniforme et l'opérateur A défini par

$$Af(x) = \int_0^x tf(t)\, dt + x \int_x^1 f(t)\, dt$$

pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$.

1. Vérifier que A est continu et calculer sa norme opérateur.

2. L'équation $Af = f$ a-t-elle dans E des solutions f non nulles ?

[006239]

Exercice 6771

On considère $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ qui à f associe F définie par

$$F(t) = \begin{cases} 3/4\, f(3t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/3 \\ 1/4 + 1/2\, f(2-3t) & \text{si } 1/3 \leqslant t \leqslant 2/3 \\ 1/4 + 3/4\, f(3t-2) & \text{si } 2/3 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que F est bien continue et que T est $3/4$-contractante.
2. On note h le point fixe de T. Montrer par récurrence $|h(\frac{k-1}{3^n}) - h(\frac{k}{3^n})| \geqslant 2^{-n}$.
   Soit $a \in [0,1]$; montrer qu'il existe une suite (t_n) telle que $\lim t_n = a$ et $\lim |\frac{h(t_n)-h(a)}{t_n - a}| = +\infty$.
3. En déduire l'existence d'une fonction continue nulle part dérivable.

[006240]

Exercice 6772

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné et soit $f : I \to I$ une application dérivable verifiant $\forall x \in I \ : \ |f'(x)| < 1$. Pour un $x_0 \in I$ on définit la suite récurrente $a : \mathbb{N} \to I$ par $a_0 = x_0$, $a_{n+1} = f(a_n)$. On vous demande de montrer qu'il existe un unique $\ell \in I$, indépendant de x_0, tel que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. Les questions suivantes peuvent vous guider dans la démonstration.

1. Montrer que f admet un point fixe unique ℓ.
2. Montrer que $d(a_n, \ell)$ converge.
3. Montrer que la suite a admet une sous-suite convergente b.
4. Notons $\lim_{k\to\infty} b_k = \beta$ et $\lim_{n\to\infty} d(a_n, \ell) = r$. Montrer : $d(\beta, \ell) = r = d(f(\beta), \ell)$.

Est-ce-que le résultat est vrai si I n'est pas fermé ? Justifier votre réponse. [006790]

Exercice 6773

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$. On définit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $g = f \circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe C^1.
2. Calculer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice Jacobienne de f en (x,y) notée $D_{(x,y)}f$; calculer la matrice Jacobienne de g en $(0,0)$ notée $D_{(0,0)}g$.
3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \overline{B_\rho((0,0))}$ (la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon ρ) on a $\|D_{(x,y)}g\| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0,0))}$ avec ρ comme dans 3).

[006805]

---

309 427.00 Espace de Hilbert, théorème de projection

Exercice 6774

1. Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire euclidien sur $C[0,1]$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
2. On note $C = \{f \in C[0,1]; \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 1$. Montrer que $\displaystyle\inf_{f\in C} \int_0^1 f^2(t)dt = 1$ et que cette borne inférieure est atteinte.

[001894]

---

310 428.00 Théorème de Baire

Exercice 6775

À l'aide du théorème de Baire, montrer qu'un fermé dénombrable non vide X de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé.
Indication : on pourra considérer $\omega_x = X \setminus \{x\}$.
Que peut-on dire de l'ensemble de Cantor ?

Indication ▼ Correction ▼ [002392]

Exercice 6776

Soit f une application définie sur un espace métrique complet (X,d), à valeurs réelles et semi-continue inférieurement. Montrer qu'il existe un ouvert non vide O sur lequel f est majorée.
Application : soit (f_n) une suite de formes linéaires continues sur un Banach B, vérifiant

$$\forall x \in B,\ \sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

En utilisant ce qui précède, montrer que $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [002393]

Exercice 6777

On sait que l^1 est inclus dans l^2 (au fait pourquoi ?) mais n'est pas fermé dans l^2 (re-pourquoi ?) ; on va montrer qu'il est de première catégorie dans l^2 c.a.d. réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (dans l^2).

1. On considère pour chaque $p \geqslant 1$,
$$F_p = \{(a_n) \in l^2 \,/ \sum |a_n| \leqslant p\}$$
Montrer que F_p est fermé dans l^2 et d'intérieur vide.
2. En déduire le résultat.

[002394]

Exercice 6778

Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ c'est-à-dire n'est pas intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\omega_n = \mathbb{R} \backslash \{q_n\}$ si $\mathbb{Q} = \{q_1, \dots, q_n, \dots\}$. [006141]

Exercice 6779

Soit B un espace de Banach ; on rappelle que tout sous-espace propre de B est d'intérieur vide dans B. Montrer que si B est de dimension infinie, B ne possède pas de base algébrique dénombrable.
En déduire que l'espace des polynômes n'est complet pour aucune norme. [006142]

Exercice 6780

Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique de Baire, c'est-à-dire pour lequel le théorème de Baire est valide. On va montrer que tout ouvert de X muni de la topologie induite est encore un espace de Baire.

1. Soit (O_n) une suite d'ouverts denses dans O ; montrer que chaque $\omega_n = O_n \cup \overline{O}^c$ est un ouvert dense dans X (on rappelle qu'un ensemble est dense dans X s'il rencontre tout ouvert de X).
2. Montrer que pour tout ouvert ω de O,
$$(\cap_n O_n) \cap \omega \neq \emptyset$$
En déduire le résultat.

[006143]

311 429.00 Dualité, topologie faible

Exercice 6781

Soit E un evn, f un élément non nul du dual de E, et L l'hyperplan affine $\{x \in E / f(x) = 1\}$.

1. Montrer que
$$\inf_{x \in L} \|x\| \geqslant \frac{1}{\|f\|}.$$
2. On peut trouver dans la sphère unité une suite (x_n) telle que $|f(x_n)| \geqslant \frac{n}{n+1}\|f\|$ (justifier) et, à l'aide de cette suite, montrer que l'on a finalement
$$\inf_{x \in L} \|x\| = \frac{1}{\|f\|}.$$

[006124]

Exercice 6782

Soit $E = C([0,1])$, $\mu(x) = \int_0^1 x(t)\, dt$, $\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(\frac{k}{n})$.

1. Calculer $\|\mu\|$ et $\|\mu_n\|$.
2. Montrer que $\mu_n(x)$ converge vers $\mu(x)$ pour tout x dans E, mais que $\|\mu - \mu_n\| = 2$.

[006125]

Exercice 6783

Soit $E = C([0,1])$ et (t_n) une suite de points distincts, convergente dans $[0,1]$. Montrer que f définie par $f(x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2^n} x(t_n)$ est un élément de E' de norme 1 qui n'atteint sa norme en aucun point de la boule unité de E.
[006126]

Exercice 6784

Soit $a, b \in E$ evn, $B_1 = \{x \in E / \|x-a\| = \|x-b\| = \frac{1}{2}\|a-b\|\}$, et pour $n > 1$, $B_n = \{x \in B_{n-1} / \|x-y\| \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1}),\ \forall y \in B_{n-1}\}$, où $\delta(B)$ désigne le diamètre de l'ensemble B.

1. Montrer que $\delta(B_n) \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1})$, et que $\bigcap_n B_n = \{\frac{a+b}{2}\}$.
2. Soit f une isométrie de E *sur* F evn, telle que $f(0) = 0$. Montrer en considérant la suite $(f(B_n))$ que pour tous $a, b \in E$,
$$f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$
En déduire que f est une isométrie linéaire. Que peut-on dire plus généralement d'une isométrie f de E sur F.
3. On note l_n^∞ l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, et on considère l'application $f : l_n^\infty \to l_{n+1}^\infty$ définie par $f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, \sin x_1)$. Vérifier que f est une isométrie non linéaire entre evn ; pourquoi n'a-t-on pas de contradiction avec ce qui précède ?

[006127]

Exercice 6785

1. Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On suppose que, pour toute suite bornée de complexes (v_n), la série $\sum u_n v_n$ converge. Montrer que (u_n) est dans l'espace l^1.
2. Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On suppose que, pour toute suite (v_n) dans l^2, la série $\sum u_n v_n$ converge. Montrer que (u_n) est dans l'espace l^2.
Indication : Soit (a_n) une série positive divergente. Montrer que la série de terme général $\frac{a_n}{S_n^\alpha}$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ converge si $\alpha > 1$ et diverge sinon. Utiliser ensuite cette remarque pour conduire un raisonnement par l'absurde.

[006128]

Exercice 6786

On va montrer que le dual de l^2 est isométriquement isomorphe à l^2. On note comme d'habitude e_n l'élément de l^2 dans toutes les composantes sont nulles, sauf la n-ième qui vaut 1.

1. Soit $x \in l^2$. Montrer que la suite d'éléments de l^2 $x_n = \sum_1^n x(k)e_k$ converge vers x dans l^2 (autrement dit, les suites nulles à partir d'un certain rang sont denses dans l^2.) En déduire que si $f \in (l^2)'$, $f(x) = \sum_1^\infty x(n)f(e_n)$.
2. Montrer que $\|f\| \geqslant (\sum_1^n |f(e_k)|^2)^{\frac{1}{2}}$, et que $(f(e_n))_n$ est un élément de l^2.
3. Montrer alors que pour tout $x \in l^2$, $|f(x)| \leqslant \|x\|_2 \|(f(e_n))\|_2$, et que $\|f\| = \|(f(e_n))\|_2$.
   En déduire que l'application $f \to (f(e_n))$ est un isomorphisme isométrique du dual de l^2 sur l^2.

[006129]

Exercice 6787

En suivant la même démarche que l'exercice 6786, montrer que le dual topologique de c_0 est isométriquement isomorphe à l^1. [006130]

312 430.00 Connexité

Exercice 6788

Soit X un espace métrique.

1. Montrer que X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \to \{0,1\}$ est constante.
2. Soit A une partie de X connexe. Montrer que toute partie $B \subset E$ vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.
3. Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de parties connexes de X telle que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout $n \geqslant 0$. Prouver que $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n$ est connexe.

Indication ▼ Correction ▼ [002383]

Exercice 6789

Déterminer les parties connexes de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x \neq y\} \quad \text{et de} \quad \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,; z \neq w\}\,.$$

Correction ▼ [002384]

Exercice 6790

Soit A et B des parties de X. On suppose B connexe et que $B \cap A$ et $B \cap \complement A$ sont non vides. Montrer que B coupe la frontière de A.

Indication ▼ Correction ▼ [002385]

Exercice 6791

Notons $T = \{0\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{0\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que T est compact et connexe et que $f(T)$ est un segment si $f : T \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
2. Déterminer les points $x \in T$ pour lesquels $T \setminus \{x\}$ est connexe.
3. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002386]

Exercice 6792

1. Montrer qu'il existe une surjection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ et qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002387]

Exercice 6793

Dans $\mathbb{R}^2$, soit B_a l'ensemble $\{a\}\times]0,1]$ si a est rationnel et $B_a = \{a\} \times [-1,0]$ si a est irrationnel. Montrer que $B = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} B_a$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

Indication ▼ Correction ▼ [002388]

Exercice 6794

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x,y) \in I \times I\ ;\ x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Ce résultat signifie que *la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire* (un théorème de Darboux).

Indication ▼ Correction ▼ [002389]

Exercice 6795

Soit X un espace métrique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs de X telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction ▼ [002390]

Exercice 6796

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x}))\ ;\ x > 0\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe et connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\overline{A}$ et justifier que $\overline{A}$ est connexe.
3. Montrer que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs.

Indication ▼ Correction ▼ [002391]

Exercice 6797

Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ (munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$) ne sont pas homéomorphes, mais sont tous les deux “totalement discontinus" au sens suivant : leurs seuls connexes sont les points. (Remarquer que A connexe dans $Y \Rightarrow A$ connexe dans X si $Y \subset X$). [006144]

Exercice 6798

Soit A une partie du cercle unité $\mathbb{S}^1 = \partial D$; montrer que $D \cup A$ est connexe. [006145]

Exercice 6799

1. Montrer qu'il y a équivalence pour X espace topologique entre :

   i) Toute application continue $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est constante.

   ii) X est connexe.

2. Retrouver ainsi différents résultats du cours ($f(C)$ connexe si C connexe et f continue ; B connexe si A connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$; un produit de deux connexes est encore connexe ; etc)
3. Soit A, B connexes de X tels que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$; montrer à l'aide de a) que $A \cup B$ est connexe.

[006146]

Exercice 6800

Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) \notin \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q}$? (Regarder l'image de f.) [006147]

Exercice 6801

Soit $X = \mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Montrer que les seuls connexes de X sont les points. (A connexe dans $X \Rightarrow A$ connexe dans $\mathbb{R}$) [006148]

Exercice 6802

Soit X un ouvert d'un espace vectoriel normé E ; montrer que X est connexe si et seulement si il est connexe par arcs. (*Indication :* fixer $a \in X$ et considérer $A = \{x \in X, \text{relié à } a \text{ par un chemin dans } X\}$.) [006149]

Exercice 6803

Soit f une surjection continue de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'image réciproque de tout point est non bornée (raisonner par l'absurde et utiliser que le complémentaire d'un disque dans $\mathbb{R}^2$ est connexe). [006150]

Exercice 6804

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de racines $z_1, \ldots, z_n$ distinctes ou non, situées dans un convexe K de $\mathbb{C}$.

1. On suppose que $P'(z) = 0$ et $z \notin \{z_1, \ldots, z_n\}$; montrer qu'il existe des réels $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_n(z)$, inconnus mais > 0, tels que l'on ait : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(z)(z - z_k) = 0$. (Indication : considérer $\frac{P'(z)}{P(z)}$ et son conjugué).
2. Montrer que P' a aussi toutes ses racines dans K (théorème de Gauss-Lucas).

[006151]

Exercice 6805

On dit qu'un espace topologique possède la propriété du point fixe si toute fonction continue de X dans X admet un point fixe.

1. Montrer qu'un espace topologique possédant cette propriété est nécessairement connexe.
2. Montrer que si X a cette propriété, tout Y homéomorphe à X la possède aussi.
3. Montrer ainsi que $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à un segment.

[006152]

Exercice 6806

Soit $I = [a, b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable ; soit $A = \left\{(x, y) \in I \times I ; y > x\right\}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

1. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
2. Montrer que f' a la propriété de la valeur intermédiaire : si elle prend les valeurs α et β, elle prend toute valeur $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

[006153]

Exercice 6807

On va démontrer à l'aide de la connexité, le résultat classique :
"$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue injective $\Longrightarrow f$ strictement monoton".
Pour cela, considérons l'application F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = f(x) - f(y)$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > y\}$

1. Montrer que $F(C)$ est un connexe de $\mathbb{R}$.
2. En déduire le résultat.

[006154]

Exercice 6808

On définit la projection stéréographique h de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $h(x,y)$ étant le point d'intersection avec l'axe réel de la droite issue de $(0,1)$ passant par (x,y) si $(x,y)\neq(0,1)$ et $h(0,1)=\infty$. Vérifier qu'il s'agit d'un homéomorphisme. En déduire que $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ et $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ ne sont pas homéomorphes. [006155]

Exercice 6809

Soit X un espace métrique. Établir l'équivalence des assertions suivantes :

1. X est compact connexe.
2. Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $i_1,\dots,i_n\in I$ tels que

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}=X \quad et \quad U_{i_k}\cap U_{i_{k+1}}\neq\emptyset \text{ pour } k=1,\dots,n-1\ .$$

[006156]

Exercice 6810

A et B sont des parties d'un espace topologique X. Vrai ou faux ?

1. Si A est connexe, ∂A est connexe ?
2. Si $\overline{A}$ est connexe, A est connexe ?
3. Si A et B sont connexes et $A\cap B\neq\emptyset$, $A\cap B$ est connexe ?
4. Si X est un evn et A et B convexes avec $A\cap B\neq\emptyset$, $A\cap B$ est connexe ?
5. Si A et B sont connexes, $A\cup B$ est connexe ?
6. Soit f continue de X dans Y espace topologique. Si A est connexe par arcs , $f(A)$ est connexe par arcs ?
7. Soit f continue de X dans Y evn. Si A est convexe, $f(A)$ est convexe ?

[006157]

Exercice 6811

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble A des points dont une coordonnée au moins est irrationnelle.

1. Soit $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; décrire l'ensemble $A\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=\alpha\}$.
2. Montrer que A est connexe par arcs (plus précisément deux points de A peuvent être reliés par une ligne polygonale).

[006158]

Exercice 6812

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$, les sous-ensembles suivants sont connexes :

$$B(0,r);\ \mathbb{R}^n\backslash B(0,r);\ S^{n-1}(0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n\ /\ ||x||=r\}.$$

2. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes (sinon enlever un point à $\mathbb{R}$).

[006159]

Exercice 6813

On rappelle que si X est réunion disjointe de parties non vides ω_i ouvertes et connexes, les ω_i sont les composantes connexes de X.
Trouver les composantes connexes du complémentaire des ensembles suivants :

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y^2-x=0\};\quad \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/0<x^2+y^2+z^2\leqslant 1\};$$
$$S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n/||x||=1\};\quad \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}^2.$$

[006160]

Exercice 6814

Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Montrer que

1. si dim $H=n-1$, $\mathbb{R}^n\backslash H$ a deux composantes connexes ;
2. si dim $H\leqslant n-2$, $\mathbb{R}^n\backslash H$ est connexe.

[006161]

Exercice 6815

On considère le sous-ensemble suivant du plan complexe :

$$C=\cup_{n\geqslant 1}[0,1+\frac{i}{n}]\cup\ [\frac{1}{2},1]=A\cup\ [\frac{1}{2},1]$$

1. Montrer que C est connexe.
   Soit γ un chemin reliant un point de A à un point de $[\frac{1}{2},1]$ et d'image dans C.
2. Si γ ne passe pas par 0, montrer que $\gamma(t)=r(t)e^{i\theta(t)}$ où $r(t)>0$ et $0\leqslant\theta(t)<\frac{\pi}{2}$, et r,θ continues.
3. Montrer que θ ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs et aboutir à une contradiction.
4. Dans tous les cas, montrer qu'il existe $t_0\in]0,1[$ tel que $\gamma(t)$ ne passe pas par 0 pour $t\geqslant t_0$. En déduire que C n'est pas connexe par arcs.

[006162]

Exercice 6816

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{1}{2}\Big(f(x)+f(y)\Big)\quad\forall x,y\in[a,b].$$

1. On suppose $f(a)=f(b)=0$. On considère $E=\{x\in]a,b[\ /\ f(x)=\sup_{t\in[a,b]}f(t)\}$. Montrer que E est ouvert et fermé dans $]a,b[$. En déduire que f est <0 ou identiquement nulle sur $]a,b[$.
2. Montrer dans tous les cas que f est convexe ie f vérifie $f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+tf(y)$ pour tous $x,y\in[a,b]$ et $t\in[0,1]$ (On se ramènera au cas a) en considérant f privée de sa corde sur $[a,b]$).

[006163]

Exercice 6817

Soit A un ouvert connexe non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $a\in A$. Soit G_a l'ensemble des points de A pouvant être reliés à a par un chemin contenu dans A.

1. Montrer que G_a et $A\setminus G_a$ sont ouverts.
2. En déduire que A est connexe par arcs.

[006773]

Exercice 6818

1. Donner la *définition* d'un intervalle dans $\mathbb{R}$ et montrer que si $A\subset\mathbb{R}$ est connexe, alors A est un intervalle.

2. En utilisant la notion de connexité, montrer qu'il n'existe pas un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

[006782]

Exercice 6819

Soit X un espace topologique, I un ensemble d'indices et pour chaque $\alpha \in I$, soit $A_\alpha \subset X$ une partie connexe de X. On suppose que $\forall \alpha, \beta \in I : A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$. Démontrer que $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ est connexe. [006814]

Exercice 6820

Soit X un espace topologique, $A \subset X$ une partie et $C \subset X$ une partie connexe telle que $C \cap A \neq \emptyset$ et $C \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

1. Démontrer que C contient des points de la frontière de A.
2. Pourquoi $A = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^3$ et $C = \{(0,0,z) \mid |z| \leqslant 1\}$ n'est-il pas un contre-exemple pour la propriété énoncée dans 1. ?

[006815]

Exercice 6821

Soit X un espace topologique connexe, soit $\mathscr{U}$ un recouvrement de X par ouverts et soit $x_0 \in X$ un point de X. On dit que x est n-éloigné de x_0 s'il existe $U_0, \dots, U_n \in \mathscr{U}$ tels que $x_0 \in U_0$, $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$ et $x \in U_n$. Prenez le temps de dessiner ce que veut dire n-éloigné. On définit l'ensemble $A \subset X$ par

$$A = \{ x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : x \text{ est } n\text{-éloigné de } x_0 \} .$$

Démontrer que A est ouvert et fermé dans X. En déduire que $A = X$. [006834]

---

313 431.00 Autre

Exercice 6822 Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Montrer que : $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$
2. Déterminer : $m = \mathrm{Inf}\{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n 1/x_i)$ tels que $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0\}$
3. Déterminer : $M = \sup\{|x+2y+3z+4t|$ tels que $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ $, x^2+y^2+z^2+t^2 \leqslant 1\}$

[001864]

Exercice 6823

Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux familles de n nombres réels. Montrer, en étudiant le signe du trinôme $\lambda \longrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2$ que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. [001866]

Exercice 6824

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. On désigne par $\overline{B} = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel **fermé** de E. Pour $x \in E$ on pose :

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x-y\| \equiv \inf\{ \|x-y\| \mid y \in F \} .$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$ on a $0 \leqslant d(x,F) \leqslant \|x\|$.
2. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(a) $d(x,F)=0$;

(b) $x \in F$.

3. (a) Montrer que, quels que soient $x,x' \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in F$, on a :

$$\begin{aligned} d(\lambda x,F) &= |\lambda|\, d(x,F) \\ d(x-y,F) &= d(x,F) \\ d(x+x',F) &\leqslant d(x,F)+d(x',F) \end{aligned}$$

(b) Montrer que l'application $x \mapsto d(x,F)$ est uniformément continue dans E.

4. Soit $x \in \overline{B}$. On pose $\alpha = d(x,F)$ et on suppose $\alpha > 0$. Soit de plus $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que

$$\alpha \leqslant \|x-y\| < \alpha(1+\varepsilon)\ .$$

(b) Montrer qu'il existe $x' \in \overline{B}$ tel que

$$\tfrac{1}{1+\varepsilon} = d(x',F) < 1\ .$$

(c) Montrer que, si $F \neq E$, $\sup_{x\in\overline{B}} d(x,F) = 1$.

5. Sachant que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet, démontrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

6. On suppose maintenant que $\overline{B}$ est compact.

(a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini k de points de $\overline{B}$: $x_1,\dots,x_k \in \overline{B}$ tels que

$$\overline{B} \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_\varepsilon(x_j)\ ,$$

où $B_\varepsilon(x_j)$ désigne la boule ouverte de centre x_j et de rayon ε.

(b) Déduire de ce qui précède que E est de dimension finie (on pourra considérer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $x_1,\dots,x_k$).

7. On revient au cas général (c'est-à-dire : on ne suppose plus que $\overline{B}$ est compact). Soit $u : E \to E$ une application linéaire continue. On suppose que $\overline{u(\overline{B})}$ (l'adhérence de l'image de $\overline{B}$ par u) est compacte. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de u (c'est-à-dire : il existe $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ tel que $u(x_0) = \lambda\, x_0$). On pose $V_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$.

(a) Montrer que V_λ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

(b) Montrer que $\overline{B} \cap V_\lambda \subset \frac{1}{\lambda} u(\overline{B})$.

(c) Montrer que V_λ est de dimension finie.

[006807]

314 432.00 Théorème de Stone-Weirstrass, théorème d'Ascoli

Exercice 6825

Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_a^b f(t)t^n\,dt = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Indication ▼ Correction ▼ [002408]

Exercice 6826

Montrer qu'une fonction de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ n'est pas limite uniforme de polynômes de $\mathbb{R}[x]$.

Indication ▼ [002409]

Exercice 6827

Soit E un espace compact. Soit f_i, $i = 1,\dots,n$ une famille de n élements de $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ qui sépare les points de E. Montrer que E est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [002410]

Exercice 6828

Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Soit $\mathscr{A}$ l'ensembles des combinaisons linéaires finies $f \in \mathscr{C}(X\times Y,\mathbb{R})$ de la forme :

$$f(x,y) = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i(x)\cdot v_i(y), \quad \text{avec } u_i \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R}), v_i \in \mathscr{C}(Y,\mathbb{R}), \lambda_i \in \mathbb{R}, I \text{ fini.}$$

Montrer que toute fonction de $\mathscr{C}(X\times Y,\mathbb{R})$ est limite uniforme de suites d'éléments de $\mathscr{A}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002411]

Exercice 6829

1. Soit $k > 0$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions différentiables $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $|f'(t)| \leqslant k$ pour tout $t \in]a,b[$. Montrer que $\mathscr{F}$ est une famille équicontinue.
2. Si $L > 0$ et $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une suite d'applications L-lipschitziennes avec $\|f_n(0)\| = \sqrt{2}$, alors montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de (f_n).

Indication ▼ Correction ▼ [002412]

Exercice 6830

Soient E,F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications de E dans F équicontinue en $a \in E$. Montrer que, si la suite $(f_n(a))$ converge vers b, alors $(f_n(x_n))$ converge également vers b, si (x_n) est une suite de E telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
L'équicontinuité est-elle nécessaire ici ?

Indication ▼ Correction ▼ [002413]

Exercice 6831

Soient E,F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications équicontinues de E dans F. Montrer que l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F, est un fermé.

Correction ▼ [002414]

Exercice 6832

Soient (E,d) un espace métrique et $\mathscr{H}$ une famille équicontinue d'applications de E dans $\mathbb{R}$. Établir :

1. L'ensemble A des $x \in E$ pour lesquels $\mathscr{H}(x)$ est borné est ouvert et fermé.
2. Si E est compact et connexe et si $\mathscr{H}(x_0)$ est borné pour un point quelconque $x_0 \in E$, alors $\mathscr{H}$ est relativement compact dans $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$.

Indication ▼ Correction ▼ [002415]

Exercice 6833

On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t+4(n\pi)^2})$, $t \in [0,\infty[$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers $f \equiv 0$.

2. La suite (f_n) est elle relativement compacte dans $(\mathscr{C}_b([0,\infty[), ||.||_\infty)$, l'ensemble des fonctions continues et bornées ? Que dit le théorème d'Ascoli ?

Indication ▼ Correction ▼ [002416]

Exercice 6834

Soit $K : \mathscr{C}([a,b]) \to \mathscr{C}([a,b])$ donné par $(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)\,dt$, $k \in \mathscr{C}([a,b] \times [a,b])$, et soit (f_n) une suite bornée de $X = (\mathscr{C}([a,b]), ||.||_\infty)$.

1. Rappeler pourquoi k est uniformément continue.
2. En déduire l'équicontinuité de (Kf_n).
3. Montrer que (Kf_n) contient une sous-suite convergente dans X.

Correction ▼ [002417]

Exercice 6835

Soit $X = [0,1]$, $Y = [-1,1]$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2x)$; on note A le sous-ensemble de $C(X,Y)$ constitué des (f_n), $n \geqslant 1$.

1. Montrer sans calculs que A est équicontinu.
2. Montrer que l'on a plus précisément $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \sqrt{2}|x-y|^{\frac{1}{2}}$ pour tous n, x, y. En déduire que le module d'équicontinuité de A est $\geqslant \varepsilon^2/2$.

[006252]

Exercice 6836

Pour quelles valeurs de $\alpha \geqslant 0$, la fonction $f(x) = \cos x^\alpha$ est -elle uniformément continue ?
On suppose cette condition remplie et on définit f_n par $f_n(x) = f(x+n)$. Montrer que l'on peut extraire de (f_n) une suite convergeant uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$. Peut-on avoir convergence uniforme sur tout $\mathbb{R}^+$?
[006253]

Exercice 6837

Soit $H = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \ / \ \int_\mathbb{R} |f(x)|^2dx + \int_\mathbb{R} |f'(x)|^2dx \leqslant 1\}$.

1. Montrer que si $f \in H$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.
2. Montrer que $||f||_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, pout toute $f \in H$.
3. Montrer que H est une partie équicontinue et bornée de $C_0(\mathbb{R})$.
4. Soit $\varphi(x) = (x^2-1)^2\ \mathbf{1}_{|x|\leqslant 1}$, et $f_n(x) = \varphi(x-n)$; montrer que $\lambda f_n \in H$ pour une constante λ bien choisie et que cette suite n'a aucune valeur d'adhérence dans $C(\mathbb{R})$. Conclusion ?

[006254]

315 440.00 Fonction holomorphe

Exercice 6838

Tout complexe z qui n'est pas un réel positif ou nul peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. On définit une fonction f sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ par

$$f(z) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta)$$

où P et Q sont des fonctions réelles données. Donner des conditions sur les dérivées partielles de P, Q pour que f soit holomorphe sur Ω.
En déduire que la fonction

$$\log z = \log r + i\theta$$

est holomorphe sur Ω. Quelle est sa dérivée ?

Correction ▼ [002681]

Exercice 6839

Soit a un réel dans $]0,1[$. On souhaite calculer l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

Pour cela, on définit une fonction f sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0,+\infty[$ de la manière suivante :

$$f(z) = \frac{\exp((a-1)\log z)}{1+z}$$

où la fonction log est définie comme dans l'exercice précédent.

— Montrer que f est méromorphe sur Ω. Quels en sont les pôles ?

— Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $R > 1$ deux réels. On considère à présent le chemin C réunion du segment $[\varepsilon, R] + 0i$, du cercle de rayon R, parcouru positivement, du segment $[R, \varepsilon] - 0i$ et du cercle de rayon ε parcouru négativement. Calculer $\int_C f(z)\,dz$; en déduire la valeur de I_a.

Correction ▼ [002682]

Exercice 6840

Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Correction ▼ [002783]

Exercice 6841

Si f et g sont deux fonctions dérivables au sens complexe au point z_0 ; montrer que $f+g$, $f-g$ et fg le sont et donner la valeur de leurs dérivées au point z_0.

Correction ▼ [002784]

Exercice 6842

Si f et g sont deux fonctions dérivables au sens complexe au point z_0 montrer que $\frac{f}{g}$ est dérivable au sens complexe et donner la valeur de la dérivée lorsque $g(z_0) \neq 0$.

Correction ▼ [002785]

Exercice 6843

Montrer la formule pour la dérivée d'une composition $g \circ f$.

Correction ▼ [002786]

Exercice 6844

Soit f et g deux fonctions n-fois dérivables au sens complexe sur un ouvert non vide U (remarque : d'après le cours il suffit qu'elles soient dérivables une fois sur U pour qu'elles le soient un nombre quelconque de fois). Montrer la formule de Leibniz généralisée :

$$\forall z \in U \qquad (fg)^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(z) g^{(n-j)}(z)$$

Correction ▼ [002787]

Exercice 6845

On se donne deux séries entières $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de rayons de convergences R_1 et R_2 non nuls. En utilisant le théorème sur les séries doubles prouver $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ pour $|z| < R = \min(R_1, R_2)$ avec (formules dites de Cauchy) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est-il toujours égal à $\min(R_1, R_2)$ ou peut-il être plus grand ?

Correction ▼ [002788]

Exercice 6846

Retrouver le résultat de l'exercice précédent (l'exercice 6845) de manière plus indirecte en montrant que les coefficients $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ sont ceux de la série de Taylor à l'origine de la fonction holomorphe $k(z) = f(z)g(z)$.

Correction ▼ [002789]

Exercice 6847

En quels points la fonction $z \mapsto \bar{z}$ est-elle dérivable au sens complexe, et/ou holomorphe ? Même question pour les fonctions $z \mapsto x$ et $z \mapsto y$.

Correction ▼ [002790]

Exercice 6848

Prouver qu'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe, de dérivée identiquement nulle, est constante. Et si l'ouvert n'est pas connexe ?

Correction ▼ [002791]

Exercice 6849

Sur un ouvert connexe U on se donne une fonction holomorphe f qui a la propriété de ne prendre que des valeurs réelles. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que f est constante.

Correction ▼ [002792]

Exercice 6850

Cet exercice propose une variante pour développer la théorie de la fonction exponentielle.

1. On se donne une fonction f qui est $n+1$-fois dérivable au sens complexe sur le disque ouvert $D(0,R)$ (on sait qu'une fois suffit mais on ne va pas utiliser ce théorème difficile ici). Soit $z \in D(0,R)$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange à la fonction de la variable réelle $t \mapsto g(t) = f(tz)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, prouver :
$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f^{(2)}(0)}{2}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tz)\,dt$$
2. On suppose que f est dérivable au sens complexe une fois sur $D(0,R)$ et vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est infiniment dérivable au sens complexe. En utilisant la question précédente montrer :
$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \Big(\sup_{|w| \leqslant |z|} |f(w)| \Big) \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$
et en déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.
3. Réciproquement on considère la fonction $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Vérifier que le rayon de convergence est infini. Établir par un calcul direct que $F'(0)$ existe et vaut 1. En utilisant le théorème sur les séries doubles, montrer $F(z+w) = F(z)F(w)$. En déduire ensuite que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et vérifie $F' = F$.

Correction ▼ [002793]

Exercice 6851

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Est-il exact que pour $|z| > R$ on a $\lim |a_n z^n| = +\infty$?

Correction ▼ [002794]

Exercice 6852

Déterminer les séries de Taylor à l'origine de $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$.

Correction ▼ [002795]

Exercice 6853

Déterminer en tout $z_0 \neq 1$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{z-1}$.

Correction ▼ [002796]

Exercice 6854

Déterminer en tout $z_0 \neq 1, 2$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. On aura intérêt à réduire en éléments simples. De plus on demande d'indiquer le rayon de convergence *avant* de déterminer explicitement la série de Taylor.

Correction ▼ [002797]

Exercice 6855

Déterminer en tout point z_0 où elle est définie la série de Taylor de la fonction $\frac{1}{z^3-1}$. On déterminera son rayon de convergence en fonction de z_0. [002798]

Exercice 6856

On considère la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$. Quel est son rayon de convergence ? On note $f(z)$ sa somme. Que vaut $\lim_{t\to 1} f(t)$? (on prend $0 < t < 1$; minorer f par ses sommes partielles). Plus généralement que vaut $\lim_{t\to 1} f(tw)$ (ici encore t est pris dans $]0,1[$), lorsque w vérifie une équation $w^{2^N} = 1$? En déduire qu'il est impossible de trouver un ouvert U connexe intersectant $D(0,1)$ mais non inclus entièrement dans $D(0,1)$ et une fonction holomorphe $g(z)$ sur U tels que $g = f$ sur $U \cap D(0,1)$. Pour tout $z_0 \in D(0,1)$ déterminer alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point z_0.

Correction ▼ [002799]

Exercice 6857

Montrer que le rayon de convergence de chacune des séries concernées est 1 et prouver :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ ne converge en aucun point du cercle $|z| = 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$ **sauf** en $z = 1$.

Pour ce dernier cas on définit $S_0 = 1$, $S_1 = 1+z$, $S_2 = 1+z+z^2$, ...(on pose aussi $S_{-1} = 0$). En écrivant $z^n = S_n - S_{n-1}$ exprimer $\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n}$ en fonction des S_n. Montrer que les S_n sont bornées lorsque $|z| = 1$, $z \neq 1$. Conclure. [002800]

Exercice 6858

Montrer qu'un entier $k \geqslant 1$ s'écrit de manière unique sous la forme $2^n(2m+1)$, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Puis prouver pour $|z| < 1$:

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z}\,.$$

On justifiera les interversions de séries. Prouver aussi :

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} + \cdots = \frac{z}{1-z}\,.$$

[002801]

Exercice 6859

Lorsque z est complexe les fonctions $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\mathrm{sh}(z)$ et $\mathrm{ch}(z)$ sont définies par les formules :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

1. Montrer que cos et ch sont des fonctions paires et sin et sh des fonctions impaires et donner leurs représentations comme séries entières. Prouver $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, $\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}(z)$, $\cos(iz) = \mathrm{ch}(z)$, $\mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)$, $\mathrm{ch}(iz) = \cos(z)$.
2. Établir les formules :
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$
en écrivant de deux manières différentes $e^{\pm i(z+w)}$. Donner une autre preuve en utilisant le principe du prolongement analytique et la validité (admise) des formules pour z et w réels.
3. Prouver pour tout z complexe $\cos(\pi+z) = -\cos(z)$, $\sin(\pi+z) = -\sin(z)$. Prouver $\cos(\frac{\pi}{2}-z) = \sin(z)$.
4. Prouver les formules $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ et $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Correction ▼ [002802]

Exercice 6860

Montrer $\sin(a+ib) = \sin(a)\,\mathrm{ch}(b) + i\cos(a)\,\mathrm{sh}(b)$. Puis en prenant dorénavant a et b réels, prouver :

$$a,b \in \mathbb{R} \implies \quad |\sin(a+ib)|^2 = \sin^2(a) + \mathrm{sh}^2(b)$$

Déterminer alors les nombres complexes $z = a+ib$ tels que $\sin(z) = 0$. Donner une autre preuve.

Correction ▼ [002803]

Exercice 6861

Montrer :

$$a,b \in \mathbb{R} \implies \quad |\cos(a+ib)|^2 = \cos^2(a) + \mathrm{sh}^2(b) = \mathrm{ch}^2(b) - \sin^2(a)$$

Déterminer les nombres complexes z avec $\cos(z) = 0$. [002804]

Exercice 6862

Les fonctions de Bessel sont très importantes en Analyse. Elles apparaissent très souvent dans des problèmes de physique mathématique. L'analyse complexe permet d'étudier de manière approfondie ces fonctions. Ici nous nous contentons des tout débuts de la théorie. Nous ne considérons que les fonctions [2] J_0, J_1, J_2, ..., qui sont définies par les formules : [3]

$$\nu \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C} \qquad J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série définissant J_ν est $+\infty$.

2. dites "fonctions de Bessel de première espèce (et d'indices entiers)".
3. Autrement dit :

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2.4.\ldots.(2\nu)}\left(1 - \frac{z^2}{2.(2\nu+2)} + \frac{z^4}{2.4.(2\nu+2).(2\nu+4)} - \frac{z^6}{2.4.6.(2\nu+2).(2\nu+4).(2\nu+6)} + \ldots\right)$$

Remarquez que seule la constante $2.4.\ldots.(2\nu) = 2^\nu \nu!$ nous restreint (pour le moment) à des valeurs entières de ν. Si on en fait abstraction on obtient avec $\nu = -\frac{1}{2}$ la fonction "multiforme" $z^{-1/2}\cos(z)$; tandis qu'avec $\nu = +\frac{1}{2}$ on obtient $z^{-1/2}\sin(z)$. Les définitions exactes sont $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$ et $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z)$.

2. En dérivant terme à terme prouver les formules :

$$(z^\nu J_\nu)' = z^\nu J_{\nu-1} \qquad (\nu \geqslant 1)$$
$$(z^{-\nu} J_\nu)' = -z^{-\nu} J_{\nu+1} \qquad (\nu \geqslant 0)$$

En particulier on a $(zJ_1)' = zJ_0$ et $J_0^{'} = -J_1$.

3. Réécrire les équations précédentes sous la forme $(z\frac{d}{dz}+\nu)J_\nu = zJ_{\nu-1}$ $(\nu \geqslant 1)$ et $(z\frac{d}{dz}-\nu)J_\nu = -zJ_{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 0)$ et en déduire $-(\frac{d}{dz}+\frac{\nu+1}{z})(\frac{d}{dz}-\frac{\nu}{z})J_\nu = J_\nu$, puis, après simplification, l'équation différentielle de Bessel :
$$z^2 J_\nu'' + zJ_\nu' + (z^2-\nu^2)J_\nu = 0$$

4. Montrer, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, que la série entière définissant J_ν est la seule (à une constante multiplicative près) qui donne une solution de l'équation différentielle de Bessel. [4]

[002805]

Exercice 6863

1. Montrer que $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ est harmonique.
2. Déterminer v telle que $f = u+iv$ soit holomorphe.
3. Ecrire la fonction f trouvée ci-dessus comme fonction d'une variable complexe.

[006580]

Exercice 6864

Montrer que
$$f(x+iy) = x^2 + iy^3$$
n'est holomorphe en aucun point bien que les equations de Cauchy-Riemann soient vérifiées à l'origine, même sur une parabole que l'on précisera. [006581]

Exercice 6865

Etude de l'exponentielle complexe $f(z) = e^z$ et du logarithme complexe.

1. Décrire l'image d'une droite $y = c$, c étant une constante, par rapport à f.
2. Décrire l'image d'une droite $x = c$, c étant une constante, par rapport à f.
3. Vérifier que la restriction de f au domaine
$$W = \{z = x+iy; |y| < \pi\}$$
est une bijection de W sur
$$D = \mathbb{C} \setminus \{z; z = -x,\ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}.$$
4. En déduire l'existence d'une fonction complexe unique Φ, avec domaine de définition $D_\Phi = D$, de sorte que
$$e^{\Phi(z)} = z, \quad |\mathrm{Im}\Phi(z)| < \pi.$$
Cette fonction est appelée *détermination principale* du logarithme, notée Log ; en utilisant un peu plus de théorie on montre qu'elle est holomorphe, avec $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$.

[006582]

Exercice 6866

4. les autres solutions de l'équation différentielle sont singulières en $z = 0$, avec une composante logarithmique ($\nu \in \mathbb{Z}$). Pour $\nu \notin \mathbb{Z}$ il y a une solution en $z^\nu(\sum_{k\geqslant 0} c_k z^k)$ et une autre en $z^{-\nu}(\sum_{k\geqslant 0} d_k z^k)$.

Vérifier que, pour tout nombre complexe z avec $|z| < 1$, on a

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots.$$

[006583]

Exercice 6867

Développer en série entière $\sin z$ et $\cos z$. [006584]

Exercice 6868

Vérifier que

$$\operatorname{Arctg} w = w - \frac{w^3}{3} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^7}{7} + \dots$$

dans un domaine de convergence que l'on précisera. [006585]

Exercice 6869

Evaluer

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$$

1. le long de la parabole $y = x^2,\ 1 \leqslant x \leqslant 2$;
2. le long du segment de droite $(1+i), (2+4i)$;
3. le long des segments $(1+i), (2+i)$ et $(2+i), (2+4i)$.

[006586]

Exercice 6870

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

1. Montrer que la fonction exp est continue et vérifie :
   $\exp(0) = 1; \quad \forall a, b \in \mathbb{C},\ \exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$.
2. On note $e = \exp(1)$ et $f(z) = \exp(z) = e^z$. Etablir les résultats suivants :
   (a) $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0$.
   (b) $f'(z) = f(z)$.
   (c) $f_{|\mathbb{R}}$ est croissante, positive, tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, tend vers 0 quand $x \to -\infty$.
   (d) Il existe un nombre positif π tel que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et tel que $e^z = 1$ ssi $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
   (e) f est périodique de période $2i\pi$.
   (f) $t \to e^{it}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité.
   (g) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

[006620]

Exercice 6871

Trouver le domaine maximal de convergence des séries entières suivantes :

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n \cos n\theta, \quad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}.$$

[006621]

Exercice 6872

Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le domaine maximal de convergence ($a, b \neq 0$) :

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}, \quad g(z) = \frac{1}{(a-z)(b-z)}, \quad h(z) = \frac{z\sin a}{z^2-2(\cos a)z+1}.$$

[006622]

Exercice 6873

Développer en série entière sur $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$. [006623]

Exercice 6874

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est de classe C^∞ et développable en série entière. [006624]

Exercice 6875

Trouver les solutions de l'équation différentielle :$(1+x^2)y'' - 2y = 0$ en commençant par chercher des solutions développables en série entière. [006625]

Exercice 6876

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 . Montrer les équivalences (i)$\Longleftrightarrow$(ii)
$\Longleftrightarrow$(iii) où
(i) La série converge uniformément sur D.
(ii) La série converge uniformément sur $\overline{D}$.
(iii) La série converge uniformément sur ∂D
(*Indication* : pour l'implication (iii)$\Longrightarrow$(ii), on posera $r_N = \sum_N^\infty a_n e^{in\theta}$ et on fera une tranformation d'Abel dans la somme $\sum_M^N a_n \rho^n e^{in\theta}$ où $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.) [006626]

Exercice 6877

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. On pose $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)$, $u(z) = \sum s_n z^n$ et $v(z) = \sum t_n z^n$.

1. Montrer que les rayons de convergence de u et de v sont égaux à 1.
2. Etablir pour tout $|z| < 1$, $u(z) = \frac{1}{1-z}\sum a_n z^n$. Retrouver ainsi le théorème d'Abel : soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1, telle que $\sum a_n$ converge vers A. Alors $f(z)$ tend vers A quand $z \to 1$ non tangentiellement.

[006627]

Exercice 6878

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'il existe une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers a. Montrer que $L = \limsup_{n\to\infty} u_n = \inf_n \sup_{k\geqslant n} u_k$ et $l = \liminf_{n\to\infty} u_n = \sup_n \inf_{k\geqslant n} u_k$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Vérifier que ce sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs d'adhérence. [006628]

Exercice 6879

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels. Etablir les propositions suivantes :

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n + v_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup_{n\to\infty} v_n \;;$$

$$(\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n) \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} v_n.$$

Donner l'exemple de deux suites pour lesquelles la première inégalité est stricte. [006629]

Exercice 6880

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On suppose que $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

[006630]

Exercice 6881

Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} a^n z^n$ $(a\in\mathbb{C})$; $\sum_{n\geqslant 0} e^{\sqrt{n}} z^n$; $\sum_{n\geqslant 0} z^n/n!$; $\sum_{n\geqslant 0} z^{2n}$; $\sum_{n\geqslant 0} z^{n!}$.
Comparer le rayon de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{2n}$.
Si le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ est strictement positif et fini, quel est celui de $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{n^2}$? [006631]

Exercice 6882

Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ est supérieur ou égal au plus petit des rayons de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$. Montrer par un exemple que l'inégalité peut être stricte. [006632]

Exercice 6883

On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$. Sa somme est notée $f(z)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{c_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. Sa somme notée $F(z)$ est appelée transformée de Borel.
2. Soit r un réel vérifiant $0<r<R$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que

$$\forall z\in\mathbb{C}, \sup_{N\geqslant 0}\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{c_n}{n!}z^n\right| \leqslant P(|z|)+\exp\left(\frac{|z|}{r}\right).$$

   On pourra considérer un entier n_0 tel que, pour tout $n>n_0$, on ait $|c_n|\leqslant r^{-n}$.
3. Montrer que, pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z|<R$, on a

$$f(z)=\int_0^{+\infty} F(tz)e^{-t}\,dt.$$

[006633]

Exercice 6884

1. Montrer que $L=\limsup u_n\in\mathbb{R}$ est caractérisée par la condition suivante :
   Pour tout $\varepsilon>0$, tous les u_n sauf un nombre fini d'entre eux sont $\leqslant L+\varepsilon$, et une infinité d'entre eux est $\geqslant L-\varepsilon$.
2. Ecire l'analogue pour la $\liminf$.

[006634]

Exercice 6885

1. Déterminer à l'aide de la formule de Hadamard le rayon de convergence des séries suivantes :

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^n z^{n^2} \quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

2. Trouver le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où

$$a_n = q^{n^2} (|q| < 1); \quad a_n = C_{kn}^n; \quad a_n = e^{n^\alpha} (0 < \alpha < 1).$$

[006635]

Exercice 6886

1. Trouver le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où $a_{2n+1} = a^{2n+1}$ et $a_{2n} = b^{2n}$ avec $0 < a, b < 1$.
2. Pour la série $\sum a_n z^n$, où $a_{2n} = a^n b^n$ et $a_{2n+1} = a^n b^{n+1}$ avec $a, b > 0$, comparer l'inverse du rayon, R^{-1}, avec $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

[006636]

Exercice 6887

Montrer que si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon $0 < R < +\infty$, la série lacunaire $\sum a_n z^{\lambda(n)}$, où $\lim \frac{\lambda(n)}{n} = +\infty$, a comme rayon $R' = 1$. Montrer sur un exemple que la réciproque peut être fausse. [006637]

Exercice 6888

1. Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est constante, (ii) P est constante, (iii) Q est constante, (iv) $\bar{f}$ est holomorphe dans U, (v) $|f|$ est constant.
2. Soit $f, g \in H(U)$. On suppose que g ne s'annule pas dans U et $f(z)\bar{g}(z) \in \mathbb{R}$ pour $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = cg$.

[006638]

Exercice 6889

1. Pour $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x + iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $f_{|U} \in H(U)$?
2. Même question avec $f(z) = |\sin z|$.

[006639]

Exercice 6890

1. Soit $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\ ;\ -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\}$. Soit $P(x, y) = \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y}$ pour $z \in U$. Montrer qu'il existe $f \in H(U)$ unique telle que $f(0) = 0$ et $P = \operatorname{Re} f$.
2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.
   Donner une CNS pour qu'il existe $f \in H(\mathbb{C})$ telle que $P = \operatorname{Re} f$. Sous cette condition trouver alors toutes les applications $f \in H(\mathbb{C})$ telles que $P = \operatorname{Re} f$.

[006640]

Exercice 6891

1. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann en polaires s'écrivent $f'_r + \frac{i}{r} f'_\theta = 0$
2. Application : Soit P un polynôme non constant, supposé sans zéros. On pose alors $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$. Montrer que $I'(r) = 0$. En calculant $\lim_{r\to\infty} I(r)$ et $I(0)$, aboutir à une contradiction. Conclusion ?

[006641]

Exercice 6892

En quels points la fonction $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ est-elle $\mathbb{C}$-différentiable ? Même question pour $f(z) = \exp\overline{z}$. [006642]

Exercice 6893

Ecrire les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires. En déduire que chaque détermination du logarithme est holomorphe. [006643]

Exercice 6894

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\begin{cases} f(z) = e^{-1/z^4} & \text{si } z \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f vérifie les équations de Cauchy-Riemann en tout point de $\mathbb{C}$ mais n'est pas holomorphe dans $\mathbb{C}$.
[006644]

Exercice 6895

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. On désigne par P et Q respectivement ses parties réelle et imaginaire. On suppose qu'il existe des constantes réelles non toutes nulles a, b et c telles que la fonction $aP+bQ+c$ soit identiquement nulle sur Ω. Montrer que f est constante sur Ω. [006645]

Exercice 6896

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, u sa partie réelle et v sa partie imaginaire. On suppose que les dérivées partielles secondes de u et v existent et sont continues sur Ω. Montrer que u (resp. v) est harmonique (c'est-à-dire $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$). [006646]

Exercice 6897

On dit que deux fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

1. Montrer que si u et v sont conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques.
2. Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions harmoniques suivantes dans les ouverts indiqués :
   (a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$
   (b) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
   (c) $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ sur
      i. $\mathbb{C}\setminus\{x+iy \mid y=0, x\leqslant 0\}$
      ii. $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

[006647]

Exercice 6898

Trouver des domaines de définition Ω (le plus grand possible) et des fonctions holomorphes $f = u+iv$ sur Ω étant donné la partie réelle u ou la partie imaginaire v.

1. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
2. $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x\,\mathrm{sh}\,y + x^3 - 3xy^2 + y$
3. $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$

[006648]

Exercice 6899

Soit $f(z) = u + iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. Montrer que les familles de courbes $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$ sont orthogonales ; plus précisément, montrer qu'en tout point d'intersection $z_0 = x_0 + iy_0$ de deux de ces courbes tel que $f'(z_0) \neq 0$, leurs tangentes respectives sont perpendiculaires. [006649]

Exercice 6900

Montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans un ouvert connexe Ω et si $f'(z) \neq 0$ en tout point de Ω, alors la transformation $w = f(z)$ conserve les angles. [006650]

Exercice 6901

1. Montrer les inégalités suivantes, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z - 1| \leqslant |z|e^{|z|} \text{ et } |e^z - 1 - z| \leqslant \frac{|z|^2}{2} e^{|z|}$$

2. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{C}$, f une fonction continue sur K et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur K convergeant uniformément vers f sur K. Montrer que $(\exp f_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\exp f$ uniformément sur K (on pourra appliquer la première inégalité de a) à $f_n(z) - f(z)$).
3. Montrer que $\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers e^z uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

[006651]

Exercice 6902

1. Soient ρ un réel strictement positif, z et w des nombres complexes tels que $|z| > \rho$ et $|w| > \rho$, et n un entier naturel.
   Montrer que
   $$\left|\frac{1}{w^n} - \frac{1}{z^n}\right| \leqslant |z-w| \frac{n}{\rho^{n+1}}$$
   et que
   $$\left|\frac{1}{z-w}\left(\frac{1}{w^n} - \frac{1}{z^n}\right) - \frac{n}{z^{n+1}}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{w^n} - \frac{1}{z^n}\right)\frac{1}{z^{n-k+1}}\right| \leqslant |z-w| \frac{n^2}{\rho^{n+2}}$$
   Soient maintenant σ et ϕ deux fonctions continues à valeurs complexes définies sur un intervalle $I = [a,b]$. On fixe un point $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(I)$ et on pose $\rho = \frac{1}{2} \inf_{a\leqslant t\leqslant b} |\sigma(t) - z|$.
2. Soit $g(z) = \displaystyle\int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t)-z)^n} dt$. En remplaçant dans a) z par $\sigma(t) - z$ et w par $\sigma(t) - z - h$ avec $|h| < \rho$, montrer que
   $$\left|\frac{g(z+h) - g(z)}{h} - n\int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t)-z)^{n+1}} dt\right| \leqslant \frac{|h|n^2}{\rho^{n+2}} \int_a^b |\phi(t)| dt$$
   En déduire que $g(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \sigma(I)$ et que g' est donnée par
   $$g'(z) = n\int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t)-z)^{n+1}} dt$$

[006652]

Exercice 6903

Soit f une application holomorphe (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-différentiable) d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) = 0$. Démontrer que $z \mapsto |f(z)|$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0. (On pourra utiliser le développement en série entière de f au voisinage de z_0.)

2. Soit $z_1 = x_1 + iy_1 \in \Omega$ tel que $f(z_1) \neq 0$. Démontrer que $(x,y) \mapsto |f(x+iy)|$ est $\mathbb{R}$-différentiable en (x_1, y_1).
3. Soit $z_2 = x_2 + iy_2 \in \Omega$ tel que $f(z_2) \neq 0$ et tel que $z \mapsto |f(z)|$ soit $\mathbb{C}$-différentiable en z_2. Démontrer que $f'(z_2) = 0$. (On pourra utiliser les conditions de Cauchy-Riemann.)
4. Soit $z_3 = x_3 + iy_3 \in \Omega$ tel que $f(z_3) = 0$ et $f'(z_3) \neq 0$.
   L'application $(x,y) \mapsto |f(x+iy)|$ est-elle $\mathbb{R}$-différentiable en (x_3, y_3) ? L'application $z \mapsto |f(z)|$ est-elle $\mathbb{C}$-différentiable en z_3 ?
5. Donner le domaine où $z \mapsto |f(z)|$ est continue, puis celui où $z \mapsto |f(z)|$ est $\mathbb{C}$-différentiable, et enfin celui où $(x,y) \mapsto |f(x+iy)|$ est $\mathbb{R}$-différentiable.

[006813]

316 441.00 Fonction logarithme et fonction puissance

Exercice 6904

Montrer qu'il existe une (unique) fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ qui vaut $\sqrt{a^2-1}$ pour $a > 1$. *Indication :* montrer pour commencer que la formule $f(a) = \exp(\frac{1}{2}\text{Log}(a-1) + \frac{1}{2}\text{Log}(a+1))$ donne une solution sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$. Puis montrer que $g(a) = -\exp(\frac{1}{2}\text{Log}(-a-1) + \frac{1}{2}\text{Log}(-a+1)) = -f(-a)$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus [-1, +\infty[$. Enfin montrer que $g(a) = f(a)$ dans le demi-plan supérieur et aussi dans le demi-plan inférieur en calculant $f(\pm i)$ et donc $g(\pm i)$ et en expliquant pourquoi a priori le quotient $g(a)/f(a)$ est constant dans ces deux demi-plans. [002851]

Exercice 6905

1. On considère la fonction analytique $\phi(a) = \text{Log}(a-1) - \text{Log}(a+1)$ dans le demi-plan supérieur et la fonction analytique $\psi(a) = \text{Log}(a-1) - \text{Log}(a+1)$ dans le demi-plan inférieur. Montrer que ϕ et ψ sont la restriction à leurs demi-plans respectifs d'une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. *Indication :* il y a plusieurs raisonnements possibles et plusieurs indications possibles. Donc, débrouillez vous.
2. On considère la fonction $a \mapsto \frac{a-1}{a+1}$. Quelle est l'image par cette fonction de l'intervalle $]-1, 1[$? Quelle est l'image par cette fonction de $\mathbb{C} \setminus [-1, +1]$? En déduire que la fonction composée $\Phi(a) = \text{Log}\frac{a-1}{a+1}$ existe et est analytique sur $\mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. Retrouver le résultat de la question précédente (et montrer que ϕ, ψ et Φ coïncident dans les intersections deux-à-deux de leurs ouverts de définitions).
3. Quel est le développement en série de Laurent de la fonction analytique Φ dans la couronne $1 < |a| < \infty$? Que vaut par exemple $\int_{|a|=2} \Phi(a) a^{18} da$?

[002852]

Exercice 6906

Montrer qu'il n'existe pas de détermination holomorphe du logarithme de z sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tout entier. (On raisonnera par l'absurde et on exhibera ainsi une application continue injective du cercle unité dans $\mathbb{R}$). [006653]

Exercice 6907

Soit $\text{Log}z$ la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, ie $\text{Log}z = \text{Ln}|z| + i\text{Arg}z$ où $|\text{Arg}z| < \pi$, et on définit $z^\alpha = e^{\alpha \text{Log}z}$

1. On considère $z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$; comparer $\text{Log}(z^2)$ et $2\text{Log}z$.
2. On considère $z = e^{\frac{3i\pi}{4}}$; comparer z^{2i}, $(z^2)^i$ et $(z^i)^2$.

[006654]

Exercice 6908

On se propose de calculer les sommes de séries convergentes pour $0 < t < 2\pi$

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nt}{n}, \quad \sum_1^\infty \frac{\sin nt}{n}.$$

1. Rappeler pourquoi $S(z) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ coincide sur D avec la détermination principale $\mathrm{Log}(1-z)$.
2. Soit $r < 1$; calculer $\sum_{n\geqslant 1} \frac{r^n \cos nt}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{r^n \sin nt}{n}$.
3. En déduire la valeur de ces sommes (on pourra utiliser le théorème d'Abel).

[006655]

Exercice 6909

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction complexe sans zéro sur Ω. On rappelle que f admet un logarithme continu (resp. holomorphe) sur Ω s'il existe une fonction g continue (resp. holomorphe) sur Ω telle que $e^{g(z)} = f(z)$.
Montrer que deux déterminations continues du logarithme de f sur Ω diffèrent d'une constante $2ki\pi$.
En reproduisant la démonstration du théorème d'inversion locale, montrer que si f admet sur Ω un logarithme continu, elle y admet un logarithme holomorphe. [006656]

Exercice 6910

On rappelle qu'une fonction complexe f a une racine $n$ième holomorphe dans un ouvert connexe Ω s'il existe $g \in H(\Omega)$ telle que $g^n(z) = f(z)$.

1. Montrer que si f admet un logarithme holomorphe dans Ω, elle y admet des racines de tous ordres ; montrer, sur un exemple, qu'une fonction holomorphe f peut admettre une racine sans admettre de logarithme (holomorphe).
2. Si g_1, g_2 sont deux fonctions continues de Ω connexe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, telles que $g_1^n = g_2^n$ pour un entier $n \geqslant 1$, montrer que $g_1 = e^{\frac{2i\pi k}{n}} g_2$ où k est un entier et $g_1 = g_2$ dès que les fonctions coincident en un point.

[006657]

Exercice 6911

1. Montrer que $\mathrm{Re}(\cos z) > 0$ si $|\mathrm{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}$. En déduire une détermination holomorphe du logarithme de $\cos z$ dans $\{|\mathrm{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}\}$.
2. Montrer que l'on peut définir une fonction holomorphe $f(z) = \mathrm{Log}\frac{1+iz}{1-iz}$ sur l'ouvert $U = \mathbb{C}\backslash S$ où $S = \{ix\ ;\ |x| \geqslant 1\}$.
3. Montrer que l'on peut définir une fonction holomorphe $f(z) = \mathrm{Log}\sqrt{z^3-1}$ sur un ouvert U à déterminer (où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine).

[006658]

Exercice 6912

1. Soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash[-1,1]$; montrer que la fonction

$$g(z) = \exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z+1) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(z-1))$$

se prolonge en une fonction continue sur Ω et fournit ainsi une racine carrée holomorphe de z^2-1 dans Ω, bien que $\mathrm{Log}(z^2-1)$ n'ait pas de prolongement continu à Ω.
2. Construire de même une racine carrée holomorphe de z^2+1 sur l'ouvert connexe $\Omega'\mathbb{C}\backslash[-i,i]$.

Exercice 6913

Montrer que

$$\mathrm{Arg}(x+iy)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0\\ \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y>0\\ -\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y<0\end{cases}$$

En déduire que la fonction Arg est $\mathbb{R}$-différentiable sur l'ouvert Ω

$$\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)|\ y=0, x\leqslant 0\}$$

et calculer sa différentielle. [006660]

Exercice 6914

Soit w dans $\mathbb{C}$. Déterminer les nombres complexes z tels que $\cos z=\cos w$. Même question avec le sinus. [006661]

Exercice 6915

Si $z=x+iy$ avec x et y réels, montrer que l'on a

$$\begin{aligned}|\sin z|^2 &= \sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y\\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y\end{aligned}$$

En déduire les zéros de $\sin z$ et $\cos z$ dans $\mathbb{C}$. [006662]

Exercice 6916

Montrer que la fonction $f(z)=\tan z$ définie par $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ réalise une bijection de $T=\{z\in\mathbb{C}|-\pi/2<\mathrm{Re}\,z\leqslant \pi/2,\ z\neq\pi/2\}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$. On pourra écrire $f=f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1$ avec $f_1(z)=2iz$, $f_2(z)=e^z$, $f_3(z)=\frac{1-z}{1+z}$, $f_4(z)=iz$. [006663]

Exercice 6917

Résoudre les équations $e^z=-3$, $\cos z=2$, $\sin z=2$, $\tan z=2i$, $\operatorname{ch} z=1/2$ de la manière suivante :

1. en identifiant les parties réelles et imaginaires
2. en utilisant le logarithme

[006664]

Exercice 6918

1. En utilisant la détermination principale du logarithme, on définit les fonctions $z\mapsto z^{1/2}$, $z\mapsto(1-z)^{1/3}$, $z\mapsto((1-2i)z)^{2i/5}$. Donner leur domaine de définition.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit f une détermination continue de $z^{1/n}$. Montrer que $f(z)^n=z$ sur son domaine de définition.

[006665]

Exercice 6919

On considère $f(z)=\sqrt{z^2}=(z^2)^{1/2}$ définie à l'aide de la détermination principale du logarithme.

1. Trouver le domaine de définition et donner une expression explicite de f.
2. Peut-on prolonger f par continuité sur un ouvert plus grand ?
3. Mêmes questions en prenant la détermination $\log z=\mathrm{Log} z+2i\pi$.

[006666]

Exercice 6920

On définit à l'aide de la détermination principale du logarithme les fonctions $f_1(z) = (z^3-1)^{1/2}$, $f_2(z) = (z-1)^{1/2}(z-j)^{1/2}(z-j^2)^{1/2}$, et $f_3(z) = (1-z)^{1/2}(iz-ij)^{1/2}(iz-ij^2)^{1/2}$, où $j = e^{i\pi/3}$.

1. Trouver les domaines de définition des f_k et montrer que l'on a toujours $f_k(z)^2 = z^3-1$.
2. Montrer que l'on peut prolonger f_3 par continuité sur un ouvert plus grand.

[006667]

Exercice 6921

On veut démontrer qu'il existe une détermination continue f de $\sqrt{1-z^2}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ telle que $f(i) = \sqrt{2}$.

1. Définir f sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$ au moyen des fonctions $\mathrm{Arg}(z+1)$ et $\mathrm{Arg}(z-1)$.
2. Soit x un réel strictement inférieur à 1. Etudier $\lim_{y\to 0} f(x+iy)$ quand y tend vers 0 par valeurs positives puis négatives. Conclure.
3. Montrer qu'on obtient ainsi une application f telle que $f(U) \subset U$ et $f \circ f = -\mathrm{Id}_{|\mathrm{U}}$. En déduire que f est une bijection de U sur lui-même.

[006668]

Exercice 6922

On note Log : $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ la détermination principale du logarithme, qui est réelle pour z réel positif. On pose

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\big(\tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(z) + \tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(z-1) + \tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(z+1)\big) \\ g(z) &= \exp\big(\tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(-z) + \tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(1-z^2)\big) \ . \end{aligned}$$

1. Déterminer les domaines de définition $\Omega_f \subset \mathbb{C}$ de f et $\Omega_g \subset \mathbb{C}$ de g et montrer que f et g sont des branches continues de $\sqrt[3]{z^3-z}$.
2. Est-ce-qu'on peut élargir le domaine de définition de f, c'est à dire : existe-t-il un ouvert $\widehat{\Omega}_f \subset \mathbb{C}$ et une fonction continue $\widehat{f} : \widehat{\Omega}_f \to \mathbb{C}$ telle que $\Omega_f \subset \widehat{\Omega}_f$ et pour tout $z \in \Omega_f$ on a $\widehat{f}(z) = f(z)$? N'oubliez pas de justifier votre réponse !
3. Est-ce-qu'on peut élargir le domaine de définition de g ?

[006806]

Exercice 6923

On définit les fonctions f_1, f_2 et f_3 par les formules

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \exp(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Log}(z+1) + \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z-1) + \mathrm{Log}(z-\sqrt{3})]) \\ f_2(z) &= \exp(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Log}(z+1) + \mathrm{Log}(-z) + \mathrm{Log}(1-z) + \mathrm{Log}(\sqrt{3}-z) + i\pi]) \\ f_3(z) &= \exp(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Log}(-1-z) + \mathrm{Log}(-z) + \mathrm{Log}(1-z) + \mathrm{Log}(z-\sqrt{3}) + i\pi]) \ , \end{aligned}$$

où Log désigne le logarithme principal.

1. Calculer $f_1(\pm i)$, $f_2(\pm i)$ et $f_3(\pm i)$.
2. Déterminer les domaines de définition de f_1, f_2 et f_3.
3. Démontrer que f_1, f_2 et f_3 sont des déterminations continues de $\sqrt[3]{z^4 - \sqrt{3}z^3 - z^2 + \sqrt{3}z}$.
4. Peut-on prolonger f_1 sur un ouvert plus grand ? Si oui, lequel ?
5. Peut-on prolonger f_2 sur un ouvert plus grand ? Si oui, lequel ?

6. Peut-on prolonger f_3 sur un ouvert plus grand ? Si oui, lequel ?
7. Y-a-t-il un lien entre f_1, f_2 et f_3 ?

[006824]

317 442.00 Formule de Cauchy

Exercice 6924

Le Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est un opérateur différentiel qui joue un rôle important en analyse complexe. Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe sur un ouvert du plan complexe. On sait que f, donc u et v, admettent des dérivées partielles de tous les ordres. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, montrer que u et v vérifient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

On dit d'une fonction vérifiant l'équation de Laplace qu'elle est harmonique. La fonction holomorphe $f = u + iv$ est aussi une fonction harmonique puisque $\Delta(f) = \Delta(u) + i\Delta(v) = 0$.

Correction ▼ [002806]

Exercice 6925

On veut exprimer les équations de Cauchy-Riemann avec les coordonnées polaires r et θ. Les équations de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) F = 0$$

donc il s'agit d'exprimer $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial r}$ et de $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Lorsque l'on travaille sur un ouvert (ne contenant pas l'origine) sur lequel une détermination continue de l'argument θ est possible (par exemple sur $\Omega = \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$). Montrer :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

En déduire $\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \sin(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$. Montrer alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = e^{i\theta}\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

En déduire qu'en coordonnées polaires les équations de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire (en particulier) sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = ir\frac{\partial F}{\partial r}$$

Correction ▼ [002807]

Exercice 6926

Il est intéressant que l'équation de l'exercice précédent $\frac{\partial F}{\partial \theta} = ir\frac{\partial F}{\partial r}$, peut se réécrire dans le système de coordonnées $(a,b) = (\log(r), \theta)$ sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial b} = i\frac{\partial F}{\partial a} \, ,$$

autrement dit exactement sous la même forme qu'ont les équations de Cauchy-Riemann originelles dans les coordonnées cartésiennes (x,y).[5] Or a et b sont les parties réelles et imaginaires de la combinaison $a+ib$ qui est holomorphe comme fonction de $x+iy$: $a+ib=\log(x+iy)$. Montrer que cela est général : dans un système de coordonnées (a,b) telles que $w=a+ib$ est une fonction holomorphe de $z=x+iy$ les équations de Cauchy-Riemann pour l'holomorphie (par rapport à (x,y)) d'une fonction F sont $\frac{\partial F}{\partial b}=i\frac{\partial F}{\partial a}$ (ce qui équivaut à l'holomorphie de F comme fonction "sur le plan de $w=a+ib$"[6]). Indication : prouver l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\partial a}{\partial x}-i\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial a}+i\frac{\partial}{\partial b}\right),$$

en exploitant les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial b}{\partial x}=-\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial x}=+\frac{\partial b}{\partial y}$ pour $a+ib=g(x+iy)$.

Correction ▼ [002808]

Exercice 6927

On veut exprimer le Laplacien avec les coordonnées polaires r et θ : autrement dit pour toute fonction deux fois différentiable Φ on veut calculer la fonction $\Delta(\Phi)$ à l'aide des opérateurs de dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$, lorsque l'on travaille sur un ouvert (ne contenant pas l'origine) dans lequel une détermination continue de l'argument θ est possible (par exemple sur $\Omega=\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$). Une méthode possible est d'utiliser les expressions obtenues dans l'exercice 6925 :

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}-\sin(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\qquad\frac{\partial}{\partial y}=\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}+\cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

et de calculer ensuite $(\frac{\partial}{\partial x})^2$ et $(\frac{\partial}{\partial y})^2$ puis de faire la somme. Mais cela donne des calculs un peu longs. Voici une ruse : en reprenant une formule déjà établie dans l'exercice 6925 montrer

$$(x-iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}-i\frac{\partial}{\partial\theta}$$

On remarquera maintenant que l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}$ appliqué à la fonction $x+iy$ donne zéro. Donc (expliquer !) :

$$(x-iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)=(x-iy)(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Prouver alors en conclusion :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}\left((r\frac{\partial}{\partial r})^2+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}.$$

[002809]

Exercice 6928

Soit $\gamma=[A,B]+[B,C]+[C,D]+[D,A]$ le bord (parcouru dans le sens direct) du carré de sommets $A=1-i$, $B=1+i$, $C=-1+i$, $D=-1-i$. Déterminer les intégrales suivantes :

1. $\int_\gamma dx$, $\int_\gamma x\,dx$, $\int_\gamma x^2\,dx$, $\int_\gamma y\,dx$, $\int_\gamma y^2\,dx$, $\int_\gamma y^3\,dx$,
2. $\int_\gamma x\,dx+y\,dy$, $\int_\gamma x\,dy+y\,dx$, $\int_\gamma x\,dy-y\,dx$,
3. $\int_\gamma dz$, $\int_\gamma z\,dz$, $\int_\gamma x\,dz$, $\int_\gamma z\,dx$,

5. $\frac{\partial F}{\partial y}=i\frac{\partial F}{\partial x}$, ou, plus mnémotechnique : $\frac{\partial F}{i\partial y}=\frac{\partial F}{\partial x}$ qui dit "holomorphe $\Leftrightarrow$ iy est comme x".

6. autrement dit pour qu'une fonction soit holomorphe comme fonction de $x+iy$ il est nécessaire et suffisant qu'elle soit holomorphe comme fonction de $a+ib$. En particulier $x+iy$ est une fonction holomorphe de $a+ib$: on a donc prouvé que la réciproque d'une bijection holomorphe est aussi holomorphe. Nous reviendrons là-dessus avec d'autres méthodes (dont celle très concrète de l'"inversion" d'une série entière).

4. $\int_\gamma z^{-1}\,dz$, $\int_\gamma z^{-2}\,dz$, $\int_\gamma z^n\,dz$, pour $n\in\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002810]

Exercice 6929

Avec les mêmes notations on veut évaluer $\int_\gamma \overline{z^n}\,dz$, $n\in\mathbb{Z}$. Justifier les étapes suivantes :

$$\int_\gamma \overline{z^n}\,dz = \overline{\int_\gamma z^n\,\overline{dz}}$$
$$\int_\gamma z^n\,\overline{dz} = \int_{[B,C]} z^n\,dz - \int_{[C,D]} z^n\,dz + \int_{[D,A]} z^n\,dz - \int_{[A,B]} z^n\,dz\,,$$

et compléter le calcul, pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002811]

Exercice 6930

On note C le cercle de rayon 1 parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C z^n\,dz$ et $\int_\gamma z^n\,dz$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, et vérifier qu'il y a toujours égalité (ici $\gamma=\partial\mathscr{R}$ est à nouveau le bord du carré qui a été utilisé dans les exercices précédents). Calculer $\int_C \bar{z}^n\,dz$ et $\int_\gamma \bar{z}^n\,dz$ et trouver les cas d'égalités et d'inégalités.

Correction ▼ [002812]

Exercice 6931

Soit C un cercle de centre quelconque, parcouru dans le sens direct, et ne passant pas par l'origine. Calculer $\int_C z^n\,dz$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ dans le cas où C encercle l'origine, et dans le cas où C n'encercle pas l'origine. *Indication* pour $n=-1$: soit w l'affixe du centre du cercle, et R son rayon. Paramétrer le cercle par $z = w(1+\frac{R}{|w|}e^{i\theta})$, $-\pi<\theta\leqslant+\pi$, puis utiliser un développement en série en distinguant les cas $R>|w|$ et $R<|w|$. Ou encore invoquer la fonction $\mathrm{Log}(z/w)$.

Correction ▼ [002813]

Exercice 6932

Soit $0<a<b$ sur l'axe réel positif et soit $C=\{|z|=r\}$ le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Montrer :

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz = 2\pi i\begin{cases}0 & r<a\\ \frac{1}{a-b} & a<r<b\\ 0 & r>b\end{cases}$$

On pourra réduire la fraction en élément simples, puis se ramener au résultat de l'exercice précédent. Ou encore, on pourra envisager des développements en séries, pour se ramener par étapes aux intégrales $\int_C z^n dz$, $n\in\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [002814]

Exercice 6933

Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct. Calculer

$$\int_C\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}\quad(n\in\mathbb{N})$$

en développant par la formule du binôme et en utilisant les valeurs connues de $\int_C z^k dz$, $k\in\mathbb{Z}$. En déduire $\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^n t\,dt$. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$ pour n pair :

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}t\,dt=\frac{1.3.\cdots.(2m-1)}{2.4.\cdots.(2m)}\,\frac{\pi}{2}$$

Correction ▼ [002815]

Exercice 6934

On pose $J_m = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} t\, dt$, pour $m \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties J_{m+1} obtenir la relation de récurrence $J_{m+1} = \frac{2m+2}{2m+3} J_m$ et prouver : [7]

$$J_m = \frac{2.4.\cdots.(2m)}{3.5.\cdots.(2m+1)}$$

[002816]

Exercice 6935

En utilisant $I_{m+1} \leqslant J_m \leqslant I_m$, obtenir :

$$\frac{2m+1}{2m+2} \frac{(1.3.\cdots.(2m-1))(3.5.\cdots.(2m+1))}{(2.4.\cdots.(2m))^2} \leqslant \frac{2}{\pi} \leqslant \frac{(1.3.\cdots.(2m-1))(3.5.\cdots.(2m+1))}{(2.4.\cdots.(2m))^2}$$

En déduire la formule de Wallis :

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{1.3}{2.2} \frac{3.5}{4.4} \cdots \frac{(2m-1).(2m+1)}{(2m).(2m)} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4m^2}\right)$$

[002817]

Exercice 6936

Justifier le réarrangement suivant (qui découle aussi du terme de gauche dans l'inégalité de l'exercice précédent) : $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \frac{3.3.5.5....}{2.4.4.6....} = \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right)^{-1}$, soit encore :

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right) .$$

[002818]

Exercice 6937

Justifier également sur la base des formules précédentes les équivalents asymptotiques :

$$\binom{2m}{m} \sim_{m\to\infty} \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$$

$$\frac{(1+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2})\cdots(m+\frac{1}{2})}{1.2.\cdots.m} \sim 2\sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

$$\frac{(\frac{1}{2})_m}{m!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

[002819]

Exercice 6938

Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon infini. Montrer que pour $r > 0$ et $n \geqslant 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, dt$$

.

En déduire que si $|f(z)| \leqslant A + B|z|^k$ pour tout z de module $\geqslant R$, f est un polynôme. [006669]

Exercice 6939

On se propose de calculer $I = \int_{-\pi}^{\pi} \ln|re^{i\theta} - a|\, d\theta$, où $0 < r < |a|$.

7. par convention lorsqu'un produit porte sur un ensemble vide il vaut 1. Donc la formule est bien compatible avec $J_0 = 1$.

1. Vérifier que I est bien définie.
2. On considère f la fonction définie sur $\Omega = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$ par $f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{Log}(1 - \frac{z}{a})$, où Log est la détermination principale du logarithme sur Ω. Montrer que f est holomorphe sur un ouvert contenant le cercle $\{z = re^{i\theta}\}$.
3. En déduire $I = 2\pi \ln |a|$.

[006670]

Exercice 6940

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ de module $\neq 0, 1$, et $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)\, d\theta}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1}$.

1. Vérifier que I est bien définie.
2. On considère f définie par $f(z) = \dfrac{z^n}{(z-\lambda)(z-\lambda^{-1})}$; en calculant l'intégrale de f sur le cercle unité, trouver la valeur de I (distinguer les deux cas $|\lambda| > 1, |\lambda| < 1$).

[006671]

Exercice 6941

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\bar{D}$ et $f \in H(U)$. On note γ le paramétrage de ∂D par $t \in [0, 2\pi] \to e^{it}$.

1. Calculer $I_1 = \displaystyle\int_\gamma (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z}\, dz$ et $I_2 = \displaystyle\int_\gamma (2 - z - \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z}\, dz$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2(\frac{\theta}{2})\, d\theta$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2(\frac{\theta}{2})\, d\theta$.
3. Pour $|a| \neq 1$, évaluer $I(a) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\, dz$.

[006672]

Exercice 6942

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, F et G deux fonctions holomorphes dans Ω et γ: $[a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin tel que $\gamma^* \subset \Omega$. Montrer que
$$\int_\gamma F(z)G'(z)\, dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b)) - F(\gamma(a))G(\gamma(a)) - \int_\gamma F'(z)G(z)\, dz$$
2. Calculer $\int_\gamma (z+2)e^{iz}\, dz$, où γ est l'arc de parabole $\gamma(t) = t + i\dfrac{t^2}{\pi^2}$ joignant (0,0) à $(\pi, 1)$.

[006673]

Exercice 6943

En évaluant $\int_C e^z\, dz$ sur le cercle unité, montrer que
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta)\, d\theta = 0$$

[006674]

Exercice 6944

Calculer
$$\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z},$$
où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \cos^n t\, dt$. [006675]

Exercice 6945

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\, dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
2. $\int_\gamma \frac{\sin z}{z}\, dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
3. $\int_\gamma \frac{\cos z^2}{z}\, dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
4. $\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^3+z}\, dz$ où $\gamma(t) = 2e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
5. $\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n}$ $(n \in \mathbb{Z})$, où γ est un chemin fermé ne passant pas par a
6. $\int_{\gamma_r} \frac{3z^2-12z+11}{z^3-6z^2+11z-6}\, dz$, où $\gamma_r(t) = re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
7. $\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$, $n \in \mathbb{N}^*$, où $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$

[006676]

Exercice 6946

Soit $I(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+z^2} dt$.

1. Pour quelles valeurs de z $I(z)$ est-elle définie ?
2. Montrer que pour $\operatorname{Re} z > 0$, on a
$$I(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{Log} z + \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt\right),$$
où Log est la détermination principale du logarithme. On pourra considérer le chemin fermé $\Gamma_{\varepsilon,R} = [\varepsilon, R] + \gamma_R + [Re^{i\varphi}, \varepsilon e^{i\varphi}] - \gamma_\varepsilon$, où $\varphi = \operatorname{Arg} z$ et $\gamma_r\colon t \mapsto re^{it}$, $t \in [0, \varphi]$.
3. Qu'obtient-on pour $\operatorname{Re} z < 0$?

[006677]

Exercice 6947

Soit $a > 0$ et $\gamma\colon t \mapsto a + it$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère
$$J(\alpha) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{\alpha z}}{z^2} dz.$$

1. Montrer que cette intégrale converge.
2. En considérant les chemins fermés $[a - iR, a + iR] + \gamma_R$, où γ_R^* est un demi-cercle de diamètre $[a - iR, a + iR]$, montrer que $J(\alpha) = 0$ si $\alpha \leqslant 0$ et $j(\alpha) = \alpha$ si $\alpha \geqslant 0$.

[006678]

Exercice 6948

Pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on désigne par C_n^k le coefficient binomial. Pour $r > 0$, soit $c_r\colon t \mapsto re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

1. Montrer que
$$C_n^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} (1+z)^n \frac{dz}{z^{k+1}}.$$
En déduire que $C_{2n}^n \leqslant 4^n$.
2. Montrer que
$$C_{2n}^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \left(\frac{1}{z} + 2 + z\right)^n \frac{dz}{z}$$

(on pourra utiliser 1.). En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n \frac{1}{5^n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{dz}{3z-1-z^2)} = \sqrt{5},$$

à condition que $r_1 < r < r_2$, où $r_1 < r_2$ sont les deux racines de $3z - 1 - z^2 = 0$.

3. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} (1+z)^n \left(1+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2.$$

En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n.$$

4. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_1} \frac{(z-1)^{2n}(z+1)^n}{z^{2n+1}} dz = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{2n}^k.$$

Montrer que si $z \in c_1^*$, $|z-1|^2|z+1| \leqslant \frac{16}{9}\sqrt{3}$. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{2n}^k \leqslant \left(\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)^n.$$

[006679]

Exercice 6949

1. Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{re^{it}}\, dt$ est indépendant de $r > 0$.
2. Montrer que $\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}(1 - re^{it})\, dt$ est indépendant de $r \in]0,1[$ (Log désigne la branche principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$).

[006680]

Exercice 6950

Calculer de deux manières $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ où $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$ ($t \in [0,2\pi]$, $a,b \in \mathbb{R}_+^*$) et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

[006681]

Exercice 6951

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé et $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0,2\pi]$). Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left(\frac{f(z)}{z-a} + \frac{ag(z)}{az-1}\right) dz = \begin{cases} f(a) & \text{si } |a| < 1 \\ g(1/a) & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$$

[006682]

Exercice 6952

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant $\overline{D(a,r)}$. Montrer que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

(propriété de la moyenne). [006683]

Exercice 6953

Soit f une fonction continue dans le secteur

$$\{z \in \mathbb{C} |\ -\alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \alpha\}$$

On suppose que $zf(z)$ tend vers $A \in \mathbb{C}$ quand $|z|$ tend vers l'infini, z restant dans ce secteur. Notons C_R la partie du cercle de centre 0 et de rayon R contenue dans ce secteur. Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 2i\alpha A$$

[006684]

Exercice 6954

1. Soit $C \subset \mathbb{C}$ une courbe orientée C^1 et fermée. Soit γ un chemin C^1 d'origine a et d'extrémité b, tels que a et b ne soient pas des points de C. On suppose que l'intersection de C et γ est constituée d'un nombre fini de points $m_1, \dots, m_n$ et que les tangentes à C et à γ sont distinctes en ces points. Soit $\varepsilon_i = 1$ si l'angle de la tangente à γ avec la tangente à C en m_i est entre 0 et π, $\varepsilon_i = -1$ sinon. Montrer que
$$\sum_i \varepsilon_i = \operatorname{Ind}_C(a) - \operatorname{Ind}_C(b)$$
où $\operatorname{Ind}_C(z)$ désigne l'indice de z par rapport à C.
2. Calculer l'indice du point $z = \frac{3}{4}$ par rapport à la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est $r = \cos\frac{\theta}{3}$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi$, parcourue dans le sens des θ croissants.

[006685]

Exercice 6955

On considère la série entière

$$L(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$$

Soit $f(z) = \frac{-\operatorname{Log}(1-z)}{z}$ où Log désigne la détermination principale du logarithme complexe.

1. On note $U = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. Montrer que f est définie dans U.
2. Vérifier que si $D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$, on a $L'(z) = f(z)$.
3. En déduire qu'il existe une primitive de f, définie dans U tout entier, dont la restriction à D est égale à L. On note cette primitive L par abus de langage.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$. Calculer $\lim_{y\to 0} L(x+iy) - L(x-iy)$ comme fonction de x.

[006686]

Exercice 6956

1. Soit P un polynôme qui ne s'annule pas sur le cercle $|z| = 1$. Montrer que le nombre de zéros de P à l'intérieur du cercle unité est
$$\frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{Arg} P(e^{i\theta})\right]_0^{2\pi}$$
(variation d'une détermination continue de l'argument sur le cercle unité). On utilisera le théorème de d'Alembert pour factoriser P en facteurs de degré 1, puis on considèrera l'indice de chacune des racines par rapport au cercle.

2. Soit P un polynôme n'ayant aucun zéro sur le cercle $|z|=1$ et ayant exatement k racines (comptées avec multiplicité) à l'intérieur du cercle unité. Montrer que la fonction

$$\theta \mapsto \operatorname{Re} P(e^{i\theta})$$

s'annule au moins $2k$ fois pour $\theta \in [0,2\pi]$ (indication : étudier les zéros de la fonction $\cos \operatorname{Arg} P(e^{i\theta})$, où Arg est une détermination continue de l'argument).

[006687]

Exercice 6957

1. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ une détermination holomorphe de $(z^2-1)^{-1/2}$ qui prend la valeur 1 pour $z=\sqrt{2}$. Unicité ? On désignera par f cette détermination.
2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on désigne par γ_z le segment $]0,z]$ orienté de 0 vers z et on pose

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

   (a) Montrer que F est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (quelle en est la dérivée F' ?).
   (b) Etudier $\lim_{z' \to z} F(z')$ lorsque $z \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$.
   (c) En déduire que f n'a pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

[006688]

Exercice 6958

1. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leqslant 1 + e^{|z|} \sin |z|$ pour tout z. Montrer que f est une constante.
2. Soit $f \in H(D)$ telle que $|f(z)|(1-|z|) \leqslant 1$ pour $z \in D$. Montrer que pour tout n $|a_n| < e(n+1)$.

[006689]

Exercice 6959

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier et soit γ_R un paramétrage du cercle $C(0,R)$, $R>0$. Calculer pour $|z|<R$: $\frac{z}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w(w-z)}\, dw$; en déduire que si $\sup_R \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|\, dt < \infty$, f est constante. Quel théorème retrouve-t-on ? [006690]

Exercice 6960

Soit f un polynôme de degré $n>0$, supposé sans zéros dans $\mathbb{C}$, et γ_R le cercle centré en 0, de rayon R. Calculer $I_R = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{nf(z)-zf'(z)}{zf(z)}\, dz$, et trouver sa limite lorsque $R \to +\infty$. Quel théorème retrouve-t-on ? [006691]

Exercice 6961

Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$.

1. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$ notés $z_1, \dots z_k$.
2. En déduire que f est un polynôme. (Pour cela considérer $f(z)/P(z) = g(z)$ où $P(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_k)$ et montrer que $1/g$ est entière) .

[006692]

Exercice 6962

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω contenant 0. Montrer que :

1. Si $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ pour n assez grand alors $f(z) = \frac{z}{z+1}$ sur $\Omega \cap D(0,1)$.
2. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{2n})$ pour n assez grand alors f est constante sur Ω.

3. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n+1})$ pour n assez grand alors f est constante sur Ω.
4. $f(\frac{1}{n}) = 2^{-n}$ pour n assez grand est impossible.

[006693]

Exercice 6963

On considère la série entière $\sum_0^\infty 2^n z^n$. Calculer sa somme f dans son disque de convergence. Trouver le plus grand ouvert connexe de $\mathbb{C}$ sur lequel f se prolonge en une fonction holomorphe. Donner le développement en série de f au point $z = -1/4$ et le rayon de convergence de cette série. [006694]

Exercice 6964

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω sur lequel elle ne s'annule pas. Alors sont équivalentes :
(i) Il existe une détermination holomorphe du logarithme de f sur Ω.
ii) $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ pour toute γ une courbe fermée dans Ω de classe C^1 par morceaux.
(iii) $\frac{f'}{f}$ admet une primitive sur Ω. [006695]

Exercice 6965

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. On va montrer l'équivalence entre
(i) f admet un logarithme holomorphe dans Ω.
(ii) f admet des racines **de tous ordres** holomorphes dans Ω.
On a vu que (i) implique (ii). Supposons maintenant que (ii) est vérifié : pour chaque n on note f_n la fonction de $H(\Omega)$ telle que $f_n^n(z) = f(z)$ si $z \in \Omega$.

1. Soit a un zéro de f ; que peut-on dire de la multiplicité de a ? En déduire que f ne s'annule pas sur Ω.
2. Soit γ une courbe fermée dans Ω de classe C^1 par morceaux. On pose $I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$, et $I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz$. Montrer que I et I_n sont des entiers, $I = nI_n$, puis que $I = 0$. Conclure.

[006696]

Exercice 6966

Soit f une fonction entière ; on pose, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{r^{p+1}} = 0$$
Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus p.
2. On suppose qu'il existe $R \geqslant 0$, $K > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que
$$|z| > R \Longrightarrow |f(z)| \leqslant K|z|^p$$
Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus p. Montrer que si de plus $R = 0$ alors f est un monôme de degré p.
3. En déduire que si f vérifie
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f'(z)| \leqslant |z|$$
alors f est de la forme $f(z) = a + bz^2$ avec $|b| \leqslant 1/2$.

[006697]

Exercice 6967

Soit $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Pour $r<R$, soit $\gamma_r : t\mapsto re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ et

$$I(r)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}|f(z)|^2\frac{dz}{z}.$$

1. Montrer que $I(r)=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n}$.
2. En déduire une nouvelle démonstration des inégalités de Cauchy et montrer que si f n'est pas un monôme, ces inégalités sont strictes.
3. En considérant $f(z)=1/(1-z)^2$, montrer que pour $r<1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1-2r\cos t+r^2)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2r^{2n-2}.$$

[006698]

Exercice 6968

Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert D vérifiant

$$\forall z\in D,\ |f(z)|<\frac{1}{1-|z|}.$$

Montrer que les coefficients a_n du développement $f(z)=\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ vérifient

$$\forall n\geqslant 1,\ |a_n|<(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<(n+1)e \text{ et } \ a_0|<e.$$

[006699]

Exercice 6969

Montrer qu'une fonction entière admettant 1 et i comme périodes est constante. [006700]

Exercice 6970

Soit f une fonction entière non constante ne s'annulant pas. Montrer que

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall r>0,\ \exists z\in\mathbb{C}, |z|>r \text{ et } |f(z)|<\varepsilon$$

Application : tout polynôme non constant admet un zéro dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert). [006701]

Exercice 6971

Déterminer toutes les fonctions f holomorphes dans le disque $D(0,R)=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|<R\}$ telles que

$$\forall z\in D(0,\frac{R}{2}),\ f(z)=f(2z).$$

[006702]

Exercice 6972

On considère la série entière $f(z)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$.

1. Montrer que f admet un prolongement analytique sur un ouvert que l'on déterminera.
2. Déterminer le développement en série entière de ce prolongement en i. Quel est son rayon de convergence ?

[006703]

Exercice 6973

Soit $F_1(z)=\int_0^{+\infty}e^{-(z+1)^2t}dt$.

1. Déterminer l'ouvert E sur lequel F_1 définit une fonction holomorphe.
2. Montrer que F_1 se prolonge analytiquement en une fonction F sur un ouvert que l'on déterminera. Calculer $F(2-4i)$.

[006704]

Exercice 6974

Existe-t-il des fonctions f holomorphes sur $D(0,1)$ telles que pour tout entier $n>0$

1. $f\left(\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{n}$?
2. $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$?
3. $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n^3}$?

[006705]

Exercice 6975

Déterminer explicitement pour $a\in\mathbb{R}$

$$\max_{|z|\leqslant 1}|z^2+2aiz+1|.$$

[006706]

Exercice 6976

Soient $P_1,P_2,\ldots,P_k$ k points du plan. On désigne par $d(A,B)$ la distance entre deux points A et B du plan. Soit D un ouvert connexe borné du plan. Montrer que le sup de $\prod_{1\leqslant j\leqslant k} d(M,P_j)$ sur D est atteint sur la frontière de D. [006707]

Exercice 6977

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et ne s'annulant pas sur Ω. On suppose qu'il existe $a\in\Omega$ et $\varepsilon>0$ tels que $|f(z)|\geqslant|f(a)|$ pour $|z-a|<\varepsilon$. Montrer que f est constante. [006708]

Exercice 6978

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$, non constante, telle que $|f|$ est constant sur la frontière de Ω. Montrer que f admet un zéro dans Ω. [006709]

Exercice 6979

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\{z\in\mathbb{C}|\ |z-z_0|\leqslant r\}$, et f une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(z)\in\mathbb{R}$ si $|z-z_0|=r$. Montrer que f est constante (considérer e^{if}). [006710]

Exercice 6980

Soient f et g deux fonctions holomorphes et ne s'annulant pas dans un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé. On suppose que pour $|z|=1$, $|f(z)|=|g(z)|$ et que $f(0)$ et $g(0)$ appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f=g$ sur Ω. [006711]

Exercice 6981

Soit f une fonction holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C}|\ |z|<R\}$. Si $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ pour $|z|<R$, on pose pour $0\leqslant r<R$:

$$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|,\ M_1(r,f)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n,$$

$$M_2(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta\right)^{1/2}.$$

1. (a) Montrer que pour $0 \leqslant r < R$,

$$M_2(r,f) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \right)^{1/2}.$$

   (b) Déduire de (a) que $r \mapsto M_2(r,f)$ est une fonction continue croissante.

   (c) Déduire de (a) une autre démonstration des inégalités de Cauchy.

2. (a) Montrer que pour $0 \leqslant r < r\alpha < R$, on a

$$M(r,f) \leqslant M_1(r,f) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} M(\alpha r, f)$$

   (pour démontrer la seconde inégalité, on pourra utiliser les inégalités de Cauchy).

   (b) Montrer que la fonction $r \mapsto M(r,f)$ est continue et croissante, et même strictement croissante si f n'est pas constante.

3. On rappelle que si les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} |\alpha_n|^2$ et $\sum_{n\geqslant 0} |\beta_n|^2$ convergent (où $\alpha_n \in \mathbb{C}$ et $\beta_n \in \mathbb{C}$), la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \overline{\beta_n}$ converge et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \overline{\beta_n} \right|^2 \leqslant \left(\sum_{n\geqslant 0} |\alpha_n|^2 \right) \left(\sum_{n\geqslant 0} |\beta_n|^2 \right).$$

   Montrer que pour $\alpha \in]0,1[$, on a

$$\sqrt{1-\alpha^2} M_1(r\alpha, f) \leqslant M_2(r,f) \leqslant M(r,f).$$

4. En utilisant les questions 2. et 3., montrer que si $0 \leqslant r < R$,

$$\lim_{n\to\infty} M_1(r,f^n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} M_2(r,f^n)^{1/n} = M(r,f)$$

   (on pourra remarquer que $M(r,f^n) = M(r,f)^n$).

[006712]

Exercice 6982

Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans un ouvert Ω connexe contenant le disque fermé $\overline{D(z_0,r)}$. Soit γ le cercle $\{z| \, |z-z_0| = r\}$ orienté positivement.

1. Montrer que f a un nombre fini de zéros dans $D(z_0,r)$.
2. On suppose que f n'a pas de zéros sur γ^*. Calculer $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} z^p dz$ pour $p = 0,1,\dots$ (utiliser les zéros de f dans $D(z_0,r)$).
3. On suppose toujours que f n'a pas de zéros sur γ^*. On prend $p = 0$. Montrer que l'intégrale précédente est égale au nombre total de zéros de f dans $D(z_0,r)$. Montrer que ce nombre est aussi l'indice du point 0 par rapport à la courbe fermée $\Gamma = f(\gamma)$.
4. Soit $w_0 = f(z_0)$ et n la multiplicité du zéro z_0 pour la fonction $f(z) - w_0$. Montrer que l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $f'(z)$ ne s'annule pas pour $0 < |z-z_0| < \varepsilon$, et qu'il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout a avec $|a - w_0| < \delta$, l'équation $f(z) = a$ a exactement n racines dans le disque $|z - z_0| < \varepsilon$.
5. En déduire le principe du maximum : si f est holomorphe et non constante dans Ω, alors $|f|$ n'a pas de maximum dans Ω.

[006713]

Exercice 6983

Soit D le disque unité ouvert :

$$D = \{z \in \mathbb{C}| \, |z| < 1\}$$

et C le cercle unité :

$$C = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}.$$

Pour $a \in D$, on considère l'application homographique Φ_a :

$$\Phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

1. Montrer que $\Phi_a(C) \subset C$, puis que Φ_a est une bijection de D sur lui-même, de réciproque Φ_{-a}.
2. Soit f un biholomorphisme de D, c'est-à-dire une fonction holomorphe de D sur lui-même, bijective, telle que f^{-1} soit aussi holomorphe. Soit $a = f^{-1}(0)$. En considérant $f \circ (\Phi_a)^{-1}$ et sa réciproque, montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall z \in D, \ f(z) = e^{i\varphi}\Phi_a(z),$$

c'est-à-dire qu'à rotation près, les seuls biholomorphismes du disque sont les Φ_a.

[006714]

Exercice 6984

Soit D le disque unité ouvert et f une fonction holomorphe de D dans lui-même. Soit Φ_a la fonction définie dans l'exercice précédent. Quelle est l'image de 0 par $h = \Phi_{f(a)} \circ f \circ (\Phi_a)^{-1}$? En déduire que pour tout z de D,

$$\left| \frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)} \right| \leqslant \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right|$$

puis

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$

(lemme de Schwarz-Pick). [006715]

Exercice 6985

Soit D le disque unité ouvert et f une fonction holomorphe de D dans D. On suppose que f admet au moins deux points fixes, c'est-à-dire qu'il existe a et b dans D , $a \neq b$, tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Montrer que f est l'identité de D. On pourra utiliser l'application Φ_a définie dans l'exercice 6983 pour se ramener au cas où l'un des points fixes est 0. [006716]

Exercice 6986

Soit D le disque unité ouvert. On dira qu'une fonction E est unitaire si elle est holomorphe dans D, continue sur $\overline{D}$ et si $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

1. Montrer qu'une fonction unitaire dans D n'a qu'un nombre fini de zéros.

   Montrer qu'une fonction unitaire sans zéro est une constante.

   Montrer qu'une fonction unitaire ayant les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pour zéros (chacun étant compté avec son ordre de multiplicité) s'écrit

$$E(z) = c\prod_{j=1}^{n} \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}.$$

2. Soit f holomorphe sur D et non identiquement nulle et supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ sur D. Soit E une fonction unitaire dans D et telle que $f(z)/E(z)$ soit holomorphe dans D. Montrer que l'on a

$$\forall z \in D, \ |f(z)| \leqslant M|E(z)|.$$

   Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la suite des zéros de f dans D, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \ |f(0)| \leqslant M|a_1||a_2|\cdots|a_n|.$$

   En déduire que si $f(0) \neq 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}(1-|a_n|)$ converge.

[006717]

Exercice 6987

Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Soit D le disque unité fermé.

1. Supposons que f n'a pas de zéros dans D. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = k$ pour tout z de $\mathbb{C}$.
2. Soit $a_1, \dots, a_n$ (pourquoi un nombre fini ?) les zéros de f dans D , chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. En étudiant la fonction
$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \overline{a_j} z}{z - a_j}$$
montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$, et $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(z) = kz^n$.

[006718]

Exercice 6988 Théorème des trois cercles d'Hadamard

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine contenant la couronne fermée constituée par les $z \in \mathbb{C}$ tels que $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ (où $0 < r_1 < r_2$). On pose $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ pour $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$.
2. Montrer que
$$M(r) \leqslant M(r_1)^{\frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1}} M(r_2)^{\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}}$$
(on appliquera le principe du maximum à la fonction $z^p f(z)^q$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, puis on considèrera une suite (p_n, q_n), $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, telle que $\lim_{n\to\infty} p_n/q_n = \alpha$).

[006719]

318 443.00 Singularité

Exercice 6989

À l'aide de la formule
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$
où f est méromorphe dans un domaine contenant le contour simple Γ, et a est un point intérieur à Γ, montrer que l'on a
$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}}\, dz$$
où C est le cercle unité de $\mathbb{C}$. En déduire que l'on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}\, d\theta.$$

Correction ▼ [002680]

Exercice 6990

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{z}{\sin z + i \sinh z}$ se prolonge en une fonction holomorphe en 0 ; quel est le rayon de son développement en 0 ? [006720]

Exercice 6991

1. Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z)=\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{3-z}$ dans les domaines $D=D(0,1)$, $C_1=\{1<|z|<3\}$ puis $C_2=\{|z|>3\}$.
2. Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z)=\frac{z}{z-1}e^z$ dans les domaines $C_1=\{|z|<1\}$ puis $C_2=\{|z|>1\}$.

[006721]

Exercice 6992

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrer que le développement en série de Laurent en 0 de la fonction $f(z)=\exp\frac{\alpha}{2}(z+\frac{1}{z})$ est de la forme $a_0+\sum_{n\geqslant 1}a_n(z^n+\frac{1}{z^n})$, où

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(\alpha\cos t)\,dt,\quad a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(\alpha\cos t)\cos(nt)\,dt \text{ si } n\geqslant 1.$$

(Calculer f pour $|z|=1$ et conclure avec le prolongement analytique.) [006722]

Exercice 6993

Développer les fonctions suivantes en série de Laurent dans chacun des ouverts donnés

1. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans $|z|<1$; $1<|z|<2$; $2<|z|$;
2. $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^k}$ ($k\in\mathbb{N}^*$) dans $|z|<|a|$ et dans $|z|>|a|$;
3. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-a)}$ dans $0<|z|<|a|$ et dans $|a|<|z|$;
4. $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ ($0<|a|<|b|$) dans $0<|z|<|a|$; $|a|<|z|<|b|$; $|b|<|z|$;
5. une détermination holomorphe f de $[(z-a)(z-b)]^{\frac{1}{2}}$ ($0<|a|=|b|$) dans $0<|z|<|a|$; $|b|<|z|$;
6. $f(z)=z^2\exp(z^{-1})$ dans $0<|z|$.
7. $f(z)=\exp(z+z^{-1})$ dans $0<|z|$.
8. $f(z)=\sin z\cdot\sin\left(z^{-1}\right)$ dans $0<|z|$.
9. $f(z)=\operatorname{cotan} z$ dans $k\pi<|z|<(k+1)\pi$ ($k\in\mathbb{N}$) on pourra exprimer le résultat en fonction des nombres B_n de Bernoulli, définis par :
$$\frac{z}{\exp(z)-1}=\sum_{n\geqslant 0}B_n\frac{z^n}{n!}$$
($B_0=1$, $B_1=-1/2$, et $B_{2n+1}=0$ pour $n\geqslant 1$).

[006723]

Exercice 6994

Déterminer la couronne de convergence des séries de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a^{|n|}z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|!z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}R(n)z^n$ (R fonction rationnelle sans pôles dans $\mathbb{Z}$). [006724]

Exercice 6995

Soit un ouvert U de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur U admettant en tout point a de U un développement de Laurent

$$f(z)=\sum_{n\geqslant r_a}c_n(z-a)^n$$

($r_a\in\mathbb{Z}$) convergeant dans un disque pointé $0<|z-a|<R_a$. Montrer que pour tout compact $K\subset U$, il existe une fonction rationnelle g_K nulle à l'infini et telle que la fonction $f-g_K$ soit holomorphe sur un voisinage de K (f est dite méromorphe sur U). [006725]

Exercice 6996

Déterminer les points singuliers des fonctions suivantes, puis donner la nature de ces points singuliers (singularité effaçable, pôle d'ordre n, singularité essentielle isolée, accumulation de points singuliers).

1. $$z \mapsto \frac{1}{z(z^2+4)^2}$$
2. $$z \mapsto \frac{1}{\exp(z)-1} - \frac{1}{z}$$
3. $$z \mapsto \sin \frac{1}{1-z}$$
4. $$z \mapsto \exp \frac{z}{1-z}$$
5. $$z \mapsto \mathrm{cotan} z - \frac{1}{z}$$
6. $$z \mapsto \mathrm{cotan}\frac{1}{z}$$
7. $$z \mapsto \frac{1}{\sin z - \sin a}$$
8. $$z \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$$
9. $$z \mapsto \exp\left(\tan\frac{1}{z}\right)$$

[006726]

Exercice 6997

Exhiber des fonctions n'ayant dans le plan complexe que les singularités suivantes :

1. un pôle triple en 0, un pôle simple en 1 et un point singulier essentiel en i et $-i$.
2. un point singulier essentiel en tout entier.

[006727]

Exercice 6998

Déterminer les singularités isolées a des fonctions f suivantes et calculer $\mathrm{Res}(f,a)$.

$$1. z \mapsto \frac{1}{z^3-z^5} \qquad 2.\ z \mapsto \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \qquad 3.\ z \mapsto \exp(z+z^{-1})$$
$$4.\ z \mapsto \frac{\sin(2z)}{(z+1)^3} \qquad 5.\ z \mapsto \cos\left(\frac{z^2+4z-1}{z-3}\right) \qquad 6.\ z \mapsto z^n \sin(\frac{1}{z})$$

[006728]

Exercice 6999

Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur $U \setminus S$ où S est une partie fermée discrète de U. Montrer que f a une primitive sur $U \setminus S$ si et seulement si pour tout point s de S, le résidu de f au point s est nul.

[006729]

Exercice 7000

Calculer les intégrales suivantes, où les chemins fermés simples γ sont parcourus dans le sens direct.

1. $\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$ où γ est le cercle $|z-2| = \frac{1}{2}$;
2. $\int_\gamma \frac{\exp z}{z^2(z-9)^2} dz$ où γ est le cercle $|z| = 1$;
3. $\int_\gamma \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$ où γ est le cercle $|z| = 1$;
4. $\int_\gamma \sin^2\left(\frac{1}{z}\right) dz$ où γ est le cercle $|z| = r$;
5. $\int_\gamma (z^2+z+1)^{-1/2} dz$ où γ est le cercle $|z| = r \neq 1$.

[006730]

---

319 444.00 Théorème des résidus

Exercice 7001

Calculer par la méthode des résidus

$$I = \int_0^\pi \frac{a\,d\varphi}{a^2+\sin^2\varphi} \qquad (a>0)$$

Correction ▼ [002672]

Exercice 7002

Calculer les intégrales

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^4+x^2+1} dx.$$

Correction ▼ [002673]

Exercice 7003

Calculer par la méthode des résidus l'intégrale de Wallis

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\, d\theta.$$

Correction ▼ [002674]

Exercice 7004

Développer la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$$

en série de Fourier, en calculant les coefficients par la méthode des résidus.

Correction ▼ [002675]

Exercice 7005

Résoudre l'équation $\cos z = a$, où a est un réel > 1. Donner le sinus des solutions. En déduire la valeur de

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(a-\cos x)}.$$

Correction ▼ [002676]

Exercice 7006

Soit $a \in [0,1[$ un réel. En intégrant $e^{az}/\cosh z$ le long du rectangle de sommets $-R$, $+R$, $R+i\pi$, $-R+i\pi$, montrer que l'on a

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}.$$

Correction ▼ [002677]

Exercice 7007

En intégrant e^{2iaz-z^2} le long du rectangle de sommets 0, R, $R+ia$, ia, et en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

(On admettra la formule $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.)

Correction ▼ [002678]

Exercice 7008

Soit R une fraction rationnelle, ou plus généralement une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, sans pôle réel.

— On souhaite calculer

$$I = \int_0^{+\infty} xR(x^4)\,dx$$

Montrer que cela peut se faire par la méthode des résidus, en intégrant sur un contour formé du bord du quart de cercle $\{0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, |z| < a\}$.

— Application : calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^8}\,dx.$$

— Plus généralement, montrer que si n et p sont des entiers, et $p \geqslant 3$, on peut calculer

$$I(n,p) = \int_0^{+\infty} x^n R(x^p)\,dx$$

sous une condition sur n, p que l'on précisera.

— Application : calculer

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{2p}}\,dx.$$

Correction ▼ [002679]

Exercice 7009

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{]-\infty, 0]\}$. Déterminer en tout $z_0 \in \Omega$ la série de Taylor de la fonction holomorphe $z \mapsto \operatorname{Log} z$ ainsi que son rayon de convergence. Soit z_0 avec $\operatorname{Re}(z_0) < 0$. Soit R_0 le rayon de convergence pour z_0 et soit $f(z)$ la somme de la série dans $D(z_0, R_0)$. A-t-on $f(z) = \operatorname{Log} z$ dans $D(z_0, R_0)$?

Correction ▼ [002820]

Exercice 7010

On considère la fonction analytique $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ sur l'ouvert U complémentaire de $\pi\mathbb{Z}$. Vérifier que la fonction $\sin(z)$ ne s'annule jamais sur U. Déterminer en tout $z_0 \in U$ donné le rayon de convergence du développement en série de Taylor de f. *Remarque :* il est déconseillé de chercher à résoudre ce problème en déterminant explicitement les coefficients des séries de Taylor.

Correction ▼ [002821]

Exercice 7011

Soient f et g deux fonctions entières avec $\forall z\ f(z)g(z) = 0$. Montrer que l'une des deux est identiquement nulle.

Correction ▼ [002822]

Exercice 7012

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert **convexe** U. Soit $z_1 \in U$, on suppose que le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_1 est R_1. De même, en $z_2 \in U$, on suppose que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est R_2. Soit g_1 sur le disque ouvert $D(z_1, R_1)$ la somme de la série de Taylor de f en z_1 et de même g_2 sur $D(z_2, R_2)$. Soit $V = D(z_1, R_1) \cap D(z_2, R_2)$. Montrer que si V est non vide alors $g_1 = g_2$ sur V. On commencera par montrer que $V \cap U$ est non vide aussi. *Attention* : en général, sans hypothèse spéciale comme la convexité de U cela est complètement faux ; donner un exemple, avec U connexe, mais pas convexe, tel que $g_1 \neq g_2$ sur V (et on peut même faire avec $V \cap U \neq \emptyset$). Il suffira d'utiliser l'exercice 7009.

Correction ▼ [002823]

Exercice 7013

1. Soit Ω l'ouvert habituel sur lequel est défini $\operatorname{Log} z$. Justifier pour tout $z \in \Omega$
$$\operatorname{Log}(z) = \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)}dt\ ,$$
et donner une formule intégrale explicite pour le reste $R_N(z)$ dans :
$$\operatorname{Log}(z) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{N-1}\frac{(z-1)^N}{N} + R_N(z)\ .$$
2. On suppose $\operatorname{Re}(z) \geqslant \delta$ pour un certain $\delta \in]0,1[$. Prouver :
$$|R_N(z)| \leqslant \frac{1}{\delta}\frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}$$
On minorera $|1+t(z-1)|$ par δ.
3. En déduire que la série de Taylor de Log au point 1 est uniformément convergente sur le compact $\{|z-1| \leqslant 1, \delta \leqslant \operatorname{Re}(z)\}$.
4. Pour $-\pi < \phi < +\pi$ on pose $z = 1 + e^{i\phi}$. Déterminer les coordonnées polaires $|z|$ et $\operatorname{Arg}(z)$ de z en fonction de ϕ. Déduire de ce qui précède les identités suivantes, pour tout $\phi \in]-\pi, +\pi[$:
$$\log(2\cos\frac{\phi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos k\phi}{k}$$
$$\frac{\phi}{2} = \sum_{k=1}(-1)^{k-1}\frac{\sin k\phi}{k}$$
et le fait que ces séries sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[-\pi+\varepsilon, +\pi-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < \pi)$.

Correction ▼ [002824]

Exercice 7014

1. Soit f une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$, holomorphe sur $D(0,1)$, nulle sur le cercle de rayon 1. Montrer que f est identiquement nulle.
2. Plus fort : on ne suppose plus que $f(e^{i\theta})$ est nulle pour tout θ mais seulement pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Montrer que f est identiquement nulle. *Indication :* $f(z)f(-z)$.

Correction ▼ [002825]

Exercice 7015

Soit $\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$. Montrer : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. En déduire $|z| < 1 \implies |\phi(z)| < 1$.

Correction ▼ [002826]

Exercice 7016

Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leqslant \frac{1}{n}$ pour $|z| = n$, $n \geqslant 1$. Montrer que F est identiquement nulle.

Correction ▼ [002827]

Exercice 7017

1. Soit f analytique sur un disque $|z - z_0| \leqslant R$ et telle qu'il existe un certain z_1 avec $|z_1 - z_0| < R$ tel que $|f(z)| > |f(z_1)|$ pour $|z - z_0| = R$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans le disque ouvert $D(z_0, R)$. *Indication :* considérer sinon ce que dit le principe du maximum pour la fonction $\frac{1}{f}$.
2. *Théorème de Hurwitz.* Soit f_n des fonctions holomorphes sur un voisinage commun U de $\overline{D(0,1)}$ qui convergent uniformément sur U. Soit F la fonction limite. On suppose que F n'a aucun zéro sur le cercle $|z| = 1$, et qu'elle a au moins un zéro dans le disque ouvert $D(0,1)$. Montrer en appliquant la question précédente à f_n que pour $n \gg 1$ la fonction f_n a au moins un zéro dans $D(0,1)$. [8] Ce résultat est souvent appliqué sous sa forme réciproque : *si des fonctions holomorphes f_n sans zéro convergent uniformément sur un ouvert connexe vers F alors soit F est identiquement nulle soit F n'a aucun zéro.* Justifier cette dernière reformulation.

[002828]

Exercice 7018

Montrer que si une fonction entière f a sa partie réelle bornée supérieurement alors elle est constante (considérer $\exp(f)$).

Correction ▼ [002829]

Exercice 7019

Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leqslant M(1+|z|)^n$ pour un certain M et un certain $n \in \mathbb{N}$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme de degré au plus n :

— en utilisant une formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$, avec comme contour les cercles de rayon R centrés en l'origine, ou en z si l'on veut,

— en utilisant les formules de Cauchy pour $f^{(m)}(0)$, avec $m \geqslant n+1$,

— en appliquant le théorème de Liouville à $(f(z) - P(z))/z^{n+1}$ avec P le polynôme de McLaurin-Taylor à l'origine à l'ordre n.

Correction ▼ [002830]

Exercice 7020

Soit f une fonction entière vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme :

— en montrant, par un théorème du cours, que $w = 0$ est une singularité polaire de $g(w) = f(\frac{1}{w})$, et en en déduisant qu'il existe un polynôme P tel que $f(z) - P(z)$ tende vers 0 pour $|z| \to \infty$, puis Liouville,

8. On verra plus tard en cours ou en exercice que pour $n \gg 1$ chaque f_n a, comptés avec leurs multiplicités, exactement le même nombre de zéros que F dans $D(0,1)$.

— ou en montrant que f n'a qu'un nombre fini de zéros z_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, et en appliquant à $(z-z_1)\dots(z-z_n)/f(z)$ le résultat de l'exercice précédent, plus quelques réflexions de conclusion pour achever la preuve.

Montrer que la fonction entière $z+e^z$ tend vers l'infini le long de tout rayon partant de l'origine. D'après ce qui précède $z+e^z$ est donc un polynôme. Commentaires ?

Correction ▼ [002831]

Exercice 7021

Déterminer les séries de Laurent et les résidus à l'origine des fonctions suivantes :

1. $f(z) = \frac{1}{z}$
2. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
3. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$

Correction ▼ [002832]

Exercice 7022

Déterminer la série de Laurent à l'origine de la fonction analytique $\exp(\frac{1}{z})$, et son résidu à l'origine. En $z_0 \neq 0$ quel est le résidu de cette fonction ?

Correction ▼ [002833]

Exercice 7023

Déterminer la partie singulière, le résidu, et le terme constant des séries de Laurent à l'origine pour les fonctions :

1. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$
2. $f(z) = \frac{1}{\sin z - \operatorname{sh} z}$
3. $f(z) = \frac{1}{z \sin(z) \operatorname{sh}(z)}$

Correction ▼ [002834]

Exercice 7024

Déterminer les séries de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans chacune des trois couronnes ouvertes $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$, ainsi que les séries de Laurent de f aux points 0, 1, 2, et 3. Quels sont les résidus en $z=0$, $z=1$, $z=2$ et $z=3$?

Correction ▼ [002835]

Exercice 7025

Montrer que tout lacet est homotopiquement trivial dans $\mathbb{C}$.

Correction ▼ [002836]

Exercice 7026

Justifier les affirmations du polycopié relatives à l'invariance de l'indice d'un lacet par rapport à un point, lorsque l'on déforme continûment soit le lacet, soit le point. Montrer que lorsque γ est un lacet il existe R tel que $|z| > R \implies \operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0$.

Correction ▼ [002837]

Exercice 7027

1. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un lacet et soit $N \in \mathbb{Z}$ son indice par rapport à 0. En utilisant la notion de variation de l'argument, montrer qu'il existe une fonction continue $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $\forall t \quad \gamma(t) = e^{g(t)}$ et $g(1) - g(0) = 2\pi i N$. Montrer que toute autre fonction continue G avec $\forall t \quad \gamma(t) = e^{G(t)}$ est de la forme $g + 2\pi i k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On pose $h(t,u) = (1-u)\, 2\pi i N t + u g(t)$ puis $H(t,u) = e^{h(t,u)}$. Montrer

que pour chaque $u \in [0,1]$ l'application $t \mapsto H(t,u)$ est un lacet. En déduire que le lacet $c_N(t) = e^{2\pi i Nt}$ et γ sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. On considère le lacet obtenu en suivant d'abord c_N puis c_M. Montrer que ce lacet est homotope dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ au lacet c_{N+M} (il suffit de calculer son indice !).

Correction ▼ [002838]

Exercice 7028

On considère un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (donc ne passant pas par l'origine). On suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de $t \in [a,b]$ avec $\gamma(t) \in \Delta =]-\infty, 0[$. On les note $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$. Pour simplifier on supposera que $\gamma(a)$ est sur Δ, donc $t_0 = a$ et $t_N = b$. Montrer que pour $t = t_j - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le signe μ_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j - \varepsilon))$ ne dépend pas de ε, et de même pour le signe μ'_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j + \varepsilon))$ (préciser ce que l'on fait pour $j = 0$ et $j = N$).

Si $\mu_j = +$ et $\mu'_j = -$ on dit que γ traverse Δ en $t = t_j$ dans le sens direct, si $\mu_j = -$ et $\mu'_j = +$ on dit que γ traverse Δ en $t = t_j$ dans le sens rétrograde. Sinon on dit que γ touche mais ne traverse pas Δ. En utilisant la relation entre la fonction $\mathrm{Log}(\gamma(t))$ et la variation de l'argument de $\gamma(t)$ sur chaque intervalle $]t_j, t_{j+1}[$, prouver $\Delta_{\gamma_j} \arg(z) = \pi(\mu_{j+1} - \mu'_j)$ avec $\gamma_j = \gamma$ restreint à $[t_j, t_{j+1}]$.

En déduire que $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$ est égal au nombre de valeurs de t (a et b ne comptent que pour un seul) pour lesquelles γ traverse Δ, comptées positivement si la traversée est directe, négativement si la traversée est rétrograde.

Dans la pratique vous pourrez utiliser n'importe quelle demi-droite issue de l'origine à la place de Δ à partir du moment où elle n'intersecte le lacet γ qu'en un nombre fini de points (si on n'impose pas au lacet d'être régulier, c'est-à-dire d'avoir un vecteur vitesse partout non nul, alors il peut rester figé en un même point un certain temps, et donc il faut modifier un petit peu la discussion ci-dessus qui suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de t pour lesquels $\gamma(t)$ est sur la demi-droite). [002839]

Exercice 7029

Justifier les formules suivantes : lorsque f présente en z_0 un pôle simple on a :

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Lorsque f présente en z_0 un pôle d'ordre au plus N on a :

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1} (z - z_0)^N f(z)$$

Correction ▼ [002840]

Exercice 7030

1. Soit g une fonction analytique ayant un zéro simple en z_0, et f une autre fonction analytique définie dans un voisinage de z_0. Montrer
$$\mathrm{Res}(\frac{f}{g}, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

2. On suppose que g a un zéro d'ordre n : $g(z_0 + h) = h^n(c_0 + c_1 h + \ldots)$, $c_0 \neq 0$, et l'on écrit $f(z_0 + h) = a_0 + a_1 h + \ldots$. Montrer :
$$\mathrm{Res}(\frac{f}{g}, z_0) = e_{n-1}$$
avec e_0, e_1, ..., obtenus par la division suivant les puissances croissantes (comme dans les calculs de développement limités) :
$$\frac{a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots}{c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots} = e_0 + e_1 h + e_2 h^2 + \ldots\,.$$

[002841]

Exercice 7031

Soit $0 < a < b < c$ et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz$ selon la valeur de r. On donnera deux preuves, soit en utilisant le théorème des résidus, soit en décomposant en éléments simples.

Correction ▼ [002842]

Exercice 7032

Soit $\mathscr{R} = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1\}$ un rectangle. En utilisant le théorème des résidus justifier la formule intégrale de Cauchy pour z dans l'intérieur du rectangle et f holomorphe sur le rectangle fermé :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathscr{R}} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Démontrer ce résultat de manière plus simple, directement à partir du théorème de Cauchy-Goursat pour les fonctions holomorphes sur les rectangles, en utilisant la fonction $w \mapsto (f(w) - f(z))/(w-z)$ (et aussi la notion d'indice d'un lacet). Dans le cas où z est à l'*extérieur* du rectangle $\mathscr{R}$, que vaut $\int_{\partial \mathscr{R}} \frac{f(w)}{w-z} dw$? [002843]

Exercice 7033

Soit Ω un domaine, de bord le cycle $\partial\Omega$ orienté dans le sens direct. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$, soient z_1 et z_2 deux points de Ω. Que vaut

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\, dz}{(z-z_1)(z-z_2)} \ ?$$

Qu'obtient-on pour $z_2 \to z_1$, z_1 fixé ?

Correction ▼ [002844]

Exercice 7034

Que vaut, en fonction de $R > 0$:

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} \ ?$$

On précisera les valeurs exclues de R.

Correction ▼ [002845]

Exercice 7035

Déterminer, C désignant tour à tour le cercle $|z-i| = 1$, ou le cercle $|z+i| = 1$, ou encore $|z| = 2$, parcourus dans le sens direct, les valeurs des intégrales :

$$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$$

Même question pour :

$$\int_C \frac{1}{z^3-1} dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^4-1} dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^5-1} dz$$

[002846]

Exercice 7036

Que vaut $\int_{|z|=N} \tan(\pi z)\, dz$, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$?

Correction ▼ [002847]

Exercice 7037

Déterminer pour A,B,C réels, avec $A^2 > B^2 + C^2$ la valeur de :

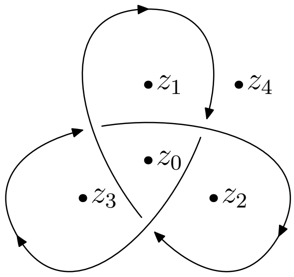
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A+B\sin\theta+C\cos\theta}$$

On aura intérêt, comme première étape, à poser $B = R\cos\phi$, $C = R\sin\phi$, mais on peut aussi se frotter plus directement au résidu (utiliser bien sûr $z = e^{i\theta}$ ou dans ce genre).

Correction ▼ [002848]

Exercice 7038

On considère dans le plan complexe un chemin fermé paramétré γ qui parcourt la figure ci-dessus dans le sens indiqué.



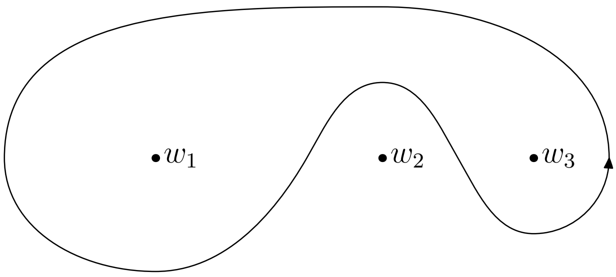
Pour $j = 0,1,2,3,4$ on note

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_j} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_j)^2}$$

Déterminer, en le justifiant, les valeurs de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, et de B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. On précisera aussi quel est le nom que l'on donne aux quantités données par les intégrales A_j, $j = 0\dots4$. [002849]

Exercice 7039

Soit γ le contour, parcouru dans le sens direct, dessiné ci-contre.



Déterminer (avec justification) en fonction de w_1, w_2, w_3 les intégrales suivantes :

$$A = \int_\gamma \frac{dz}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$$

$$B = \int_\gamma \sin(z)dz$$

$$C = \int_\gamma \frac{dz}{(z-w_1)^2(z-w_3)}$$

[002850]

Exercice 7040

Prouver pour $a > 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{a+\sin\theta}d\theta = \frac{\sqrt{a^2-1}-a}{\sqrt{a^2-1}}$$

En utilisant l'un des exercices précédents montrer que la formule a un sens et est valable pour $a \in \mathbb{C}\setminus[-1,+1]$.

Correction ▼ [002853]

Exercice 7041

Que vaut en fonction de $R > 0$

$$\int_{|z|=R}\frac{z^2+1}{z^3-z^2-4z+4}dz\ ?$$

[002854]

Exercice 7042

Soit $P(z) = Az^4 + \dots$ un polynôme de degré au plus 4. Montrer que $\int_{|z|=R}\frac{P(z)}{z^5-1}dz$ est indépendant de R pour $R > 1$. En faisant tendre R vers l'infini en déduire que cette valeur constante est $2\pi iA$. Prouver alors via le théorème des résidus : $A = \frac{1}{5}\sum_{w^5=1} wP(w)$. [002855]

Exercice 7043 Résidu à l'infini

Soit f une fonction analytique pour $\{|z| > R\}$. On pose :

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)dz$$

avec C_r le cercle $\{|z| = r\}$ parcouru dans le sens direct. Montrer que le terme de droite est bien indépendant de $r > R$. On notera le signe $-$. On dit que $\operatorname{Res}(f,\infty)$ est le "résidu à l'infini" de f. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ à l'exception d'un nombre fini de singularités isolées. Montrer le théorème suivant : *la somme de tous les résidus (y compris celui à l'infini) de f est nulle.* [002856]

Exercice 7044

Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}\setminus\{z_1,\dots,z_N\}$, avec Ω le domaine intérieur à une courbe de Jordan γ. Soit $g_n(z)$ la partie principale (partie singulière) de f en la singularité isolée z_n. Prouver *la formule intégrale générale de Cauchy* :

$$\forall z \in \Omega\setminus\{z_1,\dots,z_N\} \qquad f(z) = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} g_n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

Pour cela, remarquer d'abord $\operatorname{Res}(\frac{f(w)}{w-z}, z_n) = \operatorname{Res}(\frac{g_n(w)}{w-z}, z_n)$; puis montrer que le résidu à l'infini de la fonction $\frac{g_n(w)}{w-z}$ de $w \in \mathbb{C}\setminus\{z_n\}$, est nul. On pourra utiliser l'exercice 7043.

Correction ▼ [002857]

Exercice 7045 Morceaux de Résidus

Soit f présentant en z_0 un *pôle simple*. Soit $C_r(\alpha,\beta)$ l'arc de cercle $w = z_0 + re^{i\theta}$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, parcouru dans le sens direct des θ et avec $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$. Prouver :

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r(\alpha,\beta)} f(z)\,dz = 2\pi i\,\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\,\operatorname{Res}(f,z_0)$$

Que se passe-t-il si le pôle est d'ordre plus élevé ?

Correction ▼ [002858]

Exercice 7046 Lemme de Jordan

Soit f une fonction définie et continue sur le domaine $\{\mathrm{Im}(z) > 0, |z| > R\}$, ou seulement sur une suite de demi-cercles $\{\mathrm{Im}(z) > 0, |z| = R_n\}$ de rayons tendant vers l'infini. On suppose $\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)>0}} |f(z)| = 0$ (ou $\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathrm{Im}(z)>0, |z|=R_n} |f(z)| = 0$.) Montrer (on utilisera $\sin(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$) :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{z=Re^{i\theta}, 0<\theta<\pi} f(z)e^{iz}\,dz = 0 \qquad \text{(ou l'analogue avec les } R_n)$$

Correction ▼ [002859]

Exercice 7047

En considérant l'intégrale de $\frac{e^{iz}}{z}$ sur un contour allant de $-R$ à $+R$ le long de l'axe réel en contournant 0 par un petit demi-cercle, puis qui revient de $+R$ à $-R$ par le demi-cercle dans le demi-plan supérieur, démontrer $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Correction ▼ [002860]

Exercice 7048

Déterminer les intégrales (semi-convergentes) de Fresnel $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ et $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ en considérant l'intégrale de $\exp(-z^2)$ sur le contour $z = x$, $0 \leqslant x \leqslant R$, $z = R\exp(i\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, $z = xe^{i\frac{\pi}{4}}$, $R \geqslant x \geqslant 0$. On rappelle l'identité $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi u^2)du = 1$.

Correction ▼ [002861]

Exercice 7049

Que vaut $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$? (faire un changement de variable $t = \pi u^2$ pour se ramener à la Gaussienne). En considérant un contour passant par l'axe réel, puis un quart de cercle, puis l'axe imaginaire, puis un petit quart de cercle évitant l'origine prouver :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \exp(i\frac{\pi}{4}) \int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}dx$$

et en déduire les valeurs des intégrales $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ et $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ (qui ne sont que semi-convergentes). Comparer aux intégrales de Fresnel. [002862]

Exercice 7050

Reprendre l'exercice précédent et déterminer pour $0 < a < 1$ les valeurs des intégrales (semi-convergentes)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a}dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}dx$$

en utilisant la fonction Gamma. À propos prouver que ces intégrales ne sont que semi-convergentes (*i.e.* pas absolument convergentes). [002863]

Exercice 7051

Confirmer par le calcul des résidus la valeur connue (arctan... !) :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

On appliquera le théorème des résidus au contour direct comportant le segment $[-R, +R]$ et le semi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur, pour $R \to +\infty$. [002864]

Exercice 7052

Justifier $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2} dx$ pour $\xi \in \mathbb{R}$. Prouver par un calcul de résidu

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\xi|} .$$

Suivant le cas $\xi \geqslant 0$ ou $\xi < 0$ on complètera le segment $[-R, +R]$ par un semi-cercle dans le demi-plan supérieur, ou inférieur, afin que la contribution du semi-cercle tende vers 0 pour $R \to \infty$. On peut aussi observer que l'intégrale est une fonction paire de ξ et que l'on peut donc se restreindre à $\xi \geqslant 0$. [002865]

Exercice 7053

Prouver, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} (\pi e^{-|\xi|}) d\xi = \frac{1}{1+x^2} .$$

Il suffit d'évaluer séparément $\int_{-\infty}^{0}$ et $\int_{0}^{\infty}$ en utilisant le fait que exp est sa propre primitive (ce calcul n'utilise donc pas la notion de fonction analytique et le théorème des résidus). On remarquera que l'on retombe sur la fonction $1/(1+x^2)$, ce qui n'est pas un hasard (formule d'inversion pour les transformations intégrales de Fourier). [002866]

Exercice 7054

Déterminer

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^4} dx \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2+x^4} dx$$

[002867]

Exercice 7055

Préciser pourquoi $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^4} dx$ est une intégrale convergente pour $\xi \in \mathbb{R}$, est une fonction réelle et paire de ξ, et utiliser un calcul de résidus pour établir, pour $\xi \geqslant 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4})$$

Cette formule est-elle valable pour $\xi < 0$? [002868]

Exercice 7056

1. Déterminer
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$
Pour ce calcul, on considérera le contour allant le long de l'axe réel de 0 à R puis de R à jR le long d'un cercle puis de jR à 0 par un segment ($j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$). On écrira d'une part chacune des trois contributions à l'intégrale de contour, en faisant attention au sens de parcours, et l'on utilisera d'autre part le théorème des résidus.
2. On note, pour $|w| = 1$ et certaines valeurs spéciales de w (que l'on précisera) étant exclues, $J(w)$ l'intégrale $\int \frac{dz}{1+z^3}$ le long du segment infini $w\mathbb{R}^+$. Déterminer $J(w)$ en fonction de w.

[002869]

Exercice 7057

1. Prouver pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$:
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$
en utilisant le secteur angulaire $0 \leqslant \mathrm{Arg} z \leqslant \frac{2\pi}{n}$, $0 \leqslant |z| \leqslant R$, $R \to +\infty$, et en montrant que la contribution de l'arc de cercle tend vers zéro pour $R \to +\infty$.

2. Montrer, en utilisant les contours $\varepsilon \leqslant x \leqslant R$, $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{a})$, $z = re^{i\frac{2\pi}{a}}$ $(R \geqslant r \geqslant \varepsilon)$, $z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\frac{2\pi}{a} \geqslant \theta \geqslant 0)$:
$$a \in \mathbb{R},\ a > 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}.$$
Pour définir z^a comme fonction holomorphe sur $\{z = re^{i\alpha} \,|\, 0 < r < \infty,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2\pi}{a}\}$, on pose $z^a = r^a e^{a i\alpha} = \exp(a(\log r + i\alpha))$ (car $\log r + i\alpha = \mathrm{Log}(ze^{-i\frac{\pi}{a}}) + i\frac{\pi}{a}$; no comments).
3. Soit $J(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a}$; justifier que l'intégrale définissant $J(a)$ est convergente et analytique comme fonction de a pour $\mathrm{Re}(a) > 1$ et prouver $J(a) = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}$.
4. On définit maintenant
$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt$$
pour $0 < p < 1$. Justifier les identités (pour $0 < p < 1$) :
$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{1/p}} = \frac{1}{p}J(\frac{1}{p}) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$
5. Expliquer pourquoi l'intégrale $K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt$ est convergente et analytique pour p complexe avec $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$ et établir la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$.
6. Donner une preuve simple directe de la formule $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour tout p complexe avec $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$ en appliquant le théorème des résidus avec des contours liés aux droites $z = x, x \in \mathbb{R}$ et $z = x + 2\pi i, x \in \mathbb{R}$.
7. Déduire de ce qui précède avec $p = \frac{1}{2} + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi t)}{\mathrm{ch}(t/2)}dt = \frac{2\pi}{\mathrm{ch}(\pi\xi)},$$
Montrer que la transformation de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi x} f(x)\,dx$ appliquée à la fonction $f(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi x)}$ donne simplement $\widehat{f} = f$ (remarque : c'est aussi le cas avec $f(x) = e^{-\pi x^2}$).
8. On revient à la formule générale $K(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$. En séparant parties réelles et imaginaires dans $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt$ déterminer (en simplifiant le plus possible) les valeurs de :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\cos(vt)}{1+e^t}dt \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\sin(vt)}{1+e^t}dt,$$
pour $0 < u < 1$, $v \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [002879]

Exercice 7058

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})}dx.$ [002880]

Exercice 7059

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\frac{x-i}{x+i}\frac{1}{x^2+1}dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}\frac{x-i}{x+i}\frac{1}{x^2+1}dx.$ [002881]

Exercice 7060

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx.$ [002882]

Exercice 7061

1. Démontrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n=1, \\ 0 & n=2,3,4,\dots \end{cases}$$

γ étant une courbe fermée simple ayant a dans son intérieur et orientée positivement.

2. Quelle est la valeur de l'intégrale si $n=0,-1,-2,\dots$?

[006587]

Exercice 7062

Evaluer

$$\int_\gamma \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$$

où γ est une courbe fermée simple quelconque entourant $z=1$ et orientée positivement. [006588]

Exercice 7063

Evaluer

(a)

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z-\pi}dz,$$

(b)

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)}dz,$$

où

(i) γ est le cercle positif $\{z; |z-1|=3\}$,

(ii) γ est le cercle positif $\{z; |z-1|=2.1\}$.

[006589]

Exercice 7064

Evaluer

1.

$$\int_\gamma \frac{\sin \pi z^2+\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz,$$

2.

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz,$$

où γ est le cercle positif $\{z; |z|=3\}$. [006590]

Exercice 7065

Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\vartheta d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot (2n)}, \quad n=1,2,3,\dots.$$

[006591]

Exercice 7066

Localiser les singularités de chacune des fonctions suivantes et les caractériser.

1. $\frac{z^2}{(z+1)^3}$,
2. $\frac{2z^3-z+1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$,

3. $\frac{\sin mz}{z^2+2z+2}$,
4. $\frac{1-\cos z}{z}$,
5. $e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}$,

[006592]

Exercice 7067

Trouver les séries de Laurent par rapport aux singularités indiquées pour chacune des fonctions suivantes. Caractériser la singularité dans chaque cas et donner le domaine de convergence de chaque série.

1. $\frac{e^z}{(z-1)^2}$, $\quad z=1$,
2. $z\cos\frac{1}{z}$, $\quad z=0$,
3. $\frac{\sin z}{z-\pi}$, $\quad z=\pi$,
4. $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $\quad z=-1$.

[006593]

Exercice 7068

Déterminer les résidus de chacune des fonctions suivantes, au pôle indiqué.

1. $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, $\quad z=2,\ z=i,\ z=-i$,
2. $\frac{1}{z(z+2)^3}$, $\quad z=0,\ z=-2$,
3. $\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$, $\quad z=3$,
4. $\mathrm{cotg} z$, $\quad z=-5\pi$.

[006594]

Exercice 7069

Trouver les séries de Laurent de $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ par rapport à ses poles. [006595]

Exercice 7070

Evaluer

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$$

où γ est le cercle positif donné par

1. $|z|=\frac{3}{2}$,
2. $|z|=10$.

[006596]

Exercice 7071

Evaluer

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}.$$

[006597]

Exercice 7072

Etude de la fonction holomorphe $f(z)=\cos z$.

1. Trouver l'image d'une droite $x=c$.
2. Trouver l'image d'une droite $y=c$.

3. Trouver un ouvert maximal U tel que le restriction de f à cet ouvert soit injective.
4. Trouver un domaine de définition maximal pour la fonction réciproque, arccos.
5. Vérifier que parmi les branches de arccos il y en a deux qui s'écrivent sous la forme $\arccos(w) = \pm i\mathrm{Log}(w+\sqrt{w^2-1})$.
6. Trouver toutes les branches de la fonction arccos.

[006598]

Exercice 7073

Vérifier que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}.$$

[006599]

Exercice 7074

Déterminer les singularités de la fonction $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z}$ et les classer. [006600]

Exercice 7075

Démontrer que

1. $\mathscr{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$
2. $\mathscr{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
3. $\mathscr{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$
4. $\mathscr{L}(\sin at)(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$
5. $\mathscr{L}(\cos at)(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$
6. $$\mathscr{L}(U_a)(s) = \frac{e^{-as}}{s}, \text{ où } U_a(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant a, \\ 0, & t < a, \end{cases} a \in \mathbb{R}, a \geqslant 0.$$

Préciser les domaines de définition de ces transformées de Laplace. [006601]

Exercice 7076

1. Calculer les résidus aux différents pôles de la fonction $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2}$; $f(z) = \dfrac{1}{1+z+\cdots+z^{n-1}}$; $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$.
2. Montrer que si $f(z) = (z-a)^{-n}g(z)$ où g est holomorphe dans Ω ouvert contenant a, alors $\mathrm{Res}(f,a) = \dfrac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$. Trouver les pôles et résidus des fonctions suivantes : $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$, $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $\dfrac{1}{(1+z^2)^n}$.

[006742]

Exercice 7077 Intégrales de fonctions trigonométriques

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{3-2\cos t}\, dt$ (poser $z = e^{it}$). [006743]

Exercice 7078 Intégrales de fractions rationnelles sans pôle sur $\mathbb{R}$

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^{2n}}$, $n \geqslant 2$, en intégrant $\dfrac{1}{1+z^{2n}}$ sur un demi-cercle.

2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

[006744]

Exercice 7079 Utilisation du logarithme

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, en intégrant $\displaystyle\frac{\log z}{1+z^3}$ sur un cercle privé de $\mathbb{R}^+$, log désignant ici la détermination du logarithme avec coupure sur $\mathbb{R}^+$.
2. En choisissant la même détermination du logarithme et le même contour, calculer simutanément les intégrales $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4}$ et $J = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Ln} x}{1+x^4}\, dx$. (Intégrer cette fois $\displaystyle\frac{(\log z)^2}{1+z^4}$.)
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Ln} x}{1+x^n}\, dx$, $n \geqslant 2$, en intégrant $\displaystyle\frac{\log z}{1+z^n}$ sur un secteur épointé bien choisi.

[006745]

Exercice 7080 septembre 1999

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a < 1$

1. Démontrer que les intégrales $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(ax)}{\sinh(x)}\, dx$ et $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(x)}\, dx$ sont convergentes.
2. Soit ε et R des réels tels que $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} < R$, $K_{\varepsilon,R} \subset \mathbb{C}$ le compact obtenu en ôtant du rectangle de sommets $R, R+i\frac{\pi}{2}, R+i\frac{\pi}{2}, -R$, la demi-boule ouverte de centre 0 et de rayon ε, et $f(z) = \displaystyle\frac{e^{az}}{e^z - e^{-z}}$.
   (a) Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma f(z)\, dz = 0$ lorsque γ est le segment $[R, R+i\frac{\pi}{2}]$; puis le segment $[-R+i\frac{\pi}{2}, -R]$.
   (b) Calculer $\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz$ et la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$; en déduire les expressions de $I(a)$ et $J(a)$.

[006746]

Exercice 7081

Soit a un réel > 0 et $\mathrm{Log} z$ la détermination principale du log sur $\mathbb{C} \backslash R^-$. En intégrant la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)\,\mathrm{Log} z}$ sur un contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$ constitué du cercle de rayon R évitant le demi-axe $\mathbb{R}^-$, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\mathrm{Ln}^2 x + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a(\mathrm{Ln}^2 a + \pi^2/4)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

[006747]

Exercice 7082 Calcul d'intégrales semi-convergentes

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx$ en intégrant $f(z) = \displaystyle\frac{e^{iz}}{z}$ sur un contour bien choisi.
2. Calculer de même $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2-1}{x^2+1} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

[006748]

Exercice 7083 Calcul de transformées de Fourier

1. Calculer la transformée de Fourier de $\displaystyle\frac{1}{1+x^4}$ en intégrant $\frac{e^{itz}}{1+z^4}$ sur un demi-cercle dans un demi-plan bien choisi.

2. Calculer $I(m,a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{(1+x^2)(x^2+a^2)}\,dx$ en distinguant les cas $a=1, a\neq 1$. Vérifier que $I(m,1) = \lim_{a\to 1} I(m,a)$.
En déduire sans nouveaux calculs la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin mx}{(1+x^2)^2}\,dx$.

[006749]

Exercice 7084

Soit P et Q deux polynômes tels que $\deg Q > \deg P$.

1. Exprimer $\sum \mathrm{Res}(\frac{P}{Q})$ à l'aide des coefficients de P et Q.
2. Soit $P(z) = z^n + \sum_0^{n-1} a_k z^k$ un polynôme dont toutes les racines sont dans $D(0,R)$. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{xz}}{P(z)}\,dz$ est la solution de l'équation différentielle d'ordre n, $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ de condition initiale $y^{(j)}(0) = 0$ si $j < n-1$ et $y^{(n-1)}(0) = 1$.

[006750]

Exercice 7085

Calculer

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t}$ $(a>1)$;
2. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2}$ $(a>b>0)$;
3. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3t}{1-2a\cos t+a^2}\,dt$ $(a\in\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\})$;
4. $\int_0^{2\pi} \exp(\cos t)\cos(nt-\sin t)\,dt$ $(n\in\mathbb{Z})$.

[006751]

Exercice 7086

Dans cet exercice, on justifiera soigneusement chaque passage à la limite. Calculer les intégrales :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx$, $0<\alpha<1$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ (on pourra considérer la fonction $\frac{1-e^{2ix}}{x^2}$)
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}\,dx$ (on pourra utiliser le rectangle de sommets $-R$, R, $R+i\pi$, $-R+i\pi$)
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}^2 x}{1+x^2}\,dx$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Log} x}{(1+x)^3}\,dx$

[006752]

Exercice 7087

Soit $f(z) = z^5+5z^3+z-2$. Montrer que f a trois de ses zéros dans le disque $D(0,1)$ et tous ses zéros dans le disque $D(0,3)$. [006753]

Exercice 7088

Soit c un nombre complexe vérifiant $|c| > e$. Montrer que l'équation $e^z = cz$ a une solution et une seule dans $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z < 1\}$. (On pourra considérer $D_r = H \cap D(1,r)$ avec $r \geqslant 2$ et les fonctions $e^z - cz$ et $-cz$.)
[006754]

Exercice 7089

En utilisant le théorème de Rouché, démontrer le théorème de d'Alembert. [006755]

Exercice 7090

Soit $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $n \geqslant 1$, $a_j \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un point c de $\partial D(0,1)$ tel que l'on ait $|P(c)| \geqslant 1$. [006756]

Exercice 7091

Montrer que, si f est holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$ et si $f(\partial D(0,1)) \subset D(0,1)$, alors il existe un z_0 et un seul dans $D(0,1)$ tel que l'on ait $f(z_0) = z_0$. [006757]

Exercice 7092

En utilisant le théorème de Rouché, on se propose de donner une preuve du théorème d'inversion local "holomorphe" n'utilisant pas le théorème d'inversion local dans $\mathbb{R}^2$.

Soit donc f une fonction holomorphe au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$ telle que $f'(z_0) \neq 0$. On suppose sans restreindre la généralité que $z_0 = 0$, $f(z_0) = 0$, et $f'(z_0) = 1$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de z_0 et une constante $K > 0$ tel que l'on ait, pour tout z dans V, $|f(z) - z| \leqslant K|z^2|$.
2. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, si l'on a $|\alpha| < r/2$, l'équation $f(z) = \alpha$ a une solution unique dans le disque $D(0,r)$.
3. Montrer enfin qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{C}$ tel que f soit une bijection de U sur le disque $D(0,r/2)$.
4. En déduire que $g = f^{-1}$ est continue sur le disque $D(0,r/2)$ et, de là, que g est holomorphe dans ce disque.

[006758]

Exercice 7093

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$.

1. Montrer que cette série converge normalement sur tout compact K de $\mathbb{C}$. En déduire que $f(z) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Vérifier que l'on a $f(z+1) = f(z)$.
2. Déterminer le résidu de f en chacun de ses pôles. Montrer que, si l'on note $z = x + iy$, $f(z)$ tend vers 0, uniformément par rapport à x, lorsque $|y|$ tend vers ∞.
3. Montrer que $f(z) = \left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$. (On pourra utiliser le théorème de Liouville.) En déduire que l'on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

[006759]

Exercice 7094

Soit γ_n le chemin dont l'image γ_n^* est le rectangle de sommets $\pm(n+\frac{1}{2}) \pm in$ parcouru une fois dans le sens direct. Evaluer pour $a \notin \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma_n} \frac{\pi \mathrm{cotan}(\pi z)}{(z+a)^2}\, dz\,.$$

Montrer que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\frac{\pi\mathrm{cotan}(\pi z)}{(z+a)^2}\,dz=0\;.$$

(On pourra établir auparavant que, si z appartient à γ_n^* et si n est assez grand, on a $|\mathrm{cotan}(\pi z)|\leqslant 2$.) En déduire (cf. exercice 7093) que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(a+n)^2}=\left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)}\right)^2$. [006760]

Exercice 7095

Soit α un réel tel que $-1<\alpha<2$, et soit $f:\mathbb{C}\setminus\{it\mid t\in]-\infty,0]\}$ définie par

$$f(z)=\frac{e^{iz}e^{\alpha\log z}}{1+z^2}\;,$$

où $\log z$ désigne la branche uniforme du logarithme complexe qui est réelle pour z réel strictement positif, avec $-\pi/2<\arg z<3\pi/2$.

1. Montrer que, pour tout θ tel que $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, on a : $0\leqslant 2\theta/\pi\leqslant\sin\theta\leqslant\theta$.
2. Soit γ_ε le demi-cercle de rayon $\varepsilon>0$, de centre 0, situé dans le demi-plan $\mathrm{Im}\ z\geqslant 0$. Démontrer que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)\,dz=0$.
3. Soit γ_R le demi-cercle de rayon $R>0$, de centre 0, situé dans le demi-plan $\mathrm{Im}\,z\geqslant 0$. Démontrer que $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=0$.
4. En intégrant f sur le bord du domaine $\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R$, $0\leqslant\arg(z)\leqslant\pi$, déduire de ce qui précède que l'intégrale
$$I(\alpha)=\int_0^\infty\frac{x^\alpha\cos(x-\frac{\alpha\pi}{2})}{1+x^2}\,dx$$
est convergente et en même temps calculer sa valeur.

[006808]

Exercice 7096

Soit a un réel tel que $0\leqslant a<1$.

1. Démontrer que les intégrales $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sinh(ax)}{\sinh x}\,dx$ et $J(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\cosh(ax)}{\cosh x}\,dx$ sont convergentes (sinh et cosh désignent les sinus et cosinus hyperboliques).
2. Soit ε et R des réels tels que $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}<R$, soit $f(z)$ la fonction $f(z)=\frac{e^{az}}{e^z-e^{-z}}$ et soit $K_{\varepsilon,R}\subset\mathbb{C}$ le compact obtenu en ôtant la demi-boule ouverte de centre 0 et de rayon ε du rectangle de sommets R, $R+i\frac{\pi}{2}$, $-R+i\frac{\pi}{2}$, $-R$.
   (a) Démontrer que $\lim_{R\to+\infty}\int_\gamma f(z)\,dz=0$ lorsque γ est (i) le côté du rectangle joignant R à $R+i\frac{\pi}{2}$ et (ii) le côté du rectangle joignant $-R+i\frac{\pi}{2}$ à $-R$.
   (b) Calculer le résidu de f en 0.
   (c) Du calcul de l'intégrale de f le long du bord orienté de $K_{\varepsilon,R}$ et de sa limite quand $\varepsilon\to 0$ et $R\to+\infty$, déduire $J(a)$ et $I(a)$.

[006811]

---

320 445.00 Tranformée de Laplace et de Fourier

Exercice 7097

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes, où a,b,A,T sont des nombres réels positifs.

1. $f(t)=\begin{cases}\frac{A}{a}t, & 0\leqslant t\leqslant a\\ A, & t\geqslant a\end{cases}$

2. $f(t)=\begin{cases} nA, & \text{pour } (n-1)T \leqslant t < nT, \text{ où } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, \text{ c.a.d} \\ A, & 0 \leqslant t < T \\ 2A, & T \leqslant t < 2T, \text{ etc.} \end{cases}$

3. $f(t)=\begin{cases} \frac{4A}{T}t, & 0 \leqslant t < \frac{T}{4} \\ -\frac{4A}{T}t+2A, & \frac{T}{4} \leqslant t < \frac{3}{4}T \\ \frac{4A}{T}t-4A, & \frac{3}{4}T \leqslant t < T \\ 0, & t \geqslant T \end{cases}$

4. $f(t)=\begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < a \\ A, & a \leqslant t < a+b \\ -A, & a+b \leqslant t < a+2b \\ 0, & t \geqslant a+2b \end{cases}$

[006602]

Exercice 7098

La transformée de Laplace de la "fonction" impulsion de Dirac : Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$F_\varepsilon(t)=\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}.$$

1. Trouver $\mathscr{L}(F_\varepsilon)$.
2. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathscr{L}(F_\varepsilon)=1$.

[006603]

Exercice 7099

Calculer la transformée de Laplace de la fonction F où $a,b,\omega,k \in \mathbb{R}$, $a,b>0$:

1. $F(t)=a\sin\omega t$,
2. $F(t)=a(1-e^{-bt})$,
3. $F(t)=a\cos(bt-k)$. N.B. Ici la formule qui exprime la transformée de Laplace de la fonction $G(t)=\begin{cases} F(t-a), & t \geqslant a, \\ 0, & t < a, \end{cases}$ en fonction de celle de F ne s'applique pas à (3). Pourquoi pas ?

[006604]

Exercice 7100

Vérifier les propriétés suivantes de la transformation de Laplace $\mathscr{L}$:

1. $\mathscr{L}(c_1F_1+c_2F_2)=c_1\mathscr{L}(F_1)+c_2\mathscr{L}(F_2)$.
2. $\mathscr{L}(e^{at}F(t))(s)=(\mathscr{L}F)(s-a)$.
3. Pour $G(t)=\begin{cases} F(t-a), & t \geqslant a, \\ 0, & t \leqslant a, \end{cases}$ on a $(\mathscr{L}G)(s)=e^{-as}(\mathscr{L}F)(s)$ $(a \geqslant 0)$.
4. Pour $F_a(t)=F(at)$ on a $(\mathscr{L}F_a)(s)=\frac{1}{a}(\mathscr{L}F)(\frac{s}{a})$.
5. Pour $G(t)=\int_0^t F(u)du$ on a $(\mathscr{L}G)(s)=\frac{(\mathscr{L}F)(s)}{s}$.
6. $\mathscr{L}(t^nF(t))=(-1)^n(\mathscr{L}F)^{(n)}$
7. Si $\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t}$ existe, $\mathscr{L}(\frac{F(t)}{t})(s)=\int_s^\infty(\mathscr{L}F)(\zeta)d\zeta$.
8. Si F est périodique, $F(t+T)=F(t)$, alors

$$(\mathscr{L}F)(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T F(t)e^{-st}dt$$

9. $\lim_{s\to+\infty}(\mathscr{L}F)(s) = 0$.
10. $\lim_{s\to+\infty}(\mathscr{L}F)(s) = 0$.
11. $\lim_{t\to 0, t>0} F(t) = \lim_{s\to\infty} s(\mathscr{L}F)(s)$ si les limites indiquées existent (Théorème de la valeur initiale).
12. $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s(\mathscr{L}F)(s)$ si les limites indiquées existent (Théorème de la valeur finale).

[006605]

Exercice 7101

Trouver toutes les solutions Y de l'équation différentielle

$$tY'' + 2Y' + tY = 0, \quad Y(0) = 1,$$

définies sur la droite réelle entière (i. e. $D_Y = \mathbb{R}$). [006606]

Exercice 7102

Etudier la convergence des séries

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n^2}, \quad \sum_1^\infty \frac{e^{inx}}{n!}.$$

[006607]

Exercice 7103

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction périodique f, définie sur $[-\pi,\pi]$ par

$$f(x) = \pi - |x|, \quad |x| \leqslant \pi.$$

Etudier la convergence de la série de Fourier qui en résulte ; est-elle absolue ou peut-être uniforme ? En déduire la valeur de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$. [006608]

Exercice 7104

1. Trouver les coefficients de Fourier en sin et cos de la fonction périodique F, donnée sur $]-5,5[\setminus\{0\}$ par
$$F(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}.$$
2. Vérifier que F satisfait aux conditions de Dirichlet. Comment doit F être définie en $x = -5, 0, 5$ pour que sa série de Fourier converge vers $F(x)$ pour tout $x \in [-5,5]$?

[006609]

Exercice 7105

Développer la fonction périodique F, donnée sur $]-2,2[$ par $F(x) = x$ (fonction en dents de scie), en série trigonométrique. [006610]

Exercice 7106

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte symétrique
$$f(x) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} < x < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\tau}{2} \end{cases}.$$
2. Vérifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet. Comment doit f être définie en $x = \pm\frac{\tau}{2}$ pour que l'intégrale de Fourier converge vers $f(x)$ pour tout x ?

[006611]

Exercice 7107

1. Utiliser les résultats de l'exercice 7106 pour évaluer
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\lambda \cos b\lambda}{\lambda} d\lambda.$$
2. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$.

[006612]

Exercice 7108

1. Trouver la transformée de Fourier en cosinus de $f(x) = e^{-m|x|},\ m > 0$.
2. Utiliser le résultat de (1) pour montrer que, pour $p > 0,\ \beta > 0$,
$$\int_0^\infty \frac{\cos pv}{v^2+\beta^2} dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-p\beta}.$$

[006613]

Exercice 7109

Trouver une fonction f de sorte que l'équation intégrale suivante soit vérifiée :
$$\int_0^\infty f(x) \sin \alpha x dx = \begin{cases} 1-\alpha, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

[006614]

Exercice 7110

Montrer que, pour $x \geqslant 0$,
$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2+1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

[006615]

Exercice 7111

Evaluer

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$,
2. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$, en appliquant l'identité de Parseval.

[006616]

Exercice 7112

Calculer la transformée inverse de Laplace $\mathscr{L}^{-1}(f)$ pour :

1. $f(s) = \frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}$
2. $f(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$
3. $f(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$
4. $f(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)^2(s^2+4s+5)}$
5. $f(s) = \frac{1}{(s+3)(s+4)}$
6. $f(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$

7. $f(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+16}$

[006617]

Exercice 7113

Soient a, x des nombres réels, $0 < x < a$, et posons $f(s) = \frac{\operatorname{sh} sx}{s^2 \operatorname{ch} sa}$. Déterminer $\mathscr{L}^{-1}(f)$. [006618]

Exercice 7114

Résoudre l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x < \ell,\ t \geqslant 0,$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$Y(x,0) = 0,\ Y_t(x,0) = 0,\ Y(0,t) = 0,\ Y_x(\ell,t) = \frac{F_0}{E} \text{ (i.e. constant)}$$

[006619]

---

321 446.00 Autre

Exercice 7115

Le but de ce problème est d'établir les deux formules importantes :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \lim_{\substack{N \to +\infty \\ M \to +\infty}} \sum_{\substack{-M \leqslant n \leqslant N \\ n \neq 0}} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \sin(\pi z) = \lim_{N \to \infty} \pi z \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

1. Montrer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$ (regarder les sommes partielles pour les indices pairs).
2. On pose $f(w) = \frac{\pi}{\sin \pi w}$. Soit $z \notin \mathbb{Z}$ fixé, soit $N > |z| - \frac{1}{2}$ et $\mathscr{R}_N$ le carré $\{|x| \leqslant N + \frac{1}{2},\ |y| \leqslant N + \frac{1}{2}\}$, et $C_N = \partial \mathscr{R}_N$ son bord parcouru dans le sens direct. Exprimer $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw$ à l'aide du Théorème des résidus.
3. Montrer $\int_{C_N} \frac{f(w)}{w} dw = 0$ (on notera que f est impaire) et en déduire :
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{\pi}{\sin \pi w} \frac{z}{w(w-z)} dw$$
4. On rappelle l'identité $\sin(w) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i \cos(x)\operatorname{sh}(y)$ pour $w = x + iy$. Montrer $|\sin w|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ $(x, y \in \mathbb{R} \dots)$. En déduire $|\sin(\pi w)| = \operatorname{ch}(\pi y) \geqslant 1$ sur les bords verticaux du carré et $|\sin(\pi w)| \geqslant \operatorname{sh}(\pi(N + \frac{1}{2})) \geqslant \operatorname{sh}(\pi \frac{1}{2}) = 2.301 \cdots \geqslant 1$ sur les bords horizontaux. Conclure la preuve de
$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$$
avec convergence uniforme pour $|z|$ borné.
5. Reprendre la même technique et prouver :
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N \leqslant n \leqslant N} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$
avec convergence uniforme pour $|z|$ borné.

6. On veut maintenant prouver : $\sin(\pi z) = \lim_{N\to\infty} \pi z \prod_{n=1}^{N}(1-\frac{z^2}{n^2})$ On fixe une fois pour toutes $R>0$, et on va montrer la formule pour $|z|<R$. Soit N avec $N>R$ et notons $f_N(z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \prod_{n=1}^{N}(1-\frac{z^2}{n^2})$, prolongé par continuité en les n, $|n| \leqslant N$. Montrer que f_N est holomorphe et ne s'annule pas sur $D(0,R)$.
7. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ le chemin $\gamma(t) = f_N(tz)$. On a donc $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = f_N(z)$, et $\gamma(t) \neq 0$ pour tout t. Par un théorème démontré en cours (lequel ?) on a $\gamma(1) = \gamma(0)\exp\left(\int_\gamma \frac{dw}{w}\right)$. En déduire $f_N(z) = \exp\left(\int_0^1 \frac{f_N'(tz)}{f_N(tz)} z dt\right)$.
8. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la convergence uniforme pour $|z|$ borné du développement en fractions de $\pi(\pi z)$, montrer que pour N suffisamment grand, on a $|f_N'(w)| \leqslant \varepsilon |f_N(w)|$ pour tout $w \in D(0,R)$, puis en déduire

$$N \gg 0 \quad |z| < R \implies \quad |f_N(z)| \leqslant e^{\varepsilon |z|} \leqslant e^{\varepsilon R}$$

9. En déduire $\lim_{N\to\infty} f_N(z) = 1$, uniformément sur $D(0,R)$. Conclure la preuve du produit infini de Euler pour $\sin(z)$.

[002870]

Exercice 7116 Produit absolument convergent

Soit u_n, $n \geqslant 1$ des nombres complexes. Montrer : $1+\sum_{n=1}^{N}|u_n| \leqslant \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|) \leqslant e^{\sum_{n=1}^{N}|u_n|}$. En déduire que la suite croissante $\prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|)$ a une limite finie si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| < \infty$. On suppose maintenant être dans ce cas, et de plus $\forall n\ 1+u_n \neq 0$. Montrer alors $\sum_{n=1}^{\infty}|\mathrm{Log}(1+u_n)| < \infty$, et en déduire que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge. On conviendra donc de dire que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ est "absolument convergent" si $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| < \infty$, et on vient donc de prouver qu'un produit absolument convergent est convergent. C'est principalement, la seule chose que vous ayez à savoir sur ce sujet. [002871]

Exercice 7117

Pour quelles valeurs de p (réel) $\prod_{k=1}^{\infty}(1+k^{-p})$ converge ? [002872]

Exercice 7118

Étant admis que $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{\frac{z}{k}}$$

et justifier la convergence absolue du produit. [002873]

Exercice 7119

Étant admis $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N,k\neq 0}^{+N} \frac{z-k}{-k}\ ,$$

puis établir pour tout $\alpha \notin \mathbb{Z}$:

$$\sin(\pi(z-\alpha)) = -\sin(\pi\alpha) \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N}^{+N}\left(1-\frac{z}{\alpha+k}\right)$$

Montrer que le résultat reste valable si l'on remplace dans le produit $-N$ par $-N\pm 1$ ou $+N$ par $+N\pm 1$. En déduire :

$$\cos(\pi z) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(\frac{1}{2}+k)^2}\right)$$

avec un produit absolument convergent. [002874]

Exercice 7120

On rappelle la formule $\pi(\pi\alpha) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{+N}\frac{1}{\alpha-k}$, pour $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Montrer :

$$\frac{\sin(\pi(\alpha-z))}{\sin(\pi\alpha)} = e^{-\pi(\pi\alpha)z}\prod_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha+k}\right)e^{\frac{z}{\alpha+k}}$$

avec un produit absolument convergent. [002875]

Exercice 7121

Établir la convergence et évaluer les produits infinis suivants :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}$$

Les trois premiers s'obtiennent par des réarrangements simples. Pour le dernier, utiliser le produit infini de $\sin z$.
[002876]

Exercice 7122

On suppose $\sum_{n\geqslant 1}|u_n|^2<\infty$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \mathrm{Log}(1+u_n)$ sont soit toutes deux convergentes soit toutes deux divergentes (on suppose $\forall n\ u_n\neq -1$). Donc si $\sum_{n\geqslant 1}|u_n|^2<\infty$ le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ est convergent si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ converge. [002877]

Exercice 7123

Montrer que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{i}{k})$ diverge tandis que $\prod_{k=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{k}\right|$ converge. [002878]

Exercice 7124

Montrer que les racines du polynôme $P(z)=z^{111}+3z^{50}+1$ vérifiant $|z|<1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50. *Indication :* utiliser le théorème de Rouché en écrivant $P(z)=3z^{50}+(z^{111}+1)$ et calculer P' pour s'assurer que les racines avec $|z|<1$ sont simples.

Correction ▼ [002883]

Exercice 7125

Déterminer l'image par $z\mapsto\frac{3z+5}{z+2}$ du cercle unité, du cercle de rayon 2 centré en 1, du cercle de rayon 2 centré en l'origine ; de la droite imaginaire, de la droite d'équation $x=y$, de la droite verticale passant en 3, de la droite verticale passant en -2.

Correction ▼ [002884]

Exercice 7126

Question de cours : quels sont les automorphismes de $D(0,1)$ avec 0 comme point fixe ? [002885]

Exercice 7127

Soit α avec $|\alpha|<1$. On sait que $z\mapsto\phi_\alpha(z)=\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$ est un automorphisme du disque unité $D(0,1)$. Trouver z_1 et z_2 avec $\phi_\alpha(z_1)=z_2$, $\phi_\alpha(z_2)=z_1$. Deux points distincts arbitraires z_1 et z_2 étant donnés dans $D(0,1)$, montrer qu'il existe un automorphisme les échangeant et que cet automorphisme est unique à une rotation près (on se ramènera au cas où l'un des points est l'origine).

Correction ▼ [002886]

Exercice 7128

Trouver l'unique automorphisme du premier quadrant qui échange $1+i$ et $2+2i$. On remarquera que $z \mapsto z^2$ est une bijection analytique du premier quadrant sur le demi-plan supérieur, et que l'on peut donc ramener le problème à une question dans le demi-plan supérieur. [002887]

Exercice 7129

Soit f holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $|f(w)| \leqslant 8$ pour tout $|w| \leqslant 1$ et $f(\frac{3}{4}) = 0$. Montrer $|f(0)| \leqslant 6$. *Indication :* trouver un automorphisme ϕ du disque avec $\phi(0) = \frac{3}{4}$ et utiliser le Lemme de Schwarz pour la fonction $\frac{1}{8}f(\phi(z))$. Trouver le z avec $\phi(z) = 0$. [002888]

Exercice 7130

Calculer $\int_C (x+2y)\ dx + (y-2x)\ dy$ le long de l'ellipse C définie par $x = 4\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. [006731]

Exercice 7131

Calculer $\int_C (z^2+3z)\ dz$ le long des chemins suivants :

1. le cercle $|z| = 2$ du point (2,0) au point (0,2)
2. le segment de droite joignant les points (2,0) et (0,2)
3. le contour polygonal formé par les segments de droite joignant (2,0) à (2,2) et (2,2) à (0,2)

[006732]

Exercice 7132

Calculer $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ pour $n = 1,2,3\ldots$, où C est un cercle de centre a. [006733]

Exercice 7133

Soit $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ des fonctions continues à valeurs réelles et à dérivées partielles continues sur un ouvert connexe Ω et sur sa frontière C. La formule de Green établit que

$$\int_C Pdx + Qdy = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

1. Montrer la formule de Green pour une courbe fermée simple C ayant la propriété d'être rencontrée par des parallèles aux axes de coordonnées en deux points au plus.
2. Si $f(z,\bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$ est continue et possède des dérivées partielles continues dans un ouvert connexe Ω et sur sa frontière C, montrer que la formule de Green peut s'écrire sous la forme complexe suivante
$$\int_C f(z,\bar{z})dz = 2i\int\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy$$
3. Si C est une courbe fermée simple délimitant un ouvert d'aire A, montrer que $A = \frac{1}{2i}\int_C \bar{z}dz$.
4. Calculer $\int_C \bar{z}dz$ le long
   (a) du cercle $|z-2| = 3$
   (b) du carré de sommets $z = 0$, $z = 2$, $z = 2i$ et $z = 2+2i$
   (c) de l'ellipse $|z-3| + |z+3| = 10$

[006734]

Exercice 7134

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω. Soit c un point de Ω et $r_0 > 0$ tel que $D(c,r_0) \subset \Omega$, où $D(c,r_0)$ est le disque ouvert de centre c et de rayon r_0. On pose $\mu(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c+re^{i\theta})d\theta$ pour $0 < r < r_0$.

1. Montrer que
$$\lim_{r\to 0^+} \mu(r) = f(c)$$
2. On suppose $f'(z)$ continue. Montrer que μ est constante (on montrera que $\dfrac{d\mu}{dr} = 0$ en dérivant sous le signe d'intégration).
   Soit maintenant $M = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|$ et on suppose qu'il existe $c \in \Omega$ tel que $|f(c)| = M$.
3. Montrer que $M = |f(c+re^{i\theta})$ où $r > 0$ est tel que $D(c,r) \subset \Omega$.
4. Soit $V = \{z \in \Omega |\ |f(z)| = M\}$. Montrer que V est à la fois un ouvert et un fermé de Ω. En déduire le principe du maximum : si f atteint son maximum en un point d'un ouvert connexe Ω, alors f est constante.

[006735]

Exercice 7135

1. Soit $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Montrer que $\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, où $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ($t \in [0,\pi]$).
2. Déduire de 1. la valeur de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

[006736]

Exercice 7136

Si γ est l'arc de courbe $\gamma(t) = t + i(t^3 - 3t^2 + 4t - 1)$ joignant les points (1,1) et (2,3), trouver la valeur de
$$\int_\gamma (12z^2 - 4iz)\, dz$$

[006737]

Exercice 7137

1. Calculer l'intégrale $I = \int_\gamma \bar{z}\, dz$ où γ est le chemin joignant le point $(1,1)$ au point $(2,4)$ suivant la parabole $y = x^2$; puis le segment joignant ces points. Qu'obtient-on avec $\int_\gamma z\, dz$?
2. Soit $\gamma = e^{2i\pi t}, t \in [0,1]$ et f continue sur γ^* le cercle unité dans $\mathbb{C}$. Comparer $\int_\gamma \overline{f(z)}\, \frac{dz}{z^2}$ et $\int_\gamma f(z)\, dz$.

[006738]

Exercice 7138

Soit f une fonction continue du quart de plan $\{x+iy;\ x,y \geqslant 0\}$ dans $\mathbb{C}$ et C le quart de cercle paramétré par $\{re^{it};\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\}$ avec $r > 0$. On pose $M(r) = \sup_{z\in C} |f(z)|$. Montrer que si $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, alors $\lim_{r\to\infty} \int_C f(z) e^{iz}\, dz = 0$.

[006739]

Exercice 7139

Soit $w = |w|e^{i\theta}$ un nombre complexe.

1. Montrer que $e^w - 1 = \int_{[0,w]} e^z\, dz = \int_0^{|w|} e^{te^{i\theta}} e^{i\theta}\, dt$; montrer ainsi l'inégalité $|e^w - 1| \leqslant |w| e^{|w|}$ (autre démonstration ?).
2. Application. On considère K un compact du plan inclus dans $\mathbb{C}^*$ et la suite de fonctions v_n définie sur K par $v_n(z) = \frac{1}{z(1+\frac{1}{n})^z}$. Montrer que $v_n(z)$ tend vers $\frac{1}{z}$ uniformément sur K.

[006740]

Exercice 7140

Soit φ une fonction continue sur le bord orienté ∂K d'un compact K ; soit $\Omega = \mathbb{C} \backslash \partial K$: pour $z \in \Omega$, on définit

$$f(z) = \int_{\partial K} \frac{\varphi(u)}{u-z}\, du.$$

On va établir que f est holomorphe dans Ω. Fixons $a \in \Omega$ et posons $r = d(a, \partial K) > 0$.

1. Soit $0 < \rho < r$ et $z \in \bar{B}(a, \rho)$. Montrer, en développant $\frac{1}{u-z}$ en série entière de $z-a$, que f est somme d'une série entière au voisinage de a ; en déduire que $f \in H(\Omega)$.
2. Montrer que f est indéfiniment dérivable en tout point a de Ω et que

$$f^{(n)}(a) = n! \int_I \frac{\varphi(u)}{(u-a)^{n+1}}\, du.$$

[006741]

Exercice 7141

Montrer que

$$\prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{e^{-nz}}{n^2}\right)$$

définit une fonction holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re} z > 0\}$. [006761]

Exercice 7142

On se propose de démontrer que pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$\prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$$

1. On pose

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

Montrer que F est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
En utilisant

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2$$

montrer que $F(z) - \dfrac{\pi}{\tan(\pi z)}$ est constante sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, puis calculer cette constante par un argument de parité. En déduire que

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n(z) = 1 - \dfrac{z^2}{n^2}$. Montrer que $\prod_{n \geqslant 1} f_n(z)$ définit une fonction entière f.
Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

avec $g(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{\pi z}$. En déduire le résultat voulu.

3. Déduire de la décomposition de $\dfrac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ en produit que

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sh} z}{z} &= \prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\\
\operatorname{ch} z &= \prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\\
\cos z &= \prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

[006762]

Exercice 7143

On pose $F(z)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zx^2}\,dx$.

1. Montrer que F est holomorphe sur $\Omega=\{z\in\mathbb{C}|\operatorname{Re} ez>0\}$. Calculer $F'(z)$ en fonction de $F(z)$.
2. En déduire une autre expression de $F(z)$ pour $z\in\Omega$ (on pourra utiliser $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}/2$). Conclure enfin que la fonction F se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$.

[006763]

Exercice 7144 Fonction ζ de Riemann

On introduit la fonction “Zeta” :

$$\zeta(s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$$

I Produit d'Euler Montrer que ζ est holomorphe dans l'ouvert $\Omega=\{z\in\mathbb{C}|\ \operatorname{Re} z>1\}$.
Soient $p_1=2,p_2=3,\dots,p_n,\dots$ la suite des nombres premiers. Montrer que dans Ω, on a

$$\zeta(s)=\prod_{n\geqslant 1}\frac{1}{1-p_n^{-s}}$$

(produit d'Euler).

II Relation de ζ avec la répartition des nombres premiers

1. Montrer que
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{n\geqslant 1}\lambda(n)n^{-s}$$
où $\lambda(n)=\ln p$ si n est une puissance d'un nombre p premier et $\lambda(n)=0$ si n a au moins deux diviseurs premiers distincts.
2. On a le théorème suivant :
Théorème des nombres premiers (Hadamard-De la Vallée Poussin 1896) : Lorsque x tend vers $+\infty$, la somme des $\lambda(n)$ pour $n\leqslant x$ est équivalente à x.
Démontrer que cette assertion est équivalente à dire que le nombre de nombres premiers plus petits que x est équivalent à $x/\ln x$.

III Equation fonctionnelle de ζ, démonstration par la formule de Poisson Soit

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

θ vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall t > 0,\ \theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\theta(t)$$

On pose

$$\psi(t) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-\pi n^2 t}$$

On a évidemment $\theta(t) = 1 + 2\psi(t)$.

1. Soit s tel que $\mathrm{Re}\, s > 1/2$. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s-1}\, dt$ en fonction de n et $\Gamma(s)$. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) t^{s-1}\, dt = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$$

2. Montrer que F définie par

$$F(z) = \int_1^{+\infty} \psi(t) t^z\, dt$$

est une fonction entière. En écrivant

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) t^z\, dt = \int_0^1 \psi(t) t^z\, dt + \int_1^{+\infty} \psi(t) t^z\, dt$$

et en effectuant dans la première partie de la somme le changement de variable $u = 1/t$, puis en utilisant l'équation fonctionnelle de θ, montrer que la fonction L :

$$L(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

se prolonge en une fonction entière, invariante par la transformation s donne $1-s$. Montrer alors que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, ayant 1 pour seule singularité (pôle simple). Montrer enfin que $\mathrm{Res}(\zeta, 1) = 1$.

IV Equation fonctionnelle de ζ, démonstration par le théorème des résidus

1. Soit s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Par la même méthode qu'au III.1., montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt = \Gamma(s)\zeta(s)$$

2. Pour tout s de $\mathbb{C}$, on définit F_s sur $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[$:

$$F_s(z) = \frac{\exp[(s-1)\mathrm{Log}(-z)]}{\exp z - 1}$$

où Log est la détermination principale du logarithme. On définit également le contour $A_{\varepsilon,\varphi}$:
Calculer

$$\lim_{\varphi\to 0} \int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\, dz$$

Montrer que pour $\mathrm{Re}\, s > 1$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{\varphi\to 0} \int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\, dz\right) = 2i\sin(\pi z)\Gamma(s)\zeta(s)$$

Montrer que $\int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\, dz$ est en fait indépendant de $\varepsilon \in]0,1[$, puis que

$$s \mapsto \lim_{\varphi\to 0} \int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\, dz$$

est une fonction entière. En déduire que $\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$ se prolonge en une fonction entière.

3. Soit $C_{n,\varepsilon,\varphi}$ le chemin fermé :
   En appliquant la formule des résidus à F_s sur $C_{n,\varepsilon,\varphi}$ pour $\operatorname{Re} s < 0$, montrer que
$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\},\ \zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)$$
4. Déduire de 3. que
$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$
   En utilisant l'équation fonctionnelle de **III**, montrer alors que
$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \Gamma(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

[006764]

Exercice 7145

Soit f holomorphe sur $\mathbb{C}$, réelle sur l'axe réel, imaginaire pure sur l'axe imaginaire. Montrer que f est impaire.
[006765]

Exercice 7146

Montrer que toute fonction f holomorphe dans un ouvert connexe Ω symétrique par rapport à l'axe réel peut s'écrire $f = f_1 + if_2$, où f_1 et f_2 sont holomorphes dans Ω et réelles sur l'axe réel. [006766]

Exercice 7147

Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité D, continue sur $\overline{D}$, telle que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f est rationnelle. [006767]

Exercice 7148

Donner un biholomorphisme entre les ouverts
$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| > 1,\ \operatorname{Im} mz > 0\} \text{ et } \Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1,\ \operatorname{Im} mz > 0\}$$

[006768]

Exercice 7149

Montrer que la transformation
$$w = \left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)^2,$$
où $m \in \mathbb{N}^*$, définit une représentation conforme de
$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C}|\ z = re^{i\theta},\ 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{m}\right\}$$
sur le demi-plan supérieur. [006769]

Exercice 7150

Soit Ω le demi-plan $\operatorname{Im} mz > 0$ privé du disque fermé de centre i et de rayon 1. Trouver l'image de Ω par la transformation $w = \coth(\pi/z)$. [006770]

Exercice 7151

Soit C une couronne circulaire excentrique. Montrer qu'il existe une transformation homographique appliquant C sur une couronne concentrique. [006771]

Exercice 7152

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe).

1. Soit α un réel, $\alpha > 0$. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|f(z)| \neq \alpha$. Démontrer que, ou bien $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \alpha$, ou bien $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| > \alpha$. En déduire que f est constante.
2. On suppose ici que f n'est pas constante.
   (a) Démontrer que $\inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = 0$ et $\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = +\infty$.
   (b) Démontrer que $\{ |f(z)| \, , \, z \in \mathbb{C}\}$ est soit $]0,+\infty[$, soit $[0,+\infty[$. Donner un exemple dans chacun des deux cas.
3. On suppose toujours que f n'est pas constante. Démontrer que $\{f(z) \, , \, z \in \mathbb{C}\}$ est partout dense dans $\mathbb{C}$.

[006812]

Exercice 7153

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$ converge.
2. Soit $f(z) = \frac{\log(z)}{(1+z^2)^2}$ avec $\log(z) = \mathrm{Log}(-iz) + i\pi/2$ le logarithme défini sur $\mathbb{C} \setminus i]-\infty,0]$ et tel que $\log(1) = 0$. Déterminer les points singuliers isolés de f et pour chaque point singulier isolé déterminer son résidu.
3. Soit $D = \{ z\in\mathbb{C} \mid \varepsilon < |z| < R \;\&\; \mathrm{Im}\, z > 0 \}$. À l'aide de $\int_{\partial D} f(z)\,dz$, déterminer la valeur de $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$. N'oubliez pas de justifier les passages à la limite que vous effectuez.

[006825]

Exercice 7154

1. Énoncer le principe du maximum.
2. Soit $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$ des points sur le cercle unité ($|a_j| = 1$). Démontrer qu'il existe un point z_o sur le cercle unité tel que le produit des distances de z_o à a_j ($j = 1,\dots,n$) est supérieur ou égal à 1.

[006826]

Exercice 7155

Soit f une fonction holomorphe sur $B_r(0) \subset \mathbb{C}$ pour un certain rayon $r > 1$. Démontrer les égalités suivantes :

$$\tfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2(\tfrac{\theta}{2})\,d\theta = 2f(0) + f'(0)\tfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\,d\theta = 2f(0) - f'(0)$$

Indication : contempler les deux intégrales $\int_{|z|=1} \Big(2 \pm (z + \frac{1}{z})\Big)\frac{f(z)}{z}\,dz$. [006830]

Exercice 7156

Soit a un réel, $0 < a < 2$.

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^a}{x(1+x^2)}\,dx$ converge.
2. Soit $f(z) = \frac{e^{a\log(z)}}{z(1+z^2)}$ avec $\log(z) = \mathrm{Log}(-iz) + i\pi/2$, c'est-à-dire que log est le logarithme défini sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus i]-\infty,0]$ et tel que $\log(1) = 0$. Déterminer les points singuliers isolés de f dans Ω et pour chaque point singulier isolé déterminer son résidu.
3. Soit $D = \{ z\in\mathbb{C} \mid \varepsilon < |z| < R \;\&\; \mathrm{Im}\, z > 0 \}$. À l'aide de $\int_{\partial D} f(z)\,dz$, déterminer la valeur de $\int_0^\infty \frac{x^a}{x(1+x^2)}\,dx$. N'oubliez pas de justifier les passages à la limite que vous effectuez.

[006831]

Exercice 7157

Soit P et Q deux polynômes à coefficients complexes sans zéro commun et soit $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ les zéros de Q (ce qui implique que le degré de Q est supérieur ou égal à k). On définit la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = P(z)/Q(z)$.

1. Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ telle que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} : g(z) = f(z)$. Quelle est la valeur de g en un point z_i ? Quelle est la valeur de g en ∞ ? (N'oubliez pas de démontrer que la fonction g que vous définissez est continue.)
2. Le résultat reste-t-il vrai si P et Q ont des zéros communs ? Si non, donner un contre exemple ; si oui, esquisser votre raisonnement.

[006836]

Exercice 7158

1. Quand dit-on qu'une partie S de $\mathbb{R}^n$ est discrète ?
2. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une partie discrète et fermée. Démontrer que $K \cap S$ est fini.
3. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non-identiquement nulle et soit $K \subset \Omega$ un compact. Démontrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans K.

[006838]

Exercice 7159

Soit $f(z) = \dfrac{1 - e^{2iz^2}}{z^3(1+z^4)}$, soit $0 < \varepsilon < 1 < R$ et soit $D = B_\varepsilon(0) \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$.

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{\sin^2(x^2)}{x^3(1+x^4)}\, dx$ converge.
2. Dessiner D, déterminer les singularités de f et calculer $\int_{\partial D} f(z)\, dz$.
3. Déduire de 2. la valeur de $\int_0^\infty \dfrac{\sin^2(x^2)}{x^3(1+x^4)}\, dx$. N'oubliez pas de justifier les passages à la limite que vous effectuez.

[006842]

Exercice 7160

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe et soit a un réel strictement positif.

1. Démontrer que $\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$ est connexe.
2. Démontrer que si pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|f(z)| \neq a$, alors on a ou bien $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| > a$, ou bien $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| < a$. En déduire que f est constante.
3. En utilisant le résultat de 2., démontrer que si f n'est pas constante, alors $\inf_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = 0$ et $\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = +\infty$.

[006844]

Exercice 7161

Soit n, p deux entiers tels que $n \geqslant p+2 \geqslant 2$, soit $f(z) = \dfrac{z^p}{1+z^n}$, soit $R > 0$ et soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Arg}(z) < 2\pi/n\ ,\ 0 < |z| < R\}$.

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{x^p}{1+x^n}\, dx$ converge.
2. Dessiner D, déterminer les singularités isolés de f et calculer $\int_{\partial D} f(z)\, dz$.

3. Déduire de 2. la valeur de $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^n}\,dx$. N'oubliez pas de justifier les passages à la limite que vous effectuez.

[006847]

Exercice 7162

Soit $R>1$ et γ_R le chemin fermé de classe C^1 : $\gamma_R : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma_R(t) = Re^{it}$.
On note respectivement γ_R^+ et γ_R^- la restriction de γ_R à $[0,\pi]$ et à $[\pi,2\pi]$. On rappelle que $[a,b]$ désigne le chemin ζ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ défini par $\zeta(t) = bt+(1-t)a$. On pose $C_R^+ = \gamma_R^+ + [-R,R]$ et $C_R^- = \gamma_R^- + [R,-R]$.
Montrer que $\mathrm{Ind}_{C_R^+}(i) + \mathrm{Ind}_{C_R^-}(i) = \mathrm{Ind}_{\gamma_R}(i)$ et en déduire la valeur de $\mathrm{Ind}_{C_R^+}(i)$. Calculer, pour $u>0$ et $R>1$,

$$\int_{C_R^+} \frac{e^{iuz}}{1+z^2}dz.$$

En déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{1+x^2}dx,$$

pour $u>0$, puis pour tout u réel.

[006848]

Exercice 7163

Soit α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ et $\Delta = \{z\in\mathbb{C}, z = re^{i\theta} \mid 0<r, |\theta|<\alpha\}$. On note, pour $\eta>0$, $\Delta_\eta = \{z\in\mathbb{C}, z=re^{i\theta} \mid \eta < r, |\theta|<\alpha\}$. Dessiner Δ et Δ_η.
Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction holomorphe sur Δ, bornée et continue sur $\overline{\Delta}$, l'adhérence de Δ. On note $\partial\Delta$, la frontière de Δ.
On pose $\tilde{M} = \sup\limits_{z\in\partial\Delta} |f(z)|$ et, pour tout $r>0$, $M_r = \sup\limits_{z\in\Delta, |z|=r} |f(z)|$.

1. On suppose

   $$(*) \qquad \lim_{z\in\Delta, |z|\to\infty} |f(z)| = 0.$$

   Soit $R>0$, montrer que l'on a

   $$\sup_{z\in\overline{\Delta}, |z|\leqslant R} |f(z)| \leqslant \max\left(\tilde{M}, M_R\right)$$

   et donc

   $$\sup_{z\in\overline{\Delta}} |f(z)| \leqslant \sup_{z\in\partial\Delta} |f(z)|.$$

2. On ne suppose plus (*). On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n>0$, et tout $z\neq 0$, $g_n(z) = \frac{f(z)^n}{z}$. En majorant, comme dans la question 1. $\sup_{z\in\overline{\Delta_\eta}, |z|\leqslant R} |g_n(z)|$, montrer que l'on a, pour tout $n>0$, tout $\eta>0$ et tout z de Δ_η,

   $$\left|\frac{f(z)^n}{z}\right| \leqslant \frac{1}{\eta}\max\left((\tilde{M})^n, (M_\eta)^n\right)$$

   et de là

   $$\sup_{z\in\overline{\Delta_\eta}} |f(z)| \leqslant \max\left(\tilde{M}, M_\eta\right).$$

   En déduire que l'on a encore

   $$\sup_{z\in\overline{\Delta}} |f(z)| \leqslant \sup_{z\in\partial\Delta} |f(z)|.$$

3. On suppose maintenant que l'on a $\lim_{r\to\infty} |f(re^{i\alpha})| = 0$ et $\lim_{r\to\infty} |f(re^{-i\alpha})| = 0$. On se propose de montrer qu'alors $\lim_{z\in\Delta, |z|\to\infty} |f(z)| = 0$.
   En majorant la fonction $z\mapsto \left|\frac{z}{z+A}\right|$, $A>0$, montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $R>0$ tel que l'on ait, pour tout $A>0$,

   $$\sup_{z\in\partial\Delta, |z|>R} \left|\frac{z}{z+A} f(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer qu'alors il existe $A>0$ tel que l'on ait

$$\sup_{z\in\partial\Delta}\left|\frac{z}{z+A}f(z)\right|\leqslant\varepsilon.$$

En utilisant la question 2., en déduire que l'on a $\lim_{z\in\Delta,|z|\to\infty}|f(z)|=0$.

[006849]

Exercice 7164

Soit t un réel, $|t|\leqslant\pi$.

1. On considère la série de fonctions holomorphes

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k e^{ikt}}{k^2-z^2}.$$

Montrer que sa somme $S(z)$ est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$.

2. Soit γ_n, $n\geqslant 0$, le chemin parcouru dans le sens positif dont l'image γ_n^* dans $\mathbb{C}$ est le carré de sommets $\left(n+\frac{1}{2}\right)(1+i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1+i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1-i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(1-i)$.

   (a) Montrer que, quel que soit z vérifiant $z=\left(n+\frac{1}{2}\right)+iy$, $-\left(n+\frac{1}{2}\right)\leqslant y\leqslant n+\frac{1}{2}$, on a

   $$\left|\frac{e^{itz}}{\sin\pi z}\right|\leqslant 2$$

   et que, quel que soit z vérifiant $z=x+i\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $-\left(n+\frac{1}{2}\right)\leqslant x\leqslant n+\frac{1}{2}$, on a

   $$\left|\frac{e^{itz}}{\sin\pi z}\right|\leqslant\frac{2}{1-e^{-\pi}}.$$

   En déduire que $\left|\frac{e^{itz}}{\sin\pi z}\right|$ est bornée sur γ_n^*.

   (b) Soit a appartenant à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. On pose

   $$f(z)=\frac{e^{itz}}{(z^2-a^2)\sin\pi z}.$$

   Montrer que l'on a

   $$\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n}f(z)dz=0.$$

3. Calculer le résidu de f en chacun de ses pôles. En déduire la valeur de

$$S(a)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k e^{ikt}}{k^2-a^2}.$$

4. Calculer de même

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k e^{ikt}}{(k+a)^2}.$$

[006850]

Exercice 7165

Soit a un réel, $a>1$. On considère la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{a^{n^2}}.$$

1. Montrer que sa somme, notée $f(z)$, est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $a_0 > 1$ tel que l'on ait, pour tout $a \geqslant a_0$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{k^2}} \leqslant \frac{1}{100}.$$
2. *Dans toute la suite, on supposera $a \geqslant a_0$.*
Soit p entier, $p \geqslant 1$. Montrer que l'on a, pour tout z vérifiant $|z| = a^{2p}$,
$$\frac{1}{a^{p^2}}\left|f(z) - \frac{z^p}{a^{p^2}}\right| \leqslant \frac{2}{100}.$$
En déduire que $f(z)$ a p zéros, $z_1,\dots,z_p$ dans le disque ouvert $D(0,a^{2p})$. Montrer que, quel que soit $p \geqslant 1$, z_p a les propriétés suivantes :
(a) $a^{2(p-1)} < |z| < a^{2p}$,
(b) z_p est un zéro simple,
(c) z_p est un réel négatif.
Pour établir (c), on pourra raisonner par l'absurde.

[006851]

Exercice 7166

Soit f une fonction holomorphe et bornée dans le disque ouvert $D(0,1)$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On pose $M = \sup_{|z|<1} |f(z)|$.

1. Montrer que les modules des coefficients du développement de f en série entière au voisinage de 0 sont majorés par M.
2. Utiliser 1. pour montrer que, si l'on pose $g(z) = f(z) - z$, on a
$$|g'(z)| \leqslant \frac{M}{(1-r)^2} - M, \text{ si } |z| \leqslant r < 1.$$
En déduire l'existence d'un réel ρ, $0 < \rho < 1$, *dépendant seulement de M*, tel que l'on ait
$$|g'(z)| < 1 \text{ si } |z| < \rho.$$
3. Montrer alors que la restriction de f au disque ouvert $D(0,\rho)$ est injective (on pourra, pour z_1 et z_2 appartenant au disque ouvert $D(0,\rho)$, exprimer $g(z_1) - g(z_2)$ sous forme d'une intégrale).

[006852]

Exercice 7167 Question de cours

Montrer en utilisant le lemme de Schwarz que l'on énoncera soigneusement, que tout automorphisme du disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ est de la forme
$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$
où $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. On admettra que g_a défini par $g_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, pour $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, est un automorphisme de D.

[006853]

Exercice 7168

1. Montrer que le produit infini
$$P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\frac{z}{2n}}{1+\frac{z}{2n-1}}$$
converge normalement sur tout compact de $U = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re} z > 0\}$.

2. On pose $f(z) = zP(z)$. Calculer $f(1)$. On rappelle la formule

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

3. On pose $g = f'/f$. Ecrire g sous forme de série. Montrer que $g(z) + g(z+1) = 1/z$ (on travaillera sur les sommes partielles). En déduire que l'on a $f(z)f(z+1) = \frac{2}{\pi}z$.

[006854]

Exercice 7169

Soit α un nombre réel, $\alpha > 0$.

I Pour tout z dans $\mathbb{C}$ et tout t dans $\mathbb{R}$, on pose

$$f(z,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - z}.$$

1. (a) On note $[1,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} |\ x \geqslant 1\}$ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus [1,+\infty[$. Soit K un compact inclus dans Ω. Démontrer brièvement qu'il existe un réel c, $c > 0$, tel que l'on ait $\inf_{z \in K} \inf_{x \in [1,+\infty[} |x - z| \geqslant c$.

   (b) Montrer que la fonction F définie par

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(z,t)\, dt$$

   est holomorphe dans Ω.

2. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)^\alpha}$.

   (b) Montrer que l'on a, pour tout z, $|z| < 1$,

$$F(z) = F(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)^\alpha}.$$

   (c) La fonction F admet-elle un prolongement holomorphe au voisinage de 1 ?

II Dans toute cette partie, t appartient à $\mathbb{C}$.

1. Soit a un réel, $0 < a < \pi$ et R un réel, $R > 0$. On note $Q(a,R) = \{t \in \mathbb{C} |\ 0 < \mathrm{Re}\, t < R, |\mathrm{Im} mt| < a\}$ et $Q(a) = \{t \in \mathbb{C} |\ 0 < \mathrm{Re}\, t, |\mathrm{Im} mt| < a\}$. Soit $\mathrm{Log} z$ la détermination du logarithme de z holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. On a donc $\mathrm{Log} z = \ln |z| + i \mathrm{Arg} z$, avec $-\pi < \mathrm{Arg} z < \pi$.

   (a) Déterminer $S(a,R) = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Log} z \in Q(a,R)\}$ et $S(a) = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Log} z \in Q(a)\}$. Faire des dessins. On note, pour t dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\mathrm{Log} t}$. Déterminer, pour z dans $S(a)$, le pôle de la fonction

$$t \mapsto f(z,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - z}$$

   situé dans la bande $Q(a)$. Quel est le résidu de cette fonction en ce pôle ?

   (b) Pour tout z dans $S(a,R)$, calculer en fonction de z

$$\int_{\partial Q_\varepsilon(a,R)} f(z,t)\, dt$$

   où $\partial Q_\varepsilon(a,R)$ désigne le chemin parcouru dans le sens positif dont l'image dans $\mathbb{C}$ est la frontière du domaine $Q(a,R) \setminus \{t \in \mathbb{C} |\ |t| < \varepsilon\}$. Quelle est la limite lorsque ε tend vers 0 de $\int_{\partial Q_\varepsilon(a,R)} f(z,t)\, dt$?

2. Soit Γ_a le chemin dont l'image Γ_a^* et le sens de parcours sont représentés ci-dessous.

   On pose

$$F_a(z) = \int_{\Gamma_a} f(z,t)\, dt.$$

(a) En reprenant brièvement les idées utilisées dans I.1., montrer que F_a est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé d'un chemin que l'on précisera et que l'on dessinera.

(b) Montrer que, si z appartient à $S(a)$ et $\mathrm{Im}z < 0$, on a $F_a(z) = F(z)$ (on pourra intégrer $f(z,t)$ le long d'un contour bien choisi).

(c) Soit Γ_a le chemin dont l'image Γ^*_{-a} et le sens de parcours sont représentés ci-dessous.
On pose
$$F_{-a}(z) = \int_{\Gamma_{-a}} f(z,t)\, dt.$$
Montrer brièvement que, si z appartient à $S(a)$ et $\mathrm{Im}z > 0$, on a $F_{-a} = F(z)$.

(d) Montrer, en utilisant II.1.(b), que, pour tout z dans $S(a)$, on a
$$F_{-a}(z) - F_a(z) = 2i\pi \frac{(\mathrm{Log}z)^{\alpha-1}}{z}.$$
En déduire que $F(z)$ n'a pas de limite lorsque z tend vers un point de la demi-droite réelle $]1,+\infty[$.

[006855]

Exercice 7170 Question de cours

En énonçant avec précision les différentes formes du principe du maximum utilisées, démontrer le lemme de Schwarz.

Application : Soit F une fonction holomorphe dans $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$, nulle à l'origine et vérifiant $\mathrm{Re}F(z) \leqslant 1$, pour tout z dans $D(0,1)$. Montrer que la fonction
$$f = \frac{F}{2-F}$$
est bornée par 1 dans $D(0,1)$. En déduire une majoration de $|F(z)|$ en fonction de $|z|$. Déterminer F en supposant de plus que l'on a $F'(0) = 2$. [006856]

Exercice 7171

Calculer, en utilisant le contour (I) ci-contre, l'intégrale
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^7} dx$$
et, en utilisant le contour (II) ci-contre, l'intégrale
$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx.$$

[006857]

Exercice 7172

Si ρ est un réel strictement positif, on note D_ρ le disque ouvert de centre 0 et de rayon ρ et γ_ρ le chemin $t \mapsto \rho e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
On considère une fonction f holomorphe sur D_1, telle que l'on ait $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Pour tout $\rho \in]0,1[$, on pose $m(\rho) = \inf_{|z|=\rho} |f(z)|$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel $r \in]0,1[$ tel que, pour tout $\rho \in]0,r[$, on ait
$$m(\rho) > 0.$$

Dans toute la suite, on suppose que r et ρ sont fixés et qu'ils vérifient les conclusions de 1.

2. Montrer que, pour tout nombre complexe w vérifiant $|w| < m(\rho)$, la fonction
$$z \mapsto f(z) - w$$
a un seul zéro, noté $g(w)$, dans D_ρ.
3. Montrer que l'on a
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\rho} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz = g(w).$$
4. Montrer que, pour tout w vérifiant $|w| < m(\rho)$, on a
$$g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n$$
et l'on exprimera les coefficients c_n au moyen d'intégrales faisant intervenir f et f'.

[006858]

Exercice 7173

Soit g une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. On suppose que g n'est pas égale à la fonction constante $g(z) = i$ et que g vérifie l'équation différentielle
$$g'(z) = g^2(z) = -1.$$
On considère la fonction f définie par
$$f(z) = \frac{g(z)+i}{g(z)-i}.$$
On note P l'ensemble des pôles de f et $U = \mathbb{C} \setminus P$.
Quelle équation différentielle vérifie f ?
Déterminer $f(z)$ sur U, puis sur $\mathbb{C}$. En déduire que, si l'on suppose de plus que g a un pôle en 0, l'on a
$$g(z) = \text{cotan} z.$$

[006859]

Exercice 7174

On se propose de calculer, à l'aide du théorème des résidus, la valeur de l'intégrale
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi t^2\right) dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$; en intégrant la fonction $g(z) = \exp\left(-\pi z^2\right)$ sur le rectangle de sommets $-R$, R, $R+ia$, $-R+ia$ $(R > 0)$, montrer que
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi(t+ia)^2\right) dt.$$
On pose : $f(z) = \exp\left(i\pi z^2\right) \tan\left(\pi z\right)$.
2. Quels sont les pôles de f ? Préciser leur ordre.

   Soit $R > 0$; on considère le parallélogramme Γ_R de sommets $A = R+1+iR$, $B = R+iR$, $C = -R-iR$ et $D = -R+1-iR$, orienté dans le sens direct.
3. Montrer que
$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2e^{-i\pi/4}.$$
4. (a) Montrer que
$$\forall t \in [0,1],\ \left|\tan\left(\pi(R+t+iR)\right)\right| \leqslant \coth\left(\pi R\right).$$
   (b) En déduire que l'intégrale de f sur le segment orienté $[A,B]$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

(c) Montrer de même que l'intégrale de f sur $[C,D]$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

5. On note J et K les intégrales de f sur les segments orientés $[B,C]$ et $[D,A]$.

(a) Montrer que
$$J+K=(-1+i)\int_{-R}^{R} e^{-2\pi t^2}\left(e^{-2\pi t+2i\pi t}-1\right)\,dt.$$

(b) En déduire que, quand R tend vers $+\infty$, $J+K$ tend vers
$$L=e^{3i\pi/4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(u^2+u\sqrt{2}-iu\sqrt{2})}\,du-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\,du\right).$$

(c) l'aide de la question 1. et d'un changement de variable, vérifier que $L=2Ie^{-i\pi/4}$.

Conclure. [006860]

Exercice 7175

Soit c un point singulier essentiel d'une fonction f holomorphe dans un disque pointé $U=\{z\in\mathbb{C}|\ 0<|z-c|<\rho\}$. Le but de l'exercice est de démontrer que f n'est injective dans aucun voisinage pointé de c.

1. Montrer que pour tout $\gamma\in\mathbb{C}$ et tout $\varepsilon>0$, il existe $z'\in U$ et $\varepsilon'>0$ tels que
$$\overline{D(f(z'),\varepsilon')}\subset f(U)\cap D(\gamma,\varepsilon),$$
où $D(a,r)$ désigne le disque ouvert de centre a et de rayon r. On pourra utiliser le théorème de Casorati-Weierstrass, puis remarquer que $f(U)$ est ouvert (la fonction f est holomorphe donc ouverte).

2. Pour $n\geqslant 1$, soit U_n le disque pointé $\{z\in\mathbb{C}|\ 0<|z-c|<\rho/n\}$. Soient $\gamma_0\in\mathbb{C}$ et $\varepsilon_0>0$. Construire par récurrence une suite strictement décroissante $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs et une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$, $z_n\in U_{n-1}$, vérifiant
$$\begin{aligned}\overline{D(f(z_1),\varepsilon_1)} &\subset f(U)\cap D(\gamma_0,\varepsilon_0),\\ \overline{D(f(z_{n+1}),\varepsilon_{n+1})} &\subset f(U_{n+1})\cap D(f(z_n),\varepsilon_n)\ \text{ pour } n\geqslant 1.\end{aligned}$$
En déduire qu'il existe $a\in D(\gamma_0,\varepsilon_0)$ et une suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ de points de U distincts deux à deux tels que
$$\lim_{n\to+\infty} c_n=c\ \text{ et }\ \forall n,\ \ f(c_n)=a.$$
Conclure.

[006861]

Exercice 7176

Les parties I et II sont indépendantes. Les parties III et IV utilisent les résultats établis dans II.

I

1. Déterminer l'ensemble des zéros de la fonction sin dans $\mathbb{C}$. Quel est leur ordre de multiplicité ?
2. On note, pour tout $n\geqslant 0$, γ_n^* le bord du carré dans $\mathbb{C}$ de sommets $(n+\frac{1}{2})\pi(1+i)$, $(n+\frac{1}{2})\pi(-1+i)$, $(n+\frac{1}{2})\pi(-1-i)$, $(n+\frac{1}{2})\pi(1-i)$. Montrer que, si $z\in\gamma_n^*$, on a $|\sin z|^2\geqslant 1$.

II Soit f une fonction entière dans $\mathbb{C}$. On note $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pour tout z dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$ et tout $r>0$, on a
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(f(re^{i\theta}\right)r^{-n}e^{-in\theta}d\theta.$$
On rappelle que $\operatorname{Re} f=\frac{1}{2}(f+\overline{f})$.
On note, pour $n\geqslant 1$, φ_n un réel vérifiant $|a_n|=a_n e^{i\varphi_n}$. En déduire que l'on a, pour tout $n\geqslant 1$,
$$|a_n|=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(f(re^{i(\theta+\frac{1}{n}\varphi_n)}\right)r^{-n}\left(1+e^{-in\theta}\right)d\theta.$$

2. On suppose $f(0)=0$. Montrer que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $r>0$,

$$|a_n| = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(f(re^{i(\theta+\frac{1}{n}\varphi_n)}\right) r^{-n}e^{-in\theta}d\theta$$

et donc

$$|a_n|r^n \leqslant 2\sup_{|z|=r} \mathrm{Re}\, f(z).$$

3. On note toujours f une fonction entière dans $\mathbb{C}$. On suppose maintenant qu'il existe une suite $(r_j)_{j\geqslant 0}$ de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ avec j et qu'il existe des constantes $A>0$ et $\beta>0$ telles que l'on ait, pour tout $j\geqslant 0$ et tout θ réel,

$$\mathrm{Re}\, f(r_je^{i\theta}) \leqslant Ar_j^{\beta}.$$

En déduire que f est un polynôme de degré au plus β (on étudiera d'abord le cas où $f(0)=0$).

III Soit g une fonction entière nulle seulement aux points $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ et telle que chacun de ces zéros soit simple. On suppose de plus qu'il existe $C>0$ tel que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, on ait $|g(z)|\leqslant \exp(C|z|)$.

1. Montrer que $\frac{g}{\sin}$ est une fonction entière qui ne s'annule pas dans $\mathbb{C}$. En déduire, en énonçant avec précision le théorème du cours utilisé, qu'il existe une fonction h entière telle que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, on ait

$$\frac{g(z)}{\sin z} = \exp h(z).$$

2. On note C_n le chemin orienté positivement et défini, pour tout $t\in[0,2\pi]$, par $C_n(t)=(n+\frac{1}{2})\pi e^{it}$ et C_n^* son image. Montrer que

$$\sup_{z\in C_n^*}\left|\frac{g(z)}{\sin z}\right| \leqslant \sup_{z\in \gamma_n^*}\left|\frac{g(z)}{\sin z}\right|$$

(où γ_n^* a été défini en I.2. En déduire que l'on a, pour tout z de C_n^*,

$$\mathrm{Re}\, h(z) \leqslant C\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

et qu'il existe des nombres complexes λ et μ tels que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, on ait

$$g(z) = \lambda \sin z \exp(\mu z).$$

IV Soit α un nombre complexe non nul. On se propose de montrer que l'équation

$$\alpha z - \exp z = 0$$

a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

1. On raisonne par l'absurde. Montrer qu'alors il existe une fonction δ entière telle que l'on ait, pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$\alpha z - \exp z = \exp \delta(z).$$

2. Etablir, pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$|\alpha z - \exp z| \leqslant (|\alpha|+1)\exp|z|.$$

En déduire qu'il existe des nombres complexes ρ et σ tels que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, on ait

$$\alpha z - \exp z = \rho \exp(\sigma z).$$

Conclure.

[006862]

322 450.00 Interpolation polynomiale

323 451.00 Courbe de Bézier, spline

324 452.00 Intégration numérique

325 453.00 Méthode de Newton

326 454.00 Résolution d'équation différentielle

327 455.00 Résolution de systèmes linéaires : méthode directe

328 456.00 Résolution de systèmes linéaires : méthode itérative

329 457.00 Résolution de systèmes linéaires : méthode de gradient

330 458.00 Calcul de valeurs propres et de vecteurs propres

331 459.00 Autre

Exercice 7177 Matrices triangulaires élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on définit les matrices suivantes dans $\mathbb{R}^{n\times n}$:
- E_{ij} matrice avec un 1 dans la position (i,j) et 0 partout ailleurs ;
- $V_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}, i > j$;
- $L(l_i) = I + l_i e_i^T$, $l_i \in \mathbb{R}^n$ tel que ses premières i composantes sont nulles.

1. Quels sont les résultats des opérations suivantes sur la matrice A :
$$B = V_{ij}(\lambda)A, C = AV_{ij}(\lambda)?$$
2. Quelle est la forme de la matrice
$$V_{ij}(\lambda)V_{kj}(\lambda'), k > i?$$
3. Représenter $L(l_i)$ et montrer que $L(l_i)^{-1} = L(-l_i)$.
4. Décomposer $L(l_i)$ comme produit de matrices de la forme $V_{km}(\lambda)$.
5. Calculer $L = \prod_{i=1}^{n-1} L(l_i)$ et son inverse L^{-1}
6. On suppose les l_i stockés dans un tableau bidimensionnel Z et $b \in \mathbb{R}^n$ stocké dans un tableau unidimensionnel B. Donner un algorithme permettant de calculer dans B la solution de $Lx = b$:
   (a) en utilisant l'expression de L^{-1} ;
   (b) en résolvant le système triangulaire.

   Quelle est la conclusion ?

Correction ▼ [002210]

Exercice 7178 Quelques identités pour le calcul d'inverses

Démontrer l'identité
$$(A+UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I+BVA^{-1}U)^{-1}BVA^{-1}$$
en précisant :
- son domaine de validité ;
- les types des matrices A, U, B, V.

Quelques cas particuliers :

1. Supposons $B = \beta$ scalaire, $U = u \in \mathbb{R}^n$, $V = v^T \in \mathbb{R}^n$. Retrouver la formule de Shermann–Morrison qui permet le calcul de l'inverse d'une matrice qui apparait comme perturbation de rang 1 d'une matrice dont on connait l'inverse.
2. Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ régulière et $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $1 + v^T A^{-1} u = 0$. Montrer que
$$B = \begin{pmatrix} A + uv^T & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \text{ est régulière.}$$
Calculer B^{-1} en remarquant que
$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T & 1 \end{bmatrix}$$
3. Soit
$$D = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \text{ matrice inversible avec } P \in \mathbb{R}^{p\times p}, Q \in \mathbb{R}^{p\times q}, S \in \mathbb{R}^{q\times q}$$
Calculer D^{-1} en remarquant que
$$D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ R & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q \\ S - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$
4. *Calcul récursif de l'inverse* : on pose
$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & s \end{bmatrix} \text{ avec } A_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} u, v \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R}$$
Utiliser la formule précédente pour calculer A_n^{-1} en fonction de A_{n-1}^{-1}. En déduire un algorithme récursif pour le calcul de l'inverse d'une matrice carrée de taille n.

Correction ▼ [002211]

Exercice 7179 Quelques propriétés des normes matricielles

1. Soit A une matrice d'ordre (m,n). Démontrer les inégalités suivantes pour les normes p, $p = 1, 2, \infty$ et la norme de Frobenius :
   (a) $\|A\|_2 \leqslant \|A|_F \leqslant \sqrt{n}\|A|_2$
   (b) $\max|a_{ij}| \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{mn}\max|a_{ij}|$
   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{m}\|A\|_\infty$
   (d) $\dfrac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|A\|_1$
2. Soit $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ et $E = uv^T$. Montrer que
$$\|E\|_F = \|E\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$$
$$\|E\|_\infty = \|u\|_\infty\|v\|_1$$

Correction ▼ [002212]

Exercice 7180

Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors
— $I - A$ est régulière ;
— $(I-A)^{-1} = \lim_{k\to\infty} C_k$ avec $C_k = I + A + \cdots + A^k$.

Correction ▼ [002213]

Exercice 7181 Estimation de l'erreur dans le calcul de l'inverse

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible et B une approximation de A^{-1} On pose $X = I - AB$ et on suppose que $\|X\| < 1$. Montrer que

$$\|A^{-1} - B\| \leqslant \frac{\|BX\|}{1 - \|X\|}.$$

Correction ▼ [002214]

Exercice 7182 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Soient

- H =span$\{v_1, \cdots, v_r\}$ le sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $\{v_i\}$ supposés indépendants ;
- $V = \left[\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{array}\right]$ la matrice de type $n \times r$ dont les colonnes sont les composantes des v_i dans la base canonique $\varepsilon = (e_1, \cdots, e_n)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on désigne par y sa projection orthogonale sur H et par X et Y les matrices colonnnes des composantes de x et y dans la base ε. On pose

$$y = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i.$$

1. Montrer que la matrice $G = G(v_1, \cdots, v_r) = V^T V$ est inversible.
2. Montrer que les α_i vérifient le système
$$G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = V^T X$$
3. En déduire que $Y = VG^{-1}V^T X = PX$ avec $P = VG^{-1}V^T$ (P est donc la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur H
4. *Application* : on considère $n = 3, v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2 + e_3$. Déterminer la projection orthogonale sur $H =$ span $\{v_1, v_2\}$ de $x = 2e_1 - e_2 + e_3$.
5. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur H =span $\{v\}$?
6. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^n$
$$d^2(x, H) = \frac{\det G(x, v_1, \cdots, v_r)}{\det G(v_1, \cdots, v_r)}$$

[002215]

Exercice 7183

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang $r \leqslant p = \min(m, n)$. On considère la décomposition en valeurs singulières de A

$$U^T AV = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_p)$$

où les σ_i sont les valeurs singulières de A

1. Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{u^1, u^2, \cdots, u^r\}$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\{v^{r+1}, \cdots, v^n\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(^T A) = \mathrm{span}\{v^1, u^2, \cdots, v^r\}$ et $\mathrm{Ker}(A^T) = \mathrm{span}\{u^{r+1}, \cdots, u^m\}$.
3. Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A^T)$, $\mathrm{Ker}(A^T)$ à l'aide de U et V.

4. *Application :* calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et les matrices correspondantes aux projections orthogonales de l'exercice précédent.

Correction ▼ [002216]

Exercice 7184 Pseudo–inverse d'une matrice

Définition : Soit Σ une matrice diagonale de type $(m \times n)$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & \bigcirc & & & \end{pmatrix}$$

On appelle pseudo–inverse de Σ la matrice $\Sigma^\dagger$ de type $(n \times m)$ définie par

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & & 0 & \\ & \ddots & & \bigcirc \\ 0 & & \mu_r^{-1} & \end{pmatrix}$$

Soit A une matrice de type $(m \times n)$ dont la décomposition en valeurs singulières est $A = U\Sigma V^*$.
On appelle *pseudo-inverse* de la matrice A la matrice $A^\dagger$ de type $(n \times m)$ définie par

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*.$$

1. Quelle application représente la restriction de $\Sigma^\dagger\Sigma$ au sous-espace $\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_r\}$?
2. Montrer que si A est carrée régulière alors $A^\dagger = A^{-1}$.
3. Montrer que
$$A^\dagger = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} v_i u_i^*.$$
4. Montrer que
— $AA^\dagger$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$;
— $A^\dagger A$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A^*)$
5. Montrer que la restriction à $\mathrm{Im}(A^*) = \mathrm{Ker}(A)^\perp$ de A^*A est une matrice inversible et
$$(A^*A)^{-1} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-2} v_i v_i^*.$$

Correction ▼ [002217]

Exercice 7185

Montrer que, pour $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$

1. $\|A\|_2 = \sigma_1$, la plus grande valeur singulière de A
2. $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}$ où les σ_i sont les valeurs singulières de A.
3. Les valeurs singulières non nulles de A sont les racines carrés des valeurs propres non nulles de A^*A et AA^*.

4. pour $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i$.
5. Si $A = A^*$ alors les valeurs singulières de A sont les valeurs absolues des valeurs propres de A

Correction ▼ [002218]

Exercice 7186

Montrer que

1. $\mathrm{cond}_2(A) = \mu_n(A)/\mu_1(A)$ avec $\mu_n(A)$ et $\mu_1(A)$ respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de A ;
2. si A est normale alors
$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|};$$
3. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale alors
$$\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(AQ) = \mathrm{cond}_2(QA)$$

Correction ▼ [002219]

Exercice 7187

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$

1. Calculer $\mathrm{cond}_2(A)$, $\mathrm{cond}_1(A)$ et $\mathrm{cond}_\infty(A)$;
2. Résoudre :
   — $Ax = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
   — $Ay = b + \delta b$ pour $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Az = b + \Delta b$ pour $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
3. Pour chacune des trois normes considérées, trouver une majoration théorique de
$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \text{ et } \frac{\|z-x\|}{\|x\|}$$
   et comparer avec les valeurs exactes. Quelle conclusion ?

[002220]

Exercice 7188 Conditionnement du problème de l'inversion d'une matrice

Soit A une matrice inversible donnée.

1. si $(A+\delta A)$ est une matrice inversible, démontrer
$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A+\delta A)^{-1}\|} \leqslant \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$
2. Démontrer que
$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}(1+\mathscr{O}(\|A\|))$$

Correction ▼ [002221]

Exercice 7189 Taille des éléments dans l'élimination de Gauss

Notons $\tilde{A}_k$ la matrice carrée d'ordre $(n-k+1)$ formée des éléments $a_{ij}^k, k \leqslant i,j \leqslant n$ de la matrice $A_k = (a_{ij}^k)$ obtenue come résultat de la $(k-1)$–ème étape de l'élimination de Gauss. On suppose $A = A_1$ symétrique définie positive.

1. Notant $(.,.)$ le produit scalaire euclidien et $v' \in \mathbb{R}^{n-k}$ le vecteur formé par les $(n-k)$ dernières composantes d'un vecteur $v = (v_i)_{i=k}^n \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ quelconque, établir l'identité

$$(\tilde{A}_k v, v) = (\tilde{A}_{k+1} v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k} \left| a_{kk}^k v_k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i \right|^2 .$$

2. Montrer que chaque matrice $\tilde{A}_k$ est symétrique définie positive.
3. Etablir les inégalités suivantes :

$$0 < a_{ii}^{k+1} \leqslant a_{ii}^k, \quad k+1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\max_{k+1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii}^{k+1} = \max_{k+1 \leqslant i,j \leqslant n} \left| a_{ij}^{k+1} \right| \leqslant \max_{k \leqslant i,j \leqslant n} \left| a_{ij}^k \right| = \max_{k \leqslant i \leqslant n} a_{ii}^k$$

Correction ▼ [002222]

Exercice 7190 Stratégie de pivotage

---

1. Montrer que pour une matrice quelconque $A = (a_{ij})$ de type (2×2) on a

$$\mathrm{cond}_2(A) = \sigma + (\sigma^2 - 1)^{1/2} \text{ avec } \sigma = \frac{\sum_{i,j=1}^2 |a_{ij}|^2}{2|\det(A)|}$$

2. Calculer les conditionnements $\mathrm{cond}_p(.)$ pour $p = 1, 2, \infty$ des matrices exactes obtenues à la première étape de la procédure d'élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{cases}$$

selon que l'on commence, ou non, par échanger les deux équations. Conclusion ?

[002223]

Exercice 7191 Factorisation LU d'une matrice bande

Montrer que la factorisation LU préserve la structure des matrices bande au sens suivant :

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } |i-j| \geqslant p \Rightarrow \begin{cases} l_{ij} = 0 & \text{pour } i - j \geqslant p \\ u_{ij} = 0 & \text{pour } j - i \geqslant p \end{cases}$$

Correction ▼ [002224]

Exercice 7192 Factorisation d'une matrice symétrique

Soit A une matrice symétrique inversible admettant une factorisation LU. Montrer que l'on peut écrire A sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T \text{ où}$$

— B est une matrice triangulaire inférieure ;
— $\tilde{B}$ est une matrice où chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de B, soit égale à la colonne correspondante de B changée de signe.

Application numérique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction ▼ [002225]

Exercice 7193 Quelques factorisations LU

---

1. Soit $A = LU$ la décomposition LU d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $|l_{ij}| \leqslant 1$. Soient a_i^T et u_i^T les lignes i de A et U respectivement. Montrer que
$$u_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^T$$
et que
$$\|U\|_\infty \leqslant 2^{n-1}\|A\|_\infty$$
2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ ou } j = n \\ -1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que A a une décomposition LU avec $|l_{ij}| \leqslant 1$ et $u_{nn} = 2^{n-1}$.

[002226]

Exercice 7194

On suppose $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible. Montrer que si $PA\Pi = LU$ est obtenue par la méthode de Gauss avec pivotage total, alors
$$\begin{array}{l} \forall i, j = 1, \cdots, n \ \ |l_{ij}| \leqslant 1 \\ \forall i = 1, \cdots, n, \forall j = i, \cdots, n, \quad |u_{ij}| \leqslant |u_{ii}| \end{array}$$

[002227]

Exercice 7195

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que A^T soit à diagonale strictement dominante. Montrer que A admet une décomposition LU avec L^T à diagonale strictement dominante.

Correction ▼ [002228]

Exercice 7196 Matrices de Householder

1. Soit v un vecteur réel vérifiant $v^T v = 1$. Montrer que la matrice de Householder
$$H(v) = I - 2vv^T$$
représente une symétrie par rapport au sous–espace vectoriel formé par les vecteurs orthogonaux aux vecgteurs v. En déduire que $\det(H(v)) = -1$.
2. Démontrer que toute matrice orthogonale est le produit de au plus n matrices de Householder. En déduire une interprétation géométrique des matrices orthogonales.

Correction ▼ [002229]

Exercice 7197 Algorithme de Gram–Schmidt et Gram–Schmidt modifié

Etant donnés n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^m$, $\{a_1, \cdots, a_n\}$, on veut calculer une base orthonormale pour $\operatorname{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$.
On pose $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et on considère la factorisation QR de A,
$$A = QR, \quad Q = [q_1, \cdots, q_n], \quad r_i^T, i = 1, \cdots, n \text{ les lignes de } R$$

1. Montrer que
$$\operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{q_1, \cdots, q_n\}.$$
2. Montrer que
$$q_k = \frac{1}{r_{kk}}\left(a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i\right) \quad k = 1, \cdots, n$$

3. En déduire un algorithme pour le calcul récursif des q_i (algorithme de Gram–Schmidt).
4. Algorithme de Gram–Schmidt modifié
   L'algorithme précédent est instable numériquement dû à la perte d'orthogonalité dans le calcul des q_i. On va reformuler l'algorithme pour le rendre stable.
   Pour $k = 1, \cdots, n-1$, on définit $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{m\times(n-k+1)}$ de la façon suivante :
   $$[0, A^{(k)}] = A - \sum_{i=1}^{k-1} q_i r_i^T = \sum_{i=k}^{n} q_i r_i^T$$
   et on va décrire l'étape k de l'algorithme.
   (a) Montrer que si on pose
   $$A^{(k)} = [z, B], \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad B \in \mathbb{R}^{m\times(n-k)}$$
   alors
   $$r_{kk} = \|z\|_2, \quad q_k = z/r_{kk}.$$
   (b) Comment peut–on calculer la ligne k de R à partir de $A^{(k)}$?
   (c) Calculer $A^{(k+1)}$.
   (d) A partir des questions précédentes, décrire l'algorithme qui permet le calcul de la factorisation $A = Q_1 R_1$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ orthonormale, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangulaire supérieure (Gram–Schmidt modifié). Le calcul de Q_1 doit se faire sur place.
   (e) Quelle est la complexité de l'algorithme précédent ?

Correction ▼ [002230]

Exercice 7198 Rotation de Givens

Soient $p, q : 1 \leqslant p < q \leqslant n$, $c, s \in \mathbb{R} : c^2 + s^2 = 1$.
On considère les matrices

$$G = G_{p,q}(c,s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & c & \cdots & -s & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & s & \cdots & c & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & \cdots & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire G comme perturbée de I par des matrices de rang 1.
2. Montrer que G est inversible, calculer G^{-1}, montrer que G est orthogonale.
3. Quelle est l'action de G sur $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?
4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $a_{pj} = \alpha, a_{qj} = \beta$. Peut–on trouver G telle que $A' = GA$ vérifie :
   $$a'_{pj} = 0 = \alpha', \quad a'_{qj} = 0 = \beta'?$$
   Est–ce que la solution est unique ?

Correction ▼ [002231]

Exercice 7199

Soit $Z = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ avec $c^2 + s^2 = 1$. On définit ρ par

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c = 0 \\ 1/2\mathrm{sign}(c)s & \text{si} \quad |s| < |c| \\ 2\mathrm{sign}(s)/c & \text{si} \quad |c| \leqslant |s| \end{cases}$$

1. Comment reconstruire $\pm Z$ à partir de ρ ?
2. Soit Q une matrice orthogonale produit de n rotations de Givens : $Q = J_1 \cdots J_n$. Comment peut–on stocker de la façon la plus économique Q sous forme factorisée ?
3. Modifier l'algorithme de Givens pour réduire A à la forme triangulaire supérieure ($QA = R$, Q matrice produit de rotations de Givens) en stockant sur place (donc dans A) toute l'information nécessaire à reconstruire Q.
4. Ecrire l'algorithme qui, à partir des résultats de l'algorithme précédent permet de reconstruire Q.

[002232]

Exercice 7200

Soient x et y deux vecteurs unitaires. Donner un algorithme qui utilise les transformations de Givens pour calculer une matrice Q telle que $Qx = y$. [002233]

Exercice 7201 Méthode de Givens Rapide

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On veut construire une matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ telle que
— $MA = S$ triangulaire supérieure ;
— $MM^T = D$ =diag$(d_1,\cdots,d_m)$, $d_i > 0$
et appliquer cette factorisation de A dans la résolution de systèmes au sens des moindres carrés.

1. Donner la factorisation QR de A en termes de M,D et S.
2. On considère maintenant $m = 2$. Soient $x = (x_1,x_2)^T$ et D =diag(d_1,d_2) ($d_i > 0$) donnés.
   (a) On définit
   $$M_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$
   Supposons $x_2 \neq 0$. Calculer M_1x et $M_1DM_1^T$.
   Comment choisir α_1 et β_1 de façon à ce que la deuxième composante de M_1x soit nulle et que $M_1DM_1^T$ soit diagonale ?
   Pour le choix précédent déterminer γ_1 tel que
   $$M_1x = \begin{pmatrix} x_2(1+\gamma_1) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_1DM_1^T = \begin{pmatrix} d_2(1+\gamma_1) & 0 \\ 0 & d_1(1+\gamma_1) \end{pmatrix}$$
   (b) Supposons $x_1 \neq 0$. On définit
   $$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Choisir α_2 et β_2 de façon à ce que
   $$M_2x = \begin{pmatrix} x_1(1+\gamma_2) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2DM_2^T = \begin{pmatrix} d_1(1+\gamma_2) & 0 \\ 0 & d_2(1+\gamma_2) \end{pmatrix}$$
   et déterminer γ_2
   (c) Montrer que l'on peut toujours choisir M_i ($i = 1,2$) de façon à ce que le "facteur de croissance" $(1+\gamma_i)$ soit inférieur à 2.
3. Soit maintenant $m \in \mathbb{N}$ quelconque. Définir les matrices $M_1(p,q)$ et $M_2(p,q)$ telles que
   $$\begin{pmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ ou } = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$
   — $e_q^T M_i(p,q)x = 0$;
   — $M_iDM_i^T$ matrice diagonale, avec D =diag$(d_1,\cdots,d_n),d_i > 0$
   Ces matrices M_i sont appelées *matrice de Givens rapide*.

4. Décrire l'algorithme qui utilise les transformations de Givens rapides pour réduire $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ à la forme triangulaire supérieure (*méthode de Givens rapide*) :

$$MA = R, \quad MM^T = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_m).$$

Les calculs doivent être faits sur place.
Quel est le coût de cet algorithme ? Comparer avec le coût de la méthode de Householder pour réduire A à la forme triangulaire supérieure.

5. Application à la résolution d'un système linéaire au sens des moindres carrés.
   (a) Comment profiter des résultats fournis par l'algorithme précédent pour résoudre

   $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2 \text{ avec } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad (m>n), \quad b \in \mathbb{R}^m?$$

   (b) Quelles modifications introduire dans l'algorithme de la méthode de Givens rapide pour qu'il résolve le problème de moindres carrés de la question précédente ?

6. *Application numérique* : résoudre au sens des moindres carrés par la méthode de Givens rapide le système

$$Ax=b, A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

7. Considérons maintenant le problème de moindres carrés

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|D(Ax-b)\|_2 \tag{15}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $D = \mathrm{diag}(d_i)$ $(d_i > 0)$. Cela correspond à donner un poids différent à chaque équation du système.
Soit M une matrice produit de matrices de Givens rapide vérifiant

$$\begin{cases} MA = R \text{ triangulaire supérieure} \\ MD^{-2}M^T = \tilde{D} = \mathrm{diag}(\tilde{d_i}), \quad \tilde{d_i} > 0 \end{cases}$$

Comment peut–on résoudre le problème (15) ?
Quelles adaptations faire à l'algorithme précédent ?

Correction ▼ [002234]

Exercice 7202

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour qu'elles valeurs de a A est–elle définie positive ?
2. Pour qu'elles valeurs de a la méthode de Gauss–Seidel est–elle convergente ?
3. Ecrire la matrice J de l'itération de Jacobi.
4. Pour qu'elles valeurs de a la méthode de Jacobi converge–t–elle ?
5. Ecrire la matrice $\mathscr{L}_1$ de l'itération de Gauss–Seidel. Calculer $\rho(\mathscr{L}_1)$.
6. Pour quelles valeurs de a la méthode de Gauss–Seidel converge–t–elle plus vite que celle de Jacobi ?

[002235]

Exercice 7203

Soit A une matrice hermitienne inversible décomposée en $A = M - N$ où M est inversible. Soit $B = I - M^{-1}A$ la matrice de l'itération :

$$x_{n+1} = Bx_n + c.$$

Supposons que $M + M^* - A$ soit définie positive.

1. Soit x un vecteur quelconque et on pose $y = Bx$. Montrer l'identité :
$$(x,Ax) - (y,Ay) = ((x-y),(M+M^* - A)(x-y)).$$
2. Supposons que A est définie positive. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ, $y = Bx = \lambda x$. Utiliser l'identité précédente pour montrer que $|\lambda| < 1$. Que peut–on conclure sur la convergence de la méthode ?
3. Supposons maintenant que $\rho(B) < 1$. montrer que A est définie positive.
4. Supposons A décomposée par points ou par blocs sous la forme
$$A = D - E - F \text{ avec } D \text{ définie positive.}$$
Montrer que la méthode de relaxation par points ou par blocs pour $0 < w < 2$ converge si et seulement si A est définie positive.

Correction ▼ [002236]

Exercice 7204

Soit $A = I - E - E^*$ une matrice carrée d'ordre N où E est une matrice strictement triangulaire inférieure ($e_{ij} = 0$ pour $i \leqslant j$). Pour résoudre le système $Ax = b$, on propose la méthode itérative définie par
$$\left\{ \begin{array}{rcl} (I-E)x_{2k+1} & = & E^* x_{2k} + b \\ (I-E^*)x_{2k+2} & = & Ex_{2k+1} + b \end{array} \right.$$
1. Déterminer B et c pour que l'on ait :
$$x_{2k+2} = Bx_{2k} + c.$$
Vérifier que $B = M^{-1}N$ et $A = M - N$ avec $M = (I-E)(I-E^*)$, $N = EE^*$.
2. Montrer que $M^* + N$ est une matrice définie positive. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la méthode.

Correction ▼ [002237]

Exercice 7205

Soient A et B deux matrices réelles d'ordre N et a,b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère les deux itérations suivantes :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & By_k + a \\ y_{k+1} & = & Ax_k + b \end{array} \right. \quad k = 0,1,\cdots \tag{16}$$
avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ donnés.
1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de convergence des deux suites de vecteurs.
2. Soit $z_k = (x_k,y_k)^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Montrer que (16) peut s'écrire
$$z_{k+1} = Cz_k + c$$
où C est une matrice d'ordre $2n$. Expliciter C et c.
3. Montrer que $\rho^2(C) = \rho(AB)$.
4. On considère maintenant les deux itérations suivantes :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & By_k + a \\ y_{k+1} & = & Ax_{k+1} + b \end{array} \right. \quad k = 0,1,\cdots \tag{17}$$
Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence.
Montrer que (17) est équivalent à
$$z_{k+1} = Dz_k + d$$
où D est une matrice d'ordre $2N$.
Montrer que $\rho(D) = \rho(AB)$.

5. **Taux de convergence**
On appelle taux de convergence asymptotique de la matrice itérative M le nombre

$$R(M) = -\ln(\rho(M)).$$

On pose $e^k = x^k - x^*$ l'erreur de l'itéré d'ordre k.

(a) Montrer que le nombre d'itérations k pour réduire l'erreur d'un facteur ε , i.e., $\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leqslant \varepsilon$ vérifie

$$k \geqslant \frac{-\ln \varepsilon}{R(M)}.$$

(b) Comparer le taux de convergence des algorithmes (16) et (17).

Correction ▼ [002238]

Exercice 7206

On considère le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

1. Décomposer A sous la forme LU et en déduire que (18) admet une solution unique x^*.
2. Ecrire l'itération de Gauss–Seidel pour ce système, c'est–à–dire, le système linéaire donnant $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, t_{n+1}, u_{n+1})$ en fonction de $X_n = (x_n, y_n, z_n, t_n, u_n)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $e_n = X_n - x^*$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|e_{n+1}\|_\infty \leqslant a\|e_n\|_\infty.$$

En déduire la convergence de la suite.
4. Déterminer la matrice de Gauss–Seidel $\mathscr{L}_1$ associée à A. Calculer $\|\mathscr{L}_1\|_\infty$. En déduire la convergence de (X_n) vers x^*.
5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\begin{array}{lcl} |a_{ij}| & \geqslant & \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad i = 2, \cdots, n \\ |a_{11}| & > & \sum_{j\neq 1} |a_{1j}| \end{array}$$

et sur chaque ligne de A il existe il existe un terme non nul a_{ij} pour $i \geqslant 2$ et $j < i$.
Montrer qu'alors la méthode de Gauss–Seidel converge.

Correction ▼ [002239]

332 470.00 Fonction convexe

Exercice 7207

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$.

1. En utilisant la concavité du log, montrer que $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.
2. Montrer que $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$.
3. En déduire que $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$.

[001729]

Exercice 7208

Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}$ convexe croissante et non constante. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = \text{tûûûûûût}$. [001730]

Exercice 7209

Soient p et $q \in]0,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. Montrer que $\forall x,y>0\ xy \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$.
2. Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n>0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^n x_i^p = \sum\limits_{i=1}^n y_i^q = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i \leqslant 1$.
3. Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n>0$. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n x_iy_i \leqslant (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$$
4. Soit $p>1$. En écrivant $(x_i+y_i)^p = x_i(x_i+y_i)^{p-1}+y_i(x_i+y_i)^{p-1}$, montrer l'inégalité de Minkowski :
$$(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n y_i^p)^{\frac{1}{p}}$$
5. Soit (a_n) une suite strictement positive, $u_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k^2$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$. Montrer que si (u_n) converge alors (v_n) aussi.

[001731]

Exercice 7210

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexe.

1. Montrer que f' admet une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2. En déduire que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$ (on pourra utiliser des ε et une formule de Taylor à l'ordre 1).

[001732]

Exercice 7211

$I \subset \mathbb{R}^{+*}$ un intervalle de $\mathbb{R}, J = \left\{x; \frac{1}{x} \in I\right\}$.
Montrer que J est un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$, puis que si $(x,y) \in I^2$, alors :
$$\forall \lambda \in [0,1], \exists \mu \in [0,1], \frac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y} = \mu\frac{1}{x}+(1-\mu)\frac{1}{y}.$$
Soit f continue sur I, et g définie sur J par $g(x) = f(\frac{1}{x}), h$ définie sur I par $h(x) = xf(x)$. Montrer que g est convexe $\Leftrightarrow h$ est convexe. [001733]

Exercice 7212

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe majorée. Que dire de f ? Et si $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$? [001734]

Exercice 7213

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}, u_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k^2, v_n = \sum\limits_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$. Montrer que si $(u_n)_n$ converge alors $(v_n)_n$ aussi. [001735]

Exercice 7214

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(1 + \prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

[001736]

Exercice 7215

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe. [001737]

Exercice 7216

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe ou I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, dérivable en $x_0 \in I$ et telle que $f'(x_0) = 0$. Montrer que x_0 minimise f sur I. [001738]

Exercice 7217

Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que g est convexe si et seulement si :

$$\forall h \in CM([0,1], \mathbb{R}), g\left(\int_0^1 h\right) \leqslant \int_0^1 g(h).$$

[001739]

333 471.00 Multiplicateurs de Lagrange

334 472.00 Algorithme d'Uzawa

335 473.00 Algorithme du simplexe

336 474.00 Autre

337 480.00 Loi, indépendance, loi conditionnelle

Exercice 7218 Indépendance

Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes ayant des lois continues. Montrer que $P(X = Y) = 0$.

Correction ▼ [006938]

Exercice 7219 Calculs de loi

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $|X - Y|$. [006939]

Exercice 7220 Calcul de loi, fonction de répartition

1. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et $Z = X^2$. Calculer la fonction de répartition et la densité de Z.

   Remarque : la loi de Z est appelée loi χ_2 à 1 degré de liberté.

2. Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de Y^3.

Correction ▼ [006940]

Exercice 7221 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle positive intégrable. Montrer que $E(X) = \int_0^{+\infty} (1-F(t))\,dt$.

Correction ▼ [006941]

Exercice 7222 Indépendance d'événements

Soient A et B deux événements indépendants. Montrer que $A \perp B^c$. En déduire que $A^c \perp B$ et $A^c \perp B^c$.

Correction ▼ [006942]

Exercice 7223 La loi exponentielle est sans mémoire

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Montrer que $P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s)$ pour tous $s,t \geqslant 0$.
2. Soit X une variable aléatoire positive avec une densité continue sur $\mathbb{R}_+$. Si $P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s)$ pour tous $s,t \geqslant 0$, montrer que X suit une loi exponentielle.

   Ce résultat montre que la loi exponentielle est une loi sans mémoire, et que c'est la seule sous l'hypothèse du 2. En fait, cette hypothèse n'est pas nécessaire mais le résultat est alors plus difficile à montrer.

Correction ▼ [006943]

Exercice 7224 Loi d'un temps d'arrêt avec un jeu de pile ou face

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On définit la variable aléatoire T_1 à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par $T_1 = \inf\{k > 0 \mid X_k = 1\}$, avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$. *(si on joue à pile $= 0$ ou face $= 1$, T_1 est le temps nécessaire pour obtenir face une première fois)*

1. Montrer que T_1 est fini presque sûrement.
2. Déterminer la loi et l'espérance de T_1 *(cette loi est appelée loi géométrique, $E(T_1)$ est le nombre moyen de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir face une première fois).*
3. Pour tout $n \geqslant 2$, on définit par récurrence $T_n = \inf\{k > T_{n-1} \mid X_k = 1\}$.
   (si on joue à pile ou face, T_n est le temps nécessaire pour obtenir exactement n fois face)
   Montrer que les variables aléatoires $T_1,\ (T_2 - T_1), \dots,\ (T_n - T_{n-1}), \dots$ sont indépendantes et de même loi.
4. Quelle est la loi de T_n ?

Définition générale d'un temps d'arrêt : une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ est un temps d'arrêt relativement à la suite de variable aléatoire $(X_n)_{n\geqslant 1}$ si pour tout n l'événement $\{T \leqslant n\}$ appartient à la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ (autrement dit, il suffit de connaître les valeurs de $X_1, \dots, X_n$ pour savoir si $T \leqslant n$).

Correction ▼ [006944]

Exercice 7225 Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

1. Calculer la fonction génératrice de X.
2. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(m,p)$, indépendante de X. Quelle est la fonction génératrice de $X+Y$? En déduire que $\mathscr{B}(n,p) * \mathscr{B}(m,p) = \mathscr{B}(n+m,p)$.

C'est une des façons de démontrer la stabilité des lois binomiales par convolution. La méthode marche aussi pour les lois de Poisson.

Correction ▼ [006945]

Exercice 7226 Fonctions génératrices

Soit N et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes intégrables à valeurs dans $\mathbb{N}$, les X_n ayant tous la même loi et $P(N=0)=0$. On pose $Y(\omega)=\sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$.
Exprimer la fonction génératrice de Y en fonction des fonctions génératrices de N et de X_1. Puis exprimer l'espérance de Y en fonction de $E(N)$ et de $E(X_1)$.

Correction ▼ [006946]

Exercice 7227 Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

1. Calculer la fonction génératrice de X.
2. Calculer $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
3. Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda')$, indépendante de X. Quelle est la loi de $X+Y$? En déduire que $\mathscr{P}(\lambda)*\mathscr{P}(\lambda')=\mathscr{P}(\lambda+\lambda')$.

Correction ▼ [006947]

Exercice 7228 Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Calculer sa fonction caractéristique.

Correction ▼ [006948]

Exercice 7229 Fonctions caractéristiques

1. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Calculer sa fonction caractéristique.
2. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $P_Y=\mathscr{P}(\lambda')$. Quelle est la fonction caractéristique de $X+Y$? En déduire que $\mathscr{P}(\lambda)*\mathscr{P}(\lambda')=\mathscr{P}(\lambda+\lambda')$.

Correction ▼ [006949]

338 481.00 Variance, covariance, fonction génératrice

Exercice 7230 Calcul d'espérance et de variance

1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, $\lambda>0$. Calculer l'espérance de X.
2. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, $\lambda>0$. Calculer la variance de X.

Correction ▼ [006952]

Exercice 7231 Variance

Soit X une variable aléatoire réelle dans L^2. Montrer que $\mathrm{Var}(X)=\min_{t\in\mathbb{R}} E((X-t)^2)$.

Correction ▼ [006953]

339 482.00 Convergence de variables aléatoires

Exercice 7232 Lemme de Borel-Cantelli **

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.

1. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que

$$P(X_n > \alpha \ln n \text{ pour une infinité de } n) = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ 1 \text{ si } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

2. En déduire que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{X_n}{\ln n} = 1$ presque sûrement.

Correction ▼ [006950]

Exercice 7233 Convergence en probabilité **

1. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$e^{-x^2/2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leqslant e^{-x^2/2}\frac{1}{x}.$$

Indication : on pourra intégrer par parties $t^{-1}te^{-t^2/2}$.

2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $\dfrac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i}{\sqrt{2\ln n}}$ tend vers 1 en probabilité.

Correction ▼ [006951]

---

340 483.00 Lois des grands nombres, théorème central limite

341 484.00 Estimateur

342 485.00 Tests sur la moyenne, test du chi2

343 486.00 Chaînes de Markov

344 487.00 Autre

Indication pour l'exercice 3 ▲

Attention : la négation d'une inégalité stricte est une inégalité large (et réciproquement).

Indication pour l'exercice 6 ▲

Faire un dessin de F_1 et de F_2. Essayer de voir si la difficulté pour réaliser les assertions vient de ε "petit" (c'est-à-dire proche de 0) ou de ε "grand" (quand il tend vers $+\infty$).

Indication pour l'exercice 16 ▲

En fait, on a toujours : $\frac{2n+1}{n+2} \leqslant 2$. Puis chercher une condition sur n pour que l'inégalité

$$2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Il est plus facile de raisonner en prenant un élément $x \in E$. Par exemple, soit F, G des sous-ensembles de E. Montrer que $F \subset G$ revient à montrer que pour tout $x \in F$ alors $x \in G$. Et montrer $F = G$ est équivalent à $x \in F$ si et seulement si $x \in G$, et ce pour tout x de E. Remarque : pour montrer $F = G$ on peut aussi montrer $F \subset G$ puis $G \subset F$.
Enfin, se rappeler que $x \in \complement F$ si et seulement si $x \notin F$.

Indication pour l'exercice 56 ▲

Par l'absurde, supposer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Puis pour un tel p, évaluer f et f_p en une valeur bien choisie.

Indication pour l'exercice 57 ▲

Pour la première question vous pouvez raisonner par contraposition ou par l'absurde.

Indication pour l'exercice 61 ▲

1. Récurrence : calculer $x_{n+1}-3$.
2. Calculer $x_{n+1}-3-\frac{3}{2}(x_n-3)$.
3. Récurrence.

Indication pour l'exercice 63 ▲

Pour les deux questions, travailler par récurrence.

Indication pour l'exercice 89 ▲

Calculer les premiers termes de la suite.

Indication pour l'exercice 90 ▲

Calculer les premiers termes de la suite.

Indication pour l'exercice 91 ▲

Récurrence double.

Indication pour l'exercice 99 ▲

Procéder par récurrence forte.

Indication pour l'exercice 100 ▲

Procéder par récurrence forte.

Indication pour l'exercice 102 ▲

Montrer par récurrence sur m que pour tout $N \geqslant 2$ et tout $m \in [\![2,N]\!]$,

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\ldots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}} < m+1.$$

Indication pour l'exercice 105 ▲

Considérer le sous-ensemble (sous-monoïde) de ||| suivant :

$$\{3k+4l \mid k,l \in |||\}.$$

Pour le cas général, considérer le pgcd de a et b.

Indication pour l'exercice 108 ▲

Calculer les premiers termes de la suite.

Indication pour l'exercice 112 ▲

Montrer que pour $n > 1$, le réel u_n s'écrit comme le quotient d'un entier impair par un entier pair. Pour n pair, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Pour n impair, utiliser le fait que

$$u_{n+1} := \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Indication pour l'exercice 115 ▲

Un dessin permettra d'avoir une bonne idée de ce qui se passe...

Indication pour l'exercice 116 ▲

Il faut trouver l'erreur dans ce raisonnement, car bien sûr s'il y a trois axiomes pour la définition d'une relation d'équivalence, c'est que deux ne suffisent pas !

Indication pour l'exercice 118 ▲

1. Pour la transitivité on pourra calculer xye^z.
2. Poser la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t}$, après une étude de fonction on calculera le nombre d'antécédents possibles.

Indication pour l'exercice 148 ▲

Regarder par exemple la divisibilité sur |||.

Indication pour l'exercice 149 ▲

Considérer une certaine relation d'équivalence sur E et écrire que E est réunion disjointe des classes d'équivalence.

Indication pour l'exercice 171 ▲

Prouver que l'égalité est fausse.

Indication pour l'exercice 187 ▲

1. f est injective mais pas surjective.
2. g est bijective.
3. h aussi.
4. k est injective mais par surjective.

Indication pour l'exercice 188 ▲

1. f n'est ni injective, ni surjective.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = y$.
3. On pourra exhiber l'inverse.

Indication pour l'exercice 190 ▲

Pour la première assertion le début du raisonnement est : "supposons que $g \circ f$ est injective, soient $a, a' \in A$ tels que $f(a) = f(a')$",... à vous de travailler, cela se termine par "...donc $a = a'$, donc f est injective."

Indication pour l'exercice 198 ▲

id est l'application identité définie par $id(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc $f \circ f = id$ signifie $f \circ f(c) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

Indication pour l'exercice 199 ▲

Montrer que la restriction de f définie par : $[0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ est une bijection. Ici $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

Indication pour l'exercice 201 ▲

Montrer que f est injective et surjective.

Indication pour l'exercice 211 ▲

Évaluer $(1+x)^n$ en $x = 1$, d'une part directement et ensuite avec la formule du binôme de Newton. Pour la deuxième égalité commencer par dériver $x \mapsto (1+x)^n$.

Indication pour l'exercice 213 ▲

Commencer par $2^n = (3-1)^n$.

Indication pour l'exercice 220 ▲

$1 + i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{2i\pi}{4}}$

Indication pour l'exercice 248 ▲

Tout d'abord faire un dessin (avec des patates !).

Pour A et B deux ensembles finis quelconques, commencer par (re)démontrer la formule : $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$.

Indication pour l'exercice 249 ▲

Combien y-a-t'il de choix pour l'élément de A ? Combien y-a-t'il de choix pour le sous-ensemble de $E \setminus A$?

Indication pour l'exercice 251 ▲

Petits rappels : dans un jeu de 52 cartes il y a 4 "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle) et 13 "valeurs" ($1 =$ As, $2, 3, \ldots, 10$, Valet, Dame, Roi). Une "main" c'est juste choisir 5 cartes parmi les 52, l'ordre du choix n'important pas.

Indication pour l'exercice 261 ▲

Si $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est une telle partie avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$, considérer l'ensemble $\{x_1 - 1, \ldots, x_p - p\}$.

Indication pour l'exercice 269 ▲

Coder un chemin par un mot : D pour droite, H pour haut.

Indication pour l'exercice 294 ▲

Il ne faut surtout pas chercher à calculer $15! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 15$, mais profiter du fait qu'il est déjà "presque" factorisé.

Indication pour l'exercice 295 ▲

Il faut travailler modulo 13, tout d'abord réduire 100 modulo 13. Se souvenir que si $a \equiv b \pmod{13}$ alors $a^k \equiv b^k \pmod{13}$. Enfin calculer ce que cela donne pour les exposants $k = 1, 2, 3, \ldots$ en essayant de trouver une règle générale.

Indication pour l'exercice 296 ▲

Attention le reste d'une division euclidienne est plus petit que le quotient !

Indication pour l'exercice 299 ▲

Utiliser les modulos (ici modulo 8), un entier est divisible par 8 si et seulement si il est équivalent à 0 modulo 8. Ici vous pouvez commencer par calculer $7^n \pmod{8}$.

Indication pour l'exercice 330 ▲

1. Écrire $n = 2p + 1$.
2. Écrire $n = 2p$ et discuter selon que p est pair ou impair.
3. Utiliser la première question.
4. Par l'absurde supposer que cela s'écrive comme un carré, par exemple $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$ puis discuter selon que n est pair ou impair.

Indication pour l'exercice 373 ▲

Commencer par simplifier l'équation ! Ensuite trouver une solution particulière (x_0, y_0) à l'aide de l'algorithme d'Euclide par exemple. Ensuite trouver un expression pour une solution générale.

Indication pour l'exercice 424 ▲

Pour 1. utiliser l'égalité

$$x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1).$$

Pour 2. raisonner par contraposition et utiliser la question 1.

La question 3. est difficile ! Supposer $a \geqslant b$. Commencer par montrer que $\operatorname{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \operatorname{pgcd}(2^a - 2^b, 2^b - 1) = \operatorname{pgcd}(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$. Cela vour permettra de comparer l'agorithme d'Euclide pour le calcul de $\operatorname{pgcd}(a,b)$ avec l'algorithme d'Euclide pour le calcul de $\operatorname{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1)$.

Indication pour l'exercice 425 ▲

Raisonner par l'absurde et utiliser le lemme de Gauss.

Indication pour l'exercice 427 ▲

1. Écrire
$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$
et utiliser le lemme de Gauss ou le lemme d'Euclide.
2. Raisonner avec les modulos, c'est-à-dire prouver $a^p \equiv a \pmod p$.

Indication pour l'exercice 429 ▲

1. Il faut être très soigneux : n est fixé une fois pour toute, la récurrence se fait sur $k \geqslant 1$.
2. Utiliser la question précédente avec $m = n + k$.
3. Par l'absurde, supposer qu'il y a seulement N nombres premiers, considérer $N+1$ nombres du type F_i. Appliquer le "principe du tiroir" : *si vous avez $N+1$ chaussettes rangées dans N tiroirs alors il existe (au moins) un tiroir contenant (plus de) deux chaussettes.*

Indication pour l'exercice 437 ▲

Raisonner par contraposition (ou par l'absurde) : supposer que n n'est pas de la forme 2^k, alors n admet un facteur irréductible $p > 2$. Utiliser aussi $x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{p-1})$ avec x bien choisi.

Indication pour l'exercice 458 ▲

Pour se "débarrasser" d'un dénominateur écrivez $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Indication pour l'exercice 460 ▲

Il faut bien connaître ses formules trigonométriques. En particulier si l'on connait $\cos(2\theta)$ ou $\sin(2\theta)$ on sait calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Indication pour l'exercice 468 ▲

Passez à la forme trigonométrique. Souvenez-vous des formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Indication pour l'exercice 470 ▲

Pour calculer un somme du type $e^{iu} + e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$.

Indication pour l’exercice 477 ▲

Utiliser la formule d’Euler pour faire apparaître des cosinus.

Indication pour l’exercice 491 ▲

Remarquer que la conjugaison est involutive. On peut aussi utiliser la forme algébrique.

Indication pour l’exercice 492 ▲

Remarquer que si $z \in \mathbb{C}$ est solution, alors z^2 est forcément un nombre réel.

Indication pour l’exercice 494 ▲

Pour $z = a + ib$ on cherche $\omega = \alpha + i\beta$ tel que $(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$. Développez et indentifiez. Utilisez aussi que $|\omega|^2 = |z|$.

Indication pour l’exercice 496 ▲

Il s’agit de calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ de deux façons différentes.

Indication pour l’exercice 498 ▲

Pour les équation du type $az^4 + bz^2 + c = 0$, poser $Z = z^2$.

Indication pour l’exercice 524 ▲

Calculer $(1 - z)S_n$.

Indication pour l’exercice 548 ▲

Le premier ensemble est une droite le second est un cercle.

Indication pour l’exercice 557 ▲

Pour l’interprétation géométrique cherchez le parallélogramme.

Indication pour l’exercice 593 ▲

Les deux similitudes se déduisent l’une de l’autre par une certaine réflexion.

Indication pour l’exercice 603 ▲

Appliquer deux fois la formule de Moivre en remarquant $e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$.

Indication pour l’exercice 682 ▲

Si $P = P'Q$ avec $P \neq 0$, regarder le degré de Q.

Indication pour l’exercice 722 ▲

Le calcul du pgcd se fait par l’algorithme d’Euclide, et la "remontée" de l’algorithme permet d’obtenir U et V.

Indication pour l’exercice 723 ▲

Calculer $\mathrm{pgcd}(P, P')$.

Indication pour l’exercice 791 ▲

Si $X^p - a = PQ$ avec $P, Q \in K[X]$ unitaires non constants, factoriser P dans $\mathbb{C}$ et considérer $P(0)$.

Indication pour l'exercice 804 ▲

Montrer que si P est un polynôme non constant vérifiant la relation, alors ses seules racines possibles sont 0 et 1.

Indication pour l'exercice 805 ▲

Pour l'existence, preuve par récurrence sur n. Pour les racines, montrer que $P(x) = 2\cos(n \arccos(x/2))$.

Indication pour l'exercice 810 ▲

Attention il y a une partie entière, la fraction s'écrit

$$\Phi = x + 1 + \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}.$$

Indication pour l'exercice 811 ▲

Il y a une partie entière qui vaut 2.

Indication pour l'exercice 850 ▲

Écrire $F = \frac{P}{Q}$ sous forme irréductible.

Indication pour l'exercice 851 ▲

Écrire $G = \frac{A}{B}$ sous forme irréductible (on pourra choisir par exemple $n = \max(\deg A, \deg B)$).

Indication pour l'exercice 852 ▲

Considérer P'/P et sa dérivée, et enfin P''/P.

Indication pour l'exercice 853 ▲

Pour G et H, commencer par faire une division euclidienne pour trouver la partie polynomiale.

Indication pour l'exercice 854 ▲

Les fractions F, K ont une partie polynomiale, elles s'écrivent
$F = X^2 + X + 1 + \frac{X^2+X+1}{X^3-X}$
$K = X + 1 + \frac{4X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$

Indication pour l'exercice 855 ▲

Pour F, commencer par écrire $F = \frac{a}{X} + F_1$ où $F_1 = \frac{N}{(X^2+1)^3}$ puis diviser N par $X^2 + 1$. Pour K, commencer par obtenir $K = 1 + \frac{1}{X} + K_1$, puis faire le changement d'indéterminée dans K_1.

Indication pour l'exercice 858 ▲

Pour 1. exprimer $\cos\big((n+2)\theta\big)$ et $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos\big((n+1)\theta\big)$. Pour 3. chercher les racines de T_n : $\omega_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k = 0, \dots, n-1$.

Indication pour l'exercice 943 ▲

1. E_1 est un sous-espace vectoriel.
2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. E_3 est un sous-espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Indication pour l'exercice 945 ▲

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a = 0$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.

Indication pour l'exercice 950 ▲

1. Pour le sens $\Rightarrow$: raisonner par l'absurde et prendre un vecteur de $F \setminus G$ et un de $G \setminus F$. Regarder la somme de ces deux vecteurs.
2. Raisonner par double inclusion, revenir aux vecteurs.

Indication pour l'exercice 978 ▲

On vérifiera sur ces exemples la définition donnée en cours.

Indication pour l'exercice 979 ▲

1. Discuter suivant la dimension des sous-espaces.
2. Penser aux droites vectorielles.

Indication pour l'exercice 983 ▲

On ne peut pas pour le premier, mais on peut pour le second.

Indication pour l'exercice 984 ▲

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Une base comporte trois vecteurs.

Indication pour l'exercice 991 ▲

Montrer la double inclusion. Utiliser le fait que de manière générale pour $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ alors :

$$E \subset F \iff \forall i = 1, \dots, n \quad v_i \in F.$$

Indication pour l'exercice 999 ▲

Supposer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des indices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (tout cela en nombre fini !) tels que

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Ici le 0 est la fonction constante égale à 0. Évaluer cette expression en des valeurs bien choisies.

Indication pour l'exercice 1000 ▲

Supposer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des indices $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ (tout cela en nombre fini !) tels que

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Ici le 0 est la fonction constante égale à 0. Regarder quel terme est dominant et factoriser.

Indication pour l'exercice 1023 ▲

1. On pensera à poser un système.
2. Trouver un vecteur non-nul commun aux deux plans.

Indication pour l'exercice 1024 ▲

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux.
4. Faux.
5. Vrai.

Indication pour l'exercice 1025 ▲

1. Non.
2. Oui.
3. Non.
4. Non.

Indication pour l'exercice 1028 ▲

Soit

$$G = \left\{ x \mapsto ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que G est un supplémentaire de F dans E.

Indication pour l'exercice 1031 ▲

Pour une suite (u_n) qui converge vers ℓ regarder la suite $(u_n - \ell)$.

Indication pour l'exercice 1045 ▲

1. Jamais.
2. Jamais.
3. Considérer un vecteur directeur de la droite.

Indication pour l'exercice 1048 ▲

Être une base, c'est être libre et génératrice. Chacune de ces conditions se vérifie par un système linéaire.

Indication pour l'exercice 1052 ▲

1. Faux.
2. Vrai.

Indication pour **l'exercice 1059 ▲**

Il suffit de montrer que la famille est libre (pourquoi ?). Prendre ensuite une combinaison linéaire nulle et regarder le terme de plus haut degré.

Indication pour **l'exercice 1063 ▲**

C'est une base pour $t \neq \pm 1$.

Indication pour **l'exercice 1073 ▲**

Il n'y a aucune difficulté. C'est comme dans $\mathbb{R}^3$ sauf qu'ici les coefficients sont des nombres complexes.

Indication pour **l'exercice 1090 ▲**

Partir d'une base $(e_1,\dots,e_k)$ de $F\cap G$ et la compléter par des vecteurs $(f_1,\dots,f_\ell)$ en une base de F. Repartir de $(e_1,\dots,e_k)$ pour la compléter par des vecteurs $(g_1,\dots,g_m)$ en une base de G. Montrer que $(e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_\ell,g_1,\dots,g_m)$ est une base de $F+G$.

Indication pour **l'exercice 1091 ▲**

On peut utiliser des familles libres.

Indication pour **l'exercice 1094 ▲**

Calculer d'abord les dimensions de F et G. Pour celles de $F\cap G$ et $F+G$ servez-vous de la formule $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$.

Indication pour **l'exercice 1127 ▲**

Une seule application n'est pas linéaire.

Indication pour **l'exercice 1128 ▲**

Prendre une combinaison linéaire nulle et l'évaluer par ϕ^{n-1}.

Indication pour **l'exercice 1142 ▲**

Faire un dessin de l'image et du noyau pour $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Montrer que le noyau est isomorphe à $E_1\cap E_2$.

Indication pour **l'exercice 1151 ▲**

Pour chacune des implications utiliser la formule du rang.

Indication pour **l'exercice 1155 ▲**

Dire qu'un sous-espace F est stable par g signifie que $g(F)\subset F$.

Indication pour **l'exercice 1157 ▲**

Montrer la double inclusion.

Indication pour **l'exercice 1162 ▲**

$t=0$ est un cas à part.

Indication pour l'exercice 1167 ▲

Résultats utiles d'arithmétique des polynômes : la division euclidienne, le théorème de Bézout, le lemme de Gauss.

Indication pour l'exercice 1171 ▲

Pour une base $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E considérer la famille $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$.

Indication pour l'exercice 1221 ▲

Pour une fonction f on peut écrire

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Le projecteur sur P de direction I est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui vérifie $\pi(f) \in P$, $\pi \circ \pi = \pi$ et $\ker \pi = I$.

Indication pour l'exercice 1223 ▲

P' désigne la dérivée de P. Pour trouver le noyau, résoudre une équation différentielle. Pour l'image calculer les $f(X^k)$.

Indication pour l'exercice 1282 ▲

Une fois que l'on a calculé A^2 et A^3 on peut en déduire A^{-1} sans calculs.

Indication pour l'exercice 1291 ▲

Il faut connaître les formules de $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$.

Indication pour l'exercice 1293 ▲

Essayer avec X la matrice élémentaire E_{ij} (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la i-ème ligne et la j-ème colonne).

Indication pour l'exercice 1294 ▲

Appliquer la formule du produit pour calculer les coefficients diagonaux de $A\,{}^tA$

Indication pour l'exercice 1299 ▲

Prendre un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$, considérer le rang i_0 tel $|x_{i_0}| = \max\left\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\right\}$.

Indication pour l'exercice 1313 ▲

A est *idempotente* s'il existe un n tel que $A^n = I$ (la matrice identité).
A est *nilpotente* s'il existe un n tel que $A^n = (0)$ (la matrice nulle).

Indication pour l'exercice 1354 ▲

f est l'application qui à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x - y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 1386 ▲

M antisymétrique signifie ${}^tM = -M$.

1. Si Y est un vecteur alors ${}^tYY = \|Y\|^2$ est un réel positif ou nul.
2. $I - M$ et $(I+M)^{-1}$ commutent.

Indication pour l'exercice 1417 ▲

Il faut trouver les propriétés de l'application linéaire f associée à chacune de ces matrices. Les résultats s'expriment en explicitant une (ou plusieurs) matrice M' qui est la matrice de f dans une base bien choisie et ensuite en montrant que toutes les autres matrices sont de la forme $M = P^{-1}M'P$.
Plus en détails pour chacun des cas :

1. $\operatorname{Im} f \subset f$ et discuter suivant la dimension du noyau.
2. Utiliser l'exercice 1360 : $f \oplus \operatorname{Im} f$ et il existe une base telle que $f(e_i) = 0$ ou $f(e_i) = e_i$.
3. Poser $N = \frac{I+M}{2}$ (et donc $M = \cdots$) chercher à quelle condition $M^2 = I$.

Indication pour l'exercice 1461 ▲

1. Raisonner par l'absurde.
2. Raisonner par l'absurde en écrivant $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Ensuite plusieurs méthodes sont possibles par exemple essayer de montrer que p et q sont tous les deux pairs.
3. Considérer $r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$ (faites un dessin !) pour deux rationnels r, r'. Puis utiliser les deux questions précédentes.

Indication pour l'exercice 1467 ▲

1. Calculer $\beta^n p(\frac{\alpha}{\beta})$ et utiliser le lemme de Gauss.
2. Utiliser la première question avec $p(x) = (x^2 - 5)^2 - 24$.

Indication pour l'exercice 1469 ▲

1. Mutiplier N_n par une puissance de 10 suffisament grande pour obtenir un nombre entier.
2. Mutiplier M par une puissance de 10 suffisament grande (pas trop grande) puis soustraire M pour obtenir un nombre entier.

Indication pour l'exercice 1471 ▲

Raisonner par l'absurde !

Indication pour l'exercice 1474 ▲

Écrire la définition de la convergence d'une suite (u_n) avec les "ε". Comme on a une proposition qui est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, c'est en particulier vrai pour $\varepsilon = 1$. Cela nous donne un "N". Ensuite séparez la suite en deux : regardez les $n < N$ (il n'y a qu'un nombre fini de termes) et les $n \geqslant N$ (pour lequel on utilise notre $\varepsilon = 1$).

Indication pour l'exercice 1475 ▲

On prendra garde à ne pas parler de limite d'une suite sans savoir au préalable qu'elle converge !
Vous pouvez utiliser le résultat du cours suivant : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ alors toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ.

Indication pour l'exercice 1492 ▲

Distinguer des cas.

Indication pour l'exercice 1493 ▲

$\inf A = 0$, A n'a pas de borne supérieure.

Indication pour l'exercice 1504 ▲

Il faut revenir à la définition de la borne supérieure d'un ensemble borné : c'est le plus petit des majorants. En particulier la borne supérieure est un majorant.

Indication pour l'exercice 1505 ▲

Deux propositions sont fausses...

Indication pour l'exercice 1523 ▲

Élever l'inégalité au carré.

Indication pour l'exercice 1529 ▲

1. $f(2) = f(1+1) = \cdots$, faire une récurrence.
2. $f((-n)+n) = \cdots$.
3. Si $q = \frac{a}{b}$, calculer $f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b})$ avec b termes dans cette somme.
4. Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, prendre une suite de rationnels qui croit vers x, et une autre qui décroit vers x.

Indication pour l'exercice 1554 ▲

1. Rappelez-vous que la partie entière de x est le plus grand entier, inférieur ou égal à x. Mais il est ici préférable de donner la définition de $E(x)$ en disant que $E(x) \in \mathbb{Z}$ et que x vérifie un certain encadrement...
2. Encadrer $E(kx)$, pour $k = 1, \dots, n$.
3. Rappelez-vous d'abord de la formule $1 + 2 + \cdots + n$ puis utilisez le fameux théorème des gendarmes.
4. Les u_n ne seraient-ils pas des rationnels ?

Indication pour l'exercice 1555 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1556 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1557 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1558 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1559 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1560 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1561 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1562 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1563 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1564 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1565 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1566 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1567 ▲

$2 = 1+1$...

Indication pour l'exercice 1568 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1569 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1570 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique sur des groupes de termes.

Indication pour l'exercice 1571 ▲

Utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 1573 ▲

Dans l'ordre c'est vrai, faux et vrai. Lorsque c'est faux chercher un contre-exemple, lorsque c'est vrai il faut le prouver.

Indication pour l'exercice 1581 ▲

Écrire la convergence de la suite et fixer $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Une suite est *stationnaire* si, à partir d'un certain rang, elle est constante.

Indication pour l'exercice 1582 ▲

1. En se rappelant que l'intégrale calcule une aire montrer :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. Pour chacune des majorations, il s'agit de faire la somme de l'inégalité précédente et de s'apercevoir que d'un coté on calcule H_n et de l'autre les termes s'éliminent presque tous deux à deux.
3. La limite est $+\infty$.
4. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
5. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Indication pour l'exercice 1586 ▲

Pour la deuxième question, raisonner par l'absurde et trouver deux sous-suites ayant des limites distinctes.

Indication pour l'exercice 1666 ▲

Pour la première question : attention on ne demande pas de calculer α ! L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité vient du fait que la fonction est strictement croissante.
Pour la dernière question : il faut d'une part montrer que (x_n) converge et on note ℓ sa limite et d'autre part il faut montrer que $\ell = \alpha$.

Indication pour l'exercice 1695 ▲

1.
2. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Indication pour l'exercice 1713 ▲

Remarquer que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. Puis simplifier l'écriture de u_n.

Indication pour l'exercice 1719 ▲

1. C'est un calcul de réduction au même dénominateur.
2. Pour montrer la décroisance, montrer $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
3. Montrer d'abord que la suite converge, montrer ensuite que la limite est $\sqrt{a}$.
4. Penser à écrire $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$.
5. Raisonner par récurrence.
6. Pour $u_0 = 3$ on a $u_1 = 3,166\ldots$, donc $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_1$ et on peut prendre $k = 0.17$ par exemple et $n = 4$ suffit pour la précision demandée.

Indication pour l'exercice 1720 ▲

1. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
2. Montrer que (u_n) est majorée et (v_n) minorée. Montrer que ces suites ont la même limite.
3. Raisonner par l'absurde : si la limite $\ell = \frac{p}{q}$ alors multiplier l'inégalité $u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_q$ par $q!$ et raisonner avec des entiers.

Indication pour l'exercice 1721 ▲

Pour la première question et la monotonie il faut raisonner par récurrence. Pour la troisième question, remarquer que si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante et appliquer la première question.

Indication pour l'exercice 1722 ▲

1. Regarder ce que donne l'inégalité en élevant au carré de chaque coté.
2. Petites manipulations des inégalités.
3. (a) Utiliser 1.
   (b) Utiliser 2.
   (c) Une suite croissante et majorée converge ; une suite décroissante et minorée aussi.

Indication pour l'exercice 1724 ▲

On notera $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \; - 1$.

1. C'est une étude de la fonction f_n.
2. On sait que $f_n(a_n) = 0$. Montrer par un calcul que $f_n(a_{n-1}) > 0$, en déduire la décroissance de (a_n). En calculant $f_n(\frac{1}{2})$ montrer que la suite (a_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Une fois établie la convergence de (a_n) vers une limite ℓ, composer l'inégalité $\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n$ par f_n. Conclure.

Indication pour l'exercice 1797 ▲

1. Calculer $(1-3^{-1})\sum_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$.

Indication pour l'exercice 1959 ▲

1. On pourra utiliser la variante de l'inégalité triangulaire $|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$.
2. Utiliser la première question pour montrer que $|f-g|$ est continue.

Indication pour l'exercice 1965 ▲

Ce n'est pas très dur mais il y a quand même quelque chose à démontrer : ce n'est pas parce que $f(x)$ vaut $+1$ ou -1 que la fonction est constante. Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Indication pour l'exercice 1966 ▲

Il faut raisonner en deux temps : d'abord écrire la définition de la limite en $+\infty$, en fixant par exemple $\varepsilon = 1$, cela donne une borne sur $[A,+\infty]$. Puis travailler sur $[0,A]$.

Indication pour l'exercice 1973 ▲

Un *point fixe* est une valeur $c \in [0,1]$ telle que $f(c) = c$. Montrer que $c = \sup E$ est un point fixe. Pour cela montrer que $f(c) \leqslant c$ puis $f(c) \geqslant c$.

Indication pour l'exercice 1982 ▲

Non, trouver un contre-exemple.

Indication pour l'exercice 1989 ▲

1. On pourra montrer que $\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ est un majorant de f sur $]a,b[$.
2. Dans le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$.

Indication pour l'exercice 2033 ▲

Le "ε" vous est donné, il ne faut pas y toucher. Par contre c'est à vous de trouver le "δ".

Indication pour l'exercice 2034 ▲

Distinguer trois intervalles pour la formule définissant f^{-1}.

Indication pour l'exercice 2035 ▲

Le seul problème est en $x = 0$. Montrer que la fonction est bien continue en ce point.

Indication pour l'exercice 2040 ▲

Oui pour le deux premières en posant $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, non pour la troisième.

Indication pour l'exercice 2043 ▲

Pour x fixé, étudier la suite $f(\frac{1}{2^n}x)$.

Indication pour l'exercice 2053 ▲

Utiliser l'expression conjuguée.

Indication pour l'exercice 2056 ▲

1. Raisonner par l'absurde.
2. Montrer que la limite est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs atteintes $f(\mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 2060 ▲

Réponses :

1. La limite à droite vaut $+2$, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite.
2. $-\infty$
3. 4
4. 2
5. $\frac{1}{2}$
6. 0
7. $\frac{1}{3}$ en utilisant par exemple que $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$ pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$.
8. $\frac{1}{n}$

Indication pour l'exercice 2072 ▲

1. Calculer d'abord la limite de $f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x-\alpha}$.
2. Utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et faire un changement de variable $u = \cos x$.
3. Utiliser l'expression conjuguée.
4. Diviser numérateur et dénominateur par $\sqrt{x-\alpha}$ puis utiliser l'expression conjuguée.

5. On a toujours $y-1 \leqslant E(y) \leqslant y$, poser $y = 1/x$.
6. Diviser numérateur et dénominateur par $x-2$.
7. Pour $\alpha \geqslant 4$ il n'y a pas de limite, pour $\alpha < 4$ la limite est $+\infty$.

Indication pour **l'exercice 2079 ▲**

Réponses : $0, \frac{1}{e}, e$.

1. Borner $\sin \frac{1}{x}$.
2. Utiliser que $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$.
3. Utiliser que $e^t - 1 = t \cdot \mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$.

Indication pour **l'exercice 2081 ▲**

Réponse : $\max(a,b)$.

Indication pour **l'exercice 2082 ▲**

Réponse : $\sqrt{ab}$.

Indication pour **l'exercice 2163 ▲**

Les problèmes sont seulement en 0 ou 1. f_1 est dérivable en 0 mais pas f_2. f_3 n'est dérivable ni en 0, ni en 1.

Indication pour **l'exercice 2164 ▲**

Vous avez deux conditions : il faut que la fonction soit continue (car on veut qu'elle soit dérivable donc elle doit être continue) et ensuite la condition de dérivabilité proprement dite.

Indication pour **l'exercice 2165 ▲**

f est continue en 0 en la prolongeant par $f(0) = 0$. f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Indication pour **l'exercice 2166 ▲**

On ne cherchera pas à utiliser la formule de Leibniz mais à linéariser les expressions trigonométriques.

Indication pour **l'exercice 2189 ▲**

Il faut appliquer le théorème de Rolle une fois au polynôme $(1-t^2)^n$, puis deux fois à sa dérivée première, puis trois fois à sa dérivée seconde,...

Indication pour **l'exercice 2191 ▲**

On peut appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois.

Indication pour **l'exercice 2192 ▲**

C'est encore Rolle de nombreuses fois

Indication pour **l'exercice 2198 ▲**

1. Utiliser le théorème des accroissements finis avec la fonction $t \mapsto \ln t$
2. Montrer d'abord que f'' est négative. Se servir du théorème des valeurs intermédiaires pour f'.

Indication pour l'exercice 2199 ▲

Une fois le théorème des accroissements finis utilisé vous obtenez une somme téléscopique.

Indication pour l'exercice 2201 ▲

Le théorème des accroissements finis donne un résultat proche de celui souhaité à un facteur près. Pour obtenir la majoration demandée on peut utiliser le théorème de Rolle avec une fonction bien choisie.

Indication pour l'exercice 2247 ▲

On distinguera les cas $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda < 0$. Pour le cas $\lambda < 0$ on considerera des sous-cas.

Indication pour l'exercice 2251 ▲

1. Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.
2. Calculer $h(a)$ et $h(b)$.
3. Appliquer la question 2. sur l'intervalle $[x,b]$.
4. Calculer f' et g'.

Indication pour l'exercice 2313 ▲

Calculer d'abord le dl puis utiliser une formule de Taylor.

Indication pour l'exercice 2314 ▲

1. La formule à appliquer est celle de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.
2. Étudier la fonction $\phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0$ et trouver $\inf_{h>0} \phi(h)$.
3. Il faut choisir un $a > 0$ tel que $g(x)$ soit assez petit sur $]a,+\infty[$; puis appliquer les questions précédentes à g sur cet intervalle.

Indication pour l'exercice 2342 ▲

Pour la première question vous pouvez appliquer la formule de Taylor ou bien poser $h = x-1$ et considérer un dl au voisinage de $h = 0$.

Indication pour l'exercice 2343 ▲

En $x = 0$ c'est le quotient de deux dl. En $x = +\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$ et on calcule un dl en $h = 0$.

Indication pour l'exercice 2346 ▲

Faites un développement faisant intervenir des x et des $\ln x$. Trouvez $\ell = 1$.

Indication pour l'exercice 2365 ▲

1. $\cos x \cdot \exp x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
2. $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$
3. $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 + \frac{1}{9!}x^6 + o(x^6)$
4. $\exp\big(\sin(x)\big) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$
5. $\sin^6(x) = x^6 - x^8 + o(x^9)$

6. $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$
7. $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$
8. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$
9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\left(\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\right) = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
10. $\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6)$

Indication pour l'exercice 2366 ▲

Il s'agit bien sûr de calculer d'abord des dl afin d'obtenir la limite. On trouve :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = 0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$

Indication pour l'exercice 2368 ▲

Faire un dl en $x = 0$ à l'ordre 2 cela donne $f(0)$, $f'(0)$ et la position par rapport à la tangente donc tout ce qu'il faut pour répondre aux questions. Idem en $x = 1$.

Indication pour l'exercice 2384 ▲

Il s'agit de faire un dl afin de trouver la limite.

1. (a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x = +\infty$

   (b) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x = -\frac{3}{2}$
2. $\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} = 0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x} = -2$

Indication pour l'exercice 2404 ▲

Identifier les dl de $\cos x$ et $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ en $x = 0$.

Indication pour l'exercice 2424 ▲

Faire un dessin. Calculer l'angle d'observation α en fonction de la distance x et étudier cette fonction. Pour simplifier l'expression de α_0, calculer $\tan\alpha_0$ à l'aide de la formule donnant $\tan(a-b)$.

Indication pour l'exercice 2425 ▲

On pourra étudier les fonctions définies par la différence des deux termes de chaque inégalité.

Indication pour l'exercice 2426 ▲

Il faut utiliser les identités trigonométriques classiques.

Indication pour l'exercice 2428 ▲

On compose les équations par la bonne fonction (sur le bon domaine de définition), par exemple cosinus pour la première. Pour la dernière, commencer par étudier la fonction pour montrer qu'il existe une unique solution.

Indication pour l'exercice 2431 ▲

Faire une étude de fonction. La fonction $\mathrm{sgn}(x)$ est la *fonction signe* : elle vaut $+1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$ (et 0 si $x = 0$).

Indication pour l'exercice 2466 ▲

Dériver la différence des deux expressions.

Indication pour l'exercice 2469 ▲

1. Regarder ce qui se passe en deux valeurs opposées x et $-x$.
2. Poser $X = e^x$.

Indication pour l'exercice 2470 ▲

Réponses :

1. $\frac{3}{4}$;
2. $\ln 2$.

Indication pour l'exercice 2475 ▲

Pour la première question calculer $\frac{1}{\cos^2 t}$. Pour la seconde question, vérifier que $y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ est bien défini et calculer $\operatorname{sh} y$.

Indication pour l'exercice 2487 ▲

Montrer que l'équation $x^y = y^x$ est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$, puis étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Indication pour l'exercice 2493 ▲

On trouve $-\frac{1+e^{-2x}}{\ln(1+e^{-2x})}$.

Indication pour l'exercice 2494 ▲

Commencer par calculer $C_n + S_n$ et $C_n - S_n$ à l'aide des fonctions ch et sh.

Indication pour l'exercice 2495 ▲

Poser $X = e^x$ et $Y = e^y$ et se ramener à un système d'équations du type somme-produit.

Indication pour l'exercice 2497 ▲

On trouve $f(x) = |\ln x|$ pour tout $x > 0$.

Indication pour l'exercice 2498 ▲

Faire le tableau de variations de $f : x \mapsto \operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x$.

Indication pour l'exercice 2526 ▲

Les fonctions continues ne seraient-elles pas intégrables ?

Il faut se souvenir de ce que vaut la somme des n premiers entiers, la somme des carrés des n premiers entiers et la somme d'une suite géométrique. La formule générale pour les sommes de Riemann est que $\int_a^b f(x)dx$ est

la limite (quand $n \to +\infty$) de
$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Indication pour l'exercice 2527 ▲

1. On pourra penser que le cosinus et le sinus sont les parties réelles et imaginaires de la fonction $t \mapsto e^{it}$. On chercha donc d'abord à calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt$.
2. On choisira q tel que $q^n = \frac{b}{a}$.

Indication pour l'exercice 2529 ▲

1. Revenir à la définition de la continuité en x_0 en prenant $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ par exemple.
2. Soit f est tout le temps de même signe (et alors utiliser la première question), soit ce n'est pas le cas (et alors utiliser un théorème classique...).
3. On remarquera que $\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2} = \int_0^1 (f(x)-x)dx$.

Indication pour l'exercice 2530 ▲

Essayez d'encadrer $\int_a^b \frac{f(t)^n}{m^n}dt$.

Indication pour l'exercice 2531 ▲

Il s'agit de montrer que la limite vaut 0. Pour un $\alpha > 0$ fixé on séparera l'intégrale en deux partie selon que f est plus petit ou plus grand que $1-\alpha$.

Indication pour l'exercice 2533 ▲

Se ramener à une composition de fonctions ou revenir à la définition de la dérivée avec le taux d'accroissement.

Indication pour l'exercice 2534 ▲

1. Soit faire comme l'exercice 2533, soit séparer l'intégrale en deux, et pour l'une faire un changement de variable $u = x^2$.
2. $H(x)$ se calcule explicitement et montrer qu'en fait H est une fonction constante, ensuite il faut comparer $H(x)$ et $F(x)$.

Indication pour l'exercice 2568 ▲

On pourra essayer de reconnaître des sommes de Riemann, puis calculer des intégrales. Pour le produit composer par la fonction ln, afin de transformer le produit en une somme.

Indication pour l'exercice 2583 ▲

Un dessin ne fait pas de mal ! Il faut ensuite résoudre l'équation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$ puis calculer deux intégrales.

Indication pour l'exercice 2588 ▲

Il faut se ramener au calcul de $\displaystyle\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$.

Indication pour l'exercice 2601 ▲

1. $\int \cos^{1234} x \sin x\, dx = -\frac{1}{1235}\cos^{1235} x + c$ (changement de variable $u = \cos x$)
2. $\int \frac{1}{x\ln x}\, dx = \ln|\ln x| + c$ (changement de variable $u = \ln x$)
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx = \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c$ (changement de variable $u = \exp x$)
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$ (changement de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$)

Indication pour l'exercice 2610 ▲

1. Pour $\int x^2 \ln x\, dx$ poser $v' = x^2$, $u = \ln x$.
2. Pour $\int x \arctan x\, dx$ poser $v' = x$ et $u = \arctan x$.
3. Pour les deux il faut faire une intégration par parties avec $v' = 1$.
4. Pour $\int \cos x \exp x\, dx$ il faut faire deux intégrations par parties.

Indication pour l'exercice 2614 ▲

1. Faire une intégration par parties afin d'exprimer I_{n+2} en fonction de I_n. Pour le calcul explicite on distinguera le cas des n pairs et impairs.
2. Rappel : $u_n \sim v_n$ est équivalent à $\frac{u_n}{v_n} \to 1$. Utiliser la décroissance de I_n pour encadrer $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

Indication pour l'exercice 2621 ▲

1. Majorer par x^n.
2.
3. On pourra calculer $(I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots$

Indication pour l'exercice 2625 ▲

Calculer la somme et la différence de ces deux intégrales.

Indication pour l'exercice 2626 ▲

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = 1$ (changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$).
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (utiliser la précédente).

Indication pour l'exercice 2655 ▲

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\, dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + c$ (décomposition en éléments simples)
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c$
3. $\int \sin^8 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$
4. $\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ (changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \tan\frac{x}{2}$)
5. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x}\, dx = -\frac{1}{5}\ln|2-\sin x| + \frac{7}{5}\ln|1+2\sin x| + c$ (changement de variable $u = \sin x$)

Indication pour l'exercice 2656 ▲

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = 1$ (intégration par parties $v' = \sin x$, $u = x$)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$ (à l'aide du changement de variable $u = e^x$)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ (changement de variable $x = \tan t$, $dx = (1+\tan^2 t)dt$ et $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$)
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx = 3\ln 2 - 1$ (décomposition en éléments simples de la forme $\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2}$)
5. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx = \frac{3\pi}{4}$ (changement de variables $u = \frac{1}{x}$ et $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2}$)

Indication pour l'exercice 2826 ▲

Développer par rapport à la dernière colonne.

Indication pour l'exercice 2828 ▲

Développer par rapport à la première colonne pour obtenir Δ_{n-1} et un autre déterminant facile à calculer en développant par rapport à sa première ligne.

Indication pour l'exercice 2836 ▲

Faire les opérations suivantes sur les colonnes $C_n \leftarrow C_n - t_nC_{n-1}$, puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - t_nC_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - t_nC_1$. Développer par rapport a la bonne ligne et reconnaître que l'on obtient le déterminant recherché mais au rang $n-1$.

Indication pour l'exercice 2886 ▲

1. Règle de Sarrus.
2. Développer par rapport à la deuxième ligne.
3. Faire apparaître des 0 sur la première colonne.
4. Utiliser la linéarité par rapports à chaque ligne et chaque colonne pour simplifier les coefficients.
5. Faire apparaître des 0...
6. Faire apparaître des 0...
7. Permuter les lignes et les colonnes pour faire apparaître une matrice triangulaire par blocs.

Indication pour l'exercice 2950 ▲

Écrire les polynômes sous la forme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calculer $\int_2^4 P(x)\,dx$ d'une part et $\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ d'autre part. L'identification conduit à un système linéaire à quatre équations, d'inconnues α, β, γ.

Indication pour l'exercice 2983 ▲

Se ramener à des systèmes linéaires soit en éliminant les quotients, soit en effectuant un changement de variable.

Indication pour l'exercice 2985 ▲

Penser à $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$.

Indication pour l'exercice 2987 ▲

Prendre le logarithme des équations.

Indication pour l'exercice 3587 ▲

Utiliser la formule de Bézout.

Indication pour l'exercice 3712 ▲

Montrer que l'ensemble des x tq $x^2 \neq e$ est de cardinal pair.

Indication pour l'exercice 4083 ▲

1.
2. $\dot{6}^2 = -\dot{1}$.

Indication pour l'exercice 4322 ▲

1. Raisonner à l'aide d'une fonction f de la variable x telle que $x+y = f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
2. Trouver deux courbes dans
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z); 2x^3 + yz^2 = 0\}$$
qui tendent vers l'origine telle que les limites, calculées le long de ces courbes, existent mais ont des valeurs distinctes.
3. Utiliser le fait que le numérateur et le dénominateur sont toujours positifs et que l'ordre du dénominateur est strictement plus grand que celui du numérateur.
4. Raisonner à l'aide d'une fonction h de la variable y telle que $x^2 - y^2 = h(y)$ et $\lim_{y\to 0} h(y) = 0$.
5. Chercher deux courbes dans le domaine de définition qui tendent vers l'origine telle que les limites, calculées le long de ces courbes, existent mais ont des valeures distinctes.

Indication pour l'exercice 4323 ▲

Diviser le numérateur et le dénominateur par x^2 resp. y^2 pour déterminer $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ resp. $\lim_{x\to 0} f(x,y)$. Montrer que, calculée le long d'une autre courbe convenable, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe et ne vaut pas zéro.

Indication pour l'exercice 4325 ▲

1. Réfuter l'existence de la limite à l'aide de l'étude des limites le long de deux courbes adaptées.
2. Utiliser les coordonnées polaires dans le plan.
3. Si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$ existe et est non nul alors
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{h(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)}.$$
4. Chercher deux courbes dans le domaine de définition qui tendent vers l'origine telles que les limites, calculées le long de ces courbes, existent mais ont des valeures distinctes.

Indication pour l'exercice 4326 ▲

1. Raisonner à l'aide d'une fonction h des variables x et y telle que $x+y+z = h(x,y)$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$.
2. Montrer que, déjà sous la contrainte supplémentaire $z = 0$, la limite ne peut pas exister.

Indication pour l'exercice 4331 ▲

Pour établir ou réfuter l'existences d'une limite particulière dans le plan et pour ensuite déterminer une limite pourvu qu'elle existe, utiliser le fait que pour que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ existe dans le plan $\mathbb{R}^2$ il faut et il suffit que chacune des limites $\lim_{n\to\infty} x_n$ et $\lim_{n\to\infty} y_n$ existe en tant que limite finie.

Indication pour l'exercice 4346 ▲

Il est évident que, en tout point (x,y) distinct de l'origine, la fonction f est continue et que les dérivées partielles y existent et sont continues. Il suffit de montrer que f est continue en $(0,0)$ et que les dérivées partielles y existent et y sont continues.

Indication pour l'exercice 4347 ▲

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpréter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

Indication pour l'exercice 4349 ▲

Distinguer tout de suite la partie triviale et la partie non triviale de l'exercice.

Indication pour l'exercice 4369 ▲

Le plan tangent à la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0. \tag{19}$$

Dans le cas (1.), les calculs deviennt plus simples avec l'équation

$$z^2 = 19 - x^2 - y^2.$$

Indication pour l'exercice 4370 ▲

Ne pas confondre les variables pour l'équation de la surface, les variables pour l'équation de la tangente en un point, et les coordonnées du point de contact.

Indication pour l'exercice 4371 ▲

Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{20}$$

Indication pour l'exercice 4372 ▲

Le vecteur normal de la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) est le vecteur

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right). \tag{21}$$

Indication pour l'exercice 4373 ▲

Utiliser la version (20) de l'équation d'un plan tangent à une surface en un point.

Indication pour l'exercice 4374 ▲

Pour les majorations, utiliser les coordonnées polaires (r,φ) dans le plan. Distinguer tout de suite les parties triviales des parties non triviales de l'exercice.

Indication pour l'exercice 4375 ▲

Prendre

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \exp[\sin(\pi+x)\cos y] = \exp[-\sin x\cos y], \\ h(x,y) &= \arctan[\sqrt{4+x}-2\exp(y)]. \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 4384 ▲

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpéter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

Indication pour l'exercice 4385 ▲

Interpréter la dérivée directionnelle à l'aide de l'intersection du graphe de la fonction avec un plan convenable.

Indication pour l'exercice 4386 ▲

1. Utiliser les coordonnées polaires (r,φ) dans le plan et le fait que $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} r\log r = 0$.

Indication pour l'exercice 4387 ▲

1. Pour réfuter la différentiabilité de f en $(0,0)$, il suffit de trouver une dérivée directionnelle qui n'est pas combinaison linéaire des dérivées partielles (par rapport aux deux variables).
2. Le plan tangent au point $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ du graphe $z=f(x,y)$ de F est donnée par l'équation

$$z-f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{22}$$

Indication pour l'exercice 4388 ▲

Calculer mène à la vérité.

Indication pour l'exercice 4389 ▲

Écrire $f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2)) = (u,v,w)$.

Indication pour l'exercice 4448 ▲

Utiliser les règles

$$\begin{aligned} d(f+g) &= df+dg, \\ d(fg) &= fdg+gdf, \\ d(f\circ h) &= (f'\circ h)dh. \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 4449 ▲

Soient h, u, v des fonctions des deux variables x et y. Rappeler que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h &= \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}(u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 4450 ▲

On va déterminer une primitive d'une forme différentielle de degré 1 par un changement de variables tel que, dans les nouvelles variables, la primitive soit presque évidente.

Indication pour l'exercice 4451 ▲

Rappeler que la matrice hessienne est la matrice constituée des dérivées partielles secondes.

Indication pour l'exercice 4452 ▲

1. Montrer que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}F.$$
2. Montrer que
$$r\frac{\partial F}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$
3. Montrer que
$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$
4. Utiliser ces résultats, puis calculer encore un peu pour obtenir le résultat souhaité.

Indication pour l'exercice 4453 ▲

1. Grace au changement de variables
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto (x,y) = \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right),$$
la fonction f s'écrit $F(u,v) = f(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2})$. Montrer que pour que f soit solution de (7) il faut et il suffit que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0. \tag{23}$$
2. Montrer que, si F satisfait à (23), il existe deux fonctions $g_1, g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$F(u,v) = g_1(u) + g_2(v).$$
3. Écrire la solution générale de (7) et expliquer la phrase : "En une dimension d'espace, toute solution de l'équation des ondes s'écrit comme somme d'une onde qui se déplace vers la droite et une qui se déplace vers la gauche."

Indication pour l'exercice 4457 ▲

Rappel : Pour qu'un point critique non dégénéré présente un maximum relatif (resp. minimum relatif) il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit négative (resp. positive) ; pour qu'un point critique non dégénéré présente un point selle il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit (non dégénérée et) indéfinie.

Indication pour l'exercice 4458 ▲

Voir l'exercice précédent.

Indication pour l'exercice 4459 ▲

Voir les exercices précédents.

Indication pour l'exercice 4460 ▲

Le plan tangent à la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ au point (x_0,y_0,z_0) est donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \tag{24}$$

Indication pour l'exercice 4461 ▲

Rappel du théorème des fonctions implicites pour une fonction f de classe C^1 de deux variables définie dans un ouvert du plan : *Soit* (x_0,y_0) *un point tel que* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. *Au voisinage de* x_0*, il existe une fonction* h *de classe* C^1 *de la variable* x *définie dans un intervalle ouvert approprié telle que* $h(x_0)=y_0$ *et telle que, pour qu'au voisinage de* (x_0,y_0) *les coordonnées* x *et* y *du point* (x,y) *satisfassent à l'équation* $f(x,y)=0$ *il faut et il suffit que* $y=h(x)$ *et, s'il en est ainsi,*

$$h'(x_0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Dès que l'intervalle de définition de la fonction h *est fixé la fonction* h *est unique.*

Indication pour l'exercice 4462 ▲

Voir l'exercice précédent.

Indication pour l'exercice 4630 ▲

Chercher deux réels a,b tels que, si on pose $u=x+ay$ et $v=x+by$, alors $\dot u(t)=Au(t)$ et $\dot v(t)=Bv(t)$, où A,B sont des constantes.

Indication pour l'exercice 4641 ▲

Une telle fonction f est solution d'une équation différentielle $y'+y=c$.

Indication pour l'exercice 4642 ▲

1. x est solution particulière
2. cos est solution particulière

Indication pour l'exercice 4643 ▲

Solution particulière :

1. $-\frac{1}{2x}$
2. $\frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$

3. $\frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$

Indication pour l'exercice 4644 ▲

1. C'est une équation à variables séparées.

Indication pour l'exercice 4645 ▲

1. une infinité de solutions
2. une solution

Indication pour l'exercice 4646 ▲

1. (a) Se ramener à $\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$.
   (b) $y = \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}$ ou $y = 0$.
2. (a) Remplacer y par $u + y_0$.
   (b) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln|x|+\lambda x}$ ou $y = \frac{1}{x}$.

Indication pour l'exercice 4678 ▲

Pour la fin : principe de superposition.

Indication pour l'exercice 4679 ▲

Utiliser la méthode de variation de la constante.

Indication pour l'exercice 4824 ▲

Utiliser le langage de la géométrie élémentaire, y compris les notions de surface de révolution, d'axe de révolution, de sommet d'un paraboloïde, de sommet d'un cône, de concavité vers le haut ou vers le bas, d'hélice, de spirale, etc.

Indication pour l'exercice 4825 ▲

Exploiter les propriétés géométriques des parties du plan qui définissent A_1 et A_2. Par exemple, une courbe qui est définie comme étant l'image réciproque d'un point relativement à une fonction continue est une partie fermée du plan.

Indication pour l'exercice 4826 ▲

Raisonner à partir de la définition d'un ouvert dans le plan.

Indication pour l'exercice 4827 ▲

Exploiter le fait que le complémentaire d'un ouvert est fermé et que le complémentaire d'un fermé est ouvert.

Indication pour l'exercice 4828 ▲

Distinguer la partie triviale de l'exercice de la partie non triviale. Dans cet exercice, le seul point délicat est pour le paramètre t proche de 0.

Indication pour l'exercice 4955 ▲

Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{1-X^n}$.

Indication pour l'exercice 4986 ▲

Considérer les disques fermés associée à un recouvrement « circulaire » du plan et mettre en évidence une suite de disques emboités dont les rayons tendent vers zéro.

Indication pour l'exercice 5017 ▲

Les médianes sont les droites (AA'), (BB'), (CC').

Indication pour l'exercice 5057 ▲

Utiliser par exemple les nombres complexes.

Indication pour l'exercice 5161 ▲

Le triangle rectangle ADA' est inscrit dans un demi-cercle.

Indication pour l'exercice 5162 ▲

Déterminer les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.

Indication pour l'exercice 5163 ▲

Montrer que $(AB) \perp (RC)$.

Indication pour l'exercice 5164 ▲

1. Penser à un trapèze.
2. On peut obtenir une telle droite comme hauteur d'un triangle ABC adéquat.

Indication pour l'exercice 5165 ▲

1. Penser au triangle de l'écolier.

Indication pour l'exercice 5166 ▲

Pour l'aire, considérer l'aire du complémentaire de $IJKL$ par exemple, ou bien utiliser les diagonales de $ABCD$.

Indication pour l'exercice 5167 ▲

Décomposer l'aire comme la somme des aires de deux triangles.

Indication pour l'exercice 5168 ▲

Écrire chacune des distances à l'aide d'aires de triangles.

Indication pour l'exercice 5169 ▲

Utiliser des triangles isocèles.

Indication pour l'exercice 5170 ▲

Où se trouve le point M sur le segment $[AC]$?

Indication pour l'exercice 5171 ▲

Le segment $[EC]$ est parallèle à (AC), et sa longueur vaut la moitié du périmètre de OAC.

Indication pour l'exercice 5172 ▲

Pythagore.

Indication pour l'exercice 5173 ▲

Utiliser la caractérisation des triangles isocèles à l'aide d'angles.

Indication pour l'exercice 5174 ▲

Écrire les distances aux sommets en fonction des angles du triangle.

Indication pour l'exercice 5175 ▲

Décomposer les longueurs suivant les points de tangence du cercle inscrit.

Indication pour l'exercice 5176 ▲

Triangles isocèles.

Indication pour l'exercice 5177 ▲

Partitionner le triangle en plusieurs triangles pour calculer l'aire.

Indication pour l'exercice 5197 ▲

La distance d'un point $M_0(x_0,y_0)$ à une droite D d'équation $ax+by+c=0$ est donnée par la formule $d(M_0,D)=\frac{|ax_0+by_0+c_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Indication pour l'exercice 5206 ▲

Pour la parallèle, considérer deux points A et B sur la droite et construire un parallélogramme $ABPQ$.
Pour la perpendiculaire, construire un cerf-volant $APBQ$.

Indication pour l'exercice 5207 ▲

Utiliser une ou plusieurs cordes.

Indication pour l'exercice 5208 ▲

Tracer le milieu I de AB puis procéder par analyse-synthèse.

Indication pour l'exercice 5210 ▲

2. Penser à l'intersection des médianes.

Indication pour l'exercice 5211 ▲

Le barycentre est associatif. Donc construire le milieu de deux côtés opposés, puis le milieu de ces milieux, puisque :

$$\frac{A+B+C+D}{4}=\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{C+D}{2}}{2}.$$

Pour les autres questions, utiliser également l'associativité.

Indication pour l'exercice 5212 ▲

1. Utiliser des triangles particuliers.
2. Utiliser le théorème de Thalès.

Indication pour l'exercice 5213 ▲

1. À quelle distance de O' se situe ce point d'intersection ?
2. Utiliser le cercle de centre O' et de rayon $r'-r$ pour une tangente « extérieure » ou bien $r'+r$ pour une tangente « intérieure », et un autre cercle.

Indication pour l'exercice 5214 ▲

1. Commencer par trouver le point de la droite qui va appartenir au cercle.

2. Idem.

Indication pour l'exercice 5215 ▲

1. Test de méthodologie : quelles droites peut-on tracer à partir de ce qui est donné ?
2. Construire la droite équidistante (à distance r) des deux parallèles, puis les deux droites parallèles à la troisième et à distance r.

Indication pour l'exercice 5216 ▲

Soient O_1, O_2 et O_3 les centres des trois cercles. Considérer le centre le centre du cercle circonscrit à $O_1O_2O_3$.

Indication pour l'exercice 5221 ▲

Considérer les symétries centrales σ_i en les points P_i, puis la composée $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_n$. Pour la deuxième partie, penser au théorème de Varignon.

Indication pour l'exercice 5222 ▲

De la même façon qu'il est souvent utile de compléter un triangle rectangle en un rectangle, il est souvent utile de compléter un trapèze rectangle en un rectangle.

Indication pour l'exercice 5224 ▲

Si ϕ est une homothétie envoyant $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$, alors $O' = \phi(O)$. Il suffit d'avoir un deuxième couple $(M, \phi(M))$ pour pouvoir tracer le centre de l'homothétie ϕ.

Indication pour l'exercice 5225 ▲

Si les cercles ne sont pas confondus, il peut y avoir entre 0 et 4 tangentes. Faire des figures pour tous les cas possibles. Puis, déterminer les homothéties (ou les translations) envoyant un cercle sur l'autre et tracer leur centre.

Indication pour l'exercice 5226 ▲

En faisant une figure avec le carré déjà construit, on voit alors deux segments parallèles, ce qui invite à utiliser une homothétie.

Indication pour l'exercice 5227 ▲

1. Considérer une homothétie de centre G.
2. Considérer une homothétie de centre H. On rappelle que $\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

Indication pour l'exercice 5229 ▲

Considérer le quadrilatère $ABB'A'$ et ses diagonales : elles se croisent sur la droite.

Indication pour l'exercice 5231 ▲

Utiliser une homothétie et une symétrie centrale.

Indication pour l'exercice 5233 ▲

Utiliser des homothéties.

Indication pour l'exercice 5234 ▲

Considérer la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et l'image de I par cette translation.

Indication pour l'exercice 5235 ▲

Des homothéties de même centre commutent, de même que des translations.

Indication pour l'exercice 5236 ▲

Homothéties ou translations.

Indication pour l'exercice 5237 ▲

Quelle est la partie linéaire de $f \circ g^{-1}$?

Indication pour l'exercice 5238 ▲

Considérer la translation τ de distance a suivant la direction de la droite.

Indication pour l'exercice 5239 ▲

Commencer par construire un cercle tangent aux deux droites.

Indication pour l'exercice 5240 ▲

Sans la condition sur A, l'exercice est facile. Tracer n'importe quel cercle tangent aux droites. Ensuite, appliquer la méthodologie classique.

Indication pour l'exercice 5241 ▲

Les images de trois points non alignés déterminent de façon unique une transformation affine. En déduire une condition sur le quatrième point.

Indication pour l'exercice 5242 ▲

Considérer I et J les milieux de MA et AM' ainsi qu'une projection affine. Une telle projection réduit les distances.

Indication pour l'exercice 5243 ▲

Faire tourner le carré circonscrit par rapport au carré inscrit.

Indication pour l'exercice 5244 ▲

Procéder par analyse-synthèse et considérer des rotations.

Indication pour l'exercice 5245 ▲

Il suffit de construire une des droites d'appui du carré. Pour cela, il suffit de construire un deuxième point sur cette droite.

Indication pour l'exercice 5247 ▲

L'aire de l'intersection vaut le quart de l'aire du carré $ABCD$.

Indication pour l'exercice 5248 ▲

Considérer la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

Indication pour l'exercice 5249 ▲

Considérer la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

Indication pour l'exercice 5250 ▲

Considérer la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$.

Indication pour l'exercice 5251 ▲

Considérer une rotation de centre A.

Indication pour l'exercice 5252 ▲

Si ABC est un tel triangle, considérer les rotations d'angles $\pm\pi/3$ et centrées sur les sommets. Déterminer les images des différents points et droites par ces rotations.

Indication pour l'exercice 5253 ▲

Similitude.

Indication pour l'exercice 5254 ▲

Considérer les cercles de diamètre $[AB]$ et $[AC]$, le second point d'intersection, et une similitude de centre A.

Indication pour l'exercice 5255 ▲

Utiliser une similitude.

Indication pour l'exercice 5256 ▲

Considérer des similitudes centrées sur A, B et C ainsi que leur compositions. (Ou alors, utiliser les nombres complexes.)

Indication pour l'exercice 5257 ▲

Considérer la similitude de centre A, d'angle $\pi/4$ et de rapport $\sqrt{2}$, et celle de centre C, d'angle $-\pi/4$, et de rapport $1/\sqrt{2}$. Ou alors, utiliser les nombres complexes.

Indication pour l'exercice 5259 ▲

Triangles isocèles et rectangles

Indication pour l'exercice 5261 ▲

Il y a deux tels octogones. En notant O le centre d'un tel octogone, on doit avoir $\widehat{AOB} = \pm\pi/4$.

Indication pour l'exercice 5265 ▲

Rédiger avec des angles de droites et ne pas faire de distinction entre bissectrice extérieure et intérieure.

Indication pour l'exercice 5266 ▲

Introduire la tangente commune $\mathscr{T}$ aux deux cercles.

Indication pour l'exercice 5267 ▲

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles circonscrits à ARQ et BPR. Ils se coupent en R et en un deuxième point T, ou alors ils sont tangents en R. Montrer que T (ou R dans le second cas) est sur le cercle circonscrit à CQP.

Indication pour l'exercice 5268 ▲

Les points A et E sont les extrémités d'un diamètre. Ensuite, décomposer en triangles.

Indication pour l'exercice 5272 ▲

Utiliser les angles droits pour montrer que des points sont cocycliques, puis utiliser le théorème de l'angle inscrit.

Indication pour l'exercice 5273 ▲

Pour la conclusion, utiliser $AC = AK + KC$.

Indication pour l'exercice 5275 ▲

Décomposer $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})$ en $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MC})$.

Indication pour l'exercice 5277 ▲

La somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 2π.

Indication pour l'exercice 5280 ▲

Utiliser les différentes caractérisations des triangles isocèles.

Indication pour l'exercice 5281 ▲

Où se trouve le centre du triangle circonscrit d'un triangle rectangle ?

Indication pour l'exercice 5283 ▲

Considérer les puissances par rapport aux deux cercles.

Indication pour l'exercice 5284 ▲

Utiliser des triangles semblables, ou bien utiliser la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Indication pour l'exercice 5285 ▲

Utiliser le second point d'intersection de la droite avec le cercle, s'il existe.

Indication pour l'exercice 5287 ▲

Considérer la similitude directe qui envoie le couple (B,D) sur le couple (C,E).

Indication pour l'exercice 5289 ▲

Si on n'utilise pas les nombres complexes, on pourra considérer C' le milieu de $[AB]$, s_1 la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$ et s_2 la similitude de centre B, de rapport $1/\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$.
Dans le contexte de cet exercice, les similitudes directes seront utilisées comme dans l'exemple suivant : comme AQC est rectangle isocèle en Q, la similitude directe de centre A, d'angle $\pi/4$ et de rapport $\sqrt{2}$ envoie Q sur C.

Indication pour l'exercice 5290 ▲

Reformuler une égalité de produits en une égalité de quotients.
Utiliser des similitudes de centre M.

Indication pour l'exercice 5291 ▲

Pour les translations ou symétries glissées, commencer par montrer que le vecteur doit être horizontal.

Indication pour l'exercice 5297 ▲

Dans la dernière question, faire apparaître le point P dans la condition d'alignement à l'aide de la relation de Chasles, par exemple.

Indication pour l'exercice 5466 ▲

Un point $M(t)$ est singulier si $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$.

Indication pour l'exercice 5488 ▲

Utiliser le repère de Frenet $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$.

Indication pour l'exercice 5600 ▲

On rappelle la formule de Green-Riemann qui permet de faire le lien entre intégrale double et intégrale curviligne :
Théorème. Soit $\mathscr{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par une courbe fermée $\mathscr{C}$ que l'on suppose coupée par toute parallèle aux axes en deux points au plus. On considère une forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ définie sur $\mathscr{D}$. Si les fonctions P et Q sont de classe C^1, on a :

$$\int_{\mathscr{C}^+} Pdx + Qdy = \iint_{\mathscr{D}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

où l'on a noté $\mathscr{C}^+$ la courbe $\mathscr{C}$ que l'on a orientée dans le sens direct.

Indication pour l'exercice 5742 ▲

Considérer la couleur des cases exclues.

Indication pour l'exercice 5743 ▲

Pour la question (II) (b) on considèrera la partie A_0 minimale associée à φ et l'on montrera que A_0 et $h(Y - g(A_0))$ forment une partition de X. La bijection sera définie par g sur A_0 et par h^{-1} sur $h(Y - g(A_0))$.

Indication pour l'exercice 5745 ▲

Ne voir dans le mot "rangée" qu'une condition d'alignement.

Indication pour l'exercice 5746 ▲

Compter, dans un ensemble E à n éléments, le nombre de parties à p éléments obtenues en réunissant une partie X à k éléments à une partie à $p-k$ éléments du complémentaire de X dans E, k décrivant $\{0,\dots,p\}$.

Indication pour l'exercice 5747 ▲

$n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ et $24 = 2^3 \cdot 3$.

Indication pour l'exercice 5748 ▲

Les premières questions ne présentent aucune difficulté.
Pour la dernière, le plus difficile (et le plus intéressant) est de deviner la formule. Pour cela, calculer la puissance n-ième pour $n = 1,2,3,4,5\dots$. (La formule est donnée dans la page "Corrections").

Indication pour l'exercice 5750 ▲

On pourra montrer les points suivants :
(a) $x \star y = e \Rightarrow y \star x = e$
(b) L'élément neutre à gauche est unique.
(c) L'élément neutre à gauche est un élément neutre à droite aussi.
(d) Tout élément est inversible.

Indication pour l'exercice 5751 ▲

Oui.

Indication pour l'exercice 5752 ▲

Aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5753 ▲

Pour l'existence d'un inverse pour toute matrice $n \times n$ de déterminant non nul, noter que $\det(A) \neq 0$ entraîne que la matrice A est inversible (comme matrice) et que la matrice A^{-1}, qui est de déterminant $1/\det(A) \neq 0$ est alors l'inverse de A pour le groupe en question.

Indication pour l'exercice 5754 ▲

Aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5756 ▲

Considérer la partition de G en sous-ensembles du type $\{x, x^{-1}\}$.

Indication pour l'exercice 5757 ▲

On commence par montrer que f est surjective, en notant que si $|G| = 2m+1$, alors pour tout $y \in G$ on a $y = (y^{m+1})^2$.

Indication pour l'exercice 5758 ▲

$x^m = a \Leftrightarrow x = a^u$ où $um + v|G| = 1$.

Indication pour l'exercice 5760 ▲

Standard.

Indication pour l'exercice 5763 ▲

Pour le (c), introduire le morphisme $\mathbb{Z} \to < x >$ qui associe nx à tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Ce morphisme est surjectif et de noyau $d\mathbb{Z}$ où d est l'ordre de x.

Indication pour l'exercice 5764 ▲

Aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5766 ▲

Conséquence de l'exercice 5765.

Indication pour l'exercice 5767 ▲

$\{1\}, \mu_2 \times \{1\}, \{1\} \times \mu_2, \{(1,1),(i,i)\}, \mu_2 \times \mu_2$.

Indication pour l'exercice 5769 ▲

Standard.

Indication pour l'exercice 5770 ▲

Pour la seconde question, noter que si x est d'ordre 2 dans G, alors yxy^{-1} l'est aussi, pour tout $y \in G$.

Indication pour l'exercice 5773 ▲

Commencer par analyser l'ordre possible des éléments de G.

Indication pour l'exercice 5775 ▲

Trouver l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$.

Indication pour l'exercice 5776 ▲

Trouver l'ordre de 2 modulo $2^n - 1$.

Indication pour l'exercice 5793 ▲

$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Rightarrow xy = yx$.

Indication pour l'exercice 5800 ▲

(a) est standard. En utilisant (a), on obtient $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^{\times} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, lequel n'est pas cyclique puisque tous les éléments sont d'ordre 1, 2 ou 4. Le reste ne pose pas de grandes difficultés.

Indication pour l'exercice 5801 ▲

(a) Bézout. (b) ϕ est injectif et ensembles de départ et d'arrivée ont même cardinal.

Indication pour l'exercice 5803 ▲

$e^{2ik\pi/d} = \left(e^{2ik\pi/n}\right)^{n/d}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Indication pour l'exercice 5804 ▲

$f(G')$ est un sous-groupe de H isomorphe à $G'/(\ker(f) \cap G')$.

Indication pour l'exercice 5805 ▲

Résulte de l'exercice 5804.

Indication pour l'exercice 5808 ▲

Les morphismes du groupe $(\mathbb{Q},+)$ dans lui-même sont de la forme $x \to ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$. Les morphismes du groupe $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$ sont, parmi les précédents, ceux dont l'image est dans $\mathbb{Z}$; il n'y a que le morphisme nul. Les morphismes du groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$ sont déterminés par l'entier $f(1)$ qui doit vérifier $mf(1) = 0$; il n'y a que le morphisme nul, si $m \neq 0$.

Indication pour l'exercice 5809 ▲

L'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ des morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe abélien pour l'addition naturelle des morphismes. On note δ le pgcd de m et n et m' et n' les entiers m/δ et n/δ. Si $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ désigne la surjection canonique, la correspondance associant à tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ l'élément $f \circ p(1)$ induit un isomorphisme de groupe entre $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et le sous-groupe $n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, lequel est isomorphe à $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$.
L'ensemble $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe pour la composition. La correspondance précédente induit un isomorphisme entre $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 5812 ▲

Le morphisme "déterminant" de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^\times$ est surjectif et de noyau $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 5815 ▲

Si ζ est un élément de G dont la classe modulo H engendre G/H, alors tout élément de G peut s'écrire $h\zeta^m$ avec $h \in H$ et $m \in \mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 5816 ▲

Appliquer l'exercice 5815 avec $H = Z(G)$.

Indication pour l'exercice 5818 ▲

Exercice classique d'algèbre linéaire : $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)) = \mathbb{F}_p^\times \cdot \mathrm{Id}_n$ (où Id_n désigne la matrice identité d'ordre n).

Indication pour l'exercice 5820 ▲

Les questions (a) et (b) ne présentent aucune difficulté.

Pour la question (c), noter que, pour tout $x \in G$, on a $(\tau_x)^{|G|} = 1$, et que la restriction de τ_x à H appartient à $\mathrm{Aut}(H) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (et utiliser l'exercice 5817).

Indication pour l'exercice 5821 ▲

Aucune difficulté. Observer que tout conjugué d'un commutateur est un commutateur et qu'un quotient G/H est abélien si et seulement si pour tous $u,v \in G$, on a $uvu^{-1}v^{-1} \in H$.

Indication pour l'exercice 5823 ▲

Aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5825 ▲

(a) est une simple vérification.

(b) Les trois permutations s'écrivent respectivement $(1\,3\,7\,5)\,(2\,6\,4)$, $(1\,7)\,(2\,4\,3)$ et $(2\,3\,7\,6\,5\,4)$.

(c) est une simple vérification.

(d) **Rappel :** De façon générale, on dit qu'une permutation $\omega \in S_n$ est de type $1^{r_1}\text{-}2^{r_2}\text{-}\cdots\text{-}d^{r_d}$ où $d, r_1, \ldots, r_d$ sont des entiers $\geqslant 0$ tels que $r_1 + \cdots + r_d = n$, si dans la décomposition de ω en cycles à support disjoints, figurent r_1 1-cycles (ou points fixes), r_2 2-cycles, ... et r_d d-cycles. En utilisant la question (c), il n'est pas difficile de montrer que deux permutations sont conjuguées dans S_n si et seulement si elles sont de même type. Les classes de conjugaison de S_n correspondent donc exactement à tous les types possibles.

On obtient ainsi facilement les classes de conjugaison de S_5. Soit maintenant H un sous-groupe distingué non trivial de S_5. Dès que H contient un élément de S_5, il contient sa classe de conjugaison ; H est donc une réunion de classes de conjugaison. En considérant toutes les classes possibles que peut contenir H, on montre que $H = A_5$ ou $H = S_5$. Par exemple, si H contient la classe 1-2-2, alors H contient $(1\,2)\,(3\,4) \times (1\,3)\,(2\,5) = (1\,4\,3\,2\,5)$ et donc la classe des 5-cycles. D'après l'exercice 5824, H contient alors A_5. Le groupe H est donc A_5 ou S_5. Les autres cas sont similaires.

Indication pour l'exercice 5830 ▲

Une puissance impaire d'une permutation impaire ne peut pas être égale à 1.

Indication pour l'exercice 5834 ▲

(a) Aucune difficulté.
(b) Le nombre cherché est l'orbite de H sous l'action de G par conjugaison sur ses sous-groupes et $\mathrm{Nor}_G(H)$ est le fixateur de H pour cette action.

Indication pour l'exercice 5835 ▲

Etudier l'action du groupe par translation sur l'ensemble quotient des classes modulo le sous-groupe.

Indication pour l'exercice 5836 ▲

Le seul point non immédiat est que H' est d'indice fini dans G. Pour cela considérer le morphisme de G à valeurs dans le groupe des permutations des classes à gauche de G modulo H, qui à $g \in G$ associe la permutation $aH \to gaH$ et montrer que le noyau de ce morphisme est le groupe H'.

Indication pour l'exercice 5841 ▲

Question (d) : Si K le fixateur d'un élément $x \in X$, alors K est un sous-groupe propre maximal de G et X est isomorphe à $G/\cdot K$ en tant que G-ensemble. Déduire du fait que H n'est pas contenu dans K que $HK = G$ et que $H/\cdot H \cap K \simeq G/\cdot K$.

Indication pour l'exercice 5842 ▲

Soit H un tel sous-groupe. On peut supposer sans perte de généralité que H contient la transposition (12). On pourra ensuite procéder comme suit.
- montrer que H est engendré par le fixateur H_1 de 1 et par (12).
- montrer que l'orbite de 2 sous H est l'union de l'orbite de 2 sous H_1 et de 1.

- en déduire que H_1 agit transitivement sur l'ensemble $\{2,\dots,n\}$ et que H agit 2-transitivement sur $\{1,\dots,n\}$.
- déduire du point précédent que H contient toutes les transpositions.

Indication pour l'exercice 5843 ▲

(a) est trivial.

(b) : Noter d'abord que la condition sur le fixateur de x est indépendante de $x \in X$: en effet si g est un élément de G envoyant x sur un autre élément $x' \in X$ (qui existe par transitivité de G), alors $G(x') = gG(x)g^{-1}$ et la correspondance $h \to ghg^{-1}$ permet d'identifier les actions de $G(x')$ sur $X \setminus \{x'\}$ et celle de $G(x)$ sur $X \setminus \{x\}$. Supposons maintenant vérifiée la condition sur le fixateur de x. Si (x,y) et (x',y') sont deux couples d'éléments distincts de X, il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(x) = x'$ (transitivité de G) et il existe $\tau \in G$ tel que $\tau(x') = x'$ et $\tau(\sigma(y)) = y'$ (transitivité de $G(x')$ sur $X \setminus \{x'\}$ (noter que $\sigma(y) \neq x'$ car $\sigma(x) = x'$)). La permutation $\tau\sigma$ vérifie $\tau\sigma(x) = x'$ et $\tau\sigma(y) = y'$. Cela montre que X est 2-transitif. La réciproque est triviale.

(c) Si l'action de G sur X est imprimitive et $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$ est une partition de X comme dans la définition, alors il n'existe pas d'élément $g \in G$ envoyant un premier élément $x_1 \in X_1$ dans X_1 et un second élément $x_1' \in X_1$ dans X_2.

(d) L'action par translation d'un groupe cyclique C sur lui-même est transitive, elle est primitive si $|C|$ est premier (toute partition de C en sous-ensembles de même cardinal est forcément triviale) mais elle n'est pas 2-transitive (le fixateur de tout élément est trivial, ce qui contredit le (c) de l'exercice 5841).

(e) et (f) ne présentent aucune difficulté.

Indication pour l'exercice 5844 ▲

On se ramène à la situation où le polygone est inscrit dans le plan complexe et a pour sommets les racines de l'unité $e^{2ik\pi/n}, k = 0,1,\dots,n-1$. Une isométrie laissant invariant le polygone fixe nécessairement l'origine. Elle est donc de la forme $z \to az$ ou $z \to a\bar{z}$ avec $|a| = 1$. On voit ensuite que a est nécessairement une racine n-ième de 1. Notons σ l'isométrie $z \to e^{2i\pi/n}z$ et τ la conjugaison complexe. On a $D_n = \{\sigma^k\tau^\varepsilon \mid k = 0,\dots,n-1, \varepsilon = \pm 1\}$. On vérifie que σ et τ engendrent le groupe D_n et satisfont les relations $\sigma^n = 1$, $\tau^2 = 1$ et $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Autrement dit, D_n est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$. Si n est impair, son centre est trivial et si $n = 2m$ est pair, son centre est $\{1, \sigma^m\}$. Le groupe D_n se plonge naturellement dans S_n ; comme $|D_3| = |S_3| = 6$, ce plongement est un isomorphisme pour $n = 3$.

Indication pour l'exercice 5855 ▲

$|G| = |G/H|\,|H|$.

Indication pour l'exercice 5857 ▲

Pour les trois énoncés (a), (b) et (c), raisonner par récurrence sur r en utilisant le fait que le centre d'un p-groupe n'est pas trivial.

Indication pour l'exercice 5860 ▲

On a

$$D_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mu_2 \times S_3$$

Le premier isomorphisme est une application standard du lemme chinois. Pour le deuxième, noter que le premier $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est dans le centre du groupe et donc que l'action sur lui par conjugaison du second $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est triviale. L'isomorphisme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq S_3$ est classique.

Indication pour l'exercice 5862 ▲

Pour tout $g \in G$, gSg^{-1} est un p-Sylow de $gHg^{-1} = H$ et donc $gSg^{-1} = S$.

Indication pour l'exercice 5866 ▲

Pour le (c), pour $H \neq \{1\}$ sous-groupe distingué de A_5, raisonner sur les éléments d'ordre 2, 3 et 5 contenus dans H.

Indication pour l'exercice 5867 ▲

L'identification de chacun des p-Sylow ne pose pas de difficulté. Observer ensuite que les sous-groupes de Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à $\{1\}$ et determiner leur nombre en comptant les éléments d'ordre 2, 3 et 5.

Indication pour l'exercice 5869 ▲

Les théorèmes de Sylow montrent qu'il n'y a qu'un seul q-Sylow, nécessairement distingué. La suite est standard. Pour le dernier point, utiliser que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$ (exercice 5809) et donc que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ne peut agir non trivialement sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ que si p divise $q-1$.

Indication pour l'exercice 5870 ▲

D'après l'exercice 5869, un groupe d'ordre 35 est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, lequel est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ par le lemme chinois.

Indication pour l'exercice 5872 ▲

Soit G un groupe d'ordre p^2q qu'on suppose simple. On distinguera deux cas : $p > q$ et $p < q$. Dans le premier, montrer que G admet q p-Sylow d'ordre p^2 et que l'action par conjugaison de G sur les p-Sylow définit un morphisme injectif $G \hookrightarrow S_q$ et aboutir à une contradiction. Dans le second, raisonner sur le nombre de q-Sylow pour aboutir à une contradiction (on sera notamment amené à éliminer le cas $p = 2$ et $q = 3$).

Indication pour l'exercice 5874 ▲

(a) Si K est un sous-groupe d'ordre 20, K a un seul 5-Sylow L et donc $K \subset \mathrm{Nor}_G(L)$ ce qui entraine que l'ordre de $\mathrm{Nor}_G(L)$ est 20 ou 60. Mais alors il y aurait 1 ou 3 5-Sylow dans G. Or 1 est impossible car G est simple et 3 contredit les prédictions du théorème de Sylow.

(b) Si K a un unique 3-Sylow L, $K \subset \mathrm{Nor}_G(L)$, et donc l'ordre de $\mathrm{Nor}_G(L)$ serait 12 ou 60. Il y aurait alors 5 ou 1 3-Sylow dans G. Comme ci-dessus, c'est impossible.

(c) Supposons que $H \cap K = < a >$ soit d'ordre 2. Le centralisateur $\mathrm{Cen}_G(a)$ de a contient H et K, donc $H \cup K$. Son ordre est au moins 6 et est divisible par 4. Les seules possibilités sont 12, 20, 60 :
- 60 est impossible, car $< a >$ serait distingué dans G
- 20 est impossible, d'après la question (a)
- 12 est impossible, car $\mathrm{Cen}_G(a)$ aurait 4 3-Sylow d'après la question (b). Il ne resterait de la place que pour un seul 2-Sylow ce qui contredit $H \cup K \subset \mathrm{Cen}_G(a)$.

(d) Si $H = \mathrm{Nor}_G(H)$, il y a 15 2-Sylow, et donc 46 éléments d'ordre une puissance de 2. Or il y a 6 5-Sylow d'intersections deux à deux triviales, et donc 24 éléments d'ordre 5. L'inégalité $46 + 24 > 60$ fournit une contradiction.

(e) Si H est un 2-Sylow, l'ordre de $\mathrm{Nor}_G(H)$ est 12, 20 ou 60. Mais 20 est exclu (question (a)) de même que 60 (G est simple). La seule possibilité est 12 ; il y a donc 5 2-Sylow.

(f) L'action de G par conjugaison sur les 5-Sylow fournit un morphisme $c : G \to S_5$ qui est injectif (car G est simple). Le groupe G est donc isomorphe à son image $c(G)$ qui est un sous-groupe d'ordre 60, donc d'indice 2 dans S_5. C'est donc A_5.

Indication pour l'exercice 6015 ▲

Voir la solution de l'exercice 6007, deuxième question.

Indication pour l'exercice 6468 ▲

Vérifier que :

1. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;
3. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;
4. $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;
5. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;

Indication pour l'exercice 6469 ▲

Montrer que J_x est un intervalle ouvert ; que $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \varnothing$. Et penser que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Indication pour l'exercice 6470 ▲

Pour trouver m, que prendriez-vous si on voulait seulement $m \in \mathbb{R}$?

Indication pour l'exercice 6471 ▲

Revenir à la définition de ce qu'est un "ensemble fermé" et de ce qu'est une "boule fermée".

Indication pour l'exercice 6474 ▲

Une suite de l^∞ est notée $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$, pour chaque $p \geqslant 0$, x^p est elle même une suite $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \ldots)$.

Indication pour l'exercice 6475 ▲

Montrer

- $\|f\| \leqslant N(f)$;
- $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|$;
- $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.

Indication pour l'exercice 6477 ▲

- Montrer $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.
- Par un contre-exemple, montrer qu'il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f.

Indication pour l'exercice 6478 ▲

Les seules relations sont :

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_4 \leqslant 2N_3.$$

Indication pour l'exercice 6554 ▲

1. Remarquer si U_a est un voisinage de a, alors $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$.
2. Raisonner par l'absurde et construire une suite (x_n) dont aucun élément n'est dans U et une suite (y_n) de K. Quitte à extraire une sous-suite se débrouiller pour qu'elle converge vers la même limite.

Indication pour l'exercice 6555 ▲

Utiliser qu'un ensemble K est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

Indication pour l'exercice 6556 ▲

Extraire des sous-suites...

Indication pour l'exercice 6560 ▲

On pourra utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.

Indication pour l'exercice 6561 ▲

1. Utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.
2. Remarquer que "$\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$" est équivalent à

$$“\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).''$$

Indication pour l'exercice 6564 ▲

1. ...
2. Utiliser l'exercice 6557.
3. Montrer $f(Y) \subset Y$ puis $Y \subset f(Y)$.
4. Diamètre zéro implique ensemble réduit à un singleton.

Indication pour l'exercice 6614 ▲

1. Utiliser le fait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est l'union dénombrable d'intervalles ouverts.
2. Écrire un intervalle fermé comme union dénombrable d'intervalles ouverts, puis utiliser la même remarque que ci-dessus.

Indication pour l'exercice 6615 ▲

1. $\ldots$.
2. Pour montrer que c_0 est fermé, l'écrire comme image réciproque de quelque chose.

Indication pour l'exercice 6616 ▲

Montrer que le complémentaire est un ouvert. Si vous le souhaitez, placez-vous dans des espaces métriques.

Indication pour l'exercice 6617 ▲

1. Pour un polynôme P, la limite de $P(x)$ ne vaut $\pm\infty$ que lorsque x tend vers $\pm\infty$.

Indication pour l'exercice 6618 ▲

1. Pour le sens direct utiliser la caractérisation de l'adhérence par les suites. Pour le sens réciproque, montrer que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.

Indication pour l'exercice 6621 ▲

1. Par l'absurde, considérer $I(x) = \int_0^x f$. Trouver une suite (p_n) telle que $(I(p_n))$ ne soit pas une suite de Cauchy.

2. Pour montrer que cette intégrale converge utiliser le changement de variable $u = t^2$ puis faire une intégration par partie.

Indication pour l'exercice 6669 ▲

Si la relation est vérifiée montrer que B est continue en x en calculant $B(x+y) - B(x)$. Si B est continue alors en particulier B est continue en $(0,0)$, fixer le ε de cette continuité,...

Indication pour l'exercice 6670 ▲

La continuité de L sur E équivaut la continuité en 0. Par l'absurde supposer que L n'est pas continue en 0 et construire une suite (x_n) qui tend vers 0 mais avec $(L(x_n))$ non bornée.

Indication pour l'exercice 6671 ▲

Il faut montrer $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Le faire pour $\lambda \in \mathbb{N}$, puis $\lambda \in \mathbb{Z}$, puis $\lambda \in \mathbb{Q}$ et enfin $\lambda \in \mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 6672 ▲

1. $\|S\| = 1$;
2. $\|T\| = \|g\|_\infty$;
3. $\|u\| = \int_0^1 |g|$, on distinguera les cas où g reste de signe constant et g change de signe ;
4. $\|u\| = \|a_n\|_2$;
5. $\|u\| = \|a\|_\infty$;
6. $\|u\| = 1$.

Indication pour l'exercice 6673 ▲

U est continue et $\|U\| = 1$, V n'est pas continue.

Indication pour l'exercice 6675 ▲

1. Montrer d'abord que X se décompose sous la forme $H + \mathbb{R}.a$.
2. ...
3. Non ! Chercher un contre-exemple dans les exercices précédents.

Indication pour l'exercice 6677 ▲

Montrer que $\|L\| = \pi$.

Indication pour l'exercice 6724 ▲

1. C'est une suite de Cauchy. Essayer de se ramener à une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, |.|)$.
2. Regarder la suite définie par $u_n = -n$.
3. Comme la première question.

Indication pour l'exercice 6725 ▲

f est injective uniquement afin que d soit bien une distance. Raisonner par double implication. Utiliser la caractérisation d'un fermé par les suites.

Indication pour l'exercice 6726 ▲

1. (X, d_ω) est complet. La démonstration est presque la même que pour montrer que $(\mathscr{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$ est complet.
2. Prendre par exemple, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = 1$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = (1 - n(t - \frac{1}{2}))$ pour $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et $f(t) = 0$ si $t \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.

Indication pour l'exercice 6727 ▲

1. Intégrer l'exemple de l'exercice 6726.
2. Oui cet espace est complet, montrer-le !

Indication pour l'exercice 6728 ▲

1. Prendre la suite (x^p) définie par $x^p = (1, 1, \dots, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$. ($(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de suite).
2. Prendre Y l'espace de toutes les suites.
3. Considérer $x^p = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{p}, 0, 0, \dots)$.

Indication pour l'exercice 6729 ▲

1. Écrire ce que donne la définition de "(x_n) est une suite de Cauchy" pour $\varepsilon = 1$, puis $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ..., puis $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$. Faire la somme. Remarquer que si $T_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$ alors $T_N = x_{n_{N+1}} - x_{n_0}$.
2. ...

Indication pour l'exercice 6759 ▲

C'est à peu prés la même démonstration que pour le théorème du point fixe d'une fonction contractante.

Indication pour l'exercice 6760 ▲

Montrer que l'unique point fixe x de f^n, est un point fixe de f. Pour cela écrire l'égalité $f^n(x) = x$ et composée habilement cette égalité. Pour conclure utiliser l'unicité du point fixe de f^n.

Indication pour l'exercice 6761 ▲

Faire soigneusement le calcul : $(T \circ Tf)(x) = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u - u^2)\,dudt$. Se souvenir que X est complet et utiliser l'exercice 6760.

Indication pour l'exercice 6775 ▲

Raisonner par l'absurde et montrer que ω_x est un ouvert dense.

Indication pour l'exercice 6776 ▲

1. Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est *semi-continue inférieurement* si
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \qquad \text{est un ouvert.}$$
De façon équivalente f est *semi-continue inférieurement* si pour tout $x \in X$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in X \quad (d(x,y) < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) < \varepsilon).$$
Attention il n'y a pas de valeur absolue autour de $f(x) - f(y)$.
2. Pour la première question considérer $O_n = \{x \in X \mid f(x) > n\}$ et utiliser le théorème de Baire.

3. Pour l'application utiliser la première question avec la fonction

$$\phi : B \to \mathbb{R}, \text{ définie par } \phi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Indication pour l'exercice 6788 ▲

Utiliser la première question pour les deux suivantes.

Indication pour l'exercice 6790 ▲

Utiliser la partition $X = \mathring{A} \cup \operatorname{Fr} A \cup (X \setminus \bar{A})$ où $\operatorname{Fr} A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ est la frontière de A.

Indication pour l'exercice 6791 ▲

Faites un dessin de T. Pour la dernière question, raisonner par l'absurde. Où peuvent s'envoyer les points de la deuxième question ?

Indication pour l'exercice 6792 ▲

1. Pour la surjection, pensez à l'exponentielle ou aux sinus et cosinus... Pour l'injection, raisonner par l'absurde et utiliser la connexité du cercle privé d'un point.
2. Raisonner par l'absurde et utiliser la connexité de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point.

Indication pour l'exercice 6793 ▲

Définir $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tel que $g(x)$ prend la valeur qu'a f sur B_x. Montrer pour chaque points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, g est constante dans un voisinage de ce point, puis faire la même chose pour un point de $\mathbb{Q}$. Conclure.

Indication pour l'exercice 6794 ▲

1. Faire un dessin !
2. Utiliser le théorème des accroissements finis d'une part. La définition de la dérivée d'autre part.
3. Utiliser l'exercice 6788 ou refaire la demonstration.

Indication pour l'exercice 6796 ▲

1. Faire un dessin ! !
2. Voir l'exercice 6788.
3. Raisonner par l'absurde. Prendre un chemin qui relie le point $(0,0)$ au point $(\frac{1}{2\pi},0)$ (par exemple). Ce chemin va quitter à un instant t_0 le segment $\{0\} \times [-1,1]$. Chercher une contradiction à ce moment là.

Indication pour l'exercice 6825 ▲

Approcher f par une suite de polynômes, et se rappeler que si l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle alors...

Indication pour l'exercice 6826 ▲

Raisonner par l'absurde.

Indication pour l'exercice 6827 ▲

Considérer l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi = (f_1, \dots, f_n)$.

Indication pour l'exercice 6828 ▲

Appliquer le théorème de Stone-Weierstrass.

Indication pour l'exercice 6829 ▲

Pour la deuxième question :

1. Montrer que $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.
2. Montrer que $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.
3. Applique le théorème d'Acoli sur le compact $\bar{B}(0,R)$.
4. Utiliser le procédé diagonal de Cantor ($R = 1, 2, 3, \dots$).

Indication pour l'exercice 6830 ▲

Démarrer avec l'inégalité :

$$|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b|.$$

Si (f_n) n'est pas équicontinue le résultat peut être faux. Prendre $f_n(x) = (1+x)^n$ et $x_n = \frac{1}{n}$.

Indication pour l'exercice 6832 ▲

1. Pour ouvert et fermé, écrire l'équicontinuité pour $\varepsilon = 1$ en un point x (à fixer).
2. Ascoli...

Indication pour l'exercice 6833 ▲

1. Pour l'équicontinuité utiliser le théorème des accroissement finis. Pour la convergence simple montrer que pour t fixé : $f_n(t) = \sin(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n})$.
2. Montrer que (f_n) ne converge par vers la fonction nulle pour la norme $\|.\|_\infty$ (c'est-à-dire il y a convergence simple mais pas convergence uniforme). Le théorème d'Acoli serait-il faux ?

Correction de l'exercice 2 ▲

Il ne faut pas se laisser impressionner par l'allure de cette assertion. En effet $A \Rightarrow B$ est une écriture pour B ou $(\text{non}A)$; ici A (la proposition $(1=2)$) est fausse, donc $(\text{non}A)$ est vraie et B ou $(\text{non}A)$ l'est également. Donc l'assertion $A \Rightarrow B$ est vraie, quand A est fausse et quelque soit la proposition B.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x+y \leqslant 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leqslant 0$, par exemple on peut prendre $y=-(x+1)$ et alors $x+y=x-x-1=-1 \leqslant 0$.
2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y=-x+1$ et alors $x+y=1>0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x+y \leqslant 0$.
3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x+y>0$ est fausse, par exemple $x=-1$, $y=0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x+y \leqslant 0$.
4. (d) est vraie, on peut prendre $x=-1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad y^2 \leqslant x$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé.

1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$) $(f(x) \leqslant 1)$. La négation de "(Pour tout $x \in \mathbb{R}$)" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$" et la négation de "$(f(x) \leqslant 1)$" est $f(x)>1$. Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x)>1$".
2. Rappelons comment se traduit l'assertion "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1,x_2), si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$". Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) ($x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$)". La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1,x_2))" et la négation de la deuxième partie est : "($x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1)>f(x_2)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1)>f(x_2)$".
3. La négation est : "l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive". On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}, f(x)<0$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1<x_2$ et $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, ou il existe $x \in \mathbb{R}, f(x)<0$".
4. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) $(f(x) \leqslant 0)$". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$)", et celle de la seconde est :"$(f(x)>0)$". Donc la négation de l'assertion complète est : "Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x)>0$".
5. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x<y \Rightarrow f(x)>f(y))$". La négation de la première partie est "$(\forall x \in \mathbb{R})$", celle de la seconde est "$(\exists y \in \mathbb{R})$", et celle de la troisième est "($x<y$ et $f(x) \leqslant f(y)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{tels que} x<y$ et $f(x) \leqslant f(y)$".

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $\Leftarrow$
2. $\Leftrightarrow$
3. $\Rightarrow$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Cette proposition est vraie. En effet soit $\varepsilon>0$, définissons $M_1=(\frac{2}{\varepsilon},0) \in F_1$ et $M_2=(\frac{2}{\varepsilon},\frac{\varepsilon}{2}) \in F_2$, alors $M_1M_2=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon>0$ la proposition est donc démontrée.

2. Soit deux points fixés M_1, M_2 vérifiant cette proposition, la distance $d = M_1M_2$ est aussi petite que l'on veut donc elle est nulle, donc $M_1 = M_2$; or les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints. Donc la proposition est fausse. La négation de cette proposition est :

$$\forall M_1 \in F_1 \;\; \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0,+\infty[\qquad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$

et cela exprime le fait que les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints.

3. Celle ci est également fausse, en effet supposons qu'elle soit vraie, soit alors ε correspondant à cette proposition. Soit $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$ et $M_2 = (1,1)$, on a $M_1M_2 > \varepsilon + 1$ ce qui est absurde. La négation est :

$$\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \;\; \exists M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire que l'on peut trouver deux points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut.

4. Cette proposition est vraie, il suffit de choisir $\varepsilon = M_1M_2 + 1$. Elle signifie que la distance entre deux points donnés est un nombre fini !

Correction de l'exercice 7 ▲

"Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans."

Correction de l'exercice 8 ▲

1. P et non Q ;
2. "non P ou Q" ce qui la même chose que "$P \Rightarrow Q$" ;
3. (non P) ou ((non Q) ou (non R)) (on peut supprimer les parenthèses) ;
4. non P et (non Q ou non R) (ici les parenthèses sont importantes) ;
5. P et Q et R et non S ;

Correction de l'exercice 9 ▲

1. "Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit." Bien sûr cette dernière phrase est fausse !
2. "Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire."
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{Z} \;\; \exists y \in \mathbb{Z} \;\; \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Rightarrow z < x+1),$$

la négation est

$$\exists x \in \mathbb{Z} \;\; \forall y \in \mathbb{Z} \;\; \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ et } z \geqslant x+1).$$

4. $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geqslant \varepsilon)$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Remarquons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+2} \leqslant 2$ car $2n+1 \leqslant 2(n+2)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$$

Maintenant nous cherchons une condition sur n pour que l'inégalité

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

$$\begin{aligned} 2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} &\Leftrightarrow (2-\varepsilon)(n+2) < 2n+1 \\ &\Leftrightarrow 3 < \varepsilon(n+2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

Ici ε nous est donné, nous prenons un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, alors pour tout $n \geqslant N$ nous avons $n \geqslant N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ et par conséquent : $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$. Conclusion : étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ et $\frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$.
En fait nous venons de prouver que la suite de terme $(2n+1)/(n+2)$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \leqslant M$;
2. $\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M$;
3. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(-x)$;
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = -f(-x)$;
5. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq 0$;
6. $\exists a \in \mathbb{R}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+a) = f(x)$;
7. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$;
8. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
9. $\exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq 0$;
10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$;
11. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = n$;
12. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \leqslant g(x)$;
13. $\exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > g(x)$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. (a) $(f = Id_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) = M)$ et $(f \neq Id_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P} /\ f(M) \neq M)$.
   (b) (f a au moins un point fixe $\Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P} /\ f(M) = M$) et ($f$ n'a pas de point fixe $\Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) \neq M$).
   Constatez que les phrases $f(M) = M$ ou $f(M) \neq M$ **n'ont aucun sens** si elles ne sont pas accompagnées de quantificateurs.
2. (a) $(f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ et $(f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} /\ f(x) \neq 0)$.
   (b) (L'équation $f(x) = 0$ a (au moins) une solution si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R} /\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R} /\ f(x) \neq 0$).
   (c) (L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution si et seulement si $\exists ! x \in \mathbb{R} /\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas exactement une solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R} /\ f(x) \neq 0$ ou $\exists (x,x') \in \mathbb{R}^2 /\ (x \neq x'$ et $f(x) = f(x') = 0)$.
3. (a) $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} /\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M)$ et $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non bornée $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} /\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M)$.
   (b) $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ et $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non croissante $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} < u_n)$.
   (c) $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotone $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} \leqslant u_n))$ et $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non monotone $\Leftrightarrow ((\exists n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} < u_n)$ et $(\exists n \in \mathbb{N} /\ u_{n+1} > u_n))$.

Correction de l'exercice 19 ▲

Le contraire de $x \geqslant 3$ est $x < 3$. Le contraire de $0 < x \leqslant 2$ est $((x \leqslant 0)$ ou $x > 2)$.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. Oui. Dans les deux cas, chaque fois que l'on se donne un réel x_0, $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont tous deux nuls.
2. Non. La deuxième affirmation implique la première mais la première n'implique pas la deuxième. La première phrase est la traduction avec des quantificateurs de l'égalité $fg = 0$. La deuxième phrase est la traduction avec quantificateurs de $(f = 0$ ou $g = 0)$. Voici un exemple de fonctions f et g toutes deux non nulles dont le produit est nul. Soient $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$.
   Pour chaque valeur de x, on a soit $f(x) = 0$ (quand $x \leqslant 0$), soit $g(x) = 0$ (quand $x \geqslant 0$). On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0$ ou enfin, $fg = 0$. Cependant, $f(1) = 1 \neq 0$ et donc $f \neq 0$, et $g(-1) = -1 \neq 0$ et donc $g \neq 0$. Ainsi, on n'a pas $(f = 0$ ou $g = 0)$ ou encore, on n'a pas $((\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0))$.

Correction de l'exercice 22 ▲

Nous allons démontrer l'assertion 1. de deux manières différentes.

1. Tout d'abord de façon “directe". Nous supposons que A et B sont tels que $A \cap B = A \cup B$. Nous devons montrer que $A = B$.
   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.
   Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.
2. Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons montrer que $A \cap B \neq A \cup B$.
   Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Correction de l'exercice 23 ▲

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 24 ▲

Montrons quelques assertions.

$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

Si $y\in f(A\cap B)$, il existe $x\in A\cap B$ tel que $y=f(x)$, or $x\in A$ donc $y=f(x)\in f(A)$ et de même $x\in B$ donc $y\in f(B)$. D'où $y\in f(A)\cap f(B)$. Tout élément de $f(A\cap B)$ est un élément de $f(A)\cap f(B)$ donc $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$f^{-1}(F\setminus A)=E\setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(F\setminus A) &\Leftrightarrow f(x)\in F\setminus A\\ &\Leftrightarrow f(x)\notin A\\ &\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(A)\quad \text{car } f^{-1}(A)=\{x\in E\ /\ f(x)\in A\}\\ &\Leftrightarrow x\in E\setminus f^{-1}(A)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 36 ▲

$I_1=3$ et $I_2=[-2,5]$.

Correction de l'exercice 37 ▲

$I=[0,2]$ et $J=]1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 44 ▲

1. $B\setminus A\subset X\subset B$.
2. $B\subset X\subset B\cup \complement A$.

Correction de l'exercice 48 ▲

1. Si $A=B=\varnothing$ alors $A\Delta B=\varnothing=A\cap B$. Si $A\Delta B=A\cap B$, supposons par exemple $A\neq\varnothing$. Soit $x\in A$. Si $x\in B$, $x\in A\cap B=A\Delta B$ ce qui est absurde et si $x\notin B$, $x\in A\Delta B=A\cap B$ ce qui est absurde. Donc $A=B=\varnothing$. Finalement, $A\Delta B=A\cap B\Leftrightarrow A=B=\varnothing$.
2. Par distributivité de $\cap$ sur $\cup$,

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) &= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap B)\cup(B\cap C))\cap(C\cup A)\\ &= ((A\cap C)\cup B)\cap(C\cup A)\ (\text{car } B\cap B=B \text{ et } A\cap B\subset B \text{ et } B\cap C\subset B)\\ &= ((A\cap C)\cap C)\cup((A\cap C)\cap A)\cup(B\cap C)\cup(B\cap A)\\ &= (A\cap C)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(B\cap A)\\ &= (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\end{aligned}$$

3. $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(B\setminus A)\cup(A\setminus B)=B\Delta A$.
4.

$$\begin{aligned}x\in(A\Delta B)\Delta C &\Leftrightarrow x \text{ est dans } A\Delta B \text{ ou dans } C \text{ mais pas dans les deux}\\ &\Leftrightarrow ((x\in A \text{ et } x\notin B \text{ et } x\notin C) \text{ ou } (x\in B \text{ et } x\notin A \text{ et } x\notin C) \text{ ou } (x\in C \text{ et } x\notin A\Delta B)\\ &\Leftrightarrow x \text{ est dans une et une seule des trois parties ou dans les trois.}\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de A, B et C, $A\Delta(B\Delta C)$ est également l'ensemble des éléments qui sont dans une et une seule des trois parties A, B ou C ou dans les trois. Donc $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$. Ces deux ensembles peuvent donc se noter une bonne fois pour toutes $A\Delta B\Delta C$.

5. $A=B\Rightarrow A\setminus B=\varnothing$ et $B\setminus A=\varnothing\Rightarrow A\Delta B=\varnothing$.
$A\neq B\Rightarrow \exists x\in E/\ ((x\in A$ et $x\notin B)$ ou $(x\notin A$ et $x\in B))\Rightarrow \exists x\in E/\ x\in (A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\Delta B\Rightarrow A\Delta B\neq\varnothing$.
6. $\Leftarrow$ Immédiat.
$\Rightarrow$ Soit x un élément de A.
Si $x\notin C$ alors $x\in A\Delta C=B\Delta C$ et donc $x\in B$ car $x\notin C$.
Si $x\in C$ alors $x\notin A\Delta C=B\Delta C$. Puis $x\notin B\Delta C$ et $x\in C$ et donc $x\in B$. Dans tous les cas, x est dans B.
Tout élément de A est dans B et donc $A\subset B$. En échangeant les rôles de A et B, on a aussi $B\subset A$ et finalement $A=B$.

Correction de l'exercice 49 ▲

1. Soit $x\in E$.

$$\begin{aligned}x\in f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)&\Leftrightarrow \exists y\in\bigcup_{i\in I}A_i/\ x=f(y)\Leftrightarrow \exists i\in I,\ \exists y\in A_i/\ x=f(y)\\&\Leftrightarrow \exists i\in I/\ x\in f(A_i)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}f(A_i)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i).}$$

2. Soit $x\in E$.

$$\begin{aligned}x\in f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)&\Leftrightarrow \exists y\in\bigcap_{i\in I}A_i/\ x=f(y)\Leftrightarrow \exists y\in E/\ \forall i\in I,\ y\in A_i \text{ et } x=f(y)\\&\Rightarrow \forall i\in I/\ \exists y\in A_i/\ x=f(y)\Leftrightarrow \forall i\in I/\ x\in f(A_i)\\&\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}f(A_i)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(A_i).}$$

L'inclusion contraire n'est pas toujours vraie. Par exemple, pour x réel on pose $f(x)=x^2$ puis $A=\{-1\}$ et $B=\{1\}$. $A\cap B=\varnothing$ et donc $f(A\cap B)=\varnothing$ puis $f(A)=f(B)=\{1\}$ et donc $f(A)\cap f(B)=\{1\}$.
3. Il n'y a aucune inclusion vraie entre $f(E\setminus A)$ et $F\setminus f(A)$. Par exemple, soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\x&\mapsto&x^2\end{array}$ et $A=[-1,2]$. $f(A)=[0,4]$ et donc $C_{\mathbb{R}}(f(A))=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$ mais $f(C_{\mathbb{R}}A)=f(]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[)=]1,+\infty[$ et aucune inclusion entre les deux parties n'est vraie.
4. Soit $x\in E$.

$$x\in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)\Leftrightarrow f(x)\in\bigcap_{i\in I}B_i\Leftrightarrow \forall i\in I,\ f(x)\in B_i\Leftrightarrow \forall i\in I,\ x\in f^{-1}(B_i)\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).}$$

5. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i).}$$

6. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(F \setminus B_i) \Leftrightarrow f(x) \in F \setminus B_i \Leftrightarrow f(x) \notin B_i \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(F \setminus B_i) = E \setminus f^{-1}(B_i).}$$

Correction de l'exercice 50 ▲

1. Il y a l'injection triviale $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{P}(E) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$.
2. Soit f une application quelconque de E dans $\mathscr{P}(E)$. Montrons que f ne peut être surjective. Soit $A = \{x \in E/\ x \notin f(x)\}$. Montrons que A n'a pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde que A a un antécédent a. Dans ce cas, où est a ?

$$a \in A \Rightarrow a \notin f(a) = A,$$

ce qui est absurde et

$$a \notin A \Rightarrow a \in f(a) = A,$$

ce qui est absurde. Finalement, A n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective. On a montré le théorème de CANTOR : pour tout ensemble E (vide, fini ou infini), il n'existe pas de bijection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Correction de l'exercice 56 ▲

Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Deux applications sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f_p(n).$$

En particulier pour $n = p$, $f(p) = f_p(p)$. D'autre part la définition de f nous donne $f(p) = f_p(p) + 1$. Nous obtenons une contradiction car $f(p)$ ne peut prendre deux valeurs distinctes. En conclusion, quelque soit $p \in \mathbb{N}$, $f \neq f_p$.

Correction de l'exercice 57 ▲

1. Montrons en fait la contraposée.
S'il existe i tel que p_i divise $N = p_1p_2\dots p_r + 1$ (i est fixé) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = kp_i$ donc

$$p_i(k - p_1p_2\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_r) = 1$$

soit $p_iq = 1$ (avec $q = k - p_1p_2\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_r$ un nombre entier). Donc $p_i \in \mathbb{Z}$ et $1/p_i = q \in \mathbb{Z}$, alors p_i vaut 1 ou -1. Et donc p_i n'est pas un nombre premier.
Conclusion : par contraposition il est vrai que N n'est divisible par aucun des p_i

2. Raisonnons par l'absurde : s'il n'existe qu'un nombre fini r de nombres premiers $p_1,\dots,p_r$ alors $N = p_1p_2\dots p_r+1$ est un nombre premier car divisible par aucun nombre premier autre que lui même (c'est le 1.).
   Mais N est strictement supérieur à tous les p_i. Conclusion on a construit un nombre premier N différent des p_i, il y a donc au moins $r+1$ nombres premiers, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 59 ▲

Rédigeons la deuxième égalité. Soit $\mathscr{A}_n$, $n\in\mathbb{N}^*$ l'assertion suivante :

$$(\mathscr{A}_n) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

— $\mathscr{A}_0$ est vraie $(1=1)$.
— Étant donné $n\in\mathbb{N}^*$ supposons que $\mathscr{A}_n$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \;+(n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

  Ce qui prouve $\mathscr{A}_{n+1}$.
— Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $\mathscr{A}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Correction de l'exercice 61 ▲

1. Montrons par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$ $x_n>3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathscr{H}_n): \quad x_n>3.$$

   - La proposition $\mathscr{H}_0$ est vraie car $x_0=4>3$.
   - Soit $n\geqslant 0$, supposons $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est alors vraie.

$$x_{n+1}-3 = \frac{2x_n{}^2-3}{x_n+2}-3 = \frac{2x_n{}^2-3x_n-9}{x_n+2}.$$

     Par hypothèse de récurrence $x_n>3$, donc $x_n+2>0$ et $2x_n{}^2-3x_n-9>0$ (ceci par étude de la fonction $x\mapsto 2x^2-3x-9$ pour $x>3$). Donc $x_{n+1}-3$ et $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.
   - Nous avons montré

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$$

     et comme $\mathscr{H}_0$ est vraie alors $\mathscr{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que $x_{n+1}-3-\frac{3}{2}(x_n-3)$ est positif.

$$x_{n+1}-3-\frac{3}{2}(x_n-3) = \frac{2x_n{}^2-3}{x_n+2}-\frac{3}{2}(x_n-3) = \frac{1}{2}\frac{x_n{}^2-3x_n}{x_n+2}$$

   Ce dernier terme est positif car $x_n>3$.

3. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathscr{H}_n) \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

   - La proposition $\mathscr{H}_0$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$, supposons que $\mathscr{H}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vérifiée.
     D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$; en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
   - Nous concluons en résumant la situation :
     $\mathscr{H}_0$ est vraie, et $\mathscr{H}_n \Rightarrow \mathscr{H}_{n+1}$ quelque soit n. Donc $\mathscr{H}_n$ est toujours vraie.

4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.

Correction de l'exercice 62 ▲

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la proposition suivante :

$$\mathscr{H}_n : \quad n \text{ droites en position générale découpent le plan en } R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ régions.}$$

- pour $n = 1$ alors une droite divise le plan en deux régions. $\mathscr{H}_1$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$ et supposons que $\mathscr{H}_{n-1}$ soit vraie, et montrons $\mathscr{H}_n$. Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ n droites en position générale, la droite Δ_n rencontre les droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ en $n-1$ points, donc Δ_n traverse (et découpe en deux) n régions du découpage $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. Le découpage par Δ_n donne donc la relation $R_n = R_{n-1} + n$.
  Or par hypothèse de récurrence $\mathscr{H}_{n-1}$: $R_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ donc

$$R_n = R_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

  Et $\mathscr{H}_n$ est vraie.
  Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathscr{H}_{n-1} \Rightarrow \mathscr{H}_n$.
- Conclusion : par récurrence on a montré que $\mathscr{H}_n$ est vraie quelque soit $n \geqslant 1$.

Correction de l'exercice 63 ▲

1. Montrons la proposition demandée par récurrence : soit $\mathscr{A}_n$ l'assertion $f^{n+1} = f \circ f^n$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathscr{A}_n$ vraie. Alors

$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$

   Nous avons utiliser la definition de f^{n+2}, puis la proposition $\mathscr{A}_n$, puis l'associativité de la composition, puis la définition de f^{n+1}. Donc $\mathscr{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall \in \mathbb{N} \;\; f^n \circ f = f \circ f^n.$$

2. On procède de même par récurrence : soit $\mathscr{A}_n$ l'assertion $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathscr{A}_n$ vraie. Alors

$$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$

   Donc $\mathscr{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall \in \mathbb{N} \;\; (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$

Correction de l'exercice 115 ▲

1. Soient z, z', z'' des complexes quelconques.
   - Reflexivité : $z\mathscr{R}z$ car $|z| = |z|$.
   - Symétrie : $z\mathscr{R}z' \Rightarrow z'\mathscr{R}z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
   - Transitivité : $z\mathscr{R}z'$ et $z'\mathscr{R}z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z\mathscr{R}z''$.

   En fait, nous avons juste retranscrit que l'égalité "$=$" est une relation d'équivalence.
2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathscr{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$:
$$\mathscr{C} = \left\{ |z|e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction de l'exercice 116 ▲

Le raisonnement est faux.
L'erreur est due au manque de quantification. En effet, rien ne prouve que pout tout x un tel y existe. Il peut exister un élément x qui n'est en relation avec personne (même pas avec lui).

Correction de l'exercice 118 ▲

1. — Reflexivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xe^x = xe^x$ donc $x\mathscr{R}x$.
   — Symétrie : Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x\mathscr{R}y$ alors $xe^y = ye^x$ donc $ye^x = xe^y$ donc $y\mathscr{R}x$.
   — Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, alors $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Calculons xye^z :
$$xye^z = x(ye^z) = x(ze^y) = z(xe^y) = z(ye^x) = yze^x.$$
   Donc $xye^z = yze^x$. Si $y \neq 0$ alors en divisant par y on vient de montrer que $xe^z = ze^x$ donc $x\mathscr{R}z$ et c'est fini. Pour le cas $y = 0$ alors $x = 0$ et $z = 0$ donc $x\mathscr{R}z$ également.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\mathscr{C}(x)$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathscr{R}$:
$$\mathscr{C}(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid y\mathscr{R}x\}.$$
   Donc
$$\mathscr{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid xe^y = ye^x\}.$$
   Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \frac{t}{e^t}.$$
   Alors
$$\mathscr{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}.$$
   Autrement dit $\mathscr{C}(x)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ qui par f prennent la même valeur que $f(x)$; en raccourci :
$$\mathscr{C}(x) = f^{-1}(f(x)).$$
   Étudions maintenant la fonction f afin de déterminer le nombre d'antécédents : par un calcul de f' on montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus en $-\infty$ la limite de f est $-\infty$, $f(1) = \frac{1}{e}$, et la limite en $+\infty$ est 0.
   C'est le moment de dessiner le graphe de f ! !
   Pour $x > 0$ alors $f(x) \in]0, \frac{1}{e}]$ et alors $f(x)$ a deux antécédents. Pour $x \leqslant 0$ alors $f(x) \in]-\infty, 0]$ et alors $f(x)$ a un seul antécédent.
   Bilan : si $x > 0$ alors $\operatorname{Card} \mathscr{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 2$, si $x \leqslant 0$ alors $\operatorname{Card} \mathscr{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 1$.

Correction de l'exercice 123 ▲

— Reflexivité : pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$ on a $X \prec X$ car $X = X$.

— Anti-symétrie : pour $X,Y \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \prec Y$ et $Y \prec X$, alors par définition de $\prec$ on a

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x.$$

Comme la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre alors $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ implique $x = y$. Donc

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x = y,$$

ce qui implique que $X = Y$ (dans ce cas en fait X est vide ou un singleton).

— Transitivité : soit $X,Y,Z \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \prec Y$ et $Y \prec Z$. Si $X = Y$ ou $Y = Z$ alors il est clair que $X \prec Z$. Supposons que $X \neq Y$ et $Y \neq Z$ alors

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \qquad \text{et} \qquad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad y \leqslant z.$$

Donc on a

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z,$$

alors par transitivité de la relation $\leqslant$ on obtient :

$$\forall x \in X \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant z.$$

Donc $X \prec Z$.

Correction de l'exercice 137 ▲

Soit A non vide et minorée, et $B = \{\text{minorants de } A\}$.
B n'est pas vide et est majorée par A donc $\beta = \sup(B)$ existe.
Soit $a \in A$: $\forall\, b \in B,\ b \leqslant a$ donc $\beta \leqslant a$.
Par conséquent, β minore A, donc $\beta = \max(B)$.

Correction de l'exercice 138 ▲

1.
2.
3.
4. Si (a,b) majore A, alors $(a,b) \gg (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ donc $(a,b) \gg (0,\sqrt{2})$.
   Réciproque : si $x^2+y^2 \leqslant 1$, alors $(x+y)^2+(x-y)^2 \leqslant 2$, donc $y \pm x \leqslant \sqrt{2}$, et $(x,y) \ll (0,\sqrt{2})$.
   Finalement, $\sup(A) = (0,\sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 148 ▲

Le contraire de $2|n$ n'est pas que n divise strictement 2.

Correction de l'exercice 154 ▲

L'application f est constante sur les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$, donc par définition, elle descend au quotient en une application $[f] : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{U}$, qui vérifie $f = [f] \circ p$. Comme f est surjective, $[f]$ aussi. Montrons l'injectivité.
Soient α et β dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tels que $[f](\alpha) = [f](\beta)$. Si x et y sont des représentants de α et β, on a donc $f(x) = f(y)$, c'est-à-dire $e^{ix} = e^{iy}$, d'où par le cours sur l'exponentielle complexe, $x \equiv y \pmod{2\pi}$, d'où $[x] = [y]$, ou encore $\alpha = \beta$.

Correction de l'exercice 171 ▲

Si $f \circ g = g \circ f$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons $x=0$. Alors $f\circ g(0)=f(-1)=-2$, et $g\circ f(0)=g(1)=0$ donc $f\circ g(0)\neq g\circ f(0)$. Ainsi $f\circ g\neq g\circ f$.

Correction de l'exercice 187 ▲

1. f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent : en effet il n'existe pas de $n\in\mathbb{N}$ tel que $f(n)=0$ (si ce n existait ce serait $n=-1$ qui n'est pas un élément de $\mathbb{N}$). Par contre f est injective : soient $n,n'\in\mathbb{N}$ tels que $f(n)=f(n')$ alors $n+1=n'+1$ donc $n=n'$. Bilan f est injective, non surjective et donc non bijective.
2. Pour montrer que g est bijective deux méthodes sont possibles. Première méthode : montrer que g est à la fois injective et surjective. En effet soient $n,n'\in\mathbb{Z}$ tels que $g(n)=g(n')$ alors $n+1=n'+1$ donc $n=n'$, alors g est injective. Et g est surjective car chaque $m\in\mathbb{Z}$ admet un antécédent par g : en posant $n=m-1\in\mathbb{Z}$ on trouve bien $g(n)=m$. Deuxième méthode : expliciter directement la bijection réciproque. Soit la fonction $g':\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ définie par $g'(m)=m-1$ alors $g'\circ g(n)=n$ (pour tout $n\in\mathbb{Z}$) et $g\circ g'(m)=m$ (pour tout $m\in\mathbb{Z}$). Alors g' est la bijection réciproque de g et donc g est bijective.
3. Montrons que h est injective. Soient $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ tels que $h(x,y)=h(x',y')$. Alors $(x+y,x-y)=(x'+y',x'-y')$ donc
$$\begin{cases} x+y &= x'+y' \\ x-y &= x'-y' \end{cases}$$
En faisant la somme des lignes de ce système on trouve $2x=2x'$ donc $x=x'$ et avec la différence on obtient $y=y'$. Donc les couples (x,y) et (x',y') sont égaux. Donc h est injective.
Montrons que h est surjective. Soit $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$, cherchons lui un antécédent (x,y) par h. Un tel antécédent vérifie $h(x,y)=(X,Y)$, donc $(x+y,x-y)=(X,Y)$ ou encore :
$$\begin{cases} x+y &= X \\ x-y &= Y \end{cases}$$
Encore une fois on faisant la somme des lignes on obtient $x=\frac{X+Y}{2}$ et avec la différence $y=\frac{X-Y}{2}$, donc $(x,y)=(\frac{X+Y}{2},\frac{X-Y}{2})$. La partie "analyse" de notre raisonnement en finie passons à la "synthèse" : il suffit de juste de vérifier que le couple (x,y) que l'on a obtenu est bien solution (on a tout fait pour !). Bilan pour (X,Y) donné, son antécédent par h existe et est $(\frac{X+Y}{2},\frac{X-Y}{2})$. Donc h est surjective.
En fait on pourrait montrer directement que h est bijective en exhibant sa bijection réciproque $(X,Y)\mapsto(\frac{X+Y}{2},\frac{X-Y}{2})$. Mais vous devriez vous convaincre qu'il s'agit là d'une différence de rédaction, mais pas vraiment d'un raisonnement différent.
4. Montrons d'abord que k est injective : soient $x,x'\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ tels que $k(x)=k(x')$ alors $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x'+1}{x'-1}$ donc $(x+1)(x'-1)=(x-1)(x'+1)$. En développant nous obtenons $xx'+x'-x=xx'-x'+x$, soit $2x=2x'$ donc $x=x'$.
Au brouillon essayons de montrer que k est surjective : soit $y\in\mathbb{R}$ et cherchons $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ tel que $f(x)=y$. Si un tel x existe alors il vérifie $\frac{x+1}{x-1}=y$ donc $x+1=y(x-1)$, autrement dit $x(y-1)=y+1$. Si l'on veut exprimer x en fonction de y cela se fait par la formule $x=\frac{y+1}{y-1}$. Mais attention, il y a un piège ! Pour $y=1$ on ne peut pas trouver d'antécédent x (cela revient à diviser par 0 dans la fraction précédente). Donc k n'est pas surjective car $y=1$ n'a pas d'antécédent.
Par contre on vient de montrer que s'il l'on considérait la restriction $k_|:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ qui est définie aussi par $k_|(x)=\frac{x+1}{x-1}$ (seul l'espace d'arrivée change par rapport à k) alors cette fonction $k_|$ est injective et surjective, donc bijective (en fait sa bijection réciproque est elle même).

Correction de l'exercice 188 ▲

1. f n'est pas injective car $f(2)=\frac{4}{5}=f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y=2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x)=2$ devient $2x=2(1+x^2)$ soit $x^2-x+1=0$ qui n'a pas de solutions réelles.

2. $f(x)=y$ est équivalent à l'équation $yx^2-2x+y=0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta=4-4y^2\geqslant 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y\in[-1,1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1,1]$.

3. Soit $y\in[-1,1]\setminus\{0\}$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x)=y$ sont $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x\in[-1,1]$ est $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}\in[-1,1]$. Pour $y=0$, la seule solution de l'équation $g(x)=0$ est $x=0$. Donc pour $g:[-1,1]\longrightarrow[-1,1]$ nous avons trouvé un inverse $h:[-1,1]\longrightarrow[-1,1]$ défini par $h(y)=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ si $y\neq 0$ et $h(0)=0$. Donc g est une bijection.

4. $f'(x)=\frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $]-1,1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1,1]$ avec $f(-1)=-1$ et $f(1)=1$. Donc la restriction de f, appelée $g:[-1,1]\longrightarrow[-1,1]$, est une bijection.

Correction de l'exercice 190 ▲

1. Supposons $g\circ f$ injective, et montrons que f est injective : soient $a,\ a'\in A$ avec $f(a)=f(a')$ donc $g\circ f(a)=g\circ f(a')$ or $g\circ f$ est injective donc $a=a'$. Conclusion on a montré :
$$\forall a,a'\in A\quad f(a)=f(a')\Rightarrow a=a'$$
c'est la définition de f injective.

2. Supposons $g\circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c\in C$ comme $g\circ f$ est surjective il existe $a\in A$ tel que $g\circ f(a)=c$; posons $b=f(a)$, alors $g(b)=c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c\in C$ donc g est surjective.

3. Un sens est simple ($\Leftarrow$) si f et g sont bijectives alors $g\circ f$ l'est également. De même avec $h\circ g$.
Pour l'implication directe ($\Rightarrow$) : si $g\circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après la question 2. g est surjective.
Si $h\circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.
Pour finir $f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction de l'exercice 194 ▲

1. Pour $z=x+iy$, le module de $e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}$ est e^x et son argument est y.
2. Les résultats : $e^{z+z'}=e^ze^{z'}$, $e^{\bar z}=\overline{e^z}$, $e^{-z}=(e^z)^{-1}$, $(e^z)^n=e^{nz}$.
3. La fonction exp n'est pas surjective car $|e^z|=e^x>0$ et donc e^z ne vaut jamais 0. La fonction exp n'est pas non plus injective car pour $z\in\mathbb{C}$, $e^z=e^{z+2i\pi}$.

Correction de l'exercice 195 ▲

1. Soit $(x_1,x_2)\in E^2$.
$$\begin{aligned}f(x_1)=f(x_2)&\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))\ \text{(car } g \text{ est une application)}\\&\Rightarrow x_1=x_2\ \text{(car } g\circ f \text{ est injective)}.\end{aligned}$$
On a montré que $\forall(x_1,x_2)\in E^2,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, et donc f est injective.

2. Soit $y\in H$. Puisque $g\circ f$ est surjective, il existe un élément x dans E tel que $g(f(x))=y$. En posant $z=f(x)\in G$, on a trouvé z dans G tel que $g(z)=y$. On a montré : $\forall y\in H,\ \exists z\in G/\ g(z)=y$, et donc g est surjective.

Correction de l'exercice 196 ▲

1) $\Rightarrow$ **2)** Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a toujours $X \subset f^{-1}(f(X))$. (En effet, pou $x \in E$, $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$). Réciproquement, soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(X)) &\Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists x' \in X / \ f(x) = f(x') \Rightarrow \exists x' \in X / \ x = x' \text{ (puisque } f \text{ est injective)} \\ &\Rightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Finalement, $f^{-1}(f(X)) \subset X$ et donc $f^{-1}(f(X)) = X$. **2)** $\Rightarrow$ **1)** Soit $x \in X$. Par hypothése, $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ ce qui signifie que $f(x)$ a un et un seul antécédent à savoir x. Par suite, tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f et f est injective.
1) $\Rightarrow$ **3)** Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. On a toujours $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ ($X \cap Y \subset X \Rightarrow f(X \cap Y) \subset f(X)$ et de même, $f(X \cap Y) \subset f(Y)$ et finalement, $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$). Réciproquement, soit $y \in F$. $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow \exists (x,x') \in X \times Y / \ y = f(x) = f(x')$. Mais alors, puisque f est injective, $x = x' \in X \cap Y$ puis $y = f(x) \in f(X \cap Y)$. Finalement, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
3) $\Rightarrow$ **4)** Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. $X \cap Y = \varnothing \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y) = f(\varnothing) = \varnothing$.
4) $\Rightarrow$ **5)** Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tel que $Y \subset X$. Puisque $X \setminus Y \subset X$, on a $f(X \setminus Y) \subset f(X)$. Mais, puisque $Y \cap (X \setminus Y) = \varnothing$, par hypothèse $f(X \setminus Y) \cap f(Y) = \varnothing$. Finalement,$f(X \setminus Y) \subset f(X) \setminus f(Y)$. Inversement, si $f(X) \setminus f(Y) = \varnothing$, l'inclusion contraire est immédiate et si $f(X) \setminus f(Y) \neq \varnothing$, un élémént de $f(X) \setminus f(Y)$ est l'image d'un certain élément de X qui ne peut être dans Y et donc est l'image d'un élément de $X \setminus Y$ ce qui montre que $f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$ et finalement que $f(X) \setminus f(Y) = f(X \setminus Y)$.
5) $\Rightarrow$ **1)** Soit $(x_1,x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Posons $X = \{x_1,x_2\}$ et $Y = \{x_2\}$. On a donc $Y \subset X$. Par hypothèse $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$ ce qui fournit $f(\{x_1\}) = f(\{x_1,x_2\}) \setminus f(\{x_2\})$ ou encore, $\{f(x_1)\} = \{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\}$. Maintenant, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $\{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\} = \varnothing$ (et pas $\{f(x_1)\}$). Donc $f(x_1) \neq f(x_2)$. On a montré que f est injective.

Correction de l'exercice 197 ▲

L'inverse de $f_{a,b}$ est $g_{a,b}$ avec $g_{a,b}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Autrement dit $f_{a,b}^{-1} = g_{a,b} = f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$.

Correction de l'exercice 198 ▲

Soit $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ donc $f \circ f(x) = f(x) = x$. Soit $x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1 - x$ donc $f \circ f(x) = f(1-x)$, mais $1 - x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$ (vérifiez-le !) donc $f \circ f(x) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$. Donc pour tout $x \in [0,1]$ on a $f \circ f(x) = x$. Et donc $f \circ f = id$.

Correction de l'exercice 199 ▲

Considérons la restriction suivante de f : $f_| : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$. Montrons que cette nouvelle application $f_|$ est bijective. Ici $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$ donné par l'équation $(|z| = 1)$.

- $f_|$ est surjective car tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme polaire $e^{i\theta}$, et l'on peut choisir $\theta \in [0, 2\pi[$.
- $f_|$ est injective :

$$\begin{aligned} f_|(t) = f_|(t') &\Leftrightarrow e^{it} = e^{it'} \\ &\Leftrightarrow t = t' + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t = t' \text{ car } t, t' \in [0, 2\pi[\text{ et donc } k = 0. \end{aligned}$$

En conclusion $f_|$ est injective et surjective donc bijective.

Correction de l'exercice 201 ▲

- f est injective : soient $x,y \in [1,+\infty[$ tels que $f(x) = f(y)$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ or } x,y \in [1,+\infty[\text{ donc } x,y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

- f est surjective : soit $y \in [0,+\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Correction de l'exercice 206 ▲

1. f est dérivable sur $I =]-\infty,2]$, et pour $x \in]-\infty,2[$, $f'(x) = 2x-4 < 0$. f est donc continue et strictement décroissante sur $]-\infty,2]$. Par suite, f réalise une bijection de $]-\infty,2]$ sur $f(]-\infty,2]) = [f(2), \lim\limits_{-\infty} f[= [-1,+\infty[= J$. On note g l'application de I dans J qui, à x associe $x^2 - 4x + 3 (= f(x))$. g est bijective et admet donc une réciproque. Déterminons g^{-1}. Soit $y \in [-1,+\infty[$ et $x \in]-\infty,2]$.
$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0.$$
Or, $\Delta' = 4 - (3-y) = y + 1 \geqslant 0$. Donc, $x = 2 + \sqrt{y+1}$ ou $x = 2 - \sqrt{y+1}$. Enfin, $x \in]-\infty,2]$ et donc, $x = 2 - \sqrt{y+1}$. En résumé,
$$\forall x \in]-\infty,2],\ \forall y \in [-1,+\infty[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y+1}.$$
On vient de trouver g^{-1} :
$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}.}$$

2. On vérifie facilement que f réalise une bijection de $]-2,+\infty[$ sur $]-\infty,2[$, notée g. Soient alors $x \in]-2,+\infty[$ et $y \in]-\infty,2[$.
$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow x(-y+2) = 2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$
(on a ainsi trouvé au plus une valeur pour x à savoir $x = \frac{2y+1}{-y+2}$, mais il n'est pas nécessaire de vérifier que cette expression est bien définie et élément de $]-2,+\infty[$ car on sait à l'avance que y admet au moins un antécédent dans $]-2,+\infty[$, et c'est donc nécessairement le bon). En résumé,
$$\forall x \in]-2,+\infty[,\ \forall y \in]-\infty,2[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$
On vient de trouver g^{-1} :
$$\boxed{\forall x \in]-\infty,2[,\ g^{-1}(x) = \tfrac{2x+1}{-x+2}}.$$

3. f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$. f est donc bijective de $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ sur $f\left(\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[\right) = \left[f\left(-\frac{3}{2}\right), \lim\limits_{+\infty} f\right[= [-1,+\infty[$. Notons encore f l'application de $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ dans $[-1,+\infty[$ qui à x associe $\sqrt{2x+3} - 1$. Soient alors $x \in [-\frac{3}{2},+\infty[$ et $y \in [-1,+\infty[$.
$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-3 + (y+1)^2) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} + y - 1.$$
En résumé, $\forall x \in \left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$, $\forall y \in [-1,+\infty[$, $y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} + y - 1$. On vient de trouver g^{-1} :
$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = \tfrac{x^2}{2} + x - 1.}$$

4. f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire. Pour $x \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant f(x) = \frac{x}{1+x} < \frac{1+x}{1+x} = 1$. Donc, $f([0,+\infty[) \subset [0,1[$. Par parité, $f(]-\infty,0]) \subset]-1,0]$ et même $f(]-\infty,0[) \subset]-1,0[$ car l'image par f d'un réel strictement négatif est un réel strictement négatif. Finalement, $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$. Vérifions alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Soit $y \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $[0,+\infty[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq 1$, et positif, car $y \in [0,1[$. On a montré que :

$$\forall y \in [0,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1-y}).$$

Soit $y \in]-1,0[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]-\infty,0[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq -1$, et strictement négatif, car $y \in]-1,0[$. On a montré que :

$$\forall y \in]-1,0[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1+y}).$$

Finalement,

$$\forall y \in]-1,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x),$$

ce qui montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. De plus, pour $y \in]-1,1[$ donné, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$ si $y \geqslant 0$ et $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$ si $y < 0$. Dans tous les cas, on a $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.
En notant encore f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ qui à x associe $\frac{x}{1+|x|}$, on a donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}.}$$

Correction de l'exercice 207 ▲

1. Montrons que la restriction de f à D, notée g, est bien une application de D dans P. Soit $z \in D$. On a $|z| < 1$ et en particulier $z \neq i$. Donc, $f(z)$ existe. De plus,

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+i}{z-i} + \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}\right) = \frac{1}{2}\frac{2z\bar{z}-2}{(z-i)(\overline{z-i})} = \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} < 0.$$

Donc, $f(z)$ est élément de P. g est donc une application de D dans P.

2. Montrons que g est injective. Soit $(z,z') \in D^2$.

$$g(z) = g(z') \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{z'+i}{z'-i} \Rightarrow iz' - iz = iz - iz' \Rightarrow 2i(z'-z) = 0 \Rightarrow z = z'.$$

3. Montrons que g est surjective. Soient $z \in D$ et $Z \in P$.

$$g(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = Z \Leftrightarrow z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} \text{ (car } Z \neq 1,$$

(ce qui montre que Z admet au plus un antécédent dans D, à savoir $z = \frac{i(Z+1)}{Z-1}$ (mais on le sait déjà car g est injective). Il reste cependant à vérifier que $\frac{i(Z+1)}{Z-1}$ est effectivement dans D). Réciproquement, puisque $\mathrm{Re}(Z) < 0$,

$$\left|\frac{i(Z+1)}{Z-1}\right| = \frac{|Z+1|}{|Z-1|} < 1$$

(Z étant strictement plus proche de -1 que de 1) et $z \in D$. Finalement g est une bijection de D sur P, et :

$$\boxed{\forall z \in P,\ g^{-1}(z) = \frac{i(z+1)}{z-1}.}$$

Correction de l'exercice 208 ▲

On peut supposer sans perte de généralité que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et que $h \circ f \circ g$ est surjective. D'après l'exercice 195, puisque $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$ est injective, h est injective et puisque $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$ est surjective, h est surjective. Déjà h est bijective. Mais alors, h^{-1} est surjective et donc $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$ est surjective en tant que composée de surjections. Puis h^{-1} est injective et donc $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ est injective. $f \circ g$ est donc bijective. $f \circ g$ est surjective donc f est surjective. $g \circ h \circ f$ est injective donc f est injective. Donc f est bijective. Enfin $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ est bijective en tant que composée de bijections.

Correction de l'exercice 209 ▲

f est bien une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ car, pour tout couple (x,y) d'entiers naturels, l'un des deux entiers $x+y$ ou $x+y+1$ est pair et donc, $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ est bien un entier naturel (on peut aussi constater que $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = 1+2+\ldots+(x+y)$ est entier pour $x+y \geqslant 1$).

Remarque. La numérotation de $\mathbb{N}^2$ a été effectuée de la façon suivante :

	0	1	2	3	...	x	...
0	0	1	3	6			
1	2	4	7				
2	5	8					
3	9						
⋮							
y							
⋮							

Sur une parallèle à la droite d'équation $y = -x$, la somme $x+y$ est constante. Il en est de même de l'expression $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ et quand on descend de 1 en y, on avance de 1 dans la numérotation.

Lemme. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! p \in \mathbb{N} /\ \frac{p(p+1)}{2} \leqslant n < \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on pourrait se contenter de constater que la suite des nombres triangulaires $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)_{p \geqslant 0}$ est strictement croissante. Néanmoins, on va fournir explicitement p en fonction de n. Soient n et p deux entiers naturels.

$$\begin{aligned}
\frac{p(p+1)}{2} \leqslant n < \frac{(p+1)(p+2)}{2} &\Leftrightarrow p^2+p-2n \leqslant 0 \text{ et } p^2+3p+2-2n > 0 \\
&\Leftrightarrow p \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \text{ et } p > \frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2} = -1 + \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \\
&\Leftrightarrow p \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} < p+1 \Leftrightarrow p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

Montrons que f est surjective (et au passage, déterminons l'antécédent d'un entier n donné). Soient n un entier naturel et $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ (p est un entier naturel). On pose $\left\{\begin{array}{l} x+y=p \\ y = n - \frac{p(p+1)}{2} \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} y = n - \frac{p(p+1)}{2} \\ x = p - y = \frac{p(p+3)}{2} - n \end{array}\right.$.

Tout d'abord, $y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n - \frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} = n$. Mais il reste encore à vérifier que x et y ainsi définis (qui sont à l'évidence des entiers relatifs) sont bien des entiers naturels. Puisque $\frac{p(p+1)}{2}$ est un entier naturel et que $n \geqslant \frac{p(p+1)}{2}$, y est bien un entier naturel. Ensuite, $\frac{p(p+3)}{2} = \frac{p(p+1)}{2} + p$ est aussi un entier naturel et de plus,

$$\frac{p(p+3)}{2} - n \geqslant \frac{p(p+3)}{2} - \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1\right) = 0,$$

et x est bien un entier naturel. Ainsi, pour n naturel donné, en posant $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ puis $x = \frac{p(p+3)}{2} - n$ et $y = n - \frac{p(p+1)}{2}$, x et y sont des entiers naturels tels que $f((x,y)) = n$. f est donc surjective. Montrons que f est injective. Pour cela, on montre que si x et y sont des entiers naturels vérifiant $y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n$, alors nécessairement, $x + y = p$ (et $y = n - \frac{p(p+1)}{2}$). Soient donc x et y deux entiers naturels. On a :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \leqslant \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y = n < \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + (x+y+1) = \frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2},$$

et le lemme montre que $x + y = p$. L'unicité du couple (x,y) est donc démontrée. f est une application injective et surjective et donc f est bijective. Sa réciproque est f^{-1} : $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^2 \\ n & \mapsto & (\frac{p(p+3)}{2} - n, n - \frac{p(p+1)}{2}) \end{array}$ où $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 211 ▲

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (1+x)^n$. Par la formule du binôme de Newton nous savons que

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

1. En calculant $f(1)$ nous avons $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.
2. En calculant $f(-1)$ nous avons $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.
3. Maintenant calculons $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^{k-1}$. Évaluons $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k$.
4. Il s'agit ici de calculer la primitive F de f qui correspond à la somme : $F(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}$. En $F(1) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

Correction de l'exercice 213 ▲

L'astuce consiste à écrire $2 = 3 - 1$ (!)

$$2^n = (3-1)^n = 3 \times p + (-1)^n$$

Où $3 \times p$ ($p \in \mathbb{Z}$) représente les n premiers termes de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$ et $(-1)^n$ est le dernier terme. Donc $2^n - (-1)^n = 3p$. Si n est impair l'égalité s'écrit $2^n + 1 = 3p$ et donc $2^n + 1$ est divisible par 3. Si n est pair $2^n - 1 = 3p$ donc $2^n + 1 = 3p + 2$ qui n'est pas divisible par 3.
Pour l'autre assertion regarder $3 = 7 - 4$.

Correction de l'exercice 219 ▲

Il s'agit de comparer les deux écritures de la fonction

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Pour $x = 1$ et $x = -1$ nous obtenons respectivement les assertions (a) et (b). En dérivant la fonction f et en calculant $f'(1)$, nous obtenons (b). Pour (d) il faut dériver une nouvelle fois.

Correction de l'exercice 220 ▲

$A = (1+i)^n$ a pour module $2^{n/2}$ et pour argument $n\frac{\pi}{4}$ (et B est son conjugué). On en tire grâce à la formule du binôme, et en séparant partie réelle et partie imaginaire : $S_1 = 2^{n/2}\cos n\frac{\pi}{4}$ et et $S_2 = 2^{n/2}\sin n\frac{\pi}{4}$. On a aussi $S_1 = \frac{A+B}{2}$ et $S_2 = \frac{B-A}{2}i$.

Correction de l'exercice 221 ▲

L'application Φ est une bijection : son inverse est Φ elle-même.
Supposons que E soit un ensemble fini. Notre bijection Φ envoie un ensemble $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}(E)$ sur un ensemble de même cardinal.
Choisissons E un ensemble à n éléments, et soit $p \leqslant n$. Soit $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}(E)$:

$$\mathscr{Q} = \{F \subset E,\ \mathrm{Card}F = p\}.$$

Nous savons que $\mathrm{Card}\mathscr{Q} = C_n^p$ (c'est la définition de C_n^p). De plus

$$\begin{aligned}\Phi(\mathscr{Q}) &= \{\Phi(F),\ F \subset E,\ \mathrm{Card}F = p\} \\ &= \left\{\complement F,\ F \subset E,\ \mathrm{Card}F = p\right\} \\ &= \{G \subset E,\ \mathrm{Card}G = n-p\}.\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Card}\Phi(\mathscr{Q}) = C_n^{n-p}$. Et comme Φ est une bijection, $\mathrm{Card}\Phi(\mathscr{Q}) = \mathrm{Card}(\mathscr{Q})$, donc $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Correction de l'exercice 226 ▲

$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$, $\qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Correction de l'exercice 227 ▲

1.
2. 0 si $p < n$, $(-1)^n$ si $p = n$.
3.

Correction de l'exercice 228 ▲

$(-1)^p C_{n-1}^p$.

Correction de l'exercice 229 ▲

$n2^{n-1}$, $n4^{n-1}$, $3n4^{n-1}$.

Correction de l'exercice 230 ▲

$\frac{n(n^2-1)}{6}$, $\frac{n(n^2-1)(3n^2-12)}{360}$.

Correction de l'exercice 231 ▲

1. $\Gamma_n^0 = 1$, $\Gamma_n^1 = n$, $\Gamma_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\Gamma_2^n = n+1$.
2.
3.

Correction de l'exercice 233 ▲

$p = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Correction de l'exercice 238 ▲

1. D'après la formule du binôme de NEWTON,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Posons $S_1 = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$. Alors

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0 \text{ (car } n \geqslant 1),$$

et donc $S_1 = S_2$. Puis $S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, et donc $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.}$$

3. En posant $j = e^{2i\pi/3}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = (1+j)^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k} = (1+j^2)^n.$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n.$$

Maintenant,
- si $k \in 3\mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^3)^p + (j^3)^{2p} = 3$ car $j^3 = 1$.
- si $k \in 3\mathbb{N}+1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p+1$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j(j^3)^p + j^2(j^3)^{2p} = 1 + j + j^2 = 0$
- si $k \in 3\mathbb{N}+2$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p+2$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^2(j^3)^p + j^4(j^3)^{2p} = 1 + j^2 + j = 0$.

Finalement, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 3 \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} &= \frac{1}{3}(2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 2\,\mathrm{Re}((1+j)^n)) \\ &= \frac{1}{3}(2^n + 2\,\mathrm{Re}((-j^2)^n)) = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3})\end{aligned}$$

4. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = k\binom{n-1}{k-1}.$$

5. $\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k)(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ ou encore $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

6. **1ère solution.** Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$.
Pour x réel,

$$P(x) = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour $x=1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2ème solution. D'après 4),

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$. On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n,$$

et donc, pour x réel,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t)\,dt = \int_0^1 (1+t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}((1+x)^{n+1}-1).$$

En particulier, pour $x=1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

2ème solution. D'après 4), $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}((1+1)^{n+1}-1) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

7. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-p$, $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (ce qui reste vrai pour $k=p$ en tenant compte de $\binom{p}{p+1} = 0$). Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-p}\binom{p+k}{p} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-p}\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n-p+1}\binom{p+k}{p+1} - \sum_{k=1}^{n-p}\binom{p+k}{p+1}\\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 = \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Interprétation dans le triangle de Pascal. Quand on descend dans le triangle de Pascal, le long de la colonne p, du coefficient $\binom{p}{p}$ (ligne p) au coefficient $\binom{p}{n}$ (ligne n), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve $\binom{n+1}{p+1}$ qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

8. (a) Pour n naturel donné, posons $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$. Une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 ((1-x^2)^n - (1-x^2)^{n+1})\,dx = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,dx = \int_0^1 x.x(1-x^2)^{n+1}\,dx\\ &= \left[-x\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 (1-x^2)^{n+1}\,dx = \frac{1}{2(n+1)}I_{n+1}\end{aligned}$$

et donc $2(n+1)(I_n - I_{n+1}) = I_{n+1}$ ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n.$$

On a déjà $I_0 = 1$. Puis, pour $n \geqslant 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_0 = \frac{(2n)(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1}.$$

(b) Pour n naturel non nul donné :

$$1-\frac{\binom{n}{1}}{3}+\frac{\binom{n}{2}}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{2n+1}=\int_0^1(1-\binom{n}{1}x^2+\binom{n}{2}x^4+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n})\,dx$$
$$=\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=I_n=\frac{(2n)(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1}.$$

Correction de l'exercice 239 ▲

La formule du binôme de NEWTON fournit

$$(a-b+2c)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^k(2c)^{9-k}=(a-b)^9+\ldots+\binom{9}{6}(a-b)^6(2c)^3+\ldots+(2c)^9.$$

Ensuite,

$$(a-b)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}a^k(-b)^{6-k}=a^6-\ldots+\binom{6}{4}a^4b^2-..+b^6.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6}\binom{6}{4}2^3=\frac{9.8.7}{3.2}\frac{6.5}{2}.2^3=3.4.7.3.5.8=10080.$$

Correction de l'exercice 240 ▲

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

et

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc.$$

Correction de l'exercice 241 ▲

Soit n un entier naturel non nul. Le terme général du développement de $(a+b)^n$ est $u_k=\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$, $0\leqslant k\leqslant n$. Pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{\binom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k-1}}{\binom{n}{k}a^kb^{n-k}}=\frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}>1\Leftrightarrow\frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow(n-k)a>(k+1)b\Leftrightarrow k<\frac{na-b}{a+b}.$$

1er cas. Si $\frac{na-b}{a+b}>n-1$ (ce qui équivaut à $n<\frac{a}{b}$), alors la suite $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est strictement croissante et le plus grand terme est le dernier : a^n.

2ème cas. Si $\frac{na-b}{a+b}\leqslant 0$ (ce qui équivaut à $n\leqslant\frac{b}{a}$), alors la suite $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est strictement décroissante et le plus grand terme est le premier : b^n.

3ème cas. Si $0<\frac{na-b}{a+b}\leqslant n-1$. Dans ce cas, la suite est strictement croissante puis éventuellement momentanément constante, suivant que $\frac{na-b}{a+b}$ soit un entier ou non, puis strictement décroissante (on dit que la suite u est unimodale).

Si $\frac{na-b}{a+b}\notin\mathbb{N}$, on pose $k=E(\frac{na-b}{a+b})+1$, la suite u croit strictement jusqu'à ce rang puis redécroit strictement. Le plus grand des termes est celui d'indice k, atteint une et une seule fois.

Si $\frac{na-b}{a+b}\in\mathbb{N}$, le plus grand des termes est atteint deux fois à l'indice k et à l'indice $k+1$.

Correction de l'exercice 242 ▲

Pour $n \geqslant 3$,

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{2}=5n \Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n$$
$$\Leftrightarrow n(-24+3(n-1)+(n-1)(n-2))=0 \Leftrightarrow n^2-25=0$$
$$\Leftrightarrow n=5.$$

Correction de l'exercice 243 ▲

$(1+a)^n=(1+a)\dots(1+a)=1+na+\dots \geqslant 1+na.$

Correction de l'exercice 244 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$(2+\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^k 2^{n-k}=\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}\sqrt{3}^{2k}2^{n-2k}+\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}\sqrt{3}^{2k+1}2^{n-2k-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k 2^{n-2k}+\sqrt{3}\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k 2^{n-2k-1}.$$

Ainsi, en posant $a_n=\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k2^{n-2k}$ et $b_n=\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k2^{n-2k-1}$, a_n et b_n sont des **entiers** tels que $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$. En remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$, on a aussi $(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$. Mais alors,

$$a_n^2-3b_n^2=(a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=(4-3)^n=1.$$

2. On note que $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=(a_n+b_n\sqrt{3})+(a_n-b_n\sqrt{3})=2a_n$. Mais,

$$0<(2-\sqrt{3})^n<1.$$

Par suite,

$$(2+\sqrt{3})^n<(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2a_n<(2+\sqrt{3})^n+1,$$

ou encore

$$2a_n-1<(2+\sqrt{3})^n<2a_n.$$

On en déduit que $E((2+\sqrt{3})^n)=2a_n-1$ et donc que$E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair.

Correction de l'exercice 245 ▲

1. Soit E un ensemble à n éléments, $n \geqslant 1$, et a un élément fixé de E. Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} A\setminus\{a\} \text{ si } a\in A \\ A\cup\{a\} \text{ si } a\notin A\end{array}\right.\end{array}$.

Montrons que f est involutive (et donc bijective). Soit A un élément de $\mathscr{P}(E)$.
Si $a \notin A$, $f(A)=A\cup\{a\}$ et donc, puisque $a\in A\cup\{a\}$, $f(f(A))=(A\cup\{a\})\setminus\{a\}=A$.

Si $a \in A$, $f(A) = A \setminus \{a\}$ et $f(f(A)) = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} = A$.

Ainsi, $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f \circ f(A) = A$ ou encore, $f \circ f = Id_{\mathscr{P}(E)}$.

Maintenant clairement, en notant $\mathscr{P}_p(E)$ (resp. $\mathscr{P}_i(E)$) l'ensemble des parties de E de cardinal pair (resp. impair), $f(\mathscr{P}_p(E)) \subset \mathscr{P}_i(E)$ et $f(\mathscr{P}_i(E)) \subset \mathscr{P}_p(E)$. Donc, puisque f est bijective

$$\mathrm{card}(\mathscr{P}_p(E)) = \mathrm{card}(f(P_p(E)) \leqslant \mathrm{card}\mathscr{P}_i(E)$$

et de même $\mathrm{card}(\mathscr{P}_i(E)) \leqslant \mathrm{card}\mathscr{P}_p(E)$. Finalement, $\mathrm{card}(\mathscr{P}_i(E)) = \mathrm{card}\mathscr{P}_p(E)$.

2. Soient $E = \{a_1, ..., a_n\}$ un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E. Soit $k \in \{1, ..., n-1\}$.

   Il y a C_{n-1}^{k-1} parties à k éléments qui contiennent a. Donc, $nC_{n-1}^{k-1} (= C_{n-1}^{k-1} + ... + C_{n-1}^{k-1})$ est donc la somme du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_1 et du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_2 ... et du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_n.

   Dans cette dernière somme, chaque partie à k éléments de E a été comptée plusieurs fois et toutes les parties à k éléments (en nombre égal à C_n^k) ont été comptés un même nombre de fois. Combien de fois a été comptée $\{a_1, a_2 ... a_k\}$? Cette partie a été comptée une fois en tant que partie contenant a_1, une fois en tant que partie contenant a_2... et une fois comme partie contenant a_k et donc a été comptée k fois.

   Conclusion : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

3. Soit $E = \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n\}$ un ensemble à $2n$ éléments. Il y a C_{2n}^n parties à n éléments de E. Une telle partie a k éléments dans $\{a_1, ..., a_n\}$ et $n-k$ dans $\{b_1, ..., b_n\}$ pour un certain k de $\{0, ..., n\}$. Il y a C_n^k choix possibles de k éléments dans $\{a_1, ..., a_n\}$ et C_n^{n-k} choix possibles de $n-k$ éléments dans $\{b_1, ..., b_n\}$ pour k donné dans $\{0, ..., n\}$ et quand k varie de 0 à n, on obtient :

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2.$$

Correction de l'exercice 246 ▲

Clairement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n,0} = 1$ (unique solution : $0+0+...+0=0$) et $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{1,k} = 1$ (unique solution : $k=k$).
Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$ fixés. $a_{n+1,k}$ est le nombre de solutions en nombre entiers positifs x_i de l'équation $x_1 + ... + x_n + x_{n+1} = k$. Il y a $a_{n,k}$ solutions telles que $x_{n+1} = 0$ puis $a_{n,k-1}$ solutions telles que $x_{n+1} = 1$ ... puis $a_{n,0}$ solutions telles que $x_{n+1} = k$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k-1} + ... + a_{n,0}$ (et on rappelle $a_{n,0} = a_{1,k} = 1$).
Montrons alors par récurrence sur n, entier naturel non nul, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} = C_{n+k-1}^k$.
Pour $n = 1$, on a pour tout naturel k, $a_{1,k} = 1 = C_{1+k-1}^k$.
Soit $n \geqslant 1$, supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} = C_{n+k-1}^k$. Soit $k \geqslant 1$.

$$a_{n+1,k} = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} = \sum_{i=0}^{k} C_{n+i-1}^i = 1 + \sum_{i=1}^{k} (C_{n+i}^{i+1} - C_{n+i}^i) = 1 + C_{n+k}^{k+1} - 1 = C_{n+k}^{k+1},$$

ce qui reste clair pour $k = 0$.
On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} = C_{n+k-1}^k$.

Correction de l'exercice 248 ▲

Tout d'abord si deux ensembles finis A et B sont disjoints alors $\mathrm{Card}\, A \cup B = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B$.
Si maintenant A et B sont deux ensembles finis quelconques : nous décomposons $A \cup B$ en trois ensembles :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Ces trois ensembles sont disjoints deux à deux donc : $\mathrm{Card}\, A \cup B = \mathrm{Card}\, A \setminus (A \cap B) + \mathrm{Card}\, B \setminus (A \cap B) + \mathrm{Card}\, A \cap B$.
Mais pour $R \subset S$ nous avons $\mathrm{Card}\, S \setminus R = \mathrm{Card}\, S - \mathrm{Card}\, R$.
Donc $\mathrm{Card}\, A \cup B = \mathrm{Card}\, A - \mathrm{Card}\, A \cap B + \mathrm{Card}\, B - \mathrm{Card}\, A \cap B + \mathrm{Card}\, A \cap B$.
Donc $\mathrm{Card}\, A \cup B = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - \mathrm{Card}\, A \cap B$.

Appliquons ceci à $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$:

$$\operatorname{Card} A\Delta B = \operatorname{Card} A\cup B - \operatorname{Card} A\cap B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card} A\cap B.$$

Correction de l'exercice 249 ▲

Fixons un élément de A ; dans $E\setminus A$ (de cardinal $n-p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^{k} ensembles à k éléments ($k=0,1,\dots,n$). Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^{k} = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$

Correction de l'exercice 251 ▲

1. Il s'agit donc de choisir 5 cartes parmi 52 : il y a donc C_{52}^5 mains différentes. Ceci peut être calculé : $C_{52}^5 = \frac{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48}{5!} = 2598960$.
2. Il y a 4 choix pour l'as (l'as de pique ou l'as de cœur ou ...), puis il faut choisir les 4 cartes restantes parmi 48 cartes (on ne peut pas rechoisir un as). Bilan $4\times C_{48}^4$ mains comprenant exactement un as.
3. Il est beaucoup plus facile de compter d'abord les mains qui ne contiennent aucun valet : il faut choisir 5 cartes parmi 48 (on exclut les valets) ; il y a donc C_{48}^5 mains ne contenant aucun valet. Les autres mains sont les mains qui contiennent au moins un valet : il y en a donc $C_{52}^5 - C_{48}^5$.
4. Nous allons d'abord compter le nombre de mains que ne contiennent pas de roi ou pas de dame. Le nombre de mains qui ne contiennent pas de roi est C_{48}^5 (comme la question 3.). Le nombre de mains qui ne contiennent pas de dame est aussi C_{48}^5. Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame *n'est pas* $C_{48}^5 + C_{48}^5$, car on aurait compté deux fois les mains ne contenant ni roi, ni dame (il y a C_{44}^5 telles mains). Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame est donc : $2C_{48}^5 - C_{44}^5$ (on retire une fois les mains comptées deux fois !). Ce que nous cherchons ce sont toutes les autres mains : celles qui contiennent au moins un roi et au moins une dame. Leur nombre est donc : $C_{52}^5 - 2C_{48}^5 + C_{44}^5$.

Correction de l'exercice 255 ▲

1. $(6!)^2$
2. $4!\times 8!$
3. $2!2!4!4!$
4. $6^6\times 12^6$, $4^4\times 12^8$, $2^2\times 4^2\times 6^4\times 12^4$.

Correction de l'exercice 256 ▲

1. $(2n)!$.
2. $2(n!)^2$.
3. $2^{n+1}\times n!$.
4. $4\times n!$.

Correction de l'exercice 257 ▲

1. n^{n^2}.
2. $n^{n(n+1)/2}$.
3. $n \times n^{(n-1)^2}$.
4. $n \times n^{n(n-1)/2}$.

Correction de l'exercice 258 ▲

1.
2.
3. (a) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^p$.
   (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!}$.

Correction de l'exercice 259 ▲

1.
2. Récurrence. Égalité pour $n \leqslant 2$ ou les A_i 3 à 3 disjoints.

Correction de l'exercice 260 ▲

3^n.

Correction de l'exercice 261 ▲

1. Comme $\{x_1-1,\dots,x_p-p\}$ est une partie quelconque de $\{0,\dots,n-p\}$, on a $N = C_{n-p+1}^{p}$.
2. (a)
   (b) 32951280099.

Correction de l'exercice 262 ▲

1. $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k R_k$ avec $R_0 = 1$.
2. 1,1,2,5,15,52,203.

Correction de l'exercice 266 ▲

1. 1,2,5.
2. $t_n = \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{n-k}$.

Correction de l'exercice 267 ▲

Il y a C_{pq}^q choix possibles d'une première classe. Cette première classe étant choisie, il y a $C_{pq-q}^q = C_{(p-1)q}^q$ choix possibles de la deuxième classe... et C_q^q choix possibles de la p-ième classe. Au total, il y a $C_{pq}^q C_{(p-1)q}^q ... C_q^q$ choix possibles d'une première classe, puis d'une deuxième ...puis d'une p-ième.
Maintenant dans le nombre $C_{pq}^q C_{(p-1)q}^q ... C_q^q$, on a compté plusieurs fois chaque partition, chacune ayant été compté un nombre égal de fois.
On a compté chaque partition autant de fois qu'il y a de permutations des p classes à savoir $p!$. Le nombre cherché est donc :

$$\frac{1}{p!} C_{pq}^q C_{(p-1)q}^q ... C_q^q = \frac{1}{p!} \frac{(pq)!}{q!((p-1)q)!} \frac{((p-1)q)!}{q!((p-2)q)!} \cdots \frac{(2q)!}{q!q!} \frac{q!}{q!0!} = \frac{(pq)!}{p!(q!)^p}.$$

Correction de l'exercice 268 ▲

On place le 0 soit au chiffre des unités, soit au chiffre des dizaines, soit au chiffre des centaines, soit au chiffre des milliers (mais pas au chiffre des dizaines de milliers) et le 0 étant placé, on n'y a plus droit.
Réponse : $4.9.9.9.9 = 4.9^4 = 4.(80+1)^2 = 4.6561 = 26244$.

Correction de l'exercice 269 ▲

On pose $H =$ "vers le haut" et $D =$ "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0,0)$ à (p,q) est le mot $DD...DHH...H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.
Le nombre de choix de l'emplacement du H est C_{p+q}^{q}. Une fois que les lettres H sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres D. Il y a donc C_{p+q}^{q} chemins possibles.
Remarque : si on place d'abord les lettres D alors on a C_{p+q}^{p} choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car $C_{p+q}^{p} = C_{p+q}^{(p+q)-p} = C_{p+q}^{q}$.

Correction de l'exercice 270 ▲

On note respectivement x, y et z le nombre de pièces de 10, 20 et 50 centimes. Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation $10x+20y+50z = 10000$ ou encore $x+2y+5z = 1000$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. $x+2y = k \Leftrightarrow x = k-2y$ et le nombre de solutions de cette équation est :

$$\sum_{k=0}^{E(k/2)} 1 = E(\frac{k}{2})+1.$$

Pour $0 \leqslant z \leqslant 200$ donné, le nombre de solutions de l'équation $x+2y = 1000-5z$ est donc $E(\frac{1000-5z}{2})+1$. Le nombre de solutions en nombres entiers de l'équation $x+2y+5z = 1000$ est donc

$$\sum_{z=0}^{200}(E(\frac{1000-5z}{2})+1) = \sum_{z=0}^{200}(E(\frac{-5z}{2})+501) = 201.501 + \sum_{z=0}^{200} E(\frac{-5z}{2}) = 100701 + \sum_{z=0}^{200} E(\frac{-5z}{2}).$$

Maintenant

$$\sum_{z=0}^{200} E(\frac{-5z}{2}) = \sum_{k=1}^{100}(E(\frac{-5(2k-1)}{2})+E(\frac{-5(2k)}{2})) = \sum_{k=1}^{100}(E(-5k+\frac{5}{2})-5k) = \sum_{k=1}^{100}(-10k+2) = 200-10\frac{100.101}{2}.$$

Le nombre de solutions cherchés est donc $100701-50300 = 50401$. Il y a 50401 façons de payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes.

Correction de l'exercice 271 ▲

1.

$$\begin{aligned}\chi_{A_1\cup...\cup A_n} &= 1-\chi_{\overline{A_1\cup...\cup A_n}} = 1-\chi_{\overline{A_1}\cap...\cap\overline{A_n}} = 1-\chi_{\overline{A_1}}\times...\times\chi_{\overline{A_n}}\\ &= 1-(1-\chi_{A_1})...(1-\chi_{A_n}) = 1-(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n}\chi_{A_{i_1}}...\chi_{A_{i_k}}))\end{aligned}$$

   et en sommant sur l'ensemble des x de E, on obtient le résultat.

2. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, posons $A_k = \{\sigma \in S_n /\ \sigma(k) = k\}$. L'ensemble des permutations ayant au moins un point fixe est $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. L'ensemble des permutations sans points fixes est le complémentaire dans S_n de $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.
   D'après 1), leur nombre est donc :

$$\begin{aligned}\text{card}(S_n)-\text{card}(A_1\cup A_2\ldots\cup A_n) &= \text{card}(S_n)-\sum_{i=1}^{n}\text{card}(A_i)+\sum_{i<j}\text{card}(A_i\cap A_j)\\ &\quad -\ldots+(-1)^k\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k}\text{card}(A_{i_1}\cap\ldots A_{i_k})+\ldots\\ &\quad +(-1)^n\text{card}(A_1\cap\ldots\cap A_n).\end{aligned}$$

A_i est l'ensemble des permutations qui fixent i. Il y en a $(n-1)!$ (nombre de permutations de $\{1,...,n\}\setminus\{i\}$). $A_i\cap A_j$ est l'ensemble des permutations qui fixent i et j. Il y en a $(n-2)!$. Plus généralement, $\text{card}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})=(n-k)!$.
D'autre part, il y a $n=C_n^1$ entiers i dans $\{1,n\}$ puis C_n^2 couples (i,j) tels que $i<j$ et plus généralement, il y a C_n^k k-uplets $(i_1,...,i_k)$ tels que $i_1<i_2<...<i_k$. Le nombre de dérangements est

$$n!+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)!=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ainsi le « problème des chapeaux »admet pour réponse

$$p_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Montrons que cette suite tend très rapidement vers $\frac{1}{e}=0,36...$ quand n tend vers l'infini.
(On adapte un calcul déjà mené pour le nombre e.)
Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $e^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt$.
Pour $n=0$, $(-1)^{n+1}\int_O^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt=-\int_0^1 e^{-t}\,dt=-1+e^{-1}$ et donc, on a bien $e^{-1}=1-\int_0^1 e^{-t}\,dt$.
Soit $n\geqslant 0$. Supposons que $e^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt$.
Une intégration par parties fournit

$$\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt=\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\right]_0^1-\int_0^1\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\,dt=\frac{1}{(n+1)!}-\int_0^1\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\,dt.$$

Mais alors,

$$e^{-1}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^{n+2}\int_0^1\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\,dt.$$

Le résultat est démontré par récurrence.
On en déduit que

$$|p_n-\frac{1}{e}|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt\right|=\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt\leqslant\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Ceci montre que p_n tend très rapidement vers $\frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 272 ▲

Soit n un naturel non nul. Dire que f est une surjection de $\{1,...,n+1\}$ sur $\{1,...,n\}$ équivaut à dire que deux des entiers de $\{1,...,n+1\}$ ont même image k par f et que les autres ont des images deux à deux distinctes et distinctes de k. On choisit ces deux entiers : C_{n+1}^2 choix et leur image commune : n images possibles ce qui fournit nC_{n+1}^2 choix d'une paire de $\{1,...,n+1\}$ et de leur image commune. Puis il y a $(n-1)!$ choix des images des $n-1$ éléments restants. Au total, il y a $n!\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n.(n+1)!}{2}$ surjections de $\{1,...,n+1\}$ sur $\{1,...,n\}$.

Correction de **l'exercice 273 ▲**

Soit $n \geqslant 5$. De chaque sommet part $n-1$ droites (vers les $n-1$ autres sommets) dont 2 sont des cotés et $n-3$ des diagonales. Comme chaque diagonale passe par 2 sommets , il y a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.
Ces diagonales se recoupent en $C^2_{n(n-3)/2}$ points distincts ou confondus. Dans ce décompte, chaque sommet a été compté autant de fois que l'on a choisi une paire de deux diagonales passant par ce sommet à savoir C^2_{n-3}.
Maintenant, il y a n sommets.
Réponse :

$$\begin{aligned}C^2_{n(n-3)/2} - nC^2_{n-3} &= \frac{1}{2}\frac{n(n-3)}{2}\left(\frac{n(n-3)}{2} - 1\right) - n\frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{n(n-3)}{8}(n(n-3) - 2 - 4(n-4))\\ &= \frac{n(n-3)}{8}(n^2 - 7n + 14)\end{aligned}$$

Les diagonales se recoupent en $\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ points distincts ou confondus et distincts des sommets (ou encore en $\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ points au maximum).

Correction de **l'exercice 274 ▲**

1. On a bien sûr $P(1) = 2$. Soit $n \geqslant 1$. On trace n droites vérifiant les conditions de l'énoncé. Elles partagent le plan en $P(n)$ régions. On trace ensuite D_{n+1}, une $(n+1)$ème droite. Par hypothèse, elle coupe chacune des n premières droites en n points deux à deux distincts. Ces n points définissent $(n+1)$ intervalles sur la droite D_{n+1}. Chacun de ces $(n+1)$ intervalles partage une des $P(n)$ régions déjà existantes en deux régions et rajoute donc une nouvelle région. Ainsi, $P(n+1) = P(n) + (n+1)$.
   Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}P(n) &= P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(P(k+1) - P(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n^2+n+2}{2}\end{aligned}$$

   ce qui reste vrai pour $n = 1$.

2. On a bien sûr $Q(1) = 2$.Soit $n \geqslant 1$. On trace n plans vérifiant les conditions de l'énoncé. Ils partagent l'espace en $Q(n)$ régions. On trace ensuite P_{n+1}, un $(n+1)$ème plan. Par hypothèse, il recoupe chacun des n premiers plans en n droites vérifiant les conditions du 1). Ces n droites délimitent $P(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ régions sur le plan P_{n+1}. Chacune de ces régions partage une des $Q(n)$ régions déjà existantes en deux régions et rajoute donc une nouvelle région. Ainsi, $Q(n+1) = Q(n) + P(n) = Q(n) + \frac{n^2+n+2}{2}$.
   Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}Q(n) &= P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(Q(k+1) - Q(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2+k+2}{2}) = 2 + (n-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k\\ &= (n+1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^3+5n+6}{6}\end{aligned}$$

Correction de **l'exercice 275 ▲**

Soient n et k des entiers naturels tels que $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
Soit E un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E.
Il y a P^k_n partitions de E en k classes. Parmi ces partitions, il y a celles dans lesquelles a est dans un singleton. Elles s'identifient aux partitions en $k-1$ classes de $E \setminus \{a\}$ et sont au nombre de P^{k-1}_{n-1}. Il y a ensuite les

partitions dans lesquelles a est élément d'une partie de cardinal au moins 2. Une telle partition est obtenue en partitionnant $E \setminus \{a\}$ en k classes puis en adjoignant à l'une de ces k classes au choix l'élément a. Il y a $kP_{n-1}k$ telles partitions. Au total, $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$.
Valeurs de P_n^k pour $1 \leqslant k, n \leqslant 5$.

n / k	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

Exprimons maintenant en fonction des P_n^k, le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.
Si $p > n$, il n'y a pas de surjections de E_n dans E_p (où E_n et E_p désignent des ensembles à n et p éléments respectivement).
On suppose dorénavant $p \leqslant n$. La donnée d'une surjection f de E_n sur E_p équivaut à la donnée d'une partition de l'ensemble E_n en p classes (chaque élément d'une même classe ayant même image par f) puis d'une bijection de l'ensemble des parties de la partition vers E_p.
Au total, il y a donc $p!P_n^k$ surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

Correction de l'exercice 288 ▲

1. $a = 33$, $b = -200$.
2.

Correction de l'exercice 291 ▲

1. Récurrence sur n.
2. Si $a > n$, alors $a = b + 1$ avec $b \geqslant n$, donc $f(b) \geqslant n$, donc $f(f(b)) \geqslant f(a)$. Contradiction.
3.

Correction de l'exercice 292 ▲

Si $n \geqslant 366$, on a clairement $p_n = 1$ (Principe des tiroirs : si 366 personnes sont à associer à 365 dates d'anniversaire, alors 2 personnes au moins sont à associer à la même date d'anniversaire).
Si $2 \leqslant n \leqslant 365$, on a $p_n = 1 - q_n$ où q_n est la probabilité que les dates d'anniversaire soient deux à deux distinctes. Il y a $(365)^n$ répartitions possibles des dates d'anniversaires (cas possibles) et parmi ces répartitions, il y en a $365.364.363....(365-n+1)$ telles que les dates d'anniversaire soient deux à deux distinctes. Finalement

$$p_n = 1 - \frac{1}{(365)^n} 365.364.363....(365-n+1) = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} \frac{365-k}{365} = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}).$$

Ensuite,

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - \frac{k}{365}) \leqslant \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} -\ln(1 - \frac{k}{365}) \geqslant \ln 2.$$

Maintenant, soit $x \in [0,1[$. On a

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \geqslant \int_0^x \frac{1}{1-0} dt = x.$$

Pour k élément de $\{1,...,n-1\} (\subset \{1,...,364\})$, $\frac{k}{365}$ est un réel élément de $[0,1[$.
En appliquant l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} -\ln(1-\frac{k}{365}) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{365} = \frac{n(n-1)}{730}.$$

Ainsi,

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{n(n-1)}{730} \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 730\ln 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1+\sqrt{1+2920\ln 2}}{2} = 22,99... \Leftrightarrow n \geqslant 23.$$

Finalement, dans un groupe d'au moins 23 personnes, il y a plus d'une chance sur deux que deux personnes au moins aient la même date d'anniversaire.

Correction de l'exercice 293 ▲

1. Notre calendrier est 400 ans périodique (et presque $4.7 = 28$ ans périodique). En effet,
   (a) la répartition des années bissextiles est 400 ans périodique (1600 et 2000 sont bissextiles mais 1700, 1800 et 1900 ne le sont pas (entre autre pour regagner 3 jours tous les 400 ans et coller le plus possible au rythme du soleil))
   (b) il y a un nombre entier de semaines dans une période de 400 ans. En effet, sur 400 ans, le quart des années, soit 100 ans, moins 3 années sont bissextiles et donc sur toute période de 400 ans il y a 97 années bissextiles et 303 années non bissextiles.

   Une année non bissextile de 365 jours est constituée de $52.7+1$ jours ou encore d'un nombre entier de semaines plus un jour et une année bissextile est constituée d'un nombre entier de semaine plus deux jours.

   Une période de 400 ans est donc constituée d'un nombre entier de semaines plus : $97.2+303.1 = 194+303 = 497 = 7.71$ jours qui fournit encore un nombre entier de semaines.
2. Deux périodes consécutives de 28 ans ne contenant pas d'exception (siècles non bissextiles) reproduisent le même calendrier. En effet, les 7 années bissextiles fournissent un nombre entiers de semaines plus 2.7 jours $= 2$ semaines et les 21 années non bissextiles fournissent un nombre entier de semaines plus 21.1 jours $= 3$ semaines.
3. D'après ce qui précède, il suffit de compter les 1ers de l'an qui tombe un dimanche ou un samedi sur une période de 400 ans donnée, par exemple de 1900 à 2299 (inclus).

   On décompose cette période comme suit :

   $$1900,\ 1901 \to 1928,\ 1929 \to 1956,\ 1957 \to 1984,\ 1985 \to 2012,\ 2013 \to 2040,\ 2041 \to 2068,\ 2069 \to 2096,\\ 2097 \to 2100,\ 2101 \to 2128,\ 2129 \to 2156,\ 2157 \to 2184,\ 2185 \to 2200,\ 2201 \to 2228\ 2229 \to 2256,\\ 2257 \to 2284,\ 2285 \to 2299.$$
4. On montre ensuite que sur toute période de 28 ans sans siècle non bissextile, le premier de l'an tombe un même nombre de fois chaque jour de la semaine (Lundi, mardi,..). (La connaissance des congruences modulo 4 et 7 seraient bien utile). Quand on passe d'une année non bissextile à l'année suivante, comme une telle année contient un nombre entier de semaines plus un jour, le 1er de l'an tombe un jour plus tard l'année qui suit et deux jours plus tard si l'année est bissextile. Par exemple,

   1er janvier 1998 : jeudi 1999 : vendredi 2000 : samedi 2001 : Lundi 2002 : Mardi 2003 : Mercredi 2004 : Jeudi 2005 : samedi...

   Notons A,B,C,D,E,F,G les jours de la semaine. Sur une période de 28 ans sans siècle non bissextile finissant par exemple une année bissextile, on trouve la séquence suivante :

   ABCD FGAB DEFG BCDE GABC EFGA CDEF (puis çà redémarre ABCD...) soit 4A, 4B, 4C, 4D, 4E, 4F, et 4G.
5. Il reste à étudier les périodes à exception (soulignées dans le 3)).

   Détermination du 1er janvier 1900. Le 1er janvier 1998 était un jeudi . Il en est donc de même du 1er janvier 1998-28 = 1970 et des premiers janvier 1942 et 1914 puis on remonte :

1914 Jeudi 1913 Mercredi 1912 Lundi 1911 Dimanche 1910 Samedi 1909 Vendredi 1908 Mercredi 1907 Mardi 1906 Lundi 1905 Dimanche 1904 Vendredi 1903 Jeudi 1902 Mercredi 1901 Mardi 1900 Lundi (1900 n'est pas bissextile)

Les premiers de l'an 2000, 2028 , 2056 et 2084 sont des samedis, 2088 un jeudi, 2092 un mardi, 2096 un dimanche et donc 2097 mardi 2098 mercredi 2099 jeudi 2100 vendredi.

2101 est un samedi de même que 2129, 2157, 2185 ce qui donne de 2185 à 2200 inclus la séquence :

S D L Ma J V S D Ma Me J V D L Ma Me

2201 est un jeudi de même que 2285 ce qui donne de 2285 à 2299 inclus la séquence :

J V S D Ma Me J V D L Ma Me V S D

Le décompte des Lundis , mardis ... soulignés est : 6D 4L 6Ma 5Me 5J 6V 4S. Dans toute période de 400 ans, le 1er de l'an tombe 2 fois de plus le dimanche que le samedi et donc plus souvent le dimanche que le samedi.

Correction de l'exercice 294 ▲

Écrivons la décomposition de $15! = 1.2.3.4\dots 15$ en facteurs premiers. $15! = 2^{11}.3^6.5^3.7^2.11.13$. Un diviseur de $15!$ s'écrit $d = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta.11^\varepsilon.13^\eta$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 11$, $0 \leqslant \beta \leqslant 6$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 3$, $0 \leqslant \delta \leqslant 2$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. De plus tout nombre d de cette forme est un diviseur de $15!$. Le nombre de diviseurs est donc $(11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4032$.

Correction de l'exercice 295 ▲

Il sagit de calculer 100^{1000} modulo 13. Tout d'abord $100 \equiv 9 \pmod{13}$ donc $100^{1000} \equiv 9^{1000} \pmod{13}$. Or $9^2 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$, $9^3 \equiv 9^2.9 \equiv 3.9 \equiv 1 \pmod{13}$, Or $9^4 \equiv 9^3.9 \equiv 9 \pmod{13}$, $9^5 \equiv 9^4.9 \equiv 9.9 \equiv 3 \pmod{13}$. Donc $100^{1000} \equiv 9^{1000} \equiv 9^{3.333+1} \equiv (9^3)^{333}.9 \equiv 1^{333}.9 \equiv 9 \pmod{13}$.

Correction de l'exercice 296 ▲

La seule chose à voir est que pour une division euclidienne le reste doit être plus petit que le quotient. Donc les divisions euclidiennes s'écrivent : $96842 = 256 \times 378 + 74$ et $96842 = 258 \times 375 + 92$.

Correction de l'exercice 299 ▲

Raisonnons modulo 8 :

$$7 \equiv -1 \pmod{8}.$$

Donc

$$7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{8}.$$

Le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8 est donc $(-1)^n + 1$ donc Si n est impair alors $7^n + 1$ est divisible par 8. Et si n est pair $7^n + 1$ n'est pas divisible par 8.

Correction de l'exercice 302 ▲

Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un multiple de 2, un multiple de 3, un multiple de 4 (distinct du mutliple de 2). Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Correction de l'exercice 312 ▲

Ecrire $n = p^2 + q^2$ et étudier le reste de la division euclidienne de n par 4 en distinguant les différents cas de parité de p et q.

Correction de l'exercice 315 ▲

Pour 2. Si p divise $b-a$ alors p divise aussi $b^n - a^n$ d'après la formule $(*)$.

Pour 3. On utilise le résultat de la question précédente avec $n = p-k-1$ pour écrire b^{p-k-1} en fonction de a^{p-k-1} modulo p dans
$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}.$$
On peut alors conclure.

Correction de l'exercice 330 ▲

1. Soit n un nombre impair, alors il s'écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Maintenant $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p+1 = 4p(p+1)+1$. Donc $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.
2. Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Et $n^2 = 4p^2$. Si p est pair alors p^2 est pair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 8, donc $n^2 \equiv 0 \pmod 8$. Si p est impair alors p^2 est impair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 4 mais pas par 8, donc $n^2 \equiv 4 \pmod 8$.
3. Comme a est impair alors d'après la première question $a^2 \equiv 1 \pmod 8$, et de même $c^2 \equiv 1 \pmod 8$, $c^2 \equiv 1 \pmod 8$. Donc $a^2+b^2+c^2 \equiv 1+1+1 \equiv 3 \pmod 8$. Pour l'autre reste, écrivons $a = 2p+1$ et $b = 2q+1$, $c = 2r+1$, alors $2ab = 2(2p+1)(2q+1) = 8pq+4(p+q)+2$. Alors $2(ab+bc+ca) = 8pq+8qr+8pr+8(p+q+r)+6$, donc $2(ab+bc+ca) \equiv 6 \pmod 8$.
4. Montrons par l'absurde que le nombre $a^2+b^2+c^2$ n'est pas le carré d'un nombre entier. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^2+b^2+c^2 = n^2$. Nous savons que $a^2+b^2+c^2 \equiv 3 \pmod 8$. Si n est impair alors $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ et si n est pair alors $n^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod 8$. Dans tous les cas n^2 n'est pas congru à 3 modulo 8. Donc il y a une contradiction. La conclusion est que l'hypothèse de départ est fausse donc $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré. Le même type de raisonnement est valide pour $2(ab+bc+ca)$.
   Pour $ab+bc+ca$ l'argument est similaire : d'une part $2(ab+bc+ca) \equiv 6 \pmod 8$ et d'autre part si, par l'absurde, on suppose $ab+bc+ca = n^2$ alors selon la parité de n nous avons $2(ab+bc+ca) \equiv 2n^2 \equiv 2 \pmod 8$ ou à $0 \pmod 8$. Dans les deux cas cela aboutit à une contradiction. Nous avons montrer que $ab+bc+ca$ n'est pas un carré.

Correction de l'exercice 336 ▲

$7^4 \equiv 1 (\bmod 10)$, $7^2 \equiv 1 (\bmod 4)$ et $7^{7^{7^{7}}}$ est impair donc $7^{7^{7^{7^{7}}}} \equiv 7 \equiv 3 (\bmod 4)$ et $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}} \equiv 7^3 \equiv 3 (\bmod 10)$.

Correction de l'exercice 337 ▲

1.
2. $x = 1, y = 1$ ou $x = 2, y = 3$.

Correction de l'exercice 339 ▲

reste$= 2$.

Correction de l'exercice 343 ▲

$n^2+3n+5 \equiv (n-59)^2 - 88 (\bmod 121)$.
Si 121 divise n^2+3n+5, alors $11 \mid n-59 \Rightarrow$ contradiction.

Correction de l'exercice 346 ▲

$x \equiv y (\bmod 4)$.

Correction de l'exercice 347 ▲

1.

2. Récurrence : $a^{4\times 10^{k+1}} - 1 = (a^{4\times 10^k} - 1)(a^{4\times 10^k \times 9} + \cdots + a^{4\times 10^k \times 0})$.
3. $x = 123456789^{800000001/3}$.

Correction de l'exercice 348 ▲

$56786730 = 2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 13\times 31\times 61$. Pour tous ces facteurs premiers, on a $\varphi(p) \mid 60$.

Correction de l'exercice 349 ▲

L'ordre de $\dot{2}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise p donc est égal à p et cet ordre divise $\varphi(q) = q-1$.

Correction de l'exercice 352 ▲

Montrons par récurrence que, pour $n \geqslant 2$, H_n peut s'écrire sous la forme $\frac{p_n}{q_n}$ où q_n est un entier pair et p_n est un entier impair (la fraction précédente n'étant pas nécessairement irréductible mais à coup sûr pas un entier). Pour $n=2$, $H_2 = \frac{3}{2}$ et H_2 est bien du type annoncé. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, on ait $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k est un entier pair et montrons que $H_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ où p_{n+1} est un entier impair et q_{n+1} est un entier pair. (Recherche. L'idée $H_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)p_n+q_n}{(n+1)q_n}$ ne marche à coup sur que si $(n+1)p_n + q_n$ est impair ce qui est assuré si $n+1$ est impair et donc n pair)

1er cas. Si n est pair, on peut poser $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $H_{n+1} = \frac{(2k+1)p_n+q_n}{(2k+1)q_n}$ et H_{n+1} est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair.

2ème cas. Si n est impair, on pose $n = 2k-1$ où $k \geqslant 2$ (de sorte que $2k-1 \geqslant 3$).

$$H_{n+1} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$$

(en séparant les fractions de dénominateurs pairs des fractions de dénominateurs impairs)

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2}H_k + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1}.$$

Maintenant, en réduisant au même dénominateur et puisque un produit de nombres impairs est impair, on voit que $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$ est du type $\frac{K}{2K'+1}$ où K et K' sont des entiers. Ensuite, puisque $2 \leqslant k \leqslant 2k-1 = n$, par hypothèse de récurrence, $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k un entier pair. Après réduction au même dénominateur, on obtient

$$H_{n+1} = \frac{p_k}{2q_k} + \frac{K}{2K'+1} = \frac{(2K'+1)p_k + 2Kq_k}{2q_k(2K'+1)}.$$

$2Kq_k$ est un entier pair et $(2K'+1)p_k$ est un entier impair en tant que produit de deux nombres impairs. Donc le numérateur est bien un entier impair et puisque $2qk(2K'+1)$ est un entier pair, H_{n+1} est bien dans tous les cas de la forme désirée.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair et donc n'est pas un entier.

Correction de l'exercice 353 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de n par 25 fournit un quotient entier q et et un reste r élément de $\{0,1,...,24\}$ tels que $n = 25q + r$.

On a alors

$$E(\frac{1}{3}(n+2-E(\frac{n}{25}))) = E(\frac{25q+r+2-q}{3}) = E(8q + \frac{r+2}{3}) = 8q + E(\frac{r+2}{3}),$$

et

$$E(\frac{8n+24}{25}) = E(\frac{8(25q+r)+24}{25}) = 8q + E(\frac{8r+24}{25}).$$

Pour montrer l'égalité de l'énoncé, il reste donc à vérifier les 25 égalités $E(\frac{r+2}{3}) = E(\frac{8r+24}{25})$, $0 \leqslant r \leqslant 24$, $(*)$, ce qui peut déjà se vérifier « à la main ».
Diminuons encore le nombre de vérifications. La division euclidienne de r par 3 s'écrit $r = 3k+l$ avec $0 \leqslant l \leqslant 2$. Mais alors,

$$E(\frac{r+2}{3}) = k + E(\frac{l+2}{3}) \text{ et } E(\frac{8r+24}{25}) = E(\frac{25k-k+8l+24}{25}) = k + E(\frac{-k+8l+24}{25}).$$

Si $l = 0$, k varie de 0 à 8 et dans ce cas, $0 \leqslant \frac{-k+24}{25} = \frac{-k+8l+24}{25} \leqslant \frac{24}{25} < 1$. Par suite,

$$E(\frac{-k+8l+24}{25}) = 0 = E(\frac{2}{3}) = E(\frac{l+2}{3}).$$

On a ainsi vérifié $(*)$ quand $r \in \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$.
Si $l = 1$ ou $l = 2$, $E(\frac{l+2}{3}) = 1$ et d'autre part, k varie de 0 à 7. Dans ce cas,

$$1 = \frac{-7+8+24}{25} \leqslant \frac{-k+8l+24}{25} \leqslant \frac{16+24}{25} < 2$$

et donc

$$E(\frac{-k+8l+24}{25}) = 1 = E(\frac{l+2}{3}).$$

On a ainsi vérifié $(*)$ pour les autres valeurs de r. Finalement, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(\tfrac{1}{3}(n+2-E(\tfrac{n}{25}))) = E(\tfrac{8n+24}{25}).}$$

Correction de l'exercice 358 ▲

Il s'agit ici d'utiliser la décomposition des nombres en facteurs premiers.

1. $126 = 2.3^2.7$ et $230 = 2.5.23$ donc le pgcd de 126 et 230 est 2.
2. $390 = 2.3.5.13$, $720 = 2^4.3^2.5$, $450 = 2.3^2.5^2$ et donc le pgcd de ces trois nombres est $2.3.5 = 30$.
3. $\text{pgcd}(180,606,750) = 6$.

Correction de l'exercice 360 ▲

Soient a,b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit a',b' tel que $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Alors a' et b' sont premiers entre eux, et leur somme est $360/18 = 20$.
Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels (a',b') $(a' \leqslant b')$ qui vérifient cette condition, ce sont les couples :

$$(1,19),(3,17),(7,13),(9,11).$$

Pour obtenir les couples (a,b) recherchés $(a \leqslant b)$, il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :

$$(18,342),(54,306),(126,234),(162,198).$$

Correction de l'exercice 364 ▲

1. $\text{pgcd}(18480,9828) = 84$;
2. $25 \times 18480 + (-47) \times 9828 = 84$.

Correction de l'exercice 366 ▲

Comme le pgcd de 955 et 183 est 1, donc d'après le théorème de Bézout cette équation a des solutions. Par exemple une solution particulière est $(m_0,n_0) = (-32,167)$. Les solutions sont exactement les couples $(m,n) = (m_0 - 83k, n_0 + 37k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 371 ▲

1. $a = 9b + 10$.
2. Calculons le pgcd par l'algorithme d'Euclide. $a = 9b + 10$, $b = 12345678 \times 10 + 9$, $10 = 1 \times 9 + 1$. Donc le pgcd vaut 1 ;
3. Nous reprenons les équations précédentes en partant de la fin : $1 = 10 - 9$, puis nous remplaçons 9 grâce à la deuxième équation de l'algorithme d'Euclide : $1 = 10 - (b - 12345678 \times 10) = -b + 1234679 \times 10$. Maintenant nous remplaçons 10 grâce à la première équation : $1 = -b + 12345679(a - 9b) = 12345679a - 111111112b$.

Correction de l'exercice 373 ▲

En divisant par 45 (qui est le pgcd de $1665, 1035, 45$) nous obtenons l'équation équivalente :

$$37x + 23y = 1 \qquad (E)$$

Comme le pgcd de 37 et 23 est 1, alors d'après le théorème de Bézout cette équation (E) a des solutions.
L'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd de 37 et 23 fourni les coefficients de Bézout : $37 \times 5 + 23 \times (-8) = 1$. Une solution particulière de (E) est donc $(x_0, y_0) = (5, -8)$.
Nous allons maintenant trouver l'expression générale pour les solutions de l'équation (E). Soient (x, y) une solution de l'équation $37x + 23y = 1$. Comme (x_0, y_0) est aussi solution, nous avons $37x_0 + 23y_0 = 1$. Faisons la différence de ces deux égalités pour obtenir $37(x - x_0) + 23(y - y_0) = 0$. Autrement dit

$$37(x - x_0) = -23(y - y_0) \quad (*)$$

On en déduit que $37|23(y - y_0)$, or $\text{pgcd}(23, 37) = 1$ donc par le lemme de Gauss, $37|(y - y_0)$. (C'est ici qu'il est important d'avoir divisé par 45 dès le début !) Cela nous permet d'écrire $y - y_0 = 37k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.
Repartant de l'égalité $(*)$: nous obtenons $37(x - x_0) = -23 \times 37 \times k$. Ce qui donne $x - x_0 = -23k$. Donc si (x, y) est solution de (E) alors elle est de la forme : $(x, y) = (x_0 - 23k, y_0 + 37k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, si (x, y) est de cette forme alors c'est une solution de (E) (vérifiez-le !).
Conclusion : les solutions sont

$$\{(5 - 23k, -8 + 37k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Correction de l'exercice 405 ▲

$(a + b) \wedge m = d$.

Correction de l'exercice 406 ▲

$= |a - b|(a \wedge b)^2$ ou $3|a - b|(a \wedge b)^2$.

Correction de l'exercice 407 ▲

$$8(n^3 + n) = (2n + 1)(4n^2 - 2n + 5) - 5 \Rightarrow d = (2n + 1) \wedge 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } n \equiv 2 (\text{mod} 5), & \text{d = 5} \\ \text{si } n \not\equiv 2 (\text{mod} 5), & \text{d = 1.} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 408 ▲

$(15n^2 + 8n + 6) \wedge (30n^2 + 21n + 13) = 1$.

Correction de l'exercice 409 ▲

$\{a, b\} \in \{\{50, 600\}, \{150, 200\}\}$.

Correction de l'exercice 410 ▲

$\{a,b\} \in \big\{\{1,192\},\{3,32\},\{7,126\},\{14,63\}\big\}$.

Correction de l'exercice 411 ▲

$\{x,y\} = \{147,252\}$.

Correction de l'exercice 412 ▲

$x = 14k, \quad y = 15k$.

Correction de l'exercice 413 ▲

x impair, $y = 2 - x$.

Correction de l'exercice 414 ▲

$x = 1$ ou $y = 1$.

Correction de l'exercice 415 ▲

$(300,150)$, $(150,100)$, $(100,75)$, $(75,60)$, $(60,50)$.

Correction de l'exercice 416 ▲

1. $a^m - 1 \mid (a^{qm} - 1)a^r = a^n - a^r$.
2. $A \wedge (AQ + R) = A \wedge R$. Algorithme d'Euclide sur les exposants de a.
3. ssi $m \mid n$.

Correction de l'exercice 418 ▲

1.
2.
3. $x = 1 + 11k, \quad y = -1 + 7k$.

Correction de l'exercice 419 ▲

1. $x = 67 - 71k, \quad y = -89 + 95k$.
2. $x = 24 + 53k, \quad y = 9 + 20k$.
3. $x = -49 + 20k - 5m, \quad y = 49 - 20k + 4m, \quad z = -7 + 3k$.

Correction de l'exercice 421 ▲

1. $x \equiv 7422 \pmod{13860}$.
2. $x \equiv 7 \pmod{60}$.

Correction de l'exercice 422 ▲

785.

Correction de l'exercice 424 ▲

1. Nous savons que
$$x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1),$$
pour $x = 2^a$ nous obtenons :
$$2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + \cdots + 2^a + 1\right).$$
Donc $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$.
2. Montrons la contraposée. Supposons que p ne soit pas premier. Donc $p = ab$ avec $1 < p, q < a$. Par la question précédente $2^a - 1$ divise $2^p - 1$ (et $1 < 2^a - 1 < 2^p - 1$). Donc $2^p - 1$ n'est pas un nombre premier.
3. Nous supposons $a \geqslant b$. Nous allons montrer que faire l'algorithme d'Euclide pour le couple $(2^a - 1, 2^b - 1)$ revient à faire l'algorithme d'Euclide pour (a,b). Tout d'abord rappellons la formule qui est à la base de l'algorithme d'Euclide : $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(a-b,b)$. Appliqué à $2^a - 1$ et $2^b - 1$ cela donne directement $\mathrm{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \mathrm{pgcd}(2^a - 2^b, 2^b - 1)$. Mais $2^a - 2^b = 2^b(2^{a-b} - 1)$ d'où $\mathrm{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \mathrm{pgcd}(2^b(2^{a-b} - 1), 2^b - 1) = \mathrm{pgcd}(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$. La dernière égalité vient du fait 2^b et $2^b - 1$ sont premiers entre eux (deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux).
Nous avons montrer : $\mathrm{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \mathrm{pgcd}(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$. Cette formule est à mettre en parallèle de $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(a-b,b)$. En itérant cette formule nous obtenons que si $a = bq + r$ alors : $\mathrm{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \mathrm{pgcd}(2^{a-bq} - 1, 2^b - 1) = \mathrm{pgcd}(2^r - 1, 2^b - 1)$ à comparer avec $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(a-bq,b) = \mathrm{pgcd}(r,b)$. Nous avons notre première étape de l'algorithme d'Euclide. En itérant l'algorithme d'Euclide pour (a,b), nous nous arêtons au dernier reste non nul : $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b,r) = \cdots = \mathrm{pgcd}(r_n, 0) = r_n$. Ce qui va donner pour nous $\mathrm{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \mathrm{pgcd}(2^b - 1, 2^r - 1) = \cdots = \mathrm{pgcd}(2^{r_n} - 1, 2^0 - 1) = 2^{r_n} - 1$.
Bilan : $\mathrm{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\mathrm{pgcd}(a,b)} - 1$.

Correction de l'exercice 425 ▲

Soit a et b des entiers premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde et supposons que ab et $a+b$ ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors p un nombre premier divisant ab et $a+b$. Par le lemme d'Euclide comme $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$. Par exemple supposons que $p|a$. Comme $p|a+b$ alors p divise aussi $(a+b)-a$, donc $p|b$. δ ne divise pas b cela implique que δ et b sont premiers entre eux.
D'après le lemme de Gauss, comme δ divise ab et δ premier avec b alors δ divise a. Donc p est un facteur premier de a et de b ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 427 ▲

1. Étant donné $0 < i < p$, nous avons
$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$
Comme C_p^i est un entier alors $i!$ divise $p(p-1)\dots(p-(i+1))$. Mais $i!$ et p sont premiers entre eux (en utilisant l'hypothèse $0 < i < p$). Donc d'après le théorème de Gauss : $i!$ divise $(p-1)\dots(p-(i+1))$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ki! = (p-1)\dots(p-(i+1))$. Maintenant nous avons $C_p^i = pk$ donc p divise C_p^i.
2. Il s'agit de montrer le petit théorème de Fermat : pour p premier et $a \in \mathbb{N}^*$, alors $a^p \equiv a \pmod p$. Fixons p. Soit l'assertion
$$(\mathscr{H}_a) \quad a^p \equiv a \pmod p.$$
Pour $a = 1$ cette assertion est vraie ! Étant donné $a \geqslant 1$ supposons que $\mathscr{H}_a$ soit vraie. Alors
$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i a^i.$$

Mais d'après la question précédente pour $0 < i < p$, p divise C_p^i. En termes de modulo nous obtenons :

$$(a+1)^p \equiv C_p^0 a^0 + C_p^p a^p \equiv 1 + a^p \pmod p.$$

Par l'hypothèse de récurrence nous savons que $a^p \equiv a \pmod p$, donc

$$(a+1)^p \equiv a+1 \pmod p.$$

Nous venons de prouver que $\mathscr{H}_{a+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence alors quelque soit $a \in \mathbb{N}^*$ nous avons :

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

Correction de l'exercice 429 ▲

1. Fixons n et montrons la récurrence sur $k \geqslant 1$. La formule est vraie pour $k = 1$. Supposons la formule vraie au rang k. Alors

$$\begin{aligned}(2^{2^n}-1) \times \prod_{i=0}^{k} (2^{2^{n+i}}+1) &= (2^{2^n}-1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}}+1) \times (2^{2^{n+k}}+1) \\ &= (2^{2^{n+k}}-1) \times (2^{2^{n+k}}+1) = (2^{2^{n+k}})^2 - 1 = 2^{2^{n+k+1}} - 1.\end{aligned}$$

   Nous avons utiliser l'hypothèse de récurrence dans ces égalités. Nous avons ainsi montrer la formule au rang $k+1$. Et donc par le principe de récurrence elle est vraie.

2. Écrivons $m = n+k$, alors l'égalité précédente devient :

$$F_m + 2 = (2^{2^n}-1) \times \prod_{i=n}^{m-1} F_i.$$

   Soit encore :

$$F_n \times (2^{2^n}-1) \times \prod_{i=n+1}^{m-1} F_i \quad - \quad F_m = 2.$$

   Si d est un diviseur de F_n et F_m alors d divise 2 (ou alors on peut utiliser le théorème de Bézout). En conséquent $d = 1$ ou $d = 2$. Mais F_n est impair donc $d = 1$. Nous avons montrer que tous diviseurs de F_n et F_m est 1, cela signifie que F_n et F_m sont premiers entre eux.

3. Supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. Nous les notons alors $\{p_1, \dots, p_N\}$. Prenons alors $N+1$ nombres de la famille F_i, par exemple $\{F_1, \dots, F_{N+1}\}$. Chaque F_i, $i = 1, \dots, N+1$ est divisible par (au moins) un facteur premier p_j, $j = 1, \dots, N$. Nous avons $N+1$ nombres F_i et seulement N facteurs premiers p_j. Donc par le principe des tiroirs il existe deux nombres distincts F_k et $F_{k'}$ (avec $1 \leqslant k, k' \leqslant N+1$) qui ont un facteur premier en commun. En conséquent F_k et $F_{k'}$ ne sont pas premiers entre eux. Ce qui contredit la question précédente. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Correction de l'exercice 436 ▲

1. X est non vide car, par exemple pour $k = 2$, $4k+3 = 11$ est premier.
2. $(4k+1)(4\ell+1) = 16k\ell + 4(k+\ell) + 1 = 4(4k\ell + k + \ell) + 1$. Si l'on note l'entier $k' = 4k\ell + k + \ell$ alors $(4k+1)(4\ell+1) = 4k'+1$, ce qui est bien de la forme voulue.
3. Remarquons que 2 est le seul nombre premier pair, les autres sont de la forme $4k+1$ ou $4k+3$. Ici a n'est pas divisible par 2, supposons –par l'absurde– que a n'a pas de diviseur de la forme $4k+3$, alors tous les diviseurs de a sont de la forme $4k+1$. C'est-à-dire que a s'écrit comme produit de nombre de la forme $4k+1$, et par la question précédente a peut s'écrire $a = 4k'+1$. Donc $a \equiv 1 \pmod 4$. Mais comme $a = 4p_1p_2\dots p_n - 1$, $a \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$. Nous obtenons une contradiction. Donc a admet une diviseur premier p de la forme $p = 4\ell + 3$.

4. Dans l'ensemble $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ il y a tous les nombres premiers de la formes $4k+3$. Le nombre p est premier et s'écrit $p = 4\ell + 3$ donc p est un élément de X, donc il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p = p_i$. Raisonnons modulo $p = p_i$: $a \equiv 0 \pmod p$ car p divise a. D'autre part $a = 4p_1 \dots p_n - 1$ donc $a \equiv -1 \pmod p$. (car p_i divise $p_1 \dots p_n$). Nous obtenons une contradiction, donc X est infini : il existe une infinité de nombre premier de la forme $4k+3$. Petite remarque, tous les nombres de la forme $4k+3$ ne sont pas des nombres premiers, par exemple pour $k = 3$, $4k+3 = 15$ n'est pas premier.

Correction de l'exercice 437 ▲

1. Supposons que $a^n + 1$ est premier. Nous allons montrer la contraposée. Supposons que n n'est pas de la forme 2^k, c'est-à-dire que $n = p \times q$ avec p un nombre premier > 2 et $q \in \mathbb{N}$. Nous utilisons la formule
$$x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{p-1})$$
avec $x = a^q$:
$$a^n + 1 = a^{pq} + 1 = (a^q)^p + 1 = (a^q + 1)(1 - a^q + (a^q)^2 + \cdots + (a^q)^{p-1}).$$
Donc $a^q + 1$ divise $a^n + 1$ et comme $1 < a^q + 1 < a^n + 1$ alors $a^n + 1$ n'est pas premier. Par contraposition si $a^n + 1$ est premier alor $n = 2^k$.
2. Cette conjecture est fausse, mais pas facile à vérifier sans une bonne calculette ! En effet pour $n = 5$ nous obtenons :
$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$

Correction de l'exercice 440 ▲

a, b, c 2 à 2 premiers entre eux.

Correction de l'exercice 441 ▲

Décomposer en facteurs premiers.

Correction de l'exercice 444 ▲

Récurrence.

Correction de l'exercice 445 ▲

On suppose a, r entiers supérieurs ou égaux à 2.
$a - 1 \mid a^r - 1$ donc $a = 2$. Si $r = pq$ alors $2^p - 1 \mid 2^r - 1$ donc r est premier.
La réciproque est fausse, $2^{11} - 1 = 23 \times 89$.

Correction de l'exercice 446 ▲

1.
2. $M_{11} = 23 \times 89$.
3.
4.

Correction de l'exercice 450 ▲

1. $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$.
2.
3.

4.

Correction de l'exercice 452 ▲

498.

Correction de l'exercice 453 ▲

$H_n \Rightarrow H_{2n} \Rightarrow H_{2n+1}$.

Correction de l'exercice 458 ▲

Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$ est un nombre réel, ce qui fait qu'en multipliant le dénominateur par son conjugué nous obtenons un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i = -\frac{23}{25}+\frac{36}{25}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z+\bar{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$ et donc $z+\bar{z} = -3$.

Correction de l'exercice 460 ▲

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1+i\sqrt{3}$.
2. $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
   Il nous reste à expliquer comment nous avons calculé $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$: posons $\theta = \frac{\pi}{8}$, alors $2\theta = \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(2\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(2\theta)$. Mais $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. Donc $\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$. Et ensuite $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$. Comme $0 \leqslant \theta = \frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des nombres positifs. Donc
   $$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 464 ▲

$9-7i$; $\quad -6i$; $\quad -0{,}3+1{,}1i$; $\quad -\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}$.

Correction de l'exercice 465 ▲

$\rho = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{3\pi}{8}$; $\quad \rho = 4$, $\theta = -\frac{\pi}{10}$; $\quad \rho = 1$, $\theta = 2\varphi+\pi$.

Correction de l'exercice 467 ▲

Il s'agit juste d'appliquer la formule de Moivre :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta;$$

ainsi que les formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Correction de l'exercice 468 ▲

Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction de l'exercice 470 ▲

D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha} > 0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".

De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu}+e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned} e^{iu}+e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\frac{u-v}{2}}+e^{-i\frac{u-v}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}}2\cos\frac{u-v}{2} \\ &= 2\cos\frac{u-v}{2}e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonées polaires.
Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta}+e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left[e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right] = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\frac{\theta}{2} \geqslant 0$ alors $2\cos\frac{\theta}{2}$ est le module de z et $3\theta/2$ est son argument ; par contre si $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ le module est $2|\cos\frac{\theta}{2}|$ et l'argument $3\theta/2+\pi$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi} = -1$).

Correction de l'exercice 471 ▲

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2} = i.$$

On remarque $1 = i^0 = i^4 = i^8 = \cdots = i^{32}$.

Correction de l'exercice 477 ▲

Écrivons $z = \rho e^{i\theta}$, alors $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n} \left(z^k + \bar{z}^k\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left((e^{i\theta})^k + (e^{-i\theta})^k\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta})\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} 2\rho^k \cos k\theta \\
&= 2^n.\rho.\rho^2.\dots.\rho^n \prod_{k=1}^{n} \cos k\theta \\
&= 2^n \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} \cos k\theta.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 478 ▲

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et z le nombre complexe $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$. Soit $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Alors, $\alpha = u+v$ et $\beta = u-v$ et :

$$\begin{aligned}
z &= e^{i\alpha} + e^{i\beta} \\
&= e^{iu+iv} + e^{iu-iv} \\
&= e^{iu}(e^{iv} + e^{-iv}) \\
&= 2\cos(v)e^{iu} \\
&= 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}
\end{aligned}$$

On en déduit la forme trigonométrique de z :

$$|z| = 2|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})| \qquad \text{et, lorsque } \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \neq 0 :$$

$$Arg(z) = \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2} [2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} > 0 \\ \pi + \frac{\alpha+\beta}{2} [2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0 \end{cases}$$

(Attention, si $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0$, $z = 2\cos v e^{iu}$ n'est pas la forme trigonométrique de z !).
Soit $n \in |||$. Calculons z^n de deux façons différentes : d'une part

$$z^n = (e^{i\alpha} + e^{i\beta})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p e^{ip\alpha} e^{i(n-p)\beta},$$

et d'autre part, en utilisant la forme obtenue plus haut : $z^n = 2^n \cos^n v\, e^{inu}$. En comparant les parties réelles des expressions obtenues on obtient :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha + (n-p)\beta] = 2^n \cos^n \frac{\alpha-\beta}{2} \cos(n\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

Correction de l'exercice 480 ▲

$$1+e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}})=2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Comme $\theta\in]-\pi,+\pi[$ alors le module est $2\cos\frac{\theta}{2}\geqslant 0$ et l'argument est $\frac{\theta}{2}$. Géométriquement, on trace le cercle de centre 1 et de rayon 1. L'angle en 0 du triangle $(0,1,1+e^{i\theta})$ est $\frac{\theta}{2}$ et donc est le double de l'angle en 0 du triangle $(0,2,1+e^{i\theta})$ qui vaut θ.
C'est le résulat géométrique (théorème de l'angle au centre) qui affirme que pour un cercle l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.

Correction de l'exercice 484 ▲

1. $|u+v|+|u-v|\geqslant 2|u|$ et $|u+v|+|u-v|\geqslant 2|v|$. Il y a égalité ssi $u=\pm v$.
2. $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\leqslant|z_1+z_2|+|z_1-z_2|+|z_3+z_4|+|z_3-z_4|$,
$|z_1-z_2|+|z_3-z_4|\leqslant|z_1-z_2+z_3-z_4|+|z_1-z_2-z_3+z_4|\leqslant|z_1+z_3|+|z_2+z_4|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|$.

Correction de l'exercice 485 ▲

$\overline{u}=-u$.

Correction de l'exercice 486 ▲

D'abord on a $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de $1+i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$. On a aussi, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$(x+iy)^2=1+i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\x^2+y^2=\sqrt{2}\\xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\\y^2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\\xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow(x,y)\in\left\{\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\right\}.$$

Les racines carrées de $1+i$ sont donc aussi $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$. Puisque $\mathrm{Re}(e^{i\pi/8})=\cos\frac{\pi}{8}>0$, on obtient $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, ou encore

$$e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

et donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\text{ et }\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Correction de l'exercice 487 ▲

Soient z un complexe non nul, M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1.

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|\Leftrightarrow|z|=\frac{1}{|z|}\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1,$$

et

$$|z|=|z-1|\Leftrightarrow OM=AM\Leftrightarrow M\in\mathrm{med}[OA]\Leftrightarrow x_M=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|\Leftrightarrow|z|=1\text{ et }\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow z=-j\text{ ou }z=-j^2.$$

Correction de l'exercice 488 ▲

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z = \frac{1+ix}{1-ix}$. Puisque $1 - ix \neq 0$, z est bien défini et $|z| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \frac{|1+ix|}{|1+ix|} = 1$. Enfin, $z = \frac{-1+ix+2}{1-ix} = -1 + \frac{2}{1-ix} \neq -1$. On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1+ix}{1-ix} \in U \setminus \{-1\}.$$

Réciproquement, soit $z \in U \setminus \{-1\}$. Il existe un réel $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors,

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1 + i\tan\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}(1 - i\tan\frac{\theta}{2})} = \frac{1 + i\tan\frac{\theta}{2}}{1 - i\tan\frac{\theta}{2}}\ (\cos\frac{\theta}{2} \neq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),$$

et z est bien sous la forme voulue avec $x = \tan\frac{\theta}{2}$.

Correction de l'exercice 489 ▲

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + \cos\theta + i\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -1 \text{ et } \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Donc, $\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ existe pour $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel θ,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\frac{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2) + i\cos(\theta/2)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}} = -i\,\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

- 1er cas.] $\text{cotan}\frac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$. Dans ce cas, la forme trigonométrique de $\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ est $\text{cotan}(\frac{\theta}{2})e^{-i\pi/2}$ (module$=\text{cotan}(\frac{\theta}{2})$ et argument$= -\frac{\pi}{2}$ (2π)).

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \left[\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), -\frac{\pi}{2}\right].$$

- 2ème cas. $\text{cotan}\frac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$. Dans ce cas,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = -\text{cotan}(\frac{\theta}{2}).e^{i\pi/2} = |\text{cotan}(\frac{\theta}{2})|e^{i\pi/2},$$

et donc,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \left[-\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right].$$

- 3ème cas. $\text{cotan}\frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = 0$.

2. Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = i\,\text{cotan}\,\frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [\text{cotan}\,\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [-\text{cotan}\,\frac{\theta}{2}, -\frac{\pi}{2}]$.
Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 0$.

Correction de l'exercice 490 ▲

$(1 + i\sqrt{3})^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9 e^{3i\pi} = -512$.

La forme algébrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à l'addition.
La forme trigonométrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

Correction de **l'exercice 491 ▲**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $\bar{z} = 1 - z^2$, alors en conjuguant une deuxième fois on obtient :

$$z = 1 - \bar{z}^2 = 1 - (1 - z^2)^2 = 2z^2 - z^4.$$

Donc z est une racine du polynôme $X^4 - 2X^2 + X$. Ce polynôme a deux racines évidentes : 0 et 1, et deux autres racines $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Les deux dernières sont les seules à vérifier l'équation d'origine.
Autre approche : on écrit l'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sous forme cartésienne $z = a + ib$ avec a et b réels. On obtient le système $\begin{cases} a^2 - b^2 + a & = 1 \\ 2ab - b & = 0 \end{cases}$.
La seconde équation équivaut à $b = 0$ ou $a = \frac{1}{2}$. Si $b = 0$, la première équation devient $a^2 + a - 1 = 0$, dont les solutions (réelles) sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Si $a = 1/2$, la première équation devient $b^2 = -\frac{1}{4}$, qui n'a pas de solutions réelles.

Correction de **l'exercice 492 ▲**

Comme z^2 doit être réel, on en déduit que z est soit réel, soit imaginaire pur. Dans chacun de ces deux cas, on obtient une équation d'inconnue réelle qui fait intervenir la valeur absolue. En séparant suivant le signe de l'inconnue, on obtient dinalement quatre cas qui correspondent à quatre trinômes réels.

Correction de **l'exercice 494 ▲**

Racines carrées. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^2 = z$. Écrivons $\omega = \alpha + i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = a + ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2 = |z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Par somme et différence des deux premières lignes :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ \beta^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ \beta = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases}$$

Cela donne deux couples (α,β) de solutions et donc deux racines carrées (opposées) $\omega=\alpha+i\beta$ de z.
En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z=8-6i$,

$$\begin{aligned}
\omega^2=z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2=8-6i\\
&\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta=8-6i\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^2-\beta^2=8\\ 2\alpha\beta=-6\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^2+\beta^2=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10 \text{ le module de } z\\ \alpha^2-\beta^2=8\\ 2\alpha\beta=-6\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha^2=18\\ \beta^2=1\\ 2\alpha\beta=-6\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\pm\sqrt{9}=\pm 3\\ \beta=\pm 1\\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\quad \alpha=3 \text{ et } \beta=-1\\ \text{ou}\\ \quad \alpha=-3 \text{ et } \beta=+1\end{cases}
\end{aligned}$$

Les racines de $z=8-6i$ sont donc $\omega_1=3-i$ et $\omega_2=-\omega_1=-3+i$.
Pour les autres :

- Les racines carrées de 1 sont : $+1$ et -1.
- Les racines carrées de i sont : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
- Les racines carrées de $3+4i$ sont : $2+i$ et $-2-i$.
- Les racines carrées de $7+24i$ sont : $4+3i$ et $-4-3i$.

Correction de l'exercice 495 ▲

$2-i$ et $-2+i$; $\qquad 5-i$ et $-5+i$.

Correction de l'exercice 496 ▲

Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega,-\omega$ de $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}},$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\omega=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z=e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2=e^{\frac{2i\pi}{8}}=e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}}=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8}>0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}}=\omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 497 ▲

Soit $P(z) = az^2 + bz + c$, et $\Delta = b^2 - 4ac$, si $\Delta \geqslant 0$ alors les racines sont réelles, seul le cas où $\Delta < 0$ nous intéresse. Première méthode : il suffit de regarder les deux solutions et de vérifier qu'elles sont conjuguées... Seconde méthode : si z est une racine de P *i.e.* $P(z) = 0$, alors

$$P(\bar{z}) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = \overline{az^2 + b^z + c} = \overline{P(z)} = 0.$$

Donc $\bar{z}$ est aussi une racine de P. Or z n'est pas un nombre réel (car $\Delta < 0$) donc $\bar{z} \neq z$. Sachant que le polynôme P de degré 2 a exactement 2 racines, ce sont z et $\bar{z}$ et elles sont conjuguées.

Correction de l'exercice 498 ▲

Équations du second degré. La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) est la suivante : soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2 = \Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.
Exemple : pour $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$, $\Delta = 3 + 4i$, dont une racine carrée est $\delta = 2 + i$, les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

Les solutions des autres équations sont :
- L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.
- L'équation $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$ a pour solutions : $1 + i$, i.
- L'équation $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3} + i)$, $\frac{1}{2}(-2 - \sqrt{3} - i)$
- L'équation $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$ a pour solutions : $5 - 12i$, $-2i$.
- L'équation $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$ a pour solutions : $2 + 3i$, $1 + i$.
- L'équation $4z^2 - 2z + 1 = 0$ a pour solutions : $\frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})$, $\frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})$.
- L'équation $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ a pour solutions : $2 + 3i$, $-2 - 3i$, $2 - 3i$, $-2 + 3i$.
- L'équation $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$ a pour solutions : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 503 ▲

1. $\Delta = -2i$ dont les racines carrées sont $1 - i$ et $-1 + i$, d'où les racines $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = 6 - 3i$.
2. Une racine "évidente" $z_1 = i$, d'où la résolution complète en effectuant la division par $z - i$. On trouve $z_2 = i$ et $z_3 = -2i$.

Correction de l'exercice 506 ▲

Cercle circonscrit $\Rightarrow$ ssi $|z| = 1$.

Correction de l'exercice 507 ▲

$z_1 = -z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -z_4 = 1 - i$.

Correction de l'exercice 508 ▲

$z = 1 \pm 2i$, $z = -4 \pm 2i$.

Correction de l'exercice 509 ▲

$m = 2i$.

Correction de l'exercice 510 ▲

1.
2. $\alpha = 0$ ou $\beta = t\alpha^2$, $t \geqslant \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 511 ▲

1.
2. Élever au carré : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\underbrace{|\alpha\beta|}_{|\mu|^2} = \underbrace{|m-\mu|^2 + |m+\mu|^2}_{2|m|^2+2|\mu|^2} + 2\underbrace{|m^2-\mu^2|}_{|\alpha-\beta|^2/4}$.

Correction de l'exercice 512 ▲

1. $z^2+z+1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ ou $z = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$.
2. $\Delta' = 1^2-2 = -1 = i^2$. L'équation a donc deux solutions non réelles et conjuguées, à savoir $z_1 = \frac{1}{2}(-1+i)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1-i)$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout complexe z, on a

$$\begin{aligned} z^2 - 2z\cos\theta + 1 &= (z-\cos\theta)^2 + 1 - \cos^2\theta = (z-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = (z-\cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2 \\ &= (z-\cos\theta - i\sin\theta)(z-\cos\theta+i\sin\theta) = (z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

L'équation proposée a donc deux solutions (pas nécessairement distinctes) $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$. De plus, $\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$ et ces solutions sont distinctes si et seulement si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.
4. Soit (E) l'équation $z^2-(6+i)z+(11+3i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (6+i)^2 - 4(11+13i) = -9-40i$. Comme $40 = 2\times 20 = 2\times(4\times 5)$ et que $4^2-5^2 = 16-25 = -9$, on est en droit de deviner que $\Delta = (4-5i)^2$. L'équation (E) a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1 = \frac{6+i+4-5i}{2} = 5-2i$ et $z_2 = \frac{6+i-4+5i}{2} = 1+3i$.
5. Soit (E) l'équation $2z^2-(7+3i)z+(2+4i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (7+3i)^2 - 8(2+4i) = 24+10i$. Comme $10 = 2\times 5 = 2\times(5\times 1)$ et que $5^2-1^2 = 24$, on est en droit de deviner que $\Delta = (5+i)^2$. L'équation proposée a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1 = \frac{7+3i+5+i}{4} = 3+i$ et $z_2 = \frac{7+3i-5-i}{4} = \frac{1}{2}(1+i)$.

Correction de l'exercice 513 ▲

Le discriminant de l'équation $Z^2-(5-14i)Z-2(5i+12) = 0$ vaut

$$\Delta = (5-14i)^2 + 8(5i+12) = -75-100i = 25(-3-4i) = (5(1-2i))^2.$$

Cette équation admet donc les deux solutions $Z_1 = \frac{5-14i+5-10i}{2} = 5-12i$ et $Z_2 = \frac{5-14i-5+10i}{2} = -2i$. Ensuite,

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de l'équation proposée} &\Leftrightarrow z^2 = 5-12i = (3-2i)^2 \text{ ou } z^2 = -2i = (1-i)^2 \\ &\Leftrightarrow z = 3-2i \text{ ou } z = -3+2i \text{ ou } z = 1-i \text{ ou } z = -1+i. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 519 ▲

$\frac{1}{4}(-1+i) = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}e^{\frac{3i\pi}{4}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}})^3$. Les solutions sont les complexes $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2ik\pi}{3}}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$. Et seul $z_0 = \frac{1}{2}(1+i)$ a une puissance quatrième réelle.

Correction de l'exercice 520 ▲

1. Les trois racines cubiques ont même module $\sqrt{2}$, et leurs arguments sont $-\pi/12$, $7\pi/12$ et $5\pi/4$. Des valeurs approchées sont $1{,}36603-0{,}36603i$, $-0{,}36603+1{,}36603i$ et $-1-i$.
2. $-1-2i$, $(-1-2i)j$ et $(-1-2i)j^2$ où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de 1).

Correction de l'exercice 521 ▲

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$; $\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.
Les racines de $z^{24} = 1$ sont données par $z_k = e^{2ki\pi/24}$ pour $k = 0,1,\dots,23$. Ce sont donc 1, $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, etc.

Correction de l'exercice 522 ▲

1. 3, $3i$, -3 et $-3i$.
2. $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ et $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Correction de l'exercice 523 ▲

Pour 2. Utiliser la formule d'Euler pour $\sin(x/2)$.
Pour 3. Pour $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$Z_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \exp\left(i(n-1)\frac{x}{2}\right),$$

et pour $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $Z_n = n$.
Remarquer que $Z_n = X_n + iY_n$ pour en déduire que

$$X_n = \frac{\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Correction de l'exercice 524 ▲

$$S_n = 1+z+z^2+\cdots+z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Nous devons retrouver le résultat sur la somme $S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ d'une suite géométrique dans le cas où $z \neq 1$ est un réel. Soit maintenant $z \neq 1$ un nombre complexe. Calculons $S_n(1-z)$.

$$\begin{aligned} S_n(1-z) &= (1+z+z^2+\cdots+z^n)(1-z) \text{ développons} \\ &= 1+z+z^2+\cdots+z^n-z-z^2-\cdots-z^{n+1} \text{ les termes intermédiaires s'annulent} \\ &= 1-z^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \text{ pour } z \neq 1.$$

Correction de l'exercice 525 ▲

Calcul de racine n-ième. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$, déjà $|z|^n = 1$ et donc $|z| = 1$. Écrivons $z = e^{i\theta}$. L'équation devient

$$e^{in\theta} = e^0 = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les solution sont donc

$$\mathscr{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Comme le polynôme $z^n - 1$ est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :

$$\mathscr{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

De plus si $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathscr{S} = \left\{ \varepsilon^k,\ k = 0, \dots, n-1 \right\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ pour $z \neq 1$. Donc quelque soit $z \in \mathscr{S} \setminus \{1\}$ $P(z) = 0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $\mathscr{S} \setminus \{1\}$.

Pour conclure soit $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}$.

Si $p = 0 + \ell n$, $\ell \in \mathbb{Z}$ alors $\varepsilon^{kp} = \varepsilon^{k\ell n} = (\varepsilon^n)^{k\ell} = 1^{k\ell} = 1$. Donc $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z) = \frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-1}{1-\varepsilon^p} = 0.$$

Correction de l'exercice 533 ▲

Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes *distincts* ayant le même cube.

1. $z_1 \neq 0$ car sinon on aurait $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Ainsi $(\frac{z_2}{z_1})^3 = (\frac{z_3}{z_1})^3 = 1$. Comme les trois nombres $1, (\frac{z_2}{z_1})$ et $(\frac{z_3}{z_1})$ sont distincts on en déduit que ce sont les trois racines cubiques de 1. Ces racines sont $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. A une permutation près des indices 2 et 3 on a donc :
$$z_2 = jz_1 \qquad \text{et} \qquad z_3 = j^2 z_1.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 \text{ est solution de } Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$
Etudions l'équation $Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$. $\Delta = (7-i)^2 + 4(8+8i) = 80 + 18i = (9+i)^2$. Les solutions sont donc -8 et $1+i$. Nous pouvons reprendre notre suite d'équivalences :
$$\begin{aligned} z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 &\Leftrightarrow z^3 \in \{-8, 1+i\} \\ &\Leftrightarrow z^3 = (-2)^3 \quad \text{ou} \quad z^3 = (\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}})^3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, -2e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \text{ ou } z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}. \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc :
$$\{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

Correction de l'exercice 537 ▲

1. $z = -i\mathrm{cotan}\frac{k\pi}{n}$.
2. $6 \mid n \Rightarrow z = j$ ou j^2. Sinon, pas de solution.

3. $z = \exp \frac{(2k+1)i\pi}{5}$, $k = 0,1,3,4$.
4. $z = -1$ ou $z = \exp \frac{2ik\pi}{n}$, $1 \leqslant k < n$.
5. $x = \tan\left(\frac{a+2k\pi}{n}\right)$.
6.
7. $z = \pm i,\ \pm i(2 \pm \sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 538 ▲

1. Développer. $S = 2n$.
2. $\frac{1-(1+\omega)^n}{1-\omega-\omega^2} = \frac{1+(2\cos(\pi/n))^n}{1-\omega-\omega^2}$.

Correction de l'exercice 539 ▲

1. $\sum = n$ si $p \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$, 0 sinon.
2. $a_k = \sum_{x \in \mathbb{U}_n} \frac{P(x)}{nx^k}$

Correction de l'exercice 540 ▲

n impair $\Rightarrow |Z|^2 = n$,
n pair $\Rightarrow |Z|^2 = n(1+(-1)^{n/2})$.

Correction de l'exercice 541 ▲

1. $u+v = -1$, $u^2 = u+2v = -2-u$.
2. $\Sigma = \mathrm{Im}(u) = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Correction de l'exercice 542 ▲

$x = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

Correction de l'exercice 543 ▲

Soit $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = e^{2i\alpha}$. Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i(\frac{2\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3})} = \omega_k \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ i(\omega_k+1)z = \omega_k - 1.$$

Maintenant, pour $k \in \{-1,0,1\}$,

$$\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z},$$

ce qui est exclu pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k+1)} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}}{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}} \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}}{i(e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})})}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{2i\sin(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}{i(2\cos(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}))} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \tan(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})$$

Correction de l'exercice 544 ▲

Posons, pour n naturel non nul, $P=(X^2+1)^n-(X-1)^{2n}$.

$$\begin{aligned}P&=X^{2n}+(\text{termes de degré}\leqslant 2n-2)-X^{2n}+2nX^{2n-1}+(\text{termes de degré }\leqslant 2n-2)\\&=2nX^{2n-1}+(\text{termes de degré}\leqslant 2n-2)\,.\end{aligned}$$

Donc $\deg(P)=2n-1$ et P admet dans $\mathbb{C}$, $2n-1$ racines, distinctes ou confondues.

$$\begin{aligned}(z^2+1)^n=(z-1)^{2n}&\Leftrightarrow \exists k\in\{0,\ldots,n-1\}/\ z^2+1=\omega_k(z-1)^2 \text{ où } \omega_k=e^{2ik\pi/n}\\&\Leftrightarrow \exists k\in\{0,\ldots,n-1\}/\ (1-\omega_k)z^2+2\omega_k z+(1-\omega_k)=0\end{aligned}$$

Si $k=0$, l'équation précédente s'écrit $2z=0$ ou encore $z=0$. Si k est élément de $[\![1,n-1]\!]$, $\Delta'_k=\omega_k^2-(1-\omega_k)^2=2\omega_k-1=2e^{2ik\pi/n}-1$. Soit d_k une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de Δ'_k (difficile à expliciter semble-t-il). On a $S=\{0\}\cup\left\{\frac{-e^{2ik\pi/n}\pm d_k}{1-e^{2ik\pi/n}},k\in[\![1,n-1]\!]\right\}$.

Correction de l'exercice 545 ▲

$i=e^{i\pi/2}$ et les racines quatrièmes de i sont donc les $e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}$, $k\in\{0,1,2,3\}$. Ensuite, $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-2}{e^{i\pi/3}}=-2e^{-i\pi/3}=2e^{2i\pi/3}$. Les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ sont donc les $\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3})}$, $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

Correction de l'exercice 546 ▲

1. Soit $z\in\mathbb{C}$. Soient M, A et B les points d'affixes resectives z, 1 et -1.

$$\begin{aligned}z\text{ solution de }(E)&\Rightarrow (z-1)^n=(z+1)^n\Rightarrow |(z-1)^n|=|(z+1)^n|\Rightarrow |z-1|^n=|z+1|^n\Rightarrow |z-1|=|z+1|\\&\Rightarrow AM=BM\Rightarrow M\in\text{med}[AB]\Rightarrow M\in(Oy)\Rightarrow z\in i\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$(-z-1)^n-(-z+1)^n=(-1)^n((z+1)^n-(z-1)^n)=-(-1)^n((z-1)^n-(z+1)^n).$$

Par suite,

$$z\text{ solution de }(E)\Leftrightarrow (z-1)^n-(z+1)^n=0\Leftrightarrow (-z-1)^n-(-z+1)^n=0\Leftrightarrow -z\text{ solution de }(E).$$

3. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}z\text{ solution de }(E)&\Leftrightarrow (z-1)^n=(z+1)^n\Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-1]\!]\,/\ z+1=e^{2ik\pi/n}(z-1)\\&\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!]\,/\ z=\frac{e^{2ik\pi/n}-1}{e^{2ik\pi/n}+1}\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!]\,/\ z=\frac{e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}\\&\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!]\,/\ z=\frac{2i\sin\frac{k\pi}{n}}{2\cos\frac{k\pi}{n}}\Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!]\,/\ z=i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 547 ▲

1. Soit $n \geqslant 2$. On a

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i}(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}).$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+...+(n-1))} = e^{i\pi(n-1)/2}(e^{i\pi/2})^{n-1} = i^{n-1},$$

et donc $\frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Il reste à calculer $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n})$.

1ère solution. Les $e^{-2ik\pi/n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont les $n-1$ racines n-ièmes de 1 distinctes de 1 et puisque $X^n - 1 = (X-1)(1+X+...+X^{n-1})$, ce sont donc les $n-1$ racines deux deux distinctes du polynôme $1+X+...+X^{n-1}$. Par suite, $1+X+...+X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{-2ik\pi/n})$, et en particulier $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}) = 1+1...+1 = n$.

2ème solution. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, posons $z_k = 1 - e^{-2ik\pi/n}$. Les z_k sont deux à deux distincts et racines du polynôme $P = (1-X)^n - 1 = -X + ... + (-1)^n X^n = X(-n + X - ... + (-1)^n X^{n-1})$. Maintenant, $z_k = 0 \Leftrightarrow e^{-2ik\pi/n} = 1 \leqslant k \in n\mathbb{Z}$ (ce qui n'est pas pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$). Donc, les z_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont $n-1$ racines deux à deux distinctes du polynôme de degré $n-1$: $-n + X - ... + (-1)^n X^{n-1}$. Ce sont ainsi toutes les racines de ce polynôme ou encore

$$-n + X - ... + (-1)^n X^{n-1} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n-1}(X - z_k).$$

En particulier, en égalant les coefficients constants,

$$(-1)^n.(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} z_k = -n,$$

et donc encore une fois $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}) = n$.

Finalement,

$$\forall n \geqslant 2, \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$b_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} + e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} \prod_{k=1}^{n}(e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1).$$

Ensuite,

$$\prod_{k=1}^{n} e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} = e^{-ina} e^{-\frac{i\pi}{n}(1+2+...+n)} = e^{-ina} e^{-i(n+1)\pi/2}.$$

D'autre part, soit $P = \prod_{k=1}^{n}(X + e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \prod_{k=1}^{n}(X - (-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}))$. Pour tout k, on a $(-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})})^n = (-1)^n e^{2ina}$. Par suite, les n nombres deux à deux distincts $-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ sont racines du polynôme $X^n - (-1)^n e^{2ina}$, de degré n. On en déduit que, $P = X^n - (-1)^n e^{2ina}$.

Par suite, $\prod_{k=1}^{n}(e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1) = P(1) = 1 - (-1)^n e^{2ina} = 1 - e^{2ina+n\pi}$, puis

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2^n} e^{-ina} e^{-i(n+1)\pi/2}(1 - e^{2ina+n\pi}) = \frac{1}{2^n}(e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} - e^{i(na+(n-1)\frac{\pi}{2})}) \\ &= \frac{1}{2^n}(e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} + e^{i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}) = \frac{\cos(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

3.

$$c_n \text{ est défini} \Leftrightarrow \forall k \in \{1,\dots,n\},\ a+\frac{k\pi}{n} \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a-\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow a \notin \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$$

Pour les a tels que c_n est défini, on a $c_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{i}\frac{e^{2i(a+k\pi/n)}-1}{e^{2i(a+k\pi/n)}+1}$.

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, posons $\omega_k = e^{2i(a+k\pi/n)}$ puis $z_k = \frac{\omega_k-1}{\omega_k+1}$. On a donc $c_n = \frac{1}{i^n}\prod_{k=1}^{n} z_k$.

Puisque $z_k = \frac{\omega_k-1}{\omega_k+1}$, on a $\omega_k(1-z_k) = 1+z_k$ et donc, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\omega_k^n(1-z_k)^n = (1+z_k)^n$ ou encore, les z_k sont racines du polynôme $P=(1+X)^n - e^{2ina}(1-X)^n$. Maintenant, les $a+\frac{k\pi}{n}$ sont dans $[a,a+\pi[$ et donc deux à deux distincts puisque la fonction tangente est injective sur tout intervalle de cette forme.

1er cas. Si $e^{2ina} \neq (-1)^n$ alors P est de degré n et $P = (1-(-1)^n e^{2ina})\prod_{k=1}^{n}(X-z_k)$. En évaluant en 0, on obtient

$$(1-(-1)^n e^{2ina})\prod_{k=1}^{n}(-z_k) = 1-e^{2ina}.$$

D'où,

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \frac{1-e^{2ina}}{(-1)^n - e^{2ina}} = \frac{1-e^{2ina}}{e^{in\pi}-e^{2ina}} = \frac{e^{ina}}{e^{in\pi/2}e^{ina}}\frac{-2i\sin(na)}{-2i\sin n(a-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{i^n}\frac{\sin(na)}{\sin n(a-\frac{\pi}{2})}.$$

Finalement, $c_n = (-1)^n \frac{\sin(na)}{\sin(n(a-\frac{\pi}{2}))}$.

Si n est pair, posons $n=2p$, $p\in\mathbb{N}^*$. $c_n = c_{2p} = \frac{\sin(2pa)}{\sin(2pa-p\pi)} = (-1)^p$.

Si n est impair, posons $n=2p+1$. $c_n = c_{2p+1} = (-1)^p \tan((2p+1)a)$.

2ème cas. Si $e^{2ina} = (-1)^n$, alors $2na \in n\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ ou encore $a \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, c_n n'est pas défini.

Correction de l'exercice 548 ▲

Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x+iy$ à $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Remarquons que pour les deux ensembles $z=5$ n'est pas solution, donc

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie précisément que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A,B d'affixes respectives $3=(3,0)$ et $5=(5,0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A,B]$.

Ensuite pour

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2\\ &\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}\\ &\Leftrightarrow z\bar{z}-(z+\bar{z}) = 7\\ &\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8\\ &\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1=(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 553 ▲

En exprimant qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$, on trouve $z = \frac{a-be^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$. On peut encore écrire $z = A + B\cot\frac{\theta}{2}$, où A et B sont indépendants de θ, ce qui montre que le point d'affixe z décrit une droite. Géométriquement, cette droite est bien entendu la médiatrice du segment qui joint les points d'affixes a et b.

Correction de l'exercice 554 ▲

Méthode analogue à celle de l'exercice 553. On trouve $z = \frac{a-bke^{i\theta}}{1-ke^{i\theta}}$. On peut vérifier que le point d'affixe z décrit le cercle dont un diamètre joint les points correspondant à $\theta = 0$ et à $\theta = \pi$ (vérifier en cherchant le milieu z_0 de ce segment et en étudiant $|z - z_0|$).

Correction de l'exercice 555 ▲

1. Réciproque : $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$ (cela dépend de l'orientation du triangle).
2. $ADOE$ est un parallélogramme. Les trois triangles OBC, DBA et EAC sont directement isométriques, ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement à l'aide de rotations.

Correction de l'exercice 557 ▲

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) + (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) = 2u\bar{u} + 2v\bar{v} = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

Géométriquement il s'agit de l'identité du parallélogramme. Les points d'affixes $0, u, v, u+v$ forment un parallélogramme. $|u|$ et $|v|$ sont les longueurs des cotés, et $|u+v|, |u-v|$ sont les longueurs des diagonales. Il n'est pas évident de montrer ceci sans les nombres complexes ! !

Correction de l'exercice 565 ▲

1. Comme $(A_0, \dots, A_4)$ est un pentagone régulier, on a $OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = 1$ et $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi],$. On en déduit : $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}},$. On a bien $\omega_i = \omega_1^i$. Enfin, comme $\omega_1 \neq 0$, $1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.
2. $\mathrm{Re}(1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Comme $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1$ on en déduit : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est donc bien une solution de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. Etudions cette équation : $\Delta = 20 = 2^2.5$. Les solutions sont donc $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$, on en déduit que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. $BA_2^2 = |\omega_2 + 1|^2 = |\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\sin(\frac{4\pi}{5}) + 1|^2 = 1 + 2\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos^2(\frac{4\pi}{5}) + \sin^2(\frac{4\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$. Donc $BA_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $BI = |i/2 + 1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $BJ = BI - 1/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle C_1 et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point I de la question 4. On trace le cercle de centre I passant par le centre de C_1 : c'est le cercle $\mathscr{C}$. On trace le segment BI pour obtenir son point J d'intersection avec $\mathscr{C}$. On trace enfin le cercle de centre B passant par J : il coupe C_1 en A_2 et A_3, deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance A_2A_3 sur C_1, une fois depuis A_2, une fois depuis A_3. (en fait le cercle de centre B et passant par J', le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à J, coupe C_1 en A_1 et A_4, mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice !)

Correction de l'exercice 566 ▲

1.
2. si $|a| \neq |b|$: une solution unique,
   si $|a| = |b|$: une droite ou $\varnothing$.

Correction de l'exercice 567 ▲

1.
2. $\mathbb{U}\setminus\{1\}$, $i\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Correction de l'exercice 569 ▲

Les diagonales se coupent en leurs milieux, ont même longueur, et sont perpendiculaires $\Rightarrow$ carré.

Correction de l'exercice 570 ▲

1. $z\in\mathbb{R}$ ou $z\in -\frac{1}{2}+i\mathbb{R}$.
2. $z\in -1+i\mathbb{R}$ ou $z\in i\mathbb{R}$ ou $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.
3. $z\in i\mathbb{R}$ ou $|z-i|=\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 571 ▲

$(0,a,a+b,a+b+c=1)$ forme un losange donc l'un des nombres vaut 1 et les deux autres sont opposés $\Rightarrow \{a,b,c\}=\{1,i,-i\}$.

Correction de l'exercice 573 ▲

$z=x+iy \Rightarrow$ cercles $(\pm i,\sqrt{2})$ (laborieux).

Correction de l'exercice 574 ▲

On peut exprimer que (AB) est la médiatrice du segment $[MM']$, mais on choisit ici d'utiliser le cours sur les similitudes. Cherchons donc à écrire la réflexion d'axe (AB) en coordonnée complexe. Cette réflexion s'écrit $z\mapsto \alpha\bar{z}+\beta$, avec $|\alpha|=1$ et $arg(\alpha)=2arg(b-a)$. On obtient donc $\alpha=\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}$.
Pour déterminer β, on peut exprimer le fait que a est fixe :

$$a=\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{a}+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{a\bar{b}-b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$$

Finalement, la réflexion s'écrit :

$$z\mapsto \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\cdot z+\frac{a\bar{b}-b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}.$$

Correction de l'exercice 575 ▲

$d=$ orthocentre de abc.

Correction de l'exercice 577 ▲

$\omega=\frac{a(c\bar{c}-b\bar{b})+b(a\bar{a}-c\bar{c})+c(b\bar{b}-a\bar{a})}{a(\bar{c}-\bar{b})+b(\bar{a}-\bar{c})+c(\bar{b}-\bar{a})}$.

Correction de l'exercice 578 ▲

1. $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \exists\ \alpha\in\mathbb{R}$ tq $u=\alpha v$.
   $x,y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{|v|^2}\Leftrightarrow u=\frac{1}{\bar{v}}$.
2.
3. Il manque seulement les deux pôles.

Correction de l'exercice 579 ▲

1. On a $a = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $b = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. 1, z, z^2, z^3 et z^4 sont les cinq racines cinquièmes de 1 dans $\mathbb{C}$. Par suite, $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$. Mais alors

$$a+b = z+z^2+z^3+z^4 = -1$$

et

$$ab = (z+z^4)(z^2+z^3) = z^3+z^4+z^6+z^7 = z+z^2+z^3+z^4 = -1 \text{ (car } z^5 = 1).$$

a et b sont donc les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ dont les racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Enfin, puisque $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $a > 0$. Par suite, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. D'autre part, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = +\sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

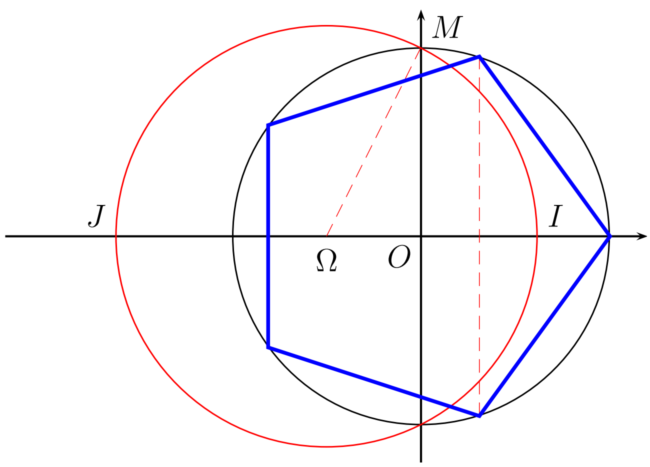
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.}$$

De même, en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Enfin, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

2. Le rayon du grand cercle vaut, d'après le théorème de PYTHAGORE :

$$R = \sqrt{\Omega O^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

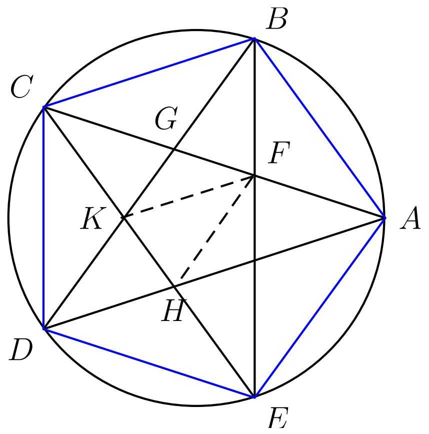
Donc $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Par suite, $x_I = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $x_J = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Ceci montre que les médiatrices des segments $[O,I]$ et $[O,J]$ coupent le cercle de centre O et de rayon 1 en quatre des cinq sommets du pentagone.



3. Posons $x = \frac{AF}{AC}$. D'après le théorème de THALES (je vous laisse vérifier les parallélismes),

$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{HK}{HC} = \frac{FG}{FC} = \frac{AC-2AF}{AC-AF} = \frac{1-2x}{1-x}.$$

Donc $x^2-3x+1=0$ et puisque $x<1$, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Puis
$\frac{AG}{AC} = \frac{AC-AF}{AC} = 1-x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{FG}{AF} = \frac{AC-2AF}{AF} = \frac{1}{x}-2 = \frac{2}{3-\sqrt{5}}-2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}-2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Définition du *nombre d'or*.

On veut que C partage le segment $[A,B]$ de telle sorte que $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$ (« $\frac{\text{petit}}{\text{moyen}}=\frac{\text{moyen}}{\text{grand}}$ ») c'est-à-dire, en posant $a=AB$ et $x=AC$, $\frac{x}{a}=\frac{a-x}{x}$ ou encore $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{x}{a}-1=0$ et donc, puisque $\frac{x}{a}>0$, $\frac{x}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0,618...$

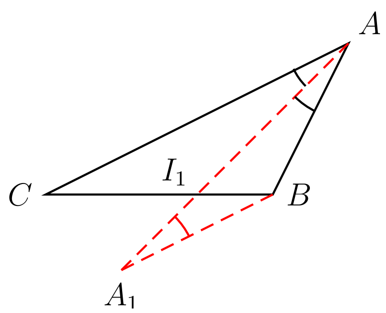
On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport $\frac{a}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618...$

Correction de l'exercice 580 ▲

1. On note I_1 le point d'intersection de la bissectrice (Δ_1) de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la droite (BC). La parallèle à (AC) passant par B coupe Δ_1 (puisque (AC) n'est pas parallèle à (Δ_1)) en un point A_1. Les angles alternes-internes $\widehat{CAA_1}$ et $\widehat{AA_1B}$ sont alors égaux. Puisque d'autre part, $\widehat{CAA_1}=\widehat{A_1AB}$, on en déduit que $\widehat{AA_1B}=\widehat{A_1AB}$ et donc que le triangle (ABA_1) est isocèle en B. D'après le théorème de THALÈS, on a alors

$$\frac{I_1B}{I_1C}=\frac{A_1B}{AC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b},$$

et donc puisque I_1 est entre B et C, $b\overrightarrow{I_1B}+c\overrightarrow{I_1C}=\vec{0}$, ou enfin $I_1=\text{bar}\{B(b),C(c)\}$.



On a aussi bien sûr les deux autres égalités $I_2=\text{bar}\{A(a),C(c)\}$ et $I_3=\text{bar}\{A(a),B(b)\}$ où I_2 et I_3 sont les points d'intersection des deux autres bissectrices avec (AC) et (AB) respectivement. Soit alors $I'=\text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$. D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$I'=\text{bar}\{A(a),I_1(b+c)\}=\text{bar}\{B(b),I_2(a+c)\}=\text{bar}\{C(c),I_3(a+b)\},$$

ce qui montre que I' est sur (AI_1), (BI_2) et (CI_3), c'est-à-dire sur les trois bissectrices. Par suite, $I'=I$.

2. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ ne sont pas deux à deux distincts} \Leftrightarrow z^2=z \text{ ou } z^3=z \text{ ou } z^3=z^2 \Leftrightarrow z\in\{-1,0,1\}.$$

Ensuite, pour $z\notin\{-1,0,1\}$,

$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ z^3-z=\lambda(z^2-z) \Leftrightarrow \frac{z^3-z}{z^2-z}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z+1\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}.$$

Finalement, (z,z^2,z^3) est un « vrai » triangle si et seulement si z n'est pas réel. Soit alors z un complexe non réel.

$$\begin{aligned} O \text{ centre du cercle inscrit au triangle } (PQR) &\Leftrightarrow O=\text{bar}\{P(QR),Q(PR),R(PQ)\} \\ &\Leftrightarrow z|z^2-z^3|+z^2|z-z^3|+z^3|z-z^2|=0 \Leftrightarrow z.|z|.|1-z|(|z|+z|1+z|+z^2 \\ &\Leftrightarrow |z|+z|1+z|+z^2=0\ (E)\ (\text{car } z\notin\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} |z|+z|1+z|+z^2=0 &\Leftrightarrow (z+\frac{|z|}{z})+|1+z|=0 \Rightarrow z+\frac{|z|}{z}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z+\frac{|z|}{z}=\bar{z}+\frac{|z|}{\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow z-\bar{z}-|z|\frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}}=0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(1-\frac{1}{|z|})=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{|z|}=0\ (\text{car } z\neq\bar{z}) \\ &\Leftrightarrow |z|=1 \end{aligned}$$

Posons donc $z=e^{i\theta}$ où $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$. En reportant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow e^{i\theta}+e^{-i\theta}+|1+e^{i\theta}|=0 \Leftrightarrow 2\cos\theta+|e^{i\theta/2}|.|2\cos\frac{\theta}{2}|=0 \\ &\Leftrightarrow \cos\theta+|\cos\frac{\theta}{2}|=0 \Leftrightarrow 2|\cos\frac{\theta}{2}|^2+|\cos\frac{\theta}{2}|-1=0 \Leftrightarrow |\cos\frac{\theta}{2}| \text{ est solution de l'équation } 2X^2+ \\ &\Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\in\left\{\frac{1}{2},-1\right\} \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta\in\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z\in\{j,j^2\} \end{aligned}$$

Les nombres complexes solutions sont donc j et j^2.

Correction de l'exercice 581 ▲

$$\begin{aligned} (A,B,C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow C=r_{A,\pi/3}(B) \text{ ou } C=r_{A,-\pi/3}(B) \Leftrightarrow c-a=(-j^2)(b-a) \text{ ou } c-a=(-j)(b-a) \\ &\Leftrightarrow (-1-j^2)a+j^2b+c=0 \text{ ou } (-1-j)a+jb+c=0 \Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0 \\ &\Leftrightarrow (j^2)^2a+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0 \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2+bz+c=0. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} (A,B,C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0 \\ &\Leftrightarrow (ja+j^2b+c)(j^2a+jb+c)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+(j+j^2)(ab+ac+bc)=0 \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc, \end{aligned}$$

puis

(A,B,C) équilatéral $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$

$$\Leftrightarrow -a^2+ab+ac-bc-b^2+bc+ba-ac-c^2+ca+cb-ab=0$$

$$\Leftrightarrow (c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)=0 \Leftrightarrow \frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.$$

Correction de l'exercice 582 ▲

A- Solutions algébriques.] Pour $z\in\mathbb{C}$, posons $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1. $$|Z|=1\Leftrightarrow \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2}=1\Leftrightarrow (1+x)^2+y^2=(1-x)^2+y^2 \text{ et } (x,y)\neq(1,0)\Leftrightarrow 4x=0\Leftrightarrow x=0.$$
   L'ensemble cherché est la droite (Oy).
2. $$|Z|=2\Leftrightarrow (1+x)^2+y^2=4((1-x)^2+y^2)\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-10x+3=0 \text{ et } (x,y)\neq(1,0)$$
   $$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}x+1=0 \text{ et } (x,y)\neq(1,0)$$
   $$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9} \text{ et } (x,y)\neq(1,0)$$
   $$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}.$$
   L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{5}{3},0\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.
3. $$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=\overline{Z}\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z}=\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$$
   $$\Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z})=(1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z\neq1\Leftrightarrow z-\bar{z}=\bar{z}-z \text{ et } z\neq1$$
   $$\Leftrightarrow z=\bar{z} \text{ et } z\neq1\Leftrightarrow z\in\mathbb{R} \text{ et } z\neq1.$$
   L'ensemble cherché est la droite (Ox) privé du point $(1,0)$.
4. $$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=-\overline{Z}\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z}=-\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z})=-(1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z\neq1$$
   $$\Leftrightarrow 1-z\bar{z}=-1+\bar{z} \text{ et } z\neq1\Leftrightarrow |z|^2=1 \text{ et } z\neq1\Leftrightarrow |z|=1 \text{ et } z\neq1.$$
   L'ensemble cherché est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

B- Solutions géométriques. Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 et $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché. Soit M un point du plan distinct de B d'affixe z.

1. $$M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow |z+1|=|z-1|\Leftrightarrow AM=BM\Leftrightarrow M\in\text{med}[AB]=(Oy).$$
2. Soit $\Omega=\text{bar}(A(1),B(-4))$. On a $x_\Omega=\frac{-1}{5}(x_A-4x_B)=\frac{5}{3}$ et $y_\Omega=\frac{-1}{5}(y_A-4y_B)=0$.

   $$M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow |z+1|^2=4|z-1|^2\Leftrightarrow AM^2=4BM^2$$
   $$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2-4\overrightarrow{BM}^2=0\Leftrightarrow (\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})^2-4(\overrightarrow{B\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})^2=0$$
   $$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{\Omega M}^2+2(\overrightarrow{A\Omega}-4\overrightarrow{B\Omega}).\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{A\Omega}^2-4\overrightarrow{B\Omega}^2=0$$
   $$\Leftrightarrow \Omega M^2=\frac{1}{3}(\Omega A^2-4\Omega B^2)$$

Or, $\Omega A^2 = (\frac{5}{3}+1)^2 = \frac{64}{9}$ et $\Omega B^2 = (\frac{5}{3}-1)^2 = \frac{4}{9}$. Par suite,

$$\frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) = \frac{1}{3}(\frac{64}{9} - \frac{16}{9}) = \frac{16}{9}.$$

Ainsi,

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{4}{3},$$

et on retrouve le cercle de centre $\Omega(\frac{5}{3},0)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0\ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0\ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}. \end{aligned}$$

et on retrouve la droite (Ox) privée du point $(1,0)$.

4.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B. \end{aligned}$$

et on retrouve le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

Correction de l'exercice 583 ▲

Soit f la transformation considérée.

1. f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3,-1)$.
2. $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3,0)$.
3. $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
4. $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1-2i$. Comme $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1,-2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 584 ▲

1. L'égalité $p = \frac{a-ib}{1-i}$ est équivalente à deux autres assertions ayant un sens géométrique plus clair. D'une part :
$$p = \frac{a-ib}{1-i} \Leftrightarrow p = \frac{a+b}{2} + i\frac{(a-b)}{2}$$
(Attention, a et b sont complexes : ceci n'est pas une forme algébrique.) D'autre part,
$$p = \frac{a-ib}{1-i} \Leftrightarrow (1-i)p = a - ib.$$
Ceci fournit deux façons de prouver le résultat demandé.
   (a) Dans le premier cas, on reconnaît que $(a+b)/2$ est l'affixe du milieu M de A et B, que $(a-b)/2$ est l'affixe du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, et que $i(a-b)/2$ correspond à la rotation de $\pi/2$ de ce vecteur. On voit donc que le point d'affixe $\frac{a+b}{2} + i\frac{(a-b)}{2}$ est le point obtenu en translatant M du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ (avec la notation A' introduite plus haut). Ce point est bien le milieu P du carré.
   (b) Dans le second cas, on réécrit l'égalité sous la forme
$$a - p = i(b-p).$$
Ceci est vrai car cela signifie que A est l'image de B par la rotation de centre P est d'angle $\pi/2$, ce qui est vrai dans un carré.

2. Il s'agit de montrer que $\frac{s-q}{r-p}=i$. On calcule donc $\frac{s-q}{r-p}$ en utilisant la question précédente :

$$\frac{s-q}{r-p}=\frac{d-ia-(b-ic)}{(c-id)-(a-ib)}=\frac{d-b+i(c-a)}{c-a+i(b-d)}$$

Là, on voit directement que le numérateur est égal à i fois le dénominateur et c'est terminé (on le voit d'autant plus facilement que l'on sait que c'est ce que l'on doit montrer : sinon, il faut une étape de simplification supplémentaire).

3. Considérer par exemple des rotations de centres P,Q,R ou S et d'angle $\pi/2$.

Remarque : il existe une version un peu plus générale du théorème pour un quadrilatère $ABCD$ quelconque.

Correction de l'exercice 585 ▲

1. Dans chaque carré, les sommets sont obtenus les uns des autres par rotations de $\pi/2$ par rapport aux centres. On a donc $a-p=i(b-p)$, $b-q=i(c-q)$ et $c-r=i(a-r)$. En développant ces expressions on obtient $p=\frac{a-ib}{1-i}$, $q=\frac{b-ic}{1-i}$ et $r=\frac{c-ia}{1-i}$.
2. Le centre de gravité de ABC en est l'isobarycentre, donc son affixe est $\frac{1}{3}(a+b+c)$. Celui de PQR a pour affixe $\frac{1}{3}(p+q+r)$. Il s'agit donc simplement de montrer que $a+b+c=p+q+r$. Or d'après la question précédente, $p+q+r=\frac{a-ib+b-ic+c-ia}{1-i}=a+b+c$, ce qu'il fallait démontrer.
3. Il s'agit de montrer que l'argument de $\frac{q-a}{r-p}$ est $\pm\pi/2$. Pour cela, il suffit de calculer :

$$\frac{q-a}{r-p}=\frac{b-a+i(a-c)}{c-a+i(b-a)}=-i$$

On remarque que non seulement les segments sont perpendiculaires, mais ils sont de même longueur (ce qui n'était pas demandé).

La question précédente montre que la droite (AQ) est la hauteur de PQR issue de Q. Le même raisonnement appliqué aux deux autres carrés permet de montrer que (AQ), (BR) et (CP) sont les hauteurs de PQR. Elles sont donc concourantes.

Correction de l'exercice 586 ▲

Par construction, A est l'image de B par la rotation de centre W et d'angle $2\pi/3$. En posant $j=e^{2i\pi/3}$, on a donc

$$a-w=j(b-w),$$

autrement dit

$$w=\frac{a-jb}{1-j}.$$

On obtient de même $u=\frac{b-jc}{1-j}$ et $v=\frac{c-ja}{1-j}$.
On en déduit tout d'abord que

$$u+v+w=\frac{1}{1-j}(a-jb+b-jc+c-ja)=a+b+c.$$

Donc $\frac{1}{3}(u+v+w)=\frac{1}{3}(a+b+c)$, c'est-à-dire que les triangles ABC et UVW ont même centre de gravité. Ensuite, par la caractérisation des triangles équilatéraux, UVW est équilatéral direct ssi $u+jv+j^2w=0$. Or :

$$u+jv+j^2w=\frac{1}{1-j}\left(b-jc+j(c-ja)+j^2(c-ja)\right)=0.$$

Donc UVW est bien équilatéral direct.

Correction de l'exercice 587 ▲

1. Développons puis refactorisons $y(z-x)+z(x-y)=x(z-y)$. On en déduit le résultat, par inégalité triangulaire.
2. Si deux des points sont égaux, alors le membre de droite n'a qu'un seul terme et l'inégalité est une égalité, et trois points non alignés sont toujours cocycliques.
3. On a $(b-a)(d-c)+(d-a)(c-b)=ad-cd-ab+cb=(a-c)(d-b)$. Par inégalité triangulaire, on a donc $|(a-c)(d-b)|\leqslant|(b-a)(d-c)|+|(d-a)(c-b)|$ c'est-à-dire $AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$.
4. Rappelons le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : si z et z' sont des complexes non nuls, alors $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$, avec égalité ssi $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+,\ z'=\lambda z$. Ici, on a donc égalité ssi $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+$ tel que $(b-a)(d-c)=\lambda(d-a)(c-b)$, autrement dit ssi $[a,b,c,d]\in\mathbb{R}_+$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 590 ▲

Si $\theta\equiv 0[\pi]$, c'est la droite (AB). Sinon, c'est un cercle dont $[AB]$ est une corde, par le théorème de l'angle inscrit.
Si $\theta\equiv\pi/2[\pi]$, c'est le cercle de diamètre $[AB]$.
Sinon, par le théorème de l'angle au centre, le centre de ce cercle a pour affixe $\frac{a+b}{2}\pm i\frac{b-a}{2\tan\theta}$, selon si θ est aigu ou obtus.

Correction de l'exercice 591 ▲

1. C'est une similitude directe de rapport $|1+i|=\sqrt{2}$, d'angle $-\pi/4$. Son centre Ω est son (unique) point fixe, son affixe ω vérifie donc $\omega=(1-i)\omega+i$ c'est-à-dire $\omega=\frac{i}{i}=1$.
2. C'est une similitude indirecte de rapport $|i|=1$, donc un antidéplacement. C'est donc une réflexion ou une réflexion glissée. Cherchons d'éventuels points fixes.
   Un point $z=x+iy$ est fixe ssi $x+iy=i(x-iy)+1-i=y+1+i(x-1)$ autrement dit ssi $x-y=1$.
   (Rédaction alternative de la recherche de points fixes, sans prendre la partie réelle et imaginaire : un point d'affixe z est fixe ssi :
   $$\begin{aligned} z=i\bar{z}+1-i &\Leftrightarrow z-i\bar{z}-1+i=0\\ &\Leftrightarrow \overline{(1-i)}z+(1-i)\bar{z}-2=0\end{aligned}$$
   On reconnaît l'équation complexe de la même droite.)
   L'antidéplacement est donc la réflexion d'axe d'équation $x-y-1=0$.
3. C'est une similitude indirecte (notons-la s) de rapport 2. Elle admet donc un point fixe d'affixe ω vérifiant $\omega=2i\bar{\omega}+3$, ce qui donne après calcul $\omega=-1-2i$.
   Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport 2. Alors la similitude s s'écrit $h\circ\sigma$, avec σ une réflexion que l'on peut obtenir comme $h^{-1}\circ s$. En coordonnée complexe, h^{-1} s'écrit $z\mapsto\frac{1}{2}(z+1+2i)-1-2i=\frac{1}{2}z-\frac{1+2i}{2}$. En composant, on trouve que σ est représentée par
   $$z\mapsto\frac{1}{2}(2i\bar{z}+3)-\frac{1+2i}{2}=i\bar{z}+1-i.$$
   D'après la question précédente, c'est la réflexion d'axe $y=x-1$.
4. C'est la réflexion glissée composée de la translation d'affixe 1 et de la réflexion suivant l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 592 ▲

1. Par le cours, la rotation d'angle θ et de centre d'affixe ω est représentée par l'application
   $$\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto e^{i\theta}(z-\omega)+\omega.$$
   La rotation d'angle $\pi/4$ et de centre d'affixe $2+3i$ est donc représentée par l'application
   $$\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto e^{i\pi/4}(z-(2+3i))+2+3i=e^{i\pi/4}z+\frac{4+\sqrt{2}+i(6-5\sqrt{2})}{2}.$$

2. La réflexion d'axe d'équation $y = 2x+1$ est représentée par une application de la forme

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto a\bar{z}+b,$$

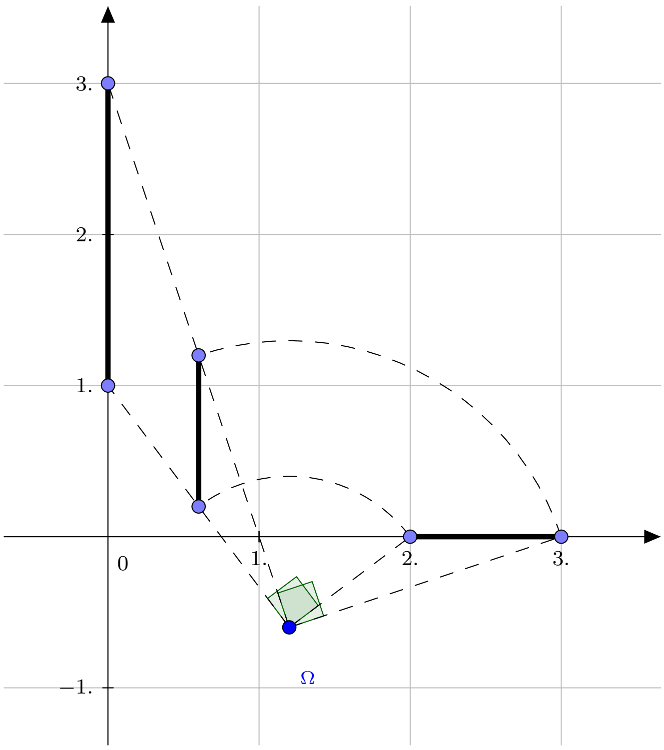
où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ sont des paramètres à déterminer. On sait que a est le nombre complexe de module un dont l'argument est le double de l'angle entre l'axe des abscisses et l'axe de la réflexion. Donc dans ce cas, $a = e^{2i\arctan(2)}$. On peut aussi calculer la forme algébrique de a en écrivant $a = \frac{(1+2i)^2}{|(1+2i)^2|} = \frac{-3+4i}{5}$.
Calculons b. On peut par exemple injecter un affixe particulier z et son image z' dans l'équation $z' = \frac{-3+4i}{5}\bar{z}+b$ et obtenir b. Le plus simple est de prendre l'affixe d'un point sur l'axe de la réflexion, qui est donc un point fixe de la réflexion. Prenons par exemple $z = i = z'$. On obtient l'égalité $i = \frac{3-4i}{5}i+b$, d'où $b = i\left(1-\frac{3-4i}{5}\right) = i\frac{2+4i}{5} = \frac{-4+2i}{5}$.
Finalement, la réflexion d'axe d'équation $y = 2x+1$ est représentée par l'application :

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{(-3+4i)\bar{z}-4+2i}{5}.$$

Correction de **l'exercice 593 ▲**

Manifestement le rapport est 2 car le segment donné est envoyé sur un segment deux fois plus long.

1. Si la similitude est directe, son angle est $\pi/2$, donc la similitude s'écrit $z \mapsto 2iz+b$ en coordonnée complexe. Comme $s(2) = i$, on en déduit que $4i+b = i$ c'est-à-dire $b = -3i$.
Le point fixe a alors pour affixe $\dfrac{b}{1-2i} = \dfrac{-3i}{1-2i} = \dfrac{6-3i}{5}$.

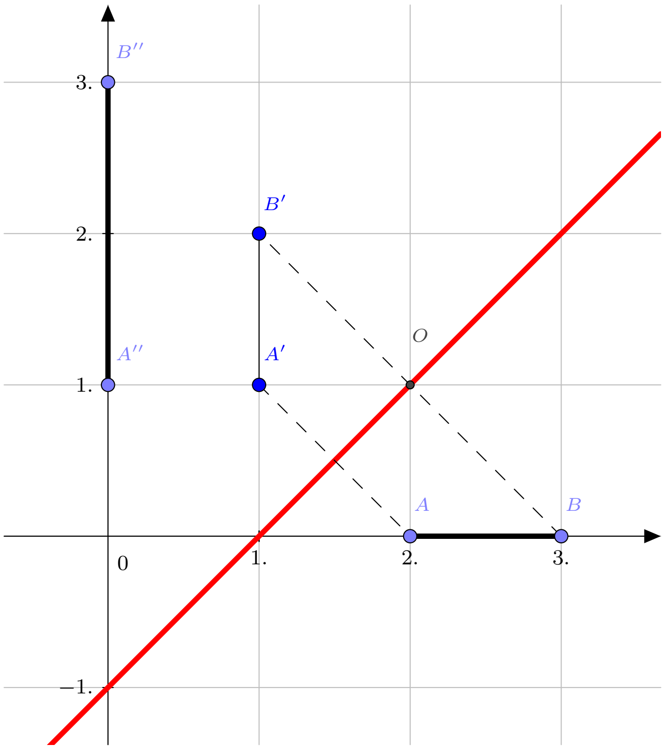


2. La similitude indirecte est obtenue en composant la similitude directe précédente par la symétrie d'axe passant par i et $3i$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées. Cette symétrie s'écrit $z \mapsto -\bar{z}$. On en déduit que la similitude indirecte envoyant les points d'affixes 2 et 3 sur ceux d'affixes i et $3i$ s'écrit

$$z \mapsto -\overline{(2iz-3i)} = 2i\bar{z}-3i.$$

(Alternativement, et sans utiliser la question précédente, on sait d'après l'énoncé que la similitude indirecte doit s'écrire $z \mapsto 2i\bar{z}+b$, et comme $s(2) = i$, on en déduit bien $i = 4i+b$ d'où $b = -3i$.)
Cette similitude possède un unique point fixe d'affixe ω, solution de l'équation $\omega = 2i\bar{\omega}-3i$.

On remarque que ω est donc aussi l'unique point fixe de $s \circ s$, ce qui donne l'équation $\omega = 2i\overline{(2i\bar{\omega} - 3i)} - 3i = 4\omega - 6 - 3i$ d'où $\omega = 2 + i$.
Finalement, comme on sait que l'axe est dirigé par le vecteur d'affixe $1 + i$ et que cet axe passe par le centre de la similitude, cet axe est la droite d'équation $y = x - 1$



Correction de l'exercice 594 ▲

La similitude est :

— une translation ssi $a^2 = 1$ c'est-à-dire ssi $a \in \{-1, 1\}$.
— une homothétie de rapport -4 ssi $a^2 = -4$ c'est-à-dire ssi $a \in \{2i, -2i\}$.
— une rotation d'angle $\pi/2$ ssi $a^2 = e^{i\pi/2}$ c'est-à-dire ssi $a \in \{e^{i\pi/4}, e^{-3i\pi/4}\}$.

Correction de l'exercice 595 ▲

1. Il y a exactement deux similitudes envoyant le couple (A, B) sur le couple (B, C) : une directe et une indirecte, et l'une se déduit de l'autre en composant (à gauche) par la réflexion d'axe (BC).
D'après l'énoncé, le triangle ABC est rectangle isocèle en A. On a donc $BC = \sqrt{2}AB$ et donc s est de rapport $\sqrt{2}$. De plus, une similitude conservant les angles non orientés, on a $(AB) \perp (AC) \Rightarrow (s(A)s(B)) \perp (s(A)s(C))$, c'est-à-dire que $s(C)$ appartient à la perpendiculaire à $(s(A)s(B)) = (BC)$ passant par $s(A) = B$. Comme d'autre part on sait que $Cs(C) = \sqrt{2}BC$, cela donne deux possibilités, suivant que la similitude est directe ou indirecte.
2. Si la similitude est directe, son angle est $3\pi/4$ puisque $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 3\pi/4$.

On fixe maintenant un repère orthonormé direct du plan dont l'origine est A. On note a, b et c les affixes des trois points et on a donc $a = 0$ et $c = ib$ d'après l'énoncé.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que s s'écrive $z \mapsto \alpha z + \beta$ en coordonnée complexe. Par ce qui précède, on a $\alpha = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} = -1 + i$. D'autre part, comme A est envoyé sur B, on a $b = \beta$.
La similitude s'écrit donc $z \mapsto (i-1)z + b$. Son unique point fixe Ω a pour affixe

$$\omega = \frac{b}{1-(i-1)} = \frac{b}{2-i} = \frac{2b+ib}{5} = \frac{2b+c}{5}.$$

On peut reformuler ceci sous la forme $\omega = \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}b + \frac{1}{5}c$, ce qui montre que Ω est le barycentre de $(A, 2/5)$, $(B, 2/5)$ et $(C, 1/5)$.

3. On fixe maintenant un repère orthonormé direct du plan dont l'origine est A, et tel que B soit sur l'axe des abscisses (donc son affixe est réel). Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ tel que s s'écrive $z\mapsto\alpha\bar{z}+\beta$ en coordonnée complexe. On a $s(0)=b$ donc $\beta=b$, et $s(b)=c=ib$ donc $\alpha\bar{b}+b=ib$ ce qui donne $\alpha=i-1$. La transformation s'écrit donc dans ce repère

$$z\mapsto(i-1)\bar{z}+b,$$

et c est envoyé sur $(i+2)b$.

Cherchons un point fixe ω pour s : si $s(\omega)=\omega$, alors en particulier $s(s(\omega))=\omega$, ce qui s'écrit $(i-1)\overline{(i-1)\bar{z}+b}+b=\omega$, autrement dit $2\omega+ib=\omega$ et finalement $\omega=-ib$. Réciproquement, on vérifie que le point d'affixe $-ib$ est bien fixe sous S. Comme on peut écrire $\omega=-ib=-c=2\cdot a-c$, on en déduit que Ω est le barycentre de $(A,2)$ et $(C,-1)$.

Cherchons maintenant l'axe de la similitude indirecte. C'est une droite passant par le centre de la similitude et d'après l'écriture de la similitude, elle est dirigée par un vecteur d'affixe $e^{3i\pi/8}$. Un paramétrage en coordonnée complexe de cette droite est donc :

$$\Delta=\{-c+t.e^{3i\pi/8}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

Correction de l'exercice 596 ▲

Soit $z\mapsto\alpha z+\beta$ la représentation complexe d'une similitude directe. En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\alpha) & -\mathrm{Im}(\alpha)\\ \mathrm{Im}(\alpha) & \mathrm{Re}(\alpha)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\beta)\\ \mathrm{Im}(\beta)\end{pmatrix}$.

On en déduit que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}ax+cy+e\\bx+dy+f\end{pmatrix}$ représente une similitude directe ssi :

$$c=-b \text{ et } a=d$$

Réciproquement, toute transformation $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}ax-by+e\\bx+ay+f\end{pmatrix}$ peut s'écrire $z\mapsto(a+ib)z+e+if$ et correspond donc à une similitude directe.

Pour les similitudes indirectes, on trouve la condition

$$c=b \text{ et } a=-d.$$

L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui représente ϕ est $z=x+iy\mapsto(-2x-y-1)+i(x-2y+1)=-2x-y+i(x-2y)-1+i=(-2+i)z-1+i$. C'est une similitude directe de rapport $\sqrt{5}$, d'angle $arg(-2+i)$ et de centre d'affixe $\frac{-1+i}{3-i}$.

La deuxième est la composée d'une réflexion suivant une droite vectorielle et d'une homothétie de rapport 2 et de centre O.

Correction de l'exercice 597 ▲

1. L'application s est une similitude directe, de rapport $2/3$, d'angle $arg(i)=\pi/2$, et de centre d'affixe $\frac{\frac{1-5i}{3}}{1-\frac{2}{3i}}=\frac{13-13i}{13}=1-i=z_A$.
2. (a) On a $AB_{n+1}=s(A)s(B_n)=\frac{2}{3}AB_n$.

   (b) D'après la question précédente, la suite réelle AB_n est géométrique de raison $2/3$ et de terme initial AB, donc :

$$\forall n\in|||,AB_n=\left(\frac{2}{3}\right)^nAB.$$

Soit maintenant $n \in |||$. Le point B_n appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ssi $AB_n \leqslant 10^{-2}$. Or, on a

$$\begin{aligned}
AB_n \leqslant 10^{-2} &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n AB \leqslant 10^{-2} \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln(AB) \leqslant -\ln(100) \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant -\ln(AB) - \ln(100) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(AB)+\ln(100)}{\ln(3)-\ln(2)}
\end{aligned}$$

On en déduit que le plus petit entier N tel que $\forall n \geqslant n, AB_n \leqslant 10^{-2}$ est $\left\lceil \frac{\ln(AB)+\ln(100)}{\ln(3)-\ln(2)} \right\rceil$ (partie entière supérieure du réel).

Comme $AB = 15/2$, on peut calculer explicitement n à l'aide d'une calculatrice et on trouve $N = 17$, mais ce n'était pas demandé.

(c) Pour tout n, les points A, B et B_n sont distincts. Ils sont alignés ssi

$$2 \cdot arg\left(\frac{b_n - a}{b-a}\right) = 0\,(\in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - a &= s(b_n) - s(a) \\
&= \frac{2}{3}ib_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i - \left(\frac{2}{3}ia + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\right) \\
&= \frac{2}{3}i(b_n - a).
\end{aligned}$$

La suite complexe $(b_n - a)_{n\in|||}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}i$, et donc pour tout $n \in |||$ on a

$$b_n - a = \left(\frac{2}{3}i\right)^n \cdot (b-a).$$

On en déduit que dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$2 \cdot arg\left[\frac{b_n - a}{b-a}\right] = 2 \cdot arg\left[\left(\frac{2}{3}i\right)^n\right] = 2n \cdot arg\left(\frac{2}{3}i\right) = 2n \cdot \frac{\pi}{2} = n\pi,$$

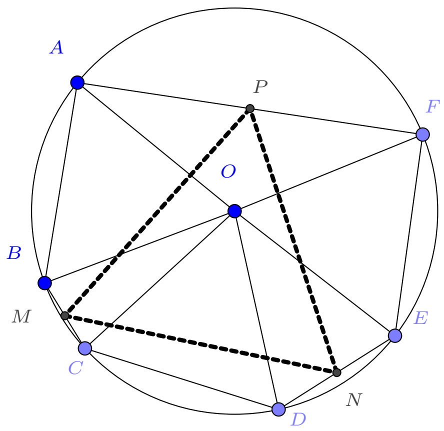
et donc que A, B et B_n sont alignés ssi $n\pi \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow n \equiv 0[2]$, autrement dit ssi n est pair.

Correction de l'exercice 598 ▲

1. Le triangle ABC est équilatéral direct ssi C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$. Ceci est équivalent à $c - a = e^{i\pi/3}(b-a) = -j^2(b-a)$. Or, on a :

$$\begin{aligned}
c - a = -j^2(b-a) &\Leftrightarrow c - a(1+j^2) + bj^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow aj + bj^2 + c = 0 \\
&\Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0.
\end{aligned}$$

2. Fixons un repère orthonormé direct de centre O.



D'après l'énoncé, on a $b = -j^2 a$, $d = -j^2 c$ et $f = -j^2 e$. On en déduit :

$$\begin{aligned} m + jn + j^2 p &= \frac{b + c + j(d+e) + j^2(f+a)}{2} \\ &= \frac{-j^2 a + c + j(-j^2 c + e) + j^2(-j^2 e + a)}{2} \\ &= \frac{a(j^2 - j^2) + c(1 - j^3) + e(j - j^4)}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après la première question, MNP est équilatéral direct.

Correction de l'exercice 599 ▲

Soit O le centre de gravité de ABC. On choisit un repère de centre O tel que l'affixe a de A soit réel. On a alors $b = ja$ et $c = j^2 a$.

1. On a l'égalité d'angles de droites $(OA, BA) = -\pi/6$ (angle inscrit ou calcul en coordonnées). On en déduit que la réflexion d'axe (AB) s'écrit $z \mapsto \alpha\bar{z} + \beta$, avec $\alpha = e^{-\pi/3} = -j$. Ensuite, l'image de l'origine O par la réflexion σ_{AB} est le point d'affixe $-j^2 a$. Finalement, vis-à-vis du repère choisi, la réflexion σ_{AB} est représentée en coordonnée complexe par :
$$z \mapsto -j\bar{z} - j^2.$$
2. On calcule de même que les réflexions suivant (BC) et (CA) s'écrivent $z \mapsto -\bar{z} - 1$ et $z \mapsto -j^2\bar{z} - j$. Soit m l'affixe de M. D'après ce qui précède, ses images par les trois réflexions sont :
$$a' = -\bar{m} - 1, \quad b' = -j^2\bar{m} - j, \quad c' = -j\bar{m} - j^2.$$
La relation $1 + j + j^2 = 0$ donne alors $\frac{1}{3}(a' + b' + c') = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 600 ▲

1. Le point E est l'image de A par la composée des quatre symétries centrales de centre M_1, ... M_4. Montrons que cette composée est l'identité. Par le cours, le composée de ces quatre rotations est une translation. Il suffit alors de tester un point particulier pour vérifier que c'est l'identité. Si $A = M_1$ par exemple, on voit que $A = E$ en utilisant le théorème de Thalès.
2. On a $2z = (z + z') + (z - z')$, d'où par inégalité triangulaire $2|z| \leqslant |z + z'| + |z - z'|$.
3. On a $a = m_1 - m_2 + t$, $b = m_1 + m_2 - t$, $c = -m_1 + m_2 + t$ et $d = -m_1 - m_2 - t$.
Le périmètre de $ABCD$ est
$$\begin{aligned} p &= |b-a| + |c-b| + |d-c| + |a-d| \\ &= |2m_2 - 2t| + |-2m_1 + 2t| + |-2m_2 - 2t| + |2m_1 + 2t| \\ &= 2\left(|m_1 + t| + |m_1 - t| + |m_2 + t| + |m_2 - t|\right). \end{aligned}$$

4. Le quadrilatère AM_1OM_4 est un parallélogramme direct ssi $a = m_1 - m_2$ c'est-à-dire ssi $t = 0$. Il s'agit de montrer que le périmètre calculé plus haut est minimal lorsque $t = 0$. D'après la question 3, on a bien

$$|m_1 - t| + |m_1 + t| \geqslant 2|m_1| \text{ et } |m_2 - t| + |m_2 + t| \geqslant 2|m_2|,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 603 ▲

Nous avons par la formule de Moivre

$$\cos 5\theta + i \sin 5\theta = e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5.$$

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \cos 5\theta & = & \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ \sin 5\theta & = & 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta \end{array}$$

Remarque : Grâce à la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on pourrait continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Correction de l'exercice 612 ▲

1. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ ssi $x = \pi/6 + k\pi/2$ ou $x = \pi/18 + k\pi/3$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ ssi $x = 5\pi/14 + 6k\pi/7$ ou $x = \pi/2 + 6k\pi/5$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\cos(3x) = \sin(x)$ ssi $x = \pi/8 + k\pi/2$ ou $x = -\pi/4 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 613 ▲

L'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m$ a des solutions ssi $m \in [-2, 2]$ et pour $m = \sqrt{2}$, les solutions sont $x = \pi/12 + 2k\pi$ ou $x = -5\pi/12 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 614 ▲

$\cos(5x) + \cos(3x) \leqslant \cos x$ ssi $2\cos(4x)\cos(x) \leqslant \cos x$ et $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$ ssi $\cos x > 1/2$ ssi $x \in]-\pi/6 + 2k\pi, \pi/6 + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 615 ▲

1. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$ ssi $x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/10 + 2k\pi/5$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$ ssi $x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 616 ▲

1. $\frac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3}$.
2. $2^n \cos(n\pi/3)$.
3. $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\frac{n\theta}{2}$.
4. $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \sin\frac{(n+2)\theta}{2}$.
5. $\left(2\cos\frac{b}{2}\right)^n \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 617 ▲

1. $\dfrac{n\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{n\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ si $\theta\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$.
2. $\dfrac{3\sin(n\theta/2)\sin\big((n+1)\theta/2\big)}{4\sin(\theta/2)}-\dfrac{\sin(3n\theta/2)\sin\big(3(n+1)\theta/2\big)}{4\sin(3\theta/2)}$.

Correction de l'exercice 618 ▲

$x\equiv -y\equiv \pm\frac{2\pi}{3}(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

Correction de l'exercice 619 ▲

1. $=3/2$.
2. $32\cos^6(\theta)=\cos 6\theta+6\cos 4\theta+15\cos 2\theta+10 \Rightarrow \Sigma=\frac{15}{8}$.
3. $\Sigma_p=\frac{pC_{2p}^p}{2^{2p-1}}$.

Correction de l'exercice 620 ▲

$x\equiv 0(\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{n})$, $x\not\equiv\frac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,\pi)$.

Correction de l'exercice 621 ▲

$\frac{1}{2}\left((x+e^{i\alpha})^n+(x+e^{-i\alpha})^n\right)=0\Leftrightarrow x=\mathrm{cotan}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\sin\alpha-\cos\alpha$.

Correction de l'exercice 622 ▲

$S=\frac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}}+\frac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}}+\cdots+\frac{u-u^{-1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}$.
$\frac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}}+\frac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}}=\frac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}$.
$\frac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}+\frac{u-u^{-1}}{u^8-u^{-8}}=\frac{u^7-u^{-7}}{u^8-u^{-8}}\ \ldots$
$\Rightarrow S=\frac{u^{2^n-1}-u^{-2^n+1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}=\frac{\sin\left((2^n-1)\theta\right)}{\sin(2^n\theta)}$.

Correction de l'exercice 623 ▲

$\tan(nx)=\frac{C_n^1\tan x-C_n^3\tan^3x+\cdots}{C_n^0-C_n^2\tan^2x+\cdots}$.

Correction de l'exercice 624 ▲

$z=e^{i\theta}\Rightarrow a=\tan\frac{\theta}{2}$ pour $\theta\not\equiv\pi(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

Correction de l'exercice 625 ▲

1. $\sin x=0\Leftrightarrow x\in\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\{0,\pi,2\pi\}$.
2. $\sin x=1\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
3. $\sin x=-1\Leftrightarrow x\in-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.
4. $\cos x=1\Leftrightarrow x\in 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\{0,2\pi\}$.
5. $\cos x=-1\Leftrightarrow x\in\pi+2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\{\pi\}$.
6. $\cos x=0\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$.
7. $\tan x=0\Leftrightarrow x\in\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\{0,\pi,2\pi\}$.
8. $\tan x=1\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 626 ▲

1. $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
3. $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 627 ▲

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$.
2. $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$.
3. $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\right\}$.
4. $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.
6. $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
7. $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
8. $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
9. $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
10. $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
11. $$\sin(2x) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x + \pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = x + \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = -x + 2k\pi)$$
$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{2k\pi}{3})$$
De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\}$.
12. $$12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Correction de l'exercice 628 ▲

1. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$.

3. Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\cos x > \cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow (2\cos\frac{x}{2}+1)(\cos\frac{x}{2}-1) > 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}+1 < 0 \text{ et } \cos\frac{x}{2} \neq 1$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{x}{2} \notin 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right[\text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{4\pi}{3}+4k\pi, \frac{8\pi}{3}+4k\pi\right[\text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in]\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$$

4. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos^2 x \geqslant \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \geqslant \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-\pi, \pi]$.
5. Pour $x \in [0, 2\pi]$, $\cos^2 x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.
6. Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\cos\frac{x}{3} \leqslant \sin\frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2k\pi \leqslant \frac{x}{3}-\frac{\pi}{4} \leqslant \pi + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \leqslant x \leqslant 3\pi + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Correction de l'exercice 629 ▲

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\times\frac{\pi}{8})\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, et puisque $\cos\frac{\pi}{8} > 0$,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.}$$

De même, puisque $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\times\frac{\pi}{8})\right)}$ et

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Correction de l'exercice 630 ▲

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Correction de l'exercice 631 ▲

Pour n naturel non nul, on pose $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)}$. • $S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2\cos a_1$ • Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $S_n = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$ alors

$$S_{n+1} = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)}$$
$$= 2\cos(a_{n+1}) S_n = 2^{n+1} \cos a_1 \ldots \cos a_{n+1}.$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$. Ensuite, pour $n \geqslant 1$, $\sum \cos(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = \mathrm{Re}(S_n) = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$ (et on obtient aussi $\sum \sin(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = \mathrm{Im}(S_n) = 0$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum \cos(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n.}$$

Correction de l'exercice 632 ▲

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque a est dans $]0,\pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul k, $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0,\pi[$ et donc $\sin\frac{a}{2^k} \neq 0$. De plus, puisque $\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(a)\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}.$$

$$\boxed{\forall a \in]0,\pi[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}.}$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{a}{2^k}\right) > 0$ car $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0,\frac{\pi}{2}[$. Puis

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right) - \ln\left(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right).$$

Maintenant, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right) - \ln\left(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

$$\boxed{\forall a \in]0,\pi[, \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).}$$

Correction de l'exercice 633 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2^{4\cos^2 x+1} + 16.2^{4\sin^2 x-3} = 20 &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1} + 16.2^{1-4\cos^2 x} = 20 \Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} - 10 + 16\times 2^{-4\cos^2 x} = 0\\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} - 10 + \frac{16}{2^{4\cos^2 x}} = 0 \Leftrightarrow (2^{4\cos^2 x})^2 - 10\times 2^{4\cos^2 x} + 16 = 0\\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} = 2 \text{ ou } 2^{4\cos^2 x} = 8 \Leftrightarrow 4\cos^2 x = 1 \text{ ou } 4\cos^2 x = 3\\
&\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 634 ▲

1. Tout d'abord, d'après la formule de MOIVRE,

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \text{ et } \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.}$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et $\theta \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \notin \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Soit donc $\theta \notin \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta) = \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\boxed{\forall\theta \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\ \tan(3\theta) = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}.}$$

2. Soit $a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1ère méthode.** a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \frac{3a-a^3}{1-3a^2} &\Leftrightarrow (3x-x^3)(1-3a^2) = (1-3x^2)(3a-a^3) \text{ (car } \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ne sont pas solution de l'équation)}\\ &\Leftrightarrow (x-a)((3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3) = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $(3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3$ vaut :

$$\Delta' = 16a^2-(3a^2-1)(-a^2+3) = 3a^4+6a^2+3 = (\sqrt{3}(a^2+1))^2 > 0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{a, \frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}, \frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}\right\}.}$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $a = \tan\alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $x = \tan\theta$ (à savoir $\alpha = \arctan a$ et $\theta = \arctan x$). Comme $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\begin{aligned}\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \frac{3a-a^3}{1-3a^2} &\Leftrightarrow \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} = \frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \tan(3\theta) = \tan(3\alpha)\\ &\Leftrightarrow 3\theta \in 3\alpha+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \alpha+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ceci refournit les solutions $x = \tan\alpha = a$, puis

$$x = \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a} = \frac{(a+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}a)}{1-3a^2} = \frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},$$

et $x = \tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}$.

Correction de l'exercice 635 ▲

1. Pour $x \notin \frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$,

$$\tan(5x) = \frac{\mathrm{Im}((e^{ix})^5)}{\mathrm{Re}((e^{ix})^5)} = \frac{5\cos^4x\sin x-10\cos^2x\sin^3x+\sin^5x}{\cos^5x-10\cos^3x\sin^2x+5\cos x\sin^4x} = \frac{5\tan x-10\tan^3x+\tan^5x}{1-10\tan^2x+5\tan^4x},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^5 x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right),\ \tan(5x) = \frac{5\tan x-10\tan^3x+\tan^5x}{1-10\tan^2x+5\tan^4x}.}$$

2. $9°$, $-27°$, $-63°$ et $81°$ vérifient $\tan(5\times 9°)=\tan(5\times(-27°))=\tan(5\times(-63°))=\tan(5\times 81°)=1$. On résoud donc l'équation :

$$\tan(5x)=1\Leftrightarrow 5x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right).$$

Les solutions, exprimées en degrés et éléments de $]-90°,90°[$, sont $-63°$, $-27°$, $9°$, $45°$ et $81°$. Ainsi, les cinq nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$, $\tan(45°)$ et $\tan(81°)$ sont deux à deux distincts et solutions de l'équation $\frac{5X-10X^3+X^5}{1-10X^2+5X^4}=1$ qui s'écrit encore :

$$X^5-5X^4-10X^3+10X^2+5X-1=0.$$

Le polynôme $X^5-5x^4-10X^3+10X^2+5X-1$ admet déjà $\tan(45°)=1$ pour racine et on a

$$X^5-5X^4-10X^3+10X^2+5X-1=(X-1)(X^4-4X^3-14X^2-4X+1).$$

Les quatre nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$ et $\tan(81°)$ sont ainsi les racines du polynôme $X^4-4X^3-14X^2-4X+1$. Ce dernier peut donc encore s'écrire $(X-\tan(9°))(X+\tan(27°))(X+\tan(63°))(X-\tan(81°))$. L'opposé du coefficient de X^3 à savoir 4 vaut donc également $\tan(9°)-\tan(27°)-\tan(63°)+\tan(81°)$ et on a montré que :

$$\boxed{\tan(9°)-\tan(27°)-\tan(63°)+\tan(81°)=4.}$$

Correction de l'exercice 636 ▲

Pour $x\in[0,\pi]$, posons $f(x)=\tan x+\tan(2x)+\tan(3x)+\tan(4x)$.

$$\begin{aligned}f(x)\text{ existe}&\Leftrightarrow \tan x,\ \tan(2x),\ \tan(3x)\text{ et }\tan(4x)\text{ existent}\\&\Leftrightarrow (x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (2x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (3x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\text{ et }(4x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\\&\Leftrightarrow (x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}),\ (x\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z})\text{ et }(x\notin\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\mathbb{Z})\\&\Leftrightarrow x\notin\left\{\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right\}.\end{aligned}$$

f est définie et continue sur

$$\left[0,\frac{\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0,\pi]$. Sur $I=\left[0,\frac{\pi}{8}\right[$ ou $I=\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right]$, puisque $f(0)=f(\pi)=0$, (E) a exactement une solution dans I. Ensuite, dans l'expression de somme f, une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ces nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty,+\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci porte le total à $6+2=8$ solutions. En $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan x$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty,+\infty[$. Finalement,

$$\boxed{(E)\text{ admet exactement dix solutions dans }[0,\pi].}$$

Correction de l'exercice 637 ▲

1. D'après les formules d'EULER,

$$z+z^4 = e^{2i\pi/5}+e^{8i\pi/5} = e^{2i\pi/5}+e^{-2i\pi/5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = a.$$

De même,

$$z^2+z^3 = e^{4i\pi/5}+e^{6i\pi/5} = e^{4i\pi/5}+e^{-4i\pi/5} = 2\cos\frac{4\pi}{5} = b.$$

2. Puisque $z \neq 1$ et $z^5 = e^{2i\pi} = 1$,

$$1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{1-z^5}{1-z} = \frac{1-1}{1-z} = 0.$$

3. $a+b = z+z^2+z^3+z^4 = -1$ et $ab = (z+z^4)(z^2+z^3) = z^3+z^4+z^6+z^7 = z+z^2+z^3+z^4 = -1$. Donc,

$$a+b = -1 \text{ et } ab = -1.$$

Ainsi, a et b sont les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ à savoir les nombres $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{2\pi}{5} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{4\pi}{5} \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on a $a>0$ et $b>0$. Finalement,

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.}$$

Correction de l'exercice 638 ▲

1. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ et une primitive de $x\mapsto\cos^2 x$ est $x\mapsto\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin(2x))$.
2. D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6) = \frac{1}{8}(\cos(4x)+4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\cos^4 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x)+2\sin(2x)+3x)$.

3.

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6) = \frac{1}{8}(\cos(4x)-4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\sin^4 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x)-2\sin(2x)+3x)$.

4. $\cos^2 x\sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1-\cos(4x))$ et une primitive de la fonction $x\mapsto\cos^2 x\sin^2 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\sin(4x))$.
5.

$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6 = -\frac{1}{64}(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\\ &= -\frac{1}{64}(2\cos(6x)-12\cos(4x)+30\cos(2x)-20) = \frac{1}{32}(-\cos(6x)+6\cos(4x)-15\cos(2x)+10)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\sin^6 x$ est $x\mapsto\frac{1}{32}(-\frac{1}{6}\sin(6x)+\frac{3}{2}\sin(4x)-\frac{15}{2}\sin(2x)+10x)$.

6. $\cos x\sin^6 x = \sin' x\sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos x\sin^6 x$ est $x \mapsto \frac{1}{7}\sin^7 x$.
7. $\cos^5 x\sin^2 x = \cos x(1-\sin^2 x)^2\sin^2 x = \sin' x\sin^2 x - 2\sin' x\sin^4 x + \sin' x\sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^5 x\sin^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x$.
8. $\cos^3 x = \sin' x - \sin' x\sin^2 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

Correction de l'exercice 639 ▲

1. Pour x réel , on a :

$$\begin{aligned}\cos^4 x\sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6\\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix}-2e^{8ix}-3e^{6ix}+8e^{4ix}+2e^{2ix}-12+2e^{-2ix}+8e^{-4ix}-3e^{-6ix}-2e^{-8ix}+e^{-10ix})\\ &= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)\\ &= -\frac{1}{512}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)\end{aligned}$$

(Remarque. La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc prévisible. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix}, e^{-4ix},... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix}, e^{4ix},...) Par suite,

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{512}\left(\left[\frac{\sin 10x}{10}-\frac{\sin 8x}{4}-\frac{\sin 6x}{2}+2\sin 4x+\sin 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}-6\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{2}(0-0)+2(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi\right)\\ &= -\frac{1}{512}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-2\sqrt{3}-\pi\right) = \frac{9\sqrt{3}+4\pi}{2048}.\end{aligned}$$

2. Pour x réel, on a

$$\begin{aligned}\cos^4 x\sin^7 x &= \cos^4 x\sin^6 x\sin x = \cos^4 x(1-\cos^2 x)^3\sin x\\ &= \cos^4 x\sin x - 3\cos^6 x\sin x + 3\cos^8 x\sin x - \cos^{10} x\sin x.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{3\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^9 x}{3}+\frac{\cos^{11} x}{11}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\\ &= -\frac{1}{5}\times\frac{1-9\sqrt{3}}{32}+\frac{3}{7}\times\frac{1-27\sqrt{3}}{128}-\frac{1}{3}\times\frac{1-81\sqrt{3}}{512}+\frac{1}{11}\times\frac{1-243\sqrt{3}}{2048}\\ &= \frac{1}{2^{11}\times 3\times 5\times 7\times 11}(-14784(1-9\sqrt{3})+7920(1-27\sqrt{3})-1540(1-81\sqrt{3})+105(1-243\sqrt{3}))\\ &= \frac{1}{2365440}(-8299+18441\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 640 ▲

1. $\tan\frac{x}{2}$ existe si et seulement si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}.$$

2. **1 ère solution.** Pour tout réel x,

$$\sin(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0,$$

2 ème solution.

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) = \mathrm{Im}(e^{i(x-\frac{2\pi}{3})} + e^{ix} + e^{i(x+\frac{2\pi}{3})}) = \mathrm{Im}(e^{ix}(j^2 + 1 + j)) = 0.$$

3. $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ et $\frac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\frac{\pi}{4} - x$, $\frac{\pi}{4} + x$ et $2x$ ne sont pas dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc, pour $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{1-\tan x}{1+\tan x} + \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \text{ (pour } x \text{ vérifiant de plus } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos(2x)} \\ &= \frac{2}{\cos(2x)} \text{ (ce qui reste vrai pour } x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

4. Pour $x \notin \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2}{\tan(2x)}.$$

Correction de l'exercice 641 ▲

1. • Pour tout réel x, $1 - 2k\cos x + k^2 = (k - \cos x)^2 + \sin^2 x \geqslant 0$. De plus,

$$1 - 2k\cos x + k^2 = 0 \Rightarrow k - \cos x = \sin x = 0 \Rightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \text{ et } k = \cos x \Rightarrow k \in \{-1, 1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1 - 2k\cos x + k^2 > 0.$$

• f_k est donc définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux, impaire et 2π-périodique. On l'étudie dorénavant sur $[0, \pi]$. Pour $x \in [0, \pi]$, on a :

$$\begin{aligned}f_k'(x) &= \cos x(1 - 2k\cos x + k^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}\sin x(2k\sin x)(1 - 2k\cos x + k^2)^{-3/2} \\ &= (1 - 2k\cos x + k^2)^{-3/2}(\cos x(1 - 2k\cos x + k^2) - k\sin^2 x) \\ &= (1 - 2k\cos x + k^2)^{-3/2}(-k\cos^2 x + (1 + k^2)\cos x - k) \\ &= (1 - 2k\cos x + k^2)^{-3/2}(k\cos x - 1)(k - \cos x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_k'(x) = \frac{(k\cos x - 1)(k - \cos x)}{(1 - 2k\cos x + k^2)^{3/2}}.}$$

1er cas : $|k|<1$ et $k\neq 0$. (si $k=0$, $f_k(x)=\sin x$) Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1)<0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $\cos x-k$.

x	0		$\text{Arccos}\,k$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(car $f_k(\arccos k)=\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-2k^2+k^2}}=1$).

2ème cas : $k>1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x)>0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $k\cos x-1$.

x	0		$\text{Arccos}\,\frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(car $f_k(\arccos\frac{1}{k})=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}}=\frac{1}{k}$).

3ème cas : $k<-1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x)<0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $1-k\cos x$.

x	0		$\text{Arccos}\,\frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(car $f_k(\arccos\frac{1}{k})=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}}=-\frac{1}{k}$).

2. Pour $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, posons $I_k=\int_0^{\pi}f_k(x)\,dx$.
Si $k=0$, $I_k=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2$. Sinon,

$$I_k=\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\frac{2k\sin x}{2\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}\,dx=\frac{1}{k}\left[\sqrt{1-2k\cos x+k^2}\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{k}(\sqrt{1+2k+k^2}-\sqrt{1-2k+k^2})=\frac{1}{k}(|k+1|-|k-1|).$$

Plus précisément, si $k\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $I_k=\frac{1}{k}((1+k)-(1-k))=2$, ce qui reste vrai pour $k=0$. Si $k>1$, $I_k=\frac{1}{k}((1+k)-(k-1))=\frac{2}{k}$, et enfin, si $k<-1$, $I_k=\frac{-2}{k}$. En résumé,

$$\boxed{\text{Si } k\in]-1,1[,\ I_k=2 \text{ et si } k\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ I_k=\frac{2}{|k|}.}$$

Correction de l'exercice 642 ▲

1. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. Posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $S_n'=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.
1ère solution.

$$S_n+iS_n'=\sum_{k=0}^{n}(\cos(kx)+i\sin(kx))=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k.$$

Maintenant, $e^{ix}=1\Leftrightarrow x\in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc,

1er cas. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $S_n = n+1$ et $S'_n = 0$.
2ème cas. Si x$\notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + iS'_n = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2}}{e^{-i(n+1)x/2} + e^{i(n+1)x/2}} = e^{inx/2} \frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}$$
$$= e^{inx/2} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \begin{cases} \frac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}}$$

2ème solution.

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x)$$
$$= \left(\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{-x}{2}\right) + \left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \ldots + \left(\sin\frac{(2n-1)x}{2} - \sin\frac{(2n-3)x}{2}\right)$$
$$+ \left(\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}\right)$$
$$= \sin\frac{(2n+1)x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}$$

et donc, si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,...

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$. On a :

$$S_n + S'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1,$$

et

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n}\cos(2kx).$$

D'après 1), si $x \in \pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx) = 0,$$

et si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + S'_n = n+1 \text{ et } S_n - S'_n = \frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n = \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right) \text{ et } S'_n = \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right).$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cos(kx)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\sin(kx)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{ix})^k 1^{n-k}$$
$$= (1+e^{ix})^n = (e^{ix/2} + e^{-ix/2})^n e^{inx/2} = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right).}$$

Correction de l'exercice 643 ▲

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}\cos a+\cos b+\cos c=0\\ \sin a+\sin b+\sin c=0\end{array}\right. &\Leftrightarrow (\cos a+\cos b+\cos c)+i(\sin a+\sin b+\sin c)=0 \Leftrightarrow e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}=0\\
&\Rightarrow |e^{ia}+e^{ib}|=|-e^{ic}|=1 \Leftrightarrow |e^{ia/2}e^{ib/2}(e^{i(a-b)/2}+e^{-i(a-b)/2})|=1\\
&\Leftrightarrow |\cos\frac{a-b}{2}|=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{a-b}{2}\in\left(\frac{\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow a-b\in\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \exists\varepsilon\in\{-1,1\}/\ b=a+\varepsilon\frac{2\pi}{3}+2k\pi.\end{aligned}$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib}=je^{ia}$ ou $e^{ib}=j^2e^{ia}$. Réciproquement, si $e^{ib}=je^{ia}$ ou encore $b=a+\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,

$$e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}=0 \Leftrightarrow e^{ic}=-(e^{ia}+e^{ib})=-(1+j)e^{ia}=j^2e^{ia} \Leftrightarrow \exists k'\in\mathbb{Z}/\ c=a-\frac{2\pi}{3}+2k'\pi,$$

et si $e^{ib}=j^2e^{ia}$ ou encore $b=a-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,

$$e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}=0 \Leftrightarrow e^{ic}=-(e^{ia}+e^{ib})=-(1+j^2)e^{ia}=je^{ia} \Leftrightarrow \exists k'\in\mathbb{Z}/\ c=a+\frac{2\pi}{3}+2k'\pi.$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{(a,a+\varepsilon\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi,a-\varepsilon\tfrac{2\pi}{3}+2k'\pi),\ a\in\mathbb{R},\ \varepsilon\in\{-1,1\},\ (k,k')\in\mathbb{Z}^2\}.}$$

Correction de l'exercice 644 ▲

$$\begin{aligned}\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8} &= 2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8})=2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8})\\
&=2\left((\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8})^2-2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\\
&=2(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 645 ▲

1.

$$\begin{aligned}\cos(3x)=\sin(2x) &\Leftrightarrow \cos(3x)=\cos(\frac{\pi}{2}-2x) \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}/\ 3x=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi) \text{ ou } (\exists k\in\mathbb{Z}/\ 3x=-\frac{\pi}{2}+2x+2k\pi)\\
&\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}) \text{ ou } (\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{2},\frac{9\pi}{10},\frac{13\pi}{10},\frac{3\pi}{2},\frac{17\pi}{10}\right\}.}$$

2. $\cos(3x)=\mathrm{Re}(e^{3ix})=\mathrm{Re}((\cos x+i\sin x)^3)=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x=\cos^3 x-3\cos x(1-\cos^2 x)=4\cos^3 x-3\cos x$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(3x)=4\cos^3 x-3\cos x.}$$

Par suite,

$$\cos(3x)=\sin(2x)\Leftrightarrow 4\cos^3x-3\cos x=2\sin x\cos x\Leftrightarrow \cos x(4\cos^2x-3-2\sin x)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x(-4\sin^2x-2\sin x+1)=0\Leftrightarrow (\cos x=0)\text{ ou }(4\sin^2x+2\sin x-1=0).$$

D'après 1), l'équation $4\sin^2x+2\sin x-1=0$ admet entre autre pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x\neq 0$), ou encore, l'équation $4X^2+2X-1=0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1=\sin\frac{\pi}{10}$ et $X_2=\sin\frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1>0$ et que $X_2<0$, on obtient

$$X_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\text{ et }X_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin\frac{13\pi}{10}=-\sin\frac{3\pi}{10}$),

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\text{ et }\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Ensuite, $\sin\frac{3\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{5}$, et donc

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Puis

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

et de même

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\cos\frac{3\pi}{10}}.$$

Correction de l'exercice 646 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque, pour tout entier k, $|\cos k|\in[0,1]$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n}|\cos k|\geqslant\sum_{k=1}^{n}\cos^2k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(1+\cos(2k))=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n}e^{2ik})=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{2i}\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}})$$
$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{i(n-1+2)}\frac{\sin n}{\sin 1})=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)\sin n}{2\sin 1}\geqslant\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1}.$$

Maintenant, $\frac{1}{2\sin 1}=0,594...$. Par suite, pour $n\geqslant 3$, $\frac{1}{2\sin 1}\leqslant 0,75=\frac{3}{4}\leqslant\frac{n}{4}$, et donc

$$\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1}\geqslant\frac{n}{2}-\frac{n}{4}=\frac{n}{4}.$$

Enfin, si $n=1$, $|\cos 1|=0.5...\geqslant 0.25=\frac{1}{4}$ et si $n=2$, $|\cos 1|+|\cos 2|=0.9...\geqslant 0.5=\frac{2}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}|\cos k|\geqslant\frac{n}{4}.}$$

Correction de l'exercice 650 ▲

1. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$. Notons $\alpha=a+ib$ et $\beta=c+id$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Alors $\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$ et $a+c\in\mathbb{Z}$, $b+d\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha+\beta\in\mathbb{Z}[i]$. De même, $\alpha\beta=(ac-bd)+i(ad+bc)$ et $ac-bd\in\mathbb{Z}$, $ad+bc\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha\beta\in\mathbb{Z}[i]$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ inversible. Il existe donc $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha\beta = 1$. Ainsi, $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$. Remarquons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est de module supérieur ou égal à 1 : en effet $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant \sup(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|)$ et si $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$, $\sup(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|) \geqslant 1$. Si $|\alpha| \neq 1$ alors $|\alpha| > 1$ et $|1/\alpha| < 1$. On en déduit $1/\alpha = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $|\alpha| = 1$, ce qui implique $\alpha \in \{1, -1, i, -i\}$.
   Réciproquement, $1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}[i], (-1)^{-1} = -1 \in \mathbb{Z}[i], i^{-1} = -i \in \mathbb{Z}[i], (-i)^{-1} = i \in \mathbb{Z}[i]$. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc $1, -1, i$ et $-i$.
3. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Notons $\omega = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. soit $E(x)$ la partie entière de x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$. Si $x \leqslant E(x) + 1/2$, notons $n_x = E(x)$, et si $x > E(x) + 1/2$, notons $n_x = E(x) + 1$. n_x est le, ou l'un des s'il y en a deux, nombre entier le plus proche de x : $|x - n_x| \leqslant 1/2$. Notons n_y l'entier associé de la même manière à y. Soit alors $\alpha = n_x + i \cdot n_y$. $z \in \mathbb{Z}[i]$ et $|\omega - \alpha|^2 = (x - n_x)^2 + (y - n_y)^2 \leqslant 1/4 + 1/4 = 1/2$. Donc $|\omega - \alpha| < 1$.
4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, avec $\beta \neq 0$. Soit alors $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$. Soit $r = \alpha - \beta q$. Comme $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $\beta q \in \mathbb{Z}[i]$, $r \in \mathbb{Z}[i]$. De plus $|\frac{r}{\beta}| = |\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$ donc $|r| < |\beta|$.

Correction de l'exercice 657 ▲

1. À permutation près, $x = -2$, $y = -2j$ et $z = -2j^2$ (j désigne la racine cubique de l'unité $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).
2. À permutation près, $x = 1$, $y = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $z = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 658 ▲

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

$$|1 + z + \ldots + z^{n-1}| \leqslant 1 + |z| + |z|^2 + \ldots + |z|^{n-1} < |z|^n + |z|^n + \ldots + |z|^n = n|z|^n = |nz^n|,$$

et en particulier, $1 + z + \ldots + z^{n-1} \neq nz^n$. Donc, si $1 + z + \ldots + z^{n-1} - nz^n = 0$, alors $|z| \leqslant 1$.

Correction de l'exercice 659 ▲

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. $\mathrm{sh}\, z$ et $\mathrm{ch}\, z$ sont définis et donc, $\mathrm{th}\, z$ existe si et seulement si $\mathrm{ch}\, z \neq 0$. Or,

$$\mathrm{ch}\, z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{i\pi} \Leftrightarrow 2z \in i\pi + 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

   $\mathrm{th}\, z$ existe si et seulement si $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.
2. Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

$$\mathrm{th}\, z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{sh}\, z = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\pi\mathbb{Z}.$$

   Comme $i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cap i\pi\mathbb{Z} = \varnothing$, $\mathrm{th}\, z = 0$ si et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.
3. Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|\mathrm{th}\, z| < 1 &\Leftrightarrow |e^z - e^{-z}|^2 < |e^z + e^{-z}|^2 \Leftrightarrow (e^z - e^{-z})(e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}) < (e^z + e^{-z})(e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}) \\
&\Leftrightarrow -e^{z-\bar{z}} - e^{-(z-\bar{z})} < e^{z-\bar{z}} + e^{-(z-\bar{z})} \Leftrightarrow 2(e^{2iy} + e^{-2iy}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(2y) > 0
\end{aligned}$$

   Par suite,

$$\begin{cases} |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2} \\ |\mathrm{th}\, z| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow |y| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z \in \Delta.$$

4. Soit $z \in \Delta$. D'après 1), $\operatorname{th} z$ existe et d'après 3), $|\operatorname{th} z| < 1$. Donc $z \in \Delta \Rightarrow \operatorname{th} z \in U$. Ainsi, th est une application de Δ dans U. Soit alors $Z \in U$ et $z \in \Delta$.

$$\operatorname{th} z = Z \Leftrightarrow \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = Z \Leftrightarrow e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z}.$$

Puisque $Z \neq -1$, $\frac{1+Z}{1-Z} \neq 0$ et on peut poser $\frac{1+Z}{1-Z} = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$.
Par suite,

$$\begin{aligned} e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z} &\Leftrightarrow e^{2z} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^{2x} = r \text{ et } 2y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln r \text{ et } y \in \frac{\theta}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Maintenant, on ne peut avoir $\theta = \pi$. Dans le cas contraire, on aurait $\frac{1+Z}{1-Z} = -r \in \mathbb{R}_-^*$ puis $Z = \frac{r+1}{r-1} \in \mathbb{R}$. Par suite, puisque $|Z| < 1$, on aurait $Z \in]-1,1[$ et donc $\frac{1+Z}{1-Z} \in \mathbb{R}_+^*$ ce qui est une contradiction. Donc, $\theta \in]-\pi,\pi[$ puis $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Mais alors,

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{th} z = Z \\ z \in \Delta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\ln r \\ y = \frac{\theta}{2} \end{array}\right. .$$

Ainsi, tout élément Z de U a un et un seul antécédent z dans Δ (à savoir $z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right| + \frac{i}{2}\operatorname{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ où $\operatorname{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ désigne l'argument de $\frac{1+Z}{1-Z}$ qui est dans $]-\pi,\pi[$). Finalement, th réalise donc une bijection de Δ sur U.

Correction de l'exercice 668 ▲

1. $A = 3X^5+4X^2+1$, $B = X^2+2X+3$, le quotient de A par B est $3X^3-6X^2+3X+16$ et le reste $-47-41X$.
2. $A = 3X^5+2X^4-X^2+1$, $B = X^3+X+2$ le quotient de A par B est $3X^2+2X-3$ et le reste est $7-9X^2-X$.
3. $A = X^4-X^3-X-2$, $B = X^2-2X+4$, le quotient de A par B est X^2+X-2 de reste $6-9X$.

Correction de l'exercice 670 ▲

$X^4+X^3-2X+1 = (X^2+X+1)(2X^2-3X+1)+X^3(2-X)$.

Correction de l'exercice 674 ▲

1. On remarque que si P est solution, alors $P+1 = (X-1)^4A$ et par ailleurs $P-1 = (X+1)^4B$, ce qui donne $1 = \frac{A}{2}(X-1)^4 + \frac{-B}{2}(X+1)^4$. Cherchons des polynômes A et B qui conviennent : pour cela, on écrit la relation de Bézout entre $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$ qui sont premiers entre eux, et on obtient

$$\frac{A}{2} = \frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 + \frac{29}{32}X + \frac{1}{2}$$
$$\frac{-B}{2} = -\frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 - \frac{29}{32}X + \frac{1}{2}$$

On a alors par construction

$$(X-1)^4A - 1 = 2\left(1+(X+1)^4\frac{-B}{2}\right) = 1+(X+1)^4B$$

et $P_0 = (X-1)^4A-1$ convient. En remplaçant, on obtient après calculs :

$$P_0 = \frac{5}{16}X^7 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{35}{16}X^3 - \frac{35}{16}X$$

2. Si $(X-1)^4$ divise $P+1$, alors 1 est racine de multiplicité au moins 4 de $P+1$, et donc racine de multiplicité au moins 3 de P' : alors $(X-1)^3$ divise P'. De même $(X+1)^3$ divise P'. Comme $(X-1)^3$ et $(X+1)^3$ sont premiers entre eux, nécessairement $(X-1)^3(X+1)^3$ divise P'. Cherchons un polynôme de degré minimal : on remarque que les primitives de
$$\lambda(X-1)^3(X+1)^3 = \lambda(X^2-1)^3 = \lambda(X^6-3X^4+3X^2-1)$$
sont de la forme $P(X) = \lambda(\frac{1}{7}X^7 - \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X + a)$. Si P convient, nécessairement 1 est racine de $P+1$ et -1 est racine de $P-1$, ce qui donne $\lambda(\frac{-16}{35}+a) = -1$ et $\lambda(\frac{16}{35}+a) = 1$. D'où $\lambda a = 0$ et comme on cherche P non nul, il faut $a = 0$ et $\lambda = \frac{35}{16}$. On vérifie que
$$P_0(X) = \frac{35}{16}(\frac{1}{7}X^7 - \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X) = \frac{5}{16}X^7 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{35}{16}X^3 - \frac{35}{16}X$$
est bien solution du problème : le polynôme $A = P_0+1$ admet 1 comme racine, i.e. $A(1) = 0$, et sa dérivée admet 1 comme racine triple donc $A'(1) = A''(1) = A'''(1) = 0$, ainsi 1 est racine de multiplicité au moins 4 de A et donc $(X-1)^4$ divise $A = P+1$. De même, $(X+1)^4$ divise $P-1$.

Supposons que P soit une solution du problème. On note toujours P_0 la solution particulière obtenue ci-dessus. Alors $P+1$ et P_0+1 sont divisibles par $(X-1)^4$, et $P-1$ et P_0-1 sont divisibles par $(X+1)^4$. Ainsi $P-P_0 = (P+1)-(P_0+1) = (P-1)-(P_0-1)$ est divisible par $(X-1)^4$ et par $(X+1)^4$. Comme $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$ sont premiers entre eux, nécessairement $P-P_0$ est divisible par $(X-1)^4(X+1)^4$. Réciproquement, si $P = P_0 + (X-1)^4(X+1)^4 A$, alors $P+1$ est bien divisible par $(X-1)^4$ et $P-1$ est divisible par $(X+1)^4$.
Ainsi les solutions sont exactement les polynômes de la forme
$$P_0(X) + (X-1)^4(X+1)^4 A(X)$$
où P_0 est la solution particulière trouvée précédemment, et A un polynôme quelconque.

Correction de l'exercice 675 ▲

1. Quotient $Q = X^3 - X^2 - X + 1$, reste $R = X$.
2. Quotient $Q = 1 - X^2 - X^4$, reste $R = X^5(1+2X+X^2)$.

Correction de l'exercice 679 ▲

Soient $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$, $B = X^2 - 5X + 4$, le quotient de A par B est $X^3 - 2X^2 - 14X - 63$, le reste étant $261 - 268X$.

Correction de l'exercice 682 ▲

Le polynôme nul convient. Dans la suite on suppose que P n'est pas le polynôme nul.
Notons $n = \deg P$ son degré. Comme P' divise P, alors P est non constant, donc $n \geqslant 1$. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = P'Q$. Puisque $\deg(P') = \deg(P) - 1 \geqslant 0$, alors Q est de degré 1. Ainsi $Q(X) = aX + b$ avec $a \neq 0$, et donc
$$P(X) = P'(X)(aX+b) = aP'(X)(X + \frac{b}{a})$$
Donc si $z \neq \frac{-b}{a}$ et si z est racine de P de multiplicité $k \geqslant 1$, alors z est aussi racine de P' avec la même multiplicité, ce qui est impossible. Ainsi la seule racine possible de P est $\frac{-b}{a}$.
Réciproquement, soit P un polynôme avec une seule racine $z_0 \in \mathbb{C}$: il existe $\lambda \neq 0$, $n \geqslant 1$ tels que $P = \lambda(X - z_0)^n$, qui est bien divisible par son polynôme dérivé.

Correction de l'exercice 685 ▲

$\mathrm{Im}\,\varphi = \{P \in E \text{ tel que } X-1 \mid P\}$ (Bézout généralisé).
$\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{vect}(X^3 + X^2 + X)$.

Correction de l'exercice 686 ▲

1. $\frac{\alpha(b-X)+\beta(X-a)}{b-a}$.
2. $\cos n\theta + X\sin n\theta$.

Correction de l'exercice 687 ▲

$P = \lambda((X+2)(X+3)(X+4)-6)$.

Correction de l'exercice 688 ▲

1. $X+1$
2. 1
3. $X^2 - iX + 1$

Correction de l'exercice 689 ▲

1. $7U = X+3, \quad 7V = -X^3 - 3X^2 + X + 4$
2. $3U = 2X^2 - X + 1, \quad 3V = -2X^2 - X + 2$

Correction de l'exercice 690 ▲

Substituer j à $X \Rightarrow R = \begin{cases} (-1)^n - 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ ((-1)^{n+1} - 1)(X+1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3 \\ ((-1)^n + 1)X & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$

Correction de l'exercice 691 ▲

$n \equiv 0 \pmod 6$.

Correction de l'exercice 692 ▲

1.
2.
3. Faire le produit.

Correction de l'exercice 693 ▲

1. $(2^{50}-1)X + 2 - 2^{50}$.
2. $2^{16}\big(X-\sqrt{3}\big)$.
3. $192\big(X-\sqrt{2}\big)^2$.
4.

Correction de l'exercice 694 ▲

$\lambda = \mu = -1$.

Correction de l'exercice 695 ▲

$-3X^3 + X^2 - X - 1$.

Correction de l'exercice 696 ▲

$n = qm + r \Rightarrow X^n - 1 \equiv X^r - 1 (\text{mod} X^m - 1)$. On applique la méthode des divisions euclidiennes entre n et m $\Rightarrow$ pgcd $= X^{n \wedge m} - 1$.

Correction de l'exercice 697 ▲

1.
2. Récurrence.

Correction de l'exercice 701 ▲

On prend $n \geqslant 2$ (sinon tout est clair).
$Q = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$ est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq e^{-ia}$ ou encore $e^{2ia} \neq 1$ ou enfin, $a \notin \pi\mathbb{Z}$.
1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$ alors, $P = 0 = 0.Q$.
2ème cas. Si $a \notin \pi\mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned}P(e^{ia}) &= \sin a(\cos(na) + i\sin(na)) - \sin(na)(\cos a + i\sin a) + \sin((n-1)a) \\ &= \sin((n-1)a) - (\sin(na)\cos a - \cos(na)\sin a) = 0.\end{aligned}$$

Donc, e^{ia} est racine de P et de même, puisque P est dans $\mathbb{R}[X]$, e^{-ia} est racine de P. P est donc divisible par Q.

$$\begin{aligned}P &= P - P(e^{ia}) = \sin a(X^n - e^{ina}) - \sin(na)(X - e^{ia}) = (X - e^{ia})(\sin a \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-1-k} e^{ika} - \sin(na)) \\ &= (X - e^{ia})S.\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}S &= S - S(e^{-ia}) = \sin a \sum_{k=0}^{n-1} e^{ika}(X^{n-1-k} - e^{-i(n-1-k)a}) = \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} e^{ika}(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j} e^{-ija}) \\ &= \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2}(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j} e^{i(k-j)a}) = \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2}(\sum_{k+j=l} e^{i(k-j)a})X^{n-2-l} \\ &= \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2}(\sum_{k=0}^{l} e^{i(2k-l)a})X^{n-2-l}\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{l} e^{i(2k-l)} a = e^{-ila} \frac{1 - e^{2i(l+1)a}}{1 - e^{2ia}} = \frac{\sin((l+1)a)}{\sin a}.$$

Donc

$$S = \sin a(X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \frac{\sin((l+1)a)}{\sin a} X^{n-2-l} = (X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \sin((l+1)a) X^{n-2-l},$$

et finalement

$$P = (X - e^{ia})(X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)a) X^{n-2-k} = (X^2 - 2X\cos a + 1) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)a).$$

Correction de l'exercice 702 ▲

1. (a) $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$

(b) $3X^5+2X^4-X^2+1=(X^3+X+2)(3X^2+2X-3)-9X^2-X+7$

(c) $X^4-X^3+X-2=(X^2-2X+4)(X^2+X-2)-7X+6$

(d) $X^5-7X^4-X^2-9X+9$
$=(X^2-5X+4)(X^3-2X^2-14X-63)-268X+261$

2. (a) $1-2X+X^3+X^4=(1+2X+X^2)(1-4X+7X^2)+X^3(-9-6X)$

(b) $1+X^3-2X^4+X^6=(1+X^2+X^3)(1-X^2-X^4)+X^5(1+2X+X^2)$

Correction de l'exercice 703 ▲

La division euclidienne de $A=X^4+aX^2+bX+c$ par $B=X^2+X+1$ donne

$$X^4+aX^2+bX+c=(X^2+X+1)(X^2-X+a)+(b-a+1)X+c-a$$

Or A est divisible par B si et seulement si le reste $R=(b-a+1)X+c-a$ est le polynôme nul, c'est-à-dire si et seulement si $b-a+1=0$ et $c-a=0$.

Correction de l'exercice 704 ▲

1. $\operatorname{pgcd}(X^3-X^2-X-2,X^5-2X^4+X^2-X-2)=X-2$.
2. $\operatorname{pgcd}(X^4+X^3-2X+1,X^3+X+1)=1$.

Correction de l'exercice 705 ▲

1. $\operatorname{pgcd}(X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1,X^4+2X^3+X+2)=X^3+1$.
2. $\operatorname{pgcd}(X^4+X^3-3X^2-4X-1,X^3+X^2-X-1)=X+1$
3. $\operatorname{pgcd}(X^5+5X^4+9X^3+7X^2+5X+1,X^4+2X^3+2X^2+X+1)=1$.

Correction de l'exercice 712 ▲

1. $D=X^2+3X+2=A(\frac{1}{18}X-\frac{1}{6})+B(-\frac{1}{18}X^2+\frac{1}{9}X+\frac{5}{18})$.
2. $D=1=A(-X^3)+B(X^5+X^3+X+1)$.

Correction de l'exercice 721 ▲

$X^6-7X^4+8X^3-7X+7=(X^6+8X^3+7)-(7X^4+7X)=(X^3+1)(X^3+7)-7X(X^3+1)=(X^3+1)(X^3-7X+7)$ et $3X^5-7X^3+3X^2-7=3X^2(X^3+1)-7(X^3+1)=(X^3+1)(3X^2-7)$. Donc,

$$(X^6-7X^4+8X^3-7X+7)\wedge(3X^5-7X^3+3X^2-7)=(X^3+1)((X^3-7X+7)\wedge(3X^2-7)).$$

Maintenant, pour $\varepsilon\in\{-1,1\}$, $(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})^3-7(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})+7=-(\varepsilon\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})+7\neq 0$.
Les polynômes (X^3-7X+7) et $(3X^2-7)$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$ et sont donc premiers entre eux. Donc, $(X^6-7X^4+8X^3-7X+7)\wedge(3X^5-7X^3+3X^2-7)=X^3+1$.

Correction de l'exercice 722 ▲

1. L'algorithme d'Euclide permet de calculer le pgcd par une suite de divisions euclidiennes.

   (a) $X^5-2X^4+X^2-X-2=(X^3-X^2-X-2)(X^2-X)+2X^2-3X-2$
   puis $X^3-X^2-X-2=(2X^2-3X-2)(\frac{1}{2}X+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}X-\frac{3}{2}$
   puis $2X^2-3X-2=(\frac{3}{4}X-\frac{3}{2})(\frac{8}{3}X+\frac{4}{3})$
   Le pgcd est le dernier reste non nul, divisé par son coefficient dominant :

$$\operatorname{pgcd}(X^3-X^2-X-2,X^5-2X^4+X^2-X-2)=X-2$$

(b) $X^4+X^3-2X+1=(X^3+X+1)(X+1)-X^2-4X$
puis $X^3+X+1=(-X^2-4X)(-X+4)+17X+1$

$$\begin{aligned}\text{donc pgcd } & (X^4+X^3-2X+1, X^3+X+1)\\ &= \text{pgcd}(-X^2-4X, 17X+1)=1\end{aligned}$$

car $-X^2-4X$ et $17X+1$ n'ont pas de racine (même complexe) commune.

(c) $X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1=(X^4+2X^3+X+2)(X+1)-X^3-1$
puis $X^4+2X^3+X+2=(-X^3-1)(-X-2)+2X^3+2$

$$\text{pgcd}(X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1, X^4+2X^3+X+2)=X^3+1$$

(d) $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$
$\quad = (X^n-nX+n-1)(nX-(n+1))+n^2(X-1)^2$
Si $n=1$ alors $X^n-nX+n-1=0$ et le pgcd vaut $(X-1)^2$. On constate que 1 est racine de $X^n-nX+n-1$, et on trouve $X^n-nX+n-1=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X^2+X-(n-1))$.
Si $n\geqslant 2$: 1 est racine de $X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X^2+X-(n-1)$ et on trouve
$X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X^2+X-(n-1)$
$\quad = (X-1)(X^{n-2}+2X^{n-3}+\cdots+(n-1)X^2+nX+(n+1))$, donc finalement $(X-1)^2$ divise $X^n-nX+n-1$ (on pourrait aussi remarquer que 1 est racine de multiplicité au moins deux de $X^n-nX+n-1$, puisqu'il est racine de ce polynôme et de sa dérivée). Ainsi

$$\text{si } n\geqslant 2,\ \text{pgcd}(nX^{n+1}-(n+1)X^n+1, X^n-nX+n-1)=(X-1)^2$$

2. (a) $A=X^5+3X^4+2X^3-X^2-3X-2$ et $B=X^4+2X^3+2X^2+7X+6$
donc $A=BQ_1+R_1$ avec $Q_1=X+1$, $R_1=-2X^3-10X^2-16X-8$
puis $B=R_1Q_2+R_2$ avec $Q_2=-\frac{1}{2}X+\frac{3}{2}$ et $R_2=9X^2+27X+18$
et enfin $R_1=R_2Q_3$ avec $Q_3=-\frac{2}{9}X-\frac{4}{9}$
Donc $D=X^2+3X+2$, et on obtient

$$9D=B-R_1Q_2=B-(A-BQ_1)Q_2=-AQ_2+B(1+Q_1Q_2)$$

soit

$$\begin{cases} U=\frac{1}{9}(-Q_2)=\frac{1}{18}X-\frac{1}{6}\\ V=\frac{1}{9}(1+Q_1Q2)=-\frac{1}{18}X^2+\frac{1}{9}X+\frac{5}{18}\end{cases}$$

(b) On a $A=BQ_1+R_1$ avec $Q_1=X^2+1$, $R_1=X^2-X-1$
puis $B=R_1Q_2+R_2$ avec $Q_2=X^2-X+1$ et $R_2=-X+2$
et enfin $R_1=R_2Q_3+R_3$ avec $Q_3=-X-1$ et $R_3=1$
Donc $D=1$, et on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= R_1-R_2Q_3=R_1-(B-R_1Q_2)Q_3=R_1(1+Q_2Q_3)-BQ_3\\ &= (A-BQ_1)(1+Q_2Q_3)-BQ_3\\ &= A(1+Q_2Q_3)-B(Q_1(1+Q_2Q_3)+Q_3)\end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases} U=1+Q_2Q_3=-X^3\\ V=-Q_1(1+Q_2Q_3)-Q_3=1+X+X^3+X^5\end{cases}$$

Correction de l'exercice 723 ▲

---

1. Lorsqu'on effectue la division euclidienne $A = BQ + R$, les coefficients de Q sont obtenus par des opérations élémentaires (multiplication, division, addition) à partir des coefficients de A et B : ils restent donc dans $\mathbb{Q}$. De plus, $R = A - BQ$ est alors encore à coefficients rationnels.

   Alors $\operatorname{pgcd}(A,B) = \operatorname{pgcd}(B,R)$ et pour l'obtenir, on fait la division euclidienne de B par R (dont le quotient et le reste sont encore à coefficients dans $\mathbb{Q}$), puis on recommence... Le pgcd est le dernier reste non nul, c'est donc encore un polynôme à coefficients rationnels.

2. Notons $P_1 = \operatorname{pgcd}(P,P')$: comme P est à coefficients rationnels, P' aussi et donc P_1 aussi. Or $P_1(X) = (X-a)^{p-1}(X-b)^{q-1}(X-c)^{r-1}$. En itérant le processus, on obtient que $P_{r-1}(X) = (X-c)$ est à coefficients rationnels, donc $c \in \mathbb{Q}$.

   On remonte alors les étapes : $P_{q-1}(X) = (X-b)(X-c)^{r-q+1}$ est à coefficients rationnels, et $X-b$ aussi en tant que quotient de P_{q-1} par le polynôme à coefficients rationnels $(X-c)^{r-q+1}$, donc $b \in \mathbb{Q}$. De même, en considérant P_{p-1}, on obtient $a \in \mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 729 ▲

$$\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

Correction de l'exercice 737 ▲

L'ordre de multiplicité est 2.

Correction de l'exercice 738 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$; x est une racine multiple de P si et seulement si $P(x) = 0$ et $P'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
P(x) = P'(x)0 \quad &\iff \left\{\begin{array}{l} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ 7(x+1)^6 - 7x^6 = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} (x+1)x^6 - x^7 - a = 0 \qquad \text{en utilisant la deuxième équation} \\ (x+1)^6 = x^6 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x^6 = a \\ (x+1)^3 = \pm x^3 \qquad \text{en prenant la racine carrée} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x^6 = a \\ x+1 = \pm x \qquad \text{en prenant la racine cubique} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

qui admet une solution ($x = -\frac{1}{2}$) si et seulement si $a = \frac{1}{64}$.

Correction de l'exercice 740 ▲

1. $$\left\{\begin{array}{lcl} X^3-3 &=& (X-\sqrt[3]{3})(X^2+\sqrt[3]{3}X+\sqrt[3]{9}) \\ &=& (X-\sqrt[3]{3})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}). \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{lcl} X^{12}-1 &=& (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)\times \\ && \quad (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1) \\ &=& (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\times \\ && \quad \left(X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\times \\ && \quad \left(X-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right). \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 751 ▲

1. $X^6+1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)$.
2. $X^9+X^6+X^3+1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)(X+1)$.

Correction de l'exercice 752 ▲

1. $\frac{n}{2^{n-1}}$.
2. $\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.
3. $-(-n)^n$.

Correction de l'exercice 753 ▲

$\omega^{2k} - 2\omega^k \cos\theta + 1 = (\omega^k - e^{i\theta})(\omega^k - e^{-i\theta})$ et $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^k - x) = (-1)^n(x^n - 1)$.

Correction de l'exercice 755 ▲

$X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1 = (X^n - e^{in\theta})(X^n - e^{-in\theta})$.
$Q = \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k e^{i(n-1-k)\theta}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} X^l e^{-i(n-1-\ell)\theta}\right)$
$= \sum_{k=0}^{n-1} X^k \left(\sum_{p=0}^{k} e^{i(k-2p)\theta}\right) + \sum_{k=n}^{2n-2} X^k \left(\sum_{p=k-n+1}^{n-1} e^{i(k-2p)\theta}\right)$
$= \sum_{k=0}^{n-1} X^k \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} + \sum_{k=n}^{2n-2} X^k \frac{\sin(2n-k-1)\theta}{\sin\theta}$.

Correction de l'exercice 756 ▲

Division de proche en proche : $Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \cos k\theta$.

Correction de l'exercice 757 ▲

$\iff X^2+X+1 \mid X^{2n}+pX^n+q \iff j^{2n}+pj^n+q=0$.

Correction de l'exercice 758 ▲

$(X+1)(3X-1)(X^2+3X+5)$.

Correction de l'exercice 759 ▲

On calcule $\operatorname{pgcd}(P(X),Q(X)) = X^2+5$.
$\Rightarrow x_1 = i\sqrt{5}$ et $x_2 = -i\sqrt{5}$.
On obtient alors : $P(X) = (X^2+5)(X^2-3X+1)$.
Les deux dernières racines sont $x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 760 ▲

$P = (X-2)^2(X-3)^3$.

Correction de l'exercice 761 ▲

$a = 10i$. Racines : $i, i, i, \frac{-3i+\sqrt{15}}{2}, \frac{-3i-\sqrt{15}}{2}$.

Correction de l'exercice 762 ▲

$\lambda = 0, x = 1$.

Correction de l'exercice 763 ▲

P doit être divisible par X^2-X+r, $\Rightarrow r^2-3r+p+1 = 2r^2-r+q = 0$.
On calcule le pgcd de ces expressions $\Rightarrow$ CNS : $4p^2-4pq+q^2+3p+11q-1=0$.

Correction de l'exercice 764 ▲

$= (-1)^{n+1} \frac{(X-1)\cdots(X-n)\big(X-(n+1)\big)}{(n+1)!}$.

Correction de l'exercice 766 ▲

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = \mathrm{Im}\big((1+xe^{i\theta})^n\big)$.
Donc $P(x) = 0 \iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $1+xe^{i\theta} = \lambda e^{ik\pi/n}$.
On obtient $x_k = \frac{\sin(k\pi/n)}{\sin(\theta-k\pi/n)}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Correction de l'exercice 768 ▲

$P = a(X-b)^\alpha$.

Correction de l'exercice 769 ▲

1. si $P(x) = 0$, alors $P\big((x-1)^2\big) = P\big((x+1)^2\big) = 0$.
   On a toujours $|x| < \max\{|x-1|, |x+1|\}$ donc, s'il y a une racine de module > 1, il n'y a pas de racine de module maximal $\Rightarrow P = 0$.
   Or $\max\{|x-1|, |x+1|\} \geqslant 1$ avec égalité ssi $x = 0$. Donc $P = 0$ ou $P = 1$.
2. Si x est racine, alors x^2 et $(x+1)^2$ le sont aussi.
   $\Rightarrow |x| = 0$ ou $1 \Rightarrow |x+1| = 0$ ou $1 \Rightarrow x \in \{0, -1, j, j^2\}$.
   $x = 0$ ou $x = -1 \Rightarrow P(1) = 0$: exclus.
   Donc $P = a(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$. On remplace $\Rightarrow P = (X^2+X+1)^\alpha$.
3. Seule racine possible : $1 \Rightarrow P = -(X-1)^k$.

Correction de l'exercice 771 ▲

Mêmes racines avec les mêmes multiplicités.

Correction de l'exercice 772 ▲

1. $P = \frac{\Phi}{X-z_k} \Rightarrow \frac{\Phi(z_0)}{z_0-z_k} = \frac{\Phi'(z_k)}{n}$.
2. Les deux membres sont égaux en $z_0, \dots, z_n$.
3. Décomposer Φ sur la base $\big((X-z_0)^k\big)$.
4. $\sum_k e^{2ikp/n} = 0$ pour $p < n \Rightarrow$ OK.

Correction de l'exercice 776 ▲

$x = z + \frac{1}{z}$ avec $z^6 + z^5 + \dots + 1 = 0$.
Autres racines : $2\cos\frac{4\pi}{7}$ et $2\cos\frac{6\pi}{7}$.

Correction de l'exercice 777 ▲

1. Soit $P(x) = a_n \prod_{k=1}^n (x-x_k)$. On a : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(x-x_k)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{P'}{P}\right)(x) = \frac{P'^2-PP''}{P^2}(x)$.
2. Pour $k = 1, x = 0$, on a : $a_0 a_2 \leqslant \frac{1}{2} a_1^2$.
   Pour k quelconque : on applique le cas précédent à $P^{(k-1)}$ dont les racines sont encore réelles simples : $(k-1)!a_{k-1} \times \frac{(k+1)!}{2} a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}(k!a_k)^2 \Rightarrow a_{k-1}a_{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1} a_k^2$.

Correction de l'exercice 778 ▲

$Q=X^2-3X+1$, $P=\left(X-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(X-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)(X^2-X+4)$.

Correction de l'exercice 780 ▲

1. p est premier car K est intègre.
   On a $1^p=1$, $(xy)^p=x^py^p$ (un corps est commutatif) et $(x+y)^p=x^p+y^p+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^kx^ky^{p-k}=x^p+y^p$ car p divise C_p^k si $1\leqslant k\leqslant p-1$.
2. Remarquer que $P'=0\Leftrightarrow P\in K[X^p]$.
   On suppose σ surjectif. Soit $P(X)=Q(X^p)=a_0+\dots+a_kX^{kp}$ un polynôme non constant à dérivée nulle. Il existe $b_0,\dots,b_k$ tels que $b_i^p=a_i$. Alors $P(X)=Q(X)^p$ est réductible.
   On suppose que tout polynôme irréductible a une dérivée non nulle. Soit $a\in K$ et $P(X)=X^p-a$. $P'=0$ donc P est réductible. Soit Q un facteur unitaire irréductible de X^p-a. Alors Q^p et X^p-a ont Q en facteur commun donc leur pgcd, D, est non constant. Mais Q^p et X^p-a appartiennent à $K[X^p]$ donc D, obtenu par l'algorithme d'Euclide aussi, d'où $D=X^p-a$ et X^p-a divise Q^p. Par unicité de la décomposition de Q^p en facteurs irréductibles, il existe $r\in|||$ tel que $X^p-a=Q^r$. Par examen du degré on a $r=p$ donc $\deg Q=1$, $Q=X-b$ et finalement $b^p=a$.

Correction de l'exercice 781 ▲

$V(\alpha)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P^{(n)}(\alpha)$ ont même signe, de même pour $V(\beta)$. Comme $P^{(n)}(\alpha)=P^{(n)}(\beta)$ on en déduit que $V(\alpha)-V(\beta)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ ont même signe, donc si et seulement si P a un nombre pair de racines dans $[\alpha,\beta]$.
Décroissance de V : V est constant sur tout intervalle ne contenant aucune racine de $P,P',\dots,P^{(n-1)}$. Considérons $x_0\in[\alpha,\beta[$ tel que $P^{(k)}(x_0)\neq0$, $P^{(k+1)}(x_0)=\dots=P^{(\ell-1)}(x_0)=0$ et $P^{(\ell)}(x_0)\neq0$. Alors pour x proche de x_0 avec $x>x_0$, $P^{(k)}(x)$ a même signe que $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(k+1)}(x),\dots,P^{(\ell)}(x)$ ont même signe que $P^{(\ell)}(x_0)$ donc les nombres de changements de signe dans les sous-suites $(P^{(k)}(x),\dots,P^{(\ell)}(x))$ et $(P^{(k)}(x_0),\dots,P^{(\ell)}(x_0))$ sont égaux. De même si $P(x_0)=\dots=P^{(\ell-1)}(x_0)=0$ et $P^{(\ell)}(x_0)\neq0$. Ceci prouve que $V(x_0^+)=V(x_0)$ pour tout $x_0\in[\alpha,\beta[$.
On considère à présent $x_0\in]\alpha,\beta]$ tel que $P^{(k)}(x_0)\neq0$, $P^{(k+1)}(x_0)=\dots=P^{(\ell-1)}(x_0)=0$ et $P^{(\ell)}(x_0)\neq0$. Alors pour x proche de x_0 avec $x<x_0$ la sous-suite $(P^{(k)}(x),\dots,P^{(\ell)}(x))$ a $\ell-k-1$ changements de signe si $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(\ell)}(x_0)$ ont même signe, $\ell-k$ changements de signe sinon tandis que la sous-suite $(P^{(k)}(x_0),\dots,P^{(\ell)}(x_0))$ en a un ou zéro. De même, si $P(x_0)=\dots=P^{(\ell-1)}(x_0)=0$ et $P^{(\ell)}(x_0)\neq0$ on trouve ℓ changements de signe pour $(P(x),\dots,P^{(\ell)}(x))$ et zéro pour $(P(x_0),\dots,P^{(\ell)}(x_0))$ donc dans tous les cas $V(x_0^-)\geqslant V(x_0)$. Ceci achève la démonstration.

Correction de l'exercice 782 ▲

Pour $z\in\mathbb{U}$, on a $Q(z)=0\Leftrightarrow P(z)/z^d\overline{P}(\bar z)=-\omega$. Comme $\overline{P}(\bar z)=\overline{P(z)}$, les deux membres ont même module pour tout $z\in\mathbb{U}$, il faut et il suffit donc que les arguments soient égaux modulo 2π. Pour $a\in\mathbb{C}$ avec $|a|<1$, une détermination continue de $\operatorname{Arg}(e^{i\theta}-a)$ augmente de 2π lorsque θ varie de 0 à 2π donc, vu l'hypothèse sur les racines de P, une détermination continue de $\operatorname{Arg}(P(z)/z^d\overline{P(z)})$ augmente de $2\pi d$ lorsque θ varie de 0 à 2π. Une telle détermination prend donc au moins d fois une valeur congrue à $\operatorname{Arg}(-\omega)$ modulo 2π, ce qui prouve que Q admet au moins d racines distinctes dans $\mathbb{U}$.

Correction de l'exercice 783 ▲

$f(2k\pi/n)>0>f((2k+1)\pi/n)$ pour $k\in\mathbb{Z}$ donc f admet $2n$ racines dans $[0,2\pi[$. En posant $z=e^{ix}$, $z^nf(x)$ est un polynôme en z de degré $2n$ ayant $2n$ racines sur le cercle unité ; il n'en n'a pas ailleurs.

Correction de l'exercice 784 ▲

$(X^2-X+1)(X^2+X+1)(X^2-X\sqrt{3}+1)(X^2+X\sqrt{3}+1)$.

Correction de l'exercice 785 ▲

Racines : $\alpha = 2+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\alpha}$, $\beta = 2-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\beta}$.
Factorisation de P sur $\mathbb{R}$: $P=(X^2-2\mathrm{Re}(\alpha)X+|\alpha|^2)(X^2-2\mathrm{Re}(\beta)X+|\beta|^2)$ et les facteurs sont irrationnels.

Correction de l'exercice 786 ▲

1. $P=|Q+iR|^2$.
2. Factoriser P.
3. Avec Maple : $P=\frac{1}{65}Q\overline{Q}$ avec $Q=65X^2+(49i-67)X+(42+11i)$ et Q est irréductible sur $Q[i]$. Donc si $P=A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$ avec A,B polynômes à coefficients entiers alors, quitte à changer B en $-B$, il existe $\lambda\in\mathbb{Q}[i]$ tel que : $A+iB=\lambda Q$ et $A-iB=\overline{\lambda Q}$ d'où :

$$\begin{aligned}
2A &= 65(\lambda+\overline{\lambda})X^2+((49i-67)\lambda-(49i+67)\overline{\lambda})X+((42+11i)\lambda+(42-11i)\overline{\lambda})\\
2iB &= 65(\lambda-\overline{\lambda})X^2+((49i-67)\lambda+(49i+67)\overline{\lambda})X+((42+11i)\lambda-(42-11i)\overline{\lambda})\\
\lambda\overline{\lambda} &= 65.
\end{aligned}$$

En particulier $65\lambda\in\mathbb{Z}[i]$, écrivons $\lambda=\frac{u+iv}{65}$ avec $u,v\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
A &= uX^2-\frac{67u+49v}{65}X+\frac{42u-11v}{65}\\
B &= vX^2+\frac{49u-67v}{65}X+\frac{11u+42v}{65}\\
u^2+v^2 &= 65.
\end{aligned}$$

$67u+49v$ est divisible par 65 si et seulement si $u\equiv 8v(\mathrm{mod}\,65)$ et dans ce cas les autres numérateurs sont aussi multiples de 65. La condition $u^2+v^2=65$ donne alors $v=\pm1, u=\pm8$ d'où :

$$A=\pm(8X^2-9X+5),\qquad B=\pm(X^2+5X+2).$$

Correction de l'exercice 789 ▲

1. Si $P=QR$ alors $Q(a_i)R(a_i)=-1\Rightarrow Q(a_i)=-R(a_i)=\pm1$, donc $Q+R$ a n racines, donc est nul, et $P=-Q^2$: contradiction pour $x\to\infty$.
2. Même raisonnement : $P=Q^2$, donc $Q^2-1=(Q-1)(Q+1)=(X-a_1)\dots(X-a_n)$.
On répartit les facteurs entre $Q-1$ et $Q+1$: $n=2p$, contradiction.

Correction de l'exercice 790 ▲

Soit $P=QR$ avec $Q=X^{n_1}+b_{n_1-1}X^{n_1-1}+\dots+b_0X^0$ et $R=X^{n_2}+c_{n_2-1}X^{n_2-1}+\dots+c_0X^0$.
Par hypothèse sur $a_0=b_0c_0$, p divise un et un seul des entiers b_0, c_0. Supposons que p divise $b_0,b_1,\dots,b_{k-1}$: alors $a_k\equiv b_kc_0(\mathrm{mod}\,p)$ donc p divise b_k. On aboutit à « p divise le coefficient dominant de Q », ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 791 ▲

On suppose $a\neq0$ et $X^p-a=PQ$ avec $P,Q\in K[X]$ unitaires non constants. Soit $n=\deg(P)\in[[1,p-1]]$ et $b=(-1)^nP(0)\in K$. b est le produit de cetraines p-èmes de a, donc $b^p=a^n$. De plus $n\wedge p=1$; soit $nu+pv=1$ une relation de Bézout. On a alors $b^{pu}=a^{nu}=a^{1-pv}$ d'où $a=(b^u/a^v)^p$ donc $b^u/a^v\in K$ est racine de X^p-a.

Correction de l'exercice 792 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(X+1)^n - X^n - 1 \text{ est divisible par } X^2+X+1 &\Leftrightarrow j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } (X+1)^n - X^n - 1\\ &\Leftrightarrow j \text{ est racine de } (X+1)^n - X^n - 1\\ &(\text{car } (X+1)^n - X^{n-1} \text{ est dans } \mathbb{R}[X])\\ &\Leftrightarrow (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (-j^2)^n - j^n - 1 = 0.\end{aligned}$$

Si $n \in 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
Si $n \in 1+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.
Si $n \in 2+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$.
Si $n \in 3+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
Si $n \in 4+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$.
Si $n \in 5+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$.
En résumé, $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 si et seulement si n est dans $(1+6\mathbb{Z}) \cup (5+6\mathbb{Z})$.

Correction de l'exercice 793 ▲

Soit P un polynôme non nul à coefficients réels.
Pour tout réel x, on peut écrire

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (x-a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{l} ((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j},$$

où λ est un réel non nul, k et l sont des entiers naturels, les a_i sont des réels deux à deux distincts, les α_i et les β_i des entiers naturels et les $(x-z_j)(x-\overline{z_j})$ des polynômes deux à deux premiers entre eux à racines non réelles.
Tout d'abord, pour tout réel x, $\prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j} > 0$ (tous les trinomes du second degré considérés étant unitaires sans racines réelles.)
Donc, $(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i} \geqslant 0)$.
Ensuite, si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} P(x) \geqslant 0$ ce qui impose $\lambda > 0$. Puis, si un exposant α_i est impair, P change de signe en a_i, ce qui contredit l'hypothèse faite sur P. Donc, $\lambda > 0$ et tous les α_i sont pairs.
Réciproquement, si $\lambda > 0$ et si tous les α_i sont pairs, alors bien sûr, $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.
Posons $A = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i/2}$. A est un élément de $\mathbb{R}[X]$ car $\lambda > 0$ et car les α_i sont des entiers pairs. Posons ensuite $Q_1 = \prod_{j=1}^{l}(x-z_j)^{\beta_j}$ et $Q_2 = \prod_{j=1}^{l}(x-\overline{z_j})^{\beta_j}$. Q_1 admet après développement une écriture de la forme $Q_1 = B + iC$ où B et C sont des polynômes à coefficients réels. Mais alors, $Q_2 = B - iC$. Ainsi,

$$P = A^2 Q_1 Q_2 = A^2(B+iC)(B-iC) = A^2(B^2+C^2) = (AB)^2 + (AC)^2 = R^2 + S^2,$$

où R et S sont des polynômes à coefficients réels.

Correction de l'exercice 794 ▲

Soit P un polynôme de degré n supèrieur ou égal à 2.
Posons $P = \lambda(X-z_1)(X-z_2)\ldots(X-z_n)$ où λ est un complexe non nuls et les z_k des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} (X-z_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P}{X-z_i},$$

et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X-z_i}.$$

Soit alors z une racine de P' dans $\mathbb{C}$. Si z est racine de P (et donc racine de P d'ordre au moins 2) le résultat est clair. Sinon,

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{z-z_i}}{|z-z_i|^2}.$$

En posant $\lambda_i = \frac{1}{|z-z_i|^2}$, ($\lambda_i$ est un réel strictement positif) et en conjugant, on obtient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (z-z_i) = 0$ et donc

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \mathrm{bar}(z_1(\lambda_1), \dots, z_n(\lambda_n)).$$

Correction de l'exercice 795 ▲

On suppose que $n = \deg P \geqslant 1$.
On pose $P = \lambda(X-z_1)(X-z_2)\dots(X-z_n)$ où λ est un complexe non nul et les z_k sont des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.
D'après l'exercice précédent, $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-z_k}$.
Si P est divisible par P', $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} /\ P = (aX+b)P'$ et donc $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} /\ \frac{P'}{P} = \frac{1}{aX+b}$ ce qui montre que la fraction rationelle $\frac{P'}{P}$ a exactement un et un seul pôle complexe et donc que les z_k sont confondus.
En résumé, si P' divise P, $\exists (a,\lambda) \in \mathbb{C}^2 /\ P = \lambda(X-a)^n$ et $\lambda \neq 0$.
Réciproquement, si $P = \lambda(X-a)^n$ avec $\lambda \neq 0$, alors $P' = n\lambda(X-a)^{n-1}$ divise P.
Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 796 ▲

a est solution du problème si et seulement si $X^5 - 209X + a$ est divisible par un polynôme de la forme $X^2 + \alpha X + 1$. Mais

$$X^5 - 209X + a = (X^2+\alpha X+1)(X^3 - \alpha X^2 + (\alpha^2-1)X - (\alpha^3 - 2\alpha)) + (\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208)X + a + (\alpha^3 - 2\alpha).$$

Donc a est solution $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} /\ \begin{cases} \alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \\ a = -\alpha^3 + 2\alpha \end{cases}$. Mais, $\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \in \{-13, 16\} \Leftrightarrow \alpha \in \{-4, 4, i\sqrt{13}, -i\sqrt{13}\}$ et la deuxième équation fournit $a \in \{56, -56, 15i\sqrt{13}, -15i\sqrt{13}\}$.

Correction de l'exercice 797 ▲

On note que $P(1) = 1 \neq 0$ et donc que l'expression proposée a bien un sens.

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{a_k+2}{a_k-1} = \sum_{k=1}^{5} (1 + \frac{3}{a_k-1}) = 5 - 3\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{1-a_k} = 5 - 3\frac{P'(1)}{P(1)} = 5 - 3\frac{12}{1} = -31.$$

Correction de l'exercice 798 ▲

$$\begin{aligned} P = X^6 - 2X^3\cos a + 1 &= (X^3 - e^{ia})(X^3 - e^{-ia}) \\ &= (X - e^{ia/3})(X - je^{ia/3})(X - j^2e^{ia/3})(X - e^{-ia/3})(X - je^{-ia/3})(X - j^2e^{-ia/3}) \\ &= (X^2 - 2X\cos\frac{a}{3} + 1)(X^2 - 2X\cos(\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}) + 1)(X^2 - 2X\cos(\frac{a}{3} - \frac{2\pi}{3}) + 1) \end{aligned}$$

Il reste à se demander 1) si les facteurs précédents sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et 2) si ces facteurs sont deux à deux distincts.

Les trois facteurs de degré 2 ont un discriminant réduit du type $\Delta' = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$ et Δ' est nul si et seulement si α est dans $\pi\mathbb{Z}$.
Les cas particuliers sont donc ($\frac{a}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = 0$) et ($\frac{a+2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = \pi$) et ($\frac{a-2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ ce qui n'a pas de solution dans $[0,\pi]$).

1er cas. Si $a = 0$.

$$P = (X^2-2X+1)(X^2+X+1)(X^2+X+1) = (X-1)^2(X^2+X+1)^2.$$

2ème cas. Si $a = \pi$, en remplaçant X par $-X$ on obtient :

$$P = (X+1)^2(X^2-X+1)^2.$$

3ème cas. Si a est dans $]0,\pi[$, les trois facteurs de degré 2 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et clairement deux à deux distincts. Donc

$$P = (X^2-2X\cos\frac{a}{3}+1)(X^2-2X\cos\frac{a+2\pi}{3}+1)(X^2-2X\cos\frac{a-2\pi}{3}+1).$$

Correction de l'exercice 799 ▲

Pour k élément de $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$, posons $x_k = \sin\frac{k\pi}{7}$ (les x_k sont deux à deux opposés). Il faut calculer les coefficients du polynôme

$$\begin{aligned}P &= (X-\sin\frac{\pi}{7})(X-\sin\frac{2\pi}{7})(X-\sin\frac{3\pi}{7})(X+\sin\frac{\pi}{7})(X+\sin\frac{2\pi}{7})(X+\sin\frac{3\pi}{7})\\ &= (X^2-\sin^2\frac{\pi}{7})(X^2-\sin^2\frac{2\pi}{7})(X^2-\sin^2\frac{3\pi}{7})\\ &= (X^2-\frac{1}{2}(1-cos\frac{2\pi}{7}))(X^2-\frac{1}{2}(1-cos\frac{4\pi}{7}))(X^2-\frac{1}{2}(1-cos\frac{6\pi}{7}))\\ &= \frac{1}{8}Q(-2X^2+1)\end{aligned}$$

où $Q(Y) = (\cos\frac{2\pi}{7}-Y)(\cos\frac{4\pi}{7}-Y)(\cos\frac{8\pi}{7}-Y)$.
Posons $\omega = e^{2i\pi/7}$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4) = \frac{1}{8}(6+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{14}+\omega^{15})\\ &= \frac{1}{8}(\omega^6+\omega^7+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega) = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{4}((\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)+(\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4)+(\omega^3+\omega^4)(\omega^2+\omega^5))\\ &= \frac{1}{4}(2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5+2\omega^6) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6) = -\frac{1}{2}$$

Donc, $Q = \frac{1}{8}-(-\frac{1}{2})Y+(-\frac{1}{2})Y^2-Y^3 = \frac{1}{8}(-8Y^3-4Y^2+4Y+1)$ puis,

$$P = \frac{1}{64}(-8(-2X^2+1)^3-4(-2X^2+1)^2+4(-2X^2+1)+1) = \frac{1}{64}(64X^6-112X^4+54X^2-7).$$

Une équation du 6ème degré dont les solutions sont les sin est $64x^6-112x^4+54x^2-7=0$.
Maintenant, si $r=$ (p entier relatif non nul, q entier naturel non nul, p et q premiers entre eux) est une racine rationnelle de cette équation, alors, d'après l'exercice 937, p divise -7 et q divise 64 et donc p est élément de $\{1,-1,7,-7\}$ et q est élément de $\{1,2,4,8,16,32,64\}$. On vérifie aisément qu'aucun des rationnels r obtenu n'est racine de P et donc les racines de P sont irrationnelles.

Correction de l'exercice 800 ▲

Posons $P=X^4-4X^3-36X^2+\lambda X+\mu$.

$$\begin{aligned}
(\lambda,\mu) \text{ solution} &\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/ \text{ les racines de } P \text{ soient } z,z+r,z+2r,z+3r\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\left\{\begin{array}{l}\sigma_1=4\\ \sigma_2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\left\{\begin{array}{l}4z+6r=4\\ z(3z+6r)+(z+r)(2z+5r)+(z+2r)(z+3r)=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\left\{\begin{array}{l}2z+3r=2\\ 6z^2+18rz+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\left\{\begin{array}{l}z=1-\frac{3}{2}r\\ 6(1-\frac{3}{2}r)^2+18(1-\frac{3}{2}r)r+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\left\{\begin{array}{l}-\frac{5}{2}r^2+42=0\\ z=1-\frac{3}{2}r\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où la solution (les deux valeurs opposées de r fournissent évidemment la même progression arithmétique) $r=2\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis $z=1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis les racines $z_1=1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_2=1-\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_3=1+\sqrt{\frac{21}{5}}$ et $z_4=1+3\sqrt{\frac{21}{5}}$, obtenues pour

$$\lambda=z_1z_2z_3z_4=(1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\sqrt{\frac{21}{5}})(1+\sqrt{\frac{21}{5}})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}})=(1-9\frac{21}{5})(1-\frac{21}{5})=\frac{2994}{25},$$

et

$$\begin{aligned}
\mu&=(1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\frac{21}{5})+(1-9\frac{21}{5})(1-\sqrt{\frac{21}{5}})+(1-9\frac{21}{5})(1+\sqrt{\frac{21}{5}})+(1-\frac{21}{5})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}})\\
&=2(1-\frac{21}{5})+2(1-9\frac{21}{5})=2(2-10\frac{21}{5})=-80
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 801 ▲

Pour $i\in\{1,2,3\}$, on a $x_i^3+2x_i-1=0$ et donc $x_i^4+2x_i^2-x_i=0$. En additionnant ces trois égalités, on obtient $S_4+2S_2-S_1=0$ et donc

$$S_4=-2((\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_1=(-2)(-2.2)=8.$$

Correction de l'exercice 802 ▲

Pour chacun des 8 numérateurs possibles, il y a $C_7^2 = 21$ dénominateurs et donc au total, $8 \times 21 = 168$ termes.

$$\sum \frac{x_1}{x_2x_3} = \sum \frac{x_1^2x_4x_5x_6x_7x_8}{x_1x_2\dots x_8} = \frac{1}{\sigma_8}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 = \frac{1}{3}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Ensuite,

$$\sigma_1\sigma_6 = (\sum x_1)(\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6) = \sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 + \sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7,$$

et donc,

$$\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 = \sigma_1\sigma_6 - \sigma_7 = (-1)(0) - 1 = -1.$$

Donc, $\sum \frac{x_1}{x_2x_3} = -\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 803 ▲

1. (a) $X^3 - 3 = (X - 3^{1/3})(X^2 + 3^{1/3}X + 3^{2/3})$ où $X^2 + 3^{1/3}X + 3^{2/3}$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. On cherche ses racines complexes pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{C}$:

$$X^3 - 3 = (X - 3^{1/3})(X + \frac{1}{2}3^{1/3} - \frac{i}{2}3^{5/6})(X + \frac{1}{2}3^{1/3} + \frac{i}{2}3^{5/6})$$

(b) Passons à $X^{12} - 1$. $z = re^{i\theta}$ vérifie $z^{12} = 1$ si et seulement si $r = 1$ et $12\theta \equiv 0[2\pi]$, on obtient donc comme racines complexes les $e^{ik\pi/6}$ ($k = 0, \dots, 11$), parmi lesquelles il y en a deux réelles (-1 et 1) et cinq couples de racines complexes conjuguées ($e^{i\pi/6}$ et $e^{11i\pi/6}$, $e^{2i\pi/6}$ et $e^{10i\pi/6}$, $e^{3i\pi/6}$ et $e^{9i\pi/6}$, $e^{4i\pi/6}$ et $e^{8i\pi/6}$, $e^{5i\pi/6}$ et $e^{7i\pi/6}$), d'où la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned} X^{12} - 1 = \; & (X-1)(X+1)(X - e^{i\pi/6})(X - e^{11i\pi/6})(X - e^{2i\pi/6}) \\ & (X - e^{10i\pi/6})(X - e^{3i\pi/6})(X - e^{9i\pi/6})(X - e^{4i\pi/6}) \\ & (X - e^{8i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{7i\pi/6}) \end{aligned}$$

Comme $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1)$, on en déduit la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} X^{12} - 1 \; & = (X-1)(X+1)(X^2 - 2\cos(\pi/6)X + 1) \\ & (X^2 - 2\cos(2\pi/6)X + 1)(X^2 - 2\cos(3\pi/6)X + 1) \\ & (X^2 - 2\cos(4\pi/6)X + 1)(X^2 - 2\cos(5\pi/6)X + 1) \\ & = (X-1)(X+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1) \\ & (X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

(c) Pour $X^6 + 1$, $z = re^{i\theta}$ vérifie $z^6 = -1$ si et seulement si $r = 1$ et $6\theta \equiv \pi[2\pi]$, on obtient donc comme racines complexes les $e^{i(\pi + 2k\pi)/6}$ ($k = 0, \dots, 5$). D'où la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned} X^6 + 1 \; & = (X - e^{i\pi/6})(X - e^{3i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{7i\pi/6}) \\ & (X - e^{9i\pi/6})(X - e^{11i\pi/6}) \end{aligned}$$

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les paires de racines complexes conjuguées :

$$X^6 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

(d) $X^9+X^6+X^3+1=P(X^3)$ où $P(X)=X^3+X^2+X+1=\frac{X^4-1}{X-1}$: les racines de P sont donc les trois racines quatrièmes de l'unité différentes de 1 (i, $-i$, -1) et

$$\begin{aligned} X^9+X^6+X^3+1 &= P(X^3) \\ &= (X^3+1)(X^3-i)(X^3+i) \\ &= (X^3+1)(X^6+1) \end{aligned}$$

On sait déjà factoriser X^6+1, il reste donc à factoriser le polynôme $X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$, où X^2-X+1 n'a pas de racine réelle. Donc

$$\begin{aligned} X^9+X^6+X^3+1 &= (X+1)(X^2-X+1)(X^2+1) \\ &\quad (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1) \end{aligned}$$

Pour la factorisation sur $\mathbb{C}$: les racines de X^2-X+1 sont $e^{i\pi/3}$ et $e^{5i\pi/3}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} X^9+X^6+X^3+1 &= (X+1)(X-e^{i\pi/3})(X-e^{5i\pi/3}) \\ &\quad (X-e^{i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6}) \\ &\quad (X-e^{7i\pi/6})(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6}) \end{aligned}$$

2. (a) Pour $X^2+(3i-1)X-2-i$, on calcule le discriminant

$$\Delta=(3i-1)^2-4(-2-i)=-2i$$

et on cherche les racines carrées (complexes !) de Δ : $w=a+ib$ vérifie $w^2=\Delta$ si et seulement si $w=1-i$ ou $w=-1+i$. Les racines du polynômes sont donc $\frac{1}{2}(-(3i-1)\pm(1-i))$ et $P(X)=(X+i)(X-1+2i)$.

(b) Pour $X^3+(4+i)X^2+(5-2i)X+2-3i$: -1 est racine évidente, et $P(X)=(X+1)(X^2+(3+i)X+2-3i)$. Le discriminant du polynôme $X^2+(3+i)X+2-3i$ vaut $\Delta=18i$, ses deux racines carrées complexes sont $\pm(3+3i)$ et finalement on obtient $P(X)=(X+1)(X-i)(X+3+2i)$.

Correction de l'exercice 804 ▲

Si P est constant égal à c, il convient si et seulement si $c=c^2$, et alors $c\in\{0;1\}$.
Dans la suite on suppose P non constant. Notons Z l'ensemble des racines de P. On sait que Z est un ensemble non vide, fini.

Analyse

Si $z\in Z$, alors $P(z)=0$ et la relation $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ implique $P(z^2)=0$, donc $z^2\in Z$. En itérant, on obtient $z^{2k}\in Z$ (pour tout $k\in |||^*$). Si $|z|>1$, la suite $(|z^{2k}|)_k$ est strictement croissante donc Z contient une infinité d'éléments, ce qui est impossible. De même si $0<|z|<1$, la suite $(|z^{2k}|)_k$ est strictement décroissante, ce qui est impossible pour la même raison. Donc les éléments de Z sont soit 0, soit des nombres complexes de module 1.
De plus, si $P(z)=0$, alors toujours par la relation $P(X^2)=P(X)P(X+1)$, on a que $P((z-1)^2)=0$ donc $(z-1)^2\in Z$. Par le même raisonnement que précédemment, alors ou bien $z-1=0$ ou bien $|z-1|=1$.
En écrivant $z=a+ib$, on vérifie que $|z|=|z-1|=1$ équivaut à $z=e^{\pm i\pi/3}$. Finalement, $Z\subset\left\{0,1,e^{i\pi/3},e^{-i\pi/3}\right\}$.
Or si $e^{\pm i\pi/3}$ était racine de P, alors $(e^{\pm i\pi/3})^2$ devrait aussi être dans Z, mais ce n'est aucun des quatre nombres complexes listés ci-dessus. Donc ni $e^{i\pi/3}$, ni $e^{-i\pi/3}$ ne sont dans Z. Les deux seules racines (complexes) possibles sont donc 0 et 1. Conclusion : le polynôme P est nécessairement de la forme $\lambda X^k(X-1)^\ell$.

Synthèse

La condition $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ devient

$$\lambda X^{2k}(X^2-1)^\ell=\lambda^2X^k(X-1)^\ell(X+1)^kX^\ell$$

qui équivaut à $\begin{cases}\lambda^2=\lambda\\ 2k=k+\ell\\ k=\ell\end{cases}$.

Autrement dit $k=\ell$ et $\lambda=1$ (puisqu'on a supposé P non constant).
Conclusion Finalement, les solutions sont le polynôme nul et les polynômes $(X^2-X)^k$, $k\in\mathbb{N}$ ($k=0$ donne le polynôme 1).

Correction de l'exercice 805 ▲

1. Commençons par remarquer que si P et Q sont deux polynômes qui conviennent, alors pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $P\left(z+\frac{1}{z}\right)-Q\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$. En appliquant cette égalité à $z=e^{i\theta}$, on obtient $(P-Q)(2\cos\theta)=0$. Le polynôme $P-Q$ a une infinité de racines, donc il est nul, ce qui montre $P=Q$.
2. Montrons l'existence de P par récurrence forte sur n :
   — Pour $n=0$, $P=2$ convient et pour $n=1$, $P=X$ convient.
   — Passage des rangs $k\leqslant n$ au rang $n+1$. Si on note P_k le polynôme construit pour $k\leqslant n$, on a
   $$z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}=(z+\frac{1}{z})(z^n+\frac{1}{z^n})-(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}})=(z+\frac{1}{z})P_n(z+\frac{1}{z})-P_{n-1}(z+\frac{1}{z})$$
   donc $P_{n+1}(X)=XP_n(X)-P_{n-1}(X)$ convient.
   — On a ainsi construit P_n pour tout n (avec $\deg P_n=n$).
3. Fixons n et notons P le polynôme obtenu. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $P(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=e^{in\theta}+e^{-in\theta}$ donc $P(2\cos(\theta))=2\cos(n\theta)$.
   En posant $x=2\cos(\theta)$ et donc $\theta=\arccos(\frac{x}{2})$ on obtient la relation Ainsi,
   $$P(x)=2\cos(n\arccos(\frac{x}{2}))\qquad\forall x\in[-2,2]$$
   Le polynôme dérivée est $P'(x)=\frac{n}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\sin(n\arccos(\frac{x}{2}))$, il s'annule en changeant de signe en chaque $\alpha_k=2\cos(\frac{k\pi}{n})$, ainsi $P'(\alpha_k)=0$ pour $k=0,\dots,n$.
   On calcule aussi que $P(\alpha_k)=\pm2$. Le tableau de signe montre que P est alternativement croissante (de -2 à $+2$) puis décroissante (de $+2$ à -2) sur chaque intervalle $[\alpha_{k+1},\alpha_k]$, qui forment une partition de $[-2,2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P possède n racines simples (une dans chaque intervalle $[\alpha_{k+1},\alpha_k]$) dans $[-2,2]$. Puisque P est de degré n, on a ainsi obtenu toutes ses racines.

Correction de l'exercice 806 ▲

1. Si $k\in\mathbb{Z}$ est racine de P, alors $k^n+a_{n-1}k^{n-1}+\cdots+a_1k=-a_0$ ce qui donne $k(k^{n-1}+\cdots+a_1)=-a_0$, donc k divise a_0.
2. Si $X^3-X^2-109X-11$ a une racine $k\in\mathbb{Z}$, nécessairement k divise 11, donc k vaut -1, 1, -11 ou 11. En testant ces quatre valeurs, on trouve que seul 11 est racine.
   De même, si $X^{10}+X^5+1$ admettait une racine entière k, celle-ci diviserait 1 donc vaut $k=\pm1$, or on vérifie que ni $+1$, ni -1 ne sont racines. Ainsi $X^{10}+X^5+1$ n'a pas de racine entière.

Correction de l'exercice 807 ▲

On a
$$L_i(a_i)=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}\frac{a_i-a_j}{a_i-a_j}=1\qquad\text{et}\qquad L_i(a_j)=0\text{ si }j\neq i$$
puisque le produit contient un facteur qui est nul : (a_j-a_j). Puisque les L_i sont tous de degré n, le polynôme P est de degré inférieur ou égal à n, et $P(a_j)=\sum_{i=0}^n b_iL_i(a_j)=b_i$.
Il reste à montrer qu'un tel polynôme est unique. Supposons que Q convienne aussi, alors $P-Q$ est de degré inférieur ou égal à n et s'annule en $n+1$ points (les a_i), donc il est identiquement nul, i.e. $P=Q$.

Pour l'application on utilise utilise les polynômes interpolateurs de Lagrange avec $a_0=0$, $b_0=1$; $a_1=1$, $b_1=0$; $a_2=-1$, $b_2=-2$; $a_3=2$, $b_3=4$. On sait qu'un tel polynôme $P(X)$ est unique et s'écrit
$$P(X)=1\cdot L_0(X)+0\cdot L_1(X)-2\cdot L_2(X)+4L_3(X)$$

où

$$L_0(X) = \frac{(X-1)(X+1)(X-2)}{(0-1)(0+1)(0-2)} = \frac{1}{2}(X^3-2X^2-X+2)$$

$$L_1(X) = \frac{(X-0)(X+1)(X-2)}{(1-0)(1+1)(1-2)} = \frac{-1}{2}(X^3-X^2-2X)$$

$$L_2(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{-1}{6}(X^3-3X^2+2X)$$

$$L_3(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)} = \frac{1}{6}(X^3-X)$$

Ainsi :

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3-2X^2-\frac{1}{2}X+1.$$

Correction de l'exercice 809 ▲

1. $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2-2X-1-\frac{5}{X-1}$.
2. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X+7-\frac{3}{X-1}+\frac{19}{X-2}$.
3. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X+5+\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{7}{X-1}$.
4. $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2+3+\frac{2}{X-1}-\frac{2}{X+1}$.
5. $\frac{X}{X^2-4} = \frac{1/2}{X+2}+\frac{1/2}{X-2}$.
6. $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2+X+1-\frac{1}{X}+\frac{1/2}{X+1}+\frac{3/2}{X-1}$.
7. $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1+\frac{1}{X}+\frac{3}{(X-1)^4}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{10}{(X-1)^2}+\frac{4}{X-1}$.
8. $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1+\frac{3/4}{(X-1)^3}+\frac{3/2}{(X-1)^2}+\frac{37/16}{X-1}-\frac{1/8}{(X+1)^2}-\frac{5/16}{X+1}$.
9. $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X-3+\frac{7X+13}{(X^2+X+2)^3}-\frac{7X+21}{(X^2+X+2)^2}+\frac{14}{X^2+X+2}$.
10. $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i}+\frac{1-3i}{X+2i}$.
11. $\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{\frac{-\sqrt{2}+2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}$.
12. $\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i}-\frac{i}{(X+i)^2}$.
13. $\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
14. $\frac{X}{X^4+1} = -\frac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
15. $\frac{X^2+X+1}{X^4+1} = \frac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
16. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X+\frac{3/4}{X-1}+\frac{1/4}{X+1}-\frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1} = X+\frac{3/4}{X-1}+\frac{1/4}{X+1}+\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i}+\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$.
17. $\frac{X^5+X+1}{X^6-1} = \frac{1/2}{X-1}+\frac{1/6}{X+1}+\frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \frac{1/2}{X-1}+\frac{1/6}{X+1}-\frac{\frac{1}{3}j}{X+j}-\frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$, où on a posé de façon standard $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
18. $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} = -\frac{2}{X^4}+\frac{4}{X^3}-\frac{2}{X^2}-\frac{3}{X}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}+\frac{3X+5}{X^2+X+1} =$
$-\frac{2}{X^4}+\frac{4}{X^3}-\frac{2}{X^2}-\frac{3}{X}+\frac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2}+\frac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2}+\frac{\frac{3}{2}-\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j}+\frac{\frac{3}{2}+\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}$, où on a posé de façon standard $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
19. $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1}-\frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \frac{1/6}{X-i}+\frac{1/6}{X+i}-\frac{1/6}{X-2i}-\frac{1/6}{X+2i}$.

20. $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{4/3}{X^2+1} + \frac{7/3}{X^2+4} = \frac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \frac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}$.

Correction de l'exercice 810 ▲

Commencer bien sûr par la division suivant les puissances décroissantes (la faire faire par les étudiants) : $\Phi = x+1+\Phi_1$ avec $\Phi_1 = \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.
Puis factoriser le dénominateur et faire donner le type de décomposition de Φ_1 :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Expliquer qu'on obtient alors A en multipliant les deux membres de (25) par x^2 et en passant à la limite quand x tend vers 0 ($A = -1$). On obtient de même C par multiplication par $x-\frac{1}{2}$ et calcul de la limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$ ($C = -2$). Enfin on trouve B en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $x = 1$, ou mieux en multipliant les deux membres de (25) par x et en passant à la limite pour $x \to \infty$ ($B = 4$).
Faire remarquer que pour un cas aussi simple, les calculs peuvent se faire *de tête* en écrivant simplement les coefficients A, B, C au fur et à mesure qu'on les obtient.

$$\frac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2} = x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}.$$

Correction de l'exercice 811 ▲

La division suivant les puissances décroissantes donne : $\Phi = 2+\Phi_1$ avec

$$\Phi_1 = \frac{4x^4-10x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1}.$$

Faire remarquer que la méthode de l'exercice précédent permettrait d'obtenir facilement A et D par multiplication par x^3 et par $(x-1)^2$, mais qu'il resterait encore 3 coefficients à déterminer.
Il y a ici une méthode plus efficace : effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3 (qui est l'exposant du facteur x) du numérateur $1-4x+8x^2-10x^3+4x^4$ par $(x-1)^2$, ou plutôt par $1-2x+x^2$:

$$1-4x+8x^2-10x^3+4x^4 = (1-2x+x^2)\times(1-2x+3x^2)+(-2x^3+x^4). \tag{26}$$

En divisant les deux membres de (26) par $x^3(x-1)^2$, on obtient A, B et C d'un seul coup :

$$\Phi_1 = \frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

Le calcul de D et E est alors immédiat par décomposition de $\frac{x-2}{(x-1)^2}$: méthode de l'exercice précédent, ou division suivant les puissances décroissantes de $x-2$ par $x-1$: $x-2 = (x-1)-1$.

$$\frac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2} = 2+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}.$$

Remarque : cette méthode est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3). Elle peut être utilisée pour une fraction du type $\frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, mais il faut commencer par le changement de variable $u = x-a$ avant de faire la division, puis bien entendu revenir ensuite à la variable x.

Correction de l'exercice 812 ▲

Pas de division préliminaire dans ce cas... Forme de la décomposition :

$$\Phi = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+1}. \tag{27}$$

La méthode du premier exercice permet d'obtenir A, puis B et C (pour ces derniers : multiplication des deux membres de (27) par x^2+1, puis limite quand x tend vers i ou vers $-i$, avec séparation des parties réelle et imaginaire), mais c'est bien insuffisant pour conclure : il faut encore soustraire $\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}$, simplifier par x^2+1, calculer D et E... (le faire faire quand même à titre d'entraînement).
On va ici se contenter de trouver A ($A=3$), puis faire la soustraction $\Phi_1=\Phi-\frac{A}{x}$. Faire faire le calcul aux étudiants ; leur faire remarquer que, sauf erreur de calcul, la fraction Φ_1 *doit* se simplifier par x. On trouve :

$$\Phi=\frac{3}{x}+\frac{x^5-2x^4+2x^3-x^2+2x+2}{(x^2+1)^3}.$$

La fin de la décomposition se fait par divisions successives suivant les puissances décroissantes : division du numérateur $x^5-2x^4+2x^3-x^2+2x+2$ par x^2+1, puis du quotient obtenu par x^2+1.

$$\frac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3}=\frac{3}{x}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{3}{(x^2+1)^2}+\frac{x-2}{x^2+1}.$$

Remarque : cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur *simple*, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle. Faire remarquer aussi comment on peut simplifier petit à petit en éliminant du dénominateur un dénominateur *simple* (méthode utilisée dans l'exercice 3 par le calcul de $\Phi-\frac{A}{x}$).

Correction de l'exercice 816 ▲

1.
2.
3. ssi $\exists\, G\in K(X)$ tel que $G\circ F=X\Rightarrow P\circ F=XQ\circ F$.
   $F=\frac{A}{B}$, $A\wedge B=1\Rightarrow \begin{cases}A\mid(p_0-Xq_0)\\ B\mid(p_n-Xq_n)\end{cases}\Rightarrow F$ est homographique.
4. $F=\phi(X)$.

Correction de l'exercice 818 ▲

$F=\frac{P}{Q}$. Si $P=\lambda Q$: $\operatorname{Im}F=\{\lambda\}$.
Si $P=\lambda Q+\mu$: $\operatorname{Im}F=\mathbb{C}\setminus\{\lambda\}$.
Sinon, $\operatorname{Im}F=\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 819 ▲

1) $G=$cste.
2) F a un seul pôle $a\Rightarrow F=\frac{P}{(X-a)^k}$ et $G=a+\frac{1}{Q}$ avec $\deg P\leqslant k$.
3) $F\in\mathbb{C}[X]\Rightarrow G\in\mathbb{C}[X]$.

Correction de l'exercice 820 ▲

1.
2. $n\frac{X^n+1}{X^n-1}$.

Correction de l'exercice 821 ▲

1. $\Rightarrow\frac{P(X)}{Q(X)}=\frac{P(\frac{1}{X})}{Q(\frac{1}{X})}=\frac{P(X)+P(\frac{1}{X})}{Q(X)+Q(\frac{1}{X})}$.
2.
3.

Correction de l'exercice 824 ▲

$I_k = \{F \text{ tels que } \deg F \leqslant -k\}$.

Correction de l'exercice 826 ▲

$$\frac{1}{(X^2+2X+1)(X^3-1)} = \frac{-1/2}{(X+1)^2} + \frac{-3/4}{X+1} + \frac{1/12}{X-1} + \frac{1/3}{X-j} + \frac{1/3}{X-j^2}$$
$$= \frac{-1/2}{(X+1)^2} + \frac{-3/4}{X+1} + \frac{1/12}{X-1} + \frac{1}{3}\frac{2X+1}{X^2+X+1}.$$

Correction de l'exercice 827 ▲

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+p} p!}{k!\,(n-k)!\,(X+k)^{p+1}}$.
2. $\frac{(-1)^p p!}{2i\sin\alpha}\left(\frac{1}{(X-e^{i\alpha})^{p+1}} - \frac{1}{(X-e^{-i\alpha})^{p+1}}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{p} C_{p+1}^k p!\,(-1)^k \frac{\sin(p+1-k)\alpha}{\sin\alpha} X^k}{(X^2-2X\cos\alpha+1)^{p+1}}$.
3. $\frac{\sum_{k \text{ pair}} C_{p+1}^k p!\,(-1)^{p+1} \frac{\operatorname{sh} k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha} X^{p+1-k} + \sum_{k \text{ impair}} C_{p+1}^k p!\,(-1)^p \frac{\operatorname{ch} k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha} X^{p+1-k}}{(X^2-2X\operatorname{sh}\alpha-1)^{p+1}}$.

Correction de l'exercice 828 ▲

1. 1.
2. $1/4$.
3. $1/2$.

Correction de l'exercice 829 ▲

$\frac{1}{Q(a)(X-a)^2} - \frac{Q'(a)}{Q^2(a)(X-a)} = \frac{2}{R''(a)(X-a)^2} - \frac{2R'''(a)}{3R''^2(a)(X-a)}$.

Correction de l'exercice 830 ▲

1. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(1+a_i^2)^n}{P'^2(a_i)(X-a_i)^2} + \frac{2na_i - P''(a_i)(1+a_i^2)/P'(a_i)}{P'^2(a_i)(X-a_i)}\right)$.
2.

Correction de l'exercice 831 ▲

1. Décomposer $1/P$ en éléments simples, et prendre $x \to \infty$.
2. Idem avec $X^k/P \Rightarrow \Sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant k < n-1 \\ 1 & \text{si } k = n-1. \end{cases}$

Correction de l'exercice 832 ▲

1. $P' = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i P}{X-x_i} \Rightarrow \frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{X-x_i}$.
2. $P'(z) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\overline{z-x_i}}{|z-x_i|^2} = 0 \Leftrightarrow z = \operatorname{Bar}\left(x_i, \frac{m_i}{|z-x_i|^2}\right)$.
3.
4.

Correction de l'exercice 834 ▲

$F(X+1)-F(X)=\frac{2}{X-1}-\frac{3}{X}+\frac{1}{X+1} \Rightarrow F(X)=\frac{1}{X}-\frac{2}{X-1}+\text{cste}.$

Correction de l'exercice 835 ▲

$F=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{X-b_j}-\frac{1}{X-c}=\lambda\frac{\prod(X-a_i)}{(X-c)\prod(X-bj)}$ où $\lambda=-\prod\frac{c-b_i}{c-a_i}$.

Correction de l'exercice 836 ▲

$Q=(XP+P')(XP'+P)=XP^2\left(X+\frac{P'}{P}\right)\left(\frac{1}{X}+\frac{P'}{P}\right)$.

$\frac{P'}{P}=\sum\frac{1}{X-a_i}$, donc les expressions : $x+\frac{P'(x)}{P(x)}$ et $\frac{1}{x}+\frac{P'(x)}{P(x)}$ changent de signe entre a_i et a_{i+1}.

Cela fait au moins $2n-3$ racines distinctes ($2n-2$ si 1 n'est pas racine), plus encore une racine pour $\frac{1}{x}+\frac{P'(x)}{P(x)}$ entre 0 et a_1.

Correction de l'exercice 837 ▲

$\frac{P}{Q}=\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{(X-k)\prod_{i\neq k}(k-i)}$ donc $\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}=\lim_{x\to\infty}\frac{xP(x)}{Q(x)}=1$.

Si l'on suppose $|P(k)|<\frac{n!}{2^n}$ pour tout $k\in[[0,n]]$ alors $\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}\right|<\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)}=1$, contradiction.

Correction de l'exercice 838 ▲

1. On suppose $P\neq 0$. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ les racines de P de multiplicités $m_1,\dots,m_p$ et $n=m_1+\dots+m_p=\deg(P)$. On a $\frac{P'}{P}=\sum_i\frac{m_i}{X-\alpha_i}$ et $\sum_i\frac{-m_i}{(X-\alpha_i)^2}=\left(\frac{P'}{P}\right)'=\frac{P''}{P}-\left(\frac{P'}{P}\right)^2=\frac{n(n-1)}{(X-\alpha)(X-\beta)}-\left(\sum_i\frac{m_i}{X-\alpha_i}\right)^2$ où α,β sont les deux racines de P manquant dans P''. Si $\alpha_i\notin\{\alpha,\beta\}$ alors en comparant les termes en $1/(X-\alpha_i)^2$ des membres extrêmes on trouve $m_i=1$. De même si $\alpha_i=\alpha\neq\beta$ ou l'inverse. Reste le cas $\alpha_i=\alpha=\beta$ qui donne $-m_i=n(n-1)-m_i^2$ donc $m_i=n$ ce qui contredit l'hypothèse "P a deux racines distinctes".
2. Soient $\alpha_i<\alpha_j$ les deux plus petites racines réelles de P. Si α_i est aussi racine de P'' alors P et P'' changent de signe en α_i et, en remplaçant au besoin P par $-P$, P est convexe positif sur $]-\infty,\alpha_i[$ et concave négatif sur $]\alpha_i,\alpha_j[$ ce qui est absurde. Donc $\alpha_i\in\{\alpha,\beta\}$. De même pour la plus grande racine réelle de P, ce qui prouve que α et β sont réels. En identifiant les éléments de première espèce dans les deux décompositions de P'/P on obtient :

$$\forall\, i\in[[1,n]],\ \sum_{j\neq i}\frac{2}{\alpha_i-\alpha_j}=\begin{cases}n(n-1)/(\alpha-\beta) & \text{si } \alpha_i=\alpha,\\ n(n-1)/(\beta-\alpha) & \text{si } \alpha_i=\beta,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

   En particulier pour $\alpha_i\notin\{\alpha,\beta\}$ on a : $\sum_{j\neq i}\frac{\overline{\alpha_i}-\overline{\alpha_j}}{|\alpha_i-\alpha_j|^2}=0$ ce qui signifie que $\overline{\alpha_i}$ est barycentre des $\overline{\alpha_j}$ avec des coefficients positifs, donc appartient à l'enveloppe convexe des $\overline{\alpha_j}$, $j\neq i$. Il en va de même sans les barres, et donc l'ensemble des racines de P n'a pas d'autres points extrémaux que α et β ; il est inclus dans $[\alpha,\beta]$ donc dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 839 ▲

1. $X^3-1=(X^2+1)(X^3+X^2-1)-X^4(X+1)$.
2. $F(x)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\arctan x+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 840 ▲

1. $1=(1-X)^2(1+2X+3X^2+\cdots+nX^{n-1})+(n+1)X^n-nX^{n+1}$.
2. $=\frac{-n\cos n\theta+(n+1)\cos(n-1)\theta-\cos\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

Correction de l'exercice 841 ▲

1. $1-X^2=(1-2X\cos\theta+X^2)(1+2X\cos\theta+\cdots+2X^n\cos n\theta)+2X^{n+1}\cos(n+1)\theta-2X^{n+2}\cos n\theta$.
2. $=\frac{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta}$.

Correction de l'exercice 842 ▲

1.
2. Division de 1 par $P\Rightarrow U=1-2X+X^2+X^3-X^4,\quad V=-1+X^2+X^3+X^4$.

Correction de l'exercice 843 ▲

1. Soit $F=\frac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2}=\frac{X^2+3X+5}{(X-1)(X-2)}$.
   1 et 2 ne sont pas racines du polynôme X^2+3X+5 et donc, F est bien sous forme irréductible. La partie entière de F étant clairement 1, F s'écrit sous la forme :
   $$F=1+\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2},$$
   où a et b sont deux réels.
   $a=\lim_{x\to1}(x-1)F(x)=\frac{1+3+5}{1-2}=-9$ et $b=\lim_{x\to2}(x-2)F(x)=\frac{4+6+5}{2-1}=15$. Donc,
   $$F=1-\frac{9}{X-1}+\frac{15}{X-2}.$$
2. Soit $F=\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :
   $$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}+\frac{c}{X-3},$$
   où a, b et c sont trois réels.
   $a=\lim_{x\to1}(x-1)F(x)=\frac{1+1}{(1-2)(1-3)}=1$, puis $b=\lim_{x\to2}(x-2)F(x)=\frac{4+1}{(2-1)(2-3)}=-5$ et
   $c=\lim_{x\to3}(x-3)F(x)=\frac{9+1}{(3-1)(3-2)}=5$. Donc,
   $$F=\frac{1}{X-1}-\frac{5}{X-2}+\frac{5}{X-3}.$$
3. Soit $F=\frac{1}{X(X-1)^2}$.
   $$F=\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{(X-1)^2},$$
   avec
   $a=\lim_{x\to0}xF(x)=1$ et $c=\lim_{x\to1}(x-1)^2F(x)=1$. Enfin, $x=-1$ fournit $-1-\frac{b}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$ et donc $b=-1$.
   Pour trouver b, on peut aussi écrire (le meilleur) $0=\lim_{x\to+\infty}xF(x)=a+b$ et donc que $b=-a=-1$.
   On peut encore écrire (le moins bon ici)
   $$\frac{1}{X(X-1)^2}-\frac{1}{X}-\frac{1}{(X-1)^2}=\frac{1-(X-1)^2-X}{X(X-1)^2}=\frac{-X^2+X}{X(X-1)^2}=-\frac{1}{X-1}.$$

Donc,

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Autre démarche.

$$\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{X-1-X}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{X-1-X}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2}$$
$$= \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

4. Soit $F = \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \frac{1}{2}$ puis, $x = 0$ fournit $-2a+2b = 1$ et donc $a = 0$.

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2}\right).$$

5. Soit $F = \frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{(X-2)^3} - \frac{a}{X+2} + \frac{b}{(X+2)^2} - \frac{c}{(X+2)^3}.$$

$c = \lim_{x\to 2}(x-2)^3F(x) = \frac{1}{64}$ puis,

$$F - \frac{1}{64}\left(\frac{1}{(X-2)^3} - \frac{1}{(X+2)^3}\right) = \frac{64-(X+2)^3+(X-2)^3}{64(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{-12X^2+48}{64(X-2)^3(X+2)^3}$$
$$= -\frac{3}{16}\frac{X^2-4}{(X-2)^3(X+2)^3} = -\frac{3}{16}\frac{1}{(X-2)^2(X+2)^2}$$

Puis, $b = \lim_{x\to 2}(x-2)^2\left(F(x) - \frac{1}{64}\left(\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x+2)^3}\right)\right) = -\frac{3}{16}\frac{1}{(2+2)^2} = -\frac{3}{256}$. Enfin, $x = 0$ fournit $-\frac{1}{64} = -a - \frac{3}{512} - \frac{1}{256}$ et $a = \frac{1}{64} - \frac{5}{512} = \frac{3}{512}$. Donc,

$$F = \frac{1}{512}\left(\frac{3}{X-2} - \frac{6}{(X-2)^2} + \frac{8}{(X-2)^3} - \frac{3}{X+2} - \frac{6}{(X+2)^2} - \frac{8}{(X+2)^3}\right).$$

6. Soit $F = \frac{X^6}{(X^3-1)^2}$. On a déjà $(X^3-1)^2 = (X-1)^2(X-j)^2(X-j^2)^2$. Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\overline{c}}{X-j^2} + \frac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$b = \lim_{z\to 1}(z-1)^2F(z) = \frac{1}{9}$ et

$$d = \lim_{z\to j}(z-j)^2F(z) = \frac{j^6}{(j-1)^2(j-j^2)^2} = \frac{1}{j^2(j-1)^4} = \frac{1}{j^2(j^2-2j+1)^2}$$
$$= \frac{1}{j^2(-3j)^2} = \frac{j^2}{9}$$

Puis,

$$\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{j^2}{(X-j)^2}+\frac{j}{(X-j^2)^2}=\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{(j+j^2)X^2-2(j+j^2)X+2}{(X-j)^2(X-j^2)}$$
$$=\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-X^2+2X+2}{(X-j)^2(X-j^2)}=\frac{(X^2+X+1)^2+(X-1)^2(-X^2+2X+2)}{(X^3-1)^2}$$
$$=\frac{6X^3+3}{(X^3-1)^2}$$

Par suite,

$$F-1-\frac{1}{9}(\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{j^2}{(X-j)^2}+\frac{j}{(X-j^2)^2})=\frac{X^6}{(X^3-1)^2}-1-\frac{2X^3+1}{3(X^3-1)^2}$$
$$=\frac{3X^6-3(X^3-1)^2-2X^3-1}{3(X^3-1)^2}=\frac{4X^3-4}{3(X^3-1)^2}$$
$$=\frac{4}{3}\frac{1}{X^3-1}.$$

Mais alors, $a=\lim_{z\to 1}(z-1)(F(z)-1-\frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{j^2}{(z-j)^2}+\frac{j}{(z-j^2)^2})=\frac{4}{3}\frac{1}{1+1+1}=\frac{4}{9}$. De même,

$$c=\lim_{z\to j}(z-j)(F(z)-1-\frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{j^2}{(z-j)^2}+\frac{j}{(z-j^2)^2})=\frac{4}{3}\frac{1}{(j-1)(j-j^2)}=\frac{4j^2}{9}.$$

Donc,

$$F=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{4j^2}{X-j}+\frac{j^2}{(X-j)^2}+\frac{4j}{X-j^2}+\frac{j}{(X-j^2)^2}).$$

Si on veut la décomposition sur $\mathbb{R}$, on peut regrouper les conjugués :

$$F=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{4j^2(X-j^2)+4j(X-j)}{X^2+X+1}+\frac{j^2(X-j^2)^2+j(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2})$$
$$=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X+4}{X^2+X+1}+\frac{-X^2+2X+2}{(X^2+X+1)^2})$$
$$=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X+4}{X^2+X+1}+\frac{-X^2-X-1+3X+3}{(X^2+X+1)^2})$$
$$=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X+3}{X^2+X+1}+\frac{3X+3}{(X^2+X+1)^2})$$

7. Soit $F=\frac{1}{X^6+1}$.

$$F=\sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k},$$

où $\omega_k=e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6})}$. Mais,

$$\lambda_k=\frac{1}{6\omega_k^5}=\frac{\omega_k}{6\omega_k^6}=-\frac{\omega_k}{6}.$$

Donc,

$$\frac{1}{X^6+1}=\frac{1}{6}(-\frac{i}{X-i}+\frac{i}{X+i}-\frac{e^{i\pi/6}}{X-e^{i\pi/6}}-\frac{e^{-i\pi/6}}{X-e^{-i\pi/6}}+\frac{e^{i\pi/6}}{X+e^{i\pi/6}}+\frac{e^{-i\pi/6}}{X+e^{-i\pi/6}}).$$

8. Soit $F=\frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$.

$$\begin{aligned}X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2&=(X-1)(X^4-2X^3+3X^2-4X+2)=(X-1)^2(X^3-X^2+2X-2)\\&=(X-1)^2(X^2(X-1)+2(X-1))=(X-1)^3(X^2+2).\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de F est donc de la forme

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}+\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}d&=\lim_{z\to i\sqrt{2}}(z-i\sqrt{2})F(z)=\frac{(i\sqrt{2})^2+3}{(i\sqrt{2}-1)^3(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=\frac{1}{(2i\sqrt{2})(-2i\sqrt{2}+6+3i\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{-4+10i\sqrt{2}}\\&=-\frac{2+5i\sqrt{2}}{108}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}=-\frac{1}{108}\frac{(2+5i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2})+(2-5i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})}{X^2+2}=-\frac{1}{108}\frac{4X-20}{X^2+2}=\frac{-X+5}{27(X^2+2)}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}&=\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)}-\frac{-X+5}{27(X^2+2)}\\&=\frac{27(X^2+3)-(-X+5)(X-1)^3}{27(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{X^4-8X^3+45X^2-16X+86}{27(X-1)^3(X^2+2)}\\&=\frac{(X^2+2)(X^2-8X+43)}{27(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{X^2-8X+43}{27(X-1)^3}\\&=\frac{X^2-2X+1-6X+6+36}{27(X-1)^3}\\&=\frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3}).\end{aligned}$$

Finalement,

$$F=\frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3})-\frac{1}{108}(\frac{2+5i\sqrt{2}}{X-i\sqrt{2}}+\frac{2-5i\sqrt{2}}{X+i\sqrt{2}}).$$

9. Soit $F=\frac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$. Puisque F est réelle et impaire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-i}+\frac{c}{(X-i)^2}+\frac{d}{(X-i)^3}+\frac{\overline{b}}{X+i}+\frac{\overline{c}}{(X+i)^2}+\frac{\overline{d}}{(X+i)^3}.$$

$a=\lim_{x\to 1}(x-1)F(x)=\frac{1}{(1+1)^3(1+1)}=\frac{1}{16}$. Puis,

$$\begin{aligned}F-\frac{1}{16}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1})&=\frac{8X-X(X^2+1)^3}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}=\frac{-X^7-3X^5-3X^3+7X}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}\\&=\frac{X(X^2-1)(-X^4-4X^2-7)}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}=-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} d &= \lim_{x\to i}(x-i)^3F(x) = \lim_{x\to i}(x-i)^3\left(F(x) - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{8}\frac{i^4+4i^2+7}{(i+i)^3} = -\frac{i}{16} \end{aligned}$$

Puis,

$$-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3} + \frac{i}{16}\frac{1}{(X-i)^3} - \frac{i}{16}\frac{1}{(X+i)^3} = -\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3} + \frac{1}{8}\frac{3X^2-1}{(X^2+1)^3} = \frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2}.$$

Ensuite, $c = \frac{i^2+6}{8(i+i)^2} = -\frac{5}{32}$. Puis,

$$\frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2} + \frac{5}{32}\left(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2}\right) = \frac{2(X^2+6)+5(X^2-1)}{16(X^2+1)^2} = \frac{7}{16(X^2+1)}.$$

Enfin, $b = \frac{7}{16(i+i)} = -\frac{7i}{32}$. Finalement,

$$F = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}\right) - \frac{7i}{32}\left(\frac{1}{X-i}-\frac{1}{X+i}\right) - \frac{5}{32}\left(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2}\right) - \frac{i}{16}\left(\frac{1}{(X-i)^3}-\frac{1}{(X+i)^3}\right).$$

10. Soit $F = \frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$.

$$\begin{aligned} X^5-X^4+X^3-X^2+X-1 &= X^4(X-1)+X^2(X-1)+(X-1) = (X-1)((X^4+2X^2+1)-X^2) \\ &= (X-1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \\ &= (X-1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2). \end{aligned}$$

Püisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F = aX+b+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X-j}+\frac{\overline{d}}{X-j^2}+\frac{e}{X+j}+\frac{\overline{e}}{X-j^2}.$$

$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = 1$, puis $b = \lim_{x\to+\infty}(F(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\dots}{x^5\dots} = 1$. Puis, $c = \frac{1^6+1}{5-4+3-2+1} = \frac{2}{3}$, $d = \frac{j^6+1}{5j^4-4j^3+3j^2-2j+1} = \frac{2}{3j^2+3j-3} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$ et $e = \frac{(-j)^6+1}{5j^4+4j^3+3j^2+2j+1} = \frac{2}{3j^2+7j+5} = \frac{1}{2j+1}$. Donc,

$$F = X+1+\frac{2}{3}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{X-j} - \frac{1}{3}\frac{1}{X-j^2} + \frac{1}{2j+1}\frac{1}{X+j} + \frac{1}{2j^2+1}\frac{1}{X-j^2}.$$

11. Soit $F = \frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$.
La décomposition sur $\mathbb{R}$ (hors programme) s'obtiendrait de la façon suivante

$$\begin{aligned} X^7+1 &= (X^2+X+1)(X^5-X^4+X^2-X)+X+1 \\ &= (X^2+X+1)[(X^2+X+1)(X^3-2X^2+X+2)-4X-2]+X+1 \\ &= (X^2+X+1)^2(X^3-2X^2+X+2)-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1 \\ &= (X^2+X+1)^2[(X^2+X+1)(X-3)+3X+5]-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1 \\ &= X+1-(4X+2)(X^2+X+1)+(3X+5)(X^2+X+1)^2+(X-3)(X^2+X+1)^3 \end{aligned}$$

Donc,

$$F = X-3+\frac{3X+5}{X^2+X+1} - \frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}.$$

12. Soit $F = \frac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$. La décomposition de F en éléments simples est de la forme

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b_1}{X-1} + \frac{b_2}{(X-1)^2} + \frac{b_3}{(X-1)^3} + \frac{b_4}{(X-1)^4} + \frac{c_1}{X-\sqrt{2}} + \frac{c_2}{(X-\sqrt{2})^2} + \frac{d_1}{X+\sqrt{2}} + \frac{d_2}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

$a = \lim_{x\to 0} xF(x) = \frac{1}{4}$. Puis,

$$\begin{aligned} c_2 &= \lim_{x\to\sqrt{2}} (x-\sqrt{2})^2 F(x) = \frac{2+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2} = \frac{3}{8\sqrt{2}(4-8\sqrt{2}+12-4\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{3}{8\sqrt{2}(17-12\sqrt{2})} = \frac{3}{8(-24+17\sqrt{2})} = \frac{3}{16}(24+17\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Un calcul conjugué fournit $d_2 = \frac{3}{16}(24-17\sqrt{2})$. On a ensuite

$$\frac{3}{16}\left(\frac{24+17\sqrt{2}}{(X-\sqrt{2})^2} + \frac{24-17\sqrt{2}}{(X+\sqrt{2})^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} F - \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} &= \frac{2(X^2+1) - 3(6X^2+17X+12)X(X-1)^4}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2} \\ &= \frac{-18X^7+21X^6+60X^5-90X^4-30X^3+95X^2-36X+2}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2} \\ &= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)} \end{aligned}$$

Mais alors,

$$c_1 = \frac{-18.4\sqrt{2}+21.4+24.2\sqrt{2}-48.2+18\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{-13-6\sqrt{2}}{8(17-12\sqrt{2})} = -\frac{1}{8}(365+258\sqrt{2}),$$

et par un calcul conjugué, $d_1 = -\frac{1}{8}(365-258\sqrt{2})$. Ensuite,

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{365+258\sqrt{2}}{X-\sqrt{2}} + \frac{365-258\sqrt{2}}{X+\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} F - \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} + \frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2} &= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)} + \frac{365X+516}{4(X^2-2)} \\ &= \frac{2(-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1)+(365X+516)X(X-1)^4}{4X(X-1)^4(X^2-2)} \\ &= \frac{365X^6-980X^5+168X^4+1684X^3-1795X^2+552X-2}{4X(X-1)^4(X^2-2)} \\ &= \frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4} \end{aligned}$$

Ensuite,

$$F - \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} + \frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2} - \frac{1}{4X} = \frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4} - \frac{1}{4X}$$
$$= \frac{(365X^4-980X^3+898X^2-276X+1)-(X-1)^4}{4X(X-1)^4} = \frac{364X^4-976X^3+892X^2-272X}{4X(X-1)^4}$$
$$= \frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4}$$

Enfin, $b_4 = \lim_{x\to 1}(x-1)^4\frac{182x^3-488x^2+446x-136}{2(x-1)^4} = 2$, puis

$$\frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4} - \frac{2}{(X-1)^4} = \frac{91X^3-244X^2+223X-70}{(X-1)^4} = \frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3}.$$

Puis, $b_3 = \lim_{x\to 1}(x-1)^3\frac{91x^2-153x+70}{(x-1)^3} = 8$, puis

$$\frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3} - \frac{8}{(X-1)^3} = \frac{91X^2-153X+62}{(X-1)^3} = \frac{91X-62}{(X-1)^2}$$
$$= \frac{91X-91+29}{(X-1)^2} = \frac{91}{X-1} + \frac{29}{(X-1)^2}$$

ce qui fournit $b_2 = 29$ et $b_1 = 91$.

$$F = \frac{1}{4X} + \frac{91}{X-1} + \frac{29}{(X-1)^2} + \frac{8}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^4} - \frac{365+258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X-\sqrt{2}} + \frac{3(24+17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X-\sqrt{2})^2}$$
$$- \frac{365-258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X+\sqrt{2}} + \frac{3(24-17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

13. Soit $F = \frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$.

$$(X+1)^7-X^7-1 = 7X^6+21X^5+35X^4+35X^3+21X^2+7X = 7X(X^5+3X^4+5X^3+5X^2+3X+1)$$
$$= 7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1) = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Si on n'a pas deviné que $X^4+2X^3+3X^2+2X+1 = (X^2+X+1)^2$ (par exemple, en repérant que j est racine ou encore en manipulant l'identité $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$), on peut pratiquer comme suit

$$X^4+2X^3+3X^2+2X+1 = X^2(X^2+\frac{1}{X^2}+2(X+\frac{1}{X})+3) = X^2((X+\frac{1}{X})^2+2(X+\frac{1}{X})+1)$$
$$= X^2(X+\frac{1}{X}+1)^2 = (X^2+X+1)^2$$

La déccomposition en éléments simples de $7F$ est donc de la forme

$$7F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\overline{c}}{X-j^2} + \frac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$a = \frac{1}{(0+1)(0^2+0+1)^2} = 1$ et $b = \frac{1}{(-1)(1-1+1)^2} = -1$. Puis,

$$d = \frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2} = \frac{1}{j(-j^2)j^2(1-2j+j^2)} = \frac{1}{-j^2(-3j)} = \frac{1}{3}.$$

Ensuite,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}\right)=\frac{(X-j^2)^2+(X-j)^2}{3(X^2+X+1)^2}=\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}7F-\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}&=\frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}=\frac{-2X^4-4X^3-4X^2+X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}\\&=\frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$c=\frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)}=\frac{5}{-3(j-j^2)}=\frac{5i}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement,

$$F=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}+\frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j)}+\frac{3}{3(X-j)^2}-\frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j^2)}+\frac{1}{3(X-j^2)^2}\right).$$

Correction de l'exercice 844 ▲

1. Soit $P=X^n-1$ et $F=\frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle et les pôles de F sont simples (car $P=X^n-1$ et $P'=nX^{n-1}$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$). De plus, $P=\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$ où $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$. Donc, $F=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$ où

$$\lambda_k=\frac{1}{P'(\omega_k)}=\frac{1}{n\omega_k^{n-1}}=\frac{\omega_k}{n\omega_k^n}=\frac{\omega_k}{n}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{X^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}}.$$

2. Soit $P=(X-1)(X^n-1)=(X-1)^2\prod_{k=1}^{n-1}\omega_k$ où $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$. Soit $F=\frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle. D'autre part, F admet un pôle double, à savoir 1 et $n-1$ pôles simples à savoir les $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$, $\leqslant k\leqslant n-1$. Donc,

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}.$$

$\lambda_k=\frac{1}{(n+1)\omega_k^n-n\omega_k^{n-1}-1}=\frac{1}{n(1-\omega_k^{n-1})}=\frac{\omega_k}{n(\omega_k-1)}$. Ensuite,

$$b=\lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x)=\frac{1}{1^{n-1}+\ldots+1^1+1}=\frac{1}{n}.$$

Il reste à calculer a.

$$F-\frac{1}{n(X-1)^2}=\frac{n-(X^{n-1}+X^{n-2}+\ldots+X+1)}{n(X-1)^2(X^{n-1}+\ldots+X+1)}=\frac{-X^{n-2}-2X^{n-3}-\ldots-(n-2)X-(n-1))}{n(X-1)(X^{n-1}+\ldots+X+1)}.$$

Donc, $a=\lim_{x\to 1}(x-1)(F(x)-\frac{1}{n(x-1)^2})=\frac{-[(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1]}{n(1+1\ldots+1)}=-\frac{n-1}{2n}$.

Finalement,

$$F = \frac{1}{n}(-\frac{n-1}{2n(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{\omega_k - 1} \frac{1}{X-\omega_k}).$$

3. $\frac{n!}{(X-1)...(X-n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X-k}$ avec

$$\lambda_k = \lim_{x\to k}(x-k)F(x) = \frac{n!}{\prod_{j\neq k}(j-k)} = \frac{n!}{(-1)^{n-k}(k-1)!(n-k)!} = n(-1)^{n-k}C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc,

$$\frac{n!}{(X-1)...(X-n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}nC_{n-1}^{k-1}}{X-k}.$$

4. Posons $P = X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1$.

$$X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1 = (X^2 - e^{2ia})(X^2 - e^{-2ia}) = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})(X + e^{ia})(X + e^{-ia})$$
$$(= (X^2 - 2X\cos a + 1)(X^2 + 2X\cos a + 1)).$$

P est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq \pm e^{-ia}$ ce qui équivaut à $a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \frac{1}{4}$ puis $x = 0$ fournit $0 = -2a + 2b$ et donc $a = b = \frac{1}{4}$.

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}).$$

2ème cas. Si $a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} - \frac{a}{X+i} + \frac{b}{(X+i)^2}.$$

$b = \lim_{x\to i}(x-i)^2F(x) = \frac{i^2}{(i+i)^2} = \frac{1}{4}$ puis $x = 0$ fournit $0 = 2ia - 2b$ et donc $a = -ib = -\frac{i}{4}$.

$$F = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{4}(-\frac{i}{X-i} + \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} + \frac{1}{(X+i)^2}).$$

3ème cas. Si $a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, puisque F est réelle et paire,

$$F = \frac{A}{X-e^{ia}} + \frac{\overline{A}}{X-e^{-ia}} - \frac{A}{X+e^{ia}} - \frac{\overline{A}}{X+e^{-ia}},$$

avec

$$A = \frac{e^{2ia}}{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ia}+e^{ia})(e^{ia}+e^{-ia})} = \frac{e^{2ia}}{8i\sin a\cos a e^{ia}} = \frac{-ie^{ia}}{4\sin(2a)}.$$

Donc,

$$F = \frac{1}{4\sin(2a)}(-\frac{ie^{ia}}{X-e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X-e^{-ia}} + \frac{ie^{ia}}{X+e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X+e^{-ia}}).$$

5. Le polynôme $X^{2n}+1=\prod_{k=0}^{2n-1}(X-e^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})})$ est à racines simples car n'a pas de racine commune avec sa dérivée. En posant $\omega_k=e^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})}$, on a

$$\frac{1}{X^{2n}+1}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k},$$

où

$$\lambda_k=\frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}}=\frac{\omega_k}{2n\omega_k^{2n}}=-\frac{\omega_k}{2n}.$$

Finalement,

$$\frac{1}{X^{2n}+1}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}.$$

Correction de l'exercice 845 ▲

Pour k élément de $\{0,...,n-1\}$, posons $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$. Décomposons F en éléments simples (sur $\mathbb{C}$).

$$\frac{\omega X+1}{\omega^2X+\omega X+1}=\frac{\omega X+1}{(\omega X)^2+\omega X+1}=\frac{\omega X+1}{(\omega X-j)(\omega X-j^2)}=\frac{a}{\omega X-j}+\frac{b}{\omega X-j^2},$$

avec $a=\frac{\omega\frac{j}{\omega}}{\omega\frac{j}{\omega}-j^2}=\frac{j+1}{j-j^2}=-\frac{-j^2}{j-j^2}=\frac{j}{j-1}$ et de même $b=\frac{j^2+1}{j^2-j}=-\frac{1}{j-1}$. Donc,

$$F=\frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{j}{\omega_kX-j}-\frac{1}{\omega_kX-j^2})=\frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{j\omega_{-k}}{X-j\omega_{-k}}-\frac{\omega_{-k}}{X-j^2\omega_{-k}})\quad=\frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}-\frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k})$$

Maintenant les n nombres $j\omega_k$ sont deux à deux distincts et vérifient $(j\omega_k)^n=j^n$ et donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X-j\omega_k)=X^n-j^n.$$

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}$ est donc la décomposition en éléments simples d'une fraction du type $\frac{P}{X^n-j^n}$ avec $\deg P\leqslant n-1$. De plus, on sait que $j\omega_k=\frac{P(j\omega_k)}{n(j\omega_k)^{n-1}}$ et donc, $\forall k\in\{0,...,n-1\}$, $P(j\omega_k)=nj^n$. Le polynôme $P-nj^n$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$, admet les n racines deux à deux distinctes $j\omega_k$ et est donc le polynôme nul. Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}=\frac{nj^n}{X^n-j^n}.$$

De même, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k}=\frac{nj^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}$, puis

$$F=\frac{n}{j-1}(\frac{j^n}{X^n-j^n}-\frac{j^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}).$$

Si $n\in3\mathbb{Z}$, posons $n=3p$, $p\in\mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$F=\frac{3p}{j-1}(\frac{1}{X^{3p}-1}-\frac{j}{X^{3p}-1})=\frac{3p}{1-X^{3p}}.$$

Si $n\in3\mathbb{Z}+1$, posons $n=3p+1$, $p\in\mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$F=\frac{3p+1}{j-1}(\frac{j}{X^{3p+1}-j}-\frac{1}{X^{3p+1}-j^2})=\frac{(3p+1)(X^{3p+1}+1)}{X^{6p+2}+X^{3p+1}+1}.$$

Si $n\in3\mathbb{Z}+2$, posons $n=3p+2$, $p\in\mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$F=\frac{3p+2}{j-1}\left(\frac{j^2}{X^{3p+2}-j^2}-\frac{j^2}{X^{3p+2}-j}\right)=\frac{3p+2}{X^{6p+4}+X^{3p+2}+1}.$$

Correction de l'exercice 846 ▲

Soient P et Q deux polynômes non nuls et premiers entre eux, puis soit $F=\frac{P}{Q}$. Si F est paire, alors $\frac{P(-X)}{Q(-X)}=\frac{P(X)}{Q(X)}$, ou encore $P(-X)Q(X)=P(X)Q(-X)$ $(*)$.
Par suite, $P(X)$ divise $P(X)Q(-X)=Q(X)P(-X)$ et $P(X)$ est premier à $Q(X)$. D'après le théorème de GAUSS, $P(X)$ divise $P(-X)$. Donc, il existe $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tel que $P(-X)=\lambda P(X)$ (car $\deg(P(-X))=\deg(P)$). L'analyse des coefficients dominants des deux membres fournit $\lambda=(-1)^n$ où $n=\deg P$. Ceci s'écrit $P(-X)=(-1)^nP(X)$. En reportant dans $(*)$, on obtient encore $Q(-X)=(-1)^n=Q(X)$. Ainsi, si F est paire, alors P et Q sont ou bien tous deux pairs, ou bien tous deux impairs. Ce dernier cas est exclu, car alors P et Q admettraient tous deux 0 pour racine contredisant le fait qu'ils sont premiers entre eux. Finalement, si F est paire, alors P et Q sont pairs. La réciproque est claire.

$$F \text{ paire} \Leftrightarrow (P \text{ et } Q \text{ sont pairs.})$$

Je vous laisse établir que

$$F \text{ impaire} \Leftrightarrow (P \text{ est impair et } Q \text{ est pair}) \text{ ou}(P \text{ est pair et } Q \text{ est impair.})$$

Correction de l'exercice 847 ▲

C'est du cours (unicité de la décomposition en éléments simples).

Correction de l'exercice 848 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\frac{1}{X^2+1}=\frac{1}{2i}(\frac{1}{X-i}-\frac{1}{X+i})$. Donc,

$$\left(\frac{1}{X^2+1}\right)^{(n)}=\frac{1}{2i}\left(\left(\frac{1}{X-i}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{X+i}\right)^{(n)}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)(-2)...(-n)}{(X-i)^{n+1}}-\frac{(-1)(-2)...(-n)}{(X+i)^{n+1}}\right)$$
$$=(-1)^n.n!\mathrm{Im}\left(\frac{1}{(X-i)^{n+1}}\right)=(-1)^n.n!\mathrm{Im}\left(\frac{(X+i)^{n+1}}{(X^2+1)^{n+1}}\right)=\frac{(-1)^n.n!\sum C_{n+1}^{2k+1}(-1)^kX^{2n-2k}}{(X^2+1)^{n+1}}$$

Correction de l'exercice 849 ▲

$P'=a\sum_{k=1}^n\prod_{j\neq k}(X-x_j)=\sum_{k=1}^n\frac{P}{X-x_k}$, et donc

$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{X-x_k}.$$

Regroupons maintenant les pôles identiques, ou encore posons $P=a(X-z_1)^{\alpha_1}...(X-z_k)^{\alpha_k}$ où cette fois-ci les z_j sont deux à deux distincts. La formule ci-dessus s'écrit alors

$$\frac{P'}{P}=\sum_{j=1}^k\frac{\alpha_j}{X-z_j}\quad(*).$$

Déterminons les polynômes divisibles par leur dérivée. Soit P un tel polynôme. Nécessairement $\deg P\geqslant1$ puis, il existe deux complexes a et b, $a\neq0$ tel que $P=(aX+b)P'$ ou encore $\frac{P'}{P}=\frac{1}{aX+b}$. $(*)$ montre que P a une et une seule racine. Par suite, P est de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda\neq0$, $n\geqslant1$ et a quelconque.
Réciproquement, on a dans ce cas $P=\frac{1}{n}(X-a)n(X-a)^{n-1}=(\frac{1}{n}X-\frac{a}{n})P'$ et P' divise effectivement P.
Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 850 ▲

Écrivons $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec P et Q deux polynômes premiers entre eux, avec Q unitaire. La condition $\big(F(X)\big)^2 = (X^2+1)^3$ devient $P^2 = (X^2+1)^3Q^2$. Ainsi Q^2 divise P^2. D'où $Q^2 = 1$, puisque P^2 et Q^2 sont premiers entre eux. Donc $Q = 1$ (ou -1). Ainsi $F = P$ est un polynôme et $P^2 = (X^2+1)^3$.
En particulier P^2 est de degré 6, donc P doit être de degré 3. Écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on développe l'identité $P^2 = (X^2+1)^3$:

$$X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1 =$$
$$a^2X^6 + 2abX^5 + (2ac+b^2)X^4 + (2ad+2bc)X^3 + (2bd+c^2)X^2 + 2cdX + d^2$$

On identifie les coefficients : pour le coefficient de X^6, on a $a = \pm 1$, puis pour le coefficient de X^5, on a $b = 0$; pour le coefficient de 1, on a $d = \pm 1$, puis pour le coefficient de X, on a $c = 0$. Mais alors le coefficient de X^3 doit vérifier $2ad + 2bc = 0$, ce qui est faux.
Ainsi aucun polynôme ne vérifie l'équation $P^2 = (X^2+1)^3$, et par le raisonnement du début, aucune fraction non plus.

Correction de l'exercice 851 ▲

1. Posons $G = \frac{A}{B}$ et $F = \frac{P}{Q}$ (avec A,B,P,Q des polynômes). On réécrit l'identité $G(F(X)) = X$ sous la forme $A(F(X)) = XB(F(X))$. Posons $n = \max(\deg A, \deg B)$. Alors $n \geqslant 1$ car sinon, A et B seraient constants et $G(\frac{P}{Q}) = X$ aussi.
   On a donc $A = \sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $B = \sum_{k=0}^n b_kX^k$, où $(a_n,b_n) \neq (0,0)$, et l'identité devient
   $$\sum_{k=0}^n a_k\left(\frac{P}{Q}\right)^k = X\sum_{k=0}^n b_k\left(\frac{P}{Q}\right)^k$$
   En multipliant par Q^n, cela donne
   $$\sum_{k=0}^n a_kP^kQ^{n-k} = \sum_{k=0}^n b_kXP^kQ^{n-k}.$$
   Donc
   $$(a_0-b_0X)Q^n \quad + \quad (\cdots + (a_k-b_kX)P^kQ^{n-k} + \cdots) \quad + \quad (a_n-b_nX)P^n = 0$$
   où les termes dans la parenthèse centrale sont tous divisibles par P et par Q. Comme Q divise aussi le premier terme, alors Q divise $(a_n - b_nX)P^n$. D'après le lemme de Gauss, puisque P et Q sont premiers entre eux, alors Q divise $(a_n - b_nX)$. De même, P divise tous les termes de la parenthèse centrale et le dernier, donc P divise aussi $(a_0 - b_0X)Q^n$, donc P divise $(a_0 - b_0X)$.
2. Supposons de plus qu'on a écrit $G = \frac{A}{B}$ sous forme irréductible, c'est-à-dire avec $\text{pgcd}(A,B) = 1$. Vu que a_n et b_n ne sont pas tous les deux nuls, alors $a_n - b_nX$ n'est pas le polynôme nul. Comme Q divise $a_n - b_nX$ alors nécessairement Q est de degré au plus 1 ; on écrit $Q(X) = cX + d$. Par ailleurs, $a_0 - b_0X$ n'est pas non plus le polynôme nul, car sinon on aurait $a_0 = b_0 = 0$ et donc A et B seraient tous les deux sans terme constant, donc divisibles par X (ce qui est impossible puisqu'ils sont premiers entre eux). Donc P est aussi de degré au plus 1 et on écrit $P(X) = aX + b$. Conclusion : $F(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$. Notez que a et b ne sont pas tous les deux nuls en même temps (de même pour b et d).
3. Si $Y = \frac{aX+b}{cX+d}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, alors $X = -\frac{dY-b}{cY-a}$. Autrement dit si on note $\phi(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$, alors sa bijection réciproque est $\phi^{-1}(Y) = -\frac{dY-b}{cY-a}$.
   Nous avons prouvé que $G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) = X$. Cette identité s'écrit $G\big(\phi(X)\big) = X$. Appliquée en $X = \phi^{-1}(Y)$ elle devient $G\big(\phi(\phi^{-1}(Y))\big) = \phi^{-1}(Y)$, c'est-à-dire $G(Y) = \phi^{-1}(Y)$. Ainsi $G(Y) = -\frac{dY-b}{cY-a}$.

Correction de l'exercice 852 ▲

1. (a) Puisque $P(X) = c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$:

$$\begin{aligned} P'(X) = \quad & c(X-a_2)\cdots(X-a_n) + c(X-a_1)(X-a_3)\cdots(X-a_n) \\ & + \cdots + c(X-a_1)\cdots(X-a_{k-1})(X-a_{k+1})\cdots(X-a_n) \\ & \qquad\qquad + \cdots + c(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1}) \end{aligned}$$

La dérivée est donc la somme des termes de la forme : $\frac{c(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{X-a_k} = \frac{P(X)}{X-a_k}$.
Ainsi

$$P'(X) = \frac{P(X)}{X-a_1} + \cdots + \frac{P(X)}{X-a_k} + \cdots + \frac{P(X)}{X-a_n}.$$

Donc :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$$

(b) Puisque $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2}$ est la dérivée de $-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$, on obtient par dérivation de $-\frac{P'}{P}$:

$$\frac{P'^2 - PP''}{P^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2}$$

(c) On a remarqué que la dérivée de P' est la somme de facteurs $c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ avec un des facteurs en moins, donc de la forme $\frac{c(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{X-a_k} = \frac{P}{X-a_k}$. De même P'' est la somme de facteurs $c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ avec deux facteurs en moins, c'est-à-dire de la forme $\frac{c(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{(X-a_k)(X-a_\ell)} = \frac{P}{(X-a_k)(X-a_\ell)}$:

$$P'' = \sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant n \\ k\neq \ell}} \frac{P}{(X-a_k)(X-a_\ell)} \quad \text{donc} \quad \frac{P''}{P} = \sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant n \\ k\neq \ell}} \frac{1}{(X-a_k)(X-a_\ell)}$$

2. On applique l'identité $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$ en z avec les hypothèses $P(z) \neq 0$ et $P'(z) = 0$. On en déduit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k} = 0$. L'expression conjuguée est aussi nulle :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{z-a_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{|z-a_k|^2} = 0$$

Posons $\mu_k = \frac{1}{|z-a_k|^2}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k(z-a_k) = 0 \quad \text{donc} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right) z = \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k$$

Posons $\lambda_k = \mu_k / (\sum_{k=1}^{n} \mu_k)$, alors :
— Les λ_k sont des réels positifs.
— $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$
— Et $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$.

En particulier si les a_k sont tous des nombres réels, alors z est aussi un nombre réel. On vient de prouver que si un polynôme P a toutes ses racines réelles, alors P' a aussi toutes ses racines réelles. On a même plus : si on ordonne les racines réelles de P en $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ alors une racine z de P' est réelle et vérifie $a_1 \leqslant z \leqslant a_n$.
Plus généralement, l'interprétation géométrique de ce que l'on vient de prouver s'appelle le théorème de Gauss-Lucas : «Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines (réelles ou complexes) de P.»

Correction de l'exercice 853 ▲

---

1. $F = \frac{X}{X^2-4}$.
Commençons par factoriser le dénominateur : $X^2-4=(X-2)(X+2)$, d'où une décomposition en éléments simples du type $F=\frac{a}{X-2}+\frac{b}{X+2}$. En réduisant au même dénominateur, il vient $\frac{X}{X^2-4}=\frac{(a+b)X+2(a-b)}{X^2-4}$ et en identifiant les coefficients, on obtient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ 2(a-b)=0 \end{cases}$. Ainsi $a=b=\frac{1}{2}$ et

$$\frac{X}{X^2-4}=\frac{\frac{1}{2}}{X-2}+\frac{\frac{1}{2}}{X+2}$$

2. $G=\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$.
Lorsque le degré du numérateur (ici 3) est supérieur ou égal au degré du dénominateur (ici 1), il faut effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour faire apparaître la partie polynomiale (ou partie entière). Ici la division euclidienne s'écrit $X^3-3X^2+X-4=(X-1)(X^2-2X-1)-5$. Ainsi en divisant les deux membres par $X-1$ on obtient

$$\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}=X^2-2X-1-\frac{5}{X-1}$$

La fraction est alors déjà décomposée en éléments simples.

3. $H=\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$.
Commençons par faire la division euclidienne du numérateur par le dénominateur : $2X^3+X^2-X+1=(X^2-2X+1)(2X+5)+7X-4$, ce qui donne $H=2X+5+\frac{7X-4}{X^2-2X+1}$. Il reste à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $H_1=\frac{7X-4}{X^2-2X+1}$. Puisque le dénominateur se factorise en $(X-1)^2$, elle sera de la forme $H_1=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}$. En réduisant au même dénominateur, il vient $\frac{7X-4}{X^2-2X+1}=\frac{bX+a-b}{X^2-2X+1}$ et en identifiant les coefficients, on obtient $b=7$ et $a=3$. Finalement,

$$\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}=2X+5+\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{7}{X-1}$$

4. $K=\frac{X+1}{X^4+1}$.
Ici, il n'y a pas de partie polynomiale puisque le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. Le dénominateur admet quatre racines complexes $e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{7i\pi}{4}}=e^{-\frac{i\pi}{4}}$. En regroupant les racines complexes conjuguées, on obtient sa factorisation sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X^4+1 &= \left((X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{i\pi}{4}})\right)\left((X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}})\right) \\ &= \left(X^2-2\cos\frac{\pi}{4}+1\right)\left(X^2-2\cos\frac{3\pi}{4}+1\right) \\ &= (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1) \end{aligned}$$

Puisque les deux facteurs $(X^2-\sqrt{2}X+1)$ et $(X^2+\sqrt{2}X+1)$ sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples de K est de la forme $K=\frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$.
En réduisant au même dénominateur et en identifiant les coefficients avec ceux de $K=\frac{X+1}{X^4+1}$, on obtient le système

$$\begin{cases} a+c=0 \\ \sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d=0 \\ a+\sqrt{2}b+c-\sqrt{2}d=1 \\ b+d=1 \end{cases}$$

Système que l'on résout en $a=\frac{-\sqrt{2}}{4}$, $c=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $b=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $d=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Ainsi

$$\frac{X+1}{X^4+1}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}X+\frac{2+\sqrt{2}}{4}}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}X+\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

Correction de l'exercice 854 ▲

---

1. $F = \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$.
Pour obtenir la partie polynomiale, on fait une division euclidienne : $X^5+X^4+1 = (X^3-X)(X^2+X+1)+X^2+X+1$. Ce qui donne $F = X^2+X+1+F_1$, où $F_1 = \frac{X^2+X+1}{X^3-X}$. Puisque $X^3-X = X(X-1)(X+1)$, la décomposition en éléments simples est de la forme

$$F_1 = \frac{X^2+X+1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

Pour obtenir a :
— on multiplie l'égalité par X : $\frac{X(X^2+X+1)}{X(X-1)(X+1)} = X\left(\frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}\right)$,
— on simplifie $\frac{X^2+X+1}{(X-1)(X+1)} = a + \frac{bX}{X-1} + \frac{cX}{X+1}$,
— on remplace X par 0 et on obtient $-1 = a+0+0$, donc $a = -1$.
De même, en multipliant par $X-1$ et en remplaçant X par 1, il vient $b = \frac{3}{2}$. Puis en multipliant par $X+1$ et en remplaçant X par -1, on trouve $c = \frac{1}{2}$.
D'où

$$\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2+X+1-\frac{1}{X}+\frac{\frac{1}{2}}{X+1}+\frac{\frac{3}{2}}{X-1}$$

2. $G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$.
La partie polynomiale est nulle. La décomposition en éléments simples est de la forme $G = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X+1}$.
— En multipliant les deux membres de l'égalité par $(X-1)^3$, en simplifiant puis en remplaçant X par 1, on obtient $a = \frac{3}{2}$.
— De même, en multipliant par $X+1$, en simplifiant puis en remplaçant X par -1, on obtient $d = \frac{1}{8}$.
— En multipliant par X et en regardant la limite quand $X \to +\infty$, on obtient $1 = c+d$. Donc $c = \frac{7}{8}$.
— En remplaçant X par 0, il vient $-1 = -a+b-c+d$. Donc $b = \frac{5}{4}$.
Ainsi :

$$G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{(X-1)^3} + \frac{\frac{5}{4}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{7}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1}$$

3. $H = \frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$.
Puisque X^2+1 et X^2+4 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples sera de la forme

$$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+4}$$

— En remplaçant X par 0, on obtient $0 = b + \frac{1}{4}d$.
— En multipliant les deux membres par X, on obtient $\frac{X^2}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{aX^2+bX}{X^2+1} + \frac{cX^2+dX}{X^2+4}$. En calculant la limite quand $X \to +\infty$, on a $0 = a+c$.
— Enfin, en évaluant les fractions en $X = 1$ et $X = -1$, on obtient $\frac{1}{10} = \frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{5}$ et $\frac{-1}{10} = \frac{-a+b}{2} + \frac{-c+d}{5}$.
La résolution du système donne $b = d = 0$, $a = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$ et donc

$$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4}$$

4. $K = \frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.
Pour la partie polynomiale, on fait la division euclidienne :

$$2X^4+X^3+3X^2-6X+1 = (2X^3-X^2)(X+1)+(4X^2-6X+1)$$

ce qui donne $K = X+1+K_1$ où $K_1 = \frac{4X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$. Pour trouver la décomposition en éléments simples de K_1, on factorise son numérateur : $2X^3-X^2 = 2X^2(X-\frac{1}{2})$, ce qui donne une décomposition de la forme $K_1 = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X-\frac{1}{2}}$.

On obtient alors a en multipliant les deux membres de l'égalité par X^2 puis en remplaçant X par 0 : $a=-1$. On obtient de même c en multipliant par $X-\frac{1}{2}$ et en remplaçant X par $\frac{1}{2}$: $c=-2$. Enfin on trouve b en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $X=1$, ou mieux en multipliant les deux membres par X et en passant à la limite pour $X\to+\infty$: $b=4$. Finalement :

$$\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}=X+1-\frac{1}{X^2}+\frac{4}{X}-\frac{2}{X-\frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 855 ▲

1. $F=\frac{4X^6-2X^5+11X^4-X^3+11X^2+2X+3}{X(X^2+1)^3}$.
   (a) La décomposition en éléments simples de F est de la forme $F=\frac{a}{X}+\frac{bX+c}{(X^2+1)^3}+\frac{dX+e}{(X^2+1)^2}+\frac{fX+g}{X^2+1}$. Il est difficile d'obtenir les coefficients par substitution.
   (b) On va ici se contenter de trouver a : on multiplie F par X, puis on remplace X par 0, on obtient $a=3$.
   (c) On fait la soustraction $F_1=F-\frac{a}{X}$. On sait que la fraction F_1 *doit* se simplifier par X. On trouve $F_1=\frac{X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2}{(X^2+1)^3}$.
   (d) La fin de la décomposition se fait par divisions euclidiennes successives. Tout d'abord la division du numérateur $X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2$ par X^2+1 :
   $$X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2=(X^2+1)(X^3-2X^2+X+1)+X+1$$
   puis on recommence en divisant le quotient obtenu par X^2+1, pour obtenir
   $$X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2=(X^2+1)\big((X^2+1)(X-2)+3\big)+X+1$$
   On divise cette identité par $(X^2+1)^3$:
   $F_1=\frac{(X^2+1)\big((X^2+1)(X-2)+3\big)+X+1}{(X^2+1)^3}=\frac{X+1}{(X^2+1)^3}+\frac{3}{(X^2+1)^2}+\frac{X-2}{X^2+1}$
   Ainsi
   $$F=\frac{3}{X}+\frac{X+1}{(X^2+1)^3}+\frac{3}{(X^2+1)^2}+\frac{X-2}{X^2+1}$$

   Remarque : cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur *simple*, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle.
2. $G=\frac{4X^4-10X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.
   La décomposition en éléments simples de G est de la forme $\frac{a}{X^3}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X}+\frac{d}{(X-1)^2}+\frac{e}{X-1}$. La méthode la plus efficace pour déterminer les coefficients est d'effectuer une division suivant les puissances croissantes, ici à l'ordre 2 (de sorte que le reste soit divisible par X^3 comme le dénominateur). On calcule la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 2 du numérateur $1-4X+8X^2-10X^3+4X^4$ par $(X-1)^2$, ou plutôt par $1-2X+X^2$:
   $$1-4X+8X^2-10X^3+4X^4=(1-2X+X^2)(1-2X+3X^2)+(-2X^3+X^4)$$
   Remarquer que le reste $-2X^3+X^4$ est divisible par X^3.
   En divisant les deux membres de cette identité par $X^3(X-1)^2$, on obtient a, b et c d'un seul coup :
   $$\begin{aligned} G &= \frac{4X^4-10X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2} \\ &= \frac{(X-1)^2(1-2X+3X^2)+(-2X^3+X^4)}{X^3(X-1)^2} \\ &= \frac{1}{X^3}-\frac{2}{X^2}+\frac{3}{X}+\frac{X-2}{(X-1)^2} \end{aligned}$$
   Il reste à trouver d et e : par exemple en faisant la division euclidienne de $X-2$ par $X-1$: $X-2=(X-1)-1$.
   $$G=\frac{1}{X^3}-\frac{2}{X^2}+\frac{3}{X}-\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{X-1}$$

3. $H = \frac{X^4+2X^2+1}{X^5-X^3} = \frac{X^4+2X^2+1}{X^3(X-1)(X+1)}$.

La décomposition sera de la forme $H = \frac{a}{X^3} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X} + \frac{d}{X-1} + \frac{e}{X+1}$. Pour obtenir a, b, c, on fait la division du numérateur par $(X-1)(X+1) = X^2-1$ selon les puissances croissantes, à l'ordre 2 (de sorte que le reste soit divisible par X^3 qui est la puissance de X au dénominateur de H, en fait on l'obtient à l'ordre 3) :

$$1+2X^2+X^4 = (-1+X^2)(-1-3X^2)+4X^4$$

ce qui donne directement

$$\begin{aligned} H &= \frac{X^4+2X^2+1}{X^3(X-1)(X+1)} \\ &= \frac{(X^2-1)(-1-3X^2)+4X^4}{X^3(X^2-1)} \\ &= -\frac{1}{X^3} - \frac{3}{X} + \frac{4X}{X^2-1} \end{aligned}$$

Il reste à décomposer $\frac{4X}{X^2-1} = \frac{d}{X-1} + \frac{e}{X+1}$. On trouve $d = e = 2$, d'où

$$H = \frac{X^4+2X^2+1}{X^5-X^3} = -\frac{1}{X^3} - \frac{3}{X} + \frac{2}{X-1} + \frac{2}{X+1}$$

Remarque : la méthode de division selon les puissances croissantes est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3) dans une fraction du type $\frac{P(X)}{X^n Q(X)}$. Elle peut être utilisée pour une fraction du type $\frac{P(X)}{(X-a)^n Q(X)}$, mais il faut commencer par le changement de variable $Y = X-a$ avant de faire la division, puis bien entendu revenir à la variable X.

4. $K = \frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$.

Puisque le degré du numérateur N est supérieur ou égal à celui du dénominateur D, il y a une partie polynomiale. N et D étant de même degré, avec le même coefficient dominant, la partie polynomiale vaut 1 et K se décompose sous la forme $K = 1 + \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-1)^4} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{e}{X-1}$. Le coefficient a s'obtient facilement en multipliant K par X puis en remplaçant X par 0 : $a = 1$.

Soit $K_1 = K - 1 - \frac{1}{X} = \frac{4X^3-2X^2-2X+3}{(X-1)^4}$. Le changement d'indéterminée $X = Y+1$ donne $K_1 = \frac{4(Y+1)^3-2(Y+1)^2-2(Y+1)+3}{Y^4}$. En développant, on obtient directement

$$K_1 = \frac{4Y^3+10Y^2+6Y+3}{Y^4} = \frac{3}{Y^4} + \frac{6}{Y^3} + \frac{10}{Y^2} + \frac{4}{Y}$$

et donc (avec $Y = X-1$) : $K_1 = \frac{4X^3-2X^2-2X+3}{(X-1)^4} = \frac{3}{(X-1)^4} + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{4}{X-1}$. Finalement,

$$K = \frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{(X-1)^4} + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{4}{X-1}$$

Correction de l'exercice 856 ▲

1.

$$\begin{aligned} \frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} &= \frac{2+i}{X-i} + \frac{1-3i}{X+2i} \\ \frac{X+i}{X^2+i} &= \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} \\ \frac{X}{(X+i)^2} &= \frac{1}{X+i} + \frac{-i}{(X+i)^2} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{X^5+X+1}{X^4-1} &= X+\frac{\frac{3}{4}}{X-1}+\frac{\frac{1}{4}}{X+1}-\frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1}\\
&= X+\frac{\frac{3}{4}}{X-1}+\frac{\frac{1}{4}}{X+1}+\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i}+\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}\\
\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} &= -\frac{\frac{4}{3}}{X^2+1}+\frac{\frac{7}{3}}{X^2+4}\\
&= \frac{\frac{2}{3}i}{X-i}+\frac{-\frac{2}{3}i}{X+i}+\frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i}+\frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}\\
\frac{X^2+1}{X^4+1} &= \frac{\frac{1}{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{\frac{1}{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}\\
&= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}\\
&\qquad +\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 857 ▲

La décomposition en élément simple s'écrit :

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}=\frac{-\frac{1}{4}}{X}+\frac{1}{X-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(X-2)^2}+\frac{-\frac{3}{4}}{X-2}.$$

En multipliant cette identité par le dénominateur $X(X-1)(X-2)^2$, il vient :

$$1=-\tfrac{1}{4}Q_0+Q_1+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}(X-2)\right)Q_2.$$

Ainsi $A_0=-\frac{1}{4}$, $A_1=1$ et $A_1=(2-\frac{3}{4}X)$ conviennent. On a obtenu une relation de Bézout entre Q_1, Q_2 et Q_3 qui prouve que ces trois polynômes sont premiers dans leur ensemble : $\operatorname{pgcd}(Q_1,Q_2,Q_3)=1$.

Correction de l'exercice 858 ▲

1. (a) Si on pose $x=\cos\theta$ alors l'égalité $T_n(x)=\cos\big(n\arccos(x)\big)$ devient $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$, car $\arccos(\cos\theta)=\theta$ pour $\theta\in[0,\pi]$.

   (b) $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$.

   (c) En écrivant $(n+2)\theta=(n+1)\theta+\theta$ et $n\theta=(n+1)\theta-\theta$ on obtient :

   $$\cos\big((n+2)\theta\big)=\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta-\sin\big((n+1)\theta\big)\sin\theta$$
   $$\cos\big(n\theta\big)=\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta+\sin\big((n+1)\theta\big)\sin\theta$$

   Lorsque l'on fait la somme de ces deux égalités on obtient :

   $$\cos\big((n+2)\theta\big)+\cos\big(n\theta\big)=\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta$$

   Avec $x=\cos\theta$ cela donne :

   $$T_{n+2}(x)+T_n(x)=2xT_{n+1}(x)$$

   (d) T_0 et T_1 étant des polynômes alors, par récurrence, $T_n(x)$ est un polynôme. De plus, toujours par la formule de récurrence, il est facile de voir que le degré de T_n est n.

2. Puisque les racines de $P=\lambda(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ sont deux à deux distinctes, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ est de la forme $\frac{c_1}{X-a_1}+\cdots+\frac{c_n}{X-a_n}$.
   Expliquons comment calculer le coefficient c_1. On multiplie la fraction $\frac{1}{P}$ par $(X-a_1)$ ce qui donne $\frac{X-a_1}{P}=c_1+c_2\frac{X-a_1}{X-a_2}+\cdots+c_n\frac{X-a_1}{X-a_n}$ et $\frac{X-a_1}{P}=\frac{1}{\lambda(X-a_2)\cdots(X-a_n)}$
   On évalue ces égalités en $X=a_1$ ce qui donne

   $$c_1=\frac{1}{\lambda(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n)}=\frac{1}{\lambda\prod_{j\neq 1}(a_1-a_j)}$$

On obtiendrait de même le coefficient c_k en multipliant $\frac{1}{P}$ par $(X-a_k)$, puis en remplaçant X par a_k, ce qui donne : $c_k = \frac{1}{\lambda \prod_{j\neq k}(a_k-a_j)}$.
Or la dérivée de P est

$$\begin{aligned} P'(X) = \quad & \lambda(X-a_2)\cdots(X-a_n) + \lambda(X-a_1)(X-a_3)\cdots(X-a_n) \\ & + \cdots + \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_{k-1})(X-a_{k+1})\cdots(X-a_n) \\ & + \cdots + \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1}) \end{aligned}$$

et donc $P'(a_1) = \lambda \prod_{j\neq 1}(a_1-a_j)$ et plus généralement $P'(a_k) = \lambda \prod_{j\neq k}(a_k-a_j)$. On a bien prouvé $c_k = \frac{1}{P'(a_k)}$ et ainsi la décomposition en éléments simple de $1/P$ est :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(a_k)}}{X-a_k}$$

3. (a) Cherchons d'abord les racines de $T_n(x)$. Soit $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 \quad & \iff \quad \cos\left(n\arccos(x)\right) = 0 \\ & \iff \quad n\arccos(x) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ & \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \;\; \arccos(x) = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

Comme par définition $\arccos(x) \in [0,\pi]$, les entiers k possibles sont $k = 0,\ldots,n-1$. Ainsi

$$\arccos x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \quad \iff \quad x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Posons donc $\omega_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k = 0,\ldots,n-1$. Les ω_k sont les racines de T_n. Finalement $T_n(x) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(x-\omega_k)$.

(b) Ainsi $T_n(x) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(x-\omega_k)$ et les ω_k sont deux à deux distincts. On sait par la question précédente que la décomposition en éléments simple de $1/T_n$ s'écrit

$$\frac{1}{T_n(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1/T_n'(\omega_k)}{X-\omega_k}$$

Repartant de $T_n(x) = \cos\left(n\arccos(x)\right)$, on calcule $T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin\left(n\arccos(x)\right)$. En utilisant que

$$\sin\left(n\arccos(\omega_k)\right) = \sin\left(n\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k$$

et

$$\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta \qquad \text{pour } \theta \in [0,\pi]$$

on trouve que $T_n'(\omega_k) = \frac{n(-1)^k}{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$.

Ainsi

$$\frac{1}{T_n(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{(-1)^k}{n}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{X-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

Correction de l'exercice 861 ▲

Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange ! $P = \frac{1}{3}(X^2-4X-3)$.

Correction de l'exercice 862 ▲

On cherche P sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, ce qui donne le système linéaire suivant à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & & & d & = & 1 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ -a & + & b & - & c & + & d & = & -2 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 4 \end{array}\right.$$

Après calculs, on trouve une unique solution : $a = \frac{3}{2}$, $b = -2$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = 1$ c'est-à-dire

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$

Correction de l'exercice 881 ▲

$P(X) = -1 + Q(X) \times (X-1)^n \Leftrightarrow (X+1)^n \mid Q(X)(X-1)^n - 2 \Leftrightarrow X^n \mid Q(X-1)(X-2)^n - 2$. Soit $2 = A(X)(X-2)^n + X^n B(X)$ la division suivant les puissances croissantes de 2 par $(X-2)^n$ à l'ordre n. On obtient $X^n \mid Q(X-1) - A(X)$ soit $Q(X) = A(X+1) + X^n R(X)$ et $\deg(P) < 2n \Leftrightarrow R = 0$. Calcul de $A(X)$ par développement limité : $\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} x^k + O(x^n)$ donc :

$$A(X) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} \frac{(-1)^k X^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k (-1)^n \frac{X^k}{2^{n+k-1}}$$

Correction de l'exercice 883 ▲

$\mathrm{vect}(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n))$ contient P, ΔP, $\Delta^2 P$, ..., $\Delta^n P$ donc $K_n[X]$ d'après le thm des degrés étagés.

Correction de l'exercice 884 ▲

Déjà il est nécessaire que $k = n$. Supposant ceci réalisé, la matrice de $(P_0, \ldots, P_k)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ est équivalente à la matrice de Vandermonde de $z_0, \ldots, z_k$. Donc une CNS est : $k = n$ et $z_0, \ldots, z_k$ sont distincts.

Correction de l'exercice 885 ▲

1. $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$.
2. $P(z) = z^2 + 3z + 1 \Rightarrow z = -1, -1, -2 \pm i$.

Correction de l'exercice 887 ▲

$\mathrm{Ker}\Phi = K_0[X]$, $\mathrm{Im}\,\Phi = (X-a)K_{n-1}[X]$.

Correction de l'exercice 889 ▲

Formule de Taylor : $\frac{P^{(k)}}{k!} \in \mathbb{Z}[X]$.

Correction de l'exercice 890 ▲

1.
2. Appliquer le 1) à $P(X+k)$.

Correction de l'exercice 893 ▲

$\begin{cases} P = a(X^2+1) + bX + c \\ Q = a'(X^2+1) + b'X + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \cos\theta(X^2-1) + 2X\sin\theta \\ Q = \sin\theta(X^2-1) - 2X\cos\theta. \end{cases}$
$P \wedge Q = 1$ car $\pm i$ ne sont pas racines de P et Q.

Correction de l'exercice 894 ▲

$\deg P < 2 \Rightarrow P \in \{1, X, X+1\}$.

Correction de l'exercice 895 ▲

1. Isomorphisme $P \longmapsto P(X) + P(X+1)$.
2. $P_n' = nP_{n-1}$.
3. $P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k \quad$ (Taylor).
4. $Q_n(X) = P_n(1-X) \Rightarrow Q_n(X) + Q_n(X+1) = 2(-1)^n X^n$.

Correction de l'exercice 896 ▲

1. Bezout généralisé.
2. $\big((1-X)P' - nP\big)(1-X)^{n-1} + \big(nQ + XQ'\big)X^{n-1} = 0$.
3. $P^{(k+1)}(0) = (n+k)P^{(k)}(0) \Rightarrow P = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k X^k$.
4.

Correction de l'exercice 898 ▲

$Q = P + P' + P'' + \dots$: $Q(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\alpha)$ soit minimal.
Alors $0 = Q'(\alpha) = Q(\alpha) - P(\alpha) \Rightarrow \min Q \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 899 ▲

oui ssi P est pair.

Correction de l'exercice 900 ▲

1. $P_0(u) = 2$, $P_1(u) = u$, $P_{n+1}(u) = uP_n(u) - P_{n-1}(u)$.
2. $u_k = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, $k = 0, \dots, n-1$.
3.

Correction de l'exercice 901 ▲

1.
2. Trivialement vrai ou trivialement faux selon le choix qu'on a fait en **1**.
3.
4. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}_n[X]\}$. On a $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}[X]\}$ de manière évidente, donc F_Q est stable par la multiplication modulaire par X.
   Soit réciproquement F un sev de $\mathbb{C}_n[X]$ stable par la multiplication modulaire par X. Si $(P_1, \dots, P_k)$ est une famille génératrice de F alors $Q = \mathrm{pgcd}(P_1, \dots, P_k) \in F$ d'après la relation de Bézout et la stabilité de F donc $F_Q \subset F$ et $P_i \in F_Q$ puisque Q divise P_i d'où $F \subset F_Q$ et $F = F_Q$.

Correction de l'exercice 902 ▲

Tout polynôme à coefficients complexes non constant est surjectif sur $\mathbb{C}$ donc $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow P = a$ (constante réelle).
On a par interpolation de Lagrange : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \Leftrightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$.
Montrons que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \Leftrightarrow P = aX + b$ avec $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}$: la condition est clairement suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, considérons un polynôme éventuel P de degré $n \geqslant 2$ tel que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. On sait déjà que P est à coefficients rationnels, donc on peut l'écrire sous la forme : $P = \frac{a_0+a_1X+\dots+a_nX^n}{d}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$ et $d \in |||^*$. Soit π un nombre premier ne divisant ni a_n ni d, et $x = p/q$ (forme irréductible) un rationnel tel que $P(x) = 1/\pi$. On a donc : $\pi(a_0q^n + \dots + a_np^n) = dq^n$ ce qui implique que π divise q. Il vient alors : $a_np^n = dq^n/\pi - a_0q^n - \dots - a_{n-1}qp^{n-1}$ ce qui est impossible puisque π est facteur du second membre ($n \geqslant 2$) mais pas du premier ($p \wedge q = 1$).

Correction de l'exercice 903 ▲

Clairement $E = \varnothing$ si les y_i ne sont pas distincts. Si $y_1, \dots, y_n$ sont distincts, soit $P \in E$, $n = \deg(P)$ et λ le coefficient dominant de P ($P \neq 0$ car les y_i ne sont pas tous nuls). Alors $P(X) - y_i$ a pour seule racine x_i donc $P(X) - y_i = \lambda(X - x_i)^n$. Pour $n = 1$ on obtient $P(X) = y_1 + \lambda(X - x_1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \geqslant 2$ on obtient $y_2 - y_1 = \lambda(X - x_1)^n - \lambda(X - x_2)^n = n\lambda X^{n-1}(x_2 - x_1) + \dots$ ce qui est impossible donc $E = \varnothing$.

Correction de l'exercice 904 ▲

1. Récurrence sur $\mathrm{Card}\,(S)$ en mettant le terme de plus bas degré en facteur et en dérivant le quotient.
2. Appliquer la question précédente aux suites $(\mathrm{Re}(a_s))$ et $(\mathrm{Im}(a_s))$.

Correction de l'exercice 905 ▲

Soit $f(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k}$. f est strictement décroissante de 0 à $-\infty$ sur $]-\infty, 0[$, de $+\infty$ à $-\infty$ sur chaque intervalle $]k, k+1[$, $1 \leqslant k \leqslant 100$ et de $+\infty$ à 0 sur $]100, +\infty[$. Donc il existe $1 < \alpha_1 < 2 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{99} < 100 < \alpha_{100}$ tels que $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) \geqslant 1\} = \bigcup_{k=1}^{100}]k, \alpha_k]$.
La somme des longueurs est $L = \sum_{k=1}^{100} \alpha_k - \sum_{k=1}^{100} k$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{100}$ sont les racines du polynôme :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{100}(X-k) - \sum_{k=1}^{100} k \prod_{i \neq k}(X-i) = X^{100} - 2X^{99}\sum_{k=1}^{100} k + \dots$$

D'où $\sum_{k=1}^{100} \alpha_k = 2\sum_{k=1}^{100} k$ et $L = \sum_{k=1}^{100} k = 5050$.

Correction de l'exercice 906 ▲

Le sens $\Leftarrow$ est trivial. Pour le sens $\Rightarrow$, il suffit de vérifier la propriété lorsque P est irréductible, strictement positif sur $\mathbb{R}^+$, et le seul cas non trivial est celui où P est de la forme : $P = (X-a)^2 + b^2$ avec $a > 0$, $b > 0$. Dans ce cas, le coefficient de X^k dans $(X+1)^\ell P(X)$ est : $C_\ell^k(a^2+b^2) - 2aC_\ell^{k-1} + C_\ell^{k-2}$, en convenant que C_x^y vaut 0 si l'on n'a pas $0 \leqslant y \leqslant x$. En mettant ce qui peut l'être en facteur et en ordonnant le reste suivant les puissances de k, on est rammené à montrer que la quantité :

$$k^2(a^2+b^2+2a+1) - k((a^2+b^2)(2\ell+3) + 2a(\ell+2) + 1) + \ell^2(a^2+b^2)$$

est strictement positive pour tout $k \in [[0, \ell+2]]$ si ℓ est choisi convenablement. Or le discriminant par rapport à k est équivalent à $-4\ell^2(2a+1)$ lorsque ℓ tend vers $+\infty$ donc un tel choix de ℓ est possible.

Correction de l'exercice 907 ▲

On suppose E fini et on montre que P est constant : il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \neq 0$. Soit $N = \prod_{p \in E} p^{1+v_p(P(a))}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(a+kN) \equiv P(a) (\mathrm{mod}\, N)$ (formule de Taylor), donc $v_p(P(a+kN)) = v_p(P(a))$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $p \in E$. Comme $P(a+kN)$ est produit d'éléments de E, on en déduit que $P(a+kN) = \pm P(a)$ pour tout k, donc P prend une infinité de fois la même valeur.

Correction de l'exercice 908 ▲

Prendre pour P_n la partie régulière du développement limité à l'ordre n de $\sqrt{1+x}$.

Correction de l'exercice 909 ▲

Analyse : on pose $P_j = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ et on considère la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{a_0}{X} + \frac{a_1}{X+1} + \cdots + \frac{a_n}{X+n} = \frac{P(X)}{X(X+1)\dots(X+n)}.$$

Alors $\int_{t=0}^{1} t^i P_j(t)\,dt = F(i+1) = \frac{i!\,P(i+1)}{(i+n+1)!}$ donc $P(j+1) = \frac{(j+n+1)!}{j!}$ et $P(k) = 0$ pour $k \in [[1, n+1]] \setminus \{j+1\}$, soit

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{(j+n+1)!}{j!} \prod_{k \neq j+1} \frac{X-k}{j+1-k} \\ &= (-1)^{n-j} \frac{(j+n+1)!}{(j!)^2(n-j)!} \prod_{k \neq j+1} (X-k) = Q_j(X). \end{aligned}$$

Synthèse : soit Q_j le polynôme ci-dessus et $a_0, \dots, a_n$ les coefficients de la décomposition en éléments simples de $\frac{Q_j(X)}{X(X+1)\dots(X+n)}$. On doit juste vérifier que les a_i sont entiers. Calcul :

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{Q_j(-i)}{(-1)^i i!\,(n-i)!} = (-1)^{i+j} \frac{(i+j)!\,(i+n+1)!\,(j+n+1)!}{(i+j+1)!\,(i!)^2\,(j!)^2\,(n-i)!\,(n-j)!} \\ &= (-1)^{i+j} C_{i+j}^{i} C_{i+n+1}^{i+j+1} C_{j+n+1}^{j} C_n^i (n+1) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 910 ▲

$3\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) = -9.$

Correction de l'exercice 911 ▲

$-\frac{5}{3}$.

Correction de l'exercice 912 ▲

$\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 913 ▲

$x^7 = -2x^2 + 2x - 1 \Rightarrow a^7 + b^7 + c^7 = -7.$

Correction de l'exercice 914 ▲

$\{a, b, c\} = \left\{1, -\frac{1+i}{2}, -\frac{1-i}{2}\right\}.$

Correction de l'exercice 915 ▲

$\{x, y, z\} = \{-1, 1, 2\}.$

Correction de l'exercice 916 ▲

$d = \frac{2}{3}$, $\{a, b, c\} = \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$

Correction de l'exercice 918 ▲

1. $50p^3 = 27q^2$.

2. $a^2+b^2+c^2 = 2c^2+1 = -2p \Rightarrow$ l'une des racines de l'équation aux carrés $(-Y^3-2pY^2-p^2Y+q^2)$ doit être $-p-\frac{1}{2}$. CNS $\Leftrightarrow 2p+1+8q^2 = 0$.

Correction de l'exercice 919 ▲

$20p^3+27q^2 = 0$.

Correction de l'exercice 920 ▲

$b = 0,\ c = \frac{9}{100}a^2 \Rightarrow$ racines : $-3x, -x, x, 3x$ avec $x = \sqrt{\frac{-a}{10}}$.

Correction de l'exercice 921 ▲

$-P(-2-X) = X^3+4X^2+7X+2$.

Correction de l'exercice 922 ▲

$X^3+(2b-a^2)X^2+(b^2-2ac)X-c^2$.

Correction de l'exercice 923 ▲

racine 1 : $\lambda = -6$.
racine -1 : $\lambda = -4$.
racine $\alpha \in \mathbb{U}\setminus\{\pm 1\}$: les autres sont $\frac{1}{\alpha}$ et $-\lambda \Rightarrow \lambda = 6$, $\alpha = \frac{1+i\sqrt{15}}{4}$.

Correction de l'exercice 924 ▲

1. Les coefficients de P sont bornés.
2. $\widetilde{P}(X^2) = (-1)^n P(X)P(-X) \Rightarrow \widetilde{P} \in \mathbb{Z}[X]$.
3. La suite $(\overset{\widetilde{\vdots}}{\widetilde{P}})$ prend un nombre fini de valeurs.

Correction de l'exercice 925 ▲

Soit $y = \gamma x+\delta$ l'équation de la droite en question. On veut que l'équation $x^4+ax^3+bx^2+(c-\gamma)x+(d-\delta) = 0$ ait quatre racines distinctes en progression arithmétique. Si r est la raison de cette progression alors les racines sont $-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r$, $-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r$, $-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r$ et $-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r$. On doit donc chercher à quelle condition sur a,b,c,d il existe γ,δ,r réels tels que :

$$\begin{aligned}
&\Big(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\Big)+\dots+\Big(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\Big) = -b\\
&\Big(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\Big)+\dots\\
&\qquad\qquad+(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\Big) = c-\gamma\\
&\Big(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\Big) = \delta-d
\end{aligned}$$

Les deux dernières équations sont satisfaites à r donné en choisissant convenablement γ et δ. La première s'écrit après simplifications : $\frac{5}{2}r^2 = \frac{3}{8}a^2+b$ et la condition demandée est $3a^2+8b > 0$.

Correction de l'exercice 926 ▲

Tout d'abord

$$Q = (1+X+...+X^n)' = (\frac{X^{n+1}-1}{X-1})' = \frac{(n+1)X^n(X-1)-X^{n+1}}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2}.$$

Ensuite, $\omega_0 = 1$ et donc, $Q(\omega_0) = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Puis, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\omega_k \neq 1$ et donc, puisque $\omega_k^n = 1$,

$$Q(\omega_k) = \frac{n\omega_k^{n+1} - (n+1)\omega_k^n + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n\omega_k - (n+1) + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n}{\omega_k - 1}.$$

Par suite,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\omega_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k - 1)}.$$

Mais, $X^n - 1 = (X-1)(1+X+...+X^{n-1})$ et d'autre part $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n}) = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega_k)$. Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, $\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n}) = 1 + X + ... + X^{n-1}$ (Une autre rédaction possible est : $\forall z \in \mathbb{C}$, $(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k) = (z-1)(1+z+...+z^{n-1})$ et donc $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k) = 1+z+...+z^{n-1}$ et finalement $\forall z \in \mathbb{C}$, $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k) = 1+z+...+z^{n-1}$ car les deux polynômes ci-contre coincident en une infinité de valeurs de z.)
En particulier, $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega_k) = 1+1^2+...+1^{n-1} = n$ ou encore $\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k - 1) = (-1)^{n-1}n$. Donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n^n(n+1)}{2} \frac{1}{(-1)^{n-1}n} = \frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

Correction de l'exercice 927 ▲

Si P est de degré inférieur ou égal à 0, c'est clair.
Sinon, posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(P(X)) - X &= P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = \sum_{k=0}^{n} a_k((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X). \end{aligned}$$

Mais, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $(P(X))^k - X^k) = (P(X) - X)((P(X))^{k-1} + X(P(X))^{k-2} + ... + X^{k-1})$ est divisible par $P(X) - X$ et il en est donc de même de $P(P(X)) - X$.

Correction de l'exercice 928 ▲

1. Posons $P = \sum_{i=0}^{l} a_i X_i$ où $l \geqslant 1$ et où les a_i sont des entiers relatifs avec $a_l \neq 0$.

$$P(n+km) = \sum_{i=0}^{l} a_i(n+km)^i = \sum_{i=0}^{l} a_i(n^i + K_i m) = \sum_{i=0}^{l} a_i n^i + Km = m + Km = m(K+1),$$

où K est un entier relatif. $P(n+km)$ est donc un entier relatif multiple de $m = P(n)$.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est premier.
Soit n un entier naturel donné et $m = P(n)$ (donc, $m \geqslant 2$ et en particulier $m \neq 0$). Pour tout entier relatif k, $P(n+km)$ est divisible par m mais $P(n+km)$ est un nombre premier ce qui impose $P(n+km) = m$. Par suite, le polynôme $Q = P - m$ admet une infinité de racines deux à deux distinctes (puisque $m \neq 0$) et est donc le polynôme nul ou encore P est constant.

Correction de l'exercice 929 ▲

1. Déjà, P_0 est dans E.
Soit n un naturel non nul. $P_n = \frac{1}{n!}(X+1)...(X+n)$ et donc, si k est élément de $\{-1,...,-n\}$, $P_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Si k est un entier positif, $P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)...(k+n) = C_{n+k}^n \in \mathbb{Z}$.
Enfin, si k est un entier strictement plus petit que $-n$,

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)...(k+n) = (-1)^n \frac{1}{n!}(-k-1)...(-k-n) = (-1)^n C_{-k-1}^n \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P_(k) \in \mathbb{Z}$, ou encore $P_(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

2. Evident
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$ (si P est nul, P est combinaison linéaire à coefficients entiers des P_k).
Puisque $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$, on sait que pour tout entier naturel n, $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et donc, $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$ (tout polynôme non nul ayant un degré n, s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des P_k).
Soit $n = \deg P$.
Il existe $n+1$ nombres complexes a_0,..., a_n tels que $P = a_0 P_0 + ... + a_n P_n$. Il reste à montrer que les a_i sont des entiers relatifs.
L'égalité $P(-1)$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : a_0 est dans $\mathbb{Z}$.
L'égalité $P(-2)$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : $a_0 - a_1$ est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_1 est dans $\mathbb{Z}$.
L'égalité $P(-3)$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : $a_0 - 2a_1 + a_2$ est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_2 est dans $\mathbb{Z}$...
L'égalité $P(-(k+1))$ est dans $\mathbb{Z}$, fournit : $a_0 - a_1 + ... + (-1)^k a_k$ est dans $\mathbb{Z}$ et si par hypothèse de récurrence, a_0,..., a_{k-1} sont des entiers relatifs alors a_k l'est encore.
Tous les coefficients a_k sont des entiers relatifs et E est donc constitué des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_k.

Correction de l'exercice 930 ▲

Soit P un tel polynôme. -2 est racine de $P+10$ d'ordre au moins trois et donc racine de $(P+10)' = P'$ d'ordre au moins deux.
De même, 2 est racine de P' d'ordre au moins deux et puisque P' est de degré 4, il existe un complexe λ tel que $P' = \lambda(X-2)^2(X+2)^2 = \lambda(X^2-4)^2 = \lambda(X^4 - 8X^2 + 16)$ et enfin, nécessairement,

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 / \ P = \lambda(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X) + \mu \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

Réciproquement, soit $P = \lambda(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X) + \mu$ avec $\lambda \neq 0$.

P solution $\Leftrightarrow P+10$ divisible par $(X+2)^3$ et $P-10$ est divisible par $(X-2)^3$

$$\Leftrightarrow P(-2)+10 = 0 = P'(-2) = P''(-2) \text{ et } P(2)+10 = 0 = P'(2) = P''(2) \Leftrightarrow P(-2) = -10 \text{ et } P(2) = 10$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32) + \mu = -10 \\ \lambda(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32) + \mu = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32) + \mu = 10$$

$$\Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda = \frac{75}{128}$$

On trouve un et un seul polynôme solution à savoir $P = \frac{75}{128}(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X) = \frac{15}{128}X^5 - \frac{25}{16}X^3 + \frac{75}{8}X$.

Correction de l'exercice 931 ▲

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 solutions sont clairement 0 et 1.
Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$. Alors, a^2, a^4, a^8..., sont encore racines de P. Mais, P étant non nul, P ne doit admettre qu'un nombre fini de racines. La suite $(a^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ ne doit donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui impose $a = 0$ ou $|a| = 1$ car si $|a| \in]0,1[\cap]1,+\infty[$, la suite $(|a^{2^n}|)$ est strictement monotone et en particulier les a^{2^n} sont deux à deux distincts.

De même, si a est racine de P alors $(a-1)^2$ l'est encore mais aussi $(a-1)^4$, $(a-1)^8$..., ce qui impose $a=1$ ou $|a-1|=1$.
En résumé,

$$(a \text{ racine de } P \text{ dans } \mathbb{C}) \Rightarrow ((a=0 \text{ ou } |a|=1) \text{ et } (a=1 \text{ ou } |a-1|=1)) \Rightarrow (a=0 \text{ ou } a=1 \text{ ou } |a|=|a-1|=1).$$

Maintenant, $|a|=|a-1|=1 \Leftrightarrow |a|=1$ et $|a|=|a-1| \Leftrightarrow a \in \mathscr{C}((0,0),1) \cap \text{med}[(0,0),(1,0)] = \{-j,-j^2\}$.
Donc, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est solution, il existe K, α, β, γ, K complexe non nul et α, β et γ entiers naturels tels que $P = KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma$ ($-j$ et $-j^2$ devant avoir même ordre de multiplicité).
Réciproquement, si $P = KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma = KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma$.

$$P(X^2) = KX^{2\alpha}(X^2-1)^\beta(X4-X^2+1)^\gamma = KX^{2\alpha}(X-1)^\beta(X+1)^\beta(X^2-\sqrt{3}X+1)^\gamma(X^2+\sqrt{3}X+1)^\gamma,$$

et

$$\begin{aligned} P(X)P(X+1) &= KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)\gamma K(X+1)^\alpha X^\beta(X^2+X+1)^\gamma \\ &= K^2X^{\alpha+\beta}(X-1)^\beta(X+1)^\alpha(X^2-X+1)^\gamma(X^2+X+1)^\gamma. \end{aligned}$$

Par unicité de la décompôsition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non nul, P est solution si et seulement si $P=0$ ou $K=1$ et $\alpha=\beta$ et $\gamma=0$.
Les polynômes solutions sont 0 et les $(X^2-X)^\alpha$ où α est un entier naturel quelconque.

Correction de l'exercice 932 ▲

1. $$S \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \frac{xy+xz+yz}{xyz}=1 \\ xyz=-4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \sigma_1=1,\ \sigma_2=\sigma_3=-4$$

   $\Leftrightarrow x,\ y$ et z sont les trois solutions de l'équation $X^3-X^2-4X+4=0$

   $\Leftrightarrow x,\ y$ et z sont les trois solutions de l'équation $(X-1)(X-2)(X+2)=0$

   $\Leftrightarrow (x,y,z) \in \{(1,2,-2),(1,-2,2),(2,1,-2),(2,-2,1),(-2,1,2),(-2,2,1)\}$

2. Pour $1 \leqslant k \leqslant 4$, posons $S_k = x^k+y^k+z^k+t^k$. On a $S_2 = \sigma_1^2-2\sigma_2$. Calculons S_3 en fonction des σ_k. On a $\sigma_1^3 = S_3+3\sum x^2y+6\sum xyz = S_3+3\sum x^2y+6\sigma_3$ $(*)$. Mais on a aussi $S_1S_2 = S_3+\sum x^2y$. Donc, $\sum x^2y = \sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-S_3$. En reportant dans $(*)$, on obtient $\sigma_1^3 = S_3+3(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-S_3)+6\sigma_3$ et donc,

   $$S_3 = \frac{1}{2}(-\sigma_1^3+3(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-S_3)+6\sigma_3) = \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

   Calculons S_3 en fonction des σ_k. Soit $P=(X-x)(X-y)(X-z)(X-t) = X^4-\sigma_1X^3+\sigma_2X^2-\sigma_3X+\sigma_4$.

   $$\begin{aligned} P(x)+P(y)+P(z)+P(t)=0 &\Leftrightarrow S_4-\sigma_1S_3+\sigma_2S_2-\sigma_3S_1+4\sigma_4=0 \\ &\Leftrightarrow S_4 = \sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_3\sigma_1-4\sigma_4 \\ &\Leftrightarrow S_4 = \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4. \end{aligned}$$

   Par suite,

   $$S \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1=0 \\ -2\sigma_2=10 \\ 3\sigma_3=0 \\ 2\sigma_2^2-4\sigma_4=26 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1=0 \\ \sigma_2=-5 \\ \sigma_3=0 \\ \sigma_4=6 \end{array} \right.$$

   $\Leftrightarrow x,\ y,\ z,$ et t sont les 4 solutions de l'équation $X^4-5X^2+6=0$

   $\Leftrightarrow (x,y,z,t)$ est l'une des 24 permutations du quadruplet $(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3})$

Correction de l'exercice 933 ▲

Le polynôme nul est solution. Soit P un polynôme non nul de degré n solution alors $n = n-1+n-2$ et donc $n = 3$. Posons donc $P = aX^3+bX^2+cX+d$ avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} P(2X) = P'(X)P''(X) &\Leftrightarrow 8aX^3+4bX^2+2cX+d = (3aX^2+2bX+c)(6aX+2b) \\ &\Leftrightarrow (18a^2-8a)X^3+(18ab-4b)X^2+(4b^2+6ac-2c)X+2bc-d = 0 \\ &\Leftrightarrow 18a^2-8a = 18ab-4b = 4b^2+6ac-2c = 2bc-d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{4}{9} \text{ et } b = c = d = 0. \end{aligned}$$

Les polynômes solutions sont 0 et $\frac{4}{9}X^3$.

Correction de l'exercice 934 ▲

0 n'est pas racine de P.
On rappelle que si $r = \frac{p}{q}$, ($p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$) est racine de P, alors p divise le coefficient constant de P et q divise son coefficient dominant. Ici, p divise 4 et q divise 12 et donc, p est élément de $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ et q est élément de $\{1,2,3,4,6,12\}$ ou encore r est élément de $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}\}$.
Réciproquement, on trouve $P(\frac{2}{3}) = P(\frac{1}{4}) = 0$. P est donc divisible par

$$12(X-\frac{2}{3})(X-\frac{1}{4}) = (3X-2)(4X-1) = 12X^2-11X+2.$$

Plus précisément, $P = (12X^2-11X+2)(X^2+X+2) = (3X-2)(4X-1)(X-\frac{-1+i\sqrt{7}}{2})(X-\frac{-1-i\sqrt{7}}{2})$.

Correction de l'exercice 935 ▲

Pour $n \geqslant 0$, posons $P_n = (X-1)^{2n}-X^{2n}+2X-1$. $P_n(0) = P_n(1) = P_n(\frac{1}{2}) = 0$. P_n admet 0, 1 et $\frac{1}{2}$ pour racines et est donc divisible par $X(X-1)(2X-1) = 2X^3-3X^2+X$.
Si $n = 0$ ou $n = 1$, le quotient est nul. Si $n = 2$, le quotient vaut -2.
Soit $n \geqslant 3$. On met succesivement $2X-1$ puis $X-1$ puis X en facteur :

$$\begin{aligned} P_n &= ((X-1)^2)^n-(X^2)^n+(2X-1) = ((X-1)2-X2)\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)}+(2X-1) \\ &= (2X-1)(-\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)}+1) = (2X-1)(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)}+1-X^{2n-2}) \\ &= (2X-1)(-(X-1)\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)}-(X-1)\sum_{k=0}^{2n-1}X^k) \\ &= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)}-\sum_{k=0}^{2n-1}X^k) \\ &= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)}-\sum_{k=1}^{2n-1}X^k-1-(X-1)^{2n-3}) \\ &= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)}-\sum_{k=1}^{2n-3}X^k-\sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}C_{2n-3}^kX^k) \\ &= X(2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2n-2k-3}-\sum_{k=1}^{2n-3}X^{k-1}-\sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}C_{2n-3}^kX^{k-1}) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 936 ▲

$$\begin{aligned}1 = (X+(1-X))^{n+m-1} &= \sum_{k=0}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{k} X^k (1-X)^{n+m-1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^{k} X^k (1-X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{k} X^k (1-X)^{n+m-1-k}\\ &= (1-X)^m \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^{k} X^k (1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{k} X^{k-n} (1-X)^{n+m-1-k}\end{aligned}$$

Soient $U = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{k} X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}$ et $V = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^{k} X^k (1-X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n + V(1-X)^m = 1$. De plus, pour $n \leqslant k \leqslant n+m-1$, $\deg(X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}) = k-n+n+m-1-k = m-1 < m$ et donc $\deg(U) < m$ et de même pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\deg(X^k(1-X)^{n-1-k}) = k+n-1-k = n-1 < n$ et $\deg(V) < n$.

Correction de l'exercice 937 ▲

On suppose $a_0 \neq 0$ de sorte que 0 n'est pas racine de P. Soient p un relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que p et q soient premiers entre eux.
Si $r = \frac{p}{q}$ est racine de P alors $a_n(\frac{p}{q})^n + \ldots + a_0 = 0$ et donc

$$a_n p^n = -q(a_0 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1}) \text{ et } a_0 q^n = -p(a^n p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-1}).$$

Donc p divise $a_0 q^n$, mais p est premier à q^n et d'après le théorème de GAUSS, p divise a_0. De même q divise a_n.
Application. Soit $P = 9X^4 - 3X^3 + 16X^2 - 6X - 4$ et soit p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que $p \wedge q = 1$. Si $\frac{p}{q}$ est racine de P, p divise -4 et q divise 9 de sorte que p est élément de $\{1,-1,2,-2,4,-4\}$ et q est élément de $\{1,3,9\}$ puis $\frac{p}{q}$ est élément de $\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3},\pm\frac{1}{9},\pm\frac{2}{9},\pm\frac{4}{9}\}$. On trouve $P(\frac{2}{3}) = P(-\frac{1}{3}) = 0$ et P est divisible par $(3X-2)(3X+1) = 9X^2 - 3X - 2$. Plus précisément $P = 9X^4 - 3X^3 + 16X^2 - 6X - 4 = (9X^2 - 3X - 2)(X^2 + 2)$ et les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 938 ▲

1. $$\begin{aligned}P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 &= X^2(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2(X + \frac{1}{X}) + 3) = X^2((X + \frac{1}{X})^2 + 2(X + \frac{1}{X}) + 1)\\ &= X^2(X + \frac{1}{X} + 1)^2 = (X^2 + X + 1)^2 = (X - j)^2(X - j^2)^2.\end{aligned}$$

2. 1 et -1 sont racines de P. On écrit donc $P = (X^2 - 1)(X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1)$ puis

$$\begin{aligned}X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1 &= X^2((X^2 + \frac{1}{X^2}) - 5(X + \frac{1}{X}) + 6) = X^2((X + \frac{1}{X})^2 - 5(X + \frac{1}{X}) + 4)\\ &= X^2(X + \frac{1}{X} - 1)(X + \frac{1}{X} - 4) = (X^2 - X + 1)(X^2 - 4X + 1)\end{aligned}$$

   et donc, $P = (X-1)(X+1)(X+j)(X+j^2)(X-2+\sqrt{3})(X-2-\sqrt{3})$.

3. $$\begin{aligned}P = X^7 - X^6 - 7X^5 + 7X^4 + 7X^3 - 7X^2 - X + 1 &= (X^2-1)(X^5 - X^4 - 6X^3 + 6X^2 + X - 1)\\ &= (X-1)^2(X+1)(X^4 - 6X^2 + 1)\\ &= (X-1)^2(X+1)(X^2(3+2\sqrt{2}))(X^2 - (3-2\sqrt{2}))\end{aligned}$$

   Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont 1, -1, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}, -\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ et $-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 939 ▲

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4. On suppose P unitaire sans perte de généralité. On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Si z_1, z_2, z_3 et z_4 forment un parallélogramme, notons a le centre de ce parallélogramme. Les racines de P s'écrivent alors z_1, z_2, $2_a - z_1$, $2a - z_2$ et si $Q = P(X+a)$ alors $Q(-a+z_1) = Q(a-z_1) = Q(-a+z_2) = Q(a-z_2) = 0$. Les racines du polynôme Q sont deux à deux opposées, ce qui équivaut à dire que le polynôme Q est bicarré ou encore de la forme $X^4 + \alpha X^2 + \beta$ ou enfin que

$$P = (X-a)^4 + \alpha(X-a)^2 + \beta.$$

Mais alors a est racine de $P' = 4(X-a)^3 + 2\alpha(X-a)$ et de $P^{(3)} = 24(X-a)$.

Réciproquement, si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune a. $P^{(3)}$ est de degré 1 et de coefficient dominant 24 et donc $P^{(3)} = 24(X-a)$ puis en intégrant $P'' = 12(X-a)^2 + \lambda$ puis $P' = 4(X-a)^3 + \lambda(X-a) + \mu$. La condition a est racine de P' fournit $\mu = 0$ et donc $P = (X-a)^4 + \alpha(X-a)^2 + \beta$. Donc, le polynôme $Q = P(X+a)$ est bicarré et ses racines sont deux à deux opposées et donc de la forme $Z_1 = a - z_1$, $Z_2 = z1 - a$, $Z_3 = a - z_2$, $Z_4 = z_2 - a$ et on a bien $Z_1 - Z_3 = Z_4 - Z_2$.

Correction de l'exercice 940 ▲

Si (x,y,z) est solution du système proposé noté (S), alors x, y et z sont deux à deux distincts. En effet, si par exemple $x = y$ alors $7 = y^2 + yz + z^2 = x^2 + xz + z^2 = 13$ ce qui est impossible. Donc,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^3 - z^3 = 7(y-z) \\ z^3 - x^3 = 13(z-x) \\ x^3 - y^3 = 3(x-y) \end{array}\right. .$$

En additionnant les trois équations, on obtient $-10x + 4y + 6z = 0$ ou encore $-5x + 2y + 3z = 0$. Donc,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ (\frac{1}{2}(5x-3z))^2 + \frac{1}{2}(5x-3z)z + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ x^2 + \frac{1}{2}(5x-3z)x + (\frac{1}{2}(5x-3z))^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ 25x^2 - 20xz + 7z^2 = 28 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ 39x^2 - 36xz + 9z^2 = 12 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 25x^2 - 20(13 - x^2 - z^2) + 7z^2 = 28 \\ 39x^2 - 36(13 - x^2 - z^2) + 9z^2 = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 5x^2 + 3z^2 = 32 \end{array}\right.$$

Soit (S') le système formé des deux dernières équations. On note que $x = 0$ ne fournit pas de solution et donc

$$(S') \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2 = \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \\ xz = 13 - x^2 - \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \frac{2x^2+7}{3x} \\ \frac{(2x^2+7)^2}{9x^2} = \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \end{array}\right.$$

La deuxième équation s'écrit $(2x^2+7)^2 = 3x^2(32 - 5x^2)$ puis $19x^4 - 68x^2 + 49 = 0$ puis $x^2 = \frac{34 \pm 15}{19}$ D'où les solutions $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = \sqrt{\frac{49}{19}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{49}{19}}$. Puis, les quatre triplets solutions du système : $(1,-2,3)$, $(-1,2,-3)$, $(\frac{7}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{11}{\sqrt{19}})$ et $(-\frac{7}{\sqrt{19}}, -\frac{1}{\sqrt{19}}, -\frac{11}{\sqrt{19}})$.

Correction de l'exercice 941 ▲

Soit $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k) = X^n - 1$ (où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$)

1. $\prod_{k=0}^{n-1}(1 + \frac{2}{2-\omega_k}) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4-\omega_k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2-\omega_k)} = \frac{P(4)}{P(2)} = \frac{4^n-1}{2^n-1} = 2^n + 1.$

2.

$$\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k^2-2\omega_k\cos a+1)=\prod_{k=0}^{n-1}(e^{ia}-\omega_k)(e^{-ia}-\omega_k)=P(e^{ia})P(e^{-ia})=(e^{ina}-1)(e^{-ina}-1)$$
$$=2-e^{ina}-e^{-ina}=2(1-\cos na).$$

Correction de l'exercice 942 ▲

L'équation proposée admet deux solutions inverses l'une de l'autre si et seulement si il existe deux complexes a et b tels que

$$X^4-21X+8=(X^2+aX+1)(X^2+bX+8)=X^4+(a+b)X^3+(9+ab)X^2+(8a+b)X+8\ (*)$$

$(*)\Leftrightarrow b=-a$ et $ab=-9$ et $8a+b=-21\Leftrightarrow a=3$ et $b=-3$. Ainsi,

$$X^4-21X+8=(X^2+3X+1)(X^2-3X+8)=(X-\frac{-3+\sqrt{5}}{2})(X-\frac{-3-\sqrt{5}}{2})(X-\frac{3+i\sqrt{15}}{2})(X-\frac{3-i\sqrt{15}}{2}).$$

Correction de l'exercice 943 ▲

1. (a) $(0,0,0)\in E_1$.
   (b) Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de E_1. On a donc $3x-7y=z$ et $3x'-7y'=z'$. Donc $3(x+x')-7(y+y')=(z+z')$, d'où $(x+x',y+y',z+z')$ appartient à E_1.
   (c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(x,y,z)\in E_1$. Alors la relation $3x-7y=z$ implique que $3(\lambda x)-7(\lambda y)=\lambda z$ donc que $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ appartient à E_1.
2. $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2-z^2=0\}$ c'est-à-dire $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x=z \text{ ou } x=-z\}$. Donc $(1,0,-1)$ et $(1,0,1)$ appartiennent à E_2 mais $(1,0,-1)+(1,0,1)=(2,0,0)$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
   (a) $(0,0,0)\in E_3$.
   (b) Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de E_3. On a donc $x+y-z=x+y+z=0$ et $x'+y'-z'=x'+y'+z'=0$. Donc $(x+x')+(y+y')-(z+z')=(x+x')+(y+y')+(z+z')=0$ et $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$ appartient à E_3.
   (c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(x,y,z)\in E_3$. Alors la relation $x+y-z=x+y+z=0$ implique que $\lambda x+\lambda y-\lambda z=\lambda x+\lambda y+\lambda z=0$ donc que $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ appartient à E_3.
4. Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ appartiennent à E_4 mais leur somme $(1,0,0)+(0,0,1)=(1,0,1)$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 945 ▲

1. E_1 : non si $a\neq 0$ car alors $0\notin E_1$; oui, si $a=0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y=0\}$ et $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x=0\}$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
4. E_4 : non, en fait E_4 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(2,0)\in E_4$ mais $-(2,0)=(-2,0)\notin E_4$.

Correction de l'exercice 950 ▲

1. Sens $\Leftarrow$. Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. De même si $G \subset F$.
   Sens $\Rightarrow$. On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Par l'absurde supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Alors il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Mais alors $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ donc $x + y \in F \cup G$ (car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel). Comme $x + y \in F \cup G$ alors $x + y \in F$ ou $x + y \in G$.
   — Si $x + y \in F$ alors, comme $x \in F$, $(x + y) + (-x) \in F$ donc $y \in F$, ce qui est absurde.
   — Si $x + y \in G$ alors, comme $y \in G$, $(x + y) + (-y) \in G$ donc $x \in G$, ce qui est absurde.
   Dans les deux cas nous obtenons une contradiction. Donc F est inclus dans G ou G est inclus dans F.
2. Supposons $G \subset F$.
   — Inclusion $\supset$. Soit $x \in G + (F \cap H)$. Alors il existe $a \in G$, $b \in F \cap H$ tels que $x = a + b$. Comme $G \subset F$ alors $a \in F$, de plus $b \in F$ donc $x = a + b \in F$. D'autre part $a \in G$, $b \in H$, donc $x = a + b \in G + H$. Donc $x \in F \cap (G + H)$.
   — Inclusion $\subset$. Soit $x \in F \cap (G + H)$. $x \in G + H$ alors il existe $a \in G$, $b \in H$ tel que $x = a + b$. Maintenant $b = x - a$ avec $x \in F$ et $a \in G \subset F$, donc $b \in F$, donc $b \in F \cap H$. Donc $x = a + b \in G + (F \cap H)$.

Correction de l'exercice 961 ▲

Il y a égalité.

Correction de l'exercice 962 ▲

L'intersection contient F.
Soit $\vec{u} \in \big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big)$: $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{a}' + \vec{b}'$ avec $\vec{a}, \vec{a}' \in F$, $\vec{b} \in G \cap F'$ et $\vec{b}' \in G \cap G'$.
Alors $\vec{b} - \vec{b}' = \vec{a}' - \vec{a} \in F \cap G = F' \cap G'$, donc $\vec{b} \in G'$, donc $\vec{b} \in F' \cap G' \subset F$.

Correction de l'exercice 965 ▲

1. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   $$(\lambda f + \mu g)(0) + (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + \mu(g(0) + g(1)) = 0.$$
   Par suite, $\lambda f + \mu g$ est dans F. On a montré que :
   $$F \neq \varnothing \text{ et } \forall (f, g) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in F.$$
   F est donc un sous-espace vectoriel de E.
2. Même démarche et même conclusion .
3. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
4. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   Pour x élément de $[0, 1]$,
   $$(\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(1 - x) = \lambda(f(x) + f(1 - x)) + \mu(g(x) + g(1 - x)) = 0$$
   et $\lambda f + \mu g$ est dans F. F est un sous-espace vectoriel de E.
   Remarque. Les graphes des fonctions considérés sont symétriques par rapport au point $(\frac{1}{2}, 0)$.
5. F contient la fonction constante 1 mais pas son opposé la fonction constante -1 et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
6. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

Correction de l'exercice 966 ▲

Dans les cas où F est un sous-espace, on a à chaque fois trois démarches possibles pour le vérifier :
- Utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel.

- Obtenir F comme noyau d'une forme linéaire ou plus généralement, comme noyau d'une application linéaire.
- Obtenir F comme sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

Je vous détaille une seule fois les trois démarches.

1. **1ère démarche.** F contient le vecteur nul $(0,...,0)$ et donc $F \neq \varnothing$. Soient alors $((x_1,...,x_n),(x'_1,...,x'_n)) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\lambda(x_1,...,x_n)+\mu(x'_1,...,x'_n) = (\lambda x_1+\mu x'_1,...,\lambda x_n+\mu x'_n)$$

avec $\lambda x_1+\mu x'_1 = 0$. Donc, $\lambda(x_1,...,x_n)+\mu(x'_1,...,x'_n) \in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2ème démarche. L'application $(x_1,...,x_n) \mapsto x_1$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est lenoyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3ème démarche.

$$\begin{aligned} F &= \{(0,x_2,...,x_n),\ (x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} = \{x_2(0,1,0,...,0)+...+x_n(0,...,0,1),\ (x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} \\ &= \text{Vect}((0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1)). \end{aligned}$$

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. F ne contient pas le vecteur nul et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. (Ici, $n \geqslant 2$). L'application $(x_1,...,x_n) \mapsto x_1 - x_2$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
4. L'application $(x_1,...,x_n) \mapsto x_1+...+x_n$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
5. (Ici, $n \geqslant 2$). Les vecteurs $e_1 = (1,0,...,0)$ et $e_2 = (0,1,0...,0)$ sont dans F mais $e_1+e_2 = (1,1,0...0)$ n'y est pas. F n'est donc pas un sous espace vectoriel de E.

Remarque. F est la réunion des sous-espaces $\{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 0\}$ et $\{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n / x_2 = 0\}$.

Correction de l'exercice 967 ▲

Il suffit de montrer que $C \subset B$.

Soit x un élément de C. Alors $x \in A+C = A+B$ et il existe $(y,z) \in A \times B$ tel que $x = y+z$. Mais $z \in B \subset C$ et donc, puisque C est un sous-espace vectoriel de E, $y = x-z$ est dans C. Donc, $y \in A \cap C = A \cap B$ et en particulier y est dans B. Finalement, $x = y+z$ est dans B. On a montré que tout élément de C est dans B et donc que, $C \subset B$. Puisque d'autre part $B \subset C$, on a $B = C$.

Correction de l'exercice 968 ▲

Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda,\mu,-37,-3) \in F \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \ (\lambda,\mu,-37,-3) = au+bv \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} a+2b = \lambda \\ 2a-b = \mu \\ -5a+4b = -37 \\ 3a+7b = -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} a+2b = \lambda \\ 2a-b = \mu \\ a = \frac{247}{47} \\ b = -\frac{126}{47} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{247}{47}+2(-\frac{126}{47}) \\ \mu = 2\frac{247}{47}+\frac{126}{47} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\frac{5}{47} \\ \mu = \frac{620}{47} \end{array}\right. .$$

Correction de l'exercice 969 ▲

Posons $F = \text{Vect}(a,b)$ et $G = \text{Vect}(c,d)$.

Montrons que c et d sont dans F.

$$c\in F \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ c=\lambda a+\mu b \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \left\{\begin{array}{l}\lambda+2\mu=1\\ 2\lambda-\mu=0\\ 3\lambda+\mu=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{1}{5}\\ \mu=\frac{2}{5}\\ 3\lambda+\mu=1\end{array}\right..$$

Puisque $3.\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=1$, le système précédent admet bien un couple (λ,μ) solution et c est dans F. Plus précisément, $c=\frac{1}{5}a+\frac{2}{5}b$.

$$d\in F \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ d=\lambda a+\mu b \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \left\{\begin{array}{l}\lambda+2\mu=0\\ 2\lambda-\mu=1\\ 3\lambda+\mu=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{2}{5}\\ \mu=-\frac{1}{5}\\ 3\lambda+\mu=1\end{array}\right..$$

Puisque $3.\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=1$, le système précédent admet bien un couple (λ,μ) solution et d est dans F. Plus précisément, $d=\frac{2}{5}a-\frac{1}{5}b$. En résumé, $\{c,d\}\subset F$ et donc $G=\text{Vect}(c,d)\subset F$.
Montrons que a et b sont dans G mais les égalités $c=\frac{1}{5}a+\frac{2}{5}b$ et $d=\frac{2}{5}a-\frac{1}{5}b$ fournissent $a=c+2d$ et $b=2c-d$. Par suite, $\{a,b\}\subset G$ et donc $F=\text{Vect}(a,b)\subset G$. Finalement $F=G$.

Correction de l'exercice 970 ▲

1. Soit $x\in E$.
   $x\in(A\cap B)+(A\cap C)\Rightarrow \exists y\in A\cap B,\ \exists z\in A\cap C/\ x=y+z$.
   y et z sont dans A et donc $x=y+z$ est dans A car A est un sous-espace vectoriel de E.
   Puis y est dans B et z est dans C et donc $x=y+z$ est dans $B+C$. Finalement,
   $$\forall x\in E,\ [x\in(A\cap B)+(A\cap C)\Rightarrow x\in A\cap(B+C)].$$
   Autre démarche.
   $(A\cap B\subset B$ et $A\cap C\subset C)\Rightarrow(A\cap B)+(A\cap C)\subset B+C$ puis $(A\cap B\subset A$ et $A\cap C\subset A\Rightarrow(A\cap B)+(A\cap C)\subset A+A=A$, et finalement $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A\cap(B+C)$.
2. Si on essaie de démontrer l'inclusion contraire, le raisonnement coince car la somme $y+z$ peut être dans A sans que ni y, ni z ne soient dans A.
   Contre-exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $A=\mathbb{R}.(1,0)=\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$, $B=\mathbb{R}.(0,1)$ et $C=\mathbb{R}.(1,1)$.
   $B+C=\mathbb{R}^2$ et $A\cap(B+C)=A$ mais $A\cap B=\{0\}$ et $A\cap C=\{0\}$ et donc $(A\cap B)+(A\cap C)=\{0\}\neq A\cap(B+C)$.
3. $A\cap B\subset B\Rightarrow(A\cap B)+(A\cap C)\subset B+(A\cap C)$ mais aussi $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A+A=A$. Donc, $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A\cap(B+(A\cap C))$.
   Inversement, soit $x\in A\cap(B+(A\cap C))$ alors $x=y+z$ où y est dans B et z est dans $A\cap C$. Mais alors, x et z sont dans A et donc $y=x-z$ est dans A et même plus précisément dans $A\cap B$. Donc, $x\in(A\cap B)+(A\cap C)$. Donc, $A\cap(B+(A\cap C))\subset(A\cap B)+(A\cap C)$ et finalement, $A\cap(B+(A\cap C))=(A\cap B)+(A\cap C)$.

Correction de l'exercice 971 ▲

1. Pour $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on pose $f((x,y,z,t))=x-2y$, $g((x,y,z,t))=y-2z$ et $h((x,y,z,t))=x-y+z-t$.
   f, g et h sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$. Donc, $V=\text{Ker}f\cap\text{Ker}g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et $W=\text{Ker}h$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.
   $$(x,y,z,t)\in V\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2y\\ y=2z\end{array}\right.\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=4z\\ y=2z\end{array}\right..$$

Donc, $V = \{(4z,2z,z,t),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1,e_2)$ où $e_1 = (4,2,1,0)$ et $e_2 = (0,0,0,1)$. Montrons alors que (e_1,e_2) est libre. Soit $(z,t) \in \mathbb{R}^2$.

$$ze_1 + te_2 = 0 \Rightarrow (4z,2z,z,t) = (0,0,0,0) \Rightarrow z = t = 0.$$

Donc, (e_1,e_2) est une base de V.
Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $(x,y,z,t) \in W \Leftrightarrow t = x-y+z$. Donc, $W = \{(x,y,z,x-y+z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e'_1,e'_2,e'_3)$ où $e'_1 = (1,0,0,1)$, $e'_2 = (0,1,0,-1)$ et $e'_3 = (0,0,1,1)$.
Montrons alors que (e'_1,e'_2,e'_3) est libre. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Rightarrow (x,y,z,x-y+z) = (0,0,0,0) \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Donc, (e'_1,e'_2,e'_3) est une base de W. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) \in V \cap W \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 2z \\ x-y+z-t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4z \\ y = 2z \\ t = 3z \end{array}\right..$$

Donc, $V \cap W = \{(4z,2z,z,3z),\ z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e)$ où $e = (4,2,1,3)$. De plus, e étant non nul, la famille (e) est libre et est donc une base de $V \cap W$.

3. Soit $u = (x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$.
On cherche $v = (4\alpha,2\alpha,\alpha,\beta) \in V$ et $w = (a,b,c,a-b+c) \in W$ tels que $u = v+w$.

$$u = v+w \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\alpha + a = x \\ 2\alpha + b = y \\ \alpha + c = z \\ \beta + a - b + c = t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = x - 4\alpha \\ b = y - 2\alpha \\ c = z - \alpha \\ \beta = -x+y-z+t-3\alpha \end{array}\right..$$

et $\alpha = 0$, $\beta = -x+y-z+t$, $a = x$, $b = y$ et $c = z$ conviennent. Donc, $\forall u \in \mathbb{R}^4$, $\exists (v,w) \in V \times W /\ u = v+w$. On a montré que $\mathbb{R}^4 = V + W$.

Correction de l'exercice 972 ▲

1. Pour tout (y,y') élément de $[0,2\pi[^2$, $f((0,y)) = f((0,y'))$ et f n'est pas injective.
Montrons que f est surjective.
Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$.
   - Si $X = Y = 0$, $f((0,0)) = (0,0)$.
   - Si $X = 0$ et $Y > 0$, $f((Y,\frac{\pi}{2})) = (0,Y)$ avec $(Y,\frac{\pi}{2})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X = 0$ et $Y < 0$, $f((-Y,\frac{3\pi}{2})) = (0,Y)$ avec $(-Y,\frac{3\pi}{2})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X > 0$ et $Y \geqslant 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \arctan\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \arctan\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X < 0$ et $Y \geqslant 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X > 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi + \arctan\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi + \arctan\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X < 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
2. Pour tout réel x, on a $a\cos(x-\alpha) + b\cos(x-\beta) = (a\cos\alpha + b\cos\beta)\cos x + (a\sin\alpha + b\sin\beta)\sin x$.
D'après 1), f est surjective et il existe (c,γ) élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$ tel que $a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma$ et $a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma$. Donc,

$$\exists (c,\gamma) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[/\ \forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha) + b\cos(x-\beta) = c(\cos x cos\gamma + \sin x \sin\gamma) = c\cos(x-\gamma).$$

3. F est non vide car contient l'application nulle et est contenu dans E. De plus, pour x réel,

$$\begin{aligned}a\cos(x-\alpha)+b\cos(2x-\beta)+a'\cos(x-\alpha')+b'\cos(2x-\beta')\\ &= a\cos(x-\alpha)+a'\cos(x-\alpha')+b\cos(2x-\beta)+b'\cos(2x-\beta')\\ &= a''cos(x-\alpha'')+b''\cos(2x-\beta''),\end{aligned}$$

pour un certain $(a',b'',\alpha'',\beta'')$ (d'après 2)). F est un sous-espace vectoriel de E.

4. Pour tout réel x, $\cos x = 1.\cos(x-0)+0.\cos(2x-0)$ et $x\mapsto \cos x$ est élément de F.
Pour tout réel x, $\sin x = 1.\cos(x-\frac{\pi}{2})+0.\cos(2x-0)$ et $x\mapsto \sin x$ est élément de F.
Pour tout réel x, $\cos(2x) = 0.\cos(x-0)+1.\cos(2x-0)$ et $x\mapsto \cos(2x)$ est élément de F.
Pour tout réel x, $\sin(2x) = 0.\cos(x-0)+1.\cos(2x-\frac{\pi}{2})$ et $x\mapsto \sin(2x)$ est élément de F.
D'autre part, pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2 x-1 = 1-2\sin^2 x$ et donc,

$$x\mapsto 1\in F \Leftrightarrow x\mapsto \cos^2 x\in F \Leftrightarrow x\mapsto \sin^2 x\in F.$$

Montrons alors que $1\notin F$.
On suppose qu'il existe $(a,b,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha)+b\cos(2x-\beta)=1.$$

En dérivant deux fois, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ -a\cos(x-\alpha)-4b\cos(2x-\beta)=0,$$

et donc en additionnant

$$\forall x\in\mathbb{R},\ -3b\cos(2x-\beta)=1,$$

ce qui est impossible (pour $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$, on trouve 0). Donc, aucune des trois dernières fonctions n'est dans F.

5. On a vu que $(x\mapsto\cos x,\ x\mapsto\sin x,\ x\mapsto\cos(2x),\ x\mapsto\sin(2x))$ est une famille d'éléments de F. Montrons que cette famille est libre.
Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.
Supposons que $\forall x\in\mathbb{R},\ a\cos x+b\sin x+c\cos(2x)+d\sin(2x)=0$. En dérivant deux fois, on obtient $\forall x\in\mathbb{R},\ -a\cos x-b\sin x-4c\cos(2x)-4d\sin(2x)=0$ et en additionnant : $\forall x\in\mathbb{R},\ -3c\cos(2x)-3d\sin(2x)=0$. Donc,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l}a\cos x+b\sin x=0\\ c\cos(2x)+d\sin(2x)=0\end{array}\right..$$

$x=0$ fournit $a=c=0$ puis $x=\frac{\pi}{4}$ fournit $b=d=0$. Donc, $(x\mapsto\cos x,\ x\mapsto\sin x,\ x\mapsto\cos(2x),\ x\mapsto\sin(2x))$ est une famille libre d'éléments de F.

Correction de l'exercice 973 ▲

1. C contient l'identité de $\mathbb{R}$, mais ne contient pas son opposé. Donc, C n'est pas un espace vectoriel.
2. Montrons que V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. V est déjà non vide car contient la fonction nulle $(0=0-0)$.
Soit $(f_1,f_2)\in V^2$. Il existe $(g_1,g_2,h_1,h_2)\in C^4$ tel que $f_1=g_1-h_1$ et $f_2=g_2-h_2$. Mais alors, $f_1+f_2=(g_1+g_2)-(h_1+h_2)$. Or, une somme de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, et donc, g_1+g_2 et h_1+h_2 sont des éléments de C ou encore f_1+f_2 est dans V.
Soit $f\in V$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Il existe $(g,h)\in V^2$ tel que $f=g-h$ et donc $\lambda f=\lambda g-\lambda h$.

Si $\lambda \geqslant 0$, λg et λh sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et λf est dans V.

Si $\lambda < 0$, on écrit $\lambda f = (-\lambda h) - (-\lambda g)$, et puisque $-\lambda g$ et $-\lambda h$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$, λf est encore dans V. V est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 974 ▲

Soit $(x,y) \in E^2$.
$(1+1).(x+y) = 1.(x+y)+1.(x+y) = (x+y)+(x+y) = x+y+x+y$ mais aussi $(1+1).(x+y) = (1+1).x+(1+1).y = x+x+y+y$.
Enfin, $(E,+)$ étant un groupe, tout élément est régulier et en particulier x est régulier à gauche et y est régulier à droite. On a montré que pour tout couple (x,y) élément de E^2, $x+y = y+x$.

Correction de l'exercice 975 ▲

Soit $F = (A\cap B)+(A\cap C)+(B\cap C)$.
$F \subset A+A+B = A+B$ puis $F \subset A+C+C = A+C$ puis $F \subset B+C+C = B+C$ et finalement $F \subset (A+B)\cap(A+C)\cap(B+C)$.

Correction de l'exercice 976 ▲

$\Leftarrow$) Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F\cup G = G$ ou $F\cup G = F$. Dans tous les cas, $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel.
$\Rightarrow$) Supposons que $F \not\subset G$ et que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et montrons que $G \subset F$.
F n'est pas inclus dans G et donc il existe x élément de E qui est dans F et pas dans G.
Soit y un élément de G. $x+y$ est dans $F\cup G$ car x et y y sont et car $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $x+y$ est élément de G alors $x = (x+y)-y$ l'est aussi ce qui est exclu. Donc $x+y$ est élément de F et par suite $y = (x+y)-x$ est encore dans F. Ainsi, tout élément de G est dans F et donc $G \subset F$.

Correction de l'exercice 977 ▲

$\Leftarrow$) Immédiat .
$\Rightarrow$) On raisonne par récurrence sur n.
Pour $n = 2$, c'est l'exercice 976.
Soit $n \geqslant 2$. Supposons que toute réunion de n sous-espaces de E est un sous-espace de E si et seulement si l'un de ces sous-espaces contient tous les autres.
Soient F_1,..., F_n, F_{n+1} $n+1$ sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1\cup\ldots\cup F_{n+1}$ soit un sous-espace vectoriel de E. Posons $F = F_1\cup\ldots\cup F_n$.
• Si F_{n+1} contient F, c'est fini.
• Si $F_{n+1} \subset F$, alors $= F_1\cup\ldots\cup F_n = F_1\cup\ldots\cup F_n\cup F_{n+1}$ est un sous-espace vectoriel de E. Par hypothèse de récurrence, F est l'un des F_i pour un certain i élément de $[\![1,n]\!]$. $F_i = F$ contient également F_{n+1} et contient donc tous les F_j pour j élément de $[\![1,n+1]\!]$.
• Supposons dorénavant que $F \not\subset F_{n+1}$ et que $F_{n+1} \not\subset F$ et montrons que cette situation est impossible.
Il existe un vecteur x qui est dans F_{n+1} et pas dans F et un vecteur y qui est dans F et pas dans F_{n+1}.
Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. $y-\lambda x$ est un élément de $F\cup F_{n+1}$ (puisque $F\cup F_{n+1}$ est un sous-espace) mais $y-\lambda x$ n'est pas dans F_{n+1} car alors $y = (y-\lambda x)+\lambda x$ y serait ce qui n'est pas.
Donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $y-\lambda x \in F$. On en déduit que pour tout scalaire λ, il existe un indice $i(\lambda)$ élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $y-\lambda x \in F_{i(\lambda)}$. Remarquons enfin que si $\lambda \neq \mu$ alors $i(\lambda) \neq i(\mu)$. En effet, si pour λ et μ deux scalaires distincts donnés, il existe un indice i élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $y-\lambda x$ et $y-\mu x$ soient dans F_i, alors $x = \frac{(y-\mu x)-(y-\lambda x)}{\mu-\lambda}$ est encore dans F_i et donc dans F, ce qui n'est pas.
Comme l'ensemble des scalaires est infini et que l'ensemble des indices ne l'est pas, on vient de montrer que cette dernière situation n'est pas possible, ce qui achève la démonstration.

Correction de l'exercice 978 ▲

Pour qu'un ensemble E, muni d'une addition $x+y \in E$ (pour tout $x,y \in E$) et d'une multiplication par un scalaire $\lambda\cdot x \in E$ (pour tout $\lambda \in K, x \in E$), soit un K-espace vectoriel il faut qu'il vérifie les huit points suivants.

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (pour tout $x,y,z\in E$)
2. il existe un vecteur nul $0\in E$ tel que $x+0=x$ (pour tout $x\in E$)
3. il existe un opposé $-x$ tel que $x+(-x)=0$ (pour tout $x\in E$)
4. $x+y=y+x$ (pour tout $x,y\in E$)
   Ces quatre premières propriétés font de $(E,+)$ un groupe abélien.
5. $1\cdot x=x$ (pour tout $x\in E$)
6. $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$ (pour tout $\lambda\in K=$, pour tout $x,y\in E$)
7. $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$ (pour tout $\lambda,\mu\in K$, pour tout $x\in E$)
8. $(\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$ (pour tout $\lambda,\mu\in K$, pour tout $x\in E$)

Il faut donc vérifier ces huit points pour chacun des ensembles (ici $K=\mathbb{R}$).
Commençons par E_1.

1. $f+(g+h)=(f+g)+h$; en effet on bien pour tout $t\in[0,1]$: $f(t)+\big(g(t)+h(t)\big)=\big(f(t)+g(t)\big)+h(t)$ d'où l'égalité des fonctions $f+(g+h)$ et $(f+g)+h$. Ceci est vrai pour tout $f,g,h\in E_1$.
2. le vecteur nul est ici la fonction constante égale à 0, que l'on note encore 0, on a bien $f+0=f$ (c'est-à-dire pour tout $x\in[0,1]$, $(f+0)(t)=f(t)$, ceci pour toute fonction f).
3. il existe un opposé $-f$ définie par $-f(t)=-\big(f(t)\big)$ tel que $f+(-f)=0$
4. $f+g=g+f$ (car $f(t)+g(t)=g(t)+f(t)$ pour tout $t\in[0,1]$).
5. $1\cdot f=f$; en effet pour tout $t\in[0,1]$, $(1\cdot f)(t)=1\times f(t)=f(t)$. Et une fois que l'on compris que $\lambda\cdot f$ vérifie par définition $(\lambda\cdot f)(t)=\lambda\times f(t)$ les autres points se vérifient sans peine.
6. $\lambda\cdot(f+g)=\lambda\cdot f+\lambda\cdot g$
7. $(\lambda+\mu)\cdot f=\lambda\cdot f+\mu\cdot f$
8. $(\lambda\times\mu)\cdot f=\lambda\cdot(\mu\cdot f)$; en effet pour tout $t\in[0,1]$, $(\lambda\times\mu)f(t)=\lambda(\mu f(t))$

Voici les huit points à vérifier pour E_2 en notant u la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. $u+(v+w)=(u+v)+w$
2. le vecteur nul est la suite dont tous les termes sont nuls.
3. La suite $-u$ est définie par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $u+v=v+u$
5. $1\cdot u=u$
6. $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$: montrons celui-ci en détails par définition $u+v$ est la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et par définition de la multiplication par un scalaire $\lambda\cdot(u+v)$ est la suite $\big(\lambda\times(u_n+v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est bien la suite $\big(\lambda u_n+\lambda v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est exactement la suite $\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$.
7. $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot v$
8. $(\lambda\times\mu)\cdot u=\lambda\cdot(\mu\cdot u)$

Voici ce qu'il faut vérifier pour E_3, après avoir remarqué que la somme de deux polynômes de degré $\leqslant n$ est encore un polynôme de degré $\leqslant n$ (même chose pour $\lambda\cdot P$), on vérifie :

1. $P+(Q+R)=(P+Q)+R$
2. il existe un vecteur nul $0\in E_3$: c'est le polynôme nul
3. il existe un opposé $-P$ tel que $P+(-P)=0$
4. $P+Q=Q+P$
5. $1\cdot P=P$
6. $\lambda\cdot(P+Q)=\lambda\cdot P+\lambda\cdot Q$
7. $(\lambda+\mu)\cdot P=\lambda\cdot P+\mu\cdot P$

8. $(\lambda \times \mu) \cdot P = \lambda \cdot (\mu \cdot P)$

Correction de l'exercice 979 ▲

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ a deux sous-espaces : celui formé du vecteur nul $\{0\}$ et $\mathbb{R}$ lui-même.
   L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ a trois types de sous-espaces : $\{0\}$, une infinité de sous-espaces de dimension 1 (ce sont les droites vectorielles) et $\mathbb{R}^2$ lui-même.
   Enfin, l'espace $\mathbb{R}^3$ a quatre types de sous-espaces : le vecteur nul, les droites vectorielles, les plans vectoriels et lui-même.
2. On considère deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ dont des vecteurs directeurs u et v ne sont pas colinéaires alors le vecteur $u+v$ n'appartient à aucune de ces deux droites, l'union de celles-ci n'est pas un espace vectoriel.

Correction de l'exercice 983 ▲

1.

$$\begin{aligned}
& (x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,-2,3,-4) \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda) + (\mu,-2\mu,3\mu,-4\mu) \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\
\implies & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad 1 = 2(\lambda-\mu) \text{ et } 1 = 4(\lambda-\mu) \\
\implies & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda-\mu = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda-\mu = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient x,y). Donc on ne peut pas trouver de tels x,y.

2. On fait le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
& (x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} \\
iff\ & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,1,y) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x & = \lambda+\mu \\ 1 & = 2\lambda-2\mu \\ 1 & = 3\lambda+3\mu \\ y & = 4\lambda-4\mu \end{cases} \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \lambda & = \frac{5}{12} \\ \mu & = -\frac{1}{12} \\ x & = \frac{1}{3} \\ y & = 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc le seul vecteur $(x,1,1,y)$ qui convienne est $(\frac{1}{3},1,1,2)$.

Correction de l'exercice 984 ▲

1. On vérifie les propriétés qui font de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:
   (a) l'origine $(0,0,0,0)$ est dans E,
   (b) si $v = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in E$ et $v' = (x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) \in E$ alors $v+v' = (x_1+x'_1,x_2+x'_2,x_3+x'_3,x_4+x'_4)$ a des coordonnées qui vérifient l'équation et donc $v+v' \in E$.

(c) si $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors les coordonnées de $\lambda\cdot v=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\lambda x_4)$ vérifient l'équation et donc $\lambda\cdot v\in E$.

2. Il faut trouver une famille libre de vecteurs qui engendrent E. Comme E est dans $\mathbb{R}^4$, il y aura moins de 4 vecteurs dans cette famille. On prend un vecteur de E (au hasard), par exemple $v_1=(1,-1,0,0)$. Il est bien clair que v_1 n'engendre pas tout E, on cherche donc un vecteur v_2 linéairement indépendant de v_1, prenons $v_2=(1,0,-1,0)$. Alors $\{v_1,v_2\}$ n'engendrent pas tout E ; par exemple $v_3=(1,0,0,-1)$ est dans E mais n'est pas engendré par v_1 et v_2. Montrons que (v_1,v_2,v_3) est une base de E.

(a) (v_1,v_2,v_3) est une famille libre. En effet soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
&\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0\\
&\Rightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma &=0\\ -\alpha &=0\\ -\beta &=0\\ -\gamma &=0\end{cases}\\
&\Rightarrow \alpha=0,\beta=0,\gamma=0
\end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

(b) Montrons que la famille est génératrice : soit $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$. Il faut écrire v comme combinaison linéaire de v_1,v_2,v_3. On peut résoudre un système comme ci-dessus (mais avec second membre) en cherchant α,β,γ tels que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=v$. On obtient que $v=-x_2v_1-x_3v_2-x_4v_4$ (on utilise $x_1+x_2+x_3+x_4=0$).

Bien sûr vous pouvez choisir d'autres vecteurs de base (la seule chose qui reste indépendante des choix est le nombre de vecteurs dans une base : ici 3).

Correction de l'exercice 991 ▲

Montrons d'abord que $E\subset F$. On va d'abord montrer que $v_1\in F$ et $v_2\in F$.
Tout d'abord $v_1\in F \iff v_1\in \mathrm{Vect}\{w_1,w_2\} \iff \exists\lambda,\mu \quad v_1=\lambda w_1+\mu w_2$.
Il s'agit donc de trouver ces λ,μ. Cela se fait en résolvant un système (ici on peut même le faire de tête) on trouve la relation $7(2,3,-1)=3(3,7,0)-(5,0,-7)$ ce qui donne la relation $v_1=\frac{3}{7}w_1-\frac{1}{7}w_2$ et donc $v_1\in F$.
De même $7v_2=-w_1+2w_2$ donc $v_2\in F$.
Maintenant v_1 et v_2 sont dans l'espace vectoriel F, donc toute combinaison linéaire de v_1 et v_2 aussi, c'est-à-dire : pour tout λ,μ, on a $\lambda v_1+\mu v_2\in F$. Ce qui implique $E\subset F$.

Il reste à montrer $F\subset E$. Il s'agit donc d'écrire w_1 (puis w_2) en fonction de v_1 et v_2. On trouve $w_1=2v_1-v_2$ et $w_2=v_1+3v_2$. Encore une fois cela entraîne $w_1\in E$ et $w_2\in E$ donc $\mathrm{Vect}\{w_1,w_2\}\subset E$ d'où $F\subset E$.
Par double inclusion on a montré $E=F$.

Correction de l'exercice 997 ▲

$v\in\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ est équivalent à l'existence de deux réels λ,μ tels que $v=\lambda e_1+\mu e_2$.
Alors $(-2,x,y,3)=\lambda(1,-1,1,2)+\mu(-1,2,3,1)$ est équivalent à

$$\begin{cases}-2 &=\lambda-\mu\\ x &=-\lambda+2\mu\\ y &=\lambda+3\mu\\ 3 &=2\lambda+\mu\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\lambda &=1/3\\ \mu &=7/3\\ x &=13/3\\ y &=22/3\end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x,y) = (13/3, 22/3)$.

Correction de l'exercice 999 ▲

À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre *fini* de termes).

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des réels distincts, considérons la famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\dots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x\in\mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particulier pour $x = \alpha_j$ l'égalité devient $\lambda_j = 0$ car $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vaut 0 si $i\neq j$ et 1 si $i = j$. En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $j = 1$ jusqu'à $j = n$ on obtient : $\lambda_j = 0$, $j = 1,\dots,n$. Donc la famille $(f_\alpha)_\alpha$ est une famille libre.

Correction de l'exercice 1000 ▲

À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre *fini* de termes).

Soient $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$ des réels distincts que nous avons ordonnés, considérons la famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\dots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x\in\mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$, autrement dit pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

Le terme qui domine est $e^{\alpha_1 x}$ (car $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$). Factorisons par $e^{\alpha_1 x}$:

$$e^{\alpha_1 x}\left(\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x}\right) = 0.$$

Mais $e^{\alpha_1 x} \neq 0$ donc :

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x} = 0.$$

Lorsque $x\to+\infty$ alors $e^{(\alpha_i-\alpha_1)x}\to 0$ (pour tout $i\geqslant 2$, car $\alpha_i-\alpha_1<0$). Donc pour $i\geqslant 2$, $\lambda_i e^{(\alpha_i-\alpha_1)x}\to 0$ et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :

$$\lambda_1 = 0.$$

Le premier coefficients est donc nul. On repart de la combinaison linéaire qui est maintenant $\lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ et en appliquant le raisonnement ci-dessus on prouve par récurrence $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre.

Correction de l'exercice 1009 ▲

$F = G$.

Correction de l'exercice 1012 ▲

CNS $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq -1$.

Correction de l'exercice 1014 ▲

Soit $u' = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$. On a : $u = 1.u + 0.u'$, puis $v = \cos a.u - \sin a.u'$, puis $w = \cos b.u - \sin b.u'$. Les trois vecteurs u, v et w sont donc combinaisons linéaires des deux vecteurs u et u' et constituent par suite une famille liée ($p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs constituent une famille liée).

Correction de l'exercice 1015 ▲

1. Notons respectivement g et h, les fonctions sinus et cosinus.

   $f_a = \cos a.g + \sin a.h$, $f_b = \cos b.g + \sin b.h$ et $f_c = \cos c.g + \sin c.h$. Donc, f_a, f_b et f_c sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions g et h et constituent donc une famille liée ($p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs donnés constituent une famille liée).

2. f_0, f_1 et f_2 sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$. Donc, la famille (f_0, f_1, f_2) est une famille liée puis la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.
3. Pour α réel donné et $x > 0$, posons $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, puis $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < ... < \alpha_n$. Soit encore $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{\alpha_k} = 0 \Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k} = 0 \Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k-\alpha_n} = 0,$$
(en divisant les deux membres par x^{α_n}). Dans cette dernière égalité, on fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient $\lambda_n = 0$. Puis, par récurrence descendante, $\lambda_{n-1} = ... = \lambda_1 = 0$. On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre et donc, la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.
4. Pour a réel donné et x réel, posons $f_a(x) = |x-a|$. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, puis a_1,...,a_n, n réels deux à deux distincts. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k} = 0$.
S'il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$ alors,
$$f_{a_i} = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k\neq i} \lambda_k f_{a_k}.$$
Mais cette dernière égalité est impossible car f_{a_i} n'est pas dérivable en a_i alors que $-\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k\neq i} \lambda_k f_{a_k}$ l'est. Donc, tous les λ_i sont nuls.

Correction de l'exercice 1016 ▲

1. La matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Les trois dernières équations du système $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$ d'inconnues λ, μ et ν forment un sous-système de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
En développant le déterminant de cette matrice suivant sa première colonne, on obtient $\det(A) = -10 - 2 \times 10 = -30 \neq 0$. Ce sous-système est de Cramer et admet donc l'unique solution $(\lambda, \mu, \nu) = (0,0,0)$. Par suite, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.
2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{(pour } 2 \leqslant i \leqslant 4,\ L_i \leftarrow L_i - L_1)$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$
Donc la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre (et donc une base de E).
3. Notons (u_1, u_2, u_3, u_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
La famille $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (u_3, u_4, u_1, u_2)$ a même rang que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) c'est-à-dire 4. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est donc une base de $\mathbb{R}^4$.
4. La matrice de la famille (e_2, e_1, e_3, e_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice a même rang que les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (e_5 = e_1 - 2e_2,\ e_6 = e_3 - 4e_2 \text{ et } e_7 = e_4 - e_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (e_8 = e_6 - e_5 \text{ et } e_9 = e_7 - e_5).$$

La matrice ci-dessus est de rang 2. Il en est de même de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) qui est en particulier liée. La nullité de la troisième colonne fournit $0 = e_8 = e_6 - e_5 = (e_3 - 4e_2) - (e_1 - 2e_2) = -e_1 - 2e_2 + e_3$ et donc $e_3 = e_1 + 2e_2$. La nullité de la quatrième colonne fournit $0 = e_9 = e_7 - e_5 = (e_4 - e_2) - (e_1 - 2e_2) = e_4 + e_2 - e_1$ et donc $e_4 = e_1 - e_2$.

Correction de l'exercice 1017 ▲

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$.

$$a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow (a + b\sqrt{2})^2 = (-c\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2 \Rightarrow 2ab\sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$

Mais $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $ab = 0$.
Si $b = 0$, puisque $a + c = 0$ et que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on en déduit que $c = 0$ (sinon $\sqrt{3}$ serait rationnel) puis $a = 0$ et finalement $a = b = c = 0$.
Si $a = 0$, il reste $2b^2 = 3c^2$. Mais $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est irrationnel (dans le cas contraire, il existe deux entiers p et q non nuls tels que $3q^2 = 2p^2$ et par exemple l'exposant du nombre premier 2 n'a pas la même parité dans les deux membres de l'égalité ce qui est impossible) et donc $b = c = 0$ puis encore une fois $a = b = c = 0$.
On a montré que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$, $(a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0)$. Donc la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille de réels $\mathbb{Q}$-libre.

Correction de l'exercice 1018 ▲

Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$.
Soient a, b et c trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$.
Première solution. Si a est non nul, la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $a\ln x$ et ne peut donc être égale à la fonction nulle. Donc $a = 0$. Puis si b est non nul, la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3 = bf_2 + cf_3$ est équivalente à $b\ln(\ln x)$ et ne peut être égale à la fonction nulle. Donc $b = 0$. Puis $c = 0$.
Deuxième solution. On effectue un développement limité à un ordre suffisant de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ quand x tend vers 0 :
$f_1(x) = \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ puis

$$\begin{aligned} f_2(x) = \ln(1 + f_1(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} f_3(x) = \ln(1 + f_2(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)\right) = \left(x - x^2 + \frac{7}{6}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(x - x^2\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Par suite, $af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) \underset{x\to 0}{=} (a+b+c)x + \left(-\frac{a}{2} - b - \frac{3c}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a}{3} + \frac{7b}{6} + \frac{5c}{2}\right)x^3 + o(x^3)$. L'égalité $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ fournit, par identification des parties régulières des développements limités à l'ordre trois en zéro :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2}=0 \\ \frac{a}{3}+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{2} \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ 2a+7b+15c=0 \end{cases}.$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, on a donc $a=b=c=0$.

Correction de l'exercice 1019 ▲

Soient n un entier naturel non nul puis $a_1,..., a_n$ n réels deux à deux distincts et $\lambda_1,..., \lambda_n$ n réels.
Supposons $\lambda_1 f_{a_1} + ... + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. On a $\lambda_i f_{a_i} = -\sum_{j\neq i} \lambda_j f_{a_j}$ et on ne peut avoir $\lambda_i \neq 0$ car alors le membre de gauche est une fonction non dérivable en a_i tandis que le membre de droite l'est. Par suite, tous les λ_i sont nuls et donc la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre et donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Correction de l'exercice 1020 ▲

Soient $a_1 < ... < a_n$ n réels deux à deux distincts et $\lambda_1,..., \lambda_n$ n réels tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$ $(*)$.
Première solution. Après multiplication des deux membres de $(*)$ par $e^{-a_n x}$ puis passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_n = 0$. En réitérant, on obtient donc $\lambda_n = \lambda_{n-1} = ... = \lambda_1 = 0$.
Deuxième solution. On note f la fonction apparaissant au premier membre de $(*)$.

$$\begin{aligned} f = 0 &\Rightarrow \forall k \in [\![0,,n-1]\!],\ f^{(k)}(0) = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \lambda_1 a_1^k + ... + \lambda_n a_n^k = 0. \end{aligned}$$

Le système prédédent d' inconnues λ_i, $1 \leqslant n$, est un système linéaire homogène à n équations et n inconnues. Son déterminant est le déterminant de Vandermonde des a_i et est non nul puisque les a_i sont deux à deux distincts. Le système est donc de CRAMER et admet l'unique solution $(0,...,0)$.
Troisième solution. (dans le cas où on se restreint à démontrer la liberté de la famille $(x \mapsto e^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$).
Soient $n_1 < ... < n_p$ p entiers naturels deux à deux distincts. Supposons que pour tout réel x on ait $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{n_i x} = 0$. On en déduit que pour tout réel strictement positif t, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i t^{n_i} = 0$ et donc le polynôme $\sum_{i=1}^n \lambda_i X^{n_i}$ est nul (car a une infinité de racines) ou encore les coefficients du polynôme $\sum_{i=1}^n \lambda_i X^{n_i}$ à savoir les λ_i sont tous nuls.
Quatrième solution. (pour les redoublants) L'application φ qui à f de classe C^∞ fait correspondre sa dérivée est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour a réel donné, $\varphi(f_a) = af_a$ et la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est constituée de vecteurs propres de φ (les f_a sont non nulles) associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On sait qu'une telle famille est libre.

Correction de l'exercice 1021 ▲

Soient n un entier naturel non nul puis $P_1,..., P_n$ n polynômes non nuls de degrés respectifs $d_1 < ... < d_n$.
Soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = 0$. Supposons par l'absurde que les λ_i ne soient pas tous nuls et posons $k = \text{Max}\,\{i \in [\![1,n]\!] / \lambda_i \neq 0\}$. On ne peut avoir $k=1$ car $P_1 \neq 0$ puis

$$\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \lambda_k P_k = -\sum_{i<k} \lambda_i P_i.$$

Cette dernière égalité est impossible car $\lambda_k P_k$ est un polynôme de degré d_k (car $\lambda_k \neq 0$) et $-\sum_{i<k} \lambda_i P_i$ est un polynôme de degré au plus $d_{k-1} < d_k$. Donc tous les λ_k sont nuls.
La même démarche tient en remplaçant degré par valuation et en s'intéressant à la plus petite valuation au lieu du plus grand degré.

Correction de l'exercice 1022 ▲

1. Pour p et q entiers relatifs, posons $I(p,q) = \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x}\,dx$.
Si $p \neq q$, $I(p,q) = \frac{1}{i(p-q)}\left[e^{i(p-q)x}\right]_0^{2\pi} = 0$. Soient alors p et q deux entiers naturels.
Donc si $p \neq q$, $J(p,q)\frac{1}{2}\mathrm{Re}(I(p,q)+I(p,-q)) = 0$ puis $K(p,q) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(I(p,-q)-I(p,q)) = 0$ puis $L(p,q) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(I(p,-q)-I(p,q)) = 0$.
Si $p = q$, $J(p,p) = 2\pi$ si $p = 0$ et π si $p \neq 0$ puis $K(p,p) = 0$ puis $L(p,p) = \pi$ si $p \neq 0$ et 0 si $p = 0$.
2. Sur l'espace E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, l'application qui à (f,g) élément de E^2 associe $\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ est classiquement un produit scalaire. La famille de fonctions proposée est une famille orthogonale pour ce produit scalaire et ne contient pas le vecteur nul de E. Cette famille est donc est libre.

Correction de l'exercice 1023 ▲

1.
$$\begin{aligned}
& \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \\
\iff & \alpha(2,1,4) + \beta(1,-1,2) + \gamma(3,3,6) = (0,0,0) \\
\iff & \Big(2\alpha+\beta+3\gamma, \alpha-\beta+3\gamma, 4\alpha+2\beta+6\gamma\Big) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma & = 0 \\ \alpha-\beta+3\gamma & = 0 \\ 4\alpha+2\beta+6\gamma & = 0 \end{cases} \\
\iff & \cdots \qquad \text{(on résout le système)} \\
\iff & \alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Si l'on prend $t = 1$ par exemple alors $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ donne bien $-2v_1 + v_2 + v_3 = 0$.
Cette solution n'est pas unique, les autres coefficients qui conviennent sont les $(\alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Il s'agit donc de trouver un vecteur $v = (x,y,z)$ dans P_1 et P_2 et donc qui doit vérifier $x - y + z = 0$ et $x - y = 0$:

$$\begin{aligned}
& v = (x,y,z) \in P_1 \cap P_2 \\
\iff & x - y + z = 0 \text{ et } x - y = 0 \\
\iff & \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\
\iff & \cdots \qquad \text{(on résout le système)} \\
\iff & (x = t, y = t, z = 0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc, si l'on fixe par exemple $t = 1$, alors $v = (1,1,0)$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle D, une équation paramétrique étant $D = \{(t,t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 1024 ▲

Faisons d'abord une remarque qui va simplifier les calculs :

$$v_3 = 2v_1 + 3v_2.$$

Donc en fait nous avons $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\} = \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}$ et c'est un espace de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel. Par la même relation on trouve que $\mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3\} = \mathrm{Vect}\{v_2,v_3\}$.

1. Vrai. $\text{Vect}\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$ est inclus dans $\text{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$, car $(1,1,0,0)=v_1+v_2$ et $(-1,1,-4,2)=v_1-v_2$. Comme ils sont de même dimension ils sont égaux (autrement dit : comme un plan est inclus dans un autre alors ils sont égaux).
2. Vrai. On a $(1,1,0,0)=v_1+v_2$ donc $(1,1,0,0)\in\text{Vect}\{v_1,v_2\}$, or $\text{Vect}\{v_1,v_2\}=\text{Vect}\{v_2,v_3\}\subset\text{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}$. Donc $(1,1,0,0)\in\text{Vect}\{v_1,v_2\}\cap\text{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}$.
3. Faux. Toujours la même relation nous donne que $\text{Vect}\{v_1,v_2\}\cap\text{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}=\text{Vect}\{v_1,v_2\}$ donc est de dimension 2. C'est donc un plan vectoriel et pas une droite.
4. Faux. Encore une fois la relation donne que $\text{Vect}\{v_1,v_2\}+\text{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}=\text{Vect}\{v_1,v_2,v_4\}$, or 3 vecteurs ne peuvent engendrer $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4.
5. Vrai. Faire le calcul : l'intersection est $\{0\}$ et la somme est $\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 1025 ▲

1. Non. Tout d'abord par définition $\text{Vect}\{v_1,v_2\}+\text{Vect}\{v_3\}=\text{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$, Nous allons trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $\text{Vect}\{v_1,v_2\}+\text{Vect}\{v_3\}$. Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec $u=(0,0,0,1)$.
   $u\in\text{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$ si et seulement si il existe des réels α,β,γ tels que $u=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$. Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc α,β,γ tels que :
   $$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$
   Ce qui est équivalent à trouver α,β,γ vérifiant le système linéaire :
   $$\begin{cases}0=\alpha\cdot1+\beta\cdot0+\gamma\cdot0\\0=\alpha\cdot0+\beta\cdot0+\gamma\cdot1\\0=\alpha\cdot0+\beta\cdot1+\gamma\cdot0\\1=\alpha\cdot1+\beta\cdot0+\gamma\cdot0\end{cases}\quad\text{qui équivaut à}\quad\begin{cases}0=\alpha\\0=\gamma\\0=\beta\\1=\alpha\end{cases}$$
   Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent $\alpha=\beta=\gamma=0$ et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

   Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4.
2. Oui. Notons $F=\text{Vect}\{v_1,v_2\}$ et $G=\text{Vect}\{v_4,v_5\}$. Pour montrer $F\oplus G=\mathbb{R}^4$ il faut montrer $F\cap G=\{(0,0,0,0)\}$ et $F+G=\mathbb{R}^4$.
   (a) Montrons $F\cap G=\{(0,0,0,0\}$. Soit $u\in F\cap G$, d'une part $u\in F=\text{Vect}\{v_1,v_2\}$ donc il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $u=\alpha v_1+\beta v_2$. D'autre part $u\in G=\text{Vect}\{v_4,v_5\}$ donc il existe $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tels que $u=\gamma v_4+\delta v_5$. On a écrit u de deux façons donc on a l'égalité $\alpha v_1+\beta v_2=\gamma v_4+\delta v_5$. En écrivant les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela donne
   $$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$
   Donc $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ est solution du système linéaire suivant :
   $$\begin{cases}\alpha=0\\0=\delta\\\beta=0\\\alpha=\gamma+\delta\end{cases}$$

Cela implique $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ et donc $u=(0,0,0,0)$. Ainsi le seul vecteur de $F\cap G$ est le vecteur nul.

(b) Montrons $F+G=\mathbb{R}^4$. $F+G=\mathrm{Vect}\{v_1,v_2\}+\mathrm{Vect}\{v_4,v_5\}=\mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_4,v_5\}$. Il faut donc montrer que n'importe quel vecteur $u=(x_0,y_0,z_0,t_0)$ de $\mathbb{R}^4$ s'écrit comme une combinaison linéaire de v_1,v_2,v_4,v_5. Fixons u et cherchons $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_4+\delta v_5=u$. Après avoir considéré les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela revient à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases}\alpha=x_0\\ \delta=y_0\\ \beta=z_0\\ \alpha+\gamma+\delta=t_0\end{cases}$$

Nous étant donné un vecteur $u=(x_0,y_0,z_0,t_0)$ on a calculé qu'en choisissant $\alpha=x_0$, $\beta=z_0$, $\gamma=t_0-x_0-y_0$, $\delta=y_0$ on obtient bien $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_4+\delta v_5=u$. Ainsi tout vecteur est engendré par $F+G$.

Ainsi $F\cap G=\{(0,0,0,0)\}$ et $F+G=\mathbb{R}^4$ donc $F\oplus G=\mathbb{R}^4$.

3. Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5=v_3+v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.
4. Non. Il y a bien quatre vecteurs mais il existe des relations entre eux.

   On peut montrer $\mathrm{Vect}\{v_1,v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3,v_5\}$ ne sont pas supplémentaires de deux façons. Première méthode : leur intersection est non nulle, par exemple $v_4=v_5-v_3$ est dans l'intersection. Deuxième méthode : les deux espaces n'engendrent pas tout, en effet il est facile de voir que $(0,0,1,0)\notin\mathrm{Vect}\{v_1,v_4\}+\mathrm{Vect}\{v_3,v_5\}=\mathrm{Vect}\{v_1,v_4,v_3,v_5\}$.

Correction de l'exercice 1028 ▲

Analysons d'abord les fonctions de E qui ne sont pas dans F : ce sont les fonctions h qui vérifient $h(0)\neq 0$ **ou** $h'(0)\neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x\mapsto b$, $(b\in\mathbb{R}^*)$ ou les homothéties $x\mapsto ax$, $(a\in\mathbb{R}^*)$ n'appartiennent pas à F.
Cela nous donne l'idée de poser

$$G=\left\{x\mapsto ax+b\mid(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.
Soit $f\in F\cap G$, alors $f(x)=ax+b$ (car $f\in G$) et $f(0)=b$ et $f'(0)=a$; mais $f\in F$ donc $f(0)=0$ donc $b=0$ et $f'(0)=0$ donc $a=0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F\cap G=\{0\}$.
Soit $h\in E$, alors remarquons que pour $f(x)=h(x)-h(0)-h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0)=0$ et $f'(0)=0$ donc $f\in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x)=f(x)+h(0)+h'(0)x.$$

Posons $g(x)=h(0)+h'(0)x$, alors la fonction $g\in G$ et

$$h=f+g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E=F+G$.
En conclusion nous avons montré que $E=F\oplus G$.

Correction de l'exercice 1031 ▲

On note F l'espace vectoriel des suites constantes et G l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0.

1. $F\cap G=\{0\}$. En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.

2. $F+G=E$. Soit (u_n) un élément de E. Notons ℓ la limite de (u_n). Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \ell$, alors (v_n) converge vers 0. Donc $(v_n) \in G$. Notons (w_n) la suite constante égale à ℓ. Alors nous avons $u_n = \ell + u_n - \ell$, ou encore $u_n = w_n + v_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. En terme de suite cela donne $(u_n) = (w_n) + (v_n)$. Ce qui donne la décomposition cherchée.

Bilan : F et G sont en somme directe dans E : $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 1032 ▲

Notons l'ancienne base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et ce qui sera la nouvelle base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Soit P la matrice de passage qui contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que P est inversible (on va même calculer son inverse) donc $\mathscr{B}'$ est bien une base. De plus

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on calcule } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Correction de l'exercice 1033 ▲

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ que l'on décompose en $P = P_1(X^2) + XP_2(X^2)$. Alors $P = (P_1+P_2)(X^2) - (1-X)P_2(X^2) = (1-X)P_1(X^2) + X(P_1+P_2)(X^2)$, ce qui prouve que les deux sommes sont égales à $\mathbb{R}[X]$. Ces sommes sont facilement directes.
   (b) Cela ne change pas A : les éléments de A sont ceux dont les parties paire et impaire sont opposées (au facteur X près), indépendament du fait (vrai) que ces parties sont des polynômes.
2. Soit f un isomorphisme de E_1 sur E_2 et $F = \{x - f(x) \text{ tq } x \in E_1\}$. Alors $E = E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$.

Correction de l'exercice 1041 ▲

Les f_i sont des projecteurs commutant deux à deux, ils sont simmultanément diagonalisables. Soit e_1 tel que $f_1(e_1) = e_1$: $f_i(e_1) = f_i \circ f_1(e_1) = 0$ si $i \geqslant 2$ donc les supports des restrictions des f_i à une base propre commnue sont deux à deux disjoints non vides, ce sont des singletons.

Correction de l'exercice 1042 ▲

$F = \mathrm{Vect}(u)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, car est le noyau de la forme linéaire $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \ldots + x_n$.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x - \lambda u \in G \Leftrightarrow (x_1 - \lambda, \ldots, x_n - \lambda) \in G \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists! \lambda \in \mathbb{R} /\ x - \lambda u \in G,$$

et donc,

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G.$$

Le projeté sur F parallèlement à G d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k.u=(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k,\dots,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k)$$

et le projeté du même vecteur sur G parallèlement à F est

$$x-(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k).u=(x_1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k,\dots,x_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k).$$

Correction de l'exercice 1043 ▲

On a

$$n=\dim E=\dim\,(\mathrm{Ker}\,f+\mathrm{Ker}\,g)=\dim\,(\mathrm{Ker}\,f)+\dim\,(\mathrm{Ker}\,g)-\dim\,(\mathrm{Ker}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g),$$

mais aussi,

$$n=\dim\,(\mathrm{Im}\,f)+\dim\,(\mathrm{Im}\,g)-\dim\,(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g)=2n-\dim\,\mathrm{Ker}\,f-\dim\,(\mathrm{Ker}\,g)-\dim\,(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g).$$

Par suite,

$$n+\dim\,(\mathrm{Ker}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g)=\dim\,(\mathrm{Ker}\,f)+\dim\,\mathrm{Ker}\,g=n-\dim\,(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g)$$

puis $n+\dim\,(\mathrm{Ker}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g)=n-\dim\,(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g)\Rightarrow\dim\,(\mathrm{Ker}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g)+\dim\,(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g)=0$ ou encore $\dim\,(\mathrm{Ker}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g)=\dim\,(\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g)=0$, et finalement, $\mathrm{Ker}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g=\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g=\{0\}$. Ceci montre que les sommes proposées sont directes.

Correction de l'exercice 1044 ▲

1ère solution. F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E et est donc un hyperplan de E.
Soit $x=(x_1,...,x_n)$ un élément de $F\cap G$. Il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $x=(\lambda,...,\lambda)$ et $n\lambda=0$ et donc $\lambda=0$ puis $x=0$. Donc $F\cap G=\{0\}$. De plus $\dim(F)+\dim(G)=n-1+1=n=\dim(E)<+\infty$ et donc $F\oplus G=E$.
Soit $x=(x_1,...,x_n)$ un vecteur de E. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. $x-(\lambda,...,\lambda)\in F\Leftrightarrow(x_1-\lambda)+...+(x_n-\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$. Le projeté de x sur G parallèlement à F est donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(1,...,1)$ et le projeté de x sur F parallèlement à G est $x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(1,...,1)$.
2ème solution (dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$). On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Posons $\overrightarrow{u}=(1,\dots,1)$.
On a $F=\overrightarrow{u}^{\perp}=G^{\perp}$. Par suite, F est le supplémentaire orthogonal de F.
Soit $x\in E$. Le projeté orthogonal de x sur G est $\frac{x.u}{\|u\|^2}u=\frac{x_1+...+x_n}{n}(1,\dots,1)$.

Correction de l'exercice 1045 ▲

1. Si les deux droites vectorielles sont distinctes alors elles engendrent un plan vectoriel et donc pas $\mathbb{R}^3$ tout entier. Si elles sont confondues c'est pire : elles n'engendrent qu'une droite. Dans tout les cas elles n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$ et ne sont donc pas supplémentaires.
2. Si P et P' sont deux plans vectoriels alors $P\cap P'$ est une droite vectorielle si $P\neq P'$ ou le plan P tout entier si $P=P'$. Attention, tous les plans vectoriels ont une équation du type $ax+by+cz=0$ et doivent passer par l'origine, il n'existe donc pas deux plans parallèles par exemple. Donc l'intersection $P\cap P'$ n'est jamais réduite au vecteur nul. Ainsi P et P' ne sont pas supplémentaires.
3. Soit D une droite et P un plan, u un vecteur directeur de D. Si le vecteur u appartient au plan P alors $D\subset P$ et les espaces ne sont pas supplémentaires (ils n'engendrent pas tout $\mathbb{R}^3$). Si $u\notin P$ alors d'une part $D\cap P$ est juste le vecteur nul d'autre part D et P engendrent tout $\mathbb{R}^3$; D et P sont supplémentaires.

   Détaillons un exemple : si P est le plan d'équation $z=0$ alors il est engendré par les deux vecteurs $v=(1,0,0)$ et $w=(0,1,0)$. Soit D une droite de vecteur directeur $u=(a,b,c)$.

   Alors $u\notin P\iff u\notin\mathrm{Vect}\{v,w\}\iff c\neq0$. Dans ce cas on bien que d'une part que $D=\mathrm{Vect}\{u\}$ intersecté avec P est réduit au vecteur nul. Ainsi $D\cap P=\{(0,0,0)\}$. Et d'autre part tout vecteur $(x,y,z)\in$

$\mathbb{R}^3$ appartient à $D+P = \text{Vect}\{u,v,w\}$. Il suffit de remarquer que $(x,y,z) - \frac{z}{c}(a,b,c) = (x - \frac{za}{c}, y - \frac{zb}{c}, 0) = (x - \frac{za}{c})(1,0,0) + (y - \frac{zb}{c})(0,1,0)$. Et ainsi $(x,y,z) = \frac{z}{c}u + (x - \frac{za}{c})v + (y - \frac{zb}{c})w$. Donc $D+P = \mathbb{R}^3$.
Bilan on a bien $D \oplus P = \mathbb{R}^3$: D et P sont en somme directe.

Correction de l'exercice 1046 ▲

$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ donc la famille $\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, 1/3)$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, -2/3)$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont $(2/3, -2/3, -1/3)$.

Correction de l'exercice 1048 ▲

1. Pour montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base nous allons montrer que cette famille est libre et génératrice.

   (a) Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, nous devons montrer qu'alors les coefficients a, b, c sont nuls. Ici le vecteur nul est $0 = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} & av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0) \\ \iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \\ \iff & (b+c, a+c, a+b) = (0,0,0) \\ \iff & \begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi les coefficients vérifient $a = b = c = 0$, cela prouve que la famille est libre.

   (b) Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice. Pour n'importe quel vecteur $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ on doit trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$.

$$\begin{aligned} & av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\ \iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (x,y,z) \\ \iff & (b+c, a+c, a+b) = (x,y,z) \\ \iff & \begin{cases} b+c = x \\ a+c = y & (L_2) \\ a+b = z & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} b+c = x & (L_1') \\ a+c = y \\ b-c = z-y & (L_3') = (L_3 - L_2) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2b = x+z-y & (L_1' + L_3') \\ a+c = y \\ 2c = x-(z-y) & (L_1' - L_3') \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ c = \frac{1}{2}(x+y-z) \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $a = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $c = \frac{1}{2}(x+y-z)$ nous avons donc la relation $av_1+bv_2+cv_3 = (x,y,z) = v$. Donc la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ est génératrice.

(c) La famille est libre et génératrice donc c'est une base.

(d) Pour écrire $w = (1,1,1)$ dans la base (v_1,v_2,v_3) on peut résoudre le système correspondant à la relation $av_1+bv_2+cv_3 = w$. Mais en fait nous l'avons déjà résolu pour tout vecteur (x,y,z), en particulier pour le vecteur $(1,1,1)$ la solution est $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}v_2+\frac{1}{2}v_3 = w$. Les coordonnées de w dans la base (v_1,v_2,v_3) sont donc $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

2. Pour montrer que la famille est libre et génératrice les calculs sont similaires à ceux de la question précédente. Notons $\mathscr{B}$ la base (v_1,v_2,v_3).
   Exprimons ensuite e_1 dans cette base, les calculs donnent : $e_1 = \frac{1}{3}v_1-\frac{1}{3}v_2+\frac{1}{3}v_3$. Ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.
   $e_2 = \frac{1}{3}v_1+\frac{2}{3}v_2+\frac{1}{3}v_3$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont $(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.
   $e_3 = \frac{1}{3}v_1-\frac{1}{3}v_2-\frac{2}{3}v_3$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$.
   Les calculs sont ensuite terminés, on remarque que $w = (1,2,-3)$ vaut en fait $w = e_1+2e_2-3e_3$ donc par nos calculs précédents $w = \frac{1}{3}v_1-\frac{1}{3}v_2+\frac{1}{3}v_3+2(\frac{1}{3}v_1+\frac{2}{3}v_2+\frac{1}{3}v_3)-3(\frac{1}{3}v_1-\frac{1}{3}v_2-\frac{2}{3}v_3) = 2v_2+3v_3$. Les coordonnées de w dans $\mathscr{B}$ sont $(0,2,3)$.
3. Par exemple la famille $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.
4. La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Correction de l'exercice 1052 ▲

1. Faux. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$, $z = (1,1,0)$.
2. Vrai. Soit une combinaison linéaire nulle $\lambda_1x_1+\cdots\lambda_px_p = 0$. Supposons qu'un des coefficient est non nul : par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Alors on écrit $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2-\cdots-\frac{\lambda_p}{\lambda_1}x_p$. Donc x_1 est une combinaison linéaire de $\{x_2,\ldots,x_p\}$. Ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé, donc tous les coefficients sont nuls. Donc $\{x_1,\ldots,x_p\}$ est une famille libre.

Correction de l'exercice 1054 ▲

1. C'est une base.
2. Ce n'est pas une base : $v_3 = 4v_1-v_2$. Donc l'espace $\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3) = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.
3. Ce n'est pas une base : $v_3 = 5v_1-4v_2$. Donc l'espace $\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3) = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.

Correction de l'exercice 1059 ▲

1. Tout d'abord la famille $\{P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ contient $n+1$ vecteurs dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$. Ici un vecteur est un polynôme : P_0 est un polynôme constant non nul, P_1 est un polynôme de degré exactement 1,... Rappelons que lorsque le nombre de vecteurs égal la dimension de l'espace nous avons les équivalences, entre *être une famille libre* et *être une famille génératrice* et donc aussi *être une base*.

   Nous allons donc montrer que $\{P_0,P_1,\ldots,P_n\}$ est une famille libre. Soit une combinaison linéaire nulle :
   $$\lambda_0P_0+\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_nP_n = 0.$$
   Introduisons l'hypothèse concernant les degrés : $\deg P_0 = 0$, $\deg P_1 = 1$, ..., $\deg P_n = n$. Définissons le polynôme $P(X) = \lambda_0P_0+\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_nP_n$.

   Nous allons montrer successivement $\lambda_n = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0,\ldots,\lambda_0 = 0$.

Par l'absurde supposons $\lambda_n \neq 0$ et écrivons $P_n(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, comme $\deg P_n(X) = n$ alors $a_n \neq 0$. Maintenant $P(X)$ est aussi un polynôme de degré exactement n qui s'écrit

$$P(X) = \lambda_n \cdot a_n \cdot X^n + \text{termes de plus bas degré}$$

La combinaison linéaire nulle implique que $P(X) = 0$ (le polynôme nul). Donc en identifiant les coefficients devant X^n on obtient $\lambda_n \cdot a_n = 0$ On obtient $a_n = 0$ ou $\lambda_n = 0$. Ce qui est une contradiction. Conclusion $\lambda_n = 0$.

Maintenant la combinaison linéaire nulle s'écrit $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{n-1}P_{n-1} = 0$. Par récurrence descendante on trouve $\lambda_{n-1} = 0, \ldots,$ jusqu'à $\lambda_0 = 0$.
Bilan : $\lambda_0 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ donc la famille $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ est libre, elle donc aussi génératrice ; ainsi $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Un point que nous avons utilisé et qu'il est peut-être utile de détailler est le suivant : si un polynôme égal le polynôme nul alors tous ces coefficients sont nul.
Voici une justification : écrivons $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$ et divisons par X^n :

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{X} + \frac{a_{n-2}}{X^2} + \cdots + \frac{a_1}{X^{n-1}} + \frac{a_0}{X^n} = 0$$

Lorsque l'on fait tendre X vers $+\infty$ alors le terme de gauche tend vers a_n et celui de droite vaut 0 donc par unicité de la limite $a_n = 0$. On fait ensuite une récurrence descendante pour prouver $a_{n-1} = 0, \ldots, a_0 = 0$.
Une conséquence est que si deux polynômes sont égaux alors leurs coefficients sont égaux. Et une autre formulation est de dire que $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On trouve $a = 10, b = -10, c = -7, d = -8$. Puis $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = -9, \delta = 8$.

Correction de l'exercice 1063 ▲

Quand le nombre de vecteurs égal la dimension de l'espace nous avons les équivalences, entre *être une famille libre* et *être une famille génératrice* et donc aussi *être une base*.
Trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ forment donc une base si et seulement s'ils forment une famille libre. Vérifions quand c'est le cas.

$$\begin{aligned}
& a(1,0,t) + b(1,1,t) + c(t,0,1) = (0,0,0) \\
\iff & (a + b + tc, b, at + bt + c) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} a + b + tc = 0 \\ b = 0 \\ at + bt + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a + tc = 0 \\ at + c = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} b = 0 \\ a = -tc \\ (-tc)t + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = -tc \\ (t^2 - 1)c = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Premier cas : si $t \neq \pm 1$. Alors $t^2 - 1 \neq 0$ et donc la seule solution du système est $(a = 0, b = 0, c = 0)$. Dans ce cas la famille est libre et est donc aussi une base.
Deuxième cas : si $t = \pm 1$. Alors la dernière ligne du système disparaît et il existe des solutions non triviales (par exemple si $t = 1$, $(a = 1, b = 0, c = -1)$ est une solution). La famille n'est pas libre et n'est donc pas une base.

Correction de l'exercice 1073 ▲

1. C'est bien une base. Comme nous avons trois vecteurs et nous souhaitons montrer qu'ils forment un base d'un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de montrer que soit la famille est libre, soit elle est génératrice (ces conditions sont équivalentes pour n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n). Il est plus simple de montrer que la famille est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ il faut montrer que $a = b = c = 0$. Mais attention ici le corps de base est $K = \mathbb{C}$ donc a, b, c sont des nombres complexes.

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \\
\iff & a(1,-1,i) + b(-1,i,1) + c(i,1,-1) = (0,0,0) \\
\iff & (a-b+ic, -a+ib+c, ia+b-c) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} a-b+ic = 0 \\ -a+ib+c = 0 \\ ia+b-c = 0 \end{cases} \\
\iff & \cdots \text{ on résout le système} \\
\iff & a = 0, b = 0, c = 0
\end{aligned}$$

La famille (v_1, v_2, v_3) est libre, donc aussi génératrice ; c'est donc une base de $\mathbb{C}^3$.

2. On cherche $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$. Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} a-b+ic = 1+i \\ -a+ib+c = 1-i \\ ia+b-c = i \end{cases}$$

On trouve $a = 0$, $b = \frac{1}{2}(1-i)$, $c = \frac{1}{2}(1-3i)$. Nous avons donc $v = \frac{1}{2}(1-i)v_2 + \frac{1}{2}(1-3i)v_3$ et ainsi les coordonnées de v dans la base (v_1, v_2, v_3) sont $(0, \frac{1}{2}(1-i), \frac{1}{2}(1-3i))$.

Correction de l'exercice 1081 ▲

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & & & 2y & + & z \\ 3y' & = & -x & & & + & z \\ 3z' & = & -x & + & 3y & + & z. \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 1082 ▲

$r = 3, \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}, \quad \vec{b} - 2\vec{d} - \vec{e} = \vec{0}.$

Correction de l'exercice 1084 ▲

3. π_H :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x' & = & 3x & - & y & - & z \\ 4y' & = & -x & + & 3y & - & z \\ 4z' & = & -2x & - & 2y & + & 2z, \end{array}\right.$$

s_H :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x' & = & x & - & y & - & z \\ 2y' & = & -x & + & y & - & z \\ 2z' & = & -2x & - & 2y. & & \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 1086 ▲

1. Soit n un entier naturel supèrieur ou égal à 2.
Si $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ ou encore tel que $n.b^2 = a^2$. Mais alors, par unicité de la décomposition d'un entier naturel supèrieur ou égal à 2 en facteurs premiers, tous les facteurs premiers de n ont un exposant pair ce qui signifie exactement que n est un carré parfait.
Si $n = 0$ ou $n = 1$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ et n est d'autre part un carré parfait. On a montré que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \text{ est un carré parfait})$$
ou encore par contraposition
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \text{ n'est pas un carré parfait} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}).$$
2. D'après 1), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels.
$E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$ et donc, E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et $(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$ en est une famille génératrice.
Montrons que cette famille est $\mathbb{Q}$-libre.
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$.
$$\begin{aligned} a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} = 0 &\Rightarrow (a+d\sqrt{6})^2 = (-b\sqrt{2}-c\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2+2ad\sqrt{6}+6d^2 = 2b^2+2bc\sqrt{6}+3c^2 \\ &\Rightarrow a^2-2b^2-3c^2+6d^2 = 2(-ad+bc)\sqrt{6} \end{aligned}$$
Puisque $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, on obtient $a^2-2b^2-3c^2+6d^2 = 2(-ad+bc) = 0$ (car si $bc-ad \neq 0$, $\sqrt{6} = \frac{a^2-2b^2-3c^2+6d^2}{2(-ad+bc)} \in \mathbb{Q}$) ou encore,
$$\left\{\begin{array}{l} a^2-3c^2 = 2b^2-6d^2 \quad (1) \\ ad = bc \quad (2) \end{array}\right. .$$
De même,
$$\begin{aligned} a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} = 0 &\Rightarrow (a+c\sqrt{3})^2 = (-b\sqrt{2}-d\sqrt{6})^2 \Rightarrow (a^2+2ac\sqrt{3}+3c^2 = 2b^2+4bd\sqrt{3}+6d^2 \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+3c^2 = 2b^2+6d^2 \quad (3) \\ ac = 2bd \quad (4) \end{array}\right. . \end{aligned}$$
(puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel). En additionnant et en retranchant (1) et (3), on obtient $a^2 = 2b^2$ et $c^2 = 2d^2$.Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on ne peut avoir $b \neq 0$ (car alors $\sqrt{2} = \pm\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$) ou $d \neq 0$. Donc, $b = d = 0$ puis $a = c = 0$. Finalement, la famille $(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$ est $\mathbb{Q}$-libre et est donc une base de E.

Correction de l'exercice 1087 ▲

Première solution. Chaque P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, est de degré $k+n-k = n$ et est donc dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Les polynômes P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$ ont des valuations deux à deux distinctes et donc constituent une famille libre. Comme de plus $\mathrm{card}(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = n+1 = \dim(E) < +\infty$, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.
Deuxième solution. La matrice carrée M de la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire inférieure. Ses coefficients diagonaux sont tous non nuls car égaux à 1. M est donc inversible et $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.

Correction de l'exercice 1088 ▲

Unicité. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. L_i doit admettre les n racines deux à deux distinctes a_j où j est différent de i et donc L_i est divisible par le polynôme $\prod_{j\neq i}(X-a_j)$. L_i doit être de degré n et donc il existe un réel non nul λ tel que $L_i = \lambda\prod_{j\neq i}(X-a_j)$. Enfin $L_i(a_i) = 1$ fournit $\lambda = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$. Ainsi nécessairement $L_i = \prod_{j\neq i}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$.
Existence. Les L_i ainsi définis conviennent.

$$\boxed{\forall i \in [\![0,n]\!]\,,\ L_i = \prod_{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}.}$$

Montrons que la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
Soient λ_0,..., λ_n $n+1$ nombres complexes tels que $\lambda_0 L_0 + ... + \lambda_n L_n = 0$. En particulier, pour un indice i de $[\![0,n]\!]$ donné, $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = 0$ et donc $\lambda_i = 0$ au vu des égalités définissant les L_j. La famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
De plus les L_i sont tous dans $\mathbb{C}_n[X]$ et vérifient $\text{card}(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n} = n+1 = \dim \mathbb{C}_n[X] < +\infty$. Donc la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
Soit P un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n.
On écrit P dans la base $(L_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$: $P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j$. En prenant la valeur en a_i, i donné dans $[\![0,n]\!]$, on obtient $\lambda_i = P(a_i)$. D'où l'écriture générale d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$:

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ P = P(a_0)L_0 + ... + P(a_n)L_n.}$$

Mais alors : $(\forall i \in [\![0,n]\!]\,,\ P(a_i) = b_i) \Rightarrow P = b_0 L_0 + ... + b_n L_n$.
Réciproquement le polynôme $P = b_0 L_0 + ... + b_n L_n$ vérifie bien sûr les égalités demandées et est de degré inférieur ou égal à n.
Ainsi, il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$ à savoir $P_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$.
Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $R = (X-a_0)...(X-a_n)$ $(\deg(R) = n+1)$.

$$\begin{aligned}(\forall i \in [\![0,n]\!]\ P(a_i) = b_i) &\Leftrightarrow (\forall i \in [\![0,n]\!]\ P(a_i) = P_0(a_i))\\ &\Leftrightarrow P - P_0 \text{ admet les } n+1 \text{ racines deux à deux distinctes } a_0, ..., a_n\\ &\Leftrightarrow P - P_0 \text{ est divisible par } R \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}[X]/\ P = P_0 + QR.\end{aligned}$$

Les polynômes cherchés sont les $P_0 + QR$ où Q décrit $\mathbb{C}[X]$.

Correction de l'exercice 1090 ▲

1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc est de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $F \cap G$ avec $k = \dim F \cap G$.

   $(e_1, \dots, e_k)$ est une famille libre dans F donc on peut la compléter en une base de F par le théorème de la base incomplète. Soient donc $(f_1, \dots, f_\ell)$ des vecteurs de F tels que $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell)$ soit une base de F. Nous savons que $k + \ell = \dim F$. Remarquons que les vecteurs f_i sont dans $F \setminus G$ (car ils sont dans F mais pas dans $F \cap G$).

   Nous repartons de la famille $(e_1, \dots, e_k)$ mais cette fois nous la complétons en une base de G : soit donc $(g_1, \dots, g_m)$ des vecteurs de G tels que $(e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m)$ soit une base de G. Nous savons que $k + m = \dim G$. Remarquons que cette fois les vecteurs g_i sont dans $G \setminus F$.

2. Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell, g_1, \dots, g_m)$ est une base de $F + G$.

   C'est une famille génératrice car $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell) \subset \text{Vect}(\mathscr{B})$ et $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m) \subset \text{Vect}(\mathscr{B})$. Donc $F + G \subset \text{Vect}(\mathscr{B})$.

   C'est une famille libre : en effet soit une combinaison linéaire nulle

   $$a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k \quad + \quad b_1 f_1 + \cdots + b_\ell f_\ell \quad + \quad c_1 g_1 + \cdots + c_m g_m = 0.$$

   Notons $e = a_1 e_1 + \ldots + a_k e_k$, $f = b_1 f_1 + \cdots + b_\ell f_\ell$, $g = c_1 g_1 + \cdots + c_m g_m$. Donc la combinaison linéaire devient :

   $$e + f + g = 0.$$

   Donc $g = -e - f$, or e et f sont dans F donc g appartient à F. Or les vecteurs g_i ne sont pas dans F. Donc $g = c_1 g_1 + \cdots + c_m g_m$ est nécessairement le vecteur nul. Nous obtenons $c_1 g_1 + \cdots + c_m g_m = 0$

c'est donc une combinaison linéaire nulle pour la famille libre $(g_1,\dots,g_m)$. Donc tous les coefficients $c_1,\dots,c_m$ sont nuls.

Le reste de l'équation devient $a_1e_1+\dots+a_ke_k+b_1f_1+\dots+b_\ell f_\ell=0$, or $(e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_\ell)$ est une base de F donc tous les coefficients $a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_\ell$ sont nuls.

Bilan : tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre. Comme elle était génératrice, c'est une base.

3. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $F+G$ alors la dimension de $F+G$ est le nombre de vecteurs de la base $\mathscr{B}$:
$$\dim(F+G)=k+\ell+m.$$
Or $k=\dim F\cap G$, $\ell=\dim F-k$, $m=\dim G-k$, donc
$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Correction de l'exercice 1091 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Par l'absurde supposons que F ne soit pas de dimension finie, alors il existe $v_1,\dots,v_{n+1}$, $n+1$ vecteurs de F linéairement indépendants dans F. Mais ils sont aussi linéairement indépendants dans E. Donc la dimension de E est au moins $n+1$. Contradiction.

Deux remarques :
- En fait on a même montré que la dimension de F est plus petite que la dimension de E.
- On a utilisé le résultat suivant : si E admet une famille libre à k éléments alors la dimension de E est plus grande que k (ou est infini). Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de la base incomplète.

Correction de l'exercice 1094 ▲

1. G est engendré par deux vecteurs donc $\dim G\leqslant 2$. Clairement v_4 et v_5 ne sont pas liés donc $\dim G\geqslant 2$ c'est-à-dire $\dim G=2$.
2. F est engendré par trois vecteurs donc $\dim F\leqslant 3$. Un calcul montre que la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ est libre, d'où $\dim F\geqslant 3$ et donc $\dim F=3$.
3. Essayons d'abord d'estimer la dimension de $F\cap G$. D'une part $F\cap G\subset G$ donc $\dim(F\cap G)\leqslant 2$. Utilisons d'autre part la formule $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$. Comme $F+G\subset\mathbb{R}^4$, on a $\dim(F+G)\leqslant 4$ d'où on tire l'inégalité $\dim(F\cap G)\geqslant 1$. Donc soit $\dim(F\cap G)=1$ ou bien $\dim(F\cap G)=2$.

   Supposons que $\dim(F\cap G)$ soit égale à 2. Comme $F\cap G\subset G$ on aurait dans ce cas $F\cap G=G$ et donc $G\subset F$. En particulier il existerait $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $v_4=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas, ainsi $\dim(F\cap G)$ n'est pas égale à 2. On peut donc conclure $\dim(F\cap G)=1$
4. Par la formule $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$, on obtient $\dim(F+G)=2+3-1=4$. Cela entraîne $F+G=\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 1102 ▲

1. Par la formule $\dim(G+H)=\dim(G)+\dim(H)-\dim(G\cap H)$, on sait que $\dim(G+H)\leqslant\dim(G)+\dim(H)$. Pour $G=\operatorname{Im}u$ et $H=\operatorname{Im}v$ on obtient : $\dim(\operatorname{Im}u+\operatorname{Im}v)\leqslant\dim\operatorname{Im}u+\dim\operatorname{Im}v$. Or $\operatorname{Im}(u+v)\subset\operatorname{Im}u+\operatorname{Im}v$. Donc $\operatorname{rg}(u+v)\leqslant\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)$.
2. On applique la formule précédente à $u+v$ et $-v$: $\operatorname{rg}((u+v)+(-v))\leqslant\operatorname{rg}(u+v)+\operatorname{rg}(-v)$, or $\operatorname{rg}(-v)=\operatorname{rg}(v)$ donc $\operatorname{rg}(u)\leqslant\operatorname{rg}(u+v)+\operatorname{rg}(v)$. Donc $\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)\leqslant\operatorname{rg}(u+v)$. On recommence en échangeant u et v pour obtenir : $|\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)|\leqslant\operatorname{rg}(u+v)$.

Correction de l'exercice 1115 ▲

codim $H=0$: supplémentaire = $\{\vec{0}\}$.
codim $H=p$: Soit $\vec{u}\in E\setminus(H\cup K)$: Alors $H\oplus K\vec{u}$ et $K\oplus K\vec{u}$ ont un supplémentaire commun, L, donc H et K ont un supplémentaire commun : $L\oplus K\vec{u}$.

Correction de l'exercice 1116 ▲

• e_4 et e_5 ne sont clairement pas colinéaires. Donc (e_4,e_5) est une famille libre et $\dim G=\text{rg}\,(e_4,e_5)=2$. Ensuite, puisque e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, on a $2\leqslant \dim F\leqslant 3$. Soit alors $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$.

$$\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu+2\nu=0\quad(1)\\ 2\lambda+\mu+\nu=0\quad(2)\\ 3\lambda+\mu+\nu=0\quad(3)\\ 4\lambda+3\mu+\nu=0\quad(4)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=0\ ((3)-(2))\\ \nu-\lambda=0\ ((1)-(2))\\ \lambda+\mu+2\nu=0\ (1)\end{array}\right.\Rightarrow\lambda=\mu=\nu=0.$$

On a montré que : $\forall(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$, $(\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3=0\Rightarrow\lambda=\mu=\nu=0)$. (e_1,e_2,e_3) est donc libre et $\dim F=\text{rg}\,(e_1,e_2,e_3)=3$. • Comme $F\subset F+G$, $\dim\,(F+G)\geqslant 3$ ou encore $\dim\,(F+G)=3$ ou 4. De plus :

$$\dim\,(F+G)=3\Leftrightarrow F=F+G\Leftrightarrow G\subset F\Leftrightarrow\{e_4,e_5\}\subset F.$$

On cherche alors $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$ tel que $e_4=\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3$ ce qui fournit le système :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu+2\nu=-1\quad(1)\\ 2\lambda+\mu+\nu=0\quad(2)\\ 3\lambda+\mu+\nu=-1\quad(3)\\ 4\lambda+3\mu+\nu=2\quad(4)\end{array}\right..$$

$(3)-(2)$ fournit $\lambda=-1$ puis $(1)-(2)$ fournit $\nu=-2$ puis (2) fournit $\mu=4$. Maintenant, (4) n'est pas vérifiée car $4\times(-1)+3\times4-2=6\neq2$. Le système proposé n'admet pas de solution et donc $e_4\notin\text{Vect}(e_1,e_2,e_3)=F$. Par suite, $\dim\,(F+G)=4$. Enfin,

$$\dim\,(F\cap G)=\dim F+\dim G-\dim\,(F+G)=3+2-4=1.$$

$$\boxed{\dim(F)=3,\ \dim(G)=2,\ \dim(F+G)=4\text{ et }\dim(F\cap G)=1.}$$

Correction de l'exercice 1117 ▲

On a $H_1\subset H_1+H_2$ et donc $\dim\,(H_1+H_2)\geqslant n-1$ ou encore $\dim\,(H_1+H_2)\in\{n-1,n\}$. Donc

$$\dim\,(H_1\cap H_2)=\dim H_1+\dim H_2-\dim\,(H_1+H_2)=\left\{\begin{array}{l}(n-1)+(n-1)-(n-1)=n-1\\ \quad\text{ou}\\ (n-1)+(n-1)-n=n-2\end{array}\right..$$

Maintenant, si $\dim\,(H_1+H_2)=n-1=\dim H_1=\dim H_2$, alors $H_1=H_1+H_2=H_2$ et donc en particulier, $H_1=H_2$. Réciproquement, si $H_1=H_2$ alors $H_1+H_2=H_1$ et $\dim\,(H_1+H_2)=n-1$. En résumé, si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, $\dim\,(H_1\cap H_2)=n-2$ et bien sûr, si $H_1=H_2$, alors $\dim\,(H_1\cap H_2)=n-1$. Si $n=2$, les hyperplans sont des droites vectorielles et l'intersection de deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel est de dimension 0, c'est-à-dire réduite au vecteur nul. Si $n=3$, les hyperplans sont des plans vectoriels et l'intersection de deux plans vectoriels distincts de l'espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

Correction de l'exercice 1118 ▲

Soit f l'application de $F\times G$ dans E qui à un élément (x,y) de $F\times G$ associe $x+y$.
f est clairement linéaire et d'après le thèorème du rang

$$\dim(F\times G)=\dim(\text{Ker}f)+\dim(\text{Im}f) \text{ avec } \dim(FxG)=\dim F+\dim G \text{ et } \dim(\text{Im}f)=\dim(F+G).$$

Il reste à analyser $\text{Ker}f$.
Soit $(x,y)\in E^2$. (x,y) est élément de $\text{Ker}f$ si et seulement si x est dans F, y est dans G et $x+y=0$ ou encore si et seulement si x et y sont dans $F\cap G$ et $y=-x$. Donc $\text{Ker}f=\{(x,-x),\ x\in F\cap G\}$.
Montrons enfin que $\text{Ker}f$ est isomorphe à $F\cap G$. Soit φ l'application de $F\cap G$ dans $\text{Ker}f$ qui à l'élément x de $F\cap G$ associe $(x,-x)$ dans $\text{Ker}f$. φ est clairement une application linéaire, clairement injective et clairement surjective. Donc φ est un isomorphisme de $F\cap G$ sur $\text{Ker}f$ et en particulier $\dim(\text{Ker}f)=\dim(F\cap G)$.
Finalement

$$\boxed{\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).}$$

Correction de l'exercice 1119 ▲

$$\begin{aligned}\dim(F+G+H)&=\dim((F+G)+H)=\dim(F+G)+\dim H-\dim((F+G)\cap H)\\&=\dim F+\dim G+\dim H-\dim(F\cap G)-\dim((F+G)\cap H).\end{aligned}$$

Maintenant , $F\cap H+G\cap H\subset(F+G)\cap H$ (car si x est dans $F\cap H+G\cap H$ il existe y dans F et dans H et z dans G et dans H tel que $x=y+z$ et x est bien dans $F+G$ et aussi dans H). Donc

$$\begin{aligned}\dim((F+G)\cap H)&\geqslant\dim(F\cap H+G\cap H)=\dim(F\cap H)+\dim(G\cap H)-\dim((F\cap H)\cap(G\cap H))\\&=\dim(F\cap H)+\dim(G\cap H)-\dim(F\cap G\cap H)\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\dim(F+G+H)\leqslant\dim F+\dim G+\dim H-\dim(F\cap G)-\dim(F\cap H)-\dim(G\cap H)+\dim(F\cap G\cap H).}$$

Le cas de trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distinctes fournit un cas d'inégalité stricte.

Correction de l'exercice 1120 ▲

Montrons par récurrence que $\forall n\geqslant 2$, $\dim(F_1+\ldots+F_n)\leqslant\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_n)$.
• Pour $n=2$, $\dim(F_1+F_2)=\dim(F_1)+\dim(F_2)-\dim(F_1\cap F_2)\leqslant\dim(F_1)+\dim(F_2)$.
• Soit $n\geqslant 2$. Supposons que si $F_1,\ldots,F_n$ sont n sous-espaces de E, $\dim(F_1+\ldots+F_n)\leqslant\dim(F_1)+\dim(F_n)$.
Soient $F_1,\ldots,F_{n+1}$ $n+1$ sous-espaces de E.

$$\begin{aligned}\dim(F_1+F_2+...+F_{n+1})&\leqslant\dim(F_1+...+F_n)+\dim(F_{n+1})\ \text{(d'après le cas } n=2)\\&\leqslant\dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1})\ \text{(par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.
On sait que si la somme $F_1+\ldots+F_n$ est directe, on a $\dim(F_1+\ldots+F_n)=\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_n)$.
Montrons par récurrence que $\forall n\geqslant, 2$ $[\dim(F_1+...+F_n)=\dim F_1+...+\dim F_n]\Rightarrow$ la somme $F_1+\ldots+F_n$ est directe].
• Pour n=2 , d'après le 1119, $\dim(F_1+F_2)=\dim(F_1)+\dim(F_2)\Rightarrow\dim(F_1\cap F_2)=0\Rightarrow F_1\cap F_2=\{0\}$.
• Soit $n\geqslant 2$. Soient $F_1,...,F_{n+1}$ $n+1$ sous-espaces de E tels que $\dim(F_1+...+F_{n+1})=\dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1})$.
On sait que

$$\begin{aligned}\dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1})&=\dim(F_1+...+F_{n+1})\\&=\dim(F_1+...+F_n)+\dim(F_{n+1})-\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1})\\&\leqslant\dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1})-\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1}),\end{aligned}$$

et donc $\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1}) \leqslant 0$ puis $\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1}) = 0$. Par suite $(F_1+...+F_n)\cap F_{n+1} = \{0\}$ et aussi $\dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1}) = \dim(F_1+...+F_n)+\dim(F_{n+1})$ et donc $\dim(F_1+...+F_n) = \dim(F_1)+...+\dim(F_n)$.
Mais alors, par hypothèse de récurrence, la somme $F_1+...+F_n$ est directe et si l'on rappelle que $(F_1+...+F_n)\cap F_{n+1} = \{0\}$, on a montré que la somme $F_1+...+F_{n+1}$ est directe.
Le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 1121 ▲

Soit $n \geqslant 3$. Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, si H_1,..., H_k sont k hyperplans de E, alors $\dim(H_1 \cap ... \cap H_k) \geqslant n-k$.
• Pour $k = 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E.
$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1)+\dim(H_2)-\dim(H_1+H_2) \geqslant (n-1)+(n-1)-n = n-2$.
• Soit $k \in [\![2, n-3]\!]$. Supposons que la dimension d'une intersection de k hyperplans de E soit supérieure ou égale à $n-k$.
Soient H_1,..., H_k, H_{k+1} $k+1$ hyperplans de E.

$$\dim(H_1 \cap ... \cap H_k \cap H_{k+1}) = \dim(H_1 \cap ... \cap H_k)+\dim(H_{k+1})-\dim((H_1 \cap ... \cap H_k)+H_{k+1}) \geqslant \\ (n-k)+(n-1)-n = n-(k+1),$$

ce qui démontre le résultat par récurrence.
Pour $k = n-1$, on obtient en particulier $\dim(H_1 \cap ... \cap H_{n-1}) \geqslant n-(n-1) = 1 > 0$ et donc $H_1 \cap ... \cap H_{n-1} \neq \{0\}$.

Correction de l'exercice 1122 ▲

Si $m = n$, c'est immédiat.
Supposons $m < n$.

$$\begin{aligned} r = \dim(\text{Vect}(x_1,...,x_n)) &= \dim\left(\text{Vect}(x_1,...,x_m)+\text{Vect}(x_{m+1},...x_n)\right) \\ &\leqslant \dim(\text{Vect}(x_1,...,x_m))+\dim(\text{Vect}(x_{m+1},...,x_n)) \\ &\leqslant s+(n-m) \end{aligned}$$

et donc $s \geqslant r+m-n$. On a l'égalité si et seulement si chaque inégalité est une égalité, c'est à dire si et seulement si $\text{Vect}(x_1,...,x_m)\cap\text{Vect}(x_{m+1},...x_n) = \{0\}$ (pour la première) et la famille $(x_{m+1},...,x_n)$ est libre (pour la deuxième).

Correction de l'exercice 1123 ▲

$\text{Im}(f+g) = \{f(x)+g(x),\ x \in E\} \subset \{f(x)+g(x'),\ (x,x') \in E^2\} = \text{Im}f+\text{Im}g$. Donc

$$\text{rg}(f+g) \leqslant \dim(\text{Im}f+\text{Im}g) \leqslant \text{rg}f+\text{rg}g$$

puis $\text{rg}f = \text{rg}((f+g)+(-g)) \leqslant \text{rg}(f+g)+\text{rg}(-g) = \text{rg}(f+g)+\text{rg}g$ (car $\text{Im}(-g) = \{-g(x),\ x \in E\} = \{g(-x),\ x \in E\} = \{g(x'),\ x' \in E\} = \text{Im}g$) et donc $\text{rg}(f+g) \geqslant \text{rg}f-\text{rg}g$. De même , en échangeant les rôles de f et g, $\text{rg}(f+g) \geqslant \text{rg}g-\text{rg}f$ et finalement $\text{rg}(f+g) \geqslant |\text{rg}f-\text{rg}g|$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2,\ |\text{rg}f-\text{rg}g| \leqslant \text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}f+\text{rg}g.}$$

Correction de l'exercice 1124 ▲

$\text{Im}(g\circ f) = g(f(E)) \subset g(F)$ fournit $\text{rg}(gof) \leqslant \text{rg}g$.
Soit $g' = g_{/f(E)}$. D'après le théorème du rang, on a

$$\text{rg}f = \dim(f(E)) = \dim\text{Ker}g'+\dim\text{Im}g' \geqslant \dim\text{Im}g') = \text{rg}(g\circ f)$$

et donc $\mathrm{rg}(g\circ f)\leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}f,\mathrm{rg}g\}$.
A partir du théorème du rang, on voit que l'inégalité $\mathrm{rg}f+\mathrm{rg}g-\dim F\leqslant \mathrm{rg}(g\circ f)$ est équivalente à l'inégalité $\dim(\mathrm{Ker}(g\circ f))\leqslant \dim\mathrm{Ker}f+\dim\mathrm{Ker}g$.
Soit $f'=f_{/\mathrm{Ker}(g\circ f)}$. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g\circ f))=\dim\mathrm{Ker}f'+\dim\mathrm{Im}f'$. Mais $\mathrm{Ker}f'\subset \mathrm{Ker}f$ puis $\mathrm{Im}f'=\{f(x)/\ x\in E \text{ et } g(f(x))=0\}\subset\{y\in F/\ g(y)=0\}=\mathrm{Ker}g$ et finalement $\dim\mathrm{Ker}(g\circ f)\leqslant \dim\mathrm{Ker}f+\dim\mathrm{Ker}g$.

$$\boxed{\forall (f,g)\in\mathscr{L}(E,F)\times\mathscr{L}(F,G),\ \mathrm{rg}f+\mathrm{rg}g-\dim F\leqslant \mathrm{rg}(g\circ f)\leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}f,\mathrm{rg}g\}.}$$

Correction de l'exercice 1127 ▲

1. f_1 est linéaire. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $(x',y')\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x',y+y'\big)\\
&= \big(2(x+x')+(y+y'),(x+x')-(y+y')\big)\\
&= \big(2x+y+2x'+y',x-y+x'-y'\big)\\
&= \big(2x+y,x-y\big)+\big(2x'+y',x'-y'\big)\\
&= f_1(x,y)+f_1(x',y')
\end{aligned}$$

   Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda\cdot(x,y)\big)=f_1\big(\lambda x,\lambda y\big)=\big(2\lambda x+\lambda y,\lambda x-\lambda y\big)=\lambda\cdot\big(2x+y,x-y\big)=\lambda\cdot f_1(x,y).$$

2. f_2 n'est pas linéaire, en effet par exemple $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ n'est pas égal à $f_2(2,2,0)$.
3. f_3 est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout (x,y,z) et (x',y',z') alors $f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big)=f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$. Et ensuite que pour tout (x,y,z) et λ on a $f_3\big(\lambda\cdot(x,y,z)\big)=\lambda\cdot f_3(x,y,z)$.
4. f_4 est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout (x,y) et (x',y') alors $f_4\big((x,y)+(x',y')\big)=f_4(x,y)+f_4(x',y')$. Et ensuite que pour tout (x,y) et λ on a $f_4\big(\lambda\cdot(x,y)\big)=\lambda\cdot f_4(x,y)$.
5. f_5 est linéaire : soient $P,P'\in\mathbb{R}_3[X]$ alors

$$\begin{aligned}
f_5\big(P+P'\big) &= \big((P+P')(-1),(P+P')(0),(P+P')(1)\big)\\
&= \big(P(-1)+P'(-1),P(0)+P'(0),P(1)+P'(1)\big)\\
&= \big(P(-1),P(0),P(1)\big)+\big(P'(-1),P'(0),P'(1)\big)\\
&= f_5(P)+f_5(P')
\end{aligned}$$

   Et si $P\in\mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_5\big(\lambda\cdot P\big) &= \big((\lambda P)(-1),(\lambda P)(0),(\lambda P)(1)\big)\\
&= \big(\lambda\times P(-1),\lambda\times P(0),\lambda\times P(1)\big)\\
&= \lambda\cdot\big(P(-1),P(0),P(1)\big)\\
&= \lambda\cdot f_5(P)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1128 ▲

Montrons que la famille $\{x,\phi(x),\phi^2(x),\dots,\phi^{n-1}(x)\}$ est libre. Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_0x+\lambda_1\phi(x)+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)=0$. Alors : $\phi^{n-1}\big(\lambda_0x+\lambda_1\phi(x)+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big)=0$. Mais comme de plus $\phi^n=0$, on a

l'égalité $\phi^{n-1}\left(\lambda_0 x+\lambda_1\phi(x)+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\right)=\phi^{n-1}(\lambda_0 x)+\phi^n\left(\lambda_1 x+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-2}(x)\right)=\phi^{n-1}(\lambda_0 x)=\lambda_0\phi^{n-1}(x)$. Comme $\phi^{n-1}(x)\neq 0$ on obtient $\lambda_0=0$.
En calculant ensuite $\phi^{n-2}\left(\lambda_1\phi(x)+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\right)$ on obtient $\lambda_1=0$ puis, de proche en proche, $\lambda_2=2,\ldots,\lambda_{n-1}=0$. La famille $\{x,\phi(x),\ldots,\phi^{n-1}(x)\}$ est donc libre. En plus elle compte n vecteurs, comme $\dim E=n$ elle est libre et maximale et forme donc une base de E.

Correction de l'exercice 1134 ▲

3. $|a|\neq|b|$.

Correction de l'exercice 1135 ▲

1. Si f existe alors nécessairement, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$f((x,y,z))=xf((1,0,0))+yf((0,1,0))+zf((0,0,1))=x(1,1)+y(0,1)+z(-1,1)=(x-z,x+y+z).$$

On en déduit l'unicité de f.
Réciproquement, f ainsi définie vérifie bien les trois égalités de l'énoncé. Il reste donc à se convaincre que f est linéaire.
Soient $((x,y,z),(x',y',z'))\in(\mathbb{R}^3)^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z'))&=f((\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z'))\\&=((\lambda x+\mu x')-(\lambda z+\mu z'),(\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z'))\\&=\lambda(x-z,x+y+z)+\mu(x'-z',x'+y'+z')\\&=\lambda f((x,y,z))+\mu f((x',y',z')).\end{aligned}$$

f est donc linéaire et convient. On en déduit l'existence de f. On a alors $f((3,-1,4))=(3-4,3-1+4)=(-1,6)$.
Remarque. La démonstration de la linéarité de f ci-dessus est en fait superflue car le cours donne l'expression générale d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

2. Détermination de $\mathrm{Ker} f$.
Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\Leftrightarrow f((x,y,z))=(0,0)\Leftrightarrow(x-z,x+y+z)=(0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-z=0\\x+y+z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=x\\y=-2x\end{array}\right.$$

Donc, $\mathrm{Ker} f=\{(x,-2x,x),\ x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,-2,1),\ x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,-2,1))$. La famille $((1,-2,1))$ engendre $\mathrm{Ker} f$ et est libre. Donc, la famille $((1,-2,1))$ est une base de $\mathrm{Ker} f$. Détermination de $\mathrm{Im} f$.
Soit $(x',y')\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(x',y')\in\mathrm{Im} f&\Leftrightarrow\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ f((x,y,z))=(x',y')\\&\Leftrightarrow\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l}x-z=x'\\x+y+z=y'\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l}z=x-x'\\y=-2x+x'+y'\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\text{le système d'inconnue }(x,y,z)\ :\ \left\{\begin{array}{l}z=x-x'\\y=-2x+x'+y'\end{array}\right.\ \text{a au moins une solution.}\end{aligned}$$

Or, le triplet $(0,x'+y',-x')$ est solution et le système proposé admet une solution. Par suite, tout (x',y') de $\mathbb{R}^2$ est dans $\mathrm{Im} f$ et finalement, $\mathrm{Im} f=\mathbb{R}^2$.
Détermination d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$.

Posons $e_1 = (1,-2,1)$, $e_2 = (1,0,0)$ et $e_3 = (0,1,0)$ puis $F = \mathrm{Vect}(e_2,e_3)$ et montrons que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus F$.
Tout d'abord, $\mathrm{Ker} f \cap F = \{0\}$. En effet :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f \cap F &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \ (x,y,z) = ae_1 = be_2 + ce_3 \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} x = a = b \\ y = -2a = c \\ z = a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z = 0\end{aligned}$$

Vérifions ensuite que $\mathrm{Ker} f + F = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f + F &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \ (x,y,z) = ae_1 + be_2 + ce_3 \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} a + b = x \\ -2a + c = y \\ a = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} a = z \\ b = x - z \\ c = y + 2z \end{array}\right.\end{aligned}$$

Le système précédent (d'inconnue (a,b,c)) admet donc toujours une solution et on a montré que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f + F$. Finalement, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus F$ et F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^3$.
Vérifions enfin que F est isomorphe à $\mathrm{Im} f$. Mais, $F = \{(x,y,0),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,0) & \mapsto & (x,y) \end{array}$ est clairement un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im} f (= \mathbb{R}^2)$.

Correction de l'exercice 1136 ▲

1. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même. Soient alors $(P,Q) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.

2. Soit $P \in E$. $P \in \mathrm{Ker}\ \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$. Montrons alors que P est constant. Soit $Q = P - P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2,... (car $P(0) = P(1) = P(2) = ...$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(0)$. Par suite, P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\mathrm{Ker}\ \varphi$ et donc

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

Pour déterminer $\mathrm{Im}\ \varphi$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1.\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Im}\ (\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } (\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker } (\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

et donc $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Correction de l'exercice 1137 ▲

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda (z + a\bar{z}) + \mu (z' + a\overline{z'}) = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$-linéaire. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \text{Ker } f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ, $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\text{Ker } f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\text{Im } f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha+\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\text{Ker } f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, $\text{Im } f$ est une droite vectorielle et pour déterminer $\text{Im } f$, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, $\text{Im } f = \text{Vect}(1+a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im } (z)$ et $\text{Im } f = i\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1138 ▲

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f((x, y)) = (x', y')$.

$$f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y \end{array} \right. .$$

2. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) = (\alpha \frac{z+\bar{z}}{2} + \gamma \frac{z-\bar{z}}{2i}) + i(\beta \frac{z+\bar{z}}{2} + \delta \frac{z-\bar{z}}{2i}) \\ &= \left(\frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2} \right) z + \left(\frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2} \right) \bar{z} = az + b\bar{z} \end{aligned}$$

où $a = \frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}$ et $b = \frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}$.

3. Réciproquement, si $z' = az + b\bar{z}$, en posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ où $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$, on obtient :

$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) = (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y)$$

et donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y \\ y' = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y \end{array} \right. .$$

Correction de l'exercice 1142 ▲

1. Aucun problème...

2. Par définition de f et de ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est

$$\operatorname{Im} f = \{f(x_1,x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = \{x_1+x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = E_1+E_2.$$

Pour le noyau :

$$\ker f = \{(x_1,x_2) \mid f(x_1,x_2) = 0\} = \{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2 = 0\}$$

Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1,x_2) \in \ker f$, vérifie $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 \in E_2$. Donc $x_1 \in E_1 \cap E_2$. Réciproquement si $x \in E_1 \cap E_2$, alors $(x,-x) \in \ker f$. Donc

$$\ker f = \{(x,-x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}.$$

De plus l'application $x \mapsto (x,-x)$ montre que $\ker f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

3. Le théorème du rang s'écrit :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim(E_1 \times E_2).$$

Compte tenu de l'isomorphisme entre $\ker f$ et $E_1 \cap E_2$ on obtient :

$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1+E_2) = \dim(E_1 \times E_2).$$

Mais $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle le théorème des quatre dimensions :

$$\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Correction de l'exercice 1149 ▲

Montrons ceci par récurence : Pour $n = 1$, l'assertion est triviale : $x \notin \ker \varphi \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$. Supposons que si $x \notin \ker \varphi$ alors $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, $(n \geqslant 2)$. Fixons $x \notin \ker \varphi$, Alors par hypothèses de récurrence $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, mais $\varphi^{n-1}(x) = \varphi(\varphi^{n-2}(x)) \in \operatorname{Im} \varphi$ donc $\varphi^{n-1}(x) \notin \ker \varphi$ grâce à l'hypothèse sur φ. Ainsi $\varphi(\varphi^{n-1}(x)) \neq 0$, soit $\varphi^n(x) \neq 0$. Ce qui termine la récurrence.

Correction de l'exercice 1151 ▲

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $\ker f = \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \ker f$, cela entraîne $f(f(x)) = 0$; donc $f^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang $\dim \ker f + \operatorname{rg}(f) = n$, mais $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, ainsi $2\operatorname{rg}(f) = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ car pour $y \in \operatorname{Im} f$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2\operatorname{rg}(f) = n$ alors la formule du rang donne $\dim \ker f = \operatorname{rg}(f)$ c'est-à-dire $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$. Nous savons donc que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\ker f$ mais ces espaces sont de même dimension donc sont égaux : $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Correction de l'exercice 1155 ▲

On va montrer $g(\ker f) \subset \ker f$. Soit $y \in g(\ker f)$. Il existe $x \in \ker f$ tel que $y = g(x)$. Montrons $y \in \ker f$:

$$f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0.$$

On fait un raisonnement similaire pour montrer $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$. Soit $z \in g(\operatorname{Im} f)$, il existe $y \in \operatorname{Im} f$ tel que $z = g(y)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f.$$

Correction de l'exercice 1157 ▲

Pour montrer l'égalité $\ker f \cap \operatorname{Im} f = f(\ker f^2)$, nous montrons la double inclusion.

Soit $y \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, alors $f(y) = 0$ et il existe x tel que $y = f(x)$. De plus $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0$ donc $x \in \ker f^2$. Comme $y = f(x)$ alors $y \in f(\ker f^2)$. Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset f(\ker f^2)$.
Pour l'autre inclusion, nous avons déjà que $f(\ker f^2) \subset f(E) = \operatorname{Im} f$. De plus $f(\ker f^2) \subset \ker f$, car si $y \in f(\ker f^2)$ il existe $x \in \ker f^2$ tel que $y = f(x)$, et $f^2(x) = 0$ implique $f(y) = 0$ donc $y \in \ker f$. Par conséquent $f(\ker f^2) \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

Correction de l'exercice 1159 ▲

1. Par exemple $f(x,y) = (0,x)$ alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
2. Par exemple l'identité : $f(x,y) = (x,y)$. En fait un petit exercice est de montrer que les seules applications possibles sont les applications bijectives (c'est très particulier aux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).
3. L'application nulle : $f(x,y) = (0,0)$. Exercice : c'est la seule possible !

Correction de l'exercice 1162 ▲

1. Comment est définie ϕ à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour $x \in E$ alors x s'écrit dans la base $\{e_1,e_2,e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Et ϕ est définie sur E par la formule
$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$
Soit ici :
$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3.$$
Cette définition rend automatiquement ϕ linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincu !).
2. On cherche à savoir si ϕ est injective. Soit $x \in E$ tel que $\phi(x) = 0$ donc $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0$. Comme $\{e_1,e_2,e_3\}$ est une base alors tous les coefficients sont nuls :
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad t\alpha_3 = 0.$$
Si $t \neq 0$ alors en résolvant le système on obtient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Donc $x = 0$ et ϕ est injective.
Si $t = 0$, alors ϕ n'est pas injective, en résolvant le même système on obtient des solutions non triviales, par exemple $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Donc pour $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ on obtient $\phi(x) = 0$.
3. Pour la surjectivité on peut soit faire des calculs, soit appliquer la formule du rang. Examinons cette deuxième méthode. ϕ est surjective si et seulement si la dimension de $\operatorname{Im}\phi$ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée (ici E de dimension 3). Or on a une formule pour $\dim \operatorname{Im}\phi$:
$$\dim\ker\phi + \dim\operatorname{Im}\phi = \dim E.$$
Si $t \neq 0$, ϕ est injective donc $\ker\phi = \{0\}$ est de dimension 0. Donc $\dim\operatorname{Im}\phi = 3$ et ϕ est surjective.
Si $t = 0$ alors ϕ n'est pas injective donc $\ker\phi$ est de dimension au moins 1 (en fait 1 exactement), donc $\dim\operatorname{Im}\phi \leqslant 2$. Donc ϕ n'est pas surjective.
On remarque que ϕ est injective si et seulement si elle est surjective. Ce qui est un résultat du cours pour les applications ayant l'espace de départ et d'arrivée de même dimension (finie).

Correction de l'exercice 1164 ▲

Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire “à la main”.
Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang : $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim E$ pour $f : E \to F$. Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

1. f_1 est injective, surjective (et donc bijective).

(a) Faisons tout à la main. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y) \in \ker f_1 &\iff f_1(x,y) = (0,0) \iff (2x+y, x-y) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_1 = \{(0,0)\}$ et donc f_1 est injective.

(b) Calculons l'image. Quels éléments (X,Y) peuvent s'écrire $f_1(x,y)$?

$$\begin{aligned}f_1(x,y) = (X,Y) &\iff (2x+y, x-y) = (X,Y) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=X \\ x-y=Y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{X+Y}{3} \\ y = \frac{X-2Y}{3} \end{cases} \\ &\iff (x,y) = \left(\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3}\right)\end{aligned}$$

Donc pour n'importe quel $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y) = (\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3})$ qui vérifie donc $f_1(x,y) = (X,Y)$. Donc $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^2$. Ainsi f_1 est surjective.

(c) Conclusion : f_1 est injective et surjective donc bijective.

2. (a) Calculons d'abord le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \ker f_2 &\iff f_2(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\iff (2x+y+z, y-z, x+y) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_2 = \operatorname{Vect}(-1,1,1)$ et donc f_2 n'est pas injective.

(b) Maintenant nous allons utiliser que $\ker f_2 = \operatorname{Vect}(-1,1,1)$, autrement dit $\dim \ker f_2 = 1$. La formule du rang, appliquée à $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim \ker f_2 + \dim \operatorname{Im} f_2 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_2 = 2$. Nous allons trouver une base de $\operatorname{Im} f_2$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs linéairement indépendants. Prenons par exemple $v_1 = f_2(1,0,0) = (2,0,1) \in \operatorname{Im} f_2$ et $v_2 = f_2(0,1,0) = (1,1,1) \in \operatorname{Im} f_2$. Par construction ces vecteurs sont dans l'image de f_2 et il est clair qu'ils sont linéairement indépendants. Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f_2$.

(c) f_2 n'est ni injective, ni surjective (donc pas bijective).

3. Sans aucun calcul on sait $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieur à l'espace de départ.

(a) Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \ker f_3 &\iff f_3(x,y) = (0,0,0,0)\\
&\iff (y,0,x-7y,x+y) = (0,0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} y=0\\ 0=0\\ x-7y=0\\ x+y=0 \end{cases}\\
&\iff \cdots\\
&\iff (x,y) = (0,0)
\end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_3 = \{(0,0)\}$ et donc f_3 est injective.

(b) La formule du rang, appliquée à $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim \ker f_3 + \dim \operatorname{Im} f_3 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$. Ainsi $\operatorname{Im} f_3$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, f_3 n'est pas surjective.

Par décrire $\operatorname{Im} f_3$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\operatorname{Im} f_3$. Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1 = f(1,0) = (0,0,1,1)$. Pour v_2 on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de v_1. Essayons $v_2 = f(0,1) = (1,0,-7,1)$. Par construction $v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f$; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$ alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f_3$.

Ainsi $\operatorname{Im} f_3 = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2\} = \big\{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,-7,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}$.

4. $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension strictement plus petit et donc f_4 ne peut être injective.

(a) Calculons le noyau. Écrivons un polynôme P de degré $\leqslant 3$ sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors $P(0) = d$, $P(1) = a+b+c+d$, $P(-1) = -a+b-c+d$.

$$\begin{aligned}
P(X) \in \ker f_4 &\iff \big(P(-1), P(0), P(1)\big) = (0,0,0)\\
&\iff (-a+b-c+d, d, a+b+c+d) = (0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} -a+b-c+d=0\\ d=0\\ a+b+c+d=0 \end{cases}\\
&\iff \cdots\\
&\iff \begin{cases} a=-c\\ b=0\\ d=0 \end{cases}\\
&\iff (a,b,c,d) = (t,0,-t,0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi le noyau $\ker f_4 = \big\{tX^3 - tX \mid t \in \mathbb{R}\big\} = \operatorname{Vect}\{X^3 - X\}$. f_4 n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.

(b) La formule du rang pour $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim \ker f_4 + \dim \operatorname{Im} f_4 = \dim \mathbb{R}_3[4]$. Autrement dit $1 + \dim \operatorname{Im} f_4 = 4$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_4 = 3$. Ainsi $\operatorname{Im} f_4$ est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{Im} f_4 = \mathbb{R}^3$. Conclusion f_4 est surjective.

Correction de l'exercice 1167 ▲

---

1. Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la division euclidienne de AP par B s'écrit $AP = Q \cdot B + R$, donc en multipliant par λ on obtient : $A \cdot (\lambda P) = (\lambda Q)B + \lambda R$. ce qui est la division euclidienne de $A \cdot (\lambda P)$ par B, donc si $f(P) = R$ alors $f(\lambda P) = \lambda R$. Donc $f(\lambda P) = \lambda f(P)$.
   Soient $P, P' \in E$. On écrit les divisions euclidiennes :
   $$AP = Q \cdot B + R, \quad AP' = Q' \cdot B + R'.$$
   En additionnant :
   $$A(P+P') = (Q+Q')B + (R+R')$$
   qui est la division euclidienne de $A(P+P')$ par B. Donc si $f(P) = R$, $f(P') = R'$ alors $f(P+P') = R+R' = f(P)+f(P')$.
   Donc f est linéaire.
2. Sens $\Rightarrow$. Supposons f est bijective, donc en particulier f est surjective, en particulier il existe $P \in E$ tel que $f(P) = 1$ (1 est le polynôme constant égale à 1). La division euclidienne est donc $AP = BQ + 1$, autrement dit $AP - BQ = 1$. Par le théorème de Bézout, A et B sont premiers entre eux.
3. Sens $\Leftarrow$. Supposons A, B premiers entre eux. Montrons que f est injective. Soit $P \in E$ tel que $f(P) = 0$. Donc la division euclidienne s'écrit : $AP = BQ + 0$. Donc B divise AP. Comme A et B sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, alors B divise P. Or B est de degré $n+1$ et P de degré moins que n, donc la seule solution est $P = 0$. Donc f est injective. Comme $f : E \longrightarrow E$ est injective et E est de dimension finie, alors f est bijective.

Correction de l'exercice 1171 ▲

1. Montrons que si ϕ est un isomorphisme, l'image de toute base de E est une base de F : soit $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et nommons $\mathscr{B}'$ la famille $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$.
   (a) $\mathscr{B}'$ est libre. Soient en effet $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\phi(e_1) + \cdots + \lambda_n\phi(e_n) = 0$. Alors $\phi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$ donc, comme ϕ est injective, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ puis, comme $\mathscr{B}$ est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   (b) $\mathscr{B}'$ est génératrice. Soit $y \in F$. Comme ϕ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \phi(x)$. Comme $\mathscr{B}$ est génératrice, on peut choisir $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $y = \lambda_1\phi(e_1) + \cdots + \lambda_n\phi(e_n)$.
2. Supposons que l'image par ϕ de toute base de E soit une base F. Soient $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ la base $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$.
   (a) $\operatorname{Im}\phi$ contient $\mathscr{B}'$ qui est une partie génératrice de F. Donc ϕ est surjective.
   (b) Soit maintenant $x \in E$ tel que $\phi(x) = 0$. Comme $\mathscr{B}$ est une base, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $\phi(x) = 0 = \lambda_1\phi(e_1) + \cdots + \lambda_n\phi(e_n)$ donc puisque $\mathscr{B}'$ est libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En conséquence si $\phi(x) = 0$ alors $x = 0$: ϕ est injective.

En fait on montrerait de la même façon que "ϕ est un isomorphisme si et seulement si l'image par ϕ **d'une** base de E est une base de F".

Correction de l'exercice 1181 ▲

1. $\vec{u} = (\vec{u} - g \circ f(\vec{u})) + g \circ f(\vec{u})$.
2. $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$.
   $f = (f \circ g) \circ f \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f \circ g) = f(\operatorname{Im} g)$.

Correction de l'exercice 1184 ▲

1. $\varphi(v \circ w) = \varphi(v) \circ w + v \circ \varphi(w)$.
2. Par récurrence $\varphi^n(v \circ w) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi^k(v) \circ \varphi^{n-k}(w)$ donc si $v \in c_p$ et $w \in c_q$ alors $v \circ w \in c_{p+q-1}$.

Correction de l'exercice 1190 ▲

2. $\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \iff \begin{cases}\mathrm{Im}\, f\cap \mathrm{Im}\, g=\{\vec{0}_F\}\\ \mathrm{Im}(f+g)=\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g\end{cases}$

$\iff \begin{cases}\mathrm{Im}\, f\cap \mathrm{Im}\, g=\{\vec{0}_F\}\\ \forall\, \vec{x},\vec{y},\ \exists\, \vec{z} \text{ tq } f(\vec{x})+g(\vec{y})=(f+g)(\vec{z}).\end{cases}$

$\Rightarrow$: Donc $f(\vec{x}-\vec{z})=g(\vec{z}-\vec{y})=\vec{0}$. Pour $\vec{y}=\vec{0}$: $\vec{x}=(\vec{x}-\vec{z})+\vec{z}\in \mathrm{Ker} f+\mathrm{Ker} g$.
$\Leftarrow$: Soient $\vec{x}=\vec{x}_f+\vec{x}_g$ et $\vec{y}=\vec{y}_f+\vec{y}_g$: Alors $f(\vec{x})+g(\vec{y})=f(\vec{x}_g)+g(\vec{y}_f)=(f+g)(\vec{x}_g+\vec{y}_f)$.

Correction de l'exercice 1193 ▲

$\mathrm{Im}\, f\subset \mathrm{Ker} g \Rightarrow \mathrm{rg} f+\mathrm{rg} g\leqslant \dim E$.
$f+g$ est surjective $\Rightarrow \mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g=E\Rightarrow \mathrm{rg} f+\mathrm{rg} g\geqslant \dim E$.

Correction de l'exercice 1194 ▲

1. $\dim H+\dim K=\dim E$.
2. Si $H\oplus K\neq E$ alors $\mathscr{E}$ n'est pas stable pour $\circ$.

Correction de l'exercice 1197 ▲

3. $\dim \mathscr{K}=(\dim E)(\dim \mathrm{Ker} f)=\dim \mathscr{I}$, $\quad \dim(\mathscr{K}\cap\mathscr{I})=(\mathrm{rg} f)^2$.

Correction de l'exercice 1198 ▲

$(\mathrm{rg} u)(\mathrm{rg} v)$.

Correction de l'exercice 1200 ▲

1. On a toujours $\mathrm{Ker} f\subset \mathrm{Ker} f^2$.
   En effet, si x est un vecteur de $\mathrm{Ker} f$, alors $f^2(x)=f(f(x))=f(0)=0$ (car f est linéaire) et x est dans $\mathrm{Ker} f^2$.
   Montrons alors que : $[\mathrm{Ker} f=\mathrm{Ker} f^2\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}]$. Supposons que $\mathrm{Ker} f=\mathrm{Ker} f^2$ et montrons que $\mathrm{Ker} f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}$.
   Soit $x\in \mathrm{Ker} f\cap \mathrm{Im} f$. Alors, d'une part f(x) = 0 et d'autre part, il existe y élément de E tel que $x=f(y)$. Mais alors, $f^2(y)=f(x)=0$ et $y\in \mathrm{Ker} f^2=\mathrm{Ker} f$. Donc, $x=f(y)=0$. On a montré que $\mathrm{Ker} f=\mathrm{Ker} f^2\Rightarrow \mathrm{Ker} f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}$.
   Supposons que $\mathrm{Ker} f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}$ et montrons que $\mathrm{Ker} f=\mathrm{Ker} f^2$.
   Soit $x\in \mathrm{Ker} f^2$. Alors $f(f(x))=0$ et donc $f(x)\in \mathrm{Ker} f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}$. Donc, $f(x)=0$ et x est dans $\mathrm{Ker} f$. On a ainsi montré que $\mathrm{Ker} f^2\subset \mathrm{Ker} f$ et, puisque l'on a toujours $\mathrm{Ker} f\subset \mathrm{Ker} f^2$, on a finalement $\mathrm{Ker} f=\mathrm{Ker} f^2$. On a montré que $\mathrm{Ker} f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}\Rightarrow \mathrm{Ker} f=\mathrm{Ker} f^2$.
   On a toujours $\mathrm{Im} f^2\subset \mathrm{Im} f$. En effet : $y\in \mathrm{Im} f^2\Rightarrow \exists x\in E/\ y=f^2(x)=f(f(x))\Rightarrow y\in \mathrm{Im} f$.
   Supposons que $\mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2$ et montrons que $\mathrm{Ker} f+\mathrm{Im} f=E$. Soit $x\in E$. Puisque $f(x)\in \mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2$, il existe $t\in E$ tel que $f(x)=f^2(t)$. Soit alors $z=f(t)$ et $y=x-f(t)$. On a bien $x=y+z$ et $z\in \mathrm{Im} f$. De plus, $f(y)=f(x)-f(f(t))=0$ et y est bien élément de $\mathrm{Ker} f$. On a donc montré que $E=\mathrm{Ker} f+\mathrm{Im} f$.
   Supposons que $\mathrm{Ker} f+\mathrm{Im} f=E$ et montrons que $\mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2$.
   Soit $x\in E$. Il existe $(y,z)\in \mathrm{Ker} f\times \mathrm{Im} f$ tel que $x=y+z$. Mais alors $f(x)=f(z)\in \mathrm{Im} f^2$ car z est dans $\mathrm{Im} f$. Ainsi, pour tout x de E, $f(x)$ est dans $\mathrm{Im} f^2$ ce qui montre que $\mathrm{Im} f\subset \mathrm{Im} f^2$ et comme on a toujours $\mathrm{Im} f^2\subset \mathrm{Im} f$, on a montré que $\mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2$.
2. $Id-p$ projecteur $\Leftrightarrow (Id-p)^2=Id-p\Leftrightarrow Id-2p+p^2=Id-p\Leftrightarrow p^2=p\Leftrightarrow p$ projecteur.

Soit x un élément de E. $x \in \mathrm{Im}p \Rightarrow \exists y \in E/\ x = p(y)$. Mais alors $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$. Donc, $\forall x \in E$, $(x \in \mathrm{Im}p \Rightarrow p(x) = x)$.
Réciproquement, si $p(x) = x$ alors bien sûr, x est dans $\mathrm{Im}p$.
Finalement, pour tout vecteur x de E, $x \in \mathrm{Im}p \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow (Id-p)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(Id-p)$. On a montré que $\mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}(Id-p)$.
En appliquant ce qui précède à $Id-p$ qui est également un projecteur, on obtient $\mathrm{Im}(Id-p) = \mathrm{Ker}(Id-(Id-p)) = \mathrm{Ker}p$.
Enfin, puisque $p^2 = p$ et donc en particulier que $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}p^2$ et $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}p^2$, le 1) montre que $E = \mathrm{Ker}p \oplus \mathrm{Im}p$.

3.

$$\begin{aligned} p = p\circ q \text{ et } q = q\circ p &\Leftrightarrow p\circ(Id-q) = 0 \text{ et } q\circ(Id-p) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(Id-q) \subset \mathrm{Ker}p \text{ et } \mathrm{Im}(Id-p) \subset \mathrm{Ker}q \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}q \subset \mathrm{Ker}p \text{ et } \mathrm{Ker}p \subset \mathrm{Ker}q \text{ (d'après 2))} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}q. \end{aligned}$$

4. $p\circ q + q\circ p = 0 \Rightarrow p\circ q = (p\circ p)\circ q = p\circ(p\circ q) = -p\circ(q\circ p)$ et de même, $q\circ p = q\circ p\circ p = -p\circ q\circ p$. En particulier, $p\circ q = q\circ p$ et donc $0 = p\circ q + q\circ p = 2p\circ q = 2q\circ p$ puis $p\circ q = q\circ p = 0$.
La réciproque est immédiate.
$p+q$ projecteur $\Leftrightarrow (p+q)^2 = p+q \Leftrightarrow p^2+pq+qp+q^2 = p+q \Leftrightarrow pq+qp = 0 \Leftrightarrow pq = qp = 0$ (d'après ci-dessus). Ensuite, $\mathrm{Im}(p+q) = \{p(x)+q(x),\ x \in E\} \subset \{p(x)+q(y),\ (x,y) \in E^2\} = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$.
Réciproquement, soit z un élément de $\mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$. Il existe deux vecteurs x et y de E tels que $z = p(x)+q(y)$. Mais alors, $p(z) = p^2(x)+pq(y) = p(x)$ et $q(z) = qp(x)+q^2(y) = q(y)$ et donc

$$z = p(x)+p(y) = p(z)+q(z) = (p+q)(z) \in \mathrm{Im}(p+q).$$

Donc, $\mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q \subset \mathrm{Im}(p+q)$ et finalement, $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$.
$\mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q = \{x \in E/\ p(x) = q(x) = 0\} \subset \{x \in E/\ p(x)+q(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(p+q)$.
Réciproquement, si x est élément de $\mathrm{Ker}(p+q)$ alors $p(x)+q(x) = 0$. Par suite, $p(x) = p^2(x)+pq(x) = p(p(x)+q(x)) = p(0) = 0$ et $q(x) = qp(x)+q^2(x) = q(0) = 0$. Donc, $p(x) = q(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$.
Finalement, $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$.

Correction de l'exercice 1201 ▲

1. $\Leftarrow$ Soit $(u,v)((\mathscr{L}(E))^2$. On suppose qu'il existe $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u = w\circ v$. Soit x un élément de $\mathrm{Ker}v$. Alors $v(x) = 0$ et donc $u(x) = w(v(x)) = w(0) = 0$. Mais alors, x est dans $\mathrm{Ker}u$. Donc $\mathrm{Ker}v \subset Keru$.
$\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Ker}v \subset \mathrm{Ker}u$. On cherche à définir w, élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que $w\circ v = u$. Il faut définir précisément w sur $\mathrm{Im}v$ car sur $E \setminus \mathrm{Im}v$, on a aucune autre contrainte que la linéarité.
Soit y un élément de $\mathrm{Im}v$. (Il existe x élément de E tel que $y = v(x)$. On a alors envie de poser $w(y) = u(x)$ mais le problème est que y, élément de $\mathrm{Im}v$ donné peut avoir plusieurs antécédents x, x'... et on peut avoir $u(x) \neq u(x')$ de sorte que l'on n'aurait même pas défini une application w.)
Soient x et x' deux éléments de E tels que $v(x) = v(x') = y$ alors $v(x-x') = 0$ et donc $x-x' \in \mathrm{Ker}v \subset \mathrm{Ker}u$. Par suite, $u(x-x') = 0$ ou encore $u(x) = u(x')$. En résumé, pour y élément donné de $\mathrm{Im}v$, il existe x élément de E tel que $v(x) = y$. On pose alors $w(y) = u(x)$ en notant que $w(y)$ est bien uniquement défini, car ne dépend pas du choix de l'antécédent x de y par v. w n'est pas encore défini sur E tout entier. Notons F un supplémentaire quelconque de $\mathrm{Im}v$ dans E (l'existence de F est admise).
Soit X un élément de E. Il existe deux vecteurs y et z, de $\mathrm{Im}v$ et F respectivement, tels que $X = y+z$. On pose alors $w(X) = u(x)$ où x est un antécédent quelconque de y par v (on a pris pour restriction de w à F l'application nulle). w ainsi définie est une application de E dans E car, pour X donné y est uniquement défini puis $u(x)$ est uniquement défini (mais pas nécessairement x).
Soit x un élément de E et $y = v(x)$. $w(v(x)) = w(y) = w(y+0) = u(x)$ (car 1)y est dans $\mathrm{Im}v$ 2)0 est dans F 3) x est un antécédent de y par v) et donc $w\circ v = u$.
Montrons que w est linéaire. Soient, avec les notations précédentes, $X_1 = y_1+z_1$ et $X_2 = y_2+z_2$ ...

$$\begin{aligned}w(X_1+X_2) &= w((y_1+y_2)+(z_1+z_2)) = u(x_1+x_2) \quad (\text{car } y_1+y_2 = v(x_1)+v(x_2) = v(x_1+x2))\\ &= u(x_1)+u(x_2) = w(X_1)+w(X_2)\end{aligned}$$

et

$$w(\lambda X) = w(\lambda y+\lambda z) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda w(X).$$

2. On applique 1) à $u = Id$.

$$v \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}v = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker}v = \text{Ker}Id \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E)/\ w\circ v = Id.$$

Correction de l'exercice 1202 ▲

1. $\forall P \in E$, $f(P) = P'$ est un polynôme et donc f est une application de E vers E.
   $\forall (P,Q) \in E^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q)' = \lambda P'+\mu Q' = \lambda f(P)+\mu f(Q)$ et f est un endomorphisme de E.
   Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker}f \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P$ est constant. Ker$f$ n'est pas nul et f n'est pas injective.
   Soient $Q \in E$ puis P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \int_0^x Q(t)\,dt$. P est bien un polynôme tel que $f(P) = Q$. f est surjective.
   Soit $F = \{P \in E/\ P(0) = 0\}$. F est un sous espace de E en tant que noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(0)$. Ker$f\cap F = \{0\}$ car si un polynôme est constant et s'annule en 0, ce polynôme est nul. Enfin, si P est un polynôme quelconque, $P = P(0)+(P-P(0))$ et P s'écrit bien comme la somme d'un polynôme constant et d'un polynôme s'annulant en 0. Finalement $E = \text{Ker}f\oplus F$.
2. On montre facilement que g est un endomorphisme de E.
   $P \in \text{Ker}g \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x P(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$ (en dérivant). Donc, Ker$g = \{0\}$ et donc g est injective.
   Si P est dans Img alors $P(0) = 0$ ce qui montre que g n'est pas surjective. De plus, si $P(0) = 0$ alors $\int_0^x P'(t)\,dt = P(x)-P(0) = P(x)$ ce qui montre que $P = g(P')$ est dans Img et donc que Img $= \{P \in E/\ P(0) = 0\}$.

Correction de l'exercice 1203 ▲

Soit $u = (x,y,z,t) = xe_1+ye_2+ze_3+te_4 \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned}f(u) &= xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)+tf(e_4) = x(2e_1+e_3)+y(-e_2+e_4)+z(e_1+2e_3)+t(e_2-e_4)\\ &= (2x+z)e_1+(-y+t)e_2+(x+2z)e_3+(y-t)e_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x+z=0\\ -y+t=0\\ x+2z=0\\ y-t=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=z=0\\ y=t\end{array}\right..$$

Donc, Ker $f = \{(0,y,0,y),\ y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0,1,0,1))$.

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}((0,1,0,1)).}$$

Soit $u' = (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$.

$$u' = (x',y',z',t') \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} 2x+z = x' \\ -y+t = y' \\ x+2z = z' \\ y-t = t' \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3}(2x'-z') \\ z = \frac{1}{3}(-x'+2z') \\ t = y+y' \\ y'+t' = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow y' = -t'$$

(si $y' \neq -t'$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t, n'a pas de solution et si $y' = -t'$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x,y,z,t) = \left(\frac{1}{3}(2x'-z'), 0, \frac{1}{3}(-x'+2z'), y'\right)$. Donc, $\text{Im } f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ y+t = 0\} = \{(x,y,z,-y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2-e_4) + ze_3, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^4\} = \text{Vect}(e_1, e_2-e_4, e_3)$.

$$\boxed{\text{Im } f == \{(x,y,z,-y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e_1,e_2-e_4,e_3).}$$

Autre solution pour la détermination de Im f. Im $f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(2e_1+e_3, -e_2+e_4, e_1+2e_3, e_2-e_4) = \text{Vect}(2e_1+e_3, e_1+2e_3, e_2-e_4)$. Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } f) = 4-1 = 3$. Donc, $(2e_1+e_3, e_1+2e_3, e_2-e_4)$ est une base de Im f.

Correction de l'exercice 1204 ▲

Par définition, $\text{rg }(u+v) = \dim \ (\text{Im }(u+v))$.

$$\text{Im }(u+v) = \{u(x)+v(x), \ x \in E\} \subset \{u(x)+v(y), \ (x,y) \in E^2\} = \text{Im } u + \text{Im } v.$$

Donc,

$$\begin{aligned} rg(u+v) &= \dim \ (\text{Im }(u+v)) \\ &\leqslant \dim \ (\text{Im } u + \text{Im } v) = \dim \ (\text{Im } u) + \dim \ (\text{Im } v) - \dim \ (\text{Im } u \cap \ \text{Im} v) \\ &\leqslant \dim \ (\text{Im } u) + \dim \ (\text{Im } v) = \text{rg } u + \text{rg } v. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2, \ \text{rg }(u+v) \leqslant \text{rg } u + \text{rg } v.}$$

Ensuite,
$$\text{rg } u = \text{rg }(u+v-v) \leqslant \text{rg }(u+v) + \text{rg }(-v) = \text{rg }(u+v) + \text{rg } v,$$

(il est clair que $\text{Im }(-v) = \text{Im } v$) et donc $\text{rg } u - \text{rg } v \leqslant \text{rg }(u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi $\text{rg } v - \text{rg } u = \text{rg }(u+v)$ et finalement

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2, \ |\text{rg } u - \text{rg } v| \leqslant \text{rg }(u+v).}$$

Correction de l'exercice 1205 ▲

1. • **(1)⇒(2).** Si $\text{Ker } f = \text{Im } f$, alors pour tout élément x de E, $f(x)$ est dans $\text{Im } f = \text{Ker } f$ et donc $f(f(x)) = 0$. Par suite, $f^2 = 0$. De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim \ (\text{Ker } f) + \text{rg } f = 2 \text{ rg } f$ ce qui montre que n est nécessairement pair et que $\text{rg } f = \frac{n}{2}$. • **(2)⇒(3).** Si $f^2 = 0$ et $n = 2 \text{ rg } f \ (\in 2\mathbb{N})$, cherchons un endomorphisme g de E tel que $f \circ g + g \circ f = Id_E$. Posons $r = \text{rg } f$ et donc $n = 2r$, puis $F = \text{Ker } f = \text{Im } f$ ($\dim F = r$).

Soit G un supplémentaire de F dans E ($\dim G = r$). Soit $(e'_1,...,e'_r)$ une base de G. Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on pose $e_i = f(e'_i)$. Montrons que la famille $(e_1,...,e_r)$ est libre. Soit $(\lambda_1,...,\lambda_r) \in \mathbb{R}^r$.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e'_i \in \mathrm{Ker}\, f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \{1,...,r\},\ \lambda_i = 0,$$

car la famille $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est libre. $(e_1,...,e_r)$ est une famille libre de $F = \mathrm{Im}\, f$ de cardinal r et donc une base de $F = \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$. Au passage, puisque $E = F \oplus G$, $(e_1,...,e_r,e'_1,...,e'_r)$ est une base de E. Soit alors g l'endomorphisme de E défini par les égalités : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $g(e_i) = e'_i$ et $g(e'_i) = e_i$ (g est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de E). Pour i élément de $[\![1,r]\!]$, on a alors :

$$(f\circ g + g\circ f)(e_i) = f(e'_i) + g(0) = e_i + 0 = e_i,$$

et

$$(f\circ g + g\circ f)(e'_i) = f(e_i) + g(e_i) = 0 + e'_i = e'_i.$$

Ainsi, les endomorphismes $f\circ g + g\circ f$ et Id_E coïncident sur une base de E et donc $f\circ g + g\circ f = Id_E$.
• **(3)⇒(1).** Supposons que $f^2 = 0$ et qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f\circ g + g\circ f = Id_E$. Comme $f^2 = 0$, on a déjà $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. D'autre part, si x est un élément de $\mathrm{Ker}\, f$, alors $x = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}\, f$ et on a aussi $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$. Finalement, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$.

2. L'existence d'une base $(e_1,...,e_p,e'_1,...,e'_p)$ de E vérifiant les conditions de l'énoncé a été établie au passage (avec $p = r = \mathrm{rg}\, f$).

Correction de l'exercice 1206 ▲

1. Soient k un entier naturel et x un élément de E.

$$x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_{k+1}$. Ensuite,

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists y \in E/\ x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z (= f(y)) \in E/\ x = f^k(z) \Rightarrow x \in I_k.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k$.

2. (a) Soit k un entier naturel. Supposons que $N_k = N_{k+1}$.
On a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.
Soit x un élément de E.

$$\begin{aligned} x \in N_{k+2} &\Rightarrow f^{k+2}(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow f^k(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}. \end{aligned}$$

(b) On a $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2...$ Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors, $0 = \dim N_0 < \dim N_1 < \dim N_2...$ Donc $\dim N_1 \geqslant 1$, $\dim N_2 \geqslant 2$ et par une récurrence facile, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dim N_k \geqslant k$. En particulier, $\dim N_{n+1} \geqslant n+1 > n = \dim E$, ce qui est impossible. Donc, il existe k entier naturel tel que $N_k = N_{k+1}$.
Soit p le plus petit de ces entiers k (l'existence de p est démontrée proprement de la façon suivante : si $K =\in \{k \in \mathbb{N}/\ N_k = N_{k+1}\}$, K est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément). On note que puisque f est non injectif, $\{0\} = N_0 \underset{\neq}{\subset} N_1$ et donc $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition de p, pour $k < p$, $N_k \underset{\neq}{\subset} N_{k+1}$ et, d'après le a) et puisque $N_p = N_{p+1}$, on montre par récurrence que pour $k = p$, on a $N_k = N_p$.

(c) $0 < \dim N_1 < \ldots < \dim N_p$ montre que pour $k \leqslant p$, on a $\dim N_k = k$ et en particulier $p \leqslant \dim N_p = n$.

3. Puisque $N_k \subset N_{k+1}$, $I_{k+1} \subset I_k$ et que $\dim E < +\infty$, on a :

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1} \Leftrightarrow n - \text{rg}\,(f^k) = n - \text{rg}\,(f^{k+1}) \Leftrightarrow \dim\,(I_k) = \dim\,(I_{k+1}) \Leftrightarrow I_k = I_{k+1}.$$

Donc, pour $k < p$, $I_k \underset{neq}{\subset} I_{k+1}$ et pour $k = p$, $I_k = I_{k+1}$.

4. Soit $x \in I_p \cap N_p$. Alors, $f^p(x) = 0$ et $\exists y \in E/\ x = f^p(y)$. D'où, $f^{2p}(y) = 0$ et $y \in N_{2p} = N_p$ (puisque $2p \geqslant p$) et donc $x = f^p(y) = 0$. On a montré que $I_p \cap N_p = \{0\}$. Maintenant, le théorème du rang montre que $E = \dim\,(I_p) + \dim\,(N_p)$ et donc $E = I_p \oplus N_p$.
Posons $f_{/I_p} = f'$. f' est déjà un endomorphisme de I_p car $f'(I_p) = f(I_p) = I_{p+1} = I_p$.
Soit alors $x \in I_p$. $\exists y \in E/\ x = f^p(y)$.

$$x \in \text{Ker}\, f' \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(f^p(y)) = 0 \Rightarrow y \in N_{p+1} = N_p x = f_p(y) = 0.$$

Donc $\text{Ker}\, f' = \{0\}$ et donc, puisque $\dim I_p < +\infty$, $f' \in \mathscr{GL}(I_p)$.

5. Soient k un entier naturel et g_k la restriction de f à I_k.
D'après le théorème du rang, $d_k = \dim\,(I_k) = \dim\,(\text{Ker}\, g_k) + \dim\,(\text{Im}\, g_k)$. Maintenant, $\text{Im}\, g_k = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$ et donc $\dim\,(\text{Im}\, g_k) = d_{k+1}$. D'autre part, $\text{Ker}\, g_k = \text{Ker}\, f_{/I_k} = \text{Ker}\, f \cap I_k$.
Ainsi, pour tout entier naturel k, $d_k - d_{k+1} = \dim\,(\text{Ker}\, f \cap I_k)$. Puisque la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels $(\dim\,(\text{Ker}\, f \cap I_k))_{k\in\mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction de l'exercice 1207 ▲

Soit $x \in E$.

$$x \in \text{Ker}\,(f - 2Id) \cap \text{Ker}\,(f - 3Id) \Rightarrow f(x) = 2x \text{ et } f(x) = 3x \Rightarrow 3x - 2x = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc, $\text{Ker}\,(f - 2Id) \cap \text{Ker}\,(f - 3Id) = \{0\}$ (même si $f^2 - 5f + 6Id \neq 0$).
Soit $x \in E$. On cherche y et z tels que $y \in \text{Ker}\,(f - 2Id)$, $z \in \text{Ker}\,(f - 3Id)$ et $x = y + z$.
Si y et z existent, y et z sont solution du système $\left\{\begin{array}{l} y + z = x \\ 2y + 3z = f(x) \end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{l} y = 3x - f(x) \\ z = f(x) - 2x \end{array}\right.$.
Réciproquement . Soient $x \in E$ puis $y = 3x - f(x)$ et $z = f(x) - 2x$.
On a bien $y + z = x$ puis

$$\begin{aligned} f(y) &= 3f(x) - f^2(x) = 3f(x) - (5f(x) - 6x) \quad (\text{car } f^2 = 5f - 6Id) \\ &= 6x - 2f(x) = 2(3x - f(x)) = 2y \end{aligned}$$

et $y \in \text{Ker}\,(f - 2Id)$. De même,

$$f(z) = f^2(x) - 2f(x) = (5f(x) - 6x) - 2f(x) = 3(f(x) - 2x) = 3z,$$

et $z \in \text{Ker}\,(f - 3Id)$. On a montré que $E = \text{Ker}\,(f - 2Id) + \text{Ker}\,(f - 3d)$, et finalement que

$$E = \text{Ker}\,(f - 2Id) \oplus \text{Ker}\,(f - 3d).$$

Correction de l'exercice 1208 ▲

Une condition nécessaire est bien sur $\dim F + \dim G = \dim E$ (et non pas $F \oplus G = E$).
Montrons que cette condition est suffisante. Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $\dim F + \dim G = \dim E$.
Soit F' un supplémentaire de F dans E (F' existe car E est de dimension finie).
Si $G = \{0\}$ (et donc $F = E$), $f = 0$ convient.

Si $G \neq \{0\}$, il existe un isomorphisme φ de F' sur G (car F' et G ont même dimension finie) puis il existe un unique endomorphisme de E vérifiant : $f_{/F} = 0_{/F}$ et $f_{/F'} = \varphi$.
Mais alors $\text{Im}f = f(F \oplus F') = f(F) + f(F') = \{0\} + G = G$ puis $F \subset \text{Ker}f$ et pour des raisons de dimension, $F = \text{Ker}f$.

Correction de l'exercice 1209 ▲

1. $\Leftarrow$/ Si $f = 0$, f n'est pas injective (car $E \neq \{0\}$).
   Si $f \neq 0$ et s'il existe un endomorphisme non nul g de E tel que $f \circ g = 0$ alors il existe un vecteur x de E tel que $g(x) \neq 0$ et $f(g(x)) = 0$. Par suite $\text{Ker}f \neq \{0\}$ et f n'est pas injective.
   $\Rightarrow$/ Supposons f non injective et non nulle. Soient $F = \text{Ker}f$ et G un supplémentaire quelconque de F dans E. Soit p la projection sur F parallèlement à G.
   Puisque $F = \text{Ker}f$, on a $f \circ p = 0$ et puisque f n'est pas nul, F est distinct de E et donc G n'est pas nul (E étant de dimension finie) ou encore p n'est pas nul. f est donc diviseur de zéro à gauche.
2. $\Leftarrow$/ Si $f = 0$, f n'est pas surjective.
   Si f n'est pas nul et s'il existe un endomorphisme non nul g de E tel que $g \circ f = 0$ alors f ne peut être surjective car sinon $g(E) = g(f(E)) = \{0\}$ contredisant $g \neq 0$.
   $\Rightarrow$/ Supposons f non surjective et non nulle.
   Soient $G = \text{Im}f$ et F un supplémentaire quelconque de G dans E puis p la projection sur F parallèlement à G. F et G sont non nuls et distincts de E et donc p n'est pas nulle et vérifie $p \circ f = 0$. f est donc diviseur de zéro à droite.

Correction de l'exercice 1210 ▲

1. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. $x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}$.
   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_{k+1}.}$$
   Soient $k \in \mathbb{N}$ et $y \in I_{k+1} \Rightarrow \exists x \in E/\ y = f^{k+1}(x) \Rightarrow \exists x \in E/\ y = f^k(f(x)) \Rightarrow y \in I_k$.
   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k.}$$
   (b) Soit $x \in N$. Il existe un entier k tel que x est dans N_k ou encore tel que $f^k(x) = 0$. Mais alors $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = 0$ et $f(x)$ est dans N_k et donc dans N. Ainsi, N est stable par f.
   Soit $y \in I$. Alors, pour tout naturel k, il existe $x_k \in E$ tel que $y = f^k(x_k)$. Mais alors, pour tout entier k, $f(y) = f(f^k(x_k)) = f^k(f(x))$ est dans I_k, et donc $f(y)$ est dans I. I est stable par f.
   (c) Si $N_k = N_{k+1}$, on a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.
   Soit $x \in N_{k+2}$. Alors $f^{k+1}(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in N_{k+1} = N_k$. Donc, $f^k(f(x)) = 0$ ou encore x est dans N_{k+1}. On a montré que
   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ [(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})].}$$
2. (a) Notons tout d'abord que, pour tout entier naturel k, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$. Si de plus, on est en dimension finie, alors d'après le théorème du rang,
   $$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow I_{k+1} = I_k \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1}.$$
   Donc $A = B$ (éventuellement $= \varnothing$).
   La suite des noyaux itérés ne peut être strictement croissante pour l'inclusion car alors la suite des dimensions de ces noyaux serait une suite strictement croissante d'entiers naturels, vérifiant par une récurrence facile $\dim N_k \geqslant k$ pour tout naturel k, et en particulier $\dim N_{n+1} > \dim E$ ce qui est exclu.
   Donc il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$. Soit p le plus petit de ces entiers k.

Par définition de p, N_k est strictement inclus dans N_{k+1} pour $k < p$, puis $N_p = N_{p+1}$ et d'après 1)c) pour tout entier naturel k supérieur ou égal à p on a $N_k = N_p$ (par récurrence sur $k \geqslant p$). Donc $A = \{p, p+1, p+2, ...\}$.

Enfin, $\dim(N_0) < \dim(N_1) < ... < \dim(N_p)$ et donc $\dim(N_p) \geqslant p$ ce qui impose $p \leqslant n$.

(b) On a déjà $\dim N_p + \dim I_p = \dim E$. Il reste à vérifier que $I_p \cap N_p = \{0\}$.

Soit x un élément de $I_p \cap N_p$. Donc $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Mais alors $f^{2p}(y) = 0$ et y est dans $N_{2p} = N_p$ (car $2p \geqslant p$) ou encore $x = f^p(y) = 0$.

$$\boxed{E = I_p \oplus N_p.}$$

(c) Ici $N = N_p = \mathrm{Ker} f^p$ et $I = I_p = \mathrm{Im} f^p$.

Soit $f' = f_{/N}$. D'après 1)b), f' est un endomorphisme de N puis immédiatement $f'^p = 0$. Donc $f_{/N}$ est nilpotent.

Soit $f'' = f_{/I}$. f'' est d'après 1)b) un endomorphisme de I. Pour montrer que f'' est un automorphisme de I, il suffit de vérifier que $\mathrm{Ker} f'' = \{0\}$. Mais $\mathrm{Ker} f'' \subset \mathrm{Ker} f \subset N$ et aussi $\mathrm{Ker} f'' \subset I$. Donc $\mathrm{Ker} f'' \subset N \cap I = \{0\}$. Donc $f_{/I} \in \mathscr{GL}(I)$.

3. Il faut bien sûr chercher les exemples en dimension infinie.

(a) Soit f de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe sa dérivée P'. On vérifie aisément que $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathbb{R}_k[X]$ et donc la suite des noyaux itérés est strictement croissante. La suite des I_k est par contre constante : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, A est vide et $B = \mathbb{N}$.

(b) A un polynôme P, on associe le polynôme XP. Les N_k sont tous nuls et pour $k \in \mathbb{N}$ donné, I_k est constitué des polynômes de valuation supérieure ou égale à k ou encore $I_k = X^k\mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, $A = \mathbb{N}$ et $B = \varnothing$.

(c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à Xn associe Xn+1 si n n'est pas une puissance de 2 et 0 si n est une puissance de 2 ($f(1) = X$, $f(X) = 0$, $f(X^2) = 0$, $f(X^3) = X^4$, $f(X^4) = 0$, ...)

Soit k un entier naturel.

$$f^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^k+1+2^k-1} = X^{2^{k+1}} \neq 0 \text{ et } f^{2^k}(X^{2^k+1}) = f(X^{2^{k+1}}) = 0.$$

Donc, pour tout entier naturel k, N_{2^k-1} est strictement inclus dans N_k. A est vide.

Ensuite, $X^{2^{k+1}} \in I_{2^k-1}$ mais $X^{2^{k+1}} \notin I_{2^k}$. En effet, si $l \geqslant 2^{k+1}+1$, $f^{2^k}(X^l)$ est ou bien nul ou bien de degré supérieur ou égal à $2^k + 2^{k+1} + 1 > 2^{k+1}$ et si $l \leqslant 2^{k+1}$, $f^{2^k}(X^l) = 0$ car entre l et $2^k + l - 1$, il y a une puissance de 2 (il y a 2^k nombres entre l et $2^k + l - 1$, ensuite $2^k + l - 1 < 2^k + 2^{k+1} = 3 \times 2^k < 2^{k+2}$ et enfin l'écart entre deux puissances de 2 inférieures à 2^{k+1} vaut au maximum $2^{k+1} - 2^k = 2^k$) . Donc, I_{2^k} contient le polynôme nul ou des polynômes de degré strictement supérieur à 2^{k+1} et ne contient donc pas $X^{2^{k+1}}$. Finalement, pour tout entier naturel k, I_{2^k} est strictement inclus dans I_{2^k-1} et B est vide.

4. Pour k entier naturel donné, on note f_k la restriction de f à I_k. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim I_k = \dim \mathrm{Ker} f_k + \dim \mathrm{Im} f_k \text{ avec } \mathrm{Im} f_k = f(I_k) = I_{k+1}.$$

Donc, pour tout entier naturel k, $d_k - d_{k+1} = \dim \mathrm{Ker} f_k$.

Or, pour tout entier naturel k, $\mathrm{Ker} f_{k+1} = \mathrm{Ker} f \cap I_{k+1} \subset \mathrm{Ker} f \cap I_k = \mathrm{Ker} f_k$ et donc $d_{k+1} - d_{k+2} = \dim \mathrm{Ker} f_{k+1} \leqslant \dim \mathrm{Ker} f_k = d_k - d_{k+1}$.

Finalement, pour tout entier naturel k, $d_{k+1} - d_{k+2} \leqslant d_k - d_{k+1}$ et la suite des images itérées décroît de moins en moins vite.

Correction de l'exercice 1211 ▲

1. Si $N = \mathrm{Ker} f \neq \{0\}$, considérons g non nul tel que $\mathrm{Im} g \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Ker} f$.
Pour un tel g, $f \circ g = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ par hypothèse, contredisant g non nulle. Donc $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.
Si $\mathrm{Im} f \neq F$, on choisit g nulle sur $\mathrm{Im} f$ et non nulle sur un supplémentaire de $\mathrm{Im} f$ (dont l'existence est admise en dimension infinie). Alors, $g \circ f = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ contredisant g non nulle. Donc $\mathrm{Im} f = F$.
Finalement, f est bien un isomorphisme de E sur F.
2. Soit $A = \{g \in \mathscr{L}(F,E)/\ f \circ g \circ f = 0\}$. Tout d'abord A est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(F,E)$ car contient l'application nulle et est stable par combinaison linéaire (ou bien A est le noyau de l'application linéaire de $\mathscr{L}(F,E)$ dans $\mathscr{L}(E,F)$ qui à g associe $f \circ g \circ f$).
Soit J un supplémentaire de $I = \mathrm{Im} f$ dans F. Un élément g de $\mathscr{L}(F,E)$ est entièrement déterminé par ses restrictions à I et J.
$$f \circ g \circ f = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)_{/I} = 0 \text{ et } g_{/J} \text{ est quelconque} \Leftrightarrow g(I) \subset N.$$
Pour être le plus méticuleux possible, on peut alors considérer l'application G de $\mathscr{L}(I,N) \times \mathscr{L}(J,E)$ dans $\mathscr{L}(F,E)$ qui à un couple (g_1, g_2) associe l'unique application linéaire g de F dans E telle que $g_{/I} = g_1$ et $g_{/J} = g_2$. G est linéaire et injective d'image A. Donc
$$\dim A = \dim \mathscr{L}(I,N) \times \dim \mathscr{L}(J,E) = \dim \mathscr{L}(I,N) + \dim \mathscr{L}(J,E) = r(p-r) + (n-r)p = pn - r^2.$$

Correction de l'exercice 1212 ▲

1. u est dans L(E) car u est linéaire et si P est un polynôme de degré au plus n alors $u(P)$ est un polynôme de degré au plus n.
• Les polynômes constants sont dans $\mathrm{Ker} u$. Réciproquement , soit Pun élément de $\mathrm{Ker} u$ puis $Q = P - P(0)$.
Par hypothèse, $P(0) = P(1) = P(2) = \ldots$ et donc 0, 1, 2, ... sont des racines de Q. Puisque le polynôme Q admet une infinité de racines, Q est nul et donc $P = P(0)$ et $P \in \mathbb{K}_0[X]$. Ainsi, $\mathrm{Ker} u = \mathbb{K}_0[X]$.
• Mais alors, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg} u = (n+1) - 1 = n$. D'autre part, si P est dans $\mathbb{K}_n[X]$, $P(X+1) - P$ est dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (si on pose $P = a_n X^n + \ldots$, le coefficient de X^n dans $u(P)$ est $a_n - a_n = 0$). En résumé, $\mathrm{Im} u \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim \mathrm{Im} u = \dim \mathbb{K}_{n-1}[X] < +\infty$ et donc $\mathrm{Im} u = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
$$\boxed{\mathrm{Ker} u = \mathbb{K}_0[X] \text{ et } \mathrm{Im} u = \mathbb{K}_{n-1}[X].}$$
2. On part de $P_0 = 1$ et aussi de $P_1 = X$ qui vérifient bien $u(P_0) = 0$ et $u(P_1) = P_0$.
Trouvons $P_2 = aX^2 + bX$ tel que $u(P_2) = P_1$ (il est clair que si $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$ et d'autre part, les constantes sont inutiles car $\mathrm{Ker} u = \mathbb{K}_0[X]$).
$$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a-1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \tfrac{1}{2} \text{ et } b = -a.$$
On prend $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{1}{2}X(X-1)$.
Trouvons $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$ tel que $u(P_3) = P_2$.
$$\begin{aligned} u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) - aX^3 - bX^2 - cX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &\Leftrightarrow \left(3a - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \frac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$
On prend $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.
Essayons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$u(P_{k+1}) = \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X+1-i) - \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X-i) = \frac{1}{(k+1)!}((X+1)-(X-k))\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$$
$$= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = P_k.$$

Enfin, les P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, constituent une famille de $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée.

Correction de l'exercice 1221 ▲

1. La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle : $P \cap I = \{0\}$. Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :
$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
La fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire (le vérifier !), la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire. Donc $P+I = E$. Bilan : $E = P \oplus I$.
2. Le projecteur sur P de direction I est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui à f associe la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, c'est-à-dire à f on associe la partie paire de f. Nous avons bien
 — $\pi(f) \in P$. Par définition de π, $\pi(f)$ est bien une fonction paire.
 — $\pi \circ \pi = \pi$. Si g est une fonction paire alors $\pi(g) = g$. Appliquons ceci avec $g = \pi(f)$ (qui est bien est une fonction paire) donc $\pi(\pi(f)) = \pi(f)$.
 — $\ker \pi = I$. Si $\pi(f) = 0$ alors cela signifie exactement que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est la fonction nulle. Donc pour tout x : $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 0$ donc $f(x) = -f(-x)$; cela implique que f est une fonction impaire. Réciproquement si $f \in I$ est une fonction impaire, sa partie paire est nulle donc $f \in \ker f$.

Correction de l'exercice 1223 ▲

1. f est bien linéaire...
2. Soit P tel que $f(P) = 0$. Alors P vérifie l'équation différentielle
$$P + (1-X)P' = 0.$$
Dont la solution est $P = \lambda(X-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\ker f$ est de dimension 1 et une base est donnée par un seul vecteur : $X-1$.
3. Par le théorème du rang la dimension de l'image est :
$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker f = (n+1) - 1 = n.$$
Il faut donc trouver n vecteurs linéairement indépendants dans $\operatorname{Im} f$. Évaluons $f(X^k)$, alors
$$f(X^k) = (1-k)X^k + kX^{k-1}.$$
Cela donne $f(1) = 1, f(X) = 1, f(X^2) = -X^2 + 2X, \ldots$ on remarque que pour $k = 2, \ldots n$, $f(X^k)$ est de degré k sans terme constant. Donc l'ensemble
$$\{f(X), f(X^2), \ldots, f(X^n)\}$$
est une famille de n vecteurs, appartenant à $\operatorname{Im} f$, et libre (car les degrés sont distincts). Donc ils forment une base de $\operatorname{Im} f$.

Correction de l'exercice 1235 ▲

2. (c) $g(\vec{x}) = \vec{z}$.

Correction de l'exercice 1236 ▲

3. (a) $(f+g)(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow f^k(\vec{x}) + g \circ f^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$.
Pour $k = p$: $f^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$, puis pour $k = p-1$: $f^{k-2}(\vec{x}) = \vec{0}$, etc, jusqu'à $\vec{x} = \vec{0}$.
3. (b) Même principe sur l'équation : $(f+g)(\vec{x}) = \vec{y}$.
On obtient : $(f+g)^{-1} = g^{-1} \circ \big(\mathrm{id} - g^{-1} \circ f + g^{-2} \circ f^2 - \cdots + (-1)^{p-1} g^{1-p} \circ f^{p-1}\big)$.

Correction de l'exercice 1241 ▲

$f(\vec{x}) = \alpha\vec{x} + \beta(\vec{x})\vec{u}$, $\beta \in E^*$.

Correction de l'exercice 1242 ▲

1. $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell} = \delta_{jk}\psi_{i\ell}$.
2. ψ_{11} est un projecteur non trivial.
3. Si $\sum \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$, alors en appliquant ψ_{1j} : $\lambda_j \vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_j = 0$.
4. Décomposer g sur la base (φ_{ij}).

Correction de l'exercice 1243 ▲

$g =$ une projection sur $\mathrm{Im}\, f$ et $h = f$.

Correction de l'exercice 1248 ▲

$f^2 = f \circ g \circ f = f \circ g = f$ donc f est une projection. g idem.
$f \circ g = f \Rightarrow \mathrm{Ker} g \subset \mathrm{Ker} f$ et donc, par symétrie, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$.
Réciproquement, si f, g sont deux projections de même direction, alors $f \circ g$ et f coïncident sur la base et la direction de g, donc sont égales. De même, $g \circ f = g$.

Correction de l'exercice 1249 ▲

Direction = $\mathrm{Ker} f$ et Base = $\mathrm{Im} g$.

Correction de l'exercice 1250 ▲

Direction = $\mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q$ et Base = $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Correction de l'exercice 1251 ▲

Si $\lambda \neq 1$, $(\mathrm{id} - f)^{-1} = \mathrm{id} + \frac{1}{1-\lambda} f$.

Correction de l'exercice 1253 ▲

1.
2. $\begin{cases} 2x' = x - 2y - z \\ 2y' = -x - z \\ 2z' = -x - 2y + z. \end{cases}$

Correction de l'exercice 1254 ▲

Si $A = \varnothing$ c'est évident.
Sinon, A est un sous-groupe de $GL(E)$ donc $\frac{u}{\operatorname{Card} A}$ est un projecteur et $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{Card}(A)\operatorname{rg}(u)$.

Correction de l'exercice 1255 ▲

1. Soit $p(\in \mathbb{N}^*)$ l'indice de nilpotence de u.
Par définition, $u^{p-1} \neq 0$ et plus généralement, pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $u^k \neq 0$ car si $u^k = 0$ alors $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$ ce qui n'est pas.
Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe au moins un vecteur x non nul tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.
Soit $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \operatorname{Min}\{k \in \{0,...,p-1\} / \lambda_k \neq 0\}$.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow u^{p-1-i}(\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x)) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \\ \Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \quad (\text{car pour } k \geqslant i+1,\ p-1-i+k \geqslant p \text{ et donc } u^{p-1-i+k} = 0) \\ \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } u^{p-1}(x) \neq 0)\end{aligned}$$
ce qui contredit la définition de i.
Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.
2. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p \leqslant n$. Par suite, $u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0$.
3. On applique l'exerice 1206.
Puisque $u^{n-1} \neq 0$, on a $N_{n-1} \underset{\neq}{\subset} N_n$. Par suite (d'après l'exercice 1207, 2), c)), les inclusions $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = E$ sont toutes strictes et donc
$$0 < \dim N_1 < \dim N_2 \ldots < \dim N_n = n.$$
Pour $k \in \{0,...,n\}$, notons d_k est la dimension de N_k. Pour $k \in \{0,...,n-1\}$, on a $d_{k+1} \geqslant d_k$ et une récurrence facile montre que, pour $k \in \{0,...,n\}$, on a $d_k \geqslant k$.
Mais si de plus, pour un certain indice i élément de $\{1,...,n-1\}$, on a $d_i = \dim N_i > i$, alors, par une récurrence facile, pour $i \leqslant k \leqslant n$, on a $d_k > k$ et en particulier $d_n > n$ ce qui n'est pas. Donc,
$$\forall k \in \{0,...,n\},\ \dim(N_k) = k,$$
ou encore, d'après le théorème du rang,
$\forall k \in \{0,...,n\}$, $\operatorname{rg}(u^k) = n-k$, et en particulier $\operatorname{rg}(u) = n-1$.

Correction de l'exercice 1256 ▲

1ère solution. Si $f = 0$, c'est immédiat . Sinon, soit p l'indice de nilpotence de f ($p \geqslant 2$).
Par définition de p, il existe un vecteur x_0 tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ (et $f^p(x_0) = 0$).
Montrons que la famille $(f^k(x_0))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. Dans le cas contraire, il existe a_0,..., a_{p-1} p scalaires non tous nuls tels que $a_0 x_0 + \ldots + a_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0$.
Soit $k = \operatorname{Min}\{i \in [\![0, p-1]\!] / a_i \neq 0\}$.
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k}^{p-1} a_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow f^{p-1}\left(\sum_{i=k}^{p-1} a_i f^i(x_0)\right) = 0 \\ \Rightarrow a_k f^{p-1}(x_0) = 0 \text{ (car pour } i \geqslant p,\ f^i = 0 \\ \Rightarrow a_k = 0 \text{ (car } f^{p-1}(x_0) \neq 0).\end{aligned}$$

Ceci contredit la définition de k et donc la famille $(f^k(x_0))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre. Puisque le cardinal d'une famille libre est inférieur à la dimension de l'espace, on a montré que $p\leqslant n$ ou, ce qui revient au même, $f^n=0$.
2ème solution. (pour les redoublants)
Soit $p\in\mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f. Le polynôme X^p est annulateur de f. Son polynôme minimal est un diviseur de X^p et donc égal à X^k pour un certain $k\in[\![1,p]\!]$. Par définition de l'indice de nilpotence, $k=p$ puis $\mu_f=X^p$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, μ_f divise χ_f qui est de degré n et en particulier $p\leqslant n$.

Correction de l'exercice 1257 ▲

On transforme légèrement l'énoncé.
Si x est un vecteur non nul tel que $(x,f(x))$ est liée alors il existe un scalaire λ_x tel que $f(x)=\lambda_x x$. Si $x=0$, $f(x)=0=0x$ et encore une fois il existe un scalaire λ_x tel que $f(x)=\lambda_x x$.
Inversement, si pour tout x de E, il existe $\lambda_x\in\mathbb{K}$ tel que $f(x)=\lambda_x x$, alors la famille $(x,f(x))$ est liée. Donc

$$[(\forall x\in E,\ (x,f(x)) \text{ liée})\Leftrightarrow(\forall x\in E,\exists\lambda_x\in\mathbb{K}/\ f(x)=\lambda_x x)].$$

Notons de plus que dans le cas où $x\neq 0$, la famille (x) est une base de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ et en particulier, le nombre λ_x est uniquement défini.
Montrons maintenant que f est une homothétie c'est à dire montrons que : $\exists\lambda\in\mathbb{K}/\ \forall x\in E,\ f(x)=\lambda x$.
Soient x_0 un vecteur non nul et fixé de E puis x un vecteur quelconque de E.
1er cas. Supposons la famille (x_0,x) libre. On a $f(x+x_0)=\lambda_{x+x_0}(x+x_0)$ mais aussi $f(x+x_0)=f(x)+f(x_0)=\lambda_x x+\lambda_{x_0}x_0$ et donc

$$(\lambda_{x+x_0}-\lambda_x)x+(\lambda_{x+x_0}-\lambda_{x_0})x_0=0.$$

Puisque la famille (x_0,x) est libre, on obtient $\lambda_{x+x_0}-\lambda_x=\lambda_{x+x_0}-\lambda_{x_0}=0$ et donc $\lambda_x=\lambda_{x+x_0}=\lambda_{x_0}$. Ainsi, pour tout vecteur x tel que (x,x_0) libre, on a $f(x)=\lambda_{x_0}x$.
2ème cas. Supposons la famille (x_0,x) liée. Puisque x_0 est non nul, il existe un scalaire μ tel que $x=\mu x_0$. Mais alors

$$f(x)=\mu f(x_0)=\mu\lambda_{x_0}x_0=\lambda_{x_0}x.$$

Finalement, il existe un scalaire $k=\lambda_{x_0}$ tel que pour tout vecteur x, $f(x)=kx$ et f est une homothétie. La réciproque étant claire, on a montré que

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{L}(E),\ [(f \text{ homothétie})\Leftrightarrow(\forall x\in E,\ (x,f(x)) \text{ liée})].}$$

Correction de l'exercice 1258 ▲

Remarques. 1) Soit $(G,*)$ un groupe. Le centre de G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Ce centre, souvent noté Z, est un sous-groupe de $(G,*)$.
2) $(\mathscr{L}(E),\circ)$ est un magma associatif et unitaire mais non commutatif (pour $\dim E>1$) mais $(\mathscr{L}(E),\circ)$ n'est pas un groupe. Par contre $(\mathscr{GL}(E),\circ)$ est un groupe (groupe des inversibles de $(\mathscr{L}(E),\circ)$).
Soit f un endomorphisme (resp. automorphisme) de E commutant avec tous les endomorphismes (resp. les automorphismes) de E. f commute en particulier avec toutes les symétries.
Soit x un vecteur non nul de E et s la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à un supplémentaire donné de $\mathrm{Vect}(x)$).

$$s(f(x))=f(s(x))=f(x).$$

Par suite, $f(x)$ est invariant par s et appartient donc à $Vect(x)$. Ainsi, si f commute avec tout endomorphisme (resp. automorphisme) de E, f vérifie nécessairement $\forall x\in E$, $(x,f(x))$ liée et d'après le 1257, f est nécessairement une homothétie. Réciproquement , les homothéties de E commutent effectivement avec tout endomorphisme de E.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes de } E \text{ qui commutent avec tout endomorphismes de } E \text{ sont les homothéties.}}$$

Pour le centre de $\mathscr{GL}(E)$, il faut enlever l'application nulle qui est une homothétie mais qui n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 1259 ▲

$\Rightarrow$/ Si $p+q$ est un projecteur alors l'égalité $(p+q)^2 = p+q$ founit $pq+qp = 0$. En composant par p à droite ou à gauche , on obtient $pqp+qp = 0 = pq+pqp$ et donc $pq = qp$.
Cette égalité jointe à l'égalité $pq+qp = 0$ fournit $pq = qp = 0$.
$\Leftarrow$/ Si $pq = qp = 0$, alors $(p+q)^2 = p^2+pq+qp+q^2 = p+q$ et $p+q$ est un projecteur.

$$\boxed{\text{Pour tous projecteurs } p \text{ et } q,\ (p+q \text{ projecteur} \Leftrightarrow p\circ q = q\circ p = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}q \subset \mathrm{Ker}p \text{ et } \mathrm{Im}p \subset \mathrm{Ker}q).}$$

Dorénavant, $p+q$ est un projecteur ou ce qui revient au même $pq = qp = 0$.
On a $\mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Ker}q \subset \mathrm{Ker}(p+q)$. Inversement, pour $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Ker}(p+q) \Rightarrow (p+q)(x) = 0 \Rightarrow p(p(x)+q(x)) = 0 \Rightarrow p(x) = 0,$$

et de même $q(x) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p+q) \subset \mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Ker}q$ et donc $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Ker}q$.
On a $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}p+\mathrm{Im}q$. Inversement, pour $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Im}p+\mathrm{Im}q \Rightarrow \exists (x_1,x_2) \in E^2/\ x = p(x_1)+q(x_2).$$

Mais alors, $(p+q)(x) = p^2(x_1)+pq(x_1)+qp(x_2)+q^2(x_2) = p(x_1)+q(x_2) = x$ et donc $x \in \mathrm{Im}(p+q)$. Ainsi, $\mathrm{Im}p+\mathrm{Im}q \subset \mathrm{Im}(p+q)$ et donc $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p+\mathrm{Im}q$. En résumé, si p et q sont deux projecteurs tels que $p+q$ soit un projecteur, alors

$$\boxed{\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Ker}q \text{ et } \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p+\mathrm{Im}q.}$$

Correction de l'exercice 1260 ▲

Soit p un projecteur de E. Si $p = 0$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = 0$ et si $p = Id_E$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = n$.
Dorénavant, p est un projecteur de rang $r \in [\![1,n-1]\!]$. On choisit une base de E $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Ker}(p)$. Dans cette base, la matrice de p s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où le nombre de 1 est $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r$. Mais alors $\mathrm{Tr}(p) = r$.

$$\boxed{\text{En dimension finie, la trace d'un projecteur est son rang.}}$$

Correction de l'exercice 1261 ▲

$\Leftarrow$/ Si $\forall i \neq j$, $p_i\circ p_j = 0$ alors

$$(p_1+...+p_n)^2 = p_1^2+...+p_n^2+\textstyle\sum_{i\neq j} p_i\circ p_j = p_1+...+p_n,$$

et $p_1+...+p_n$ est un projecteur.
$\Rightarrow$/ Supposons que $p=p_1+...+p_n$ soit un projecteur. Posons $F_i=\text{Im}p_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, puis $F=F_1+...+F_n$ et $G=\text{Im}p$. On sait que la trace d'un projecteur est son rang. Par linéarité de la trace, on obtient

$$\text{rg}p=\text{Tr}p=\text{Tr}(p_1)+...+\text{Tr}(p_n)=\text{rg}(p_1)+...+\text{rg}(p_n),$$

et donc $\dim G=\dim F_1+...+\dim F_n\geqslant\dim F$. D'autre part, $G=\text{Im}(p_1+...+p_n)\subset\text{Im}p_1+...+\text{Im}p_n=F_1+...+F_n=F$.
On obtient donc $G=F$ et aussi $\dim(F_1+...+F_n)=\dim F_1+...+\dim F_n$. D'après l'exercice 1120, $F=F_1\oplus...\oplus F_n$ c'est-à-dire

$$\text{Im}p=\text{Im}(p_1)\oplus...\oplus\text{Im}(p_n).$$

Il reste à vérifier que pour $i\neq j$ et x dans E, $p_i(p_j(x))=0$ ou ce qui revient au même que pour $i\neq j$ et y dans $\text{Im}(p_j)$, $p_i(y)=0$.
Soit y dans $\text{Im}(p_j)$ (et donc dans $\text{Im}p$). Les égalités $y=p_j(y)=p(y)$ fournissent $\sum_{i\neq j}p_i(y)=0$. La somme $\sum_i\text{Im}(p_i)$ étant directe, on a donc $p_i(y)=0$ pour chaque $i\neq j$ ce qu'il fallait démontrer.

$$\boxed{p_1+\ldots+p_n\text{ projecteur}\Leftrightarrow\forall i\neq j,\ p_i\circ p_j=0.}$$

Correction de l'exercice 1262 ▲

1. D'après le 1261, $\text{Im}(p_1+...+p_n)=\text{Im}(p_1)+...+\text{Im}(p_n)=\text{Im}(p_1)\oplus...\oplus\text{Im}(p_n)$.
   Chaque p_i est de rang au moins 1, mais si l'un des p_i est de rang supérieur ou égal à 2 alors $n=\dim E\geqslant\text{rg}(p_1+...+p_n)=\text{rg}(p_1)+...+\text{rg}(p_n)>n$ ce qui est impossible. Donc chaque p_i est de rang 1.
2. Les images des p_i (resp. q_i) sont des droites vectorielles. Pour chaque i, notons e_i (resp. e'_i) un vecteur non nul de $\text{Im}(p_i)$ (resp. $\text{Im}(q_i)$). D'après 1), $E=\text{Vect}(e_1)\oplus...\oplus\text{Vect}(e_n)$ ou encore $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (resp. $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$) est une base de E.
   Soit f l'automorphisme de E défini par $f(e_i)=e'_i$ (f est un automorphisme car l'image par f d'une base de E est une base de E).
   Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. $f\circ p_i\circ f^{-1}(e'_j)=f(p_i(e_j))=f(\delta_{i,j}e_i)=\delta_{i,j}e'_i=q_i(e_j)$. Ainsi, les endomorphismes q_i et $f\circ p_i\circ f^{-1}$ coïncident sur une base de E et sont donc égaux.

Correction de l'exercice 1263 ▲

Soit $q=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}g\circ p\circ g^{-1}$.

$$q^2=\frac{1}{n}\sum_{(g,h)\in G^2}h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}.$$

Mais si g et h sont deux éléments de G et x est un vecteur quelconque de E, $p(g^{-1}(x))$ est dans F et donc par hypothèse $h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)$ est encore dans F (h^{-1} est dans G puisque G est un groupe). On en déduit que

$$h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}=h\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}=g\circ p\circ g^{-1}.$$

Mais alors

$$q^2=\frac{1}{n^2}\sum_{(g,h)\in G^2}g\circ p\circ g^{-1}=\frac{1}{n^2}\times n\sum_{g\in G}g\circ p\circ g^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}g\circ p\circ g^{-1}=q$$

et q est un projecteur.
Montrons que $F\subset\text{Im}q$. Soit x un élément de F. Pour chaque $g\in G$, $g^{-1}(x)$ est encore dans F et donc $p(g^{-1}(x))=g^{-1}(x)$ puis $g(p(g^{-1}(x)))=x$. Mais alors

$$q(x)=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}x=x,$$

ou encore x est dans $\mathrm{Im}q$. On a montré que $F \subset \mathrm{Im}q$.
Montrons que $\mathrm{Im}q \subset F$. Soit x un élément de $\mathrm{Im}q$.

$$\begin{aligned}
p(x) = p(q(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} p\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}(x) \text{ (car } p\circ g^{-1}(x)\in F \text{ et donc } g\circ p\circ g^{-1}(x)\in F)\\
&= q(x) = x,
\end{aligned}$$

et x est dans F. On a montré que $\mathrm{Im}q \subset F$ et finalement que $\mathrm{Im}q = F$.

$$\boxed{q \text{ est un projecteur d'image } F.}$$

Correction de l'exercice 1264 ▲

Deux cas particuliers se traitent immédiatement.
Si $f = 0$, on prend $p = 0$ et $g = Id_E$ et si $f \in \mathscr{GL}(E)$, on prend $p = Id_E$ et $g = f$.
On se place dorénavant dans le cas où $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ ne sont pas réduit à 0.
Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}f$ dans E et G un supplémentaire de $\mathrm{Im}f$ dans E.
On sait que la restriction f' de f à F réalise un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}f$. D'autre part $\dim\mathrm{Ker}f = \dim G < +\infty$ et donc $\mathrm{Ker}f$ et G sont isomorphes. Soit φ un isomorphisme de $\mathrm{Ker}f$ sur G.
On définit une unique application linéaire g en posant $g_{/\mathrm{Ker}f} = \varphi$ et $g_{/F} = f'$.
g est un automorphisme de E. En effet,

$$g(E) = g(\mathrm{Ker}f + F) = g(\mathrm{Ker}f) + g(F) = \varphi(\mathrm{Ker}f) + f'(F) = G + \mathrm{Im}f = E,$$

(puisque φ et f' sont des isomorphismes) et donc g est surjective. Par suite g est bijective de E sur lui-même puisque $\dim E < +\infty$.
Soit p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Ker}f$. On a

$$(g\circ p)_{/\mathrm{Ker}f} = g\circ 0_{/\mathrm{Ker}f} = 0_{/\mathrm{Ker}f} = f_{/\mathrm{Ker}f} \text{ et } (g\circ p)_{/F} = g\circ Id_{/F} = f' = f_{/F}.$$

Ainsi les endomorphismes $g\circ p$ et f coïncident sur deux sous espaces supplémentaires de E et donc $g\circ p = f$.
Finalement, si on note $P(E)$ l'ensemble des projecteurs de E,

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \exists g \in \mathscr{GL}(E),\ \exists p \in P(E)/\ f = g\circ p.}$$

Correction de l'exercice 1265 ▲

(Ne pas confondre : $(\forall x \in E,\ \exists p \in \mathbb{N}^*/\ f^p(x) = 0)$ et $(\exists p \in \mathbb{N}^*/\ \forall x \in E,\ f^p(x) = 0)$. Dans le deuxième cas, p est indépendant de x alors que dans le premier cas, p peut varier quand x varie).
Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, il existe un entier non nul p_i tel que $f^{p_i}(e_i) = 0$. Soit $p = \mathrm{Max}\{p_1,...,p_n\}$. p est un entier naturel non nul et pour i dans $[\![1,n]\!]$, on a

$$f^p(e_i) = f^{p-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{p-p_i}(0) = 0.$$

Ainsi l'endomorphisme f^p s'annule sur une base de E et on sait que $f^p = 0$.
On a donc trouvé un entier non nul p tel que $f^p = 0$ et par suite f est nilpotent.

Correction de l'exercice 1266 ▲

1. A partir de $fg-gf=af+bg$ (1), on obtient après composition à droite par g, $fg-gfg=afg+bg$ ou encore $fg=g\circ\frac{1}{1-a}(fg+bId)$ (puisque $1-a\neq 0$). On en déduit

$$\mathrm{Im}(fg)\subset \mathrm{Im}g.$$

Mais alors en écrivant (1) sous la forme $f=\frac{1}{a}(fg-gf-bg)$ (puisque a n'est pas nul), on obtient

$$\mathrm{Im}f\subset \mathrm{Im}g.$$

L'égalité $\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Im}g$ montre que tout vecteur de $\mathrm{Im}f$ est invariant par g et fournit donc l'égalité $gf=f$. On compose alors (1) à droite par f et en tenant compte de $gf=f$ et de $f^2=f$, on obtient $f-f=af+bf$ et donc $(a+b)f=0$ puis $b=-a$ puisque f n'est pas nul.

(1) s'écrit alors $fg-f=a(f-g)$. En composant à droite par g, on obtient : $a(fg-g)=0$ et donc $fg=f$ puisque a n'est pas nul. (1) s'écrit maintenant $g-f=a(f-g)$ ou encore $(a+1)(g-f)=0$ et donc, puisque f et g sont distincts, $a=-1$.

2. (D'après 1), si a est distinct de 0 et de 1, nécessairement $a=-1$ et (1) s'écrit $fg-gf=-f+bg$).

Soit x un élément de $\mathrm{Ker}g$. (1) fournit $-g(f(x))=af(x)$ $(*)$ puis en prenant l'image par g, $(a+1)g(f(x))=0$. Puisque a est distinct de -1, on obtient $g(f(x))=0$ et $(*)$ fournit $af(x)=0$ puis $f(x)=0$. Donc x est élément de $\mathrm{Ker}f$. On a montré que $\mathrm{Ker}g\subset\mathrm{Ker}f$.

On en déduit $\mathrm{Im}(g-Id)\subset\mathrm{Ker}f$ et donc $f(g-Id)=0$ ou encore $fg=f$. (1) s'écrit $f-gf=af+bg$ et en composant à gauche par f, on obtient $f-fgf=af+bfg$. En tenant compte de $fg=f$, on obtient $(a+b)f=0$ et donc $b=-a$.

(1) s'écrit alors $f-gf=a(f-g)$ et en composant à gauche par g, on obtient $0=a(gf-g)$ et donc $gf=g$. (1) s'écrit enfin $f-g=a(f-g)$ et donc $a=1$.

3. Si $a=0$, (1) s'écrit $fg-gf=bg$. En composant à gauche ou à droite par g, on obtient $gfg-gf=bg$ et $fg-gfg=bg$. En additionnant ces deux égalités, on obtient $fg-gf=2bg$. D'où, en tenant compte de (1), $bg=2bg$ et puisque g n'est pas nul, $b=0$. Par suite $fg-gf=0$ ce qui est exclu par l'énoncé. Donc, on ne peut avoir $a=0$. D'après 1) et 2), $(a,b)\in\{(-1,1),(1,-1)\}$.

1er cas. $(a,b)=(-1,1)$. C'est le 1) : $fg-gf=-f+g$. On a vu successivement que $gf=f$ puis que $fg=g$ fournissant $(g-Id)f=0$ et $(f-Id)g=0$ ou encore $\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Ker}(g-Id)=\mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Im}g\subset\mathrm{Im}f$ et donc $\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}g$. Réciproquement, si f et g sont deux projecteurs de même image alors $gf=f$, $fg=g$ et donc $fg-gf=-f+g$. Le premier cas est donc le cas de deux projecteurs de même image .

2ème cas. $(a,b)=(1,-1)$. C'est le cas de deux projecteurs de même noyau.

Correction de l'exercice 1267 ▲

Non, ils n'ont pas même dimension si $E\neq\{\vec{0}\}$ ou $F\neq\{\vec{0}\}$.

Correction de l'exercice 1268 ▲

On veut $\mathrm{Im}\,g\subset\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Ker}g\supset\mathrm{Im}\,f$ donc g est entièrement définie par sa restriction à un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,f$, application linéaire à valeurs dans $\mathrm{Ker}f$. On en déduit $\dim F=(\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,f)(\dim\mathrm{Ker}f)=(\dim\mathrm{Ker}f)^2$.

Correction de l'exercice 1269 ▲

Soit $p=\frac{1}{\mathrm{Card}\,G}\sum_{g\in G}g$. Alors $g\circ p=p$, pour tout $g\in G$ donc $p^2=p$, $F\subset\mathrm{Im}\,p$ et si $x\in\mathrm{Im}\,p$, on a $p(x)=x$ d'où $g(x)=x$ pour tout $g\in G$ c'est-à-dire $x\in F$. Donc $F=\mathrm{Im}\,p$ et $\dim F=\mathrm{rg}(p)=\mathrm{tr}(p)$ (trace d'un projecteur).

Correction de l'exercice 1270 ▲

Si $C=A\times B$ alors on obtient le coefficient c_{ij} (situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne de C) en effectuant le produit scalaire du i-ème vecteur-ligne de A avec le j-éme vecteur colonne de B.
On trouve

$$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\5&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 1282 ▲

On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un calcul donne $A^3 - A = 4I$. En factorisant par A on obtient $A \times (A^2 - I) = 4I$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1283 ▲

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1286 ▲

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Soient $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & c' \\ 0 & b' & 0 \\ c' & 0 & a' \end{pmatrix}$ deux éléments de E. Alors $M + M' = \begin{pmatrix} a+a' & 0 & c+c' \\ 0 & b+b' & 0 \\ c+c' & 0 & a+a' \end{pmatrix} \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 & \lambda c \\ 0 & \lambda b & 0 \\ \lambda c & 0 & \lambda a \end{pmatrix}$ appartient à E, tout comme la matrice 0. Donc E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ un élément de E. Alors $M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices M_1, M_2 et M_3 appartiennent à E et la relation qui précéde montre que elles engendrent E. D'autre part, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$, alors $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est libre et engendre E. C'est une base de E.

Correction de l'exercice 1287 ▲

F est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ donc $\dim(F) \in \{0, \dots, 4\}$. Comme $F \neq M_2(\mathbb{R})$ on a aussi $\dim(F) \neq 4$. D'autre part les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à F et sont linéairement indépendantes. En effet, si $\alpha M_1+\beta M_2+\gamma M_3=0$ alors $\begin{pmatrix}\gamma & \alpha\\ \beta & -\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ c'est à dire $\alpha=\beta=\gamma=0$. Donc $\dim(F)\geqslant 3$ c'est à dire $\dim(F)=3$. Enfin $\{M_1,M_2,M_3\}$ est une famille libre de trois vecteurs dans F qui est un espace de dimension 3. C'est donc une base de F.

Correction de l'exercice 1291 ▲

$$\begin{aligned}A(\theta)\times A(\theta') &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta'-\sin\theta\cos\theta'\\ \sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}\\ &= A(\theta+\theta')\end{aligned}$$

Bilan : $A(\theta)\times A(\theta')=A(\theta+\theta')$.

Nous allons montrer par récurrence sur $n\geqslant 1$ que $\big(A(\theta)\big)^n=A(n\theta)$.

— C'est bien sûr vrai pour $n=1$.

— Fixons $n\geqslant 1$ et supposons que $\big(A(\theta)\big)^n=A(n\theta)$ alors

$$\big(A(\theta)\big)^{n+1}=\big(A(\theta)\big)^n\times A(\theta)=A(n\theta)\times A(\theta)=A(n\theta+\theta)=A((n+1)\theta)$$

— C'est donc vrai pour tout $n\geqslant 1$.

Remarques :

— On aurait aussi la formule $A(\theta')\times A(\theta)=A(\theta+\theta')=A(\theta)\times A(\theta')$. Les matrices $A(\theta)$ et $A(\theta')$ commutent.

— En fait il n'est pas plus difficile de montrer que $\big(A(\theta)\big)^{-1}=A(-\theta)$. On sait aussi que par définition $\big(A(\theta)\big)^0=I$. Et on en déduit que pour $n\in\mathbb{Z}$ on a $\big(A(\theta)\big)^n=A(n\theta)$.

— En terme géométrique $A(\theta)$ est la matrice de la rotation d'angle θ (centrée à l'origine). On vient de montrer que si l'on compose un rotation d'angle θ avec un rotation d'angle θ' alors on obtient une rotation d'angle $\theta+\theta'$.

Correction de l'exercice 1293 ▲

Notons E_{ij} la matrice élémentaire (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la i-ème ligne et la j-ème colonne). Soit $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$A\times E_{ij}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&a_{1i}&0&\cdots\\ 0&0&\cdots&0&a_{2i}&0&\cdots\\ \vdots&&\cdots&&\vdots&&\cdots\\ 0&0&\cdots&0&a_{ji}&0&\cdots\\ \vdots&&\cdots&&\vdots&&\cdots\\ 0&0&\cdots&0&a_{ni}&0&\cdots\end{pmatrix}$$

La seule colonne non nulle est la j-ème colonne.

La trace est la somme des éléments sur la diagonale. Ici le seul élément non nul de la diagonale est a_{ji}, on en déduit donc

$$\operatorname{tr}(A\times E_{ij})=a_{ji}$$

(attention à l'inversion des indices).

Maintenant prenons deux matrices A,B telles que $\operatorname{tr}(AX)=\operatorname{tr}(BX)$ pour toute matrice X. Alors pour $X=E_{ij}$ on en déduit $a_{ji}=b_{ji}$. On fait ceci pour toutes les matrices élémentaires E_{ij} avec $1\leqslant i,j\leqslant n$ ce qui implique $A=B$.

Correction de l'exercice 1294 ▲

Notons $A = (a_{ij})$, notons $B = {}^tA$ si les coefficients sont $B = (b_{ij})$ alors par définition de la transposée on a $b_{ij} = a_{ji}$.

Ensuite notons $C = A \times B$ alors par définition du produit de matrices le coefficients c_{ij} de C s'obtient par la formule :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Appliquons ceci avec $B = {}^tA$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}.$$

Et pour un coefficient de la diagonale on a $i = j$ donc

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2.$$

La trace étant la somme des coefficients sur la diagonale on a :

$$\operatorname{tr}(A\,{}^tA) = \operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{ik}^2.$$

Si on change l'indice k en j on obtient

$$\operatorname{tr}(A\,{}^tA) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2.$$

Donc cette trace vaut la somme des carrés de tous les coefficients.

Conséquence : si $\operatorname{tr}(A\,{}^tA) = 0$ alors la somme des carrés $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$ est nulle donc chaque carré a_{ij}^2 est nul. Ainsi $a_{ij} = 0$ (pour tout i, j) autrement dit A est la matrice nulle.

Correction de l'exercice 1299 ▲

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $AX = 0$. Nous allons montrer qu'alors X est le vecteur nul ce qui entraîne que A est inversible.

Par l'absurde supposons $X \neq 0$. Alors, si i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}| = \max\left\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\right\}$, on a $|x_{i_0}| > 0$.

Mais alors comme $AX = 0$ on a pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0$$

donc

$$|a_{i_0,i_0} x_{i_0}| = \left| - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|.|x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

et, puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$ contredisant les hypothèses de l'énoncé. Ainsi $X = 0$. On a donc prouvé «$AX = 0 \Rightarrow X = 0$» ce qui équivaut à A inversible.

Correction de l'exercice 1310 ▲

1. $A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
2. $U_n = A^n U_0$

3. C'est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le rang est 1.
4. C'est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
5. Ce sont deux vecteurs non colinéaires. On a
$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
6. On a $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -3^{n+1} & -2 \cdot 3^{n+1} \\ 2 \cdot 3^n & 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$
7. Donc
$$\begin{cases} x_n &= -137 \cdot 3^{n+1} - 36 \cdot 3^{n+1} \\ y_n &= 274(3^n) + 72 \cdot 3^n \end{cases}$$

Correction de l'exercice 1311 ▲

1. Notons $C = AB$ et $D = BA$. Alors par la définition du produit de matrice :
$$c_{ij} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{donc } c_{ii} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{ik} b_{ki}$$
Ainsi
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr} C = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_{ii} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{ik} b_{ki}$$
De même
$$\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr} D = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} b_{ik} a_{ki}$$
Si dans cette dernière formule on renomme l'indice i en k et l'indice k en i (ce sont des variables muettes donc on leur donne le nom qu'on veut) alors on obtient :
$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{ik} b_{ki} = \operatorname{tr}(AB)$$
2. M et M' sont semblables donc il existe une matrice de passage P telle que $M' = P^{-1}MP$ donc
$$\operatorname{tr} M' = \operatorname{tr}\big(P^{-1}(MP)\big) = \operatorname{tr}\big((MP)P^{-1}\big) = \operatorname{tr}(MI) = \operatorname{tr} M$$
3. La trace a aussi la propriété évidente que
$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$
Fixons une base de E. Notons A la matrice de f dans cette base et B la matrice de g dans cette même base. Alors AB est la matrice de $f \circ g$ et BA est la matrice de $g \circ f$. Ainsi la matrice de $f \circ g - g \circ f$ est $AB - BA$ Donc
$$\operatorname{tr}(f \circ g - g \circ f) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0.$$

Correction de l'exercice 1313 ▲

Soit A, B tel que $B = P^{-1}AP$.

1. Supposons A inversible, alors il existe A' tel que $A \times A' = I$ et $A' \times A = I$. Notons alors $B' = P^{-1}A'P$. On a
$$B \times B' = \big(P^{-1}AP\big) \times \big(P^{-1}A'P\big) = P^{-1}A\big(PP^{-1}\big)A'P = P^{-1}AA'P = P^{-1}IP = I$$
De même $B' \times B = I$. Donc B est inversible d'inverse B'.

2. Supposons que $A^n = I$. Alors

$$\begin{array}{rcl} B^n & = & \left(P^{-1}AP\right)^n = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right) \\ & = & P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots AP \\ & = & P^{-1}A^nP \\ & = & P^{-1}IP = I \end{array}$$

Donc B est idempotente.

3. Si $A^n = (0)$ alors le même calcul qu'au-dessus conduit à $B^n = (0)$.
4. Si $A = \lambda I$ alors $B = P^{-1}(\lambda I)P = \lambda I \times P^{-1}P = \lambda I$ (car la matrice λI commute avec toutes les matrices).

Correction de l'exercice 1324 ▲

Avant toute, un coup d'œil sur la matrice nous informe de deux choses : (a) A n'est pas la matrice nulle donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$; (b) il y a 3 lignes donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 3$ (le rang est plus petit que le nombre de colonnes et que le nombre de lignes).

1. Montrons de différentes façons que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   — **Première méthode : sous-déterminant non nul.** On trouve une sous-matrice 2×2 dont le déterminant est non nul. Par exemple la sous-matrice extraite du coin en bas à gauche vérifie $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   — **Deuxième méthode : espace vectoriel engendré par les colonnes.** On sait que l'image de l'application linéaire associée à la matrice A est engendrée par les vecteurs colonnes. Et le rang est la dimension de cette image. On trouve facilement deux colonnes linéairement indépendantes : la deuxième $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la troisième $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ colonne. Donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   — **Troisième méthode : espaces vectoriel engendré par les lignes.** Il se trouve que la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes égal la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes (car $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$). Comme les deuxième et troisième lignes sont linéairement indépendantes alors $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   Attention : les dimensions des espaces vectoriels engendrés sont égales mais les espaces sont différents !
2. En utilisant la dernière méthode : le rang est exactement 2 si la première ligne est dans le sous-espace engendré par les deux autres. Donc

$$\begin{array}{rl} \mathrm{rg}(A) = 2 & \iff (a,2,-1,b) \in \mathrm{Vect}\{(3,0,1,-4),(5,4,-1,2)\} \\ & \iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (a,2,-1,b) = \lambda(3,0,1,-4) + \mu(5,4,-1,2) \\ & \iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3\lambda + 5\mu & = & a \\ 4\mu & = & 2 \\ \lambda - \mu & = & -1 \\ -4\lambda + 2\mu & = & b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -\frac{1}{2} \\ \mu & = & \frac{1}{2} \\ a & = & 1 \\ b & = & 3 \end{array} \right. \end{array}$$

   Conclusion la rang de A est 2 si $(a,b) = (1,3)$. Sinon le rang de A est 3.

Correction de l'exercice 1327 ▲

2. Si $A, B \in \mathscr{D}$ et $AB = I$, alors pour $i \neq j$, $\forall\, k$, $a_{ik}b_{kj} = 0$.
Soit $a_{i1} \neq 0$: alors $b_{1j} = 0$ pour tout $j \neq i$, donc $a_{i1} = b_{1i} = 1$.
Donc chaque colonne de A contient $n-1$ fois 0 et une fois 1. A est inversible $\Rightarrow$ A est une matrice de permutation.

Correction de l'exercice 1329 ▲

1.

2. $X = \begin{pmatrix} \alpha & 1+\beta \\ -2\alpha & 1-2\beta \\ 1+\alpha & \beta \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1330 ▲

$B = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & a \\ b+2 & 2b+3 & b \\ c+2 & 2c+1 & c \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1331 ▲

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C_n^2 & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1333 ▲

1. $\begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a = \frac{1}{n}\left((2n-1)^k + (n-1)(-1)^k\right) \\ b = \frac{1}{n}\left((2n-1)^k - (-1)^k\right). \end{cases}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2+k & \frac{1}{3}(4k^3+6k^2+2k) \\ 0 & 1 & 2k & 2k^2+k \\ 0 & 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\right]^k = (x^2+y^2+z^2)^{k-1}A.$

Correction de l'exercice 1334 ▲

Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} y & \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh} y & \operatorname{ch} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y & \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y & \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x+y) & \operatorname{sh}(x+y) \\ \operatorname{sh}(x+y) & \operatorname{ch}(x+y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$A(x)A(-x) = A(-x)A(x) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

et $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$.
On a aussi, pour n entier naturel non nul donné :

$$(A(x))^n = A(x)A(x)...A(x) = A(x+x...+x) = A(nx),$$

ce qui reste clair pour $n=0$ car $A(x)^0 = I_2 = A(0)$. Enfin, $(A(x))^{-n} = (A(x)^{-1})^n = A(-x)^n = A(-nx)$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (A(x))^n = A(nx) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(nx) & \operatorname{sh}(nx) \\ \operatorname{sh}(nx) & \operatorname{ch}(nx) \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1335 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^p$. Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on a $f(e_k) = e_{p+1-k}$ et donc $f^2(e_k) = e_k$. Ainsi, $A^2 = I_p$. Mais alors, il est immédiat que, pour n entier naturel donné, $A^n = I_p$ si n est pair et $A^n = A$ si n est impair.

Correction de l'exercice 1336 ▲

Pour $x \in]-1,1[$, posons $M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Posons ensuite $G = \{M(x),\ x \in]-1,1[\}$.

Soit alors $x \in]-1,1[$. Posons $a = \operatorname{argth} x$ de sorte que $x = \operatorname{th} a$. On a

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{ch} a\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{th} a \\ \operatorname{th} a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix}.$$

Posons, pour $a \in \mathbb{R}$, $N(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix}$. On a ainsi $\forall x \in]-1,1[$, $M(x) = N(\operatorname{argth} x)$ ou aussi, $\forall a \in \mathbb{R}$, $N(a) = M(\operatorname{th} a)$. Par suite, $G = \{N(a),\ a \in \mathbb{R}\}$.

Soit alors $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} N(a)N(b) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{ch} b & \operatorname{sh} b \\ \operatorname{sh} b & \operatorname{ch} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a\operatorname{sh} b & \operatorname{sh} a\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b\operatorname{ch} a \\ \operatorname{sh} a\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b\operatorname{ch} a & \operatorname{ch} a\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a\operatorname{sh} b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a+b) & \operatorname{sh}(a+b) \\ \operatorname{sh}(a+b) & \operatorname{ch}(a+b) \end{pmatrix} = N(a+b). \end{aligned}$$

Montrons alors que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

$N(0) = I_2 \in G$ et donc G est non vide.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\det(N(a)) = \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1 \neq 0$ et donc $G \subset \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $N(a)N(b) = N(a+b) \in G$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $(N(a))^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & -\operatorname{sh} a \\ -\operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix} = N(-a) \in G$.

On a montré que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Correction de l'exercice 1337 ▲

Par hypothèse, $a_{i,j} = 0$ pour $j \leqslant i+r-1$ et $bi,j = 0$ pour $j \leqslant i+s-1$.

Soient i et j deux indices tels que $j \leqslant i+r+s-1$. Le coefficient ligne i, colonne j, de AB vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

Dans cette somme, si $k \leqslant i+r-1$, $a_{i,k} = 0$. Sinon $k \geqslant i+r$ et donc $j \leqslant i+r+s-1 \leqslant k+s-1$ et dans ce cas $b_{k,j} = 0$.

Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de AB est bien nul si $j \leqslant i+r+s-1$.

Correction de l'exercice 1340 ▲

1. Soit $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. $MX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $u(2i-3j+5k) = i+2j-3k$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ -3x-y+z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=x \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}u = \mathrm{Vect}(i-2j+k)$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}u) = 1$ et, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}u = 2$. Or, $u(j) = i-j$ et $u(k) = j+k$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}u$ qui est un plan vectoriel et donc $\mathrm{Im}u = \mathrm{Vect}(i-j, j-k)$.

3.
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et
$$M^3 = M^2.M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

4. $\mathrm{Ker}u^2$ est à l'évidence le plan d'équation $x+y+z=0$. Une base de $\mathrm{Ker}u^2$ est $(i-j, j-k)$ et donc $\mathrm{Ker}u^2 = \mathrm{Im}u = \mathrm{Vect}(i-j, j-k)$.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}u^2$ est une droite vectorielle. Mais $u^3 = 0$ s'écrit encore $u \circ u^2 = 0$, et donc $\mathrm{Im}u^2$ est contenue dans $\mathrm{Ker}u$ qui est une droite vectorielle. Donc, $\mathrm{Im}u^2 = \mathrm{Ker}u = \mathrm{Vect}(i-2j+k)$.
5. $(I-M)(I+M+M^2) = I-M^3 = I$. Par suite, $I-M$ est inversible à droite et donc inversible et
$$(I-M)^{-1} = I+M+M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1341 ▲

1. Pour P élément de $\mathbb{R}_n[X]$,
$$f(P) = e^{X^2}(Pe^{-X^2})' = e^{X^2}(P'e^{-X^2} - 2XPe^{-X^2}) = P' - 2XP.$$
Ainsi, si P est un polynôme de degré infèrieur ou égal à n, $f(P) = P' - 2XP$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$, et f est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
De plus, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :
$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' - 2X(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P' - 2XP) + \mu(Q' - 2XQ) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$
f est élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.
2. La matrice A cherchée est élément de $\mathscr{M}_{n+1,n}(\mathbb{R})$.
Pour $k=0$, $f(X^k) = f(1) = -2X$ et pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $f(X^k) = kX^{k-1} - 2X^{k+1}$. On a donc :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & n \\ \vdots & & & \ddots & -2 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0$.
Si P n'est pas nul, $-2XP$ a un degré strictement plus grand que P' et donc $f(P)$ n'est pas nul. Par suite, $\mathrm{Ker}f = \{0\}$ (f est donc injective) et d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}f = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 0 = n+1$, ce qui montre que $\mathrm{Im}f$ n'est pas $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (f n'est pas surjective).

Correction de l'exercice 1342 ▲

1.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&m\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1/12&1/12\\1/3&1/12&m-\frac{1}{9}\end{pmatrix}\quad(\operatorname{rg}(C_1,C_2,C_3)=\operatorname{rg}(C_1,C_2-\frac{1}{2}C_1,C_3-\frac{1}{3}C_1))$$

$$=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1/12&0\\1/3&1/12&m-\frac{7}{36}\end{pmatrix}\quad(\operatorname{rg}(C_1,C_2,C_3)=\operatorname{rg}(C_1,C_2,C_3-C_2))$$

Si $m=\frac{7}{36}$, $\operatorname{rg}A=2$ (on note alors que $C_1=6(C_2-C_3)$) et si $m\neq\frac{7}{36}$, $\operatorname{rg}A=3$ et A est inversible.

2.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&c+a&a+b\\bc&ca&ab\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\b+c&a-b&a-c\\bc&c(a-b)&b(a-c)\end{pmatrix}\quad(\operatorname{rg}(C_1,C_2,C_3)=\operatorname{rg}(C_1,C_2-C_1,C_3-C_1))$$

1er cas. si a, b et c sont deux à deux distincts.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\b+c&1&1\\bc&c&b\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\b+c&1&0\\bc&c&b-c\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\b+c&1&0\\bc&c&1\end{pmatrix}.$$

Donc, si a, b et c sont deux à deux distincts alors $\operatorname{rg}A=3$.

2ème cas. Si $b=c\neq a$ (ou $a=c\neq b$ ou $a=b\neq c$). A a même rang que $\begin{pmatrix}1&0&0\\b+c&1&1\\bc&c&b\end{pmatrix}$ puis que $\begin{pmatrix}1&0&0\\b+c&1&0\\bc&c&0\end{pmatrix}$. Donc, si $b=c\neq a$ ou $a=c\neq b$ ou $a=b\neq c$, $\operatorname{rg}A=2$.

3ème cas. Si $a=b=c$, il est clair dès le départ que A est de rang 1.

3. Puisque $\operatorname{rg}(C_1,C_2,C_3,C_4)=\operatorname{rg}(C_1,C_2-aC_1,C_3-C_1,C_4-bC_1)$,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&a&1&b\\a&1&b&1\\1&b&1&a\\b&1&a&1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1-a^2&b-a&1-ab\\1&b-a&0&a-b\\b&1-ab&a-b&1-b^2\end{pmatrix}=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-a^2&b-a&1-ab\\b-a&0&a-b\\1-ab&a-b&1-b^2\end{pmatrix}$$

1er cas. Si $a\neq b$.

$$\operatorname{rg}A=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-a^2&b-a&1-ab\\b-a&0&a-b\\1-ab&a-b&1-b^2\end{pmatrix}=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-a^2&1&1-ab\\1&0&-1\\1-ab&-1&1-b^2\end{pmatrix}$$

$$=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1-a^2&1&1-ab\\1-ab&-1&1-b^2\end{pmatrix}\quad(\operatorname{rg}(L_1,L_2,L_3)=\operatorname{rg}(L_2,L_1,L_3)).$$

$$=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\1-a^2&1&2-a^2-ab\\1-ab&-1&2-b^2-ab\end{pmatrix}=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\1-a^2&1&0\\1-ab&-1&(2-b^2-ab)-(2-a^2-ab)\end{pmatrix}$$

$$=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\1-a^2&1&0\\1-ab&-1&(a-b)(a+b)\end{pmatrix}$$

Si $|a|\neq|b|$, $\operatorname{rg}A=4$ et si $a=-b\neq0$, $\operatorname{rg}A=3$.

2ème cas. Si $a=b$.

$$\text{rg}A = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Si $a=b=\pm1$, $\text{rg}A=1$ et si $a=b\neq\pm1$, $\text{rg}A=2$.

4. Pour $n\geqslant 2$ et $j\in\{1,...,n\}$, notons C_j la j-ème colonne de la matrice proposée.

$$C_j = (i+j+ij)_{1\leqslant i\leqslant n} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n} + j(i+1)_{1\leqslant i\leqslant n} = jU+V,$$

avec $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ i+1 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\forall j\in\{1,...,n\}$, $C_j\in\text{Vect}(U,V)$ ce qui montre que $\text{rg}A\leqslant 2$. De plus, la matrice extraite $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (lignes et colonnes 1 et 2) est inversible et finalement $\text{rg}A=2$.

5. On suppose $n\geqslant 2$. La j-ème colonne de la matrice s'écrit

$$C_j = (\sin i\cos j+\sin j\cos i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \sin jC+\cos jS \text{ avec } C=(\cos i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ et } S=(\sin i)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Par suite, $\forall j\in\{1,...,n\}$, $C_j\in\text{Vect}(C,S)$ ce qui montre que $\text{rg}A\leqslant 2$. De plus, la matrice extraite formée des termes lignes et colonnes 1 et 2 est inversible car son déterminant vaut $\sin 2\sin 4-\sin^2 3 = -0,7...\neq 0$ et finalement $\text{rg}A=2$.

6. Déterminons $\text{Ker}A$. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\text{Ker}A \Leftrightarrow \forall i\in\{1,...,n-1\},\ ax_i+bx_{i+1}=0 \text{ et} bx_1+ax_n=0\ (S).$$

1er cas. Si $a=b=0$, alors clairement $\text{rg}A=0$.
2ème cas. Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors $(S)\Leftrightarrow\forall i\in\{1,...,n\}\ x_i=0$. Dans ce cas, $\text{Ker}A=\{0\}$ et donc $\text{rg}A=n$.
3ème cas. Si $a\neq 0$. Posons $\alpha=-\frac{b}{a}$.

$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \forall k\in\{1,...,n-1\},\ x_k=\alpha x_{k+1} \text{ et } x_n=\alpha x_1 \\ &\Leftrightarrow \forall k\in\{1,...,n\},\ x_k=\alpha^{-(k-1)}x_1 \text{ et } x_n=\alpha x_1 \\ &\Leftrightarrow \forall k\in\{1,...,n\},\ x_k=\alpha^{k-1}x_1 \text{ et } \alpha^n x_1=x_1\end{aligned}$$

Mais alors, si $\alpha^n\neq 1$, le système (S) admet l'unique solution $(0,...,0)$ et $\text{rg}A=n$, et si $\alpha^n=1$, $\text{Ker}A=\text{Vect}((1,\alpha^{n-1},...,\alpha^2,\alpha))$ est de dimension 1 et $\text{rg}A=n-1$.

En résumé, si $a=b=0$, $\text{rg}A=0$ et si $a=0$ et $b\neq 0$, $\text{rg}A=n$. Si $a\neq 0$ et $-\frac{b}{a}\in U_n$, $\text{rg}A=n-1$ et si $a\neq 0$ et $-\frac{b}{a}\notin U_n$, $\text{rg}A=n$.

Correction de l'exercice 1343 ▲

(C'est en fait un exercice sur les polynômes de TCHEBYCHEV de 1ère espèce et vous pouvez généraliser cet exercice en passant au format n au lieu du format 4.)

Si on note C_j, $j\in\{1,2,3,4\}$, la j-ème colonne de A alors $C_j=(\cos(i+j-2)a)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ puis pour j élément de $\{1,2\}$,

$$C_{j+2}+C_j = (2\cos(i+j-1)a\cos a)_{1\leqslant i\leqslant 4} = 2\cos aC_{j+1}$$

et donc $C_3 = 2\cos aC_2 - C_1 \in \mathrm{Vect}(C_1,C_2)$ et $C_4 = 2\cos aC_3 - C_2 \in \mathrm{Vect}(C_2,C_3) \subset \mathrm{Vect}(C_1,C_2)$.
Donc $\mathrm{Vect}(C_1,C_2,C_3,C_4) = \mathrm{Vect}(C_1,C_2)$ et $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(C_1,C_2) \leqslant 2$.
Enfin $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \end{vmatrix} = \cos(2a) - \cos^2 a = \cos^2 a - 1 = -\sin^2 a$.
• Si a n'est pas dans $\pi\mathbb{Z}$, ce déterminant n'est pas nul et donc les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, $\mathrm{rg}A = 2$.
• Si a est dans $\pi\mathbb{Z}$, la première colonne n'est pas nulle et les autres colonnes lui sont colinéaires. Dans ce cas, $\mathrm{rg}A = 1$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2 \text{ si } a \notin \pi\mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ si } a \in \pi\mathbb{Z}.}$$

Correction de l'exercice 1344 ▲

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, notons C_j la j-ème colonne de la matrice A. Posons encore $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$Cj = (i + j(i+1))_{1\leqslant i\leqslant n} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n} + j(i+1)_{1\leqslant i\leqslant n} = U + jV.$$

Donc $\mathrm{Vect}(C_1,...,C_n) \subset \mathrm{Vect}(U,V)$ et en particulier, $\mathrm{rg}A \leqslant 2$. Maintenant, si $n \geqslant 2$, les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Donc, si $n \geqslant 2$, $\mathrm{rg}A = 2$ et si $n = 1$, $\mathrm{rg}A = 1$.

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2,\ \mathrm{rg}(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 2 \text{ et si } n = 1,\ \mathrm{rg}(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 1.}$$

Correction de l'exercice 1345 ▲

On note r le rang de A. Si $r = 0$, A est nulle et donc B est nulle.
Sinon, il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soient $P' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ et $Q' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$. Puisque $\det(P') = (\det(P))^p \neq 0$ et $\det(Q') = (\det(Q))^p \neq 0$, les matrices P' et Q' sont inversibles. De plus, un calcul par blocs montre que

$$B = \begin{pmatrix} PJ_rQ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & PJ_rQ \end{pmatrix} = P'J'_rQ' \text{ où } J'_r = \begin{pmatrix} J_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}.$$

La matrice B est équivalente a la matrice J'_r et a donc même rang que J'_r. Enfin, en supprimant les lignes nulles et les colonnes nulles, on voit que la matrice J'_r a même rang que la matrice I_{pr} à savoir pr. Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\mathrm{rg}B = p\mathrm{rg}A.}$$

Correction de l'exercice 1346 ▲

Soit r le rang de H. Il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $H = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'égalité $HAH = \lambda_A H$ s'écrit après simplifications $J_rQAPJ_r = \lambda_A J_r$. Maintenant , quand A décrit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $B = QAP$ décrit également $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (par exemple, l'application qui à A associe QAP est une permutation de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de réciproque l'application qui à A associe $Q^{-1}AP^{-1}$).

L'énoncé s'écrit maintenant de manière plus simple : montrons que $(\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists \lambda_B \in \mathbb{K}/\ J_rBJ_r = \lambda_B J_r) \Rightarrow r \leqslant 1$.

Un calcul par blocs fournit en posant $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$

$$J_rBJ_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais si $r \geqslant 2$, il existe des matrices carrées B_1 de format r qui ne sont pas des matrices scalaires et donc telles que B_1 n'est pas colinéaire à I_r. Donc $r \leqslant 1$.

Correction de l'exercice 1347 ▲

$(1) \Rightarrow (2)$.

$M^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}M \subset \mathrm{Ker}M \Rightarrow \mathrm{rg}M \leqslant \dim(\mathrm{Ker}M) = 3 - \mathrm{rg}M$ et donc $\mathrm{rg}M \leqslant 1$.

Si $\mathrm{rg}M = 0$ alors $\mathrm{Tr}M = 0$. On suppose maintenant que $\mathrm{rg}M = 1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}M) = 2$.

Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}M$ alors il existe un vecteur e_3 (non nul) tel que $Me_3 = e_1$.

On complète la famille libre (e_1) de $\mathrm{Im}M \subset \mathrm{Ker}M$ en (e_1, e_2) base de $\mathrm{Ker}M$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Rightarrow M(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0 \Rightarrow ce_1 = 0 \Rightarrow c = 0,$$

puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.

M est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en particulier $\mathrm{Tr}M = 0$.

$(2) \Rightarrow (1)$.

Si $\mathrm{rg}M = 0$, $M^2 = 0$.

Si $\mathrm{rg}M = 1$, on peut se rappeler de l'écriture générale d'une matrice de rang 1 : il existe trois réels u_1, u_2 et u_3 non tous nuls et trois réels v_1, v_2 et v_3 non tous nuls tels que $M = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$ ou encore il existe deux vecteurs colonnes, tous deux non nuls U et V tels que $M = U^tV$. L'égalité $\mathrm{Tr}M = 0$ fournit $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ ou encore ${}^tUV = 0$. Mais alors

$$M^2 = U^tVU^tV = U^t({}^tUV)^tV = 0$$

Cet exercice admet des solutions bien plus brèves avec des connaissances sur la réduction .

Correction de l'exercice 1354 ▲

L'expression de f dans la base $\mathscr{B}$ est la suivante $f(x,y) = (x - y, 0)$. Autrement dit à un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on associe le vecteur $\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}$. On note que f est bien une application linéaire. Cette expression nous permet de calculer les matrices demandées.

Remarque : comme $\mathscr{B}$ est la base canonique on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ qui est le vecteur $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

1. Calcul de $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{B})$. Comme $\mathscr{B}=(\vec{i},\vec{j})$, la matrice s'obtient en calculant $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$:

$$f(\vec{i})=f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\vec{i}\quad f(\vec{j})=f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=-\vec{i}$$

donc

$$\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{B})=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

2. On garde la même application linéaire mais la base de départ change (la base d'arrivée reste $\mathscr{B}$). Si on note $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}$, on a $\mathscr{B}'=(\vec{i}-\vec{j},-2\vec{i}+3\vec{j})=(\vec{u},\vec{v})$. On exprime $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ dans la base d'arrivée $\mathscr{B}$.

$$f(\vec{u})=f(\vec{i}-\vec{j})=f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\quad f(\vec{v})=f(-2\vec{i}+3\vec{j})=f\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}',\mathscr{B})=\begin{pmatrix}2&-5\\0&0\end{pmatrix}$$

3. Toujours avec le même f on prend $\mathscr{B}'$ comme base de départ et d'arrivée, il s'agit donc d'exprimer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ dans la base $\mathscr{B}'=(\vec{u},\vec{v})$. Nous venons de calculer que

$$f(\vec{u})=f(\vec{i}-\vec{j})=f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=2\vec{i}\quad f(\vec{v})=f(2\vec{i}+3\vec{j})=f\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}=-5\vec{i}$$

Mais il nous faut obtenir une expression en fonction de la base $\mathscr{B}'$. Remarquons que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\vec{u}&=&\vec{i}-\vec{j}\\ \vec{v}&=&-2\vec{i}+3\vec{j}\end{array}\right.\implies\left\{\begin{array}{rcl}\vec{i}&=&3\vec{u}+\vec{v}\\ \vec{j}&=&2\vec{u}+\vec{v}\end{array}\right.$$

Donc

$$f(\vec{u})=f(\vec{i}-\vec{j})=2\vec{i}=6\vec{u}+2\vec{v}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}\qquad f(\vec{v})=f(-2\vec{i}+3\vec{j})=-5\vec{i}=-15\vec{u}-5\vec{v}=\begin{pmatrix}-15\\-5\end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}',\mathscr{B}')=\begin{pmatrix}6&-15\\2&-5\end{pmatrix}$$

Remarque : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$ désigne le vecteur $x\vec{u}+y\vec{v}$.

Correction de l'exercice 1360 ▲

1. Nous devons montrer $f\cap\mathrm{Im}\,f=\{0\}$ et $f+\mathrm{Im}\,f=E$.
   (a) Si $x\in f\cap\mathrm{Im}\,f$ alors d'une part $f(x)=0$ et d'autre part il existe $x'\in E$ tel que $x=f(x')$. Donc $0=f(x)=f\big(f(x')\big)=f(x')=x$ donc $x=0$ (on a utilisé $f\circ f=f$). Donc $f\cap\mathrm{Im}\,f=\{0\}$.
   (b) Pour $x\in E$ on le réécrit $x=x-f(x)+f(x)$. Alors $x-f(x)\in f$ (car $f\big(x-f(x)\big)=f(x)-f\circ f(x)=0$) et $f(x)\in\mathrm{Im}\,f$. Donc $x\in f+\mathrm{Im}\,f$. Donc $f+\mathrm{Im}\,f=E$.
   (c) Conclusion : $E=f\oplus\mathrm{Im}\,f$.
2. Notons r le rang de f : $r=\dim\mathrm{Im}\,f$. Soit $\{e_1,\dots,e_r\}$ une base de $\mathrm{Im}\,f$ et soit $\{e_{r+1},\dots,e_n\}$ une base de f. Comme $E=f\oplus\mathrm{Im}\,f$ alors $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. Pour $i>r$ alors $e_i\in f$ donc $f(e_i)=0$. Comme $f\circ f=f$ alors pour n'importe quel $x\in\mathrm{Im}\,f$ on a $f(x)=x$: en effet comme $x\in\mathrm{Im}\,f$, il existe $x'\in E$ tel que $x=f(x')$ ainsi $f(x)=f\big(f(x')\big)=f(x')=x$. En particulier si $i\leqslant r$ alors $f(e_i)=e_i$.

3. La matrice de f dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$ est donc :
$$\begin{pmatrix} I & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$
où I désigne la matrice identité de taille $r\times r$ et les (0) désignent des matrices nulles.

Correction de l'exercice 1361 ▲

1. Il est facile de voir que $f(\lambda P+\mu Q)=\lambda f(P)+\mu f(Q)$ donc f est linéaire, de plus, P étant un polynôme de degré $\leqslant n$ alors $f(P)$ aussi.
2. Pour $n=3$ on calcule l'image de chacun des éléments de la base :
$$f(1)=1+1-2=0,\quad f(X)=(X+1)+(X-1)-2X=0,$$
$$f(X^2)=(X+1)^2+(X-1)^2-2X^2=2,\quad f(X^3)=(X+1)^3+(X-1)^3-2X^3=6X.$$
Donc la matrice de f dans la base $(1,X,X^2,X^3)$ est
$$\begin{pmatrix} 0&0&2&0\\ 0&0&0&6\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$
Pour le cas général on calcule
$$\begin{aligned} f(X^p)&=(X+1)^p+(X-1)^p-2X^p\\ &=\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}X^k+\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}X^k(-1)^{p-k}-2X^p\\ &=\sum_{p-k \text{ pair et } k<p} 2\binom{p}{k}X^k \end{aligned}$$
Donc la matrice est
$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 2\binom{2}{0} & 0 & \cdots & 2\binom{p}{0} & 0 & \\
 & 0 & 0 & 2\binom{3}{1} & & 0 & 2\binom{p+1}{1} & \\
 & & 0 & 0 & \cdots & 2\binom{p}{2} & 0 & \\
 & & & 0 & & 0 & 2\binom{p+1}{3} & \vdots \\
 & & & & \ddots & \vdots & 0 & \\
 & & & & & 0 & \vdots & \\
 & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$
Dans cet exemple de matrice, p est pair. Chaque colonne commence en alternant une valeur nulle/une valeur non-nulle jusqu'à l'élément diagonal (qui est nul).
3. Nous savons que $f(1)=0$ et $f(X)=0$ donc 1 et X sont dans le noyau f. Il est aussi clair que les colonnes de la matrices $f(X^2),\cdots,f(X^n)$ sont linéairement indépendantes (car la matrice est échelonnée). Donc $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}\{f(X^2),f(X^3),\ldots,f(X^n)\}$ et $\dim\operatorname{Im} f=n-1$.
Par la formule du rang $\dim f+\dim\operatorname{Im} f=\dim\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim f=2$. Comme nous avons déjà deux vecteurs du noyau alors $f=\operatorname{Vect}\{1,X\}$.
4. (a) Soit $Q\in\operatorname{Im} f$. Il existe donc $R\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(R)=Q$. On pose ensuite $P(X)=R(X)-R(0)-R'(0)X$. On a tout fait pour que $P(0)=0$ et $P'(0)=0$. De plus par la linéarité de f et son noyau alors
$$f(P)=f\big(R(X)-R(0)-R'(0)X\big)=f\big(R(X)\big)-R(0)f(1)-R'(0)f(X)=f(R)=Q.$$
Donc notre polynôme P convient.

(b) Montrons l'unicité. Soient P et $\tilde{P}$ tels que $f(P) = f(\tilde{P}) = Q$ avec $P(0) = P'(0) = 0 = \tilde{P}(0) = \tilde{P}'(0)$. Alors $f(P - \tilde{P}) = Q - Q = 0$ donc $P - \tilde{P} \in f = \mathrm{Vect}\{1, X\}$. Ainsi $P - \tilde{P}$ s'écrit $P - \tilde{P} = aX + b$. Mais comme $(P - \tilde{P})(0) = 0$ alors $b = 0$, et comme $(P - \tilde{P})'(0) = 0$ alors $a = 0$. Ce qui prouve $P = \tilde{P}$.

Correction de l'exercice 1364 ▲

1. On note la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = xe_1 + ye_2 + ze_3$. La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est composée des vecteurs colonnes $\phi(e_i)$, on sait

$$\phi(e_1) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad \phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad \phi(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\text{donc} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le noyau de ϕ (ou celui de A) est l'ensemble de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$.

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y & = & 0 \\ y & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \end{cases}$$

Donc $\phi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3)$. Le noyau est donc de dimension 1.

2. On applique le pivot de Gauss comme si c'était un système linéaire :

$$\begin{cases} e_1 & & - & e_3 & = & f_1 & L_1 \\ e_1 & - & e_2 & & = & f_2 & L_2 \\ -e_1 & + & e_2 & + \ e_3 & = & f_3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 & & - \ e_3 & = & f_1 & \\ & - \ e_2 & + \ e_3 & = & f_2 - f_1 & L_2 - L_1 \\ & e_2 & & = & f_3 + f_1 & L_3 + L_1 \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} e_1 & = & f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 & = & f_1 + f_3 \\ e_3 & = & f_2 + f_3 \end{cases}$$

Donc tous les vecteurs de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ s'expriment en fonction de (f_1, f_2, f_3), ainsi la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice. Comme elle a exactement 3 éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 alors $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base.

3.

$$\phi(f_1) = \phi(e_1 - e_3) = \phi(e_1) - \phi(e_3) = e_3 - e_3 = 0$$

$$\phi(f_2) = \phi(e_1 - e_2) = \phi(e_1) - \phi(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_2 = f_2$$

$$\phi(f_3) = \phi(-e_1 + e_2 + e_3) = -\phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3 = f_3$$

Donc, dans la base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$, nous avons

$$\phi(f_1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \qquad \phi(f_2) = f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \qquad \phi(f_3) = f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

Donc la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ϕ est la projection sur $\mathrm{Vect}(f_2, f_3)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(f_1)$ (autrement dit c'est la projection sur le plan d'équation $(x' = 0)$, parallèlement à l'axe des x', ceci dans la base $\mathscr{B}'$).

4. P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$. En effet la matrice de passage contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}$.
   Si un vecteur a pour coordonnées X dans la base $\mathscr{B}$ et X' dans la base $\mathscr{B}'$ alors $PX' = X$ (attention à l'ordre). Et si A est la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$ et B est la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$ alors

$$B = P^{-1}AP$$

   (Une matrice de passage entre deux bases est inversible.)
   Ici on calcule l'inverse de P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On retrouve donc bien les mêmes résultats que précédemment.

Correction de l'exercice 1365 ▲

Posons : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, e_{4,\beta} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notons $\varphi_{\alpha,\beta}$ l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ et $F = \mathrm{Vect}\,\{e_1, e_2\}$. Par définition de la matrice associée à une application linéaire, $\mathrm{Im}\,(\varphi_{\alpha,\beta}) = \mathrm{Vect}\,\{e_1, e_2, e_{3,\alpha}, e_{4,\beta}\}$. En particulier, $F \subset \mathrm{Im}\,(\varphi_{\alpha,\beta})$. Comme e_1 et e_2 sont linéairement indépendants, $\mathrm{rg}(\varphi_{\alpha,\beta}) \geqslant 2$. Ainsi $\varphi_{\alpha,\beta}$ est surjective si et seulement si l'un des deux vecteurs $e_{3,\alpha}$ ou $e_{4,\beta}$ n'appartient pas à F. En ce cas en effet, $\mathrm{rg}(\varphi_{\alpha,\beta}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Or $e_{3,\alpha}$ et $e_{4,\beta}$ appartiennent à F si et seulement si il existe $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ tels que : $e_{3,\alpha} = \lambda e_1 + \mu e_2$ et $e_{4,\beta} = \lambda' e_1 + \mu' e_2$. Un petit calcul montre donc que $\varphi_{\alpha,\beta}$ n'est pas surjective si et seulement si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$. Donc $\varphi_{\alpha,\beta}$ est surjective si et seulement si $\alpha \neq 22$ ou $\beta \neq 4$.

Correction de l'exercice 1366 ▲

1. (a) Commençons par des remarques élémentaires : la matrice est non nulle donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$ et comme il y a $p = 4$ lignes et $n = 3$ colonnes alors $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p) = 3$.
   (b) Ensuite on va montrer $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$ en effet le sous-déterminant 2×2 (extrait du coin en haut à gauche) : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ est non nul.
   (c) Montrons que $\mathrm{rg}(A) = 2$. Avec les déterminants il faudrait vérifier que pour toutes les sous-matrices 3×3 les déterminants sont nuls. Pour éviter de nombreux calculs on remarque ici que les colonnes sont liées par la relation $v_2 = v_1 + v_3$. Donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.
   (d) L'application linéaire associée à la matrice A est l'application $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Et le théorème du rang $\dim f_A + \dim \mathrm{Im}\, f_A = \dim \mathbb{R}^3$ donne ici $\dim f_A = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1$.
   Mais la relation $v_2 = v_1 + v_3$ donne immédiatement un élément du noyau : en écrivant $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ alors $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in f_A$. Et comme le noyau est de dimension 1 alors

$$f_A = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) Pour un base de l'image, qui est de dimension 2, il suffit par exemple de prendre les deux premiers vecteurs colonnes de la matrice A (ils sont clairement non colinéaires) :

$$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2\} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

2. On fait le même travail avec B et f_B.

(a) Matrice non nulle avec 4 lignes et 4 colonnes donc $1 \leqslant \operatorname{rg}(B) \leqslant 4$.

(b) Comme le sous-déterminant (du coin supérieur gauche) $\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & 3\end{vmatrix} = -2$ est non nul alors $\operatorname{rg}(B) \geqslant 2$.

(c) Et pareil avec le sous-déterminant 3×3 :

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\4 & 3 & -1\\0 & -1 & 2\end{vmatrix} = -2$$

qui est non nul donc $\operatorname{rg}(B) \geqslant 3$.

(d) Maintenant on calcule le déterminant de la matrice B et on trouve $\det B = 0$, donc $\operatorname{rg}(B) < 4$. Conclusion $\operatorname{rg}(B) = 3$. Par le théorème du rang alors $\dim f_B = 1$.

(e) Cela signifie que les colonnes (et aussi les lignes) sont liées, comme il n'est pas clair de trouver la relation à la main on résout le système $BX = 0$ pour trouver cette relation ; autrement dit :

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 7\\4 & 3 & -1 & 11\\0 & -1 & 2 & -4\\3 & 3 & -2 & 11\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{rcl}2x+2y-z+7t & = & 0\\4x+3y-z+11t & = & 0\\-y+2z-4t & = & 0\\3x+3y-2z+11t & = & 0\end{array}\right.$$

Après résolution de ce système on trouve que les solutions s'écrivent $(x, y, z, t) = (-\lambda, -2\lambda, \lambda, \lambda)$. Et ainsi

$$f_B = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Et pour une base de l'image il suffit, par exemple, de prendre les 3 premiers vecteurs colonnes v_1, v_2, v_3 de la matrice B, car ils sont linéairement indépendants :

$$\operatorname{Im} f_B = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Correction de l'exercice 1367 ▲

$\mathscr{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$ donc est de dimension finie n^2. La famille $\{id_E, \varphi, \dots, \varphi^{n^2}\}$ compte n^2+1 vecteurs donc est liée c'est à dire : il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ dans $\mathbb{R}$, non tous nuls et tels que $\lambda_0 id_E + \lambda_1\varphi + \cdots + \lambda_{n^2}\varphi^{n^2} = 0$. Le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ répond donc à la question.

Correction de l'exercice 1368 ▲

Nous associons à la matrice A son application linéaire naturelle f. Si $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors $f(e_1)$ est donné par le premier vecteur colonne, $f(e_2)$ par le deuxième, etc. Donc ici

$$f(e_1)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=e_n,\ f(e_2)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=e_{n-1},\dots \quad \text{et en général } f(e_i)=e_{n+1-i}$$

Calculons ce que vaut la composition $f\circ f$. Comme une application linéaire est déterminée par les images des éléments d'une base alors on calcule $f\circ f(e_i)$, $i=1,\dots,n$ en appliquant deux fois la formule précédente :

$$f\circ f(e_i)=f\big(f(e_i)\big)=f(e_{n+1-i})=e_{n+1-(n+1-i)}=e_i$$

Comme $f\circ f$ laisse invariant tous les vecteurs de la base alors $f\circ f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. Donc $f\circ f=\mathrm{id}$. On en déduit $f^{-1}=f$ et que la composition itérée vérifie $f^p=\mathrm{id}$ si p est pair et $f^p=f$ si p est impair. Conclusion : $A^p=I$ si p est pair et $A^p=A$ si p est impair.

Correction de l'exercice 1371 ▲

1. Notons P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}=\big((1,0),(0,1)\big)$ vers (ce qui va être) la base $\mathcal{B}'=(e_1,e_2)$. C'est la matrice composée des vecteurs colonnes e_1 et e_2 :

$$P=\begin{pmatrix}-2&-2\\3&5\end{pmatrix}$$

$\det P=-4\neq 0$ donc P est inversible et ainsi $\mathcal{B}'$ est bien une base.
Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$B=P^{-1}AP=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&2\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&\frac{2}{3}\\-\frac{5}{2}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2. Il est très facile de calculer la puissance d'une matrice diagonale :

$$B^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&(\frac{1}{3})^n\end{pmatrix}$$

Comme $A=PBP^{-1}$ on va en déduire A^n :

$$A^n=\big(PBP^{-1}\big)^n=PB^nP^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}10-\frac{6}{3^n}&4-\frac{4}{3^n}\\-15+\frac{15}{3^n}&-6+\frac{10}{3^n}\end{pmatrix}$$

3. Si l'on note $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ alors les équations que vérifient les suites s'écrivent en terme matriciel :

$$X_{n+1}=AX_n.$$

Si l'on note les conditions initiales $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ alors $X_n=A^nX_0$. On en déduit

$$\begin{cases}x_n&=&\frac{1}{4}\Big((10-\frac{6}{3^n})x_0+(4-\frac{4}{3^n})y_0\Big)\\ y_n&=&\frac{1}{4}\Big((-15+\frac{15}{3^n})x_0+(-6+\frac{10}{3^n})y_0\Big)\end{cases}$$

Correction de l'exercice 1374 ▲

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée $n \times n$. On veut démontrer le résultat suivant dû à Hadamard : Supposons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

1. *Montrons le résultat pour $n = 2$.*

   Dans ce cas, la matrice A s'écrit

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

   et les hypothèses deviennent

   $$|a_{11}| > |a_{12}| \text{ et } |a_{22}| > |a_{21}|.$$

   La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, or

   $$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

   et, compte tenu des hypothèses,

   $$|a_{11}a_{22}| = |a_{11}||a_{22}| > |a_{12}||a_{21}| = |a_{12}a_{21}|,$$

   ainsi$|a_{11}a_{22}| > |a_{12}a_{21}|$ donc $a_{12}a_{21} \neq a_{12}a_{21}$ et le déterminant est non nul.

2. Soit B, la matrice obtenue en remplaçant, pour $j \geqslant 2$, chaque colonne c_j de A par la colonne

   $$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$

   Calculons les b_{ij} en fonction des a_{ij}. Montrons que si les coefficients de A satisfont les inégalités ci-dessus, alors pour $i \geqslant 2$, on a

   $$|b_{ii}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |b_{ij}|.$$

   On a

   $$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{11}}{a}{}_{i1} \quad \text{si} \quad j \geqslant 2 \quad \text{et} \quad b_{i1} = a_{i1}.$$

   par l'inégalité triangulaire, on a

   $$\begin{aligned} \sum_{j=2, j\neq i} |b_{ij}| &= \sum_{j=2, j\neq i} |a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1}| \\ &\leqslant \sum_{j=2, j\neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{1j}||a_{11}|}{|} a_{i1}| \\ &= \sum_{j=2, j\neq i} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{\sum} {}_{j=2, j\neq i} |a_{1j}|. \end{aligned}$$

   Mais, par hypothèse, pour $i = 1$, on a

   $$\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}|,$$

   donc

   $$\sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|.$$

D'où, en remplaçant dans l'inégalité précédente

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2,j\neq i} |b_{ij}| &< \sum_{j=2,j\neq i} |a_{ij}| + |a_{i1}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|}a_{1i}| \\
&= \sum_{j=1,j\neq i} |a_{ij}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|}a_{1i}| \\
&< |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}||a_{11}|}{|}a_{1i}| \\
&\leqslant \left|a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{11}}{a_{1i}}\right| = |b_{ii}|.
\end{aligned}$$

3. *Démontrons le résultat de Hadamard pour n quelconque.*
   Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée $n \times n$, vérifiant pour tout $i \in \{1,\cdots,n\}$,

   $$|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

   On veut démontrer que A est inversible.
   Le résultat est vrai pour $n = 2$, d'après la question 1). Soit n arbitrairement fixé, supposons le résultat vrai pour $n-1$ et démontrons le pour n.
   On a $\det A = \det B$ où B est la matrice construite dans la question 2)

   $$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & (b_{ij\,(2\leqslant i,j\leqslant n)}) & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

   Or, la matrice $(b_{ij\,(2\leqslant i,j\leqslant n)})$ est une matrice carrée d'ordre $n-1$ qui vérifie les hypothèses de Hadamard, d'après la question 2). Elle est donc inversible par hypothèse de récurrence. Et, par conséquent, la matrice A est inversible car $a_{11} \neq 0$.

Correction de l'exercice 1375 ▲

Soient A et B des matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A.B = 0$.

1. Démontrons que $\operatorname{Im} B \subset \ker A$.
   Soit $y \in \operatorname{Im} B$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Bx$, d'où $Ay = ABx = 0$, ainsi $y \in \ker A$ ce qui prouve l'inclusion.
2. On suppose que le rang de A est égal à $n-1$, déterminons le rang de B.
   On a $\operatorname{rg} B = \dim \operatorname{Im} B$ et on sait que $\dim \operatorname{Im} A + \dim \ker A = n$ par conséquent, si $\operatorname{rg} A = n-1$ on a $\dim \ker A = 1$ et l'inclusion $\operatorname{Im} B \subset \ker A$ implique $\dim \operatorname{Im} B \leqslant 1$ or, B est supposée non nulle d'où $\dim \operatorname{Im} B = 1 = \operatorname{rg} B$.

Correction de l'exercice 1378 ▲

1. $\phi(P) = (-X-1)^{n-1} P\left(-\frac{1}{X+1}\right)$.
2. I.

Correction de l'exercice 1379 ▲

f n'est pas nul et donc $\dim(\operatorname{Ker} f) \leqslant 2$. Puisque $f^2 = 0$, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. En particulier, $\dim(\operatorname{Ker} f) \geqslant \operatorname{rg} f = 3 - \dim(\operatorname{Ker} f)$ et $\dim(\operatorname{Ker} f) \geqslant \frac{3}{2}$.
Finalement, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$. $\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel et $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle contenue dans $\operatorname{Ker} f$.
f n'est pas nul et donc il existe e_1 tel que $f(e_1) \neq 0$ (et en particulier $e_1 \neq 0$). Posons $e_2 = f(e_1)$. Puisque $f^2 = 0$, $f(e_2) = f^2(e_1) = 0$ et e_2 est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_3 de $\operatorname{Ker} f$ tel que (e_2, e_3) soit une base de $\operatorname{Ker} f$.

Montrons que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

$$\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3=0\Rightarrow f(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3)=0\Rightarrow \alpha e_2=0\Rightarrow \alpha=0 \text{ (car } e_2\neq 0).$$

Puis, comme $\beta e_2+\gamma e_3=0$, on obtient $\beta=\gamma=0$ (car la famille (e_2,e_3) est libre).
Finalement, $\alpha=\beta=\gamma=0$ et on a montré que (e_1,e_2,e_3) est libre. Puisque cette famille est de cardinal 3, c'est une base de R^3. Dans cette base, la matrice A de f s'écrit : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1382 ▲

1.
2. $M^{-1}=\frac{-a}{b(na+b)}U+\frac{1}{b}I$.
3.
4. $$M^n=\frac{(na+b)^n-b^n}{n}U+b^nI\Rightarrow\begin{cases} n \text{ pair} & : a=0, \text{ ou } -\frac{2b}{n},\ b=\pm 1\\ n \text{ impair} & : a=0,\ b=1.\end{cases}$$

Correction de l'exercice 1383 ▲

2. $M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1}\\ 0 & C^{-1}\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1385 ▲

1.
2. Si A est diagonale : $M=\begin{pmatrix}0&\dots&0&1\\1&\ddots&&0\\&\ddots&\ddots&\vdots\\0&&1&0\end{pmatrix}$. Si $a_{k\ell}\neq 0$: $M=I-\frac{\mathrm{tr}A}{a_{k\ell}}E_{\ell k}$.

Correction de l'exercice 1386 ▲

Avant de commencer la résolution nous allons faire une remarque importante : pour $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un vecteur (considéré comme une matrice à une seule colonne) alors nous allons calculer ${}^tXX$:

$${}^tXX=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2.$$

On note $\|X\|^2={}^tXX$: $\|X\|$ est la *norme* ou la *longueur* du vecteur X. De ce calcul on déduit d'une part que ${}^tXX\geqslant 0$. Et aussi que ${}^tXX\geqslant 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.

1. Nous allons montrer que $I+M$ est inversible en montrant que si un vecteur X vérifie $(I+M)X=0$ alors $X=0$.
   Nous allons estimer ${}^t(MX)(MX)$ de deux façons. D'une part c'est un produit de la forme ${}^tYY=\|Y\|^2$ et donc ${}^t(MX)(MX)\geqslant 0$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
{}^t(MX)(MX) &= {}^t(MX)(-X) \quad \text{car } (I+M)X = 0 \text{ donc } MX = -X \\
&= {}^tX{}^tM(-X) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB{}^tA \\
&= {}^tX(-M)(-X) \quad \text{car } {}^tM = -M \\
&= {}^tXMX \\
&= {}^tX(-X) \\
&= -{}^tXX \\
&= -\|X\|^2
\end{aligned}$$

Qui est donc négatif.
Seule possibilité $\|X\|^2 = 0$ donc $X = 0$ (= le vecteur nul) et donc $I+M$ inversible.

2. (a) Calculons A^{-1}.

$$A^{-1} = \left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right)^{-1} = \left((I+M)^{-1}\right)^{-1}\times(I-M)^{-1} = (I+M)\times(I-M)^{-1}$$

(n'oubliez pas que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

(b) Calculons ${}^tA$.

$$\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t\left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right) \\
&= {}^t\left((I+M)^{-1}\right)\times{}^t(I-M) \qquad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB{}^tA \\
&= \left({}^t(I+M)\right)^{-1}\times{}^t(I-M) \qquad \text{car } {}^t(A^{-1}) = \left({}^tA\right)^{-1} \\
&= \left(I+{}^tM)\right)^{-1}\times(I-{}^tM) \qquad \text{car } {}^t(A+B) = {}^tA+{}^tB \\
&= (I-M)^{-1}\times(I+M) \qquad \text{car ici } {}^tM = -M
\end{aligned}$$

(c) Montrons que $I+M$ et $(I-M)^{-1}$ commutent.
Tout d'abord $I+M$ et $I-M$ commutent car $(I+M)(I-M) = I-M^2 = (I-M)(I+M)$. Maintenant nous avons le petit résultat suivant :
Lemme. Si $AB = BA$ alors $AB^{-1} = B^{-1}A$.
Pour la preuve on écrit :

$$AB = BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}.$$

En appliquant ceci à $I+M$ et $I-M$ on trouve $(I+M)\times(I-M)^{-1} = (I-M)^{-1}\times(I+M)$ et donc $A^{-1} = {}^tA$.

Correction de l'exercice 1387 ▲

3. $X = -A$ ou $X = \frac{1}{2}A$ ou $X = A-I$ ou $X = -\frac{1}{2}A-I$.

Correction de l'exercice 1388 ▲

1. $J^2 = J$.
2. $JM = MJ$.
3. $k = \mathrm{rg} J$.

Correction de l'exercice 1389 ▲

1. $\frac{A+(2-n)I}{n-1}$.
2. $\frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\begin{pmatrix} a+(n-2)b & & (-b) \\ & \ddots & \\ (-b) & & a+(n-2)b \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & \pm 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -1 \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} (0) & & 1/a_n \\ & \dots & \\ 1/a_1 & & (0) \end{pmatrix}$.
6. $\mathrm{diag}(\lambda_i) - \frac{1}{1+\lambda_1+\dots+\lambda_n}(\lambda_i\lambda_j)$.

Correction de l'exercice 1390 ▲

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$, $B^{-1} \approx \begin{pmatrix} 55.6 & -277.8 & 255.6 \\ -277.8 & 1446.0 & -1349.2 \\ 255.6 & -1349.2 & 1269.8 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1391 ▲

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille d'éléments de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.
Par définition, on a

$$\forall i \in \{1,...,n-1\},\ e'_i = ie_i + \sum_{j=i+1}^{n} e_j \text{ et } e'_n = ne_n.$$

En retranchant membre à membre ces égalités, on obtient

$$\forall i \in \{1,...,n-1\},\ e'_i - e'_{i+1} = i(e_i - e_{i+1}) \text{ et } e'_n = ne_n,$$

ou encore

$$\forall i \in \{1,...,n-1\},\ e_i - e_{i+1} = \frac{1}{i}(e'_i - e'_{i+1}) \text{ et } e_n = \frac{1}{n}e'_n.$$

Mais alors, pour $i \in \{1,...,n-1\}$, on a

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j=i}^{n-1}(e_j - e_{j+1}) + e_n = \sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}(e'_j - e'_{j+1}) + \frac{1}{n}e'_n = \sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j + \frac{1}{n}e'_n \\ &= \frac{1}{i}e'_i + \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j \\ &= \frac{1}{i}e'_i - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j(j-1)}e'_j \end{aligned}$$

Mais alors, $\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}(e_1,...,e_n) \subset \mathrm{Vect}(e'_1,...,e'_n)$, ce qui montre que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1,...,e'_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}^n$ et donc une base de $\mathbb{C}^n$. Par suite, A est inversible et

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\mathscr{B} = (a'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ où } a'_{i,j} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{i} \text{ si } i=j \\ -\frac{1}{i(i-1)} \text{ si } i>j \\ 0 \text{ si } i<j \end{array}\right. .$$

Correction de l'exercice 1392 ▲

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur du noyau de A. Supposons $X \neq 0$. Alors, si i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\{|x_i|,\ i \in \{1,...,n\}\}$, on a $|x_{i_0}| > 0$.
Mais alors,

$$AX = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0$$
$$\Rightarrow |a_{i_0,i_0}x_{i_0}| = |-\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|.|x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

et, puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0} \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$ contredisant les hypothèses de l'énoncé. Donc, il est absurde de supposer que $\mathrm{Ker}A$ contient un vecteur non nul et A est bien inversible.

Correction de l'exercice 1393 ▲

Soient k et l deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant n$. Le coefficient ligne k, colonne l de $A\overline{A}$ vaut :

$$\sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\omega^{-(j-1)(l-1)} = \sum_{j=1}^{n} (\omega^{k-l})^{j-1}.$$

1er cas. Si $k = l$, $\omega^{k-l} = 1$, et le coefficient vaut $\sum_{j=1}^{n} 1 = n$.
2ème cas. Si $k \neq l$. On a $-(n-1) \leqslant k-l \leqslant n-1$ avec $k-l \neq 0$ et donc, $k-l$ n'est pas multiple de n. Par suite, $\omega^{k-l} \neq 1$ et

$$\sum_{j=1}^{n} (\omega^{k-l})^{j-1} = \frac{1-(\omega^{k-l})^n}{1-\omega} = \frac{1-1^{k-l}}{1-\omega} = 0.$$

En résumé, $A\overline{A} = nI_n$. Donc A est inversible à gauche et donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

Correction de l'exercice 1394 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à un polynôme P de degré inférieur ou égal à n, associe le polynôme $P(X+1)$.
Par la formule du binôme de NEWTON, on voit que A est la matrice de f dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. f est clairement un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, sa réciproque étant l'application qui, à un polynôme P associe le polynôme $P(X-1)$.
A est donc inversible et $A^{-1} = (b_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ où $b_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $b_{i,j} = (-1)^{i+j}C_j^i$ si $i \leqslant j$.

Correction de l'exercice 1395 ▲

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle f.
Pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(M) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}m_{i,j}$ où les $a_{i,j}$ sont n^2 scalaires indépendants de M et non tous nuls.
1er cas. Supposons qu'il existe deux indices distincts k et l tels que $a_{k,l} \neq 0$. Soit $M = I_n - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}{a_{k,l}}E_{k,l}$. M est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et M est dans H car $f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} - a_{k,l}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}{a_{k,l}} = 0$.

2ème cas. Si tous les $a_{k,l}$, $k \neq l$, sont nuls, H contient la matrice inversible $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1396 ▲

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I+N \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

N est nilpotente et donc $N^n = 0$. Par suite,

$$I = I-(-N)^n = (I+N)(I-N+\dots+(-N)^{n-1}).$$

Ainsi A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $I-N+\dots+(-N)^{n-1}$.
Calcul de N^p pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$N^2 = \left(\sum_{j=2}^{n} jE_{j-1,j}\right)^2 = \sum_{2\leqslant j,k\leqslant n} jkE_{j-1,j}E_{k-1,k} = \sum_{j=2}^{n-1} j(j+1)E_{j-1,j}E_{j,j+1} = \sum_{j=3}^{n} j(j-1)jE_{j-2,j}.$$

c'est-à-dire $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\times 3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3\times 4 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & (n-1)n \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, $N^3 = \left(\sum_{j=3}^{n}(j-1)jE_{j-2,j}\right)\left(\sum_{k=2}^{n} kE_{k-1,k})\right) = \sum_{j=4}^{n} j(j-1)(j-2)E_{j-3,j}$.
Supposons que pour p donné dans $[\![1,n-1]\!]$, $N^p = \sum_{j=p+1}^{n} j(j-1)\dots(j-p+1)E_{j-p,j}$.
Alors $N^{p+1} = \left(\sum_{j=p+1}^{n} j(j-1)\dots(j-p+1)E_{j-p,j}\right)\left(\sum_{k=2}^{n} kE_{k-1,k}\right) = \sum_{j=p+2}^{n} j(j-1)\dots(j-p)E_{j-p-1,j}$. Ainsi

$$\boxed{A^{-1} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ où } a_{i,j} = 0 \text{ si } i>j,\ 1 \text{ si } i=j \text{ et } (-1)^{i+j-2}\prod_{k=0}^{j-i-1}(j-k) \text{ sinon.}}$$

Correction de l'exercice 1397 ▲

On inverse A en l'interprétant comme une matrice de passage.
Soit $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e'_1,\dots,e_n)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow (e'_1,\dots,e'_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \text{Vect}(e_1,\dots,e_n) \subset \text{Vect}(e'_1,\dots,e'_n) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ e_i \in \text{Vect}(e'_1,\dots,e'_n).$$

Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
Soit $u = e_1+\dots+e_n$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e'_i = a_ie_i + u$ ce qui fournit $e_i = \frac{1}{a_i}(e'_i - u)$.
En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient $u = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}e'_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)u$ et donc $\lambda u = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}e'_i$ où $\lambda = 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$.
1er cas. Si $\lambda \neq 0$, on peut exprimer u en fonction des e'_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et donc les e_i fonction des e'_i. Dans ce cas A est inversible. Plus précisément, $u = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}e'_i$ puis, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $e_i = \frac{1}{a_i}\left(e'_i - \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}e'_j\right)$ et enfin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} - \frac{1}{\lambda a_1^2} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_1} & \dots & \dots & -\frac{1}{\lambda a_n a_1} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_2} & \frac{1}{a_2} - \frac{1}{\lambda a_2^2} & & & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{\lambda a_2 a_3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{\lambda a_{n-1}^2} & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_n} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_n} & \dots & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\lambda a_n^2} \end{pmatrix} \text{ où } \lambda = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

2ème cas. Si $\lambda = 0$, on a $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} e'_i = 0$ ce qui montre que la famille $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est liée et donc que A n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 1398 ▲

Notons A la matrice de l'énoncé. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule du binôme de NEWTON, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = (X+1)^k$. f coïncide donc sur la base $\mathscr{B}$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe $P(X+1)$ et f est donc cet endomorphisme.
f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de réciproque l'application qui à un polynôme P associe $P(X-1)$. Par suite, A est inversible d'inverse la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
Le coefficient ligne i, colonne j, de A^{-1} vaut donc 0 si $i > j$ et $(-1)^{i+j}\binom{j}{i}$ si $i \leqslant j$.

Correction de l'exercice 1399 ▲

Calculons $A\overline{A}$. Soit $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne j, colonne k de $A\overline{A}$ vaut

$$\sum_{u=1}^n \omega^{(j-1)(u-1)} \omega^{-(u-1)(k-1)} = \sum_{u=1}^n \left(\omega^{j-k}\right)^{u-1}.$$

• Si $j = k$, ce coefficient vaut n.
• Si $j \neq k$, puisque $j-k$ est strictement compris entre $-n$ et n et que $j-k$ n'est pas nul, ω^{j-k} est différent de 1. Le coefficient ligne j, colonne k, de $A\overline{A}$ est donc égal à $\frac{1-\left(\omega^{j-k}\right)^n}{1-\omega^{j-k}} = \frac{1-1}{1-\omega^{j-k}} = 0$.
Finalement, $A\overline{A} = nI_n$. Ainsi, A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

Correction de l'exercice 1400 ▲

Montrons que Ker$A$ est réduit à $\{0\}$. Dans le cas contraire, on dispose d'un vecteur colonne non nul X_0 tel que $AX_0 = 0$. Posons $X_0 = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0 \Rightarrow a_{i,i} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j|.$$

On prend alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Puisque $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$. De plus,

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|\right) |x_{i_0}|,$$

et puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient après simplification $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$ ce qui contredit les hypothèses.
Donc Ker$A = \{0\}$ et A est inversible.

Correction de l'exercice 1401 ▲

1. si le déterminant $ad - bc$ est non nul l'inverse est $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. si $|\alpha| \neq 1$ alors l'inverse est $\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & (0) & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 1403 ▲

Il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 1404 ▲

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Correction de l'exercice 1405 ▲

$P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 0 & 4a & 12a+4b \\ 0 & 0 & 0 & 8a \end{pmatrix}$ est inversible pour $a \neq 0$.

Correction de l'exercice 1406 ▲

$N = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Correction de l'exercice 1407 ▲

$B - I$ est inversible.

Correction de l'exercice 1409 ▲

oui, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Correction de l'exercice 1412 ▲

1. $\text{rg}u = \text{rg}(u(i),u(j),u(k)) = rg(u(j),u(k),u(i))$. La matrice de cette dernière famille dans la base (i,j,k) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Cette dernière famille est de rang 3. Donc, $\text{rg}u = 3$ et u est bien un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Posons $e_1 = u(i)$, $e_2 = u(j)$ et $e_3 = u(k)$.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = k \\ e_2 = i-3k \\ e_3 = j+3k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = e_1 \\ i = 3e_1+e_2 \\ j = -3e_1+e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u^{-1}(k) = i \\ u^{-1}(i) = 3i+j \\ u^{-1}(j) = -3i+k \end{array}\right.$$

et

$$A^{-1} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (Questions 2) et 3)). Posons $e_1 = xi+yj+zk$ (e_1, e_2 et e_3 désignent d'autres vecteurs que ceux du 1)).

$$u(e_1) = e_1 \Leftrightarrow (u-Id)(e_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y = 0 \\ -y+z = 0 \\ x-3y+2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z.$$

On prend $e_1 = i+j+k$.
Posons $e_2 = xi+yj+zk$.

$$u(e_2) = e_1+e_2 \Leftrightarrow (u-Id)(e_2) = e_1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y = 1 \\ -y+z = 1 \\ x-3y+2z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = x+1 \text{ et } z = x+2.$$

On prend $e_2 = j+2k$.
Posons $e_3 = xi+yj+zk$.

$$u(e_3) = e_2+e_3 \Leftrightarrow (u-Id)(e_3) = e_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y = 0 \\ -y+z = 1 \\ x-3y+2z = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = x \text{ et } z = x+1.$$

On prend $e_3 = k$.
La matrice de la famille (e_1,e_2,e_3) dans la base (i,j,k) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 3 et est donc inversible. Par suite (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin,

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = i+j+k \\ e_2 = j+2k \\ e_3 = k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = e_3 \\ j = e_2-2e_3 \\ i = e_1-e_2+e_3 \end{array}\right.,$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Voir question précédente.

4. Soit T est la matrice de u dans la base (e_1,e_2,e_3). $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Les formules de changement de bases s'écrivent $T=P^{-1}AP$ ou encore $A=PTP^{-1}$. Par suite, pour tout relatif n, $A^n=PT^nP^{-1}$.

Posons $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ puis $N^3=0$.

Donc, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné, puisque I et N commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$T^n=(I+N)^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Cette formule reste claire pour $n=0$ et $n=1$. Pour $n=-1$, $(I+N)(I-N+N^2)=I+N^3=I$ et donc

$$T^{-1}=(I+N)^{-1}=I-N+N^2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&\frac{(-1)(-1-1)}{2}\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

et la formule reste vraie pour $n=-1$. Enfin, pour n entier naturel non nul donné, $T^{-n}=(I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)^{-1}$ mais $(I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)(I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2)=I$ et donc $T^{-n}=I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2$. Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ T^n=I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned}A^n=PT^nP^{-1}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\1&n+1&n(n+1)/2\\1&n+2&(n+1)(n+2)/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}(n-1)(n-2)/2&-n(n-2)&n(n-1)/2\\n(n-1)/2&-(n-1)(n+1)&n(n+1)/2\\n(n+1)/2&-n(n+2)&(n+1)(n+2)/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui fournit $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$.

Correction de l'exercice 1413 ▲

Si $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables alors nécessairement $\mathrm{Tr}(M(a))=\mathrm{Tr}(N(a))$. Or, pour tout scalaire a, $\mathrm{Tr}(M(a))=4-3a=\mathrm{Tr}(N(a))$. La trace ne fournit aucun renseignement.

On doit aussi avoir $\det(M(a))=\det(N(a))$. Or, $\det(N(a))=(1-a)^2(2-a)$ et

$$\begin{aligned}\det(M(a))&=(4-a)(a^2-1-2)+6(1-a+1)+2(2-1-a)=(4-a)(a^2-3)+14-8a=-a^3+4a^2-5a+2\\&=(a-1)^2(2-a)=\det(N(a)).\end{aligned}$$

Le déterminant ne fournit aucun renseignement.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ de matrice $M(a)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0=(i,j,k)$ de $\mathbb{K}^3$.

Le problème posé équivaut à l'existence d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ telle que $f(e_1) = (1-a)e_1$, $f(e_2) = (1-a)e_2 + e_1$ et $f(e_3) = (2-a)e_3$. Soit (x,y,z) un élément de $\mathbb{K}^3$.

• $f((x,y,z)) = (1-a)(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=0 \\ -6x-2y+2z=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=x \end{array}\right.$. On peut prendre $e_1 = (1,-2,1)$.

• $f((x,y,z)) = (1-a)(x,y,z) + (1,-2,1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=1 \\ -6x-2y+2z=-2 \\ 2x+y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x-1 \\ z=x-2 \end{array}\right.$. On peut prendre $e_2 = (0,-1,-2)$.

• $f((x,y,z)) = (2-a)(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -6x-3y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=0 \end{array}\right.$. On peut prendre $e_3 = (1,-2,0)$.

La matrice de la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans la base $\mathscr{B}_0$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. $\det P = -4+4+1 = 1 \neq 0$ et donc la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$. Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0} f = M(a)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = N(a)$, les matrices $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables.

Correction de l'exercice 1414 ▲

Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Il existe P élément de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PB = AP$ (bien plus manipulable que $B = P^{-1}AP$).
Posons $P = Q + iR$ où Q et R sont des matrices réelles. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a $QB = AQ$ et $RB = AR$ mais cet exercice n'en est pas pour autant achevé car Q ou R n'ont aucune raison d'être inversibles.
On a $QB = AQ$ et $RB = AR$ et donc plus généralement pour tout réel x, $(Q+xR)B = A(Q+xR)$.
Maintenant, $\det(Q+xR)$ est un polynôme à coefficients réels en x mais n'est pas le polynôme nul car sa valeur en i (tel que $i^2 = -1$) est $\det P$ qui est non nul. Donc il n'existe qu'un nombre fini de réels x, éventuellement nul, tels que $\det(Q+xR) = 0$. En particulier, il existe au moins un réel x_0 tel que la matrice $P_0 = Q + x_0 R$ soit inversible. P_0 est une matrice réelle inversible telle que $P_0 A = BP_0$ et A et B sont bien semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 1417 ▲

1. Soit M une matrice telle que $M^2 = 0$ et soit f l'application linéaire associée à M. Comme $M^2 = 0$ alors $f \circ f = 0$. Cela entraîne $\mathrm{Im} f \subset f$. Discutons suivant la dimension du noyau :
   (a) Si $\dim f = 3$ alors $f = 0$ donc $M = 0$ (la matrice nulle).
   (b) Si $\dim f = 2$ alors prenons une base de $\mathbb{R}^3$ formée de deux vecteurs du noyau et d'un troisième vecteur. Dans cette base la matrice de f est $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ mais comme $f \circ f = 0$ alors $M'^2 = 0$; un petit calcul implique $c = 0$. Donc M et M' sont les matrices de la même application linéaire f mais exprimées dans des bases différentes, donc M et M' sont semblables.
   (c) Si $\dim f = 1$ alors comme $\mathrm{Im} f \subset f$ on a $\dim \mathrm{Im} f \leqslant 1$ mais alors cela contredit le théorème du rang : $\dim f + \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$. Ce cas n'est pas possible.
   (d) Conclusion : M est une matrice qui vérifie $M^2 = 0$ si et seulement si il existe une matrice inversible P et des réels a, b tels que
   $$M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$
2. On va s'aider de l'exercice 1360. Si $M^2 = M$ et f est l'application linéaire associée alors $f \circ f = f$. On a vu dans l'exercice 1360 qu'alors $f \oplus \mathrm{Im} f$ et que l'on peut choisir une base (e_1, e_2, e_3) telle que

$f(e_i) = e_i$ puis $f(e_i) = 0$. Suivant la dimension du noyau cela donne que la matrice M' de f dans cette base est

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant M est semblable à l'une de ces matrices : il existe P inversible telle que $M = P^{-1}M'P$ où M' est l'une des quatre matrices A_i ci-dessus.

Géométriquement notre application est une projection (projection sur une droite pour la seconde matrice et sur un plan pour la troisième).

3. Posons $N = \frac{I+M}{2}$ et donc $M = 2N - I$. Alors $M^2 = I \iff (2N-I)^2 = I \iff 4N^2 - 4N - I = I \iff N^2 = N$. Donc par la deuxième question N est semblable à l'une des matrice A_i : $N = P^{-1}A_iP$. Donc $M = 2P^{-1}A_iP - I = P^{-1}(2A_i - I)P$. Ainsi M est semblable à l'une des matrices $2A_i - I$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce sont des matrices de symétrie (par rapport à l'origine pour la première matrice, par rapport à une droite pour la seconde matrice et par rapport à un plan pour la troisième).

L'idée de poser $N = \frac{I+M}{2}$ est la suivante : si $M^2 = I$ alors géométriquement l'application linéaire s associée à M est une *symétrie*, alors que si $N^2 = N$ alors l'application linéaire p associée est une *projection*. Et projection et symétrie sont liées par $p(x) = \frac{x+s(x)}{2}$ (faites un dessin !) c'est-à-dire $p = \frac{\mathrm{id}+s}{2}$ ou encore $N = \frac{I+M}{2}$.

Correction de l'exercice 1422 ▲

1.

2. Pour $i < j$, on doit avoir $M(I+E_{ij}) = (I+E_{ij})M \Rightarrow \begin{cases} a_{ki} = 0 & \text{si } k \neq i \\ a_{jk} = 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$

Correction de l'exercice 1423 ▲

$(\alpha + \mathrm{tr}A)\mathrm{tr}X = \mathrm{tr}B$.

Si $\alpha(\alpha + \mathrm{tr}A) \neq 0$: solution unique : $X = \frac{1}{\alpha}\left(B - \frac{\mathrm{tr}B}{\alpha+\mathrm{tr}A}A\right)$.

Si $\alpha = 0$: solutions ssi A et B sont proportionnelles.

Si $\alpha + \mathrm{tr}A = 0$: solutions ssi $\mathrm{tr}B = 0$: $X = \frac{1}{\alpha}B + \lambda A$.

Correction de l'exercice 1429 ▲

2. $u_{|\,\mathrm{Im}\,v} = \mathrm{id} \Rightarrow \mathrm{tr}\left(u_{|\,\mathrm{Im}\,v}\right) = \mathrm{rg}v \Rightarrow \mathrm{tr}\left(v_{|\,\mathrm{Im}\,v}\right) = k\mathrm{rg}v$.

Correction de l'exercice 1431 ▲

$M_k = A^kM_0 + S_kB$ avec $S_k = I + A + \cdots + A^{k-1} = (I - A^k)(I - A)^{-1}$ si $I - A$ est inversible.

Correction de l'exercice 1432 ▲

1. $A^3 - (\lambda + \mu)A^2 + \lambda\mu A = 0$.

2. $U = \frac{\mu A - A^2}{\lambda(\mu-\lambda)}$, $V = \frac{\lambda A - A^2}{\mu(\lambda-\mu)}$ et la valeur propre est 0, λ ou μ.

Correction de l'exercice 1435 ▲

1. Compacité.
2. Si $x_1 = 0$, on pose $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

   $R(Y) \geqslant \min\left(a_{11} + \frac{a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n}{\alpha}, \frac{\alpha a_{21}}{x_2} + R(X_0), \ldots, \frac{\alpha a_{n1}}{x_n} + R(X_0)\right) > R(X_0)$ pour $\alpha > 0$ assez petit.
3. Si $y_1 > 0$, on pose $X = X_0 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$:

   $AX - RX = Y + \alpha \begin{pmatrix} a_{11} - R \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, donc pour $\alpha > 0$ assez petit, $R(X) > R$.
4. Inégalité triangulaire.

Correction de l'exercice 1436 ▲

1.
2. La base canonique de E est $(F_{ij} = E_{ij} - E_{ji})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: Si $M \in E$, la coordonnée de M suivant F_{ij} est le coefficient d'indices i, j de M. En particulier, en notant $A = (a_{ij})$, la coordonnée de $f(F_{ij})$ suivant F_{ij} est $a_{ii} + a_{jj}$, donc :

$$\mathrm{tr} f = \sum_{i,j} (a_{ii} + a_{jj}) = (n-1)\mathrm{tr} A.$$

Correction de l'exercice 1438 ▲

Soit φ un tel morphisme. Alors pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ on a $\dot{0} = p\varphi(M) = \varphi(M^p)$, donc φ s'annule sur toute matrice qui est une puissance p-ème. Notons $P(i, j, \alpha)$ la matrice de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, qui est aussi la matrice de l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$. Toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ peut être transformée, à l'aide de ces seules opérations élémentaires, en une matrice $M' = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \det(M))$ par une adaptation de l'algorithme de Gauss. Comme $P(i, j, \alpha) = P(i, j, \alpha/p)^p$ et $\det(M) = \pm(|\det(M)|^{1/p})^p$, on obtient : $\varphi(M) = \dot{0}$ si $\det(M) > 0$ et $\varphi(M) = \varphi(\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)) = x$ si $\det(M) < 0$. Réciproquement, la fonction φ ainsi définie est effectivement un morphisme de groupe si et seulement si $2x = \dot{0}$, soit $x = \dot{0}$ pour p impair, et $x \in \{\dot{0}, \dot{q}\}$ pour $p = 2q$.

Correction de l'exercice 1439 ▲

1. La démonstration la plus simple apparaîtra dans le chapitre suivant : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. Cette matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ou encore si et seulement si aucun des coefficients diagonaux n'est nul.

   Pour l'instant, le plus simple est d'utiliser le rang d'une matrice. Si aucun des coefficients diagonaux n'est nul, on sait que le rang de la matrice est son format et donc que cette matrice est inversible.

   Réciproquement, notons $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons que A soit une matrice triangulaire inférieure dont le coefficient ligne i, colonne i, est nul. Si $i = n$, la dernière colonne de A est nulle et A n'est pas de rang n et donc n'est pas inversible. Si $i < n$, alors les $n-i+1$ dernières colonnes sont dans $\text{Vect}(e_{i+1},...,e_n)$ qui est de dimension au plus $n-i(< n-i+1)$, et encore une fois, la famille des colonnes de A est liée.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathscr{B}' = (e_n,...,e_1)$. $\mathscr{B}'$ est encore une base de $\mathbb{K}^n$. Soit alors P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ puis A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. Les formules de changement de bases permettent d'affirmer que $A' = P^{-1}AP$ et donc que A et A' sont semblables.

   Vérifions alors que A' est une matrice triangulaire inférieure. Pour $i \in \{1,...,n\}$, posons $e'_i = e_{n+1-i}$. A est triangulaire supérieure. Donc, pour tout i, $f(e_i) \in \text{Vect}(e_1,...,e_i)$. Mais alors, pour tout $i \in \{1,...,n\}$, $f(e'_{n+1-i}) \in \text{Vect}(e'_n,...,e'_{n+1-i})$ ou encore, pour tout $i \in \{1,...,n\}$, $f(e'_i) \in \text{Vect}(e'_n,...,e'_i)$. Ceci montre que A' est une matrice triangulaire inférieure.

Correction de l'exercice 1440 ▲

1. $E = \text{Vect}(I,J)$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La famille (I,J) est clairement libre et donc est une base de E. Par suite, $\dim E = 2$.

2. $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I$. Plus généralement, pour $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$,

$$M(x,y)M(x',y') = (xI+yJ)(x'I+y'J) = xx'I + (xy'+yx')J + yy'J^2 = (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J \ (*).$$

   Montrons alors que $(E,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.
   E contient $I = 1.I + 0.J$. $(E,+)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$ et, d'après $(*)$, E est stable pour $\times$. Donc, $(E,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

3. Soit $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

$$M(x,y)M(x',y') = I \Leftrightarrow (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J = I \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} xx'-yy' = 1 \\ yx' + (x+2y)y' = 0 \end{array} \right. .$$

   Le déterminant de ce dernier système d'inconnues x' et y' vaut $x(x+2y)+y^2 = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$. Si $y \neq -x$, ce système admet un et seule couple solution. Par suite, si $y \neq -x$, il existe $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(x,y)M(x',y') = I$. Dans ce cas, la matrice $M(x,y)$ est inversible dans E.

   Si $y = -x$, le système s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} x(x'+y') = 1 \\ -x(x'+y') = 0 \end{array} \right.$ et n'a clairement pas de solution.

4. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2 = I \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-y^2 = 1 \\ 2y(x+y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x^2-y^2 = 1 \\ x+y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -1 \end{array} \right. .$$

   Dans E, l'équation $X^2 = I$ admet exactement deux solutions à savoir I et $-I$.

   (b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-y^2 = 0 \\ 2y(x+y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -x.$$

   Dans E, l'équation $X^2 = 0$ admet pour solutions les matrices de la forme $\lambda(J-I) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2=M(x,y)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=x\\2y(x+y)=y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=x\\y(2x+2y-1)=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x^2=x\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=-x+\frac{1}{2}\\x^2-(-x+\frac{1}{2})^2=x\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=0\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}=0\\y=-x+\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=0\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right..$$

Dans E, l'équation $X^2=X$ admet exactement deux solutions à savoir 0 et I.

Correction de l'exercice 1441 ▲

Soit (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On cherche $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ et $g\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ tels que

$$f\circ g(e_1)=-e_2+e_3,\ f\circ g(e_2)=-e_1+e_3\text{ et }f\circ g(e_3)=-e_1-e_2+2e_3(=f\circ g(e_1+e_2)).$$

On pose $g(e_1)=i$, $g(e_2)=j$ et $g(e_3)=i+j$, puis $f(i)=-e_2+e_3$ et $f(j)=-e_1+e_3$. Les applications linéaires f et g conviennent, ou encore si on pose

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

alors $AB=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

A et B désignent maintenant deux matrices quelconques, éléments de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ respectivement, telles que $AB=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$. Calculons $(AB)^2$. On obtient

$$(AB)^2=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=AB.$$

Mais alors, en multipliant les deux membres de cette égalité par B à gauche et A à droite, on obtient

$$(BA)^3=(BA)^2\ (*).$$

Notons alors que

$$\mathrm{rg}(BA)\geqslant\mathrm{rg}(ABAB)=\mathrm{rg}((AB)^2)=\mathrm{rg}(AB)=2,$$

et donc, BA étant une matrice carrée de format 2, $\mathrm{rg}(BA)=2$. BA est donc une matrice inversible. Par suite, on peut simplifier les deux membres de l'égalité $(*)$ par $(BA)^2$ et on obtient $BA=I_2$.

Correction de l'exercice 1442 ▲

Soit $A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A commute avec toute matrice, en particulier : $\forall(i,j)\in\{1,...,n\}^2$, $AE_{i,j}=E_{i,j}A$. Maintenant,

$$AE_{i,j}=\sum_{k,l}a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}E_{k,j}\text{ et }E_{i,j}A=\sum_{k,l}a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l}=\sum_{l=1}^{n}a_{j,l}E_{i,l}.$$

On note que si $k\neq i$ ou $l\neq j$, $E_{k,j}\neq E_{i,l}$. Puisque la famille $(E_{i,j})$ est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient : si $k\neq i$, $a_{k,i}=0$. D'autre part, le coefficient de $E_{i,j}$ est $a_{i,i}$ dans la première somme et $a_{j,j}$ dans la deuxième. Ces coefficients doivent être égaux.

Finalement, si A commute avec toute matrice, ses coefficients non diagonaux sont nuls et ses coefficients diagonaux sont égaux. Par suite, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$. Réciproquement, si A est une matrice scalaire, A commute avec toute matrice.

Correction de l'exercice 1443 ▲

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et f une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \operatorname{Ker} f$.
Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, posons $f(A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j} a_{i,j}$.

1er cas. Supposons $\exists (i,j) \in \{1,...,n\}^2 / \ i \neq j$ et $\alpha_{i,j} \neq 0$. On pose alors $S = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,k}$ et on considère $A = \sum_{k=1}^n E_{k,k} - \frac{S}{\alpha_{i,j}} E_{i,j}$. A est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et est donc inversible. De plus, $f(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,k} - \frac{S}{\alpha_{i,j}} \alpha_{i,j} = S - S = 0$ et A est élément de H.

2ème cas. Supposons $\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2$, $(i \neq j \Rightarrow \alpha_{i,j} = 0)$. Alors, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} a_{i,i}$. Soit $A = E_{n,1} + E_{2,1} + E_{3,2} + ... + E_{n-1,n}$. A est inversible car par exemple égale à la matrice de passage de la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ à la base $(e_n, e_1, ..., e_{n-1})$. De plus, $f(A) = 0$.

Correction de l'exercice 1445 ▲

1. Soit $(i,j) \in \{1,...,p\} \times \{1,...,r\}$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $M+N$ est la somme du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice M et du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice N ou encore la somme du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice A et du coefficient ligne i, colonne j, de la matrice A'. On a des résultats analogues pour les autres valeurs du couple (i,j) et donc
$$M+N = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}.$$
2. Posons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ où $A \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_{q,s}(\mathbb{K})$, puis $A' \in \mathscr{M}_{t,p}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathscr{M}_{u,p}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathscr{M}_{t,q}(\mathbb{K})$, $D' \in \mathscr{M}_{u,q}(\mathbb{K})$ (le découpage de M en colonne est le même que le découpage de N en lignes).
Soit alors $(i,j) \in \{1,...,r\} \times \{1,...,t\}$. Le coefficient ligne i, colonne j de la matrice MN vaut
$$\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} m_{i,k} n_{k,j} + \sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j}.$$
Mais, $\sum_{k=1}^p m_{i,k} n_{k,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j du produit AA' et $\sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j du produit BC'. Finalement, $\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j du produit $AA' + BC'$. On a des résultats analogues pour les autres valeurs du couple (i,j) et donc
$$MN = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1446 ▲

1. Un vecteur non nul x est colinéaire à son image si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Les nombres λ correspondants sont les complexes tels qu'il existe un vecteur $x \neq 0$ dans $\operatorname{Ker}(u - \lambda Id)$ ou encore tels que $A - \lambda I_4 \notin \mathscr{GL}_4(\mathbb{C})$.
Le déterminant de $A - \lambda I_4$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7-\lambda & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6-\lambda & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix} -7-\lambda & 0 & 0 \\ 11 & -6-\lambda & -12 \\ -6 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 20 & -6-\lambda & -12 \\ -12 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (7-\lambda)(-7-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -12 \\ 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} - 4(-12)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -12 \\ 6 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-7)(\lambda+7)(\lambda^2-5\lambda+6) + 48(\lambda^2-5\lambda+6)$$

$$= (\lambda^2-5\lambda+6)(\lambda^2-49+48) = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Ainsi, $A-\lambda I_4 \notin \mathcal{GL}_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \lambda \in \{-1,1,2,3\}$.
- Cas $\lambda=-1$. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t)\in \text{Ker}(u+Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x+4y=0 \\ -12x-6y=0 \\ 20x+11y-5z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+12t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ -2x-5z-12t=0 \\ z+2t=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=-2t \\ -2x-2t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ t=-x \\ z=2x \end{array}\right. .$$

Donc, $\text{Ker}(u+Id)=\text{Vect}(e_1)$ où $e_1=(1,-2,2,-1)$.
- Cas $\lambda=1$. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t)\in \text{Ker}(u-Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x+4y=0 \\ -12x-8y=0 \\ 20x+11y-7z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+10t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+2y=0 \\ 20x+11y-7z-12t=0 \\ -6x-3y+3z+5t=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\frac{3}{2}x \\ 14z+24t=7x \\ 6z+10t=3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\frac{3}{2}x \\ z=\frac{1}{2}x \\ t=0 \end{array}\right. .$$

Donc, $\text{Ker}(u-Id)=\text{Vect}(e_2)$ où $e_2=(2,-3,1,0)$.
- Cas $\lambda=2$. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t)\in \text{Ker}(u-Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+4y=0 \\ -12x-9y=0 \\ 20x+11y-8z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+9t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=02z+3t=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y=0 \\ z=-\frac{3}{2}t \end{array}\right. .$$

Donc, $\text{Ker}(u-2Id)=\text{Vect}(e_3)$ où $e_3=(0,0,3,-2)$.
-Cas $\lambda=3$. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t)\in \text{Ker}(u-Id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+4y=0 \\ -12x-10y=0 \\ 20x+11y-9z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+8t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=03z+4t=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y=0 \\ z=-\frac{4}{3}t \end{array}\right. .$$

Donc, $\text{Ker}(u-3Id)=\text{Vect}(e_4)$ où $e_4=(0,0,4,-3)$.

Soit P la matrice de la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) dans la base canonique (i,j,k,l). On a $P=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\-2&-3&0&0\\2&1&3&4\\-1&0&-2&-3\end{pmatrix}$.

Montrons que P est inversible et déterminons son inverse.

$$\left\{\begin{array}{l}e_1=i-2j+2k-l\\e_2=2i-3j+k\\e_3=3k-2l\\e_4=4k-3l\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}k=3e_3-2e_4\\l=4e_3-3e_4\\e_1=i-2j+2(3e_3-2e_4)-(4e_3-3e_4)\\e_2=2i-3j+(3e_3-2e_4)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}k=3e_3-2e_4\\l=4e_3-3e_4\\i-2j=e_1-2e_3+e_4\\2i-3j=e_2-3e_3+2e_4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}k=3e_3-2e_4\\l=4e_3-3e_4\\i=-3e_1+2e_2+e_4\\j=-2e_1+e_2+e_3\end{array}\right.$$

Ainsi, $\mathbb{C}^4=\text{Vect}(i,j,k,l)\subset\text{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Donc, la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est génératrice de $\mathbb{C}^4$ et donc une base de $\mathbb{C}^4$. Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&0&0\\2&1&0&0\\0&1&3&4\\1&0&-2&-3\end{pmatrix}.$$

2. Les formules de changement de bases s'écrivent $A=PDP^{-1}$ avec $D=\text{diag}(-1,1,2,3)$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculons A^n.

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\-2&-3&0&0\\2&1&3&4\\-1&0&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2^n&0\\0&0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-2&0&0\\2&1&0&0\\0&1&3&4\\1&0&-2&-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\-2&-3&0&0\\2&1&3&4\\-1&0&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3(-1)^n&-2(-1)^n&0&0\\2&1&0&0\\0&2^n&3.2^n&4.2^n\\3^n&0&-2.3^n&-3.3^n\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-3(-1)^n+4&-2(-1)^n+2&0&0\\6(-1)^n-6&4(-1)^n-3&0&0\\-6(-1)^n+2+4.3^n&-4(-1)^n+1+3.2^n&9.2^n-8.3^n&12(2^n-3^n)\\3((-1)^n-3^n)&2((-1)^n-2^n)&6(3^n-2^n)&-8.2^n+9.3^n\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 1447 ▲

Cherchons une matrice A de format $(3,2)$ et une matrice B de format $(2,3)$ telles que $AB=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}$.

Posons $E=\mathbb{R}^2$ et notons (i,j) la base canonique de E.
Posons $F=\mathbb{R}^3$ et notons (e_1,e_2,e_3) la base canonique de F.
Le problème posé matriciellement peut aussi s'énoncer en termes d'applications linéaires : trouvons $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,E)$ telles que $f\circ g(e_1)=8e_1+2e_2-2e_3$, $f\circ g(e_2)=2e_1+5e_2+4e_3$ et $f\circ g(e_3)=-2e_1+4e_2+5e_3$.
Remarquons tout d'abord que le problème posé n'a pas nécessairement de solution car par exemple $\text{rg}(f\circ g)\leqslant\text{Min}\{f,g\}\leqslant\dim E=2$ et si la matrice proposée est de rang 3 (c'est à dire inversible), le problème posé n'a pas de solution.

Ici, $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8\times 9 - 2\times 18 - 2\times 18 = 0$ et la matrice proposée est de rang au plus 2 puis de rang 2 car ses deux premières colonnes ne sont pas colinéaires.
Une relation de dépendance des colonnes est $C_1 = 2C_2 - 2C_3$.
Un couple (f,g) solution devra vérifier $f\circ g(e_1) = 2f\circ g(e_2) - 2f\circ g(e_3)$.
Prenons n'importe quoi ou presque pour $g(e_2)$ et $g(e_3)$ mais ensuite prenons $g(e_1) = 2g(e_2) - 2g(e_3)$.
Par exemple, posons $g(e_2) = i$, $g(e_3) = j$ et $g(e_1) = 2i - 2j$ puis $f(i) = 2e_1 + 5e_2 + 4e_3$ et $f(j) = -2e_1 + 4e_2 + 5e_3$ ou encore soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
Soient A et B deux matrices de formats respectifs $(3,2)$ et $(2,3)$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculons BA (il n'y a bien sûr pas unicité de A et B, mais l'énoncé suggère que le produit BA doit être indépendant de A et B).
Tout d'abord

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{pmatrix} = 9AB.$$

De plus, $\text{rg}(BA) \geqslant \text{rg}(A(BA)B) = \text{rg}((AB)^2) = \text{rg}(9AB) = \text{rg}(AB) = 2$ et donc $\text{rg}(BA) = 2$ puis $BA \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$.
De l'égalité $(AB)^2 = 9AB$, on tire après multiplication à gauche par B et à droite par A, $(BA)^3 = 9(BA)^2$ et, puisque BA est une matrice carrée inversible et donc simplifiable pour la multiplication des matrices, $BA = 9I_2$.

$$\boxed{BA = 9I_2.}$$

Correction de l'exercice 1448 ▲

Soit $A = \sum_{M\in G} M$. Alors $A^2 = \sum_{(M,N)\in G^2} MN$.
Soit $M \in G$ fixée. Considérons l'application φ de G dans G qui à un élément N de G associe MN. Puisque G est stable pour le produit, φ est bien une application. Plus précisément, φ est une permutation de G car l'application ψ de G dans lui-même qui à un élément N de G associe $M^{-1}N$ vérifie $\psi\circ\varphi = \varphi\circ\psi = Id_G$. On en déduit que

$$A^2 = \sum_{M\in G}\left(\sum_{N\in G} MN\right) = \sum_{M\in G} A = pA \text{ où } p = \text{card}(G).$$

Finalement, la matrice $P = \frac{1}{p}A$ est idempotente car $\left(\frac{1}{p}A\right)^2 = \frac{1}{p^2}pA = \frac{1}{p}A$. Comme A est une matrice de projection, on sait que $\text{rg}P = \text{Tr}P = \sum_{M\in G} \text{Tr}M = 0$ et donc $P = 0$ ou encore $\sum_{M\in G} M = 0$.

Correction de l'exercice 1449 ▲

Par la même méthode qu'au 1448, on voit que $f = \frac{1}{p}\sum_{g\in G} g$ est un projecteur et donc $\frac{1}{p}\sum_{g\in G}\text{Tr}g = \text{rg}f$. Maintenant, si x est un élément de F alors pour tout g dans G, $g(x) = x$ et donc $f(x) = x$. Ainsi, un élément x de F est dans $\text{Im}f$.
Inversement, soit x un élément de $\text{Im}f$. Pour $g \in G$,

$$g(x) = g(f(x)) = \frac{1}{p}\sum_{h\in G} g\circ h(x) = \frac{1}{p}\sum_{h\in G} h(x) = f(x) = x.$$

(Comme au 1448, l'application qui, pour $g \in G$ fixé, associe à un élément h de G l'élément $g\circ h$, est une permutation de G).
Ainsi, l'élément x de $\text{Im}f$ est dans F. On a montré que $F = \text{Im}f$. Puisque f est un projecteur, on en déduit que

$$\dim F = \text{rg}f = \text{Tr}f = \frac{1}{p}\sum_{g\in G}\text{Tr}g.$$

Correction de l'exercice 1450 ▲

Comme à l'exercice 1448, la matrice $A = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} A_k$ est idempotente et donc $\text{Tr}A = \text{rg}A$ d'après le 1260. Par suite, $\text{Tr}(A_1)+\ldots+\text{Tr}A_p = p\text{rg}A$ est un entier divisible par p.

Correction de l'exercice 1451 ▲

On note $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$\text{Tr}f = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}$ où $\alpha_{i,j}$ désigne la (i,j)-ème coordonnée de $f(E_{i,j}) = AE_{i,j}+E_{i,j}A$ dans la base $\mathscr{B}$.
Mais pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$ donné,

$$AE_{i,j} = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

et de même,

$$E_{i,j}A = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

Donc $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = a_{i,i}+a_{j,j}$ puis

$$\text{Tr}f = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{i,i}+a_{j,j}) = 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,i} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right) = 2\sum_{j=1}^{n}\text{Tr}A = 2n\text{Tr}A.$$

$$\boxed{\text{Tr}f = 2n\text{Tr}A.}$$

Correction de l'exercice 1452 ▲

Si M est solution, nécessairement $a\text{Tr}M+(\text{Tr}M)(\text{Tr}A) = \text{Tr}B$ ou encore $(\text{Tr}M)(a+\text{Tr}A) = \text{Tr}B$.
1er cas. Si $\text{Tr}A \neq -a$ alors nécessairement $\text{Tr}M = \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}$ puis $M = \frac{1}{a}\left(B-\frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A\right)$.
Réciproquement, si $M = \frac{1}{a}\left(B-\frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A\right)$ alors

$$aM+(TrM)A = B-\frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A+\frac{1}{a}\left(\text{Tr}B-\frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}\text{Tr}A\right)A = B.$$

$$\boxed{\text{Si Tr}A \neq -a,\ \mathscr{S} = \left\{\frac{1}{a}\left(B-\frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A\right)\right\}.}$$

2ème cas. Si $\text{Tr}A = -a$ et $\text{Tr}B \neq 0$, il n'y a pas de solution .
3ème cas. Si $\text{Tr}A = -a$ et $\text{Tr}B = 0$, M est nécessairement de la forme $\frac{1}{a}B+\lambda A$ où λ est un réel quelconque.
Réciproquement, soient $\lambda\in\mathbb{R}$ puis $M = \frac{1}{a}B+\lambda A$. Alors

$$aM+(\text{Tr}M)A = B+a\lambda A+\left(\frac{1}{a}\text{Tr}B+\lambda\text{Tr}A\right)A = B+a\lambda A-a\lambda A = B,$$

et toute matrice de la forme $B+\lambda A$, $\lambda\in\mathbb{R}$, est solution.

$$\boxed{\text{Si Tr}A = -a,\ \mathscr{S} = \varnothing \text{ si Tr}B\neq 0 \text{ et } \mathscr{S} = \{B+\lambda A,\ \lambda\in\mathbb{R}\} \text{ si Tr}B = 0.}$$

Correction de l'exercice 1453 ▲

1. $E = \text{Vect}(I,J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à 2. De plus, la famille (I,J) est libre car la matrice J n'est pas une matrice scalaire et donc $\dim E = 2$.
2. Puisque $(E,+,.)$ est un espace vectoriel, $(E,+)$ est un groupe commutatif.
Ensuite, $I^2 = I\in E$, $IJ = JI = J\in E$ et $J^2 = (I+E_{1,2})^2 = I+2E_{1,2} = I+2(J-I)-I = 2J-I\in E$. Par bilinéarité du produit matriciel, la multiplication est interne dans E et commutative. De plus, $I\in E$ et finalement E est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Remarque. $M(x,y)M(x',y') = xx'I+(xy'+yx')J+yy'(2J-I) = (xx'-yy')I+(xy'+yx'+2yy')J$.

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \text{ est inversible dans } E &\Leftrightarrow \exists (x',y') \in \mathbb{R}^2/; (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J = I \\ &\Leftrightarrow \exists (x',y') \in \mathbb{R}^2/; \left\{ \begin{array}{l} xx'-yy' = 1 \\ yx'+(x+2y)y' = 0 \end{array} \right. \text{ (car la famille } (I,J) \text{ est libre)} \quad (*). \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système d'inconnue (x',y') est $x(x+2y)+y^2 = (x+y)^2$.

• Si $x+y \neq 0$, le système $(*)$ admet une et une seule solution. Dans ce cas, $M(x,y)$ est inversible dans E.

• Si $x+y=0$, le système $(*)$ s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} x(x'+y') = 1 \\ -x(x'+y') = 0 \end{array} \right.$ et n'a pas de solution. Dans ce cas, $M(x,y)$ n'est pas inversible dans E.

$$\boxed{M(x,y) \text{ est inversible dans } E \Leftrightarrow x+y \neq 0.}$$

Remarque. Puisque $I \in E$, $M(x,y)$ est inversible dans E si et seulement si $M(x,y)$ est inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Posons $X = xI + yJ$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) D'après 1), $X^2 = (x^2-y^2)I + (2xy+2y^2)J$. Donc

$$\begin{aligned} X^2 = I &\Leftrightarrow x^2-y^2 = 1 \text{ et } 2xy+2y^2 = 0 \text{ (car la famille } (I,J) \text{ est libre)} \\ &\Leftrightarrow (y=0 \text{ et } x^2=1) \text{ ou } (y=-xet0=1) \Leftrightarrow (y=0 \text{ et } x=1) \text{ ou } (y=0 \text{ et } x=-1) \\ &\Leftrightarrow X = I \text{ ou } X = -I. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{I, -I\}.}$$

(b)

$$X^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-y^2 = 0 \text{ et } 2xy+2y^2 = 0 \Leftrightarrow (y=0 \text{ et } x^2=0) \text{ ou } (y=-xet0=0) \Leftrightarrow y=-x.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{x(I-J),\ x \in \mathbb{R}\}.}$$

Remarque. L'équation $X^2 = 0$, de degré 2, admet une infinité de solutions dans E ce qui montre une nouvelle fois que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps.

(c)

$$\begin{aligned} X^2 = X &\Leftrightarrow x^2-y^2 = x \text{ et } 2xy+2y^2 = y \Leftrightarrow y(2x+2y-1) = 0 \text{ et } x^2-y^2 = x \\ &\Leftrightarrow (y=0 \text{ et } x^2=x) \text{ ou } (2(x+y)=1 \text{ et } (x+y)(x-y)=x) \Leftrightarrow (X=0 \text{ ou } X=I) \text{ ou } (2(x+y)=1 \text{ et } x-y \\ &\Leftrightarrow X=0 \text{ ou } X=I. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0, I\}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $M(x,y) = xI + y(I+N) = (x+y)I + yN$.

Puisque I et N commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$\begin{aligned} (M(x,y))^n &= ((x+y)I + yN) = (x+y)^n I + ny(x+y)^{n-1}N \text{ (car } N^k = 0 \text{ pour } k \geqslant 2) \\ &= \begin{pmatrix} (x+y)^n & ny(x+y)^{n-1} \\ 0 & (x+y)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M(x,y))^n = \begin{pmatrix} (x+y)^n & ny(x+y)^{n-1} \\ 0 & (x+y)^n \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 1454 ▲

$\{0\}$ est un idéal bilatère de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.
Soit I un idéal non nul de de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$. Montrons que $I = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Il existe une matrice A non nulle dans I. Pour tout quadruplet d'indices (i, j, k, l), I contient le produit

$$E_{i,j}AE_{k,l} = \sum_{1\leqslant u,v\leqslant n} a_{u,v}E_{i,j}E_{u,v}E_{k,l} = a_{j,k}E_{i,l}.$$

A est non nulle et on peut choisir j et k tels que $a_{j,k}$ soit non nul. I contient alors $a_{j,k}E_{i,l}\frac{1}{a_{j,k}}I_n = E_{i,l}$. Finalement I contient toutes les matrices élémentaires et donc encore toutes les sommes du type $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}I_nE_{i,j} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, c'est-à-dire $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier.

$$\boxed{\text{Les idéaux bilatères de l'anneau } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times) \text{ sont } \{0\} \text{ et } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Correction de l'exercice 1455 ▲

Non, car $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0 \neq n = \mathrm{Tr}(I_n)$.

Correction de l'exercice 1456 ▲

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}a_{i,j}$ où les $\alpha_{i,j}$ sont indépendants de A (les $\alpha_{i,j}$ sont les $f(E_{i,j})$).
Soient i et j deux entiers distincts pris dans $[\![1, n]\!]$.

$$\alpha_{i,i} = f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}) = \alpha_{j,j},$$

et

$$\alpha_{i,j} = f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0.$$

Finalement en notant α la valeur commune des $\alpha_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, pour toute matrice A on a $f(A) = \alpha \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \alpha \mathrm{Tr}A$ où α est indépendant de A. (Réciproquement, les $f = \alpha\mathrm{Tr}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, sont des formes linéaires vérifiant $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$.)

Correction de l'exercice 1457 ▲

Puisque $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 = 1$, il existe un unique réel $\theta_n \in [-\pi, \pi[$ tel que

$$\cos\theta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \text{ et } \sin\theta_n = \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}.$$

La matrice A_n s'écrit alors $A_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ et donc

$$(A_n)^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant,

$$\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2}\times o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(o(1)) \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Ensuite, en notant ε le signe de a, $\theta_n = \varepsilon \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et on en déduit que

$$n\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sin(\theta_n) = n\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\to} a.$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n)^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 1458 ▲

Soient i et j deux indices pris dans $[\![1,n]\!]$.

$$f(E_{i,j}) = E_{i,j}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l},$$

et en remplissant coefficient à coefficient, on trouve la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & {}^tA \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1459 ▲

Soit p un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} A^pB - BA^p &= A^pB - A^{p-1}BA + A^{p-1}BA - A^{p-2}BA^2 + A^{p-2}BA^2 - \ldots + ABA^{p-1} - BA^p \\ &= \sum_{k=0}(A^{p-k}BA^k - A^{p-k-1}BA^{k+1}) = \sum_{k=0} A^{p-k-1}(AB-BA)A^k = \sum_{k=0} A^{p-k-1}AA^k \sum_{k=0} A^p \\ &= pA^p. \end{aligned}$$

Donc $2010 \times \mathrm{Tr}(A^{2010}) = \mathrm{Tr}(2010\,A^{2010}) = \mathrm{Tr}(A^{2010}B) - \mathrm{Tr}(BA^{2010}) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A^{2010}) = 0$.

Correction de l'exercice 1460 ▲

1. Soient p l'indice de nilpotence de A et q l'indice de nilpotence de B. Puisque A et B commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1}\binom{p+q-1}{k}A^kB^{p+q-1-k}$$

Dans cette somme,
• si $k \geqslant p$, $A^k = 0$ et donc $A^kB^{p+q-1-k} = 0$
• si $k \leqslant p-1$ alors $p+q-1-k \geqslant q$ et encore une fois $B^{p+q-1-k} = 0$.
Finalement, $(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1}\binom{p+q-1}{k}A^kB^{p+q-1-k} = 0$ et $A+B$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p+q-1$.
Les sommes définissant $\exp A$, $\exp B$ et $\exp(A+B)$ sont finies car A, B et $A+B$ sont nilpotentes et

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!\,j!}A^iB^j \\ &\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}B^j\right) \text{ (toutes les sommes sont finies)} \\ &= \exp A \times \exp B. \end{aligned}$$

2. Si A est nilpotente, $-A$ l'est aussi et commute avec A. Donc $\exp A \times \exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0) = I_n$.
   $\exp A$ est inversible à gauche et donc inversible et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.
3. Les puissances de A sont bien connues et on trouve immédiatement

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1461 ▲

1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r + x = \frac{p'}{q'}$. Donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp'-pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.
   De la même façon si $r \cdot x \in \mathbb{Q}$ alors $r \cdot x = \frac{p'}{q'}$ Et donc $x = \frac{p'}{q'}\frac{q}{p}$. Ce qui est absurde.
2. *Méthode "classique"*. Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée "p impair $\Rightarrow p^2$ impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$. Nous obtenons $q^2 = 2 \times p'^2$. Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifiée. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   Autre méthode. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ pour deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble suivant :
   $$\mathscr{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$
   Cet ensemble $\mathscr{N}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ qui est non vide car $q \in \mathscr{N}$. On peut alors prendre le plus petit élément de $\mathscr{N}$: $n_0 = \min \mathscr{N}$. En particulier $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Définissons maintenant n_1 de la façon suivante : $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$. Il se trouve que n_1 appartient aussi à $\mathscr{N}$ car d'une part $n_1 \in \mathbb{N}$ (car n_0 et $n_0 \cdot \sqrt{2}$ sont des entiers) et d'autre part $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Montrons maintenant que n_1 est plus petit que n_0. Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ alors $n_1 = n_0(\sqrt{2} - 1) < n_0$ et est non nul.
   Bilan : nous avons trouvé $n_1 \in \mathscr{N}$ strictement plus petit que $n_0 = \min \mathscr{N}$. Ceci fournit une contradiction.
   Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$. D'une part $x \in]r, r'[$ (car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) et d'après les deux premières questions $\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{2}\right) \notin \mathbb{Q}$ donc $x \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Correction de l'exercice 1467 ▲

1. Soit $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ avec $\mathrm{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$. Pour $p(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$, alors $\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0$. Après multiplication par β^n nous obtenons l'égalité suivante :
   $$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + a_1 \alpha \beta^{n-1} + a_0 \beta^n = 0.$$
   En factorisant tous les termes de cette somme sauf le premier par β, nous écrivons $a_n \alpha^n + \beta q = 0$. Ceci entraîne que β divise $a_n \alpha^n$, mais comme β et α^n sont premier entre eux alors par le lemme de Gauss β divise a_n. De même en factorisant par α tous les termes de la somme ci-dessus, sauf le dernier, nous obtenons $\alpha q' + a_0 \beta^n = 0$ et par un raisonnement similaire α divise a_0.

2. Notons $\gamma = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Alors $\gamma^2 = 5+2\sqrt{2}\sqrt{3}$ Et donc $\left(\gamma^2-5\right)^2 = 4\times 2\times 3$, Nous choisissons $p(x) = (x^2-5)^2-24$, qui s'écrit aussi $p(x) = x^4-10x^2+1$. Vu notre choix de p, nous avons $p(\gamma)=0$. Si nous supposons que γ est rationnel, alors $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ et d'après la première question α divise le terme constant de p, c'est-à-dire 1. Donc $\alpha = \pm 1$. De même β divise le coefficient du terme de plus haut degré de p, donc β divise 1, soit $\beta = 1$. Ainsi $\gamma = \pm 1$, ce qui est évidemment absurde !

Correction de l'exercice 1469 ▲

1. Soit $p = 1997\,1997\ldots1997$ et $q = 1\,0000\,0000\ldots0000 = 10^{4n}$. Alors $N_n = \frac{p}{q}$.
2. Remarquons que $10\,000\times M = 1997,1997\,1997\ldots$ Alors $10\,000\times M - M = 1997$; donc $9999\times M = 1997$ d'où $M = \frac{1997}{9999}$.
3. $0,111\ldots = \frac{1}{9}$, $0,222\ldots = \frac{2}{9}$, etc. D'où $P = \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{9}{9} = \frac{1+2+\cdots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$.

Correction de l'exercice 1471 ▲

Par l'absurde supposons que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ soit un rationnel. Il s'écrit alors $\frac{p}{q}$ avec $p\geqslant 0, q>0$ des entiers. On obtient $q\ln 3 = p\ln 2$. En prenant l'exponentielle nous obtenons : $\exp(q\ln 3) = \exp(p\ln 2)$ soit $3^q = 2^p$. Si $p\geqslant 1$ alors 2 divise 3^q donc 2 divise 3, ce qui est absurde. Donc $p=0$. Ceci nous conduit à l'égalité $3^q = 1$, donc $q=0$. La seule solution possible est $p=0$, $q=0$. Ce qui contredit $q\neq 0$. Donc $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Correction de l'exercice 1474 ▲

Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell\in\mathbb{R}$. Par définition

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geqslant N \qquad |u_n-\ell|<\varepsilon.$$

Choisissons $\varepsilon = 1$, nous obtenons le N correspondant. Alors pour $n\geqslant N$, nous avons $|u_n-\ell|<1$; autrement dit $\ell-1<u_n<\ell+1$. Notons $M = \max_{n=0,\ldots,N-1}\{u_n\}$ et puis $M' = \max(M,\ell+1)$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n\leqslant M'$. De même en posant $m = \min_{n=0,\ldots,N-1}\{u_n\}$ et $m' = \min(m,\ell-1)$ nous obtenons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant m'$.

Correction de l'exercice 1475 ▲

Il est facile de se convaincre que (u_n) n'a pas de limite, mais plus délicat d'en donner une démonstration formelle. En effet, dès lors qu'on ne sait pas qu'une suite (u_n) converge, on ne peut pas écrire $\lim u_n$, c'est un nombre qui n'est pas défini. Par exemple l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n+1/n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

n'a pas de sens. Par contre voilà ce qu'on peut dire : *Comme la suite $1/n$ tend vers 0 quand $n\to\infty$, la suite u_n est convergente si et seulement si la suite $(-1)^n$ l'est. De plus, dans le cas où elles sont toutes les deux convergentes, elles ont même limite.* Cette affirmation provient tout simplement du théorème suivant
Théorème : Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers deux limites ℓ et ℓ'. Alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n+v_n$ est convergente (on peut donc parler de sa limite) et $\lim w_n = \ell+\ell'$.
De plus, il n'est pas vrai que toute suite convergente doit forcément être croissante et majorée ou décroissante et minorée. Par exemple, $(-1)^n/n$ est une suite qui converge vers 0 mais qui n'est ni croissante, ni décroissante.

Voici maintenant un exemple de rédaction de l'exercice. On veut montrer que la suite (u_n) n'est pas convergente. Supposons donc par l'absurde qu'elle soit convergente et notons $\ell = \lim_{n\to\infty}u_n$. (Cette expression a un sens puisqu'on suppose que u_n converge).
Rappel. Une *sous-suite* de (u_n) (on dit aussi *suite extraite* de (u_n)) est une suite (v_n) de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ où ϕ est une application strictement croissante de ||| dans |||. Cette fonction ϕ correspond “au choix des indices qu'on veut garder” dans notre sous-suite. Par exemple, si on ne veut garder dans la suite (u_n) que les termes pour lesquels n est un multiple de trois, on pourra poser $\phi(n) = 3n$, c'est à dire $v_n = u_{3n}$.

Considérons maintenant les sous-suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ de (u_n). On a que $v_n = 1+1/2n \to 1$ et que $w_n = -1+1/(2n+1) \to -1$. Or on a le théorème suivant sur les sous-suites d'une suite convergente :
Théorème : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ (le théorème est encore vrai si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$). Alors, toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ.
Par conséquent, ici, on a que $\lim v_n = \ell$ et $\lim w_n = \ell$ donc $\ell = 1$ et $\ell = -1$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse disant que (u_n) était convergente est donc fausse. Donc (u_n) ne converge pas.

Correction de l'exercice 1480 ▲

Supposons d'abord $\left|r-\sqrt{a}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$. Cela implique $|r| \leqslant \sqrt{a}+1$.
Majorons $|r^2-a|$:

$$|r^2-a| = |r-\sqrt{a}| \times |r+\sqrt{a}| \leqslant |r-\sqrt{a}| \times \left(|r|+\sqrt{a}\right) \leqslant |r-\sqrt{a}| \times \left(2\sqrt{a}+1\right)$$

Minorons $|r^2-a|$, en posant $r = \frac{p}{q}$, $a = \frac{m}{n}$.

$$|r^2-a| = \left|\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{m}{n}\right| = \left|\frac{np^2-mq^2}{nq^2}\right| \geqslant \frac{1}{nq^2}$$

La dernière inégalité provient que le numérateur np^2-mq^2 n'est pas nul (sinon $\sqrt{a}$ serait rationnel).
On déduit de ces deux majorations :

$$\frac{1}{nq^2} \leqslant |r^2-a| \leqslant |r-\sqrt{a}| \times \left(2\sqrt{a}+1\right)$$

Et donc :

$$|r-\sqrt{a}| \geqslant \frac{1}{n(2\sqrt{a}+1)}\frac{1}{q^2}.$$

Cette inégalité est aussi clairement vérifier si $\left|r-\sqrt{a}\right| > \frac{1}{q^2}$.
La constante $C = \frac{1}{n(2\sqrt{a}+1)}$ convient.

Correction de l'exercice 1481 ▲

$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a+\sqrt{b}} \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy} = a+\sqrt{b} \Leftrightarrow b+4xy-4\sqrt{bxy} = (x+y-a)^2$.
$\Rightarrow$: $bxy = r^2 \Rightarrow \sqrt{b}\left(1-\frac{2r}{b}\right) = x+y-a \Rightarrow r = \frac{b}{2}$ et $x+y = a \Rightarrow (x-y)^2 = a^2-b$.
$\Leftarrow$: $a^2-b = u^2$. On prend $x = \frac{a+u}{2}$ et $y = \frac{a-u}{2} \Rightarrow x+y+2\sqrt{xy} = a+\sqrt{b}$.

Correction de l'exercice 1482 ▲

$= \frac{q-1}{2}$.

Correction de l'exercice 1483 ▲

Si $p \in P$: $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{n}{p} \in A$ avec $n \wedge p = 1$.
Alors pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{nx+py}{p} \in A$, donc $\frac{1}{p}\mathbb{Z} \subset A$.

Correction de l'exercice 1485 ▲

1. Si $x_n = \frac{p}{q} \neq 0$: $\frac{1}{k_n} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{1}{k_n-1}, \Rightarrow x_{n+1} = \frac{k_np-q}{k_nq}$ et $0 \leqslant k_np-q < p$. Donc la suite des numérateurs est strictement décroissante.
2. Car $x_{n+1} = \frac{p}{q} - \frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_n-1} - \frac{1}{k_n}$.
3. $n_p > n_{p-1}(n_{p-1}-1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-1}} + \frac{1}{n_p} < \frac{1}{n_{p-1}-1}$.
   $n_{p-1}-1 \geqslant n_{p-2}(n_{p-2}-1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-2}} + \frac{1}{n_{p-1}-1} \leqslant \frac{1}{n_{p-2}-1}$, etc.
   Finalement, $x < \frac{1}{n_0-1} \Rightarrow n_0 = k_0$.
   (cf. INA opt. 1977)

Correction de l'exercice 1486 ▲

1. Pour $x = \frac{p}{q}$, on peut prendre : $m = qc - pd$, et $n = pb - qa$.
2. (m,n) est unique à un facteur près.
3. $\frac{ma+nc}{mb+nd} - \frac{a}{b} = \frac{n(bc-ad)}{b(mb+nd)}$, et $\frac{c}{d} - \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{m(bc-ad)}{d(mb+nd)}$.

Correction de l'exercice 1487 ▲

1. $x = -\frac{1}{2}$.
2. $x = \frac{2}{3}$.
3. Pas de solution.

Correction de l'exercice 1488 ▲

1. $x^y = y^x \Leftrightarrow \frac{p^{p'q}}{q^{p'q}} = \frac{p'^{pq'}}{q'^{pq'}}$ (formes irréductibles)
$\Rightarrow \begin{cases} p^{p'q} = p'^{pq'} \\ q^{p'q} = q'^{pq'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^b = p'^a \\ q^b = q'^a. \end{cases}$
Comme $a \wedge b = 1$, on décompose p, p', q, q' en facteurs premiers $\Rightarrow$ le résultat.
2. $\left(pq' = m^a n^b,\ p'q = m^b n^a,\ m \wedge n = 1,\ a < b\right) \Rightarrow d = m^a n^a$, $a = n^{b-a}$ et $b = m^{b-a}$.
3. $m \geqslant n+1$ donc si $b-a \geqslant 2$, on a : $m^{b-a} - n^{b-a} = (m-n)(m^{b-a-1} + \cdots + n^{b-a-1}) > b-a$.
Donc $b-a = 1 = m-n$, $a = n$, $x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $y = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
Ces valeurs conviennent.

Correction de l'exercice 1489 ▲

1. Soient m et n deux entiers naturels supérieurs à 2.
$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ \sqrt[n]{m} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ a^n = m \times b^n.$$
Tout d'abord, si $b = 1$, $m = a^n$ et m est une puissance n-ième parfaite. Ensuite, $a = 1$ est impossible car $m \times b^n \geqslant 2$. Supposons alors que a et b soient des entiers supérieurs à 2 (et que $a^n = m \times b^n$). L'exposant de tout facteur premier de a^n ou de b^n est un multiple de n et par unicité de la décomposition en facteurs premiers, il en est de même de tout facteur premier de m. Ceci montre que, si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, m est une puissance n-ième parfaite. Réciproquement, si m est une puissance n-ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est un entier et en particulier un rationnel. En résumé :
$$\boxed{\forall (m,n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2,\ \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \text{ est une puissance } n \text{ -ième parfaite.}}$$
Par suite, si m n'est pas une puissance n-ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est irrationnel.
2.
$$\begin{aligned} \log 2 \in \mathbb{Q} &\Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ \log 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ 10^{a/b} = 2 \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ 10^a = 2^b \\ &\Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ 5^a = 2^{b-a}. \end{aligned}$$
Puisque $5^a > 1$, ceci impose $b - a \in \mathbb{N}^*$. Mais alors, l'égalité ci-dessus est impossible pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$ par unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a montré par l'absurde que

$\boxed{\log 2 \text{ est irrationnel.}}$

3. Supposons par l'absurde que π soit rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi = \frac{p}{q}$. Pour n entier naturel non nul donné, posons

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} x^n(p-qx)^n \sin x\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^{p/q} x^n(p-qx)^n \sin x\,dx.$$

• Tout d'abord, pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{q}$, on a $0 \leqslant x(p-qx) = \frac{p}{2q}\left(p - \frac{p}{2q}\times q\right) = \frac{p^2}{4q}$, et donc (puisque $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ pour $x \in [0,\pi]$),

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^{p/q}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n dx = \frac{\pi}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n.$$

D'après le résultat admis par l'énoncé, $\frac{\pi}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite (I_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. • Ensuite, puisque pour x élément de $[0,\pi]$, on a $x^n(p-qx)^n \sin x \geqslant 0$, pour n entier naturel non nul donné, on a

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} x^n(p-qx)^n \sin x\,dx \geqslant \frac{1}{n!}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x^n(p-qx)^n \sin x\,dx \geqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{p}{4q}\left(p-\frac{p}{4q}\times q\right)\right)^n \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}n!}\left(\frac{3p^2}{16q}\right)^n > 0.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$. • Vérifions enfin que, pour tout entier naturel non nul n, I_n est un entier (relatif). Soit $P_n = \frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n$. P_n est un polynôme de degré $2n$ et 0 et $\frac{p}{q}$ sont racines d'ordre n de P_n et donc, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, racines d'ordre $n-k$ de $P_n^{(k)}$. En particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont, pour $0 \leqslant k < n$, des entiers relatifs. De même, puisque $\deg P_n = 2n$, pour $k \geqslant 2n+1$, $P_n^{(k)} \geqslant 0$ et en particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $Pn^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont, pour $k \geqslant 2n+1$, des entiers relatifs. Soit k un entier tel que $n \leqslant k \leqslant 2n$.

$$\frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n = \frac{1}{n!}x^n\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^{n-i}(-1)^i q^i x^i = \sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{n!}p^{n-i}(-1)^i q^i x^{n+i} = \sum_{k=n}^{2n}\frac{C_n^{k-n}}{n!}p^{2n-k}(-1)^{k-n}q^{k-n}x^k.$$

On sait alors que

$$P_n^{(k)}(0) = k!\times(\text{coefficient de } x^k) = (-1)^{k-n}\frac{k!}{n!}C_n^{k-n}p^{2n-k}q^{k-n}.$$

ce qui montre que $P_n^{(k)}(0)$ est entier relatif (puisque $n \leqslant k \leqslant 2n$). Puis, comme $P_n\left(\frac{p}{q}-x\right) = P_n(x)$, on a encore $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}-x\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(x)$ et en particulier $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. On a montré que pour tout entier naturel k, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont des entiers relatifs. Montrons alors que I_n est un entier relatif. Une première intégration par parties fournit : $I_n = [-P_n(x)\cos x]_0^{p/q} + \int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx$. cos prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$ de même que P_n. Par suite,

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

Une deuxième intégration par parties fournit : $\int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx = [P_n'(x)\sin x]_0^{p/q} - \int_0^{p/q} P_n''(x)\sin x\,dx$. sin prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$, de même que P_n' et

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n''(x)\sin x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

En renouvelant les intégrations par parties et puisque sin et cos prennent des valeurs entières en 0 et π de même que les dérivées succesives de P_n, on en déduit que :

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x) \sin x \, dx \in \mathbb{Z}.$$

Mais,

$$\int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x) \sin x \, dx = \int_0^{p/q} \frac{1}{n!}(-q)^n (2n)! \sin x \, dx = 2(-q)^n (2n)(2n-1)\dots(n+1) \in \mathbb{Z}.$$

Donc pour tout naturel n, I_n est un entier relatif, strictement positif d'après plus haut. On en déduit que pour tout naturel n, $I_n \geqslant 1$. Cette dernière constatation contredit le fait que la suite (I_n) converge vers 0. L'hypothèse π est rationnel est donc absurde et par suite,

$$\boxed{\pi \text{ est irrationnel.}}$$

4. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$. • Pour $n = 0$, $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt = \int_0^1 e^t \, dt = e - 1$ et donc, $e = 1 + \int_0^1 e^t \, dt = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t \, dt$. • Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$. Une intégrations par parties fournit :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1) \times n!} e^t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt,$$

et donc,

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence. Soit n un entier naturel non nul. D'après ce qui précède,

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supposons alors par l'absurde que e soit rationnel. Alors, il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \; e = \frac{a}{b}$. Soit n un entier naturel non nul quelconque. D'après ce qui précède, on a $0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$, ce qui s'écrit encore après multiplication des trois membres par $bn!$

$$0 < a \times n! - b \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

En particulier, pour $n = 3b$, on a $0 < a \times (3b)! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < \frac{3b}{3b+1} < 1$. Mais ceci est impossible car $a \times n! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!}$ est un entier relatif. Il etait donc absurde de supposer que e est rationnel et finalement,

$$\boxed{e \text{ est irrationnel.}}$$

5. Une équation du troisième degré dont les solutions sont $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ et $\cos \frac{6\pi}{7}$ est

$$(X - \cos \tfrac{2\pi}{7})(X - \cos \tfrac{4\pi}{7})(X - \cos \tfrac{6\pi}{7}) = 0,$$

ou encore

$$X^3 - \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) X^2 + \left(\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \right) X - \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$$

Calculons alors ces trois coefficients. Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Puisque $\omega^7 = 1$ et que $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$, on a d'après les formules d'Euler

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}(\omega+\omega^6+\omega^2+\omega^5+\omega^3+\omega^4)=-\frac{1}{2},$$

puis,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}&=\frac{1}{4}((\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)+(\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4)+(\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4))\\&=\frac{1}{4}((\omega^3+\omega^6+\omega+\omega^4)+(\omega^4+\omega^5+\omega^2+\omega^3)+(\omega^5+\omega^6+\omega+\omega^2))\\&=\frac{2(-1)}{4}=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}&=\frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4)\\&=\frac{1}{8}(\omega^3+\omega^6+\omega+\omega^4)(\omega^3+\omega^4)=\frac{1}{8}(\omega^6+1+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega)=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Les trois nombres $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ sont donc solution de l'équation $X^3+\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}=0$ ou encore de l'équation

$$8X^3+4X^2-4X-1=0.$$

Montrons que cette équation n'admet pas de racine rationnelle. Dans le cas contraire, si, pour p entier relatif non nul et q entier naturel non nul tels que p et q sont premiers entre eux, le nombre $r=\frac{p}{q}$ est racine de cette équation, alors $8p^3+4p^2q-4pq^2-q^3=0$. Ceci peut encore s'écrire $8p^3=q(-4p^2+4pq+q^2)$ ce qui montre que q divise $8p^3$. Comme q est premier avec p et donc avec p^3, on en déduit d'après le théorème de GAUSS que q divise 8. De même, l'égalité $q^3=p(8p^2+4pq-4q^2)$ montre que p divise q^3 et donc que p divise 1. Ainsi, $p\in\{-1,1\}$ et $q\in\{1,2,4,8\}$ ou encore $r\in\left\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{8}\right\}$. On vérifie alors aisément qu'aucun de ces nombres n'est racine de l'équation considérée et donc cette équation n'a pas de racine rationnelle. En particulier,

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{7}\text{ est irrationnel.}}$$

6. On sait que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels mais ceci n'impose rien à la somme $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Soit $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\Rightarrow(\alpha-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2&\Rightarrow\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha+2=8+2\sqrt{15}\\&\Rightarrow(\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha-6)^2=60\Rightarrow\alpha^4+8\alpha^2-24=4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2-6)\end{aligned}$$

Si maintenant, on suppose que α est rationnel, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a nécessairement $\alpha(\alpha^2-6)=0$ (dans le cas contraire, $\sqrt{2}=\frac{\alpha^4+8\alpha^2-24}{4\alpha(\alpha^2-6)}\in\mathbb{Q}$). Mais α n'est ni 0, ni $-\sqrt{6}$, ni $\sqrt{6}$ (car $\alpha^2>2+3+5=10>6$). Donc

$$\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\text{ est irrationnel.}}$$

Correction de l'exercice 1490 ▲

Soient k un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à k.

$$\begin{aligned}\binom{n+10\times k!}{k} &= \frac{(n+10\times k!)(n+10\times k!-1)\dots(n+10\times k!-k+1)}{k!}\\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)+10\times k!\times K}{k!} \quad \text{(pour un certain entier } K)\\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}+10K = \binom{n}{k}+10K.\end{aligned}$$

La différence $\binom{n+10\times k!}{k}-\binom{n}{k}$ est donc divisible par 10. Par suite, $\binom{n+10\times k!}{k}$ et $\binom{n}{k}$ ont même chiffre des unités en base 10. Ainsi, $\forall n \geqslant k$, $u_{n+10\times k!} = u_n$ et donc la suite u est donc $10k!$-périodique. On sait alors que

$$\boxed{0,u_k u_{k+1} u_{k+2}\dots \text{ est rationnel.}}$$

Correction de l'exercice 1491 ▲

Soit x un irrationnel et $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers x (p_n entier relatif et q_n entier naturel non nul, la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ n'étant pas nécessairement irréductible). Supposons que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$. Donc :

$$\exists A>0/\ (\forall n_0\in\mathbb{N})(\exists n\geqslant n_0/\ q_n\geqslant A)$$

ou encore, il existe une suite extraite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est bornée.
La suite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels qui est bornée, et donc cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Mais alors, on peut extraire de la suite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante et en particulier convergente.
La suite $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite d'entiers relatifs convergente et est donc constante à partir d'un certain rang.
Ainsi, on peut extraire de la suite $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(p_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ constante. La suite $((q_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est également constante car extraite de la suite constante $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et finalement, on a extrait de la suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ constante.
Mais la suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x et donc la suite extraite $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x. Puisque $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}} = x$ et donc x est rationnel. Contradiction .
Donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Enfin si $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$, on peut extraire de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite bornée $(p_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Mais alors, la suite $(\frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $x=0$ contredisant l'irrationnalité de x.
Donc, la suite $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+_infty$.

Correction de l'exercice 1492 ▲

Explicitons la formule pour $\max(x,y)$. Si $x\geqslant y$, alors $|x-y| = x-y$ donc $\frac12(x+y+|x-y|) = \frac12(x+y+x-y) = x$. De même si $x\leqslant y$, alors $|x-y| = -x+y$ donc $\frac12(x+y+|x-y|) = \frac12(x+y-x+y) = y$.
Pour trois éléments, nous avons $\max(x,y,z) = \max\big(\max(x,y),z\big)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned}\max(x,y,z) &= \frac{\max(x,y)+z+|\max(x,y)-z|}{2}\\ &= \frac{\frac12(x+y+|x-y|)+z+\left|\frac12(x+y+|x-y|)-z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1493 ▲

$(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup A = +\infty$). D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Correction de l'exercice 1494 ▲

1. $[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
2. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il nexiste pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
4. $\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $[\frac{5}{4},+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,-1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Correction de l'exercice 1504 ▲

1. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On sait que $\sup A$ est un majorant de A, c'est-à-dire, pour tout $a\in A$, $a\leqslant \sup A$. De même, pour tout $b\in B$, $b\leqslant \sup B$. On veut montrer que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$. Soit donc $x\in A+B$. Cela signifie que x est de la forme $a+b$ pour un $a\in A$ et un $b\in B$. Or $a\leqslant \sup A$, et $b\leqslant \sup B$, donc $x=a+b\leqslant \sup A+\sup B$. Comme ce raisonnement est valide pour tout $x\in A+B$ cela signifie que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.
2. On veut montrer que, quel que soit $\varepsilon>0$, $\sup A+\sup B-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. On prend donc un $\varepsilon>0$ quelconque, et on veut montrer que $\sup A+\sup B-\varepsilon$ ne majore pas $A+B$. On s'interdit donc dans la suite de modifier ε. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, $\sup A-\varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie qu'il existe un élément a de A tel que $a>\sup A-\varepsilon/2$. *Attention : $\sup A-\varepsilon/2$ n'est pas forcément dans A ; $\sup A$ non plus.* De la même manière, il existe $b\in B$ tel que $b>\sup B-\varepsilon/2$. Or l'élément x défini par $x=a+b$ est un élément de $A+B$, et il vérifie $x>(\sup A-\varepsilon/2)+(\sup B-\varepsilon/2)=\sup A+\sup B-\varepsilon$. Ceci implique que $\sup A+\sup B-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$.
3. $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$ d'après la partie 1. Mais, d'après la partie 2., dès qu'on prend un $\varepsilon>0$, $\sup A+\sup B-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. Donc $\sup A+\sup B$ est bien le plus petit des majorants de $A+B$, c'est donc la borne supérieure de $A+B$. Autrement dit $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Correction de l'exercice 1505 ▲

1. Vrai.
2. Faux. C'est vrai avec l'hypothèse $B\subset A$ et non $A\subset B$.
3. Vrai.
4. Faux. Il y a égalité.
5. Vrai.
6. Vrai.

Correction de l'exercice 1515 ▲

A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et admettent donc des bornes supérieures notées respectivement α et β. Pour tout $(a,b)\in A\times B$, on a $a+b\leqslant\alpha+\beta$. Ceci montre que $A+B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et donc que $\sup(A+B)$ existe dans $\mathbb{R}$. (De plus, puisque $\alpha+\beta$ est un majorant de $A+B$, on a déjà $\sup(A+B)\leqslant\alpha+\beta$). Soit alors $\varepsilon>0$. Il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<a\leqslant\alpha$ et $\beta-\frac{\varepsilon}{2}<b\leqslant\beta$, et donc tels que $\alpha+\beta-\varepsilon<a+b\leqslant\alpha+\beta$.
En résumé,

$$\textbf{(1)}\ \forall (a,b)\in A\times B,\ a+b\leqslant \alpha+\beta \text{ et } \textbf{(2)}\ \forall \varepsilon>0,\ \exists (a,b)\in A\times B/\ a+b>\alpha+\beta-\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\boxed{\sup(A+B)=\alpha+\beta=\sup A+\sup B.}$$

Pour les bornes inférieures, on peut refaire le travail précédent en l'adaptant ou appliquer le résultat précédent aux ensembles $-A$ et $-B$ car $\text{Inf}A=-\sup(-A)$.

Correction de l'exercice 1516 ▲

Posons pour n entier naturel non nul $u_n=\frac{1}{n}+(-1)^n$ de sorte que $A=\{u_n,\ n\in\mathbb{N}^*\}=\{0,\frac{1}{2}+1,\frac{1}{3}-1,\frac{1}{4}+1,\frac{1}{5}-1,...\}$. Pour $n\geqslant 1$, $u_{2n}=1+\frac{1}{2n}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1<u_{2n}\leqslant\frac{3}{2}$. Pour $n\geqslant 1$, $u_{2n-1}=-1+\frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<u_{2n-1}\leqslant 0$. Par suite, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<u_n\leqslant\frac{3}{2}$. Donc, $\sup A$ et $\inf A$ existent dans $\mathbb{R}$ et de plus $-1\leqslant \inf A\leqslant\sup A\leqslant\frac{3}{2}$. Ensuite, $\frac{3}{2}=u_2\in A$. Donc,

$$\boxed{\sup A=\max A=\frac{3}{2}.}$$

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n, ona $-1\leqslant\inf A\leqslant u_{2n-1}=-1+\frac{1}{2n-1}$. On fait tendre n tend vers l'infini dans cet encadrement, on obtient

$$\boxed{\inf A=-1}$$

(cette borne inférieure n'est pas un minimum).

Correction de l'exercice 1517 ▲

Posons $B=\{|y-x|,\ (x,y)\in A^2\}$. A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et donc $m=\inf A$ et $M=\sup A$ existent dans $\mathbb{R}$. Pour $(x,y)\in A^2$, on a $m\leqslant x\leqslant M$ et $m\leqslant yM$, et donc $y-x\leqslant M-m$ et $x-y\leqslant M-m$ ou encore $|y-x|\leqslant M-m$. Par suite, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. B admet donc une borne supérieure. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $(x_0,y_0)\in A^2$ tel que $x_0<\inf A+\frac{\varepsilon}{2}$ et $y_0>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$.
Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0-x_0|\geqslant y_0-x_0>\left(\sup A-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(\inf A+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\sup A-\inf A-\varepsilon.$$

En résumé,

1. $\forall (x,y)\in A^2$, $|y-x|\leqslant\sup A-\inf A$ et
2. $\forall\varepsilon>0$, $\exists (x,y)\in A^2/\ |y-x|>\sup A-\inf A-\varepsilon$.

Donc, $\sup B=\sup A-\inf A$.

$$\boxed{\sup\ \{|y-x|,\ (x,y)\in A^2\}=\sup A-\inf A.}$$

Correction de l'exercice 1518 ▲

1. $A\cap B$ peut être vide et on n'a rien à dire. Supposons donc $A\cap B$ non vide. Pour $x\in A\cap B$, on a $x\leqslant\sup A$ et $x\leqslant\sup B$ et donc $x\leqslant\min\{\sup A,\sup B\}$. Dans ce cas, $\sup(A\cap B)$ existe et $\sup(A\cap B)\leqslant\min\{\sup A,\sup B\}$. On ne peut pas améliorer. Par exemple, soit $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ et $B=([0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))\cup\{0\}$. On a $\sup A=1$, $\sup B=1$, $A\cap B=\{0\}$ et donc $\sup(A\cap B)=0<1=\min\{\sup A,\sup B\}$.
2. Pour $x\in A\cup B$, on a $x\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$. Donc $\sup(A\cup B)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A\cup B)\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$. Inversement, supposons par exemple $\sup A\geqslant\sup B$ de sorte que $\max\{\sup A,\sup B\}=\sup A$. Soit alors $\varepsilon>0$. Il existe $a\in A$ tel que $\sup A-\varepsilon<a\leqslant\sup A$. a est dans A et donc dans $A\cup B$. En résumé, $\forall x\in(A\cup B)$, $x\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$ et $\forall\varepsilon>0$, $\exists x\in(A\cup B)/\ \max\{\sup A,\sup B\}-\varepsilon<x$ et donc

$$\boxed{\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}.}$$

3. D'après l'exercice 1515, $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.
4. Pour $\sup(AB)$, tout est possible. Par exemple, si $A=B=]-\infty,0]$ alors $\sup A=\sup B=0$, mais $AB=[0,+\infty[$ et $\sup(AB)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1523 ▲

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2\sqrt{a+b}\Leftrightarrow(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant 2(a+b)$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x\mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Évaluons la différence $2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$:

$$2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

Donc par l'équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

Correction de l'exercice 1529 ▲

1. Calculons d'abord $f(0)$. Nous savons $f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)$, donc $f(0)=0$. Montrons le résultat demandé par récurrence : pour $n=1$, nous avons bien $f(1)=1\times f(1)$. Si $f(n)=nf(1)$ alors $f(n+1)=f(n)+f(1)=nf(1)+f(1)=(n+1)f(1)$.
2. $0=f(0)=f(-1+1)=f(-1)+f(1)$. Donc $f(-1)=-f(1)$. Puis comme ci-dessus $f(-n)=nf(-1)=-nf(1)$.
3. Soit $q=\frac{a}{b}$. Alors $f(a)=f(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\cdots+\frac{a}{b})=f(\frac{a}{b})+\cdots+f(\frac{a}{b})$ (b termes dans ces sommes). Donc $f(a)=bf(\frac{a}{b})$. Soit $af(1)=bf(\frac{a}{b})$. Ce qui s'écrit aussi $f(\frac{a}{b})=\frac{a}{b}f(1)$.
4. Fixons $x\in\mathbb{R}$. Soit (α_i) une suite croissante de rationnels qui tend vers x. Soit (β_i) une suite décroissante de rationnels qui tend vers x :

$$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\leqslant\ldots\leqslant x\leqslant\cdots\leqslant\beta_2\leqslant\beta_1.$$

Alors comme $\alpha_i\leqslant x\leqslant\beta_i$ et que f est croissante nous avons $f(\alpha_i)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta_i)$. D'après la question précédent cette inéquation devient : $\alpha_i f(1)\leqslant f(x)\leqslant\beta_i f(1)$. Comme (α_i) et (β_i) tendent vers x. Par le "théorème des gendarmes" nous obtenons en passant à la limite : $xf(1)\leqslant f(x)\leqslant xf(1)$. Soit $f(x)=xf(1)$.

Correction de l'exercice 1540 ▲

1. $a=bq+r\Rightarrow\sum=\underbrace{q+q+\cdots+q}_{b-r}+\underbrace{(q+1)+\cdots+(q+1)}_{r}=bq+r=a.$
2.

Correction de l'exercice 1541 ▲

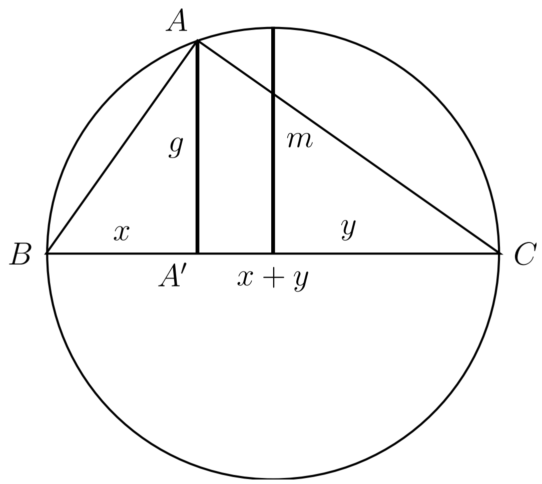
Soient x et y deux réels tels que $0<x\leqslant y$.

1. On a déjà $x=\frac{x+x}{2}\leqslant\frac{x+y}{2}=m\leqslant\frac{y+y}{2}=y$ et donc $\boxed{x\leqslant m\leqslant y}$.
(on peut aussi écrire : $m-x=\frac{x+y}{2}-x=\frac{y-x}{2}\geqslant 0$).
2. On a ensuite $x=\sqrt{x.x}\leqslant\sqrt{xy}=g\leqslant\sqrt{y.y}=y$ et donc $\boxed{x\leqslant g\leqslant y}$.
3. $m-g=\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{1}{2}((\sqrt{x})^2-2\sqrt{xy}+(\sqrt{y})^2)=\frac{1}{2}(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2\geqslant 0$ et donc, $\boxed{x\leqslant g\leqslant m\leqslant y}$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est comprise entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, ce qui fournit $\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{h}\leqslant\frac{1}{x}$, ou encore $\boxed{x\leqslant h\leqslant y}$.

5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$ ou encore $\frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{h}$ et finalement

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.}$$

Remarque 1. On a $h = \frac{2xy}{x+y}$, mais cette expression ne permet pas de comprendre que $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.
Remarque 2. On peut visualiser l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique.
Si (ABC) est un triangle rectangle en A et A' est le pied de la hauteur issue de A, on sait que $AA'^2 = A'B.A'C$.
On se sert de cette remarque pour construire g et la comparer graphiquement à m.
On accolle deux segments de longueurs respectives x et y. On construit alors un triangle rectangle d'hypothénuse ce segment (de longueur $x+y$) noté [BC], tel que le troisième sommet A ait une projection orthogonale A' sur (BC) vérifiant $BA' = x$ et $CA' = y$.



La moyenne arithmétique de x et y est $m = \frac{x+y}{2}$, le rayon du cercle, et la moyenne géométrique de x et y est $g = \sqrt{xy} = \sqrt{A'B.A'C} = AA'$, la hauteur issue de A du triangle (ABC).

Correction de l'exercice 1542 ▲

Si l'un des réels a, b ou c est strictement plus grand que 1, alors l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est négatif (puisque a, b et c sont positifs) et donc inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
Sinon, les trois réels a, b et c sont dans $[0,1]$. Le produit des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ vaut

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c).$$

Mais, pour $x \in [0,1]$, $x(1-x)$ est positif et d'autre part, $x(1-x) = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$. Par suite,

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leqslant \frac{1}{4^3}.$$

Il est alors impossible que les trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ soient strictement plus grand que $\frac{1}{4}$, leur produit étant dans ce cas strictement plus grand que $\frac{1}{4^3}$.
On a montré dans tous les cas que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 1543 ▲

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $E(x) \leqslant x < E(x)+1$ puis $E(x)+1 \leqslant x+1 < (E(x)+1)+1$. Comme $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$, on a bien $E(x+1) = E(x)+1$.

2. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $E(x)+E(y) \leqslant x+y$. Ainsi, $E(x)+E(y)$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x+y$. Comme $E(x+y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x+y$, on a donc $E(x)+E(y) \leqslant E(x+y)$.

   Améliorons. $E(x) \leqslant x < E(x)+1$ et $E(y) \leqslant y < E(y)+1$ fournit $E(x)+E(y) \leqslant x+y < E(x)+E(y)+2$ et donc $E(x+y)$ vaut, suivant le cas, $E(x)+E(y)$ ou $E(x)+E(y)+1$ (et est dans tous les cas supérieur ou égal à $E(x)+E(y)$).

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $k = E(x)$ et $l = E(y)$.

   1er cas. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ et $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, alors $x+y \in [k+l, k+l+1[$ et donc $E(x+y) = k+l$, puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = k+l+k+l = 2k+2l$. D'autre part, $2x \in [2k, 2k+1[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$. Par suite, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l$. Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) = E(2x)+E(2y)$.

   2ème cas. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ et $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, alors $x+y \in [k+l+\frac{1}{2}, k+l+\frac{3}{2}[$ et donc $E(x+y) = k+l$ ou $k+l+1$,puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l$ ou $2k+2l+1$. D'autre part, $2x \in [2k+1, 2k+2[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$. Par suite, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l+1$. Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

   3ème cas. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ et $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, on a de même $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

   4ème cas. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ et $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, on a $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l+2 = E(2x)+E(2y)$.

   Finalement, on a dans tous les cas $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

Correction de l'exercice 1544 ▲

p est déterminé par l'encadrement : $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ qui s'écrit encore $p \leqslant \frac{\ln n}{\ln 10} < p+1$. Par suite,

$$\boxed{p = E(\log_{10}(n)).}$$

$$\boxed{\text{Le nombre de chiffres d'un entier } n \text{ en base 10 est donc } E(\log_{10}(n))+1.}$$

Correction de l'exercice 1545 ▲

1. Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n. Ensuite, pour tout entier naturel k, on a

   $$1 \leqslant k \leqslant x \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant E(x).$$

   Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x.

2. Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $E(x)+1$ entiers entre 0 et x.

3. Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

   $$0 \leqslant 2k \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant \frac{x}{2}.$$

   Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E(\frac{x}{2})+1$ entiers pairs entre 0 et x. De même, il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.

   De même,

   $$0 \leqslant 2k+1 \leqslant x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant E(\frac{x-1}{2}).$$

   Il y a donc $E(\frac{x-1}{2})+1 = E(\frac{x+1}{2})$ entiers impairs entre 0 et x.

4. Il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$x+2y = n \Leftrightarrow x = n-2y.$$

Donc, (x,y) est solution si et seulement si $y \in \mathbb{N}$ et $n-2y \in \mathbb{N}$ ou encore si et seulement si $0 \leqslant 2y \leqslant n$. Il y a donc $E(\frac{n}{2})+1$ couples solutions.

6. Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x+20y = 1000$ qui s'écrit encore $x+2y = 100$. D'après 5), il y a $E(\frac{100}{2})+1 = 51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$2x+3y = n \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2}.$$

Donc,

$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } n-3y \in 2\mathbb{N}.$$

Maintenant, comme $n-3y = (n-y)-2y$ et que $2y$ est un entier pair, $n-3y$ est pair si et seulement si $n-y$ est pair ce qui revient à dire que y a la parité de n. Ainsi,

$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \frac{n}{3} \text{ et } y \text{ a la parité de } n.$$

1er cas. Si n est pair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers pairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{n}{6}))+1 = E(\frac{n+6}{6})$ tels entiers.

2ème cas. Si n est impair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers impairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{\frac{n}{3}-1}{2}))+1 = E(\frac{n+3}{6})$ tels entiers.

Finalement, le nombre cherché est $E(\frac{n+6}{6})$ si n est pair et $E(\frac{n+3}{6})$ si n est impair.

Correction de l'exercice 1546 ▲

1. Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n. Ensuite, pour tout entier naturel k, on a

$$1 \leqslant k \leqslant x \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant E(x).$$

Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x.

2. Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $E(x)+1$ entiers entre 0 et x.

3. Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$0 \leqslant 2k \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant \frac{x}{2}.$$

Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E(\frac{x}{2})+1$ entiers pairs entre 0 et x. De même, il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.
De même,

$$0 \leqslant 2k+1 \leqslant x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant E(\frac{x-1}{2}).$$

Il y a donc $E(\frac{x-1}{2})+1 = E(\frac{x+1}{2})$ entiers impairs entre 0 et x.

4. Il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a
$$x+2y = n \Leftrightarrow x = n-2y.$$
Donc, (x,y) est solution si et seulement si $y \in \mathbb{N}$ et $n-2y \in \mathbb{N}$ ou encore si et seulement si $0 \leqslant 2y \leqslant n$. Il y a donc $E(\frac{n}{2})+1$ couples solutions.
6. Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x+20y = 1000$ qui s'écrit encore $x+2y = 100$. D'après 5), il y a $E(\frac{100}{2})+1 = 51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.
7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a
$$2x+3y = n \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2}.$$
Donc,
$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } n-3y \in 2\mathbb{N}.$$
Maintenant, comme $n-3y = (n-y)-2y$ et que $2y$ est un entier pair, $n-3y$ est pair si et seulement si $n-y$ est pair ce qui revient à dire que y a la parité de n. Ainsi,
$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \frac{n}{3} \text{ et } y \text{ a la parité de } n.$$
1er cas. Si n est pair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers pairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{n}{6}))+1 = E(\frac{n+6}{6})$ tels entiers.
2ème cas. Si n est impair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers impairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{\frac{n}{3}-1}{2}))+1 = E(\frac{n+3}{6})$ tels entiers.
Finalement, le nombre cherché est $E(\frac{n+6}{6})$ si n est pair et $E(\frac{n+3}{6})$ si n est impair.

Correction de l'exercice 1547 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
$$E(x) \leqslant x < E(x)+1 \Rightarrow nE(x) \leqslant nx < nE(x)+n \Rightarrow nE(x) \leqslant E(nx) < nE(x)+n \Rightarrow E(x) \leqslant \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1$$
$$\Rightarrow E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x).$$

Correction de l'exercice 1548 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,x_2,...,x_n) \in [-1,1]^n$ tels que $x_1+x_2+...+x_n = 0$.
On écrit
$$(x_1+2x_2+...+nx_n) = (x_1+x_2+...+x_n)+(x_2+x_3+....+x_n)+(x_3+...+x_n)+...+(x_{n-1}+x_n)+x_n,$$
avec $x_1+...+x_n = 0$ et donc $x_2+...+x_n = -x_1$ ...

1er cas. Si $n = 2p$ est pair, alors $\frac{n^2}{4} = p^2$ et donc, $E(\frac{n^2}{4}) = p^2 = \frac{n^2}{4}$. Dans ce cas, on peut écrire
$$\begin{aligned}|x_1+2x_2+...+nx_n| &\leqslant |x_1+x_2+...+x_{2p}|+|x_2+....+x_{2p}|+...+|x_p+...+x_{2p}|\\ &+|x_{p+1}+...+x_{2p}|...+|x_{2p-1}+x_{2p}|+|x_{2p}|\\ &= 0+|-x_1|+|-x_1-x_2|+...+|-x_1+...-x_{p-1}|\\ &+|x_{p+1}+...+x_{2p}|...+|x_{2p-1}+x_{2p}|+|x_{2p}|\\ &\leqslant 0+1+2+...+(p-1)+p+(p-1)+...+1 = 2\frac{p(p-1)}{2}+p = p^2 = E(\frac{n^2}{4})\end{aligned}$$

2ème cas. Si $n=2p+1$ est impair, alors $\frac{n^2}{4}=p^2+p+\frac{1}{4}$ et donc, $E(\frac{n^2}{4})=p^2+p=\frac{n^2-1}{4}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned}|x_1+2x_2+...+nx_n| &\leqslant |x_1+x_2+...+x_{2p+1}|+...+|x_{p+1}+...+x_{2p+1}|\\&+|x_{p+2}+...+x_{2p+1}|...+|x_{2p+1}|\\&=0+|-x_1|+|-x_1-x_2|+...+|-x_1+...-x_p|\\&+|x_{p+2}+...+x_{2p+1}|...+|x_{2p+1}|\\&\leqslant 0+1+2+...+(p-1)+p+p+(p-1)+...+1=2\frac{p(p+1)}{2}=p^2+p=E(\frac{n^2}{4})\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |x_1+2x_2+...+nx_n|\leqslant E(\tfrac{n^2}{4}).}$$

Correction de l'exercice 1549 ▲

Pour $n=1$, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$. L'identité proposée est donc vraie pour $n=1$.
Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.
On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2(n+1)-1}\frac{(-1)^k}{k+1}&=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(n+1)}\\&=\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2(n+1)}=\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+2}^{2(n+1)}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n\geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ (identité de CATALAN).

Correction de l'exercice 1550 ▲

1. Si les b_k sont tous nuls, l'inégalité est claire. Sinon, pour x réel, posons
$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+xb_k)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$
f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :
$$0\geqslant\Delta'=\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right),$$
ou encore $|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$, qui est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.
2. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\quad(\text{CAUCHY-SCHWARZ})\\&=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2\end{aligned}$$
et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$, qui est l'inégalité de MINKOWSKI.

Correction de l'exercice 1551 ▲

Pour $x \geqslant 1, x+2\sqrt{x-1}=x-1+2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}+1)^2 \geqslant 0$. De même, $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2 \geqslant 0$. Donc, si on pose $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $f(x)$ existe si et seulement $x \geqslant 1$ et pour $x \geqslant 1$, $f(x)=\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$. Par suite,

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+|\sqrt{x-1}-1|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \text{ et } \sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \text{ et } \sqrt{x-1}=1,$$

ce qui est impossible. L'équation proposée n'a pas de solution.

Correction de l'exercice 1552 ▲

1. Soit G un sous groupe non nul de $(\mathbb{R},+)$ ($\{0\}=0.\mathbb{Z}$ est du type voulu). Il existe dans G un réel non nul x_0. Puisque G est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$, le réel $-x_0$ est aussi dans G et l'un des deux réels x_0 ou $-x_0$ est strictement positif. Soit alors $A=G\cap]0,+\infty[$. D'après ce qui précède, A est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. A admet donc une borne inférieure que l'on note a.

   1er cas. Si $a=0$, montrons dans ce cas que G est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est par exemple le cas de $(\mathbb{Q},+)$). Soient x un réel et ε un réel strictement positif. Puisque $\inf A=\inf(G\cap]0,+\infty[)=0$, il existe dans G un élément g tel que $0<g<\varepsilon$. Puis il existe un entier relatif n tel que $ng \leqslant x-\varepsilon<(n+1)g$ à savoir $n=E\left(\frac{x-\varepsilon}{g}\right)$. Soit $y=(n+1)g$. D'une part, y est dans G (si $n+1=0$, $(n+1)g=0\in G$, si $n+1>0$, $(n+1)g=g+g+...+g\in G$ et si $n+1<0$, $(n+1)g=-(-(n+1)g)\in G$) et d'autre part

   $$x-\varepsilon<(n+1)g=ng+g<x-\varepsilon+\varepsilon=x.$$

   On a montré que $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists y\in G/\ x-\varepsilon<y<x$ et donc

   $$\boxed{\text{si } G\neq\{0\} \text{ et si } \inf(G\cap]0,+\infty[)=0,\ G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

   2ème cas. Si $a>0$, montrons dans ce cas que $G=a\mathbb{Z}$. Pour cela, montrons tout d'abord que a est dans G. Mais si a n'est pas élément de G, par définition de a, il existe un réel x dans $G\cap]a,2a[$ puis il existe un réel y dans $G\cap]a,x[$. Le réel $x-y$ est alors dans $G\cap]0,a[$ ce qui est impossible. Donc a est élément de G. Montrons alors que $G=a\mathbb{Z}$. Puisque a est dans G, G contient encore $a+a=2a$, puis $a+a+a=3a$ et plus généralement tous les na, $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque G contient aussi les opposés de ces nombres et également $0=0\times a$, G contient finalement tous les na, $n\in\mathbb{Z}$. On a ainsi montré que $a\mathbb{Z}\subset G$. Réciproquement, soit x un élément de G et $n=E\left(\frac{x}{a}\right)$ $(\in\mathbb{Z})$. Alors, $n\leqslant\frac{x}{a}<n+1$ puis $0\leqslant x-na<a$. Or, x est dans G et na est dans G. Donc, $x-na$ est dans $G\cap[0,a[=\{0\}$, puis $x=na\in a\mathbb{Z}$. On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc $G=a\mathbb{Z}$.

   $$\boxed{\text{si } \inf(G\cap]0,+\infty[)=a>0,\ G=a\mathbb{Z}.}$$

2. Soit $G=\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$. On vérifie aisément que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Maintenant, la formule du binôme de NEWTON montre que, pour chaque entier naturel n,

   $$(\sqrt{2}-1)^n\in G\cap]0,+\infty[.$$

   Or, $0<\sqrt{2}-1<1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2}-1)^n=0$. Ceci montre que $\inf(G\cap]0;+\infty[)=0$ et donc que G est dense dans $\mathbb{R}$.

3. (a) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G_f=\{T\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T)=f(x)\}$. 0 est élément de G_f (et c'est même le seul élément de G_f si f n'est pas périodique) et donc $G\neq\varnothing$. De plus, si T et T' sont deux éléments de G alors, pour x réel donné :

   $$f(x+(T-T'))=f((x-T')+T)=f(x-T')=f(x-T'+T')=f(x),$$

   et $T-T'$ est encore un élément de G. On a montré que

$$\boxed{G_f \text{ est un sous groupe de } (\mathbb{R},+).}$$

(b) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. G_f contient encore tous les nombres de la forme $a+b\sqrt{2}$, $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ et est donc dense dans $\mathbb{R}$. Montrons que si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, f est constante. Soit x un réel quelconque. On va montrer que $f(x)=f(0)$. Remarque préliminaire : soit T une période strictement positive de f. Il existe un entier relatif p tel que $pT\leqslant x<(p+1)T$ à savoir $p=E\left(\frac{x}{T}\right)$. On a alors $f(x)=f(x-pT)$ avec $0\leqslant x-pT<T$. Soit alors $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque G_f est dense dans $\mathbb{R}$, il existe dans G_f un réel T_n tel que $0<T_n<\frac{1}{n}$ (ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty}T_n=0$). Mais alors, puisque $0<x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n<T_n$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty}x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n=0$. Maintenant, la suite $\left(f\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $f(x)$) et donc convergente vers $f(x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to+\infty}f\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty}\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right)\quad\text{(par continuité de } f \text{ en 0)}\\&=f(0)\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 1553 ▲

Soient x un réel et ε un réel strictement positif. On a $\sqrt[3]{x}<\sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que $\sqrt[3]{x}<r<\sqrt[3]{x+\varepsilon}$ et donc tel que $x<r^3<x+\varepsilon$, par stricte croissance de la fonction $t\mapsto t^3$ sur $\mathbb{R}$. On a montré que

$$\boxed{\{r^3,\ r\in\mathbb{Q}\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 1554 ▲

1. Par définition est l'unique nombre $E(x)\in\mathbb{Z}$ tel que
$$E(x)\leqslant x<E(x)+1.$$
2. Pour le réel kx, $(k=1,\dots,n)$ l'encadrement précédent s'écrit $E(kx)\leqslant kx<E(kx)+1$. Ces deux inégalités s'écrivent aussi $E(kx)\leqslant kx$ et $E(kx)>kx-1$, d'où l'encadrement $kx-1<E(kx)\leqslant kx$. On somme cet encadrement, k variant de 1 à n, pour obtenir :
$$\sum_{k=1}^n(kx-1)<\sum_{k=1}^n E(kx)\leqslant\sum_{k=1}^n kx.$$
Ce qui donne
$$x\cdot\sum_{k=1}^n k\quad-n<n^2\cdot u_n\leqslant x\cdot\sum_{k=1}^n k.$$
3. On se rappelle que $\sum_{k=1}^n k=\frac{n(n+1)}{2}$ donc nous obtenons l'encadrement :
$$x\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{n}<u_n\leqslant x\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$
$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ tend vers $\frac{1}{2}$, donc par le théorème des gendarmes (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$.
4. Chaque u_n est un rationnel (le numérateur et le dénominateur sont des entiers). Comme la suite (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$, alors la suite de rationnels $(2u_n)$ tend vers x. Chaque réel $x\in\mathbb{R}$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des rationnels, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1555 ▲

On applique l'inégalité arithmético-géométrique à $\frac{a^2}{4}$ et à b^2, ce qui donne

$$\frac{a^2}{4}+b^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot b^2} = |ab| \geqslant ab.$$

On peut généraliser en remplaçant 4 par un réel strictement positif. Une formulation est la suivante. Pour a et b réels et $\lambda > 0$, on a

$$2|ab| \leqslant \frac{a^2}{\lambda}+\lambda b^2.$$

Correction de l'exercice 1556 ▲

Notons a et b les nombres de l'énoncé. On a $ab = 100$. L'inégalité arithmético-géométrique fournit :

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} = 10$$

avec égalité ssi $a = b$, donc la somme est supérieure à 20, avec égalité ssi $a = b = 10$.

Correction de l'exercice 1557 ▲

Notons a_1, ..., a_n les nombres de l'énoncé. On a

$$a_1a_2\dots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

L'inégalité arithmético-géométrique fournit :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \frac{a_1+..+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \sqrt[n]{1} = 1$$

avec égalité ssi tous les a_i sont égaux. On en déduit que la somme est supérieure à n, avec égalité ssi tous les réels sont égaux (et donc égaux à 1).

Correction de l'exercice 1558 ▲

Il s'agit de savoir laquelle des deux quantités

$$a^3+b^3+c^3 \text{ et } 3abc$$

est la plus grande.
Or, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à a^3, b^3 et c^3, on obtient directement :

$$\frac{1}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc.$$

Il est donc préférable d'acheter les trois cubes.

Correction de l'exercice 1559 ▲

On applique l'inégalité arithmético-géométrique à $\frac{a^2}{bc}$, $\frac{b^2}{ca}$ et $\frac{c^2}{ab}$ ce qui donne

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}\frac{b^2}{ca}\frac{c^2}{ab}} = 3$$

Correction de l'exercice 1560 ▲

On applique l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $\frac{a_i}{b_i}$ ce qui donne

$$\frac{a_1}{b_1}+\ldots+\frac{a_n}{b_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{b_n}} = n\sqrt[n]{1} = n.$$

Correction de l'exercice 1561 ▲

On applique l'inégalité arithmético-géométrique à chacun des deux facteurs ce qui donne :

$$(1+a^2)(1+b^2) \geqslant (2\sqrt{a^2})(2\sqrt{b^2}) = 4|ab| \geqslant 4ab.$$

Remarque : on aurait également pu développer le membre de gauche et minorer par une seule utilisation de l'inégalité arithmético-géométrique à quatre variables :

$$(1+a^2)(1+b^2) = 1+a^2+b^2+a^2b^2 \geqslant 4\sqrt[4]{a^2b^2a^2b^2} = 4\sqrt[4]{a^4b^4} = 4|ab| \geqslant 4ab.$$

Correction de l'exercice 1562 ▲

On applique l'inégalité arithmético-géométrique à chacun des deux facteurs ce qui donne :

$$a^2b+b^2c+c^2a \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a} = 3abc$$

et

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant 3\sqrt[3]{ab^2\cdot bc^2\cdot ca^2} = 3abc.$$

En multipliant, on obtient le résultat.

Correction de l'exercice 1563 ▲

On peut essayer d'appliquer l'inégalité arithmético-géométrique à chaque facteur. Ceci donne

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right) = \frac{4}{\sqrt{ab}},$$

ce qui minore la quantité par 1 après une deuxième utilisation de l'inégalité arithmético-géométrique sur le dénominateur et utilisation de $a+b=8$, mais cette dernière minoration est évidente vu la forme initiale de l'expression : les deux facteurs sont supérieurs à 1.

(Remarque : lors de la première utilisation de l'inégalité arithmético-géométrique, il y avait égalité ssi $a=1$ et $b=1$ ce qui est impossible vu l'énoncé. L'inégalité est donc toujours stricte, ce qui indique que la minoration n'est sans doute pas très précise.)

Commençons donc plutôt par développer la quantité à minorer. On a

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \frac{1+a+b+ab}{ab} = \frac{9+ab}{ab} = 1+\frac{9}{ab}.$$

Il s'agit donc de majorer le produit ab. L'inégalité arithmético-géométrique donne $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} = 4$, donc $ab \leqslant 16$. On en déduit que $\frac{1}{ab} \geqslant \frac{1}{16}$ et donc que

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geqslant 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16},$$

avec égalité ssi $a=b=4$.

Remarque : il est préférable d'utiliser les contraintes (ici $a+b=8$) le plus tôt possible dans les majorations ou minorations successives, pour gagner en précision.

Correction de l'exercice 1564 ▲

En développant, l'inégalité est équivalente à

$$a^2d^2+b^2c^2 \geqslant 2abcd.$$

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à a^2d^2 et b^2c^2, on obtient :

$$a^2d^2+b^2c^2 \geqslant 2\sqrt{a^2d^2b^2c^2} = 2|abcd| \geqslant 2abcd.$$

Deuxième solution : en fait, on a l'identité remarquable

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Remarque : majorer chacun des deux facteurs dans le membre de gauche donne juste

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant 4|ab|\cdot|cd|,$$

ce qui ne permet pas de conclure puisque par ailleurs on a également

$$(ac+bd)^2 \geqslant 4|acbd|.$$

Correction de l'exercice 1565 ▲

L'équation est équivalente à

$$2^x+\frac{1}{2^x} = 2-x^2.$$

Or, par inégalité arithmético-géométrique, on a

$$2^x+\frac{1}{2^x} \geqslant 2\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}} \geqslant 2,$$

avec égalité ssi $2^x = \frac{1}{2^x}$ c'est-à-dire ssi $x=0$.
D'autre part, $2-x^2 \geqslant 2$ avec égalité ssi $x=0$ là aussi.
On en déduit que l'équation admet bien une solution, unique, égale à 0.

Correction de l'exercice 1566 ▲

Si (x,y,z) est une solution, alors en sommant les trois équation on obtient

$$4x+\frac{18}{y}+2y+\frac{9}{z}+9z+\frac{16}{x} = 14+15+17 = 46.$$

D'autre part, par inégalité arithmético-géométrique, on a

$$4x+\frac{16}{x} \geqslant 2\sqrt{4x\cdot\frac{16}{x}} = 16, \quad 2y+\frac{18}{y} \geqslant 12, \quad 9z+\frac{9}{z} \geqslant 18,$$

d'où

$$4x+\frac{16}{x}+2y+\frac{18}{y}+9z+\frac{9}{z} \geqslant 46,$$

avec égalité ssi chacune des trois inégalité sont des égalités donc ssi $(x,y,z) = (2,3,1)$.
Le système d'équations admet donc une unique solution, $(2,3,1)$.

Correction de l'exercice 1567 ▲

Appliquer l'inégalité arithmético-géométrique à $2a^3$ et à b^3 ne semble pas donner le résultat.

On a $2a^3+b^3 = a^3+a^3+b^3$. Appliquons l'inégalité arithmético-géométrique à trois variables. On obtient :

$$2a^3+b^3 = a^3+a^3+b^3 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3a^3b^3} = 3a^2b.$$

Correction de l'exercice 1568 ▲

Partir du membre de gauche et appliquer l'inégalité arithmético-géométrique à trois variables ne donne pas immédiatement le résultat. On peut par contre essayer de majorer séparément chacun des trois termes du membre de droite :

$$a^2b = \sqrt[3]{a^3a^3b^3} \leqslant \frac{2a^3+b^3}{3},$$
$$b^2c = \sqrt[3]{b^3b^3c^3} \leqslant \frac{2b^3+c^3}{3},$$
$$c^2a = \sqrt[3]{c^3c^3a^3} \leqslant \frac{2c^3+a^3}{3},$$

ce qui donne le résultat en sommant les trois inégalités.

Correction de l'exercice 1569 ▲

Partir du membre de gauche et appliquer l'inégalité arithmético-géométrique à trois variables ne donne pas immédiatement le résultat. Si on développe le membre de droite, on obtient

$$a^2bc+b^2ca+c^2ab,$$

que l'on peut essayer de minorer par trois utilisations indépendantes de l'inégalité arithmético-géométrique à quatre variables :

$$a^2bc = \sqrt[4]{a^4a^4b^4c^4} \leqslant \frac{1}{4}\left(a^4+a^4+b^4+c^4\right) = \frac{1}{4}\left(2a^4+b^4+c^4\right).$$

De même,

$$b^2ac \leqslant \frac{1}{4}\left(a^4+2b^4+c^4\right) \text{ et } c^2ab \leqslant \frac{1}{4}\left(a^4+b^4+2c^4\right).$$

En sommant ces trois inégalités, on obtient le résultat.

Correction de l'exercice 1570 ▲

L'inégalité arithmético-géométrique appliquée à $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}$ uniquement donne :

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right| \geqslant 2\frac{a}{c}.$$

On obtient de même

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{b}{a} \text{ et } \frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2} \geqslant \frac{c}{b}.$$

En sommant ces trois inégalités, on obtient le résultat.

Correction de l'exercice 1571 ▲

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique, on voit que les a et c se simplifient mais pas b et $b+c$. L'idée est alors de modifier la forme de l'inégalité pour obtenir la simplification. Or, l'inégalité est équivalente à

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}+1 \geqslant 3,$$

c'est-à-dire à

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c} \geqslant 3.$$

Sous cette forme, l'inégalité arithmético-géométrique donne le résultat :

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\frac{a}{b+c}\frac{b+c}{c}} = 3\sqrt[3]{1} = 3.$$

Correction de l'exercice 1573 ▲

1. Vrai. Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite (c'est un résultat du cours).
2. Faux. Un contre-exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_n$ est la suite constante (donc convergente) de valeur 1, et $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur -1. Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.
3. Vrai. La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ, que nous souhaitons démontrer, s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel

$$2p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon.$$

Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que

$$2p+1 \geqslant N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Correction de l'exercice 1580 ▲

1. Suite non convergente car non bornée.
2. Suite convergente vers 0.
3. Suite non convergente car la sous-suite $u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ est toujours plus grande que 1. Alors que la sous-suite $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1}$ est toujours plus petite que 0.

Correction de l'exercice 1581 ▲

Soit (u_n) une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Dans l'intervalle $I =]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $I \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.
La convergence de (u_n) s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons un N correspondant. Et pour $n \geqslant N$, $u_n \in I$. Mais de plus u_n est un entier, donc

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $I \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple u_N en est un élément) donc $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$. L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite (u_n) est stationnaire (au moins) à partir de N. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 1582 ▲

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ donc

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$

(C'est un encadrement de l'aire de l'ensemble des points (x,y) du plan tels que $x \in [n, n+1]$ et $0 \leqslant y \leqslant 1/x$ par l'aire de deux rectangles.) Par calcul de l'intégrale nous obtenons l'inégalité :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. $H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$, nous majorons chaque terme de cette somme en utilisant l'inégalité $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ obtenue précédemment : nous obtenons $H_n \leqslant \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \cdots - \ln(2) + \ln(2) - \ln(1) + 1$. Cette somme est télescopique (la plupart des termes s'éliminent et en plus $\ln(1) = 0$) et donne $H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
   L'autre inégalité s'obtient de la façon similaire en utilisant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
3. Comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ et que $\ln(n+1) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ alors $H_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
4. $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant 0$ d'après la première question. Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Ainsi $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.
   Enfin comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ alors $H_n \geqslant \ln(n)$ et donc $u_n \geqslant 0$.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel γ. Ce réel γ s'appelle *la constante d'Euler* (d'après Leonhard Euler, 1707-1783, mathématicien d'origine suisse). Cette constante vaut environ $0,5772156649\ldots$ mais on ne sait pas si γ est rationnel ou irrationnel.

Correction de l'exercice 1586 ▲

1. $u_{n+q} = \cos\left(\frac{2(n+q)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right) = u_n$.
2. $u_{nq} = \cos\left(\frac{2nq\pi}{q}\right) = \cos(2n\pi) = 1 = u_0$ et $u_{nq+1} = \cos\left(\frac{2(nq+1)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) = u_1$. Supposons, par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ. Alors la sous-suite $(u_{nq})_n$ converge vers ℓ comme $u_{nq} = u_0 = 1$ pour tout n alors $\ell = 1$. D'autre part la sous-suite $(u_{nq+1})_n$ converge aussi vers ℓ, mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos\frac{2\pi}{q}$, donc $\ell = \cos\frac{2\pi}{q}$. Nous obtenons une contradiction car pour $q \geqslant 2$, nous avons $\cos\frac{2\pi}{q} \neq 1$. Donc la suite (u_n) ne converge pas.

Correction de l'exercice 1611 ▲

1.
2. $\ell = \pi$.

Correction de l'exercice 1615 ▲

$\frac{x}{2}$.

Correction de l'exercice 1619 ▲

1. $u_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.
2.
3.
4.

Correction de l'exercice 1620 ▲

Si $|a|<1$, à partir d'un certain rang, $\left|\frac{a}{1+a^n}\right|<\alpha<1 \Rightarrow \lim=0$.
Si $|a|>1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to 0 \Rightarrow u_n\to 0$.

Correction de l'exercice 1623 ▲

$\lim S_n=\lim u_n$.
Si $u_n=(3i/2)^n$, alors (u_n) diverge, mais $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice 1628 ▲

1. $1\leqslant S(n+1)\leqslant S(n)+1 \Rightarrow 0\leqslant \frac{S(n+1)}{S(n)}\leqslant 2$.
2. $\inf=0$ $(99\dots99)$, $\sup=2$ $(100\dots00)$.
3.

Correction de l'exercice 1632 ▲

1. Sinon, on construit une sous-suite strictement croissante.
2. La suite $(\min(x_0,\dots,x_n))$ converge vers 0, et prend une infinité de valeurs différentes.

Correction de l'exercice 1635 ▲

$u_{2n}-u_n\geqslant \frac{1+\dots+n}{4n^2}\geqslant \frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 1636 ▲

1. Par récurrence, $\sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant\sqrt{2n}$.
2. $\sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant\sqrt{n+\sqrt{2(n-1)}} \Rightarrow \lim=1$.
3. $\sqrt{n+\sqrt{n-1}}\leqslant u_n\leqslant\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{2(n-2)}}} \Rightarrow \lim=\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1637 ▲

Soit $\ell=\inf\{b_n\,|\,n\in|||^*\}$, $\varepsilon>0$ et $p\in|||^*$ tel que $b_p\leqslant\ell+\varepsilon$. Pour $n\in|||^*$ on effectue la division euclidienne de n par p : $n=pq+r$ d'où $a_n\leqslant a_p^q a_r$ et $b_n\leqslant b_p+\frac{\ln a_r}{n}\leqslant\ell+2\varepsilon$ pour n assez grand.

Correction de l'exercice 1638 ▲

Si $e^{i\alpha}$ n'est pas valeur d'adhérence alors il existe $\delta>0$ tel que $|e^{ih(n)}-e^{i\alpha}|>\delta$ pour tout n assez grand donc l'ensemble $\bigcup_{k\in|||}[\alpha-\delta+2k\pi,\alpha-\delta+2k\pi]$ ne contient aucun terme de la suite $(h(n))$ pour n assez grand ce qui contredit les hypothèses $h(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$ et $h(n+1)-h(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Correction de l'exercice 1639 ▲

Soit E l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n). Si $u_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\lambda$ alors $u_{n_k+1}\xrightarrow[k\to\infty]{}\lambda+\lambda^2$ donc E est stable par l'application $f:x\mapsto x+x^2$. En fait E est invariant par cette application car la suite (u_{n_k-1}) admet une valeur d'adhérence $\mu\in E$ et on a $\mu^2+\mu=\lambda$. En particulier l'intervalle $[\inf(E),\sup(E)]$ est invariant par f ce qui implique $\sup(E)=\inf(E)=0$.

Correction de l'exercice 1640 ▲

Soit ℓ une valeur d'adhérence de (x_n). Si l'on suppose que (x_n) ne converge pas vers ℓ alors il existe un voisinage $[a,b]$ de ℓ tel qu'il y a une infinité de termes dans $[a,b]$ et une infinité hors de $[a,b]$. Ceci implique que $[c,d] = f([a,b])$ n'est pas inclus dans $[a,b]$ et que $[c,d] \setminus [a,b]$ contient une infinité de termes, donc (x_n) a une deuxième valeur d'adhérence dans $[c,d] \setminus]a,b[$.

Correction de l'exercice 1641 ▲

Les suites $(\ln(u_n)/2^n)$ et $(\ln(1+u_n)/2^n)$ sont adjacentes.

Correction de l'exercice 1642 ▲

Supposons sans perte de généralité u croissante (quite à remplacer u par $-u$). Dans ce cas, ou bien u converge, ou bien u tend vers $+\infty$. Supposons que u tende vers $+\infty$, et montrons qu'il en est de même pour la suite v. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe un rang n_0 tel que pour n naturel supérieur ou égal à n_0, $u_n \geqslant 2A$. Pour $n \geqslant n_0 + 1$, on a alors,

$$v_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right) \geqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$ tend vers $2A$ et donc, il existe un rang n_1 à partir duquel $v_n \geqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1} > A$. On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}/$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geqslant n_1 \Rightarrow v_n > A)$. Par suite, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par contraposition, si v ne tend pas vers $+\infty$, la suite u ne tend pas vers $+\infty$ et donc converge, d'après la remarque initiale.

Correction de l'exercice 1643 ▲

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k)\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant (k+1-k)\frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Donc, pour $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$ et, pour $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient pour $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1),$$

et pour $n \geqslant 2$,

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n,$$

cette dernière inégalité restant vraie quand $n = 1$. Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx \leqslant 0$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroit sur $[n, n+1]$. De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx \geqslant 0$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroit sur $[n+1, n+2]$. Enfin,

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et donc la suite $u-v$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Finalement, la suite u décroit, la suite v croit et la suite $u-v$ tend vers 0. On en déduit que les suites u et v sont adjacentes, et en particulier convergentes et de même limite. Notons γ cette limite. Pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$, et en particulier, $v_3 \leqslant \gamma \leqslant u_1$ avec $v_3 = 0,5...$ et $u_1 = 1$. Donc, $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Plus précisément, pour n entier naturel non nul donné, on a

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 0,005 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant e^{0,005} - 1 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{e^{0,005}-1} = 199,5... \Leftrightarrow n \geqslant 200.$$

Donc $0 \leqslant \gamma - v_{100} \leqslant \frac{10^{-2}}{2}$ et une valeur approchée de v_{200} à $\frac{10^{-2}}{2}$ près (c'est-à-dire arrondie à la 3 ème décimale la plus proche) est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. On trouve $\gamma = 0,57$ à 10^{-2} près par défaut. Plus précisémént,

$$\boxed{\gamma = 0,5772156649...\ (\gamma \text{ est la constante d'E}\textsc{uler}).}$$

Correction de l'exercice 1644 ▲

Posons $\alpha = \arccos\frac{a}{b}$. α existe car $0 < \frac{a}{b} < 1$ et est élément de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $a = b\cos\alpha$. Enfin, pour tout entier naturel n, $\frac{\alpha}{2^n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\cos\frac{\alpha}{2^n} > 0$. On a $u_0 = b\cos\alpha$ et $v_0 = b$ puis $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) = \frac{b}{2}(1+\cos\alpha) = b\cos^2\frac{\alpha}{2}$ et $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = \sqrt{b\cos^2\frac{\alpha}{2} \times b} = b\cos\frac{\alpha}{2}$ puis $u_2 = \frac{b}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(1+\cos\frac{\alpha}{2}) = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}$ et $v_2 = \sqrt{b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2} \times b\cos\frac{\alpha}{2}} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}$... Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}$. C'est vrai pour $n = 1$ et si pour $n \geqslant 1$ donné, on a $v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}$ alors,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n\cos\frac{\alpha}{2^n} + v_n) = v_n\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

puis

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = v_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}\ (\text{car } \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0),$$

et donc, $v_{n+1} = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ puis $u_{n+1} = v_{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$. On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} \text{ et } u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}.}$$

Pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} < 1$. La suite v est donc strictement décroissante. Ensuite, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^n}}\right) > \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

La suite u est strictement croissante. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} = b\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^k}} \\ &= \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}} \end{aligned}$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, $v_n \sim \frac{\sin\alpha}{2^n\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, puis $u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n} \sim v_n \sim \frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Ainsi, les suites u et v sont adjacentes de limite commune $b\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\arccos\left(\frac{a}{b}\right)}$.

Correction de l'exercice 1645 ▲

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{\sin n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n} = 0.}$$

2. Quand n tend vers $+\infty$, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n\times\frac{1}{n} = 1$. Donc, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ tend vers 1 puis, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+1/n)}$ tend vers $e^1 = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Pour n entier naturel non nul, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n\ln(1+1/n)} = e^{-n(1/n+o(1/n))} = e^{-1+o(1)}$. Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{e} = 0.36... < 1$. On sait alors que $\lim_{n\to+\infty}u_n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.}$$

4. Pour $n\geqslant 1$, $\frac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$. Or, $\frac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2}$ et $\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$ tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc, d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite u converge et a pour limite 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = 1.}$$

5. Quand n tend vers $+\infty$, $\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{1}{n}\ln(n^2)} = e^{2\ln n/n} = e^{o(1)}$, et donc $\sqrt[n]{n^2}$ tend vers 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2} = 1.}$$

6. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.
7. $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \sim \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{6}$.
8. $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} = 2^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\frac{k}{2^{k-1}}}$. Pour x réel, posons $f(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et pour tout réel x,

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^n x^k\right)'(x) = \left(\sum_{k=0}^n x^k\right)'(x).$$

Pour $x\neq 1$, on a donc

$$f(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

En particulier, $\sum_{k=1}^n\frac{k}{2^{k-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}+1}{(\frac{1}{2}-1)^2} \to 4$ (d'après un théorème de croissances comparées). Finalement,

$$\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} \to 2^{4/2} = 4.$$

Correction de l'exercice 1646 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$
$$4(n+u_n) = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 \Leftrightarrow u_n = -n+\frac{1}{4}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}(-2n+1+2\sqrt{n(n+1)})$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n = -\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\frac{1/n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+o(1) = \frac{1}{2}+o(1).$$

La suite (u_n) converge et a pour limite $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1647 ▲

Supposons que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tende vers le réel positif ℓ.

- Supposons que $0 \leqslant \ell < 1$. Soit $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$.
  ε est un réel strictement positif et donc, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2})$.
  Pour $n \geqslant n_0$, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $0 < \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Supposons que $\ell > 1$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} > \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{1+\ell}{2})$. Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $\frac{1+\ell}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que $|u_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit, pour α réel et n entier naturel non nul, $u_n = n^\alpha$. $\sqrt[n]{u_n} = e^{\alpha\frac{\ln n}{n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, et ceci pour toute valeur de α. Mais, si $\alpha < 0$, u_n tend vers 0, si $\alpha = 0$, u_n tend vers 1 et si $\alpha > 0$, u_n tend vers $+\infty$. Donc, si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Correction de l'exercice 1648 ▲

1. Supposons $\ell > 0$. Soit ε un réel strictement positif, élément de $]0,\ell[$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 < \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2})$. Pour $n > n_0$, puisque $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\frac{u_{n-2}}{u_{n-3}}\ldots\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}u_{n_0}$, on a $u_{n_0}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} \leqslant u_n \leqslant u_{n_0}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$, et donc
$$(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant (u_{n_0})^{1/n}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$
Maintenant, le membre de gauche de cet encadrement tend vers $\ell-\frac{\varepsilon}{2}$, et le membre de droite rend vers $\ell+\frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, on peut trouver un entier naturel $n_1 \geqslant n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right) > \ell-\varepsilon$, et $(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right) < \ell+\varepsilon$. Pour $n \geqslant n_1$, on a alors $\ell-\varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell+\varepsilon$. On a montré que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_1 \Rightarrow \ell-\varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell+\varepsilon)$. Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers ℓ. On traite de façon analogue le cas $\ell = 0$.
2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit u la suite définie par
$$\forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p} = a^p b^p \text{ et } u_{2p+1} = a^{p+1}b^p.$$

(on part de 1 puis on multiplie alternativement par a ou b). Alors, $\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} b^{\frac{p}{2p+1}} \to \sqrt{ab}$. Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\sqrt{ab}$ (et en particulier converge). On a bien sûr $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = a$ et $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = b$. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet donc deux suites extraites convergentes de limites distinctes et est ainsi divergente. La réciproque du 1) est donc fausse.

3. (a) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \binom{2n}{n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$.

(b) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

(c) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n}n!}$.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}\\ &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}.\end{aligned}$$

Maintenant, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} = e^{-2n\ln(1+1/n)} = e^{-2n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{-2+o(1)}$, et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $27e^{-2}$. Par suite, $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$ tend vers $\frac{27}{e^2}$.

Correction de l'exercice 1649 ▲

D'après le théorème de la limite par encadrement :

$$0 \leqslant u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1 \Rightarrow u \text{ converge et tend vers } 1.$$

Il en est de même pour v en échangeant les rôles de u et v.

Correction de l'exercice 1650 ▲

Si $u_n^2 \to 0$, alors $|u_n| = \sqrt{|u_n^2|} \to 0$ et donc $u_n \to 0$. Si $u_n^2 \to \ell \neq 0$, alors $(u_n) = (\frac{u_n^3}{u_n^2})$ converge. (L'exercice n'a d'intérêt que si la suite u est une suite complexe, car si u est une suite réelle, on écrit immédiatement $u_n = \sqrt[3]{u_n^3}$ (et non pas $u_n = \sqrt{u_n^2}$)).

Correction de l'exercice 1651 ▲

Les suites u et v sont définies à partir du rang 1 et strictement positives. Pour tout naturel non nul n, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{(n+1)\ln(n+2)+n\ln n-(2n+1)\ln(n+1)}.$$

Pour x réel strictement positif, posons alors $f(x) = (x+1)\ln(x+2) + x\ln x - (2x+1)\ln(x+1)$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x+1}{x+2}+\ln(x+2)+1+\ln x-\frac{2x+1}{x+1}-2\ln(x+1)\\
&= \frac{x+2-1}{x+2}+\ln(x+2)+1+\ln x-\frac{2x+2-1}{x+1}-2\ln(x+1)\\
&= -\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}+\ln x+\ln(x+2)-2\ln(x+1).
\end{aligned}$$

De même, f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+1}\\
&= \frac{x(x+1)^2-x(x+2)^2+(x+1)^2(x+2)^2+x(x+1)^2(x+2)-2x(x+1)(x+2)^2}{x(x+1)^2(x+2)^2}\\
&= \frac{-2x^2-3x+(x^2+2x+1)(x^2+4x+4)+(x^2+2x)(x^2+2x+1)-2(x^2+x)(x^2+4x+4)}{x(x+1)^2(x+2)^2}\\
&= \frac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2}>0.
\end{aligned}$$

f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et donc, pour $x>0$,

$$f'(x)<\lim_{t\to+\infty} f'(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t+1}+\ln\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right)=0.$$

Donc, f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Or, pour $x>0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\ln(x+2)+x\ln x-(2x+1)\ln(x+1)\\
&= (x+(x+1)-(2x+1))\ln x+(x+1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}-2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$, et donc, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $0+0+2-2=0$. Comme f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, pour tout réel $x>0$, on a $f(x)>\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$. f est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)>0$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^{f(n)}>1$. La suite u est strictement croissante. (Remarque. On pouvait aussi étudier directement la fonction $x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ sur $]0,+\infty[$.) On montre de manière analogue que la suite v est strictement décroissante. Enfin, puisque u_n tend vers e, et que $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$ tend vers e, les suites u et v sont adjacentes. (Remarque. En conséquence, pour tout entier naturel non nul n, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Par exemple, pour $n=10$, on obtient $\left(\frac{11}{10}\right)^{10}<e<\left(\frac{11}{10}\right)^{11}$ et donc, $2,59...<e<2,85...$ et pour $n=100$, on obtient $1,01^{100}<e<1,01^{101}$ et donc $2,70...<e<2,73...$ Ces deux suites convergent vers e lentement).

Correction de l'exercice 1652 ▲

Il est immédiat que u croit strictement et que $v-u$ est strictement positive et tend vers 0. De plus, pour n entier naturel donné,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!}=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)!}=\frac{-1}{n(n+1)\times(n+1)!}<0,$$

et la suite v est strictement décroissante. Les suites u et v sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune (à savoir e).

(Remarque. Dans ce cas, la convergence est très rapide. On a pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<e<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\times n!}$ et $n=5$ fournit par exemple $2,716...<e<2,718...$).

Correction de l'exercice 1653 ▲

Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}=0.$$

De même,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}=0.$$

La suite u est strictement croissante et la suite v est strictement décroissante. Enfin,

$$v_n-u_n=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

et la suite $v-u$ converge vers 0. Les suites u et v sont ainsi adjacentes et donc convergentes, de même limite.

Correction de l'exercice 1654 ▲

L'égalité proposée est vraie pour $n=2$ car $\cos\frac{\pi}{2^2}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $n\geqslant 2$. Supposons que $\cos(\frac{\pi}{2^n})=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).
Alors, puisque $\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})>0$ (car $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ est dans $]0,\frac{\pi}{2}[$),

$$\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})=\sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}})}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}},\ (n\text{ radicaux}).$$

On a montré par récurrence que, pour $n\geqslant 2$, $\cos(\frac{\pi}{2^n})=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).
Ensuite, pour $n\geqslant 2$,

$$\sin(\frac{\pi}{2^n})=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi}{2^{n-1}})}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}}\ (n-1\text{ radicaux})$$

Enfin,

$$2^n\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}}=2^n.2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\sim 2^{n+1}\frac{\pi}{2^{n+1}}=\pi.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}}=\pi$.

Correction de l'exercice 1655 ▲

1. Pour x réel positif, posons $f(x)=x-\ln(1+x)$ et $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$. f et g sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x>0$, on a

$$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0,$$

et

$$g'(x)=\ln(x+1)+1-1=\ln(x+1)>0.$$

f et g sont donc strictement croissantes sur $[0,+\infty[$ et en particulier, pour $x>0$, $f(x)>f(0)=0$ et de même, $g(x)>g(0)=0$. Finalement, f et g sont strictement positives sur $]0,+\infty[$ ou encore,

$$\forall x>0,\ \ln(1+x)<x<(1+x)\ln(1+x).$$

2. Soit k un entier naturel non nul.
D'après 1), $\ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k} < (1+\frac{1}{k})\ln(1+\frac{1}{k})$, ce qui fournit $k\ln(1+\frac{1}{k}) < 1 < (k+1)Ln(1+\frac{1}{k})$, puis, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 < (1+\frac{1}{k})^k < e < (1+\frac{1}{k})^{k+1}.$$

En multipliant membre à membre ces encadrements, on obtient pour tout naturel non nul n :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1}.$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=2}^{n+1}k^{k-1}}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

De même,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1}k^k}{\prod_{k=1}^{n}k^{k+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{e}\frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e}\frac{n+1}{n}(n+1)^{1/n}.$$

D'après le théorème de la limite par encadrements, comme $\frac{n+1}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini de même que $(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n+1)/n}$, on a montré que $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 1656 ▲

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 0$, $u_5 = 1$,... c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ n'est pas premier} \\ 1 \text{ si } n \text{ est premier} \end{cases}.$$

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $n \geqslant 2$, l'entier kn est composé et donc, pour $n \geqslant 2$, $u_{kn} = 0$. En particulier, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0. Maintenant, l'ensemble des nombres premiers est infini et si p_n est le n-ième nombre premier, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. La suite $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est constante égale à 1. En particulier, la suite $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins deux suites extraites convergentes de limites distinctes et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge bien que toutes les suites $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 pour $k \geqslant 2$.

Correction de l'exercice 1657 ▲

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, injective. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.
Soient A un réel puis $m = \text{Max}(0, 1+E(A))$.
Puisque f est injective, on a $\text{card}(f^{-1}(\{0,1,...,m\}) \geqslant m+1$. En particulier, $f^{-1}(\{0,1,...,m\})$ est fini (éventuellement vide).
Posons $n_0 = 1 + \begin{cases} 0 \text{ si } f^{-1}(\{0,1,...,m\}) = \emptyset \\ \text{Max} f^{-1}(\{0,1,...,m\}) \text{ sinon} \end{cases}$.
Par définition de n_0, si $n \geqslant n_0$, n n'est pas élément de $f^{-1}(\{0,1,...,m\})$ et donc $f(n) > m > A$.
On a montré que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow f(n) > A)$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Correction de l'exercice 1658 ▲

1. Posons $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p,q) = 1$. Pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+q} = \cos\left((n+q)\frac{2p\pi}{q}\right) = \cos\left(n\frac{2p\pi}{q} + 2p\pi\right) = \cos(na) = u_n.$$

La suite u est donc q-périodique et de même la suite v est q-périodique. Maintenant, une suite périodique converge si et seulement si elle est constante (en effet, soient T une période strictement positive de u et ℓ la limite de u. Soit $k \in \{0,...,T-1\}$. $|u_k - u_0| = |u_{k+nT} - u_{nT}| \to |\ell - \ell| = 0$ quand n tend vers l'infini). Or, si $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}(p,q) = 1$ et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, alors $u_1 \neq u_0$ et la suite u n'est pas constante et donc diverge, et si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, la suite u est constante et donc converge.

2. (a) et b)) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \sin((n+1)a) = \sin(na)\cos a + \cos(na)\sin a = u_n \sin a + v_n \cos a.$$

Puisque $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, $\sin a \neq 0$ et donc $u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos a}{\sin a}$. Par suite, si v converge alors u converge. De même, à partir de $\cos((n+1)a) = \cos(na)\cos a - \sin(na)\sin a$, on voit que si u converge alors v converge. Les suites u et v sont donc simultanément convergentes ou divergentes.

Supposons que la suite u converge, alors la suite v converge. Soient ℓ et ℓ' les limites respectives de u et v. D'après ce qui précède, ℓ et ℓ' sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \ell \sin a + \ell' \cos a = \ell' \\ \ell \cos a - \ell' \sin a = \ell. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell \sin a + \ell'(\cos a - 1) = 0 \\ \ell(\cos a - 1) - \ell' \sin a = 0. \end{array}\right. .$$

Le déterminant de ce système vaut $-\sin^2 a - (\cos a - 1)^2 < 0$ car $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ce système admet donc l'unique solution $\ell = \ell' = 0$ ce qui contredit l'égalité $\ell^2 + \ell'^2 = 1$. Donc, les suites u et v divergent.

3. (a) Soit $E' = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Supposons que E' est dense dans $\mathbb{R}$ et montrons que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont dense dans $[-1,1]$.

   Soient x un réel de $[-1,1]$ et $b = \arccos x$, de sorte que $b \in [0,\pi]$ et que $x = \cos b$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Pour n entier naturel et k entier relatif donnés, on a :

$$\begin{aligned}|u_n - x| &= |\cos(na) - \cos b| = |\cos(na + 2k\pi) - \cos b| = 2|\sin(\frac{na + 2k\pi - b}{2})\sin(\frac{na + 2k\pi + b}{2})| \\ &\leqslant 2\left|\frac{na + 2k\pi - b}{2}\right| \text{ (l'inégalité } |\sin x| \leqslant |x| \text{ valable pour tout réel } x \text{ est classique)} \\ &= |na + 2k\pi - b|\end{aligned}$$

   En résumé, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x| \leqslant |na + 2k\pi - b|$. Maintenant, si E' est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}|$ tels que $|na + 2k\pi - b| < \varepsilon$ et donc $|u_n - x| < \varepsilon$.

   Finalement, $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. De même, on montre que $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

   Il reste donc à démontrer que E' est dense dans $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $E = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$. E est un sous groupe non nul de $(\mathbb{R},+)$ et donc est soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha = \inf(E \cap]0,+\infty[) > 0$, soit dense dans $\mathbb{R}$ si $\inf(E \cap]0,+\infty[) = 0$.

   Supposons par l'absurde que $\inf(E \cap]0,+\infty[) > 0$. Puisque $E = \alpha\mathbb{Z}$ et que 2π est dans E, il existe un entier naturel non nul q tel que $2\pi = q\alpha$, et donc tel que $\alpha = \frac{2\pi}{q}$.

   Mais alors, a étant aussi dans E, il existe un entier relatif p tel que $a = p\alpha = \frac{2p\pi}{q} \in 2\pi\mathbb{Q}$. Ceci est exclu et donc, E est dense dans $\mathbb{R}$.

   (c) Soit x dans $[-1,1]$. D'après ce qui précède, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|\cos(na) - x| < \varepsilon$ et donc $|u_{|n|} - x| < \varepsilon$, ce qui montre que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. De même, $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Correction de l'exercice 1659 ▲

La suite u n'est pas majorée. Donc, $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}/\ u_n > M$. En particulier, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \geqslant 0$.
Soit $k = 0$. Supposons avoir construit des entiers $n_0, n_1, ..., n_k$ tels que $n_0 < n_1 < ... < n_k$ et $\forall i \in \{0,...,k\}$, $u_{n_i} \geqslant i$.
On ne peut avoir : $\forall n > n_k$, $u_n < k+1$ car sinon la suite u est majorée par le nombre $\mathrm{Max}\{u_0, u_1, ..., u_{n_k}, k+1\}$).
Par suite, $\exists n_{k+1} > n_k/\ u_{n_{k+1}} \geqslant k+1$.
On vient de construire par récurrence une suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite u telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{n_k} \geqslant k$ et en particulier telle que $\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = +\infty$.

Correction de l'exercice 1660 ▲

Si u converge vers un réel ℓ, alors $\ell \in [0,1]$ puis, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\ell(1-\ell) \geqslant \frac{1}{4}$, et donc $(\ell - \frac{1}{2})^2 \leqslant 0$ et finalement $\ell = \frac{1}{2}$. Par suite, si u converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
De plus, puisque la suite u est à valeurs dans $]0,1[$, pour n naturel donné, on a :

$$u_n(1-u_n) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - u_n)^2 \leqslant \frac{1}{4} < u_{n+1}(1-u_n),$$

et puisque $1 - u_n > 0$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
u est croissante et majorée. Donc u converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ (amusant).

Correction de l'exercice 1661 ▲

1. Pour tout réel a,

$$e^{i(2p+1)a} = (\cos a + i \sin a)^{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1} C_{2p+1}^{j} \cos^{2p+1-j} a (i \sin a)^j$$

puis

$$\sin((2p+1)a) = \mathrm{Im}(e^{i(2p+1)a}) = \sum_{j=0}^{p} C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} a (-1)^j \sin^{2j+1} a.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, en posant $a = \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \{1,...,p\},\ \sum_{j=0}^{p} C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} (-1)^j \sin^{2j+1} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Ensuite, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1} \neq 0$. En divisant les deux membres de $(*)$ par $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \{1,...,p\},\ \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} \mathrm{cotan}^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Maintenant, les p nombres $\mathrm{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ sont deux à deux distincts. En effet, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$. Or, sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction $x \mapsto \mathrm{cotan}\, x$ est strictement décroissante et strictement positive, de sorte que la fonction $x \mapsto \mathrm{cotan}^2 x$ est strictement décroissante et en particulier injective.
Ces p nombres deux à deux distintcs sont racines du polynôme $P = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} X^{p-j}$, qui est de degré p. Ce sont donc toutes les racines de P (ces racines sont par suite simples et réelles). D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \mathrm{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1} = -\frac{-C_{2p+1}^{3}}{C_{2p+1}^{1}} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

puis,

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2p+1}}=\sum_{k=1}^{p}(1+\text{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1})=p+\frac{p(2p-1)}{3}=\frac{2p(p+1)}{3}.$$

2. Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{(n+1)^2}>0,$$

et la suite (un) est strictement croissante. De plus, pour $n\geqslant 2$,

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=1+\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})=1+1-\frac{1}{n}<2.$$

La suite (u_n) est croissante et est majorée par 2. Par suite, la suite (u_n) converge vers un réel inférieur ou égal à 2.

3. Pour x élément de $[0,\frac{\pi}{2}]$, posons $f(x)=x-\sin x$ et $g(x)=\tan x-x$. f et g sont dérivables sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et pour x élément de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=1-\cos x$ et $g'(x)=\tan^2 x$. f' et g' sont strictement positives sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et donc strictement croissantes sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Comme $f(0)=g(0)=0$, on en déduit que f et g sont strictement positives sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.
Donc, $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\ 0<\sin x<x<\tan x$ et par passage à l'inverse $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\ 0<\text{cotan}\,x<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$.

4. Pour $1\leqslant k\leqslant p$, $0<\frac{k\pi}{2p+1}<\frac{\pi}{2}$ et donc $0<\text{cotan}\,\frac{k\pi}{2p+1}<\frac{2p+1}{k\pi}<\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2p+1}}$. Puis, $\text{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1}<(\frac{(2p+1)^2}{\pi^2})\frac{1}{k^2}<\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2p+1}}$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi^2p(2p-1)}{3(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1}<u_p=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2p+1}}=\frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand p tend vers l'infini et donc la suite (u_p) tend vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 1662 ▲

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\leqslant\arcsin^x\leqslant(\frac{\pi}{2})^n$ et donc, par croissance de l'intégrale,

$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n!}\int_0^1(\frac{\pi}{2})^n dx=\frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2. $0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+0}\,dx=\frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\left|\int_0^\pi\frac{n\sin x}{x+n}\,dx-\int_0^\pi\sin x\,dx\right|=\left|\int_0^\pi\frac{-x\sin x}{x+n}\,dx\right|\leqslant\int_0^\pi\left|\frac{-x\sin x}{x+n}\,dx\right|\leqslant\int_0^\pi\frac{\pi}{0+n}\,dx=\frac{\pi^2}{n}.$$

Or, $\frac{\pi^2}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\int_0^\pi\frac{n\sin x}{x+n}\,dx$ tend vers $\int_0^\pi\sin x\,dx=2$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 1666 ▲

1. La fonction polynomiale $P(x) := x^3 - 3x + 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $P'(x) = 3x^2 - 3$, qui est strictement négative sur $]-1,+1[$. Par conséquent P est strictement décroissante sur $]-1,+1[$. Comme $P(0) = 1 > 0$ et $P(1/2) = -3/8 < 0$ il en résulte grâce au théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un réel unique $\alpha \in]0,1/2[$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. Comme $f(x) - x = (x^3 - 3x + 1)/9$ il en résulte que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $]0,1/2[$.
3. Comme $f'(x) = (x^2 + 2)/3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1/9$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $f(\mathbb{R}^+) = [1/9,+\infty[$. Comme $x_1 = f(x_0) = 1/9 > 0$ alors $x_1 > x_0 = 0$; f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit par récurrence que $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in |||$ ce qui prouve que la suite (x_n) est croissante.
4. Un calcul simple montre que $f(1/2) < 1/2$. Comme $0 = x_0 < 1/2$ et que f est croissante on en déduit par récurrence que $x_n < 1/2$ pour tout $n \in |||$ (en effet si $x_n < 1/2$ alors $x_{n+1} = f(x_n) < f(1/2) < 1/2$).
5. D'après les questions précédentes, la suite (x_n) est croissante et majorée, elle converge donc vers un nombre réel $\ell \in]0,1/2]$. De plus comme $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in |||$, on en déduit par continuité de f que $\ell = f(\ell)$. Comme $f(1/2) < 1/2$, On en déduit que $\ell \in]0,1/2[$ et vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$. D'après la question 2, on en déduit que $\ell = \alpha$ et donc (x_n) converge vers α.

Correction de l'exercice 1690 ▲

1. $u_n \searrow \sqrt{a}$, et $u_n - \sqrt{a} < \frac{a-\sqrt{a}}{(2\sqrt{a})^{2^n-1}}$.
2. $u_{2n} \to 0$, $u_{2n+1} \to 1$.
3. Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: $u_n \searrow 0$, sinon $u_n \searrow -\infty$.
4. — $\frac{1}{4} < \alpha$: $u_n \to \infty$;
   — $-\frac{3}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$: $u_n \to \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$,
   — $-1 < \alpha \leqslant -\frac{3}{4}$: 1 point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.
5. Si $u_0 > -\frac{1}{2}$, $u_n \to \infty$; si $u_0 < -\frac{1}{2}$, $u_n \to -1$.
6. $u_n \to \frac{1}{2}$.
7. Thm du point fixe sur $]-\infty, \frac{7}{4}] \Rightarrow u_n \to 1$.
8. Si $u_0 \neq 1$, $\exists\, n$ tq $4 - 3u_n < 0 \Rightarrow$ suite finie.
9. $u_n \to \alpha \approx 0.39754$.
10. 1 est point fixe, il y a deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.
11. — $1 < \alpha$: $u_n \to 0$ si $u_0 < 1$, $u_n \to \infty$ si $u_0 > 1$
    — $-1 < \alpha < 1$: $u_n \to 1$
    — $\alpha \leqslant -1$: si $u_0 \neq 1$, (u_n) diverge.
12. $e^{1/e} < \alpha$: $u_n \to \infty$. $1 < \alpha < e^{1/e}$: 2 pts fixes, $\beta < \gamma$. $u_n \to \beta$ si $u_0 < \gamma$, et $u_n \to \infty$ si $u_0 > \gamma$. $e^{-e} \leqslant \alpha < 1$: 1 pt fixe, β, et $u_n \to \beta$. $\alpha < e^{-e}$: 1 point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

Correction de l'exercice 1691 ▲

CV (vers 0) ssi $|ka_0| < 1$.

Correction de l'exercice 1693 ▲

$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 1694 ▲

$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \geqslant u_n$. Il n'y a pas de point fixe.

Correction de l'exercice 1697 ▲

$y_n - x_n = \text{cste} \Rightarrow x_n \to 0,\ y_n \to y_0 - x_0$.

Correction de l'exercice 1698 ▲

$y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{3^n}$ et $y_n + x_n = y_0 + x_0 \Rightarrow x_n, y_n \longrightarrow \frac{y_0+x_0}{2}$.

Correction de l'exercice 1699 ▲

$x_n y_n = \mathrm{c}^{\mathrm{te}} \Rightarrow x_n, y_n \to \sqrt{x_0 y_0}$.

Correction de l'exercice 1700 ▲

1.
2. $\ell = b\frac{\sin\varphi}{\varphi}$.

Correction de l'exercice 1701 ▲

1. $x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\big((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\big)$.
2. $3c_{n+1} - 3b_{n+1} = a_n + b_n + c_n - 3\sqrt[3]{a_n b_n c_n} \geqslant 0 \Rightarrow b_{n+1} \leqslant c_{n+1}$.
   $\frac{3}{a_{n+1}} - \frac{3}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} - \frac{3}{\sqrt[3]{a_n b_n c_n}} \geqslant 0 \Rightarrow a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$.

   Donc (a_n) croît et (c_n) décroît : $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$, $c_n \longrightarrow c$ avec $\begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ b^2 = ac \\ 2c = a+b \end{cases} \Rightarrow a = b = c.$

Correction de l'exercice 1702 ▲

Pour $u_0 > 0$ on a $u_n \searrow 0$ et pour $u_0 < 0$ on a $u_n \nearrow 0$. $f'(0) = \frac{1}{2}$ donc $u_{n+1} \sim \frac{1}{2}u_n$ et la série $\sum u_n$ converge absolument (d'Alembert).

Correction de l'exercice 1703 ▲

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est un intervalle dont tous les éléments sont points fixes par f. S'il y a plusieurs valeurs d'adhérence il faut passer de l'une à l'autre avec une longueur de saut qui tend vers zéro, on doit tomber sur point fixe entre les deux, contradiction.

Correction de l'exercice 1704 ▲

1. Calcul formel de u_n. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{x}{3-2x} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Pour n entier naturel donné, on a alors
   $$\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n} - 1}{\frac{u_n}{3-2u_n}} = \frac{3u_n - 3}{u_n} = 3\frac{u_n - 1}{u_n}.$$
   Par suite, $\frac{u_n - 1}{u_n} = 3^n \frac{u_0 - 1}{u_0}$, puis $u_n = \frac{u_0}{u_0 - 3^n(u_0 - 1)}$.
2. Calcul formel de u_n. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{4(x-1)}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Pour n entier naturel donné, on a alors
   $$\frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{4(u_n - 1)}{u_n} - 2} = \frac{u_n}{2(u_n - 2)} = \frac{u_n - 2 + 2}{2(u_n - 2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n - 2}.$$
   Par suite, $\frac{1}{u_n - 2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{u_0 - 2}$, puis $u_n = 2 + \frac{2(u_0 - 2)}{(u_0 - 2)n + 2}$.

Correction de l'exercice 1705 ▲

Pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(v_n-u_n) \\ v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}(v_n-u_n) \\ v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{3}(v_n-u_n) \end{cases}$. La dernière relation montre que la suite $v-u$ garde un signe constant puis les deux premières relations montrent que pour tout entier naturel n, $\operatorname{sgn}(u_{n+1}-u_n)=\operatorname{sgn}(v_n-u_n)$ et $\operatorname{sgn}(v_{n+1}-v_n)=-\operatorname{sgn}(v_n-u_n)$. Les suites u et v sont donc monotones de sens de variation opposés. Si par exemple $u_0\leqslant v_0$, alors, pour tout naturel n, on a :

$$u_0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\leqslant v_0.$$

Dans ce cas, la suite u est croissante et majorée par v_0 et donc converge vers un certain réel ℓ. De même, la suite v est décroissante et minorée par u_0 et donc converge vers un certain réel ℓ'. Enfin, puisque pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}$, on obtient par passage à la limite quand n tend vers l'infini, $\ell=\frac{2\ell+\ell'}{3}$ et donc $\ell=\ell'$. Les suites u et v sont donc adjacentes. Si $u_0>v_0$, il suffit d'échanger les rôles de u et v. **Calcul des suites u et v.** Pour n entier naturel donné, on a $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{3}(v_n-u_n)$. La suite $v-u$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Pour tout naturel n, on a donc $v_n-u_n=\frac{1}{3^n}(v_0-u_0)$. D'autre part, pour n entier naturel donné, $v_{n+1}+u_{n+1}=v_n+u_n$. La suite $v+u$ est constante et donc, pour tout entier naturel n, on a $v_n+u_n=v_0+u_0$. En additionnant et en retranchant les deux égalités précédentes, on obtient pour tout entier naturel n :

$$u_n=\frac{1}{2}\left(v_0+u_0+\frac{1}{3^n}(v_0-u_0)\right)\text{ et }v_n=\frac{1}{2}\left(v_0+u_0-\frac{1}{3^n}(v_0-u_0)\right).$$

En particulier, $\ell=\ell'=\frac{u_0+v_0}{2}$.

Correction de l'exercice 1706 ▲

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}-v_{n+1}=-\frac{1}{2}(u_n-v_n)$ et donc, $u_n-v_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_0-v_0)$. De même, en échangeant les rôles de u, v et w, $v_n-w_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(v_0-w_0)$ et $w_n-u_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(w_0-v_0)$ (attention, cette dernière égalité n'est autre que la somme des deux premières et il manque encore une équation). On a aussi, $u_{n+1}+v_{n+1}+w_{n+1}=u_n+v_n+w_n$ et donc, pour tout naturel n, $u_n+v_n+w_n=u_0+v_0+w_0$. Ainsi, u_n, v_n et w_n sont solutions du système

$$\begin{cases} v_n-u_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0) \\ w_n-u_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(w_0-u_0) \\ u_n+v_n+w_n=u_0+v_0+w_0 \end{cases}.$$

Par suite, pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{cases} u_n=\frac{1}{3}\left((u_0+v_0+w_0)+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2u_0-v_0-w_0)\right) \\ v_n=\frac{1}{3}\left((u_0+v_0+w_0)+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(-u_0+2v_0-w_0)\right) \\ w_n=\frac{1}{3}\left((u_0+v_0+w_0)+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(-u_0-v_0+2w_0)\right) \end{cases}.$$

Les suites u, v et w convergent vers $\frac{u_0+v_0+w_0}{3}$.

Correction de l'exercice 1707 ▲

Montrons tout d'abord que :

$$\forall(x,y,z)\in]0,+\infty[^3,\ (x\leqslant y\leqslant z\Rightarrow\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leqslant\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}).$$

Posons $m=\frac{x+y+z}{3}$, $g=\sqrt[3]{xyz}$ et $h=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$. Soient y et z deux réels strictement positifs tels que $y\leqslant z$. Pour $x\in]0,y]$, posons

$$u(x) = \ln m - \ln g = \ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(\ln x + \ln y + \ln z).$$

u est dérivable sur $]0,y]$ et pour $x \in]0,y]$,

$$u'(x) = \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{3x} \leqslant \frac{1}{x+x+x} - \frac{1}{3x} = 0.$$

u est donc décroissante sur $]0,y]$ et pour x dans $]0,y]$, $u(x) \geqslant u(y) = \ln\left(\frac{2y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(2\ln y + \ln z)$. Soit z un réel strictement positif fixé. Pour $y \in]0,z]$, posons $v(y) = \ln\left(\frac{2y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(2\ln y + \ln z)$. v est dérivable sur $]0,z]$ et pour $y \in]0,z]$,

$$v'(y) = \frac{2}{2y+z} - \frac{2}{3z} \leqslant \frac{2}{3z} - \frac{2}{3z} = 0.$$

v est donc décroissante sur $]0,z]$ et pour y dans $]0,z]$, on a $v(y) \geqslant v(z) = 0$. On vient de montrer que $g \leqslant m$. En appliquant ce résultat à $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$, on obtient $\frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{h}$ et donc $h \leqslant g$. Enfin, $m \leqslant \frac{z+z+z}{3} = z$ et $h \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}} = x$. Finalement,

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant z.}$$

Ce résultat préliminaire étant établi, puisque $0 < u_0 < v_0 < w_0$, par récurrence, les suites u, v et w sont définies puis, pour tout naturel n, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et de plus $u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n \leqslant w_0$. La suite u est croissante et majorée par w_0 et donc converge. La suite w est décroissante et minorée par u_0 et donc converge. Enfin, puisque pour tout entier naturel n, $v_n = 3w_{n+1} - u_n - w_n$, la suite v converge. Soient alors a, b et c les limites respectives des suites u, v et w. Puisque pour tout entier naturel n, on a $0 < u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, on a déjà par passage à la limite $0 < u_0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Toujours par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ b = \sqrt[3]{abc} \\ c = \frac{a+b+c}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2bc = ab + ac \\ b^2 = ac \\ a + b = 2c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 2c - a \\ a^2 - 5ac + 4c^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (a = c \text{ et } b = c) \text{ ou } (a = 4c \text{ et } b = -2c).$$

$b = -2c$ est impossible car b et c sont strictement positifs et donc, $a = b = c$. Les suites u, v et w convergent vers une limite commune.

Correction de l'exercice 1708 ▲

Tout d'abord , on montre facilement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, u_n existe et $u_n \geqslant 1$. Mais alors, pour tout entier naturel non nul n, $1 \leqslant u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \leqslant 1 + n$. Par suite, pour $n \geqslant 2$, $1 \leqslant u_n \leqslant n$, ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant u_n \leqslant n.$$

Supposons momentanément que la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ. Dans ce cas :

$$1 + \frac{n}{u_n} = 1 + \frac{n}{\sqrt{n} + \ell + o(1)} = 1 + \sqrt{n}\frac{1}{1 + \frac{\ell}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 + \sqrt{n}\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{n} + 1 - \ell + o(1).$$

D'autre part,

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1} + \ell + o(1) = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} + \ell + o(1) = \sqrt{n} + \ell + o(1),$$

et donc $\ell - (1 - \ell) = o(1)$ ou encore $2\ell - 1 = 0$. Donc, si la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ, alors $\ell = \frac{1}{2}$. Il reste à démontrer que la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ converge. On note que pour tout entier naturel non nul,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{u_n}(-u_n^2+u_n+n)=\frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})-u_n\right)\left(u_n-\frac{1}{2}(1-\sqrt{4n+1})\right).$$

Montrons par récurrence que pour $n\geqslant 1$, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$. Posons $v_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})$ et $w_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$.
Si $n=1$, $v_1=1\leqslant u_1=1\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=w_1$.
Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$. Alors,

$$1+\frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1}\leqslant u_{n+1}=1+\frac{n}{u_n}\leqslant 1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}.$$

Mais, pour $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+5})-(1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}))&=\mathrm{sgn}((1+\sqrt{4n+5})(1+\sqrt{4n-3})-2(2n+1+\sqrt{4n-3}))\\
&=\mathrm{sgn}(\sqrt{4n+5}(1+\sqrt{4n-3})-(4n+1+\sqrt{4n-3}))\\
&=\mathrm{sgn}((4n+5)(1+\sqrt{4n-3})^2-(4n+1+\sqrt{4n-3})^2)\text{ (par croissance de }x\mapsto x^2\text{ sur }[0,+\infty[)\\
&=\mathrm{sgn}((4n+5)(4n-2+2\sqrt{4n-3})-((4n+1)^2+2(4n+1)\sqrt{4n-3}+4n-3))\\
&=\mathrm{sgn}(-8+8\sqrt{4n-3})=\mathrm{sgn}(\sqrt{4n-3}-1)=\mathrm{sgn}((4n-3)-1)=\mathrm{sgn}(n-1)=+
\end{aligned}$$

Donc, $u_{n+1}\leqslant 1+1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}\leqslant w_{n+1}$.
D'autre part,

$$1+\frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1}=\frac{2n+1+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n+1}+1}=\frac{(\sqrt{4n+1}+1)^2}{2(\sqrt{4n+1}+1)}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})=v_{n+1},$$

et donc $v_{n+1}\leqslant u_{n+1}\leqslant w_{n+1}$.
On a montré par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1}),$$

(ce qui montre au passage que u est croissante).
Donc, pour $n\geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}+\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\sqrt{n}\leqslant u_n-\sqrt{n}\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}-\sqrt{n},$$

ou encore, pour tout $n\geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\sqrt{n}}\leqslant u_n-\sqrt{n}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}}.$$

Maintenant, comme les deux suites $(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\sqrt{n}})$ et $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}})$ convergent toutes deux vers $\frac{1}{2}$, d'après le théorème de la limite par encadrements, la suite $(u_n-\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1709 ▲

1. Posons $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ de sorte que $A=I+J$. On a $J^2=2j$ et donc, plus généralement : $\forall k\geqslant 1$, $J^k=2^{k-1}J$. Mais alors, puisque I et J commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit pour n entier naturel non nul donné :

$$A^n=(I+J)^n=I+\sum_{k=1}^{n}C_n^kJ^k=I+(\sum_{k=1}^{n}C_n^k2^{k-1})J=I+\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^k-1)J$$
$$=I+\frac{1}{2}((1+2)^n-1)J=I+\frac{1}{2}(3^n-1)J=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&3^n-1\\3^n-1&3^n+1\end{pmatrix}$$

ce qui reste vrai pour $n=0$. Donc,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&3^n-1\\3^n-1&3^n+1\end{pmatrix}.$$

Poour n entier naturel donné, posons $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on a alors $X_{n+1}=A.X_n$ et donc,

$$X_n=A^n.X_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&3^n-1\\3^n-1&3^n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3^n+1}{2}\\\frac{3^n-1}{2}\end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{3^n+1}{2}\text{ et }v_n=\frac{3^n-1}{2}.$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1}+v_{n+1}=3(u_n+v_n)$. Donc, la suite $u+v$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0+v_0=1$. On en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n+v_n=3^n\ (I).$$

De même, pour tout entier naturel n $u_{n+1}-v_{n+1}=u_n-v_n$. Donc, la suite $u+v$ est une suite constante. Puisque $u_0-v_0=1$, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-v_n=1\ (II).$$

En additionnant et en retranchant (I) et (II), on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{3^n+1}{2}\text{ et }v_n=\frac{3^n-1}{2}.$$

Correction de l'exercice 1710 ▲

1. Pour $x\geqslant-1$, posons $f(x)=\sqrt{1+x}$ et $g(x)=f(x)-x$.
Soit $u_0\in I=[-1,+\infty[$. f est définie sur I et de plus $f(I)=[0,+\infty[\subset[-1,+\infty[$. On en déduit, par une démonstration par récurrence, que la suite u est définie.
Si la suite u converge, puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant-1$, sa limite ℓ vérifie $\ell\geqslant-1$. Puisque f est continue sur $[-1,+\infty[$ et donc en ℓ,

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\lim_{n\to+\infty}u_n)=f(ell).$$

et ℓ est un point fixe de f. Or, pour $x\geqslant-1$,

$$\sqrt{1+x}=x\Leftrightarrow 1+x=x^2\text{ et }x\geqslant0\Leftrightarrow(x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{ ou }x=\frac{1+\sqrt{5}}{2})\text{ et }x\geqslant0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Ainsi, si la suite (u_n) converge, c'est vers le nombre $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Pour $x \geqslant -1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(f(x)-\alpha) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\alpha}) = \operatorname{sgn}((1+x)-(1+\alpha)) \quad \text{(par croissance de } x\mapsto x^2 \text{ sur } [0,+\infty[)\\ &= \operatorname{sgn}(x-\alpha).\end{aligned}$$

Ainsi, les intervalles $[-1,\alpha[$ et $]\alpha,+\infty[$ sont stables par f. Donc, si $-1 \leqslant u_0 < \alpha$, alors par récurrence $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leqslant u_n<\alpha$ et si $u_0>\alpha$, alors par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>\alpha$.
Soit $x\geqslant -1$. Si $x\in[-1,0]$, $\sqrt{1+x}-x\geqslant 0$ et si $x\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(g(x)) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x}-x)\\ &= \operatorname{sgn}((1+x)-x^2) \quad \text{(par croissance de } x\mapsto x^2 \text{ sur } [0,+\infty[)\\ &= \operatorname{sgn}(x+\frac{\sqrt{5}-1}{2})(-x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}-x) = \operatorname{sgn}(\alpha-x) \text{ (car ici } x\geqslant 0).\end{aligned}$$

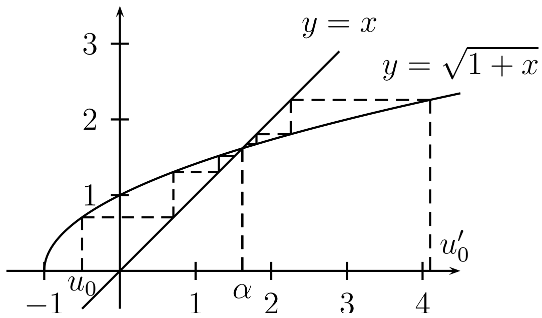
On en déduit que, si $x\in[-1,\alpha[$, $f(x)>x$, et si $x\in]\alpha,+\infty[$, $f(x)<x$. Mais alors, si $-1\leqslant u_0<\alpha$, puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leqslant u_n<\alpha$, pour n entier naturel donné, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n.$$

La suite u est donc strictement croissante, majorée par α et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement α.
Si $u_0>\alpha$, puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>\alpha$, pour n entier naturel donné, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) < u_n.$$

La suite u est donc strictement décroissante, minorée par α et donc convergente. On sait de plus que sa limite est nécessairement α. Enfin, si $u_0=\alpha$, la suite u est constante.
En résumé,
si $u_0\in[-1,\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$, la suite u est strictement croissante, convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$,
si $u_0\in]\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty[$, la suite u est strictement décroissante, convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$,
si $u_0=\frac{\sqrt{5}+1}{2}[$, la suite u est constante et en particulier convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Ainsi, dans tous les cas, la suite u est convergente et $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



2. Si $u_0>0$, alors puisque f est définie sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ et que I est stable par f ($\forall x>0,\ \ln(1+x)>\ln 1=0$), la suite u est définie et est strictement positive. Si la suite u converge, sa limite ℓ est un réel positif **ou nul**. Par continuité de f sur $[0,+\infty[$ et donc en ℓ,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(\ell).$$

Pour $x>-1$, posons $g(x)=\ln(1+x)-x$. g est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x>-1$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

g' est strictement positive sur $]-1,0[$ et strictement négative sur $]0,+\infty[$. g est donc strictement croissante sur $]-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Par suite, si $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $g(x) < 0$. En particulier, pour $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $f(x) \neq x$. Puisque $f(0) = 0$, f admet dans $]-1,+\infty[$ un et un seul point fixe à savoir 0.

En résumé, si $u_0 > 0$, la suite u est définie, strictement positive, et de plus, si la suite u converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Mais, pour n entier naturel donné,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n) - u_n < 0.$$

Par suite, la suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc, d'après ce qui précède, converge vers 0.

Si $u_0 = 0$, la suite u est constante. Il reste donc à étudier le cas où $u_0 \in]-1,0[$. Montrons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leqslant -1$. Dans le cas contraire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$. Comme précédemment, par récurrence, la suite u est à valeurs dans $]-1,0[$ et strictement décroissante. Etant minorée par -1, la suite u converge vers un certain réel ℓ.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n \leqslant u_0 < 0$, on a $-1 \leqslant \ell \leqslant u_0 < 0$. Donc, ou bien $\ell = -1$, ou bien f est continue en ℓ et ℓ est un point fixe de f élément de $]-1,0[$.

On a vu que f n'admet pas de point fixe dans $]-1,0[$ et donc ce dernier cas est exclu. Ensuite, si $\ell = -1$, il existe un rang N tel que $u_N \leqslant -0.9$. Mais alors, $u_{N+1} =\leqslant \ln(-0,9+1) = -2,3... < -1$ ce qui constitue de nouveau une contradiction.

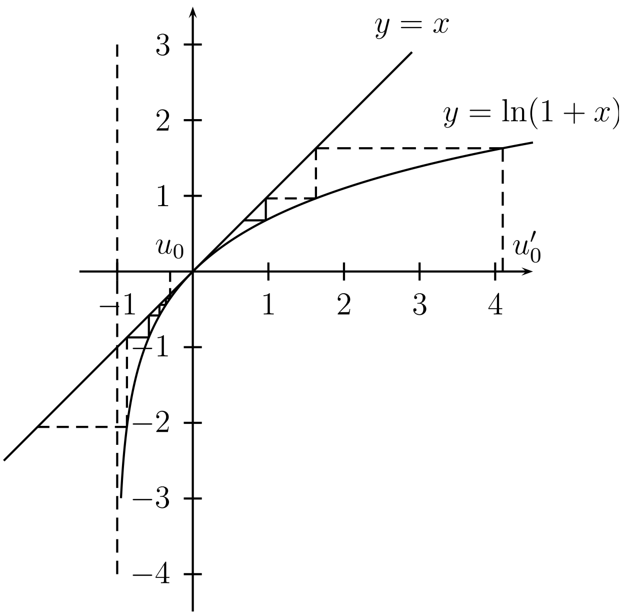
Donc, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leqslant -1$ et la suite u n'est pas définie à partir d'un certain rang.

En résumé,

si $u_0 \in]0,+\infty[$, la suite u est strictement décroissante, convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,

si $u_0 = 0$, la suite u est constante,

et si $u_0 \in]-1,0[$, la suite u n'est pas définie à partir d'un certain rang.



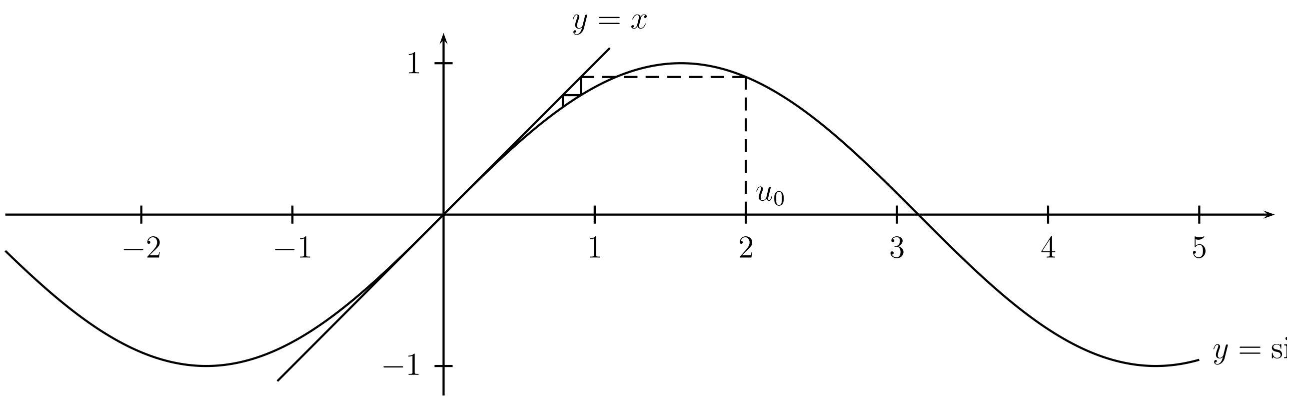
3. Pour tout choix de u_0, $u_1 \in [-1,1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [-1,1]$. Si $u_0 = 0$, la suite u est constante. Si $u_0 \in [-1,0[$, considérons la suite u' définie par $u'_0 = -u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_{n+1} = \sin(u'_n)$. La fonction $x \mapsto \sin x$, il est clair par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_n = -u_n$. On supposera dorénavant que $u_0 \in]0,1]$.

Puisque $]0,1] \subset]0,\frac{\pi}{2}]$, on a $\sin]0,1] \subset]0,1]$ et l'intervalle $I =]0,1]$ est stable par f. Ainsi, si $u_0 \in]0,1]$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.

Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \sin x - x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = \cos x - 1$. g' est strictement négative sur $]0,1]$ et donc strictement décroissante sur $[0,1]$. On en déduit que pour $x \in]0,1]$, $g(x) < g(0) = 0$.

Mais alors, pour n entier naturel donné, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est ainsi strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers $\ell \in [0,1]$. La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $[0,1]$ et donc, ℓ est un point fixe de f. L'étude de g montre que f a un et un seul point fixe dans $[0,1]$ à savoir 0. La suite u est donc convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

L'étude préliminaire montre la suite u converge vers 0 pour tout choix de u_0.



4. Si u_0 est un réel quelconque, $u_1 \in [-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puis $u_2 \in [0,1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [0,1]$.

   On a $\cos([0,1]) = [\cos 1, \cos 0] = [0,504...,1] \subset [0,1]$. Donc, la fonction $x \mapsto \cos x$ laisse stable l'intervalle $I = [0,1]$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

   Pour $x \in [0,1]$, on pose $g(x) = \cos x - x$. g est somme de deux focntions strictement décroissantes sur $[0,1]$ et est donc strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, g est continue sur $[0,1]$ et vérifie $g(0) = \cos 0 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. g s'annule donc une et une seule fois sur $[0,1]$ en un certain réel α. Ainsi, f admet sur $[0,1]$ un unique point fixe, à savoir α. Puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, on sait que si la suite u converge, c'est vers α.

   La fonction $f : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$,

$$|f'(x)| = |-\sin x| \leqslant \sin 1 < 1.$$

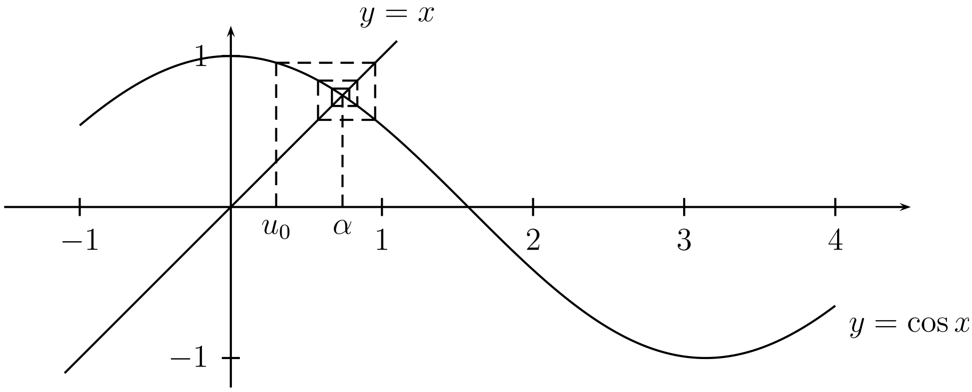
   L'inégalité des accroissements finis montre alors que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|\cos x - \cos y| \leqslant \sin 1 |x-y|$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \sin 1 |u_n - \alpha|,$$

   et donc, pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \alpha| \leqslant (\sin 1)^n |u_0 - \alpha| \leqslant (\sin 1)^n.$$

   Comme $0 \leqslant \sin 1 < 1$, la suite $(\sin 1)^n$ converge vers 0, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. On peut noter que puisque la fonction $x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $[0,1]$, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones, de sens de variations contraires (dans le cas où $u_0 \in [0,1]$. On peut noter également que si $n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln(\sin 1)} = 26,6...$, alors $(\sin 1)^n < 10^{-2}$. Par suite, u_{27} est une valeur approchée de α à 10^{-2} près. La machine fournit $\alpha = 0,73...$ (et même $\alpha = 0,739087042.....$).



5. Si u_0 est un réel quelconque, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [-1,1]$. On supposera sans perte de généralité que $u_0 \in [-1,1]$. Si $u_0 = 0$, la suite u est constante et d'autre part, l'étude du cas $u_0 \in [-1,0[$ se ramème, comme en 3), à l'étude du cas $u_0 \in]0,1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in]0,1]$.

   Si $x \in]0,1]$, alors $2x \in]0,2] \subset]0,\pi[$ et donc $\sin(2x) \in]0,1]$. L'intervalle $I =]0,1]$ est donc stable par la fonction $f\ :\ x \mapsto \sin(2x)$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.

   Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \sin(2x) - x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = 2\cos(2x) - 1$. g est donc strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4},1]$. On en déduit que si $x \in]0,\frac{\pi}{4}]$, $g(x) > g(0) = 0$. D'autre part, g est continue et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4},1]$ et vérifie $g(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ et $g(1) = \sin 2 - 1 < 0$. g s'annule donc une et une seule fois en un certain réel $\alpha \in]\frac{\pi}{4},1[$.

   En résumé, g s'annule une et une seule fois sur $]0,1]$ en un certain réel $\alpha \in]\frac{\pi}{4},1[$, g est strictement positive sur $]0,\alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha,1]$.

   Supposons que $u_0 \in]0,\frac{\pi}{4}[$ et montrons par l'absurde que $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4},1]$. Dans le cas contraire, tous les u_n sont dans $]0,\frac{\pi}{4}[$. Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0.$$

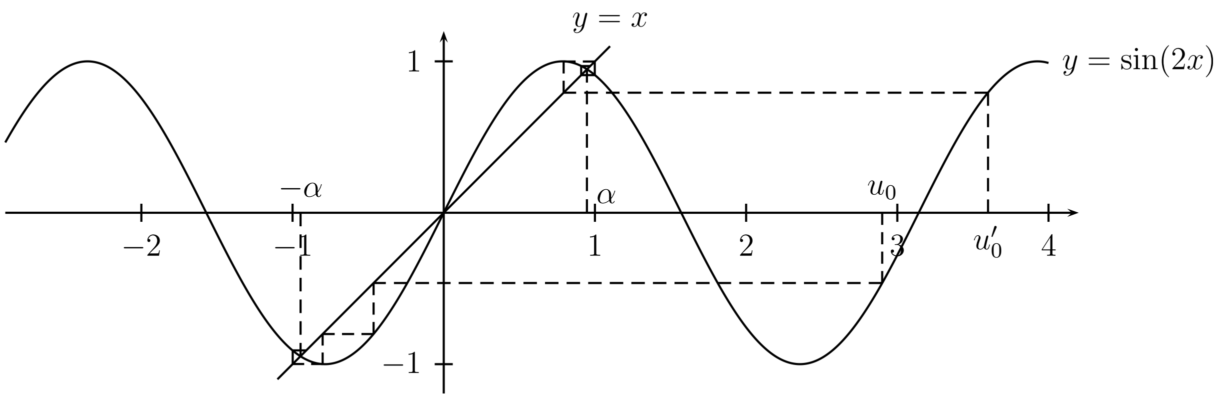
   La suite u est donc strictement croissante. Etant majorée par $\frac{\pi}{4}$, la suite u converge. Comme g est continue sur $[u_0,\frac{\pi}{4}]$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [u_0,\frac{\pi}{4}]$, on sait que la limite de u est un point fixe de f élément de $[u_0,\frac{\pi}{4}]$. Mais l'étude de g a montré que f n'admet pas de point fixe dans cet intervalle (u_0 étant strictement positif). On aboutit à une contradiction.

   Donc, ou bien $u_0 \in [\frac{\pi}{4},1]$, ou bien $u_0 \in]0,\frac{\pi}{4}[$ et dans ce cas, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4},1]$. Dans tous les cas, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4},1]$. Mais alors, puisque $f([\frac{\pi}{4},1]) = [\sin 2, \sin\frac{\pi}{2}] \subset [\frac{\pi}{4},1]$ (car $\sin 2 = 0,909... > 0,785... = \frac{\pi}{4}$), pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \in [\frac{\pi}{4},1]$.

   Pour $x \in [\frac{\pi}{4},1]$, $|g'(x)| = |2\cos(2x)| \leqslant |2\cos 2|$. L'inégalité des accroissements finis montre alors que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |2\cos 2|.|u_n - \alpha|$, puis que

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \alpha| \leqslant |2\cos 2|^{n-n_0}|u_{n_0} - \alpha|.$$

   Comme $|2\cos 2| = 0,83... < 1$, on en déduit que la suite u converge vers α. La machine donne par ailleurs $\alpha = 0,947....$



6. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Donc, si la suite u converge, ce ne peut être que vers 1 ou 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 2u_n + 2) - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2) \quad (I) \\ &u_{n+1} - 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \quad (II) \\ &u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2) \quad (III). \end{aligned}$$

1er cas. Si $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$, la suite u est constante.

2ème cas. Si $u_0 \in]1,2[$, (II) et (III) permettent de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]1,2[$. (I) montre alors que la suite u est strictement décroissante. Etant minorée par 1, elle converge vers un réel $\ell \in [1, u_0] \subset [1,2[$. Dans ce cas, la suite (u_n) converge vers 1.

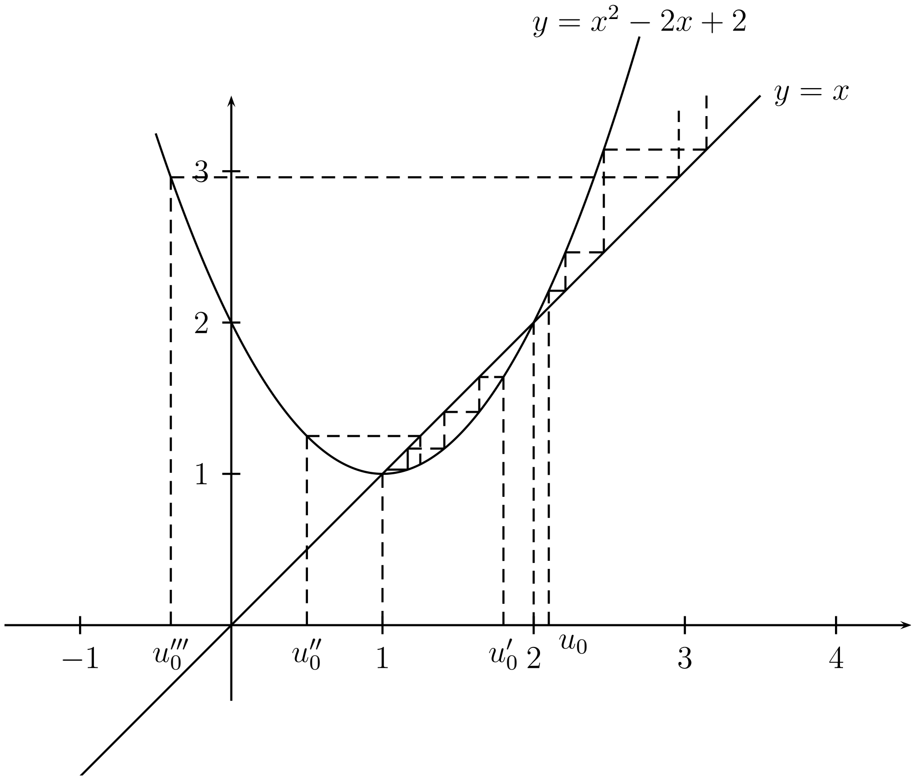
3ème cas. Si $u_0 \in]2,+\infty[$, (III) permet de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$. Mais alors, (I) montre que la suite u est strictement croissante. Si u converge, c'est vers un réel $\ell \in [u_0,+\infty[\subset]2,+\infty[$. f n'ayant pas de point fixe dans cet intervalle, la suite u diverge et, u étant strictement croissante, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4ème cas. Si $u_0 \in]0,1[$, alors $u_1 = (u_0 - 1)^2 + 1 \in]1,2[$ ce qui ramène au deuxième cas. La suite u converge vers 1.

5ème cas. Si $u_0 = 0$, alors $u_1 = 2$ et la suite u est constante à partir du rang 1. Dans ce cas, la suite u converge vers 2.

6ème cas. Si $u_0 < 0$, alors $u_1 = u_n^2 - 2u_n + 2 > 2$, ce qui ramène au troisième cas. La suite u tend vers $+\infty$.

En résumé, si $u_0 \in]0,2[$, la suite u converge vers 1, si $u_0 \in \{0,2\}$, la suite u converge vers 2 et si $u_0 \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, la suite u tend vers $+\infty$.



Correction de l'exercice 1711 ▲

1. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x) = \sin x$. On a $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) =]0, 1] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, puisque $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il est connu que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x < x$ et de plus, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x = x \Leftrightarrow x = 0$. La suite u est à valeurs dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante et, étant minorée par 0, converge vers un réel ℓ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ qui vérifie (f étant continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) $f(\ell) = \ell$ ou encore $\ell = 0$. En résumé,

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est strictement positive, strictement décroissante et converge vers } 0.}$$

2. Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0 , on a

$$\begin{aligned}u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = (\sin u_n)^{\alpha} - u_n^{\alpha} &\underset{n\to+\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^{\alpha} - u_n^{\alpha} \\ &= u_n^{\alpha}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^{\alpha} - 1\right) = u_n^{\alpha}\left(-\alpha\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) \\ &= -\alpha\frac{u_n^{\alpha+2}}{6} + o(u_n^{\alpha+2})\end{aligned}$$

Pour $\alpha = -2$ on a donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

D'après le lemme de CESARO, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$ ou encore $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$ ou enfin,

$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

Par suite, puisque la suite u est strictement positive,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.}$$

Correction de l'exercice 1712 ▲

Il est immédiat par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ et donc, puisque la suite u est stritement positive, $u_{n+1} < u_n$. La suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell = \ell e^{-\ell}$ ou encore $\ell(1-e^{-\ell}) = 0$ ou encore $\ell = 0$.

$$\boxed{u \text{ est strictement positive, strictement décroissante et converge vers } 0.}$$

Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0,

$$u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = u_n^{\alpha}(e^{-\alpha u_n} - 1) = u_n^{\alpha}(-\alpha u_n + o(u_n)) = -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1}).$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient en particulier $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + o(1)$. Puis, comme au numéro précédent, $\frac{1}{u_n} = n + \frac{1}{u_0} + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

Correction de l'exercice 1713 ▲

Remarquons d'abord que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. En écrivant les fractions de u_n sous la cette forme, l'écriture va se simplifier radicalement :

$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2.2}\frac{(3-1)(3+1)}{3.3}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}\frac{(k)(k+2)}{(k+1).(k+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n}$$

Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où :

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Donc (u_n) tends vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 1718 ▲

1. 0.
2. 1.
3. $7/30$.
4. $1/2$.
5. 1.
6. $-3/2$.
7. 1.
8. 3.
9. 1 ; 2.
10. $3/4$.
11. 0.

12. 0.
13. 1/3.

Correction de l'exercice 1719 ▲

1. $$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2+a}{u_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) \\ &= \frac{1}{4}\frac{(u_n^2-a)^2}{u_n^2} \end{aligned}$$

2. Il est clair que pour $n \geqslant 0$ on a $u_n > 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 - a \geqslant 0$ et comme u_{n+1} est positif alors $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$.
   Soit $n \geqslant 1$. Calculons le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{u_n^2}\right)$ or $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$ car $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$
   quand $n \to +\infty$ alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. À la limite nous obtenons la relation
   $$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right).$$
   La seule solution positive est $\ell = \sqrt{a}$. Conclusion (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. La relation
   $$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$$
   s'écrit aussi
   $$(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a}) = \frac{(u_n-\sqrt{a})^2(u_n+\sqrt{a})^2}{4u_n^2}.$$
   Donc
   $$\begin{aligned} u_{n+1}-\sqrt{a} &= (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{4(u_{n+1}+\sqrt{a})}\left(\frac{u_n+\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{4(2\sqrt{a})}\left(1+\frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

5. Par récurrence pour $n=1$, $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$. Si la proposition est vraie rang n, alors
   $$\begin{aligned} u_{n+1}-\sqrt{a} &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \\ &\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

6. Soit $u_0 = 3$, alors $u_1 = \frac{1}{2}(3+\frac{10}{3}) = 3,166\ldots$. Comme $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_1$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leqslant 0.166\ldots$. Nous pouvons choisir $k = 0,17$. Pour que l'erreur $u_n - \sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53 \times 10^{-10}$. Nous obtenons $u_4 = 3,16227766\ldots$ Bilan $\sqrt{10} = 3,16227766\ldots$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule. Le nombre de chiffres exacts double à chaque itération, avec u_5 nous aurions (au moins) 16 chiffres exacts, et avec u_6 au moins 32...

Correction de l'exercice 1720 ▲

1. La suite (u_n) est strictement croissante, en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}(\frac{2}{n} - 1).$$
Donc à partir de $n \geqslant 2$, la suite (v_n) est strictement décroissante.
2. Comme $u_n \leqslant v_n \leqslant v_2$, alors (u_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De même $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$, donc (v_n) est une suite décroissante et minorée. Donc elle converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Et donc $(v_n - u_n)$ tend vers 0 ce qui prouve que $\ell = \ell'$.
3. Supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$, nous écrivons alors $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous obtenons pour $n \geqslant 2$:
$$u_n \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_n.$$
Ecrivons cette égalité pour $n = q$: $u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_q$ et multiplions par $q!$: $q!u_q \leqslant q!\frac{p}{q} \leqslant q!v_q$. Dans cette double inégalité toutes les termes sont des entiers ! De plus $v_q = u_q + \frac{1}{q!}$ donc :
$$q!u_q \leqslant q!\frac{p}{q} \leqslant q!u_q + 1.$$
Donc l'entier $q!\frac{p}{q}$ est égal à l'entier $q!u_q$ ou à $q!u_q + 1 = q!v_q$. Nous obtenons que $\ell = \frac{p}{q}$ est égal à u_q ou à v_q. Supposons par exemple que $\ell = u_q$, comme la suite (u_n) est strictement croissante alors $u_q < u_{q+1} < \cdots < \ell$, ce qui aboutit à une contradiction. Le même raisonnement s'applique en supposant $\ell = v_q$ car la suite (v_n) est strictement décroissante. Pour conclure nous avons montré que ℓ n'est pas un nombre rationnel.

En fait ℓ est le nombre $e = \exp(1)$.

Correction de l'exercice 1721 ▲

1. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors comme f est croissante $f(u_0) \leqslant f(u_1)$ donc $u_1 \leqslant u_2$, ensuite $f(u_1) \leqslant f(u_2)$ soit $u_2 \leqslant u_3$,... Par récurrence on montre que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par a alors elle converge. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée par b donc converge.

   Notons ℓ la limite de $(u_n)_n$. Comme f est continue alors $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. De plus la limite de $(u_{n+1})_n$ est aussi ℓ. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ nous obtenons l'égalité $\ell = f(\ell)$.
2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{4x+5}{x+3}$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[0,4]$ et $f([0,4]) \subset [0,4]$. La fonction f est croissante (calculez sa dérivée). Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$ alors (u_n) est décroissante. Calculons la valeur de sa limite ℓ. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ soit $4x+5 = x(x+3)$. Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout n alors $\ell \geqslant 0$. La seule solution positive de l'équation du second degré $4x+5 = x(x+3)$ est $\ell = \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 2,7912\ldots$
3. Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante (car $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$). Nous appliquons la première question avec la fonction $f \circ f$. La suite $(u_0, u_2 = f \circ f(u_0), u_4 = f \circ f(u_2), \ldots)$ est monotone et convergente. De même pour la suite $(u_1, u_3 = f \circ f(u_1), u_5 = f \circ f(u_3), \ldots)$.

4. La fonction f définie par $f(x) = (1-x)^2$ est continue et dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Elle est décroissante sur cet intervalle. Nous avons $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$, $u_3 = 0,19\ldots$,... Donc la suite (u_{2n}) est croissante, nous savons qu'elle converge et notons ℓ sa limite. La suite (u_{2n+1}) et décroissante, notons ℓ' sa limite. Les limites ℓ et ℓ' sont des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit $(1-f(x))^2 = x$, ou encore $(1-(1-x)^2)^2 = x$ soit $x^2(2-x)^2 = x$. Il y a deux solutions évidentes 0 et 1. Nous factorisons le polynôme $x^2(2-x)^2 - x$ en $x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)$ avec λ et μ les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1$: $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,3819\ldots$ et $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Les solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$ sont donc $\{0, 1, \lambda, \mu\}$. Comme (u_{2n}) est croissante et que $u_0 = \frac{1}{2}$ alors (u_{2n}) converge vers $\ell = 1$ qui est le seul point fixe de $[0,1]$ supérieur à $\frac{1}{2}$. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et que $u_1 = \frac{1}{4}$ alors (u_{2n+1}) converge vers $\ell' = 0$ qui est le seul point fixe de $[0,1]$ inférieur à $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 1722 ▲

1. Soient $a, b > 0$. On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, cette inégalité est équivalente à $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$. De plus,
$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2$$
ce qui est toujours vrai car $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ est un carré parfait. On a donc bien l'inégalité voulue.
2. Quitte à échanger a et b (ce qui ne change pas les moyennes arithmétique et géométrique, et qui préserve le fait d'être compris entre a et b), on peut supposer que $a \leqslant b$. Alors en ajoutant les deux inégalités
$$a/2 \leqslant a/2 \leqslant b/2$$
$$a/2 \leqslant b/2 \leqslant b/2,$$
on obtient
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b.$$
De même, comme tout est positif, en multipliant les deux inégalités
$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \leqslant \sqrt{b}$$
on obtient
$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$
3. Il faut avant tout remarquer que pour tout n, u_n et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de dire que les deux suites sont bien définies. On le démontre par récurrence : c'est clair pour u_0 et v_0, et si u_n et v_n sont strictement positifs alors leurs moyennes géométrique (qui est u_{n+1}) et arithmétique (qui est v_{n+1}) sont strictement positives.
   (a) On veut montrer que pour chaque n, $u_n \leqslant v_n$. L'inégalité est claire pour $n = 0$ grâce aux hypothèses faites sur u_0 et v_0. Si maintenant n est plus grand que 1, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et v_{n-1}, donc, par 1., $u_n \leqslant v_n$.
   (b) On sait d'après 2. que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. (u_n) est croissante. De même, d'après 2., $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $v_{n+1} \leqslant v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.
   (c) Pour tout n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. (u_n) est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite ℓ. Et (v_n) est décroissante et minorée et donc converge vers une limite ℓ'. Nous savons maintenant que $u_n \to \ell$, donc aussi $u_{n+1} \to \ell$, et $v_n \to \ell'$; la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ s'écrit à la limite :
$$\ell = \sqrt{\ell \ell'}.$$

De même la relation $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ donnerait à la limite :

$$\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}.$$

Un petit calcul avec l'une ou l'autre de ces égalités implique $\ell = \ell'$.

Il y a une autre méthode un peu plus longue mais toute aussi valable.
Définition Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si

1. $u_n \leqslant v_n$,
2. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Alors, on a le théorème suivant :
Théorème : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.
Pour appliquer ce théorème, vu qu'on sait déjà que (u_n) et (v_n) vérifient les points 1 et 2 de la définition, il suffit de démontrer que $\lim(u_n - v_n) = 0$. On a d'abord que $v_n - u_n \geqslant 0$. Or, d'après (a)

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc, si on note $w_n = v_n - u_n$, on a que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n/2$. Donc, on peut démontrer (par récurrence) que $0 \leqslant w_n \leqslant \frac{w_0}{2^n}$, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc $v_n - u_n$ tend vers 0, et ceci termine de démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite en utilisant le théorème sur les suites adjacentes.

Correction de l'exercice 1724 ▲

Notons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \quad -1.$$

1. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n-1 \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n, admet un zéro dans l'intervalle $[0,1]$. De plus elle strictement croissante (calculez sa dérivée) sur $[0,1]$ donc ce zéro est unique.
2. Calculons $f_n(a_{n-1})$.

$$\begin{aligned} f_n(a_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + f_{n-1}(a_{n-1}) \\ &= a_{n-1}^n \quad (\text{car } f_{n-1}(a_{n-1}) = 0 \text{ par définition de } a_{n-1}). \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité

$$0 = f_n(a_n) < f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n.$$

Or f_n est strictement croissante, l'inégalité ci-dessus implique donc $a_n < a_{n-1}$. Nous venons de démontrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.
Remarquons avant d'aller plus loin que $f_n(x)$ est la somme d'une suite géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2.$$

Évaluons maintenant $f_n(\frac{1}{2})$, à l'aide de l'expression précédente

$$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 2 = -\frac{1}{2^n} < 0.$$

Donc $f_n(\frac{1}{2}) < f_n(a_n) = 0$ entraîne $\frac{1}{2} < a_n$.
Pour résumer, nous avons montré que la suite $(a_n)_n$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.

3. Comme $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle converge, nous notons ℓ sa limite :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n.$$

Appliquons f_n (qui est strictement croissante) à cette inégalité :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f_n(\ell) < f_n(a_n),$$

qui s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant f_n(\ell) < 0,$$

et ceci quelque soit $n \geqslant 1$. La suite $(f_n(\ell))_n$ converge donc vers 0 (théorème des "gendarmes"). Mais nous savons aussi que

$$f_n(\ell) = \frac{1-\ell^{n+1}}{1-\ell} - 2;$$

donc $(f_n(\ell))_n$ converge vers $\frac{1}{1-\ell} - 2$ car $(\ell^n)_n$ converge vers 0. Donc

$$\frac{1}{1-\ell} - 2 = 0, \text{ d'où } \ell = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 1743 ▲

1. Tout d'abord, pour $n \geqslant 1$, $\frac{n-1}{n}$ existe et est élément de $[-1,1]$. Donc, $\arccos\frac{n-1}{n}$ existe pour tout entier naturel non nul n.
Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{n-1}{n}$ tend vers 1 et donc $\arccos\frac{n-1}{n}$ tend vers 0. Mais alors,

$$\arccos\frac{n-1}{n} \sim \sin(\arccos\frac{n-1}{n}) = \sqrt{1-(\frac{n-1}{n})^2} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

2. $\arccos\frac{1}{n}$ tend vers 1 et donc $\arccos\frac{1}{n} \sim 1$.
3. $\operatorname{ch}(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{n}} + e^{-\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{2}e^{\sqrt{n}}$.
4. $n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim n.\frac{1}{n} = 1$ et donc, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+1/n)}$ tend vers e. Par suite, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$.
5. $\operatorname{argch} n$ existe pour $n \geqslant 1$ et comme, pour $n \geqslant 1$, $n^4+n^2-1 \geqslant n^4 > 0$, $\frac{\operatorname{argch} n}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$ existe pour $n \geqslant 1$.

$$\operatorname{argch} n = \ln(n+\sqrt{n^2-1}) \sim \ln(n+n) = \ln(2n) = \ln n + \ln 2 \sim \ln n.$$

Donc, $\frac{\operatorname{argch} n}{\sqrt{n^4+n^2-1}} \sim \frac{\ln n}{\sqrt{n^4}} = \frac{\ln n}{n^2}$.

6. $-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}+1) = -\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) = -\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n}(\frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})) = -\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - 1 + o(1)$, et donc

$$(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})-1+o(1)} \sim e^{-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})-1} = \frac{1}{e}\frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}.$$

7. $$\ln(\cos\frac{1}{n})(\ln\sin\frac{1}{n}) \sim (\cos\frac{1}{n} - 1)\ln(\frac{1}{n}) \sim (-\frac{1}{2n^2})(-\ln n) = \frac{\ln n}{2n^2}.$$

8. $(\arctan n)^{3/5} = (\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n})^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5}(1 - \frac{2}{\pi}(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})))^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5}(1 - \frac{6}{5n\pi} + o(\frac{1}{n}))$, et donc

$$(\frac{\pi}{2})^{3/5} - (\arctan n)^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5}(1 - 1 + \frac{6}{5n\pi} + o(\frac{1}{n})) \sim (\frac{\pi}{2})^{3/5}\frac{6}{5n\pi}$$

9. Tout d'abord, pour $n \geqslant 1$, $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$, et donc $1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geqslant 0$, puis $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ existe. Ensuite, quand n tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}.$$

Correction de l'exercice 1744 ▲

Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}.$$

Mais, pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$ (le produit contenant au moins les deux premiers facteurs. Par suite,

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!} \leqslant \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $\frac{1}{n}$ tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$ tend vers 1 et donc que

$$\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!.$$

Correction de l'exercice 1745 ▲

1. Soit $\varepsilon > 0$.

   Les suites u et v sont équivalentes et la suite v est strictement positive. Donc, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2}v_n$. Soit $n > n_0$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| &= \frac{|U_n - V_n|}{V_n} \leqslant \frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n}|u_k - v_k| \\ &\leqslant \frac{1}{V_n}(\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n_0+1}^{n} v_k) \\ &\leqslant \frac{1}{V_n}(\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2}V_n) = \frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

   Maintenant, l'expression $\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k|$ est constante quand n varie, et d'autre part, V_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que $\frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un rang $n_1 > n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $\frac{1}{V_n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Pour $n \geqslant n_1$, on a alors $\left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

   On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_1 \Rightarrow \left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| < \varepsilon.$$

   Ainsi, la suite $\frac{U_n}{V_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc $U_n \sim V_n$.

2.
$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{1}.$$

Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
En résumé, pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) > 0$, de plus quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ et enfin, $\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'après 1),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{1} \sim 2\sqrt{n}.$$

$$(n+1)\ln(n+1) - n\ln n = (n+1-n)\ln n + (n+1)\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln n + 1 + o(1) \sim \ln n.$$

Comme $\sum_{k=1}^{n}((k+1)\ln(k+1) - k\ln k) = (n+1)\ln(n+1)$ tend vers $+\infty$ et que les suites considéres sont positives, on en déduit que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k \sim \sum_{k=1}^{n}((k+1)\ln(k+1) - k\ln k) = (n+1)\ln(n+1) \sim n\ln n.$$

Correction de l'exercice 1746 ▲

Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{1}{n}$. On a alors

$$\begin{aligned} n(u_n + u_{n+1} - \frac{2}{n}) &= 1 + \frac{n}{n+1} - 2 + n(-1)^n(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}) = \frac{(-1)^n n(\ln(n+1) - \ln n)}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) \\ &= \frac{(-1)^n n \ln(1+1/n)}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) = \frac{(-1)^n(1+o(1))}{\ln n \ln(n+1)} + o(1) = o(1). \end{aligned}$$

Donc, $n(u_n + u_{n+1} - \frac{2}{n}) = o(1)$, ou encore $u_n + u_{n+1} = \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$, ou enfin, $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$. Pourtant, u_n est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ et pas du tout à $\frac{1}{n}$ ($|nu_n| = \frac{n}{\ln n} \to +\infty$).
Supposons maintenant que $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$ et montrons que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
On pose $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Il s'agit maintenant de montrer que $v_n = o(\frac{1}{n})$ sous l'hypothèse $v_n + v_{2n} = o(\frac{1}{n})$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $n|v_n + v_{2n}| < \frac{\varepsilon}{4}$.
Soient $n \geqslant n_0$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |v_n| &= |v_n + v_{2n} - v_{2n} - v_{4n} + \ldots + (-1)^p(v_{2^p n} + v_{2^{p+1}n}) + (-1)^{p+1}v_{2^{p+1}n}| \leqslant \sum_{k=0}^{p} |v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}| + |v_{2^{p+1}n}| \\ &\frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k n} + |v_{2^{p+1}n}| = \frac{\varepsilon}{4n}\frac{1-\frac{1}{2^{p+1}}}{1-\frac{1}{2}} + |v_{2^{p+1}n}| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2n} + |v_{2^{p+1}n}| \end{aligned}$$

Maintenant, la suite u tend vers 0, et il en est de même de la suite v. Par suite, pour chaque $n \geqslant n_0$, il est possible de choisir p tel que $|v_{2^{p+1}n}| < \frac{\varepsilon}{2n}$.
En résumé, si n est un entier donné supérieur ou égal à n_0, $n|v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |nv_n| < \varepsilon.$$

Par suite, $v_n = o(\frac{1}{n})$ et donc $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, ou encore $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 1747 ▲

1. Il est immédiat que la suite u est définie et à valeurs dans $[-1, \frac{\pi}{2}]$.
   Plus précisément, $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, et si pour $n \geqslant 0$, $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$, alors $u_{n+1} \in]0, 1] \subset]0, \frac{\pi}{2}]$. On a montré par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
   Montrons que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x > x$. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(x) = x - \sin x$. f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 1 - \cos x$. Par suite, f' est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et donc strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Mais alors, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $f(x) > f(0) = 0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante. Puisque la suite u est d'autre part minorée par 0, la suite u converge vers un réel noté ℓ. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{\pi}{2}$. Mais alors, par continuité de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc en ℓ, on a
   $$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sin(u_n) = \sin(\lim_{n\to+\infty} u_n) = \sin(\ell).$$
   Or, si $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x < x$ et en particulier $\sin x \neq x$. Donc, $\ell = 0$.
   La suite u est strictement positive, strictement décroissante, de limite nulle.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$,
   $$u_{n+1}^\alpha = (\sin(u_n))^\alpha = (u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^\alpha = u_n^\alpha(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^\alpha = u_n^\alpha(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)) = u_n^\alpha - \frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}).$$
   et donc, $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = -\frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})$. En prenant $\alpha = -2$, on obtient alors
   $$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1).$$
   D'après le lemme de CÉSARO, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ tend également vers $\frac{1}{3}$. Mais,
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}) = \frac{1}{n}(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}).$$
   Ainsi, $\frac{1}{n}(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}) = \frac{1}{3} + o(1)$ puis, $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) = \frac{n}{3} + o(n)$. Donc, $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$, puis $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$ et enfin, puisque la suite u est strictement positive,
   $$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Correction de l'exercice 1761 ▲

L'équation caractéristique est :
$$r^2 - r - 1 = 0$$
dont les solution sont $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc u_n est de la forme
$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$
pour α, β des réels que nous allons calculer grâce à u_0 et u_1. En effet $u_0 = 1 = \alpha\lambda^0 + \beta\mu^0$ donc $\alpha + \beta = 1$. Et comme $u_1 = 1 = \alpha\lambda^1 + \beta\mu^1$ nous obtenons $\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$. En résolvant ces deux équations nous obtenons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\lambda)$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu)$. Nous écrivons donc pour finir :
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}).$$

Correction de l'exercice 1763 ▲

L'équation caractéristique est :

$$r^2-3r+2=0$$

dont les solutions sont $\lambda=2$ et $\mu=1$. Donc u_n est de la forme

$$u_n=\alpha 2^n+\beta 1^n=\alpha 2^n+\beta$$

Or la suite $(2^n)_n$ tend vers $+\infty$. Donc si $(u_n)_n$ est bornée alors $\alpha=0$. Donc $(u_n)_n$ est la suite constante égale à β. Réciproquement toute suite constante qui vérifie $u_n=\beta$ pour $n\in\mathbb{N}$ vérifie bien la relation de récurrence $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$. Donc les suites cherchées sont les suites constantes.

Correction de l'exercice 1767 ▲

1. $u_n=\frac{1}{3}((a+2b)+2(a-b)(-\frac{1}{2})^n)$.
2.
3. $v_n=\lambda\times\mu^{(-\frac{1}{2})^n}$.
4.

Correction de l'exercice 1768 ▲

1. $u_n=\frac{n^2}{4}-n+\frac{3}{8}(1-(-1)^n)$.
2. $u_n=\frac{n-1}{3}+aj^n+bj^{2n}$.

Correction de l'exercice 1769 ▲

$2u_n=u_0+v_0+\left(-\frac{1}{5}\right)^n(u_0-v_0),\quad 2v_n=u_0+v_0-\left(-\frac{1}{5}\right)^n(u_0-v_0).$

Correction de l'exercice 1770 ▲

1. $u_n^{(k)}=\sum_{p=0}^k C_k^p(-1)^{k-p}u_{n+p}$.
2.

Correction de l'exercice 1771 ▲

1.
2. $6T_n=\left(3+\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^n+\left(3-\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)^n$.

Correction de l'exercice 1773 ▲

1. L'équation caractéristique est $4z^2-4z-3=0$. Ses solutions sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Les suites cherchées sont les suites de la forme $(u_n)=\left(\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont deux réels (ou deux complexes si on cherche toutes les suites complexes). Si u_0 et u_1 sont les deux premiers termes de la suite u, λ et μ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=u_0\\ -\frac{\lambda}{2}+\frac{3\mu}{2}=u_1\end{array}\right.$ et donc $\lambda=\frac{1}{4}(3u_0-2u_1)$ et $\mu=\frac{1}{4}(u_0+2u_1)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{4}(3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}(u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.}$$

2. Clairement $u_{2n}=\frac{1}{4^n}u_0$ et $u_{2n+1}=\frac{1}{4^n}u_1$ et donc $u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}(1+(-1)^n)u_0+2\times\frac{1}{2^n}(1-(-1)^n)u_1\right)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left((1+(-1)^n)u_0 + 2(1-(-1)^n)u_1\right).}$$

3. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Une solution particulière de l'équation proposée est une constante a telle que $4a = 4a + 3a + 12$ et donc $a = -4$. Les solutions de l'équation proposée sont donc les suites de la forme $\left(-4 + \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda + \mu = 4 + u_0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} = 4 + u_1\end{array}\right.$ et donc $\lambda = \frac{1}{4}(4 + 3u_0 - 2u_1)$ et $\mu = \frac{1}{4}(12 + u_0 + 2u_1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -4 + \frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.}$$

4. La suite $v = \frac{1}{u}$ est solution de la récurrence $2v_{n+2} = v_{n+1} - v_n$ et donc, (v_n) est de la forme $\left(\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n + \mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right)$ et donc $u_n = \frac{1}{\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n + \mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n}$.

5. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $(\lambda + \mu 2^n)$. 1 est racine simple de l'équation caractéristique et donc il existe une solution particulière de l'équation proposée de la forme $u_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$. Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} &= (an^4 + bn^3 + cn^2 + dn) - 3(a(n-1)^4 + b(n-1)^3 + c(n-1)^2 + d(n-1)) \\
&\quad + 2(a(n-2)^4 + b(n-2)^3 + c(n-2)^2 + d(n-2)) \\
&= a(n^4 - 3(n-1)^4 + 2(n-2)^4) + b(n^3 - 3(n-1)^3 + 2(n-2)^3) \\
&\quad + c(n^2 - 3(n-1)^2 + 2(n-2)^2) + d(n - 3(n-1) + 2(n-2)) \\
&= a(-4n^3 + 30n^2 - 52n + 29) + b(-3n^2 + 15n - 13) + c(-2n + 5) + d(-1) \\
&= n^3(-4a) + n^2(30a - 3b) + n(-52a + 15b - 2c) + 29a - 13b + 5c - d.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \text{ est solution} &\Leftrightarrow -4a = 1 \text{ et } 30a - 3b = 0 \text{ et } -52a + 15b - 2c = 0 \text{ et } 29a - 13b + 5c - d = 0 \\
&\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4},\ b = -\frac{5}{2},\ c = -\frac{49}{4},\ d = -36.
\end{aligned}$$

Les suites cherchées sont les suites de la forme $\left(-\frac{1}{4}(n^3 + 10n^2 + 49n + 144) + \lambda + \mu 2^n\right)$.

6. Pour tout complexe z, $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)(z-2)(z-3)$ et les suites solutions sont les suites de la forme $(\alpha + \beta 2^n + \gamma 3^n)$.

7. Pour tout complexe z, $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = (z^2+1)^2 - 2z(z^2+1) = (z-1)^2(z^2+1)$. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\alpha + \beta n + \gamma i^n + \delta(-i)^n$. 1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $u_n = an^7 + bn^6 + cn^5 + dn^4 + en^3 + fn^2$. Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned}u_{n+4}-2u_{n+3}+2u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n &= a((n+4)^7-2(n+3)^7+2(n+2)^7-2(n+1)^7+n^7)\\
&+b((n+4)^6-2(n+3)^6+2(n+2)^6-2(n+1)^6+n^6)\\
&+c((n+4)^5-2(n+3)^5+2(n+2)^5-2(n+1)^5+n^5)\\
&+d((n+4)^4-2(n+3)^4+2(n+2)^4-2(n+1)^4+n^4)\\
&+e((n+4)^3-2(n+3)^3+2(n+2)^3-2(n+1)^3+n^3)\\
&+f((n+4)^2-2(n+3)^2+2(n+2)^2-2(n+1)^2+n^2)\\
&= a(84n^5+840n^4+4340n^3+12600n^2+19348n+12264)\\
&+b(60n^4+480n^3+1860n^2+3600n+2764)\\
&+c(40n^3+240n^2+620n+600)+d(24n^2+96n+124)+e(12n+24)+4f\\
&= n^5(84a)+n^4(840a+60b)+n^3(4340a+480b+40c)+n^2(12600a+1860b+240c+24d)\\
&+n(19348a+3600b+620c+96d+12e)+(12264a+2764b+600c+124d+24e+4f)\end{aligned}$$

u est solution si et seulement si $84a=1$ et donc $a=\frac{1}{84}$, puis $840a+60b=0$ et donc $b=-\frac{1}{6}$, puis $4340a+480b+40c=0$ et donc $c=\frac{17}{24}$, puis $12600a+1860b+240c+24d=0$ et donc $d=-\frac{5}{12}$ puis $19348a+3600b+620c+96d+12e=0$ et donc $e=-\frac{59}{24}$ puis $12264a+2764b+600c+124d+24e+4f=0$ et donc $f=\frac{1}{12}$. La solution générale de l'équation avec second membre est donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{168}(2n^7-28n^6+119n^5-70n^4-413n^3+14n^2)+\alpha+\beta n+\gamma i^n+\delta(-i)^n,\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^4.$$

Correction de l'exercice 1784 ▲

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$$

2. Soit $a\in]0,\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors, pour tout naturel non nul k, on a $0<\frac{a}{2^k}\leqslant\frac{a}{2}<\frac{\pi}{2}$ et donc $\sin\frac{a}{2^k}\neq 0$. On sait alors que pour tout réel x, $\sin(2x)=2\sin x\cos x$. Par suite, pour tout naturel k,

$$\sin(2.\frac{a}{2^k})=2\sin\frac{2^k}{\cos}\frac{a}{2^k}\quad\text{et donc}\quad\cos\frac{a}{2^k}=\frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)}.$$

Mais alors,

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^{k-1})}{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^k)}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\sin(a/2^k)}{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^k)}=\frac{\sin a}{2^n\sin(a/2^n)}.$$

Correction de l'exercice 1785 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}$. Pour $k\in\{0,\dots,n\}$, posons $u_k=\frac{C_n^k}{n^k}$ puis $v_k=\frac{u_{k+1}}{u_k}$. Pour $k\in\{1,\dots,n-1\}$, on a alors

$$\begin{aligned}v_k&=\frac{C_n^{k+1}.n^k}{C_n^k.n^{k+1}}=\frac{1}{n}.\frac{n!k!(n-k)!}{n!(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n-k}{n(k+1)}=\frac{(n+1)-(k+1)}{n(k+1)}=-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n(k+1)}\\
&\leqslant-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{2n}\ (\text{car } k\geqslant 1)\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, pour $k \in \{1,...,n-1\}$, $u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}u_k$ et donc, immédiatement par récurrence,

$$u_k \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}u_1 = \frac{1}{2^{k-1}}\frac{n}{n} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

En tenant compte de $u_0 = 1$, on a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2(1-\frac{1}{2^n}) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Correction de **l'exercice 1786 ▲**

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$kx - 1 < E(kx) \leqslant kx.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2} \leqslant \frac{x+2x+...+nx}{n^2} = \frac{n(n+1)x}{2n^2} = \frac{(n+1)x}{2n},$$

et aussi,

$$\frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2} > \frac{(x-1)+(2x-1)+...+(nx-1)}{n^2} = \frac{n(n+1)x/2-n}{n^2} = \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n}.$$

Finalement, pour tout naturel non nul,

$$\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2} \leqslant \frac{(n+1)x}{2n}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\frac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2} = \frac{x}{2}.}$$

Correction de **l'exercice 1787 ▲**

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que, si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit n un entier naturel strictement supérieur à n_0.

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - \ell\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k-\ell| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k-\ell| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Maintenant, $\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell|$ est une expression constante quand n varie et donc, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell| = 0$. Par suite, il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_1$, on a alors $|v_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N}/\ (\forall n\in\mathbb{N})(n\geqslant n_1 \Rightarrow |v_n-\ell|<\varepsilon)$. La suite (v_n) est donc convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

$$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ converge vers } \ell \text{ alors la suite } v \text{ converge vers } \ell.}$$

La réciproque est fausse. Pour n dans $\mathbb{N}$, posons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est divergente. D'autre part, pour n dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ vaut 0 ou 1 suivant la parité de n et donc, dans tous les cas, $|v_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Par suite, la suite (v_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2. Si u est bornée, il existe un réel M tel que, pour tout naturel n, $|u_n| \leqslant M$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$|v_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}M = \frac{1}{n+1}(n+1)M = M.$$

La suite v est donc bornée.

$$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ est bornée alors la suite } v \text{ est bornée.}}$$

La réciproque est fausse. Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n E\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} p \text{ si } n = 2p,\ p \in \mathbb{N} \\ -p \text{ si } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$.

u n'est pas bornée car la suite extraite (u_{2p}) tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$. Mais, si n est impair, $v_n = 0$, et si n est pair, $v_n = \frac{1}{n+1} \times u_n = \frac{n}{2(n+1)}$, et dans tous les cas $|v_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{n}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$ et la suite v est bornée.

3. Si u est croissante, pour n entier naturel donné on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1}u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)\sum_{k=0}^{n+1}u_k - (n+2)\sum_{k=0}^{n}u_k\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}u_k\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1}-u_k) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

La suite v est donc croissante.

$$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ est croissante alors la suite } v \text{ est croissante.}}$$

Correction de l'exercice 1788 ▲

Pour n naturel non nul et x réel positif, posons $f_n(x) = x^n + x - 1$.
Pour $x \geqslant 0$, $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et donc $u_1 = \frac{1}{2}$.
Pour $n \geqslant 2$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x \geqslant 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$.
f_n est ainsi continue et strictemnt croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $f_n(\mathbb{R}^+) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[$, et en particulier,

$$\exists! x \in [0, +\infty[/\ f_n(x) = 0.$$

Soit u_n ce nombre. Puisque $f_n(0) = -1 < 0$ et que $f_n(1) = 1 > 0$, par stricte croissance de f_n sur $[0, +\infty[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1.$$

La suite u est donc bornée.
Ensuite, pour n entier naturel donné et puisque $0 < u_n < 1$:

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 < u_n^n + u_n - 1 = f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

et donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ puis, par stricte croissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

La suite u est bornée et strictement croissante. Donc, la suite u converge vers un réel ℓ, élément de $[0, 1]$.

Si $0 \leqslant \ell < 1$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \leqslant \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$. Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, on a $1 - u_n = u_n^n \leqslant (\frac{1+\ell}{2})^n$ et quand n tend vers vers $+\infty$, on obtient $1 - \ell \leqslant 0$ ce qui est en contradiction avec $0 \leqslant \ell < 1$. Donc, $\ell = 1$.

Correction de l'exercice 1789 ▲

Soit x dans $[-1,1]$ et $\varepsilon > 0$.
Soit $\theta = \arcsin x$ (donc θ est élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x = \sin\theta$). Pour k entier naturel non nul donné, il existe un entier n_k tel que $\ln(n_k) \leqslant \theta + 2k\pi < \ln(n_k+1)$ à savoir $n_k = E(e^{\theta+2k\pi})$.
Mais,

$$0 < \ln(n_k+1) - \ln(n_k) = \ln(1+\frac{1}{n_k}) < \frac{1}{n_k}$$

(d'après l'inégalité classique $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$, obtenue par exemple par l'étude de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$). Donc,

$$0 \leqslant \theta + 2k\pi - \ln(n_k) < \ln(n_k+1) - \ln(n_k) < \frac{1}{n_k},$$

puis

$$\begin{aligned} |\sin(\theta) - \sin(\ln(n_k))| &= 2|\sin(\frac{\theta+2k\pi-\ln(n_k)}{2})\cos(\frac{\theta+2k\pi+\ln(n_k)}{2})| \\ &\leqslant 2\left|\frac{\theta+2k\pi-\ln(n_k)}{2}\right| = |\theta+2k\pi-\ln(n_k)| < \frac{1}{n_k}. \end{aligned}$$

Soit alors ε un réel strictement positif.
Puisque $n_k = E(e^{\theta+2k\pi})$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, on peut trouver un entier k tel que $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$ et pour cet entier k, on a $|\sin\theta - \sin(\ln(n_k))| < \varepsilon$.
On a montré que $\forall x \in [-1,1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^* / \ |x - \sin(\ln n)| < \varepsilon$, et donc $\{\sin(\ln n),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Correction de l'exercice 1790 ▲

Pour $\alpha \in]0,\pi[$, posons $f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)$. $\{(\sin(n\alpha),\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$. Donc, pour tout réel α de $]0,\pi[$, $f(\alpha)$ existe dans $\mathbb{R}$.
Si α est dans $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) \geqslant \sin\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}).$$

Si α est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$. Soit n_0 l'entier naturel tel que $(n_0-1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leqslant n_0\alpha$ (n_0 existe car la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante). Alors,

$$\frac{\pi}{3} \leqslant n_0\alpha = (n_0-1)\alpha + \alpha < \frac{\pi}{3} + \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Mais alors,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) \geqslant |\sin(n_0\alpha)| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}).$$

Si α est dans $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$, on note que

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n(\pi-\alpha)|) = f(\pi-\alpha) \geqslant f(\frac{\pi}{3}),$$

car $\pi - \alpha$ est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$.
On a montré que $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $f(\alpha) \geqslant f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|))$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)) = \mathrm{Min}_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)) = f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Correction de l'exercice 1795 ▲

1. Pour $n \geqslant 4$
$$\frac{n!}{n^n} = \frac{2}{n}\times\frac{3}{n}\times\underbrace{\frac{4}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}}_{\leqslant 1} \leqslant \frac{6}{n^2}.$$
Or $\sum\frac{6}{n^2}$ est convergente. Donc $\sum\frac{n!}{n^n}$ est aussi convergente par comparaison.

2. Montrons que $(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n})^{-2} \geqslant \left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2}$ pour n assez grand. On a :
$$\begin{array}{rcll} 4\ln n & \leqslant & \ln^2 n & \text{pour } n \text{ assez grand} \\ \ln n & \leqslant & \left(\frac{1}{2}\ln n\right)^2 & \\ \sqrt{\ln n} & \leqslant & \frac{1}{2}\ln n = \ln\sqrt{n} & \\ \mathrm{ch}(\sqrt{\ln n}) & \leqslant & \mathrm{ch}(\ln\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{car } x\mapsto \mathrm{ch}x \text{ est croissante} \\ \mathrm{ch}(\sqrt{\ln n})^{-2} & \geqslant & 4\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2} & \end{array}$$
Or $\sqrt{n}\sim\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}$, et $\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2}\sim\frac{1}{n}$, donc $\sum\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2}$ est divergente. Par comparaison, la série de terme général $(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n})^2$ est divergente.

3. Montrons que $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}\sim n^{-1}$. On a : $\dfrac{n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n^{-1}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, d'où $\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$. Par équivalence, la série de terme général $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ est donc divergente car la série harmonique est divergente.

4. Montrons que $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{n}$. En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on a : $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. De là on tire que $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n}$. Par équivalence, la série de terme général $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ est donc divergente.

5. On sait que : $\ln(e^n-1)\leqslant\ln e^n = n$. De plus, $\ln n\geqslant 1$ pour n assez grand, par conséquent $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}\geqslant\frac{1}{n}$. On conclut par comparaison que la série $\sum\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ est divergente.

6. Montrons que $n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}}\leqslant n^{-2}$. On remarque que $n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}} = e^{(\ln n)^2}e^{-\sqrt{n}}$. Or pour u assez grand $4u^2+4u\leqslant e^u$, soit $4u^2-e^u\leqslant -4u$. En posant $u=\ln\sqrt{n}=\frac{1}{2}\ln n$, il vient $\ln^2 n-\sqrt{n}\leqslant -2\ln n$. D'où
$$\underbrace{e^{\ln^2 n-\sqrt{n}}}_{n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}}}\leqslant\underbrace{e^{-2\ln n}}_{\frac{1}{n^2}}$$
Par comparaison, la série de terme général $n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}}$ est donc convergente car la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

(*Corrigé de Lévi Operman*)

Correction de l'exercice 1796 ▲

— Pour $p=0$:
$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} = 1+\frac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{n!} > 1$$
u_n ne tend pas vers 0 donc, $\sum u_n$ diverge grossièrement pour $p=0$.

— Pour $p = 1$:

$$u_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{2!}{(n+1)!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$u_n \geqslant \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Or $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge pour $p = 1$.

— Pour $p = 2$:

$$u_n = \frac{1}{(n+2)!} + \frac{2!}{(n+2)!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+2)!}$$

On serait tenté de dire que l'on a une somme de séries convergentes, donc $\sum u_n$ converge. Pas de chance, le nombre de terme croît en fonction de n, donc à l'infini, on en a une infinité et on ne peut rien conclure.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+2)!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+2)!} \leqslant \frac{n(n-1)!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+2)!}$$

$$u_n \leqslant 2\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{2}{n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum u_n$ converge pour $p = 2$.

— Pour $p \geqslant 3$:

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!} \leqslant \frac{nn!}{(n+p)!} = \frac{nn!}{n!(n+1)\cdots(n+p)}$$

En simplifiant par $n!$ et en posant $u_n \leqslant \frac{n}{(n+1)\cdots(n+p)}$ et

$$\frac{n}{(n+1)\cdots(n+p)} \sim \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \text{ avec } p \geqslant 3$$

Or $\sum \frac{1}{n^{p-1}}$ est une série de Riemann convergente car $p-1 \geqslant 2$, donc $\sum u_n$ converge pour $p \geqslant 3$.
Note : on peut aussi remarquer que u_n (quand $p \geqslant 3$) est majoré par u_n (quand $p = 2$), or ce dernier est convergent.

(*Corrigé de Eugène Ndiaye*)

Correction de l'exercice 1797 ▲

1. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k}$. L'idée est de calculer la somme de $(1-3^{-1})S_n$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}(1-3^{-1})S_n &= (1-3^{-1})\sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k} - \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}k3^{-k} + \sum_{k=0}^{n}3^{-k} - \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-(k+1)}\end{aligned}$$

En réindexant les sommes, on obtient :

$$\begin{aligned}(1-3^{-1})S_n &= \sum_{k=1}^{n}k3^{-k} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k - \sum_{k=1}^{n}k3^{-k} - (n+1)3^{-(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} - \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} - \underbrace{\frac{n+1}{3^{n+1}}}_{\to 0}\end{aligned}$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)S_n = \frac{3}{2}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)3^{-k}=\frac{9}{4}\cdot$$

Remarque : On reconnaît la série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{3}$.

2. Posons $u_n=\dfrac{n}{n^4+n^2+1}$ et cherchons à la décomposer en éléments simples.

$$\begin{aligned}n^4+n^2+1 &= (n^4+2n^2+1)-n^2=(n^2+1)^2-n^2\\ &= (n^2+n+1)(n^2-n+1)\end{aligned}$$

d'où $u_n=\frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)}$. Trouvons maintenant A et $B\in\mathbb{R}$ tel que $u_n=\frac{A}{n^2+n+1}+\frac{B}{n^2-n+1}$, soit tels que $A(n^2-n+1)+B(n^2+n+1)=n$, ce qui équivaut à $(A+B)n^2+(B-A)n+(A+B)=n$. Par identification, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}A+B=0\\ B-A=1\\ A+B=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}A&=&-\frac{1}{2}\\ \\ B&=&\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

D'où :

$$u_n=\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{N}u_n=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n^2-n+1}-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

Or $n^2+n+1=(n+1)^2-(n+1)+1$. En réindexant la deuxième somme :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}u_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n^2-n+1}-\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^2-n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(N+1)^2-(N+1)+1}\right)\quad\text{par télescopage.}\end{aligned}$$

La série est donc convergente et la somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{2}\,.$$

3. Décomposons $v_n=\dfrac{2n-1}{n^3-4n}$ en éléments simples. Comme

$$n^3-4n=n(n^2-4)=n(n-2)(n+2),$$

cherchons α, β et $\gamma\in\mathbb{R}$ tels que :

$$v_n=\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n+2}+\frac{\gamma}{n-2}.$$

Soit

$$\begin{aligned}2n-1 &= \alpha(n-2)(n+2)+\beta n(n-2)+\gamma n(n+2)\\ &= (\alpha+\beta+\gamma)n^2+(2\gamma-2\beta)n-4\alpha\end{aligned}$$

Par identification :

$$\left\{\begin{array}{r}\alpha+\beta+\gamma=0\\ 2(\gamma-\beta)=2\\ -4\alpha=-1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\alpha&=&\frac{1}{4}\\ \gamma&=&1+\beta\\ \alpha+2\beta+1&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}\alpha&=&\frac{1}{4}\\ \beta&=&-\frac{5}{8}\\ \gamma&=&\frac{3}{8}\end{array}\right.$$

D'où

$$\frac{2n-1}{n^3-4n}=\frac{1}{4n}-\frac{5}{8(n+2)}+\frac{3}{8(n-2)}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N} v_n &= \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{4n}-\frac{5}{8(n+2)}+\frac{3}{8(n-2)}\right)\\ &= \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{4n}-\sum_{n=3}^{N}\frac{5}{8(n+2)}+\sum_{n=3}^{N}\frac{3}{8(n-2)}.\end{aligned}$$

Soit en réindexant les 2 dernières sommes :

$$\sum_{n=3}^{N} v_n = \frac{1}{8}\left[2\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}-5\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n}+3\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n}\right]$$

Puis, par télescopage,

$$\sum_{n=3}^{N} v_n = \frac{1}{8}\left(\frac{89}{12}-\frac{3}{N-1}-\frac{3}{N}-\frac{5}{N+1}-\frac{5}{N+2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{89}{12}.$$

Donc, la série converge et $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n}=\frac{89}{96}$.

(*Corrigé d'Antoine Poulain*)

Correction de l'exercice 1803 ▲

Convergence de $W_n=\ln(u_n n^{b-a})$.
On remarque que W_n est la somme partielle de la suite de terme général

$$\begin{aligned} w_n &= W_{n+1}-W_n=\ln\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-a}\right]\\ &= \ln\left[\frac{n+a}{n+b}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-a}\right]=\ln\left[\frac{n(1+\frac{a}{n})}{n(1+\frac{b}{n})}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{b-a}\right]\\ &= (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{b}{n}\right)\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que cette série converge pour montrer que (W_n) converge. On utilise le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 , ce qui donne

$$w_n=(b-a)\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\left(\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

donc $\sum w_n$ est une série convergente et (W_n) converge. Soit ℓ sa limite.
Condition sur a,b pour que $\sum u_n$ converge.
On sait que $\lim\ln u_n n^{b-a}=\ell$; par composée des limites, $\lim u_n n^{b-a}=e^{\ell}$, donc $u_n\sim\frac{e^{\ell}}{n^{b-a}}$. Or $\sum\frac{1}{n^{b-a}}$ est une série de Riemann, qui converge si et seulement si $b-a>1$. Ainsi, par équivalence, $\sum^{\infty}u_n$ converge si et seulement si $b-a>1$.
Calcul somme partielle de s_n.
Par hypothèse $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+a}{n+b}$, d'où $[u_{n+1}(n+b)]=[u_n(n+a)]$ et

$$\sum_{j=0}^{n}[u_{j+1}((j+1)+(b-1))]=\sum_{j=0}^{n}[u_j(j+a)].$$

En effectuant un changement d'indice on a :

$$\sum_{j=1}^{n+1}[u_j(j+b-1)]=\sum_{j=0}^{n}[u_j(j+a)]$$

$$\sum_{j=1}^{n}[u_j(j+b-1)]+u_{n+1}(n+b)=\sum_{j=1}^{n}[u_j(j+a)]+au_0$$

$$u_{n+1}(n+b)-au_0=\sum_{j=1}^{n}[u_j(a-b+1)]$$

Si $b-a\neq 1$, on obtient donc que $s_n=\frac{u_{n+1}(n+b)-a}{a-b+1}$.
Valeur de la somme.
On se place dans le cas où la série converge, i.e. $b-a>1$. Alors $\lim u_{n+1}(n+b)=0$. On sait que $u_n\sim\frac{e^\ell}{n^{b-a}}$, de plus, $n+b\sim n$. Donc $u_{n+1}(n+b)\sim e^l n^{1+a-b}$. Or $1+a-b<0$, donc $\lim e^\ell n^{1+a-b}=0$. Finalement

$$s_n=\frac{u_{n+1}(n+b)-a}{a-b+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{-a}{a-b+1}$$

et on conclut que $\sum_{k=0}^{\infty}u_n=\frac{a}{b-a-1}$.
(*Corrigé de Lévi Operman*)

Correction de l'exercice 1808 ▲

Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $I_{(\alpha,\beta)}=\int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\cos(nt)\,dt$. Une intégration par partie nous donne

$$I_{(\alpha,\beta)}=\underbrace{\left[(\alpha t+\beta t^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi}_{=0}-\frac{1}{n}\int_0^\pi(\alpha+2\beta t)\sin(nt)\,dt$$

En faisant une intégration par partie sur la deuxième intégrale, on a :

$$\begin{aligned}I_{(\alpha,\beta)}&=\left[\frac{\alpha+2\beta t}{n^2}\cos(nt)\right]_0^\pi+\int_0^\pi\frac{2\beta\cos(nt)}{n^2}\,dt\\&=\left(\frac{\alpha+2\beta\pi}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{\alpha}{n^2}\right)+\underbrace{\frac{2\beta}{n^2}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi}_{=0}.\end{aligned}$$

On obtient $I_{(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha+2\beta\pi}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{\alpha}{n^2}$.

$$\begin{aligned}I_{(\alpha,\beta)}=\frac{1}{n^2}\quad&\iff\quad(\alpha+2\beta\pi)\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}-\alpha=1\\&\iff\quad(\alpha+2\beta\pi)(-1)^n-(1+\alpha)=0\end{aligned}$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases}(\alpha+2\beta\pi)(-1)^n&=&0\\(1+\alpha)&=&0\end{cases}$$

Ainsi en prenant $\alpha=-1$ et $\beta=\frac{1}{2\pi}$, on obtient :

$$I_{(-1,\frac{1}{2\pi})}=\int_0^\pi\left(-t+\frac{1}{2\pi}t^2\right)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}\cdot$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^\pi\left(-t+\frac{1}{2\pi}t^2\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\,dt\qquad(1)$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)&=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikt}\right)-1=\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\mathrm{Re}(e^{i\frac{nt}{2}})-1\\&=\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\times\frac{\sin(\frac{n}{2}t)\cos(\frac{t}{2})+\cos(\frac{n}{2}t)\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}-1\\&=\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cot\left(\frac{t}{2}\right)+\underbrace{\cos^2\left(\frac{nt}{2}\right)-1}_{=-\sin^2(\frac{nt}{2})}\end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{1}{2}\sin(nt)\cot\left(\frac{t}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)$.
En appliquant ce résultat à (1) on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)\sin(nt)\cot\left(\frac{t}{2}\right)dt-\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)dt$$

En posant $\phi(t)=(-t+\frac{1}{2\pi}t^2)\cot(\frac{t}{2})$, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\phi(t)\sin(nt)\,dt-\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{1}{2\pi}t^2\right)\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)dt$$

Comme

$$(-t+\frac{1}{2\pi}t^2)\cot\frac{t}{2}=(-t+\frac{1}{2\pi}t^2)\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sim_{t\to 0}-t\frac{\cos\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}=-2\cos\frac{t}{2}\sim-2$$

l'application ϕ se prolonge par continuité en 0. Utilisons le résultat classique suivant : si h est une fonction continue sur $[0,\pi]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}h(t)\sin(nt)\,dt=0\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}h(t)\cos(nt)\,dt=0\,.$$

appliqué à ϕ : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\phi(t)\sin(nt)\,dt=0$. De plus,

$$\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)dt=\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)\left(\frac{1-\cos(nt)}{2}\right)dt$$

par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)dt=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)dt\,.$$

Finalement

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=-\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)dt=-\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi}\right)=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{6}$$

(*Corrigé de Eugène Ndiaye*)

Correction de l'exercice 1811 ▲

Montrons par récurrence que $\forall n\geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. • Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{6}=\frac{1\times(1+3)}{4\times(1+1)(1+2)}$ et la formule proposée est vraie pour $n=1$. Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\&=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\ \text{(par hypothèse de récurrence)}\\&=\frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\&=\frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.}$$

Démonstration directe. Pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),$$

et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}) = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)})\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1812 ▲

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$. Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)(\frac{n}{2}+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

On peut donner plusieurs démonstrations directes.

1ère demonstration. Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ et donc $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2-k^2) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ ce qui s'écrit $(n+1)^2 - 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n$ ou encore $2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$ ou enfin $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2ème demonstration. On écrit

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & S\\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & S \end{array}$$

et en additionnant (verticalement), on obtient $2S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1)$ d'où le résultat. La même démonstration s'écrit avec le symbole sigma :

$$2S = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1).$$

3ème demonstration. On compte le nombre de points d'un rectangle ayant n points de large et $n+1$ points de long. Il y en a $n(n+1)$. Ce rectangle se décompose en deux triangles isocèles contenant chacun $1+2+\dots+n$ points. D'où le résultat.

$$\begin{array}{ccccccccc} * & & * & * & \dots & & & \dots & *\\ * & * & & \ddots & & & & & \vdots\\ * & * & * & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots\\ & & & & & & * & * & *\\ \vdots & & & & & \ddots & & * & *\\ * & \dots & & & \dots & * & * & & * \end{array}$$

4ème démonstration. Dans le triangle de PASCAL, on sait que pour n et p entiers naturels donnés,

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Donc, pour $n \geqslant 2$ (le résultat est clair pour $n = 1$),

$$1+2+...+n = 1+\sum_{k=2}^{n} C_k^1 = 1+\sum_{k=2}^{n}\left(C_{k+1}^2 - C_k^2\right) = 1+(C_{n+1}^2 - 1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{1}{6}(2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$, on a

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n) = \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)(n(2n+1)+2n+1) \\ &= \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1)) = \frac{(n+1)^2((n+1)^2 - (2n+1))}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.}$$

Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$,

$$5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5}((n+1)^5 - 1 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - n) \\ &= \frac{1}{30}(6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1)) \\ &= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4+9n^3+n^2-n) = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{array}}$$

3. Soit p un entier naturel. Pour $k \geqslant 1$,

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^{j}.$$

Donc, pour $n \geqslant 1$:

$$\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} (\sum_{k=1}^{n} k^{j}) = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^{j}) = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)^{p+1} - k^{p+1}) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

D'où la formule de récurrence :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} S_j = (n+1)^{p+1} - 1.}$$

Correction de l'exercice 1813 ▲

1. Pour tout naturel non nul k, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Pour tout naturel non nul k, on a $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)})$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Calcul de $\mathbf{S_1}$. Posons $P_1 = aX^2 + bX + c$. On a

$$P_1(X+1) - P_1(X) = a((X+1)^2 - X^2) + b((X+1) - X) = 2aX + (a+b).$$

Par suite,

$$P_1(X+1) - P_1(X) = X \Leftrightarrow 2a = 1 \text{ et } a+b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftarrow P_1 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} = \frac{X(X-1)}{2}.$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (P_1(k+1) - P_1(k)) = P_1(n+1) - P_1(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Calcul de $\mathbf{S_2}$. Posons $P_2 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$P_2(X+1) - P_2(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b((X+1)^2 - X^2) + c((X+1) - X) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a+b+c.$$

Par suite,

$$P_2(X+1) - P_2(X) = X^2 \Leftrightarrow 3a = 1 \text{ et } 3a+2b = 0 \text{ et } a+b+c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6}$$
$$\Leftarrow P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}.$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_2(k+1) - P_2(k)) = P_2(n+1) - P_2(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Calcul de S_3. Posons $P_3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On a

$$\begin{aligned}P_3(X+1) - P_3(X) &= a((X+1)^4 - X^4) + b((X+1)^3 - X^3) + c((X+1)^2 - X^2) + d((X+1) - X)\\ &= 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a+b+c+d.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}P_3(X+1) - P_3(X) = X^3 &\Leftrightarrow 4a = 1,\ 6a+3b = 0,\ 4a+3b+2c = 0 \text{ et } a+b+c+d = 0\\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4} \text{ et } d = 0\\ &\Leftarrow P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} = \frac{X^2(X-1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}(P_3(k+1) - P_3(k)) = P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- Calcul de S_4. Posons $P_4 = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. On a

$$\begin{aligned}P_4(X+1) - P_4(X) &= a((X+1)^5 - X^5) + b((X+1)^4 - X^4) + c((X+1)^3 - X^3) + d((X+1)^2 - X^2)\\ &\quad + e((X+1) - X)\\ &= 5aX^4 + (10a+4b)X^3 + (10a+6b+3c)X^2 + (5a+4b+3c+2d)X + a+b+c+d+e.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}P_4(X+1) - P_4(X) = X^4 &\Leftrightarrow 5a = 1,\ 10a+4b = 0,\ 10a+6b+3c = 0,\ 5a+4b+3c+2d = 0\\ &\quad \text{et } a+b+c+d+e = 0\\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{3},\ d = 0 \text{ et } e = -\frac{1}{30}\\ &\Leftarrow P_4 = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30} = \frac{X(X-1)(6X^3 - 9X^2 + X + 1)}{30}.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=1}^{n}(P_4(k+1) - P_4(k)) = P_4(n+1) - P_4(1) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall n \in \mathbb{N}^*,\\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\\ \text{et } \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{array}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On rappelle que

$$\boxed{\forall (a,b) \in]0, +\infty[^2,\ \arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}.}$$

Soit alors k un entier naturel non nul. On a

$$\arctan \frac{1}{k^2+k+1} = \arctan \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan k.$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=1}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan k) = \arctan(n+1) - \arctan 1 = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour k entier naturel non nul donné, on a

$$\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1).$$

   Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} \arctan(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \arctan(k-1) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \arctan k - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k = \arctan(n+1) + \arctan n - \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= \arctan(n+1) + \arctan n - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1814 ▲

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Parmi les n^2 couples (i, j) tels que $1 \leqslant i, j \leqslant n$, il y en a n tels que $i = j$ et donc $n^2 - n = n(n-1)$ tels que $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et $i \neq j$. Comme il y a autant de couples (i, j) tels que $i > j$ que de couples (i, j) tels que $i < j$, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Finalement,

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} j \right) = \sum_{j=1}^{n} nj = n \sum_{j=1}^{n} j = n.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

   Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} j &= \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^{n} (j-1)j = \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j \\ &= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{n(n+1)^2}{6}.\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} ij = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} i \right)\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} j \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n}h^2k^2=\sum_{h=1}^{n}(h^2\sum_{k=1}^{n}k^2)=(\sum_{k=1}^{n}k^2)(\sum_{h=1}^{n}h^2)=\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2.$$

Comme d'autre part, $\sum_{h=1}^{n}h^4=\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, on a

$$\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n}h^4=\sum_{h=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}h^4)=\sum_{h=1}^{n}nh^4=n\sum_{h=1}^{n}h^4=\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

et bien sûr $\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n}k^4=\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Par suite,

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{1}{n^5}\left(2.5\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{30}-18\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}\right)\\&=\frac{1}{n^5}(2n^6-2n^6+n^5(\frac{15}{3}-\frac{12}{2})+\text{termes de degré au plus 4})\\&=-1+\text{termes tendant vers 0}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-1.$$

Correction de l'exercice 1815 ▲

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, n réels strictement positifs.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{a_i}{a_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i})=n+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i})$$

Pour $x>0$, posons alors $f(x)=x+\frac{1}{x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. f est donc strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. f admet ainsi un minimum en 1. Par suite,

$$\forall x>0,\ f(x)\geqslant f(1)=1+\frac{1}{1}=2.$$

(**Remarque.** L'inégalité entre moyenne géométrique et arithmétique permet aussi d'obtenir le résultat :

$$\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})\geqslant\sqrt{x.\frac{1}{x}}=1.)$$

On en déduit alors que

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\geqslant n+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2=n+2\frac{n^2-n}{2}=n^2.$$

Correction de l'exercice 1816 ▲

Soit r la raison de la suite u. Pour tout entier naturel k, on a

$$\frac{r}{u_ku_{k+1}}=\frac{u_{k+1}-u_k}{u_ku_{k+1}}=\frac{1}{u_k}-\frac{1}{u_{k+1}}.$$

En sommant ces égalités, on obtient :

$$r\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_ku_{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u_k}-\frac{1}{u_{k+1}}\right)=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{u_{n+1}-u_0}{u_0u_{n+1}}=\frac{(n+1)r}{u_0u_{n+1}}.$$

Si $r\neq 0$, on obtient $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_ku_{k+1}}=\frac{(n+1)}{u_0u_{n+1}}$, et si $r=0$ (et $u_0\neq 0$), u est constante et le résultat est immédiat.

Correction de l'exercice 1817 ▲

Soit k un entier naturel non nul. On sait que $\sum_{i=1}^{k} i^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Déterminons alors trois réels a, b et c tels que, pour entier naturel non nul k,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{2k+1}\ (*).$$

Pour k entier naturel non nul donné,

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{2k+1}=\frac{a(k+1)(2k+1)+bk(2k+1)+ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)}=\frac{(2a+2b+c)k^2+(3a+b+c)k+a}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Par suite,

$$(*)\Leftarrow\left\{\begin{array}{l}2a+2b+c=0\\3a+b+c=0\\a=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=6\\b=6\\c=-24\end{array}\right.,$$

et donc,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}=6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right).$$

Ensuite, d'après l'exercice 1643, quand n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$ puis

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=H_{n+1}-1=-1+\ln(n+1)+\gamma+o(1)=\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\gamma-1+o(1)=\ln n+\gamma-1+o(1).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}&=-1+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=-1+H_{2n+1}-\frac{1}{2}H_n\\&=\ln(2n+1)+\gamma-\frac{1}{2}(\ln n+\gamma)-1+o(1)=\ln 2+\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\gamma-\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\gamma-1+o(1)\\&=\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1+o(1)\end{aligned}$$

Finalement, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}=6\left(\ln n+\gamma+\ln n+\gamma-1-4\left(\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1\right)\right)=6(3-4\ln 2)+o(1).$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}=6(3-4\ln 2).}$$

Correction de l'exercice 1818 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\sqrt{u_n}-\frac{1}{n}\right)^2$ et donc $0 \leqslant \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série terme général $\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^2}\right)$ converge, la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Correction de l'exercice 1819 ▲

Pour $n \geqslant 2$, $v_n = \frac{u_n+1-1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} = \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_{n-1})} - \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$ et d'autre part $v_1 = 1-\frac{1}{1+u_1}$. Donc, pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 1-\frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} \text{ (somme télescopique).}$$

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $0 < u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1+u_n)$. Donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge ou encore la suite $\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain réel ℓ. Mais alors la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel strictement positif $P = e^{\ell}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $1-\frac{1}{P}$.
Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général $\ln(1+u_n)$ diverge vers $+\infty$ et il en est de même que la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Correction de l'exercice 1820 ▲

Etudions tout d'abord la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$.
Si $\frac{u_n}{S_n}$ tend vers 0 alors

$$0 < \frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(1-\frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n)-\ln(S_{n-1}).$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On en déduit que la série de terme général $\ln(S_n)-\ln(S_{n-1})$ est divergente car $\sum_{k=1}^{n} \ln(S_k)-\ln(S_{k-1}) = \ln(S_n)-\ln(S_0) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge ce qui est aussi le cas si $\frac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0.
Donc, dans tous les cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge.
Si $\alpha \leqslant 1$, puisque S_n tend vers $+\infty$, à partir d'un certain rang on a $S_n^{\alpha} \leqslant S_n$ et donc $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}} \geqslant \frac{u_n}{S_n}$. Donc, si $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ diverge.
Si $\alpha > 1$, puisque la suite (S_n) est croissante,

$$0 < \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} = \frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{\alpha}} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^{\alpha}} \leqslant \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right),$$

qui est le terme général d'une série télescopique convergente puisque $\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Dans ce cas, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{u_n}{S_n^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Correction de l'exercice 1821 ▲

Pour tout entier naturel non nul n, $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p > 2$.

Correction de l'exercice 1822 ▲

(On applique la règle de RAABE-DUHAMEL qui n'est pas un résultat de cours.) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{a+n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{a+1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et « on sait » qu'il existe un réel strictement positif K tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^a}$.

Correction de l'exercice 1956 ▲

La suite $\left((-1)^n\frac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^n\frac{1}{3n+1}$, $n\geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,dt = \int_0^1 \frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt.$$

Mais $\left|(-1)^n\int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{3n+3}\,dt = \frac{1}{3n+4}$. On en déduit que $(-1)^n\int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Calculons cette dernière intégrale.

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = \frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.}$$

Correction de l'exercice 1833 ▲

1.
2.
3. Soit (r_n) une énumération de Q. On pose $f(x) = \sum_{r_n<x}\frac{1}{(n+1)^2}$. f est strictement croissante car pour $x<y$ il existe $n\in|||$ tel que $x<r_n<y$ donc $f(y)-f(x)\geqslant\frac{1}{(n+1)^2}$. Si $x\in\mathbb{Q}$, $x=r_k$ alors $f(x^+)-f(x^-)\geqslant\frac{1}{(k+1)^2}$ d'où f est discontinue en x. Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $n\in|||$ alors il existe un voisinage de x ne contenant aucun r_i, $i\leqslant n$ d'où
$f(x^+)-f(x^-)\leqslant\sum_{i>n}\frac{1}{(i+1)^2}$ et f est continue en x.

Correction de l'exercice 1834 ▲

Soit $[a,b]$ de longueur supérieure ou égale à $2\zeta(2)$ et $F_n = [a,b]\setminus(I_1\cup\cdots\cup I_n)$. Alors (F_n) vérifie le théorème des fermés emboités dans un compact.

Correction de l'exercice 1835 ▲

1. Regroupement à $i+j$ constant $\Rightarrow$ CV ssi $\alpha>2$.

2. Pour $\alpha \geqslant 1$ on a par convexité : $2^{1-\alpha}(i+j)^{\alpha} \leqslant i^{\alpha}+j^{\alpha} \leqslant (i+j)^{\alpha}$ donc il y a convergence ssi $\alpha > 2$.
3. Il y a une infinité de termes supérieurs à $1/4$.
4. $\frac{1}{a^p+b^q} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a^p}\sqrt{b^q}} \Rightarrow$ sommable.

Correction de l'exercice 1836 ▲

$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+1}{k!} = 2e.$

Correction de l'exercice 1837 ▲

$-\frac{7}{8}\zeta(3).$

Correction de l'exercice 1838 ▲

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n-1}$ diverge.
2. $\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \frac{1}{4n^2}$ si $n \neq 0$, $-\frac{\pi^2}{6}$ si $n=0$. $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = -\frac{\pi^2}{8} = -\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Correction de l'exercice 1839 ▲

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{(n,p)\in|||}^{+\infty} x^{(p+1)(2n+1)} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{p+1}}{1-x^{2p+2}}.$

Correction de l'exercice 1841 ▲

1. $|t| < 1$.
2. $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}t^{kn}$ et on peut échanger les deux sommes car il y a convergence absolue.
3. On suppose $t \in]0,1[$. $\frac{d}{dx}\left(\frac{t^x}{1-t^x}\right) = \frac{t^x \ln t}{(1-t^x)^2} < 0$ donc le critère des séries alternées s'applique, le reste est majoré en valeur absolue par le premier terme du reste. $0 \leqslant \frac{t^k(1-t)}{1-t^k} = \frac{t}{1+\frac{1}{t}+\dots+\frac{1}{t^{k-1}}} \leqslant \frac{1}{k}$ donc le terme général converge uniformément vers 0.

   Par interversion de limite (puisqu'il y a convergence uniforme) on obtient $\lim_{t\to 1^-}(1-t)S(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.
4. $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}t^{kn} = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{kn=p}(-1)^{k-1}t^p = \sum_{p=1}^{\infty}\sigma(p)t^p$
   avec $\sigma(p) =$ (nombre de diviseurs impairs de p) $-$ (nombre de diviseurs pairs de p) $= \sigma_i(p) - \sigma_p(p)$. Si $p = 2^{\alpha}q$ avec q impair alors $\sigma_p(p) = \alpha\sigma_i(p) = \alpha\sigma_i(q)$ donc $\sigma(p) > 0$ ssi p est impair *(très joli exercice)*.

Correction de l'exercice 1842 ▲

1. Il y a convergence si $|z| < 1$. On a alors $f(z) = \sum_{(n,p)\in|||^2} z^{anp+bn+cp}$. Il y a aussi convergence pour $|z| > 1$ lorsque $a > b$ et on a dans ce cas : $f(z) = \sum_{(n,p)\in|||\times|||^*} z^{-anp+bn-cp}$ (non symétrique en b,c).
2. $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} d_n z^n$ avec $d_n =$ nombre de diviseurs de n dans $[[1,n-1]]$.

Correction de l'exercice 1843 ▲

$A = \zeta(2)^2, B = \zeta(2)\zeta(4), C = A/\zeta(4) = 5/2.$

Correction de l'exercice 1844 ▲

$\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(p/q).$

Correction de l'exercice 1847 ▲

La série converge pour tout $x \notin \{-2,-3,\dots\}$ car le critère des séries alternées s'applique à partir d'un certain rang (fonction de x). Il en va de même pour toutes les séries obtenues par dérivations successives terme à terme, et ces séries convergent localement uniformément (le reste d'une série vérifiant le CSA est majoré en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme figurant dans le reste) donc f est $\mathscr{C}^\infty$.
Pour $|x| < 2$ on a

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{-x}{k}\right)^n = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{k^{n+1}}x^n = (1-\ln 2) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-(1-2^{-n})\zeta(n+1))x^n.$$

Correction de l'exercice 1848 ▲

$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \Rightarrow \cos z \in [-1,1]$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1849 ▲

Mettre $1+\frac{z}{n}$ sous forme trigonométrique.

Correction de l'exercice 1850 ▲

Développement en série.

Correction de l'exercice 1851 ▲

$\left|\frac{e^z-1}{z}\right|^2 = \frac{e^{2x}+1-2e^x\cos y}{x^2+y^2}$. Après simplifications, on est ramené à prouver que $x^2(1-\cos y) \leqslant y^2(\operatorname{ch} x - 1)$, ce qui est vrai car on peut caser $\frac{1}{2}x^2y^2$ entre les deux. Il y a égalité si et seulement si $y = 0$.

Correction de l'exercice 1853 ▲

$e^{x+iy} = x+iy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y/\tan y \\ e^{-y/\tan y} = \sin y/y. \end{cases}$ Au voisinage de $2k\pi^+$, $e^{-y/\tan y} < \sin y/y$ (point plat) et au voisinage de $(2k+1)\pi^-$, $e^{-y/\tan y} > \sin y/y$ (limite infinie).

Correction de l'exercice 1854 ▲

1. $z \equiv \pm i \ln(2+\sqrt{3}) (\operatorname{mod} 2\pi)$.
2. $z \equiv i\pi (\operatorname{mod} 2i\pi)$.
3. $z \equiv 0 (\operatorname{mod} 2\pi)$ ou $z \equiv 0 (\operatorname{mod} 2j\pi)$ ou $z \equiv 0 (\operatorname{mod} 2j^2\pi)$.
4. $\Leftrightarrow 6e^{2iz} - (7+5i)e^{iz} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{iz} = 1+i & : \quad z \equiv \pi/4 - i\ln\sqrt{2} (\operatorname{mod} 2\pi) \\ e^{iz} = (1-i)/6 : & z \equiv -\pi/4 - i\ln(\sqrt{2}/6)(\operatorname{mod} 2\pi). \end{cases}$

Correction de l'exercice 1855 ▲

$|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x \Rightarrow \sup = \operatorname{ch} 1$.
$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$. À x fixé, le module augmente avec $|y|$, donc le maximum est atteint au bord du disque.
$\varphi(\theta) = \sin^2\cos\theta + \operatorname{sh}^2\sin\theta \Rightarrow \varphi'(\theta) = \sin 2\theta\left(\frac{\operatorname{sh}(2\sin\theta)}{2\sin\theta} - \frac{\sin(2\cos\theta)}{2\cos\theta}\right) \Rightarrow \sup = \operatorname{sh} 1$.

Correction de l'exercice 1857 ▲

Si x est vecteur propre de M il l'est aussi de $\exp(M)$ donc $x = ke_1$ et la valeur propre associée est $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $e^\alpha = 2i$ ($\alpha = \ln 2 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$). On a donc $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\exp(M) = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \beta \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$ d'où $\beta = \frac{1-i}{2}$.

Correction de l'exercice 1862 ▲

1. $\sim -\frac{e}{2n} \Rightarrow$ DV.
2. $\sim \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}} e^{n(\alpha-2)} \Rightarrow$ CV ssi $\alpha < 2$.
3. $\sim -\frac{3}{n^2} \Rightarrow$ CV.
4. $\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CV.
5. $\sim \sqrt{\frac{2}{n^3}} \Rightarrow$ CV.
6. cv ssi $|a| \neq 1$.
7. Série alternée $\Rightarrow$ CV.
8. Série alternée $\Rightarrow$ CV.
9. Harmonique + alternée $\Rightarrow$ DV.
10. d'Alembert $\Rightarrow$ CV.
11. $\leqslant \frac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow$ CV.
12. $= \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ CV.
13. Décomposition en 3 séries alternées $\Rightarrow$ CV.
14. $= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ DV.
15. Regroupement de termes $\Rightarrow$ DV.
16. Regroupement par paquets + CSI $\Rightarrow$ CV.
17. Terme général ne tend pas vers zéro, DV.
18. $= \frac{1}{n^{\ln\ln n}} \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 1863 ▲

$P(n) = n^3 + \frac{3}{4}n + C$.

Correction de l'exercice 1864 ▲

$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ converge.

Correction de l'exercice 1865 ▲

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$, il y a convergence ssi $\alpha > \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 1866 ▲

Effectuer un développement asymptotique pour les deux premières. Elles convergent si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. La troisième diverge par comparaison série-intégrale.

Correction de l'exercice 1867 ▲

$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n-1}} \to ab$ et $\frac{u_{2n}}{u_{2n-2}} \to ab$ (lorsque $n \to \infty$) donc il y a convergence si $|ab| < 1$.

Correction de l'exercice 1869 ▲

$n = 21$, $S \approx 0.65314389$.

Correction de l'exercice 1870 ▲

$1 \Rightarrow 2$ par comparaison série-intégrale. Contre-exemple pour $(2) \not\Rightarrow (1)$: $u_n = e^{(n+1)^2} - e^{n^2}$, $S_n = e^{(n+1)^2} - 1$, $f(t) = \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$.

Correction de l'exercice 1871 ▲

$\frac{n^2}{(n^2+1)^2} - \frac{1}{n^2-1} = -\frac{3n^2+1}{(n^2+1)^2(n^2-1)} \geqslant -\frac{4}{n^4}$ pour $n \geqslant 3$.

Donc $S = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{(n^2+1)^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} + R_N$ avec $-\frac{4}{3N^3} \leqslant R_N \leqslant 0$ et $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{N+\frac{1}{2}}{N(N+1)}$.

Pour $N = 25$ on obtient : $0.76981 < S < 0.76990$.

Correction de l'exercice 1873 ▲

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $n^2 u_n \to \infty$ (lorsque $n \to \infty$) donc $u_n v_n \sim 1/n^2$. Alors les suites $(\sqrt{u_n})$ et $(\sqrt{v_n})$ sont de carrés sommables tandis que la suite $(\sqrt{u_n v_n})$ n'est pas sommable, c'est absurde.

Si $\sum u_n$ diverge on ne peut rien dire : avec $u_n = 1$ on a $\sum v_n$ convergente tandis qu'avec $u_n = \frac{1}{n}$ on a $\sum v_n$ divergente.

Correction de l'exercice 1874 ▲

1. $u_1 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_n)} \leqslant 1$.
2. $\ln\big((1+a_1)\dots(1+a_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \to +\infty \Rightarrow \sum u_n = 1$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 1875 ▲

Regroupement de termes par valeur constante de $p_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{10^p - 10^{p-1}}{a^p} = \frac{9}{a-10}$.

Correction de l'exercice 1877 ▲

1.
2. $|v_n| = O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 1878 ▲

Série alternée.

Correction de l'exercice 1879 ▲

1. $\frac{3}{4}$.
2. $\frac{1}{4}$.
3. $S_p - (p+1)S_{p+1} = S_p - \frac{1}{(p+1)!} \Rightarrow S_p = \frac{1}{pp!}$.
4. $\frac{23}{144}$.
5. $\ln 3$.
6. $-\ln 2$.
7. $\ln\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.
8. $\frac{1}{\alpha} - 2\mathrm{cotan}(2\alpha)$.
9. $109 - 40e$.
10. $\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$ pour $|x| < 1$ par récurrence.

11. $\frac{x}{(1-x)^2}$ si $|x|<1$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x|>1$.

12. $S_n = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{r}{qn+r}-\frac{r}{qn+r+1}$.
$S_n = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\dots+\frac{1}{qn+n}-\frac{1}{q+1}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{(N+1)n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}\right) = \ln n$.

Correction de l'exercice 1880 ▲

Si $n+1$ n'est pas un carré alors $u_n = 0$ donc $\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{k=2}^{\infty}u_{k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 1881 ▲

1. $y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$, $y = e^{-x}\sin x + e^{-2x}(cx+d)$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n e^{-n\pi}(e^{\pi}+1)}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty}u_n = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1882 ▲

$\frac{\pi^2}{3}-3$.

Correction de l'exercice 1883 ▲

$\frac{1}{1^2+2^2+\dots+k^2} = \frac{6}{k}+\frac{6}{k+1}-\frac{24}{2k+1} \Rightarrow s_n = 18-24\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{6}{n+1} \to 18-24\ln 2$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l'exercice 1884 ▲

$\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-2,\ b=1,\ S=-\ln 2.$

Correction de l'exercice 1885 ▲

$\tan s_n = n+1$ par récurrence et $s_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+k+1} \leqslant 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 2$.

Correction de l'exercice 1886 ▲

1. $\sim \frac{a}{n^2}$.
2. $S(a) \geqslant \sum_{k=0}^{n}\arctan(k+a)-\arctan k \to \frac{\pi}{2}+\arctan 1+\arctan\frac{1}{2}+\dots+\arctan\frac{1}{n} \Rightarrow S(a)\to+\infty$ lorsque $a\to+\infty$.

Correction de l'exercice 1887 ▲

Le déport maximal entre la première pièce et la dernière pour une pile de n pièces est $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2(n-1)}$ (en diamètre d'une pièce). Il dépasse 1 pour $n>4$.

Correction de l'exercice 1888 ▲

1. $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.
2. $\ln(\ln n)$.

Correction de l'exercice 1889 ▲

$u_n \sim n\ln^2 n \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 1890 ▲

2997.

Correction de l'exercice 1891 ▲

$\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Correction de l'exercice 1893 ▲

$T_{n+1}-T_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}-\int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t}<0$

$S_{n+1}-S_n=\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\int_{t=n}^{n+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt>0.$

Correction de l'exercice 1894 ▲

$\frac{u_{n,k}}{k}=\frac{n}{k}-\left[\frac{n}{k}\right]$, donc $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{n,k}}{k}$ est une somme de Riemann pour l'intégrale $I=\int_{t=0}^{1}\left(\frac{1}{t}-\left[\frac{1}{t}\right]\right)dt$. La fonction $\varphi: t\mapsto\frac{1}{t}-\left[\frac{1}{t}\right]$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$, donc $v_n\to I$ lorsque $n\to\infty$.

Calcul de I : $I_n=\int_{t=1/n}^{1}\left(\frac{1}{t}-\left[\frac{1}{t}\right]\right)dt=\ln n-\sum_{k=1}^{n}\int_{t=\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}k\,dt=\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\to 1-\gamma=I$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l'exercice 1895 ▲

1. Comparaison série-intégrale : $u_n\sim\frac{\ln^2 n}{2}$.
2. Comparaison série-intégrale encore (v_n est la somme des aires entre les rectangles aux points entiers et la courbe de $t\to\ln(t)/t$).
3. $v_n-\ell=-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_{t=k}^{k+1}\frac{\ln t}{t}\,dt-\frac{\ln(k+1)}{k+1}\right)=-\sum_{k=n}^{\infty}w_k$ avec $w_k\sim\frac{\ln k}{2k^2}$ donc $v_n-\ell\sim-\int_{t=n}^{+\infty}\frac{\ln t}{2t^2}\,dt\sim-\frac{\ln n}{2n}$.

Correction de l'exercice 1896 ▲

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2-k^2}=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{\ln n}{2n}$.

Correction de l'exercice 1897 ▲

1.
2.
3.
4.
5. $S_n+\frac{1}{\ln(n+1)}\leqslant S\leqslant S_n+\frac{1}{\ln n}$. Pour $n=60$: $2.06857<S<2.06956$.

Correction de l'exercice 1898 ▲

La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^x}$ étant décroissante sur l'intervalle $[n,n+1]$, $0<\dfrac{1}{t^x}\leqslant\dfrac{1}{n^x}$. Donc,

$$\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\quad\leqslant\quad\int_n^{n+1}\frac{dt}{n^x}=\frac{1}{n^x}\quad\text{par positivité de l'intégrale}$$

puis

$$\int_1^{N+1}\frac{dt}{t^x}=\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}\quad\text{par la relation de Chasles.}$$

De même sur $[n-1,n]$, $\frac{1}{t^x} \geqslant \frac{1}{n^x} > 0$ et

$$\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \geqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}$$

$$\int_{1}^{N} \frac{dt}{t^x} = \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \quad \text{par la relation de Chasles.}$$

Finalement

$$1 + \int_{1}^{N} \frac{dt}{t^x} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}.$$

$$\text{Donc, on a :} \qquad \int_{1}^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_{1}^{N} \frac{dt}{t^x}. \tag{28}$$

Calculons dans un premier temps, $\int_1^N \frac{dt}{t^x}$:

$$\int_{1}^{N} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^N = \frac{N^{1-x}-1}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{x-1}$$

avec la même limite pour $\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x}$. Ainsi on a montré que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^x}$, série de Riemann avec $x > 1$, est convergente. On déduit alors de (28), en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\begin{array}{lcccc} & \frac{1}{x-1} & \leqslant & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} & \leqslant & 1+\frac{1}{x-1} \\ \text{donc} & \frac{x-1}{x-1} & \leqslant & (x-1)\zeta(x) & \leqslant & (x-1)\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \\ \text{puis} & 1 & \leqslant & (x-1)\zeta(x) & \leqslant & x. \end{array}$$

D'où, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1.$$

(*Corrigé d'Antoine Poulain*)

Correction de l'exercice 1899 ▲

Si $u_n \to 0$, alors $v_n \sim u_n$; sinon, $v_n \not\to 0$.

Correction de l'exercice 1900 ▲

1.
2. $\frac{r}{(1-r)^2}$.

Correction de l'exercice 1901 ▲

On remarque déjà que $\sum u_i$ diverge car $u_n \sim \frac{U_n}{n\alpha} \geqslant \frac{U_1}{n\alpha}$. On calcule $\sum_{k=0}^n k u_k$ par parties :

$$\sum_{k=0}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k-1}) = nU_n - \sum_{k=0}^{n} U_k$$

Comme $U_n \sim \alpha n u_n$, terme général strictement positif d'une série divergente, on a $\sum_{k=0}^n U_k \sim \alpha \sum_{k=0}^n k u_k$ d'où : $(1+\alpha)\sum_{k=0}^n k u_k \sim nU_n$ et lorsque $n\to\infty$:

$$\frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=0}^{n} k u_k \sim \frac{nU_n}{(1+\alpha)n^2 u_n} \to \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Correction de l'exercice 1902 ▲

$S_n = \sum_{k=0}^{n} k u_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} - S_0 + \frac{S_n}{n}$.

Correction de l'exercice 1903 ▲

1.
2.
3. $kr^k = k(u_k - u_{k+1})$ avec $u_k = \frac{r^k}{1-r}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}$.

   De même, $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} kr^k = \frac{(n-1)r^n}{1-r} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r^k}{1-r} = \frac{nr^n}{1-r} + \frac{r^{n+1}}{(1-r)^2}$.

   $k^2 r^k = k(S_k - S_{k+1})$ et (S_k) décroît d'où $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k = \sum_{k=1}^{\infty} S(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{kr^k}{1-r} + \frac{r^{k+1}}{(1-r)^2} \right) = \frac{r+r^2}{(1-r)^3}$.

Correction de l'exercice 1904 ▲

1.
2. $p_n = \frac{u_0}{S_n} \to 0$ donc la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

Correction de l'exercice 1905 ▲

Méthode des rectangles : $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}} \geqslant \int_{t=a_{n+1}}^{a_0} \frac{dt}{t} \to +\infty$ lorsque $k \to \infty$.
Si $a_k \sim a_{k+1}$ la série donnée diverge donc. Sinon, elle diverge aussi car son terme général ne tend pas vers 0.

Correction de l'exercice 1906 ▲

$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{2N-1} u_k \sum_{k/2<n\leqslant k} \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N-1} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant 2 \sum_{k=1}^{2N-1} u_k$.

Correction de l'exercice 1907 ▲

$\sum_{k=1}^{n} v_k + n v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge aussi (SP majorées) et $n v_n \to \ell \Rightarrow \ell = 0$.
Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge, alors $n v_n \to +\infty$, contradiction.

Correction de l'exercice 1908 ▲

$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k \sum_{p=k}^{n} \frac{1}{p^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k u_k}{k-1} \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 1909 ▲

$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Correction de l'exercice 1910 ▲

Pour $n > 2$, $u_{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $u_{n+2} > \frac{1}{(n+1)e^{1/n}} \sim \frac{1}{n}$ donc la série diverge.

Correction de l'exercice 1913 ▲

1.
2. $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(1 + \frac{a-b+1}{n+b-1}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } a-b+1 > 0, v_n \to +\infty \\ \text{si } a-b+1 = 0, v_n = \text{cste} \\ \text{si } a-b+1 < 0, v_n \to 0. \end{cases}$

3. $(n+b)u_{n+1}-(n+a)u_n=0 \Rightarrow (n+b)u_{n+1}+(b-a-1)\sum_{k=1}^{n}u_k-au_0=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}u_k=\frac{(b-1)u_0}{b-a-1}$.

Correction de l'exercice 1914 ▲

La suite (u_n) est croissante donc tend vers $\ell \in]0,+\infty]$. On a ℓ fini si et seulement si la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)=\sum\frac{1}{n^a u_n}$ est convergente, soit si et seulement si $a>1$.

Pour $a<1$ on a $u_{n+1}^2=u_n^2+\frac{2}{n^a}+o\left(\frac{2}{n^a}\right)$ donc $u_{n+1}^2-u_n^2\sim\frac{2}{n^a}$ et $u_n\sim\sqrt{\frac{2n^{1-a}}{1-a}}$ (sommation des relations de comparaison).

Pour $a=1$ on a de même $u_n\sim\sqrt{2\ln n}$.

Correction de l'exercice 1915 ▲

$\alpha>1\Rightarrow\sum u_n$ cv et vaut $\zeta(\alpha)^2$.

$\alpha<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{2N}u_n\geqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^\alpha}\Rightarrow\sum u_n$ dv.

Correction de l'exercice 1917 ▲

$\frac{a}{(1-a)^2}$ et $\frac{a+a^2}{(1-a)^3}$.

Correction de l'exercice 1919 ▲

1. Césaro.
2. $v_0+v_1+\dots+v_n=2(u_0+u_1+\dots+u_n)-v_n$.

Correction de l'exercice 1920 ▲

$|a_n|\leqslant M\Rightarrow\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}\right|\leqslant M\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}\leqslant M\int_{t=1}^{\infty}\frac{dt}{t^p}=\frac{M}{p-1}\Rightarrow a_1=0$.

Correction de l'exercice 1921 ▲

Démonstration pour x_1 : $\sum x_n=0$, $\sum x_{2n}=0\Rightarrow\sum_{n\text{ impair}}x_n=0$. On retire les multiples impairs de 3 ($\sum x_{3n}-\sum x_{6n}=0)\Rightarrow\sum_{n\not\equiv0[2];n\not\equiv0[3]}x_n=0$. On retire les multiples restants de $5,7,\dots$ On obtient ainsi une suite $(s_p)_{p\text{ premier}}$ nulle qui converge vers x_1, donc $x_1=0$.

Peut-on se passer de la convergence absolue ?

Correction de l'exercice 1922 ▲

1. Récurrence sur p.
2. Transformation d'Abel et interversion de sommations : $\sum_{n=0}^{p}v_n=\sum_{k=0}^{p}\frac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p}\sum_{n=0}^{k}u_n$.
   Théorème de Césaro $\Rightarrow\sum v_n=2\sum u_n$.

Correction de l'exercice 1923 ▲

1. $nu_{2n}\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n}u_k$, $nu_{2n+1}\leqslant\sum_{k=n+2}^{2n+1}u_k$.
2. $\varepsilon>0$: Pour k suffisament grand, $u_k\leqslant\frac{\varepsilon}{k}$, donc $u_k\geqslant\frac{1}{n}\Rightarrow k\leqslant n\varepsilon$. Alors $\sum_{u_k\geqslant1/n}\frac{1}{u_k}\leqslant n^2\varepsilon+Kn$.

Correction de l'exercice 1924 ▲

1. TAF : $\exists\, x_n\in[R_{n+1},R_n]$ tel que $R_n^{1-p}-R_{n+1}^{1-p}=(1-p)\frac{R_n-R_{n+1}}{x_n^p}\geqslant(1-p)\frac{a_n}{R_n^p}$. Donc, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{R_n^p}\leqslant\frac{A^{1-p}}{1-p}$.
2. C'est $\frac{1}{1-p}$: Pour $a_n=k^n$, $A^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{R_n^p}=\frac{1-k}{1-k^{1-p}}\to\frac{1}{1-p}$ lorsque $k\to1^-$.

Correction de l'exercice 1925 ▲

(u_n) est croissante. Si la suite (u_n) converge alors $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \leqslant M(u_{n+1} - u_n)$ donc les sommes partielles de $\sum a_n$ sont bornées.

Si $\sum a_n$ converge, alors $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leqslant \frac{a_n}{u_0}$ donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Correction de l'exercice 1930 ▲

Transformaton d'Abel.

Correction de l'exercice 1931 ▲

Transformation d'Abel + découpage, $v_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 1932 ▲

$|u_n| + |v_n| \leqslant (|u_1| + |v_1|) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)$ et le produit infini est trivialement convergent.

Correction de l'exercice 1933 ▲

1.
2. (a) $1 + S_N \leqslant P_N$ n'est plus triviale mais reste vraie par récurrence (la différence est une fonction décroissante de a_1).

   (b)
3. La suite $(P_N e^{-S_N})$ est positive décroissante donc converge, ce qui entraîne la convergence de (P_N). On a $P_N \to 0$ ssi $P_N e^{-S_N} \to 0$ (lorsque $N \to \infty$) soit ssi la série de terme général $\ln(1 + a_n) - a_n \sim -\frac{a_n^2}{2}$ diverge.
4. (a) Démontrer l'inégalité en développant les deux membres. Sachant que la suite (P_N) est bornée on en déduit qu'elle est de Cauchy donc converge.

   (b)

Correction de l'exercice 1934 ▲

On a $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}}$. Soit $a \in [0,1[$ et M_a, m_a le maximum et le minimum de f sur $[0,a]$. D'après la relation précédente, $m_a \geqslant m_{a^2}$ et $M_a \leqslant M_{a^2}$ donc en fait $m_a = m_{a^2}$ et $M_a = M_{a^2}$.

On en déduit $f([0,a]) = f([0,a^2]) = \cdots = f([0,a^{2^k}]) = \cdots = \{f(0)\}$. Donc f est constante et réciproquement les fonctions constantes conviennent.

Correction de l'exercice 1935 ▲

Soit $(p_0, p_1, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers et $S_k = \sum_{P(n) \leqslant k} \frac{1}{n}$. On a $S_k = S_{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^i} = \frac{p_k}{p_k - 1} S_{k-1}$, ce qui prouve que S_k est fini. La série demandée est $\frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k - S_{k-1}}{p_k} = \frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{p_k^2}$.

Montrons que $S_k \leqslant 2\sqrt{p_k}$, ceci prouvera la convergence. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$, et si c'est vrai pour $k-1$ avec $k \geqslant 2$ alors on obtient $S_k \leqslant 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k p_{k-1}}{(p_k-1)^2}} \leqslant 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k(p_k-2)}{(p_k-1)^2}} \leqslant 2\sqrt{p_k}$.

Remarque : on a en réalité $S_k \sim e^{\gamma} \ln(p_k)$ où γ est la constante d'Euler (formule de Mertens).

Correction de l'exercice 1936 ▲

1. Soit $n \geqslant 3$.

$$\sum_{i=3}^{n} i = \frac{(3+n)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(1+(2n-1))n}{2} = n^2$$

et

$$\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7) = \frac{(19+3n+10)(n-2)}{2} = \frac{1}{2}(3n+29)(n-2) = \frac{1}{2}(3n^2+23n-58).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 1,\underbrace{11...1}_{n}$. On a

$$u_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k} = 1+\frac{1}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = 1+\frac{1}{9}(1-\frac{1}{10^n}) = \frac{10}{9}-\frac{1}{9.10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{9.10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers $\frac{10}{9}$.

$$\boxed{1,11111.... = \frac{10}{9}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$. On a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k} = \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = 1-\frac{1}{10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers 1.

$$\boxed{0,9999.... = 1.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1-(-1)^n) = \left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } n \text{ est pair}\\ 1 \text{ si } n \text{ est impair}\end{array}\right..$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = 1.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2} &= \text{Re}(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\pi/2})(= \text{Re}(\sum_{k=0}^{n}i^k))\\ &= \text{Re}(\frac{1-e^{(n+1)i\pi/2}}{1-e^{i\pi/2}}) = \text{Re}(\frac{e^{i(n+1)\pi/4}}{e^{i\pi/4}}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{-2i\sin\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}+\frac{1}{2} = \left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } n \in 4\mathbb{N}\cup(4\mathbb{N}+1)\\ 0 \text{ si } n \in (4\mathbb{N}+2)\cup(4\mathbb{N}+3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

En fait, on peut constater beaucoup plus simplement que $\cos 0+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\pi+\cos\frac{3\pi}{2} = 1+0-1+0 = 0$, on a immédiatement $S_{4n} = 1$, $S_{4n+1} = S_{4n}+0 = 1$, $S_{4n+2} = S_{4n+1}-1 = 0$ et $S_{4n+3} = S_{4n+2}+0 = 0$.

6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$. Alors, d'après la formule de MOIVRE,

$$C_n+iS_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k.$$

- 1er cas. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$. Par suite,

$$C_n + iS_n = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta(n+1-1)/2}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = e^{in\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Par suite,

$$C_n = \mathrm{Re}(C_n+iS_n) = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \mathrm{Im}(C_n+iS_n) = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

- 2ème cas. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $C_n = n+1$ et $S_n = 0$.
Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \begin{cases} \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.}$$

7. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $-x \neq 1$, on a

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}(1-(-x)^n).$$

Par suite,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S_n'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

Mais alors,

$$|S_n(x) - \ln(1+x)| = \left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\,dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1} = \ln(1+x).}$$

En particulier,

$$\boxed{\ln 2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)}.$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$. La suite $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique, de raion $q = 2$ et de premier terme $u_0 - 3 = -2$. On en déduit que, pour n enteir naturel donné, $u_n - 3 = -2.2^n$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^{n+1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 3 - 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = 3(n+1) - 2\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

Correction de l'exercice 1937 ▲

Pour x réel, posons $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_kx)^2$. On remarque que pour tout réel x, $f(x)\geqslant 0$. En développant les n carrés, on obtient,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}(b_k^2x^2+2a_kb_kx+a_k^2)=(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)x^2+2(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)x+(\sum_{k=1}^{n}a_k^2).$$

1er cas. Si $\sum_{k=1}^{n}b_k^2\neq 0$, f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est alors négatif ou nul. Ceci fournit

$$0\geqslant\Delta'=(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2-(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)(\sum_{k=1}^{n}a_k^2),$$

et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}.$$

2ème cas. Si $\sum_{k=1}^{n}b_k^2=0$, alors tous les b_k sont nuls et l'inégalité est immédiate.

Finalement, dans tous les cas,
$$\boxed{|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}.}$$

Cette inégalité est encore valable en remplaçant les a_k et les b_k par leurs valeurs absolues, ce qui fournit les inégalités intermédiaires.
Retrouvons alors l'inégalité de l'exercice 1815. Puisque les a_k sont strictement positifs, on peut écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{a_i}}^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\sqrt{\frac{1}{a_i}}\right)^2=n^2.$$

Correction de l'exercice 1938 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}&=\mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{n}e^{ik/n^2})=\mathrm{Im}\left(e^{i/n^2}\frac{1-e^{ni/n^2}}{1-e^{i/n^2}}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})/n^2}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n^2}}\right)=\frac{\sin\frac{n+1}{2n^2}\sin\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n^2}}\\&\underset{n\to+\infty}{=}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))(\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n^2}))(\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3}))^{-1}\\&=(1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))(\frac{1}{2}+o(\frac{1}{n}))(1+o(\frac{1}{n}))^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}),\end{aligned}$$

(on peut aussi partir de l'encadrement $\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\leqslant\sin\frac{k}{n^2}\leqslant\frac{k}{n^2}$).

Correction de l'exercice 1939 ▲

1. Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. $\forall n\geqslant 1$, u_n existe

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n\geqslant 1$, converge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha>1$), la série de terme général u_n converge.

2. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. $\forall n \geqslant 2$, u_n existe et de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$, diverge et est positive, la série de terme général u_n diverge.

3. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Pour $n \geqslant 1$, $u_n > 0$ et

$$\ln(u_n) = \ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)\left(-\ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln 2\ln(n) + o(1).$$

Donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln 2 \ln n} = \frac{1}{n^{\ln 2}}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{\ln 2}}$, $n \geqslant 1$, diverge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha \leqslant 1$) et est positive, la série de terme général u_n diverge.

4. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$. u_n existe pour $n \geqslant 2$. $\ln(\operatorname{ch} n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^n}{2}\right) = n - \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $un \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)} > 0$.

   Vérifions alors que la série de terme général $\frac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge. La fonction $x \to x\ln x$ est continue, croissante et strictement positive sur $]1,+\infty[$ (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur $]1,+\infty[$). Par suite, la fonction $x \to \frac{1}{x\ln x}$ est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$\tfrac{1}{k\ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \tfrac{1}{x\ln x}\,dx$$

   Par suite, pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{k\ln k}{\geqslant} \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \tfrac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^{n+1} \tfrac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

   Donc u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente. La série de terme général u_n diverge.

5. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \arccos\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$. u_n existe pour $n \geqslant 1$. De plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(u_n) = \sin\left(\arccos\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{1-1+\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{n} > 0$$

   terme général d'une série de RIEMANN divergente. La série de terme général un diverge.

6. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant 1$. De plus,

$$\left|\tfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \tfrac{(n+1)^2}{n^2} \times \tfrac{(n-1)!}{n!} = \tfrac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \tfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1.$$

   D'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

7. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$. u_n est défini pour $n \geqslant 1$ car pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Ensuite

$$\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Puis $n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n = e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n})} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La série de terme général $-\frac{1}{12n\sqrt{e}}$ est divergente et donc la série de terme général u_n diverge.

8.
$$\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) = \ln\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n\pi} < 0.$$

Donc, la série de terme général u_n diverge.

9. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif. De plus, pour $n \geqslant 1$,
$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2+0}\,dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n converge.

10. $-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = -\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -1+O\left(\frac{1}{n}\right)$ puis
$$-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n)+o(1).$$

Par suite,
$$0 < u_n = e^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

11. $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e\left(1-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0.$$

La série de terme général $\frac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

Correction de l'exercice 1940 ▲

1. Si P n'est pas unitaire de degré 3, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Soit P un polynôme unitaire de degré 3. Posons $P = X^3+aX^2+bX+c$.

$$u_n = n\left(\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/4}-\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} n\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(1+\frac{a}{3n}+\frac{b}{3n^2}-\frac{a^2}{9n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{a}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}+\frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

• Si $a \neq 0$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.
• Si $a = 0$ et $\frac{1}{2}-\frac{b}{3} \neq 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\right)\frac{1}{n}$. u_n est donc de signe constant pour n grand et est équivalent au terme général d'une série divergente. Donc la série de terme général u_n diverge.
• Si $a = 0$ et $\frac{1}{2}-\frac{b}{3} = 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas, la série de terme général u_n converge (absolument).

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$ et $b = \frac{3}{2}$ ou encore la série de terme général u_n converge si et seulement si P est de la forme $X^3+\frac{3}{2}X+c$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha} S(n)$. Pour $n \geqslant 2$,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2} S(n)$$

et donc $\forall n \geqslant 2$, $S(n) \leqslant \frac{S(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \frac{S(2)}{2^{n-2}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel α, la série de terme général u_n converge.

3. $\forall u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Par suite, $\forall n \geqslant 2$, $0 < u_n < \frac{1}{n}$.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et par suite $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$. La série de terme général u_n diverge.

4. On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers.
Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante d'entiers et donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p_n} = 0$.
Par suite, $0 < \frac{1}{p_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ et les séries de termes généraux $\frac{1}{p_n}$ et $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ sont de même nature.
Il reste donc à étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.
Montrons que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) \geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right)$.
Soit $n \geqslant$. Alors $\frac{1}{p_n} < 1$ et la série de terme général $\frac{1}{p_n^k}$, $k \in \mathbb{N}$, est une série géométrique convergente de somme : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$.
Soit alors N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p_1 < p_2 ... < p_n$ la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N.
Tout entier entre 1 et N s'écrit de manière unique $p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i = E\left(\frac{\ln(N)}{\ln(p_i)}\right)$ et deux entiers distincts ont des décompositions distinctes. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) \text{ (car } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} > 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^i}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right)\right) = \ln\left(\sum_{0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, \dots, \dots 0 \leqslant \beta_n \leqslant \alpha_n} \frac{1}{p_1^{\beta_1} \dots,\ p_n^{\beta_n}}\right) \\
&\geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Or $\lim_{N\to+\infty} \ln\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right) = +\infty$ et donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) = +\infty$.
La série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}$ diverge et il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$.
(Ceci montre qu'il y a beaucoup de nombres premiers et en tout cas beaucoup plus de nombres premiers que de carrés parfaits par exemple).

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = a_p \times 10^p + \dots + a_1 \times 10 + a_0$ où $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i \in \{0, 1; ..., 9\}$ et $a_p \neq 0$. Alors $c(n) = p + 1$.
Déterminons p est en fonction de n. On a $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ et donc $p = E(\log(n))$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n(E(\log n) + 1)^\alpha}.$$

Par suite, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^\alpha(10)}{n\ln^\alpha(n)}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$ (séries de BERTRAND). Redémontrons ce résultat qui n'est pas un résultat de cours.

La série de terme général $\frac{1}{n\ln n}$ est divergente (voir l'exercice 1939, 4)). Par suite, si $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\frac{1}{n\ln^\alpha(n)}$ est divergente car $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n\ln^\alpha(n)} \geqslant \frac{1}{n\ln n}$.

Soit $\alpha > 1$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln^\alpha x}$ est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, pour $k \geqslant 3$,

$$\frac{1}{k\ln^\alpha k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx$$

puis, pour $n \geqslant 3$, en sommant pour $k \in [\![3,n]\!]$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^\alpha k} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \int_2^n \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)} - \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(n)}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs, de terme général $\frac{1}{k\ln^\alpha k}$, est majorée et donc la série de terme général $\frac{1}{k\ln^\alpha k}$ converge.

6 Soit $n \geqslant 2$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln^a(n+1)}{(n+1)^b} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1$$

et d'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

6. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \tan(u_n) \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^a} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\frac{2a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par suite, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$.

7. La fonction $x \mapsto x^{3/2}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc pour $k \geqslant 1$, $\int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant k^{3/2} \leqslant \int_k^{k+1} x^{3/2}\,dx$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n x^{3/2}\,dx \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} x^{3/2}\,dx = \int_1^{n+1} x^{3/2}\,dx$$

ce qui fournit

$$\frac{2}{5}n^{5/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \frac{2}{5}((n+1)^{5/2} - 1) \text{ et donc } \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{\frac{5}{2}-\alpha}}{5} > 0$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > \frac{7}{2}$.

8. Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{n^\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right) - 1 \geqslant \frac{1}{n^\alpha} + \frac{2}{n^\alpha} + \ldots + \frac{n}{n^\alpha} = \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} > 0.$$

Comme $\frac{n(n+1)}{2n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\alpha-2}}$, si $\alpha \leqslant 3$, on a $\alpha - 2 \leqslant 1$ et la série de terme général u_n diverge.

Si $\alpha > 3$,

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\leqslant \left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right)^n - 1 = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-2}} \text{ terme général d'une série de RIEMANN convergente,} \end{aligned}$$

et, puisque $\alpha - 2 > 1$, la série de terme général u_n converge. Finalement, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 3$.

Correction de l'exercice 1941 ▲

1. Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + (n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$
La suite $\left((-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général u_n converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2. (la suite $\left(\frac{1}{n+(-1)^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroisante à partir d'un certain rang).
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

3. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Les séries de termes généraux respectifs $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sont convergentes et la série de terme général $-\frac{1}{2n}$ est divergente. Si la série de terme général u_n convergeait alors la série de terme général $-\frac{1}{2n} = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergerait ce qui n'est pas. Donc la série de terme général u_n diverge.

   Remarque. La série de terme général u_n diverge bien que u_n soit équivalent au terme général d'une série convergente.

4. Si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors les deux premières séries divergent et la dernière converge.

   Soit $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = e^{in\alpha}$ et $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $u_n = \varepsilon_n v_n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons encore $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

   Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons enfin $R_n^p = \sum_{k=1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$. (On effectue alors une transformation d'ABEL).

$$\begin{aligned}R_n^p &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k (V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k V_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} \varepsilon_{k+1} V_k \\ &= \varepsilon_{n+p} V_{n+p} - \varepsilon_{n+1} V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k.\end{aligned}$$

   Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = e^{i\alpha}\frac{e^{in\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1} = e^{i\alpha}\frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|V_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$. Par suite, pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$\begin{aligned}|R_n^p| &= \left|\frac{1}{n+p}V_{n+p} - \frac{1}{n+1}V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)V_k\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}\left(\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}\left(\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{2}{|\sin(\alpha/2)|(n+1)} \\ &\leqslant \frac{2}{n|\sin(\alpha/2)|}.\end{aligned}$$

   Soit alors ε un réel strictement positif. Pour $n \geqslant E\left(\frac{2}{\varepsilon|\sin(\alpha/2)|}\right) + 1$ et p entier naturel non nul quelconque, on a $|R_n^p| < \varepsilon$.

On a montré que $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall(n,p)\in\mathbb{N}^*$, $(n\geqslant n_0\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n+p}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k\right|<\varepsilon$.

Ainsi, la série de terme général u_n vérifie le critère de CAUCHY et est donc convergente. Il en est de même des séries de termes généraux respectifs $\frac{\cos(n\alpha)}{n}=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{in\alpha}}{n}\right)$ et $\frac{\sin(n\alpha)}{n}=\mathrm{Im}\left(\frac{e^{in\alpha}}{n}\right)$.

5. Pour $x\in]0,+\infty[$, posons $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>e$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x}<0$.
   Donc, la fonction f est décroissante sur $[e,+\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est une suite décroissante. Mais alors la série de terme général $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
6. • Si $\deg P\geqslant\deg Q$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.
   • Si $\deg P\leqslant\deg Q-2$, $u_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.
   • Si $\deg P=\deg Q-1$, $u_n\underset{n\to+\infty}{=}(-1)^n\frac{\mathrm{dom}P}{n\,\mathrm{dom}Q}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. u_n est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général u_n converge.
   En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\deg P<\deg Q$.
7. $e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ puis pour $n\geqslant 2$, $n!e=1+n+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$.
   Pour $0\leqslant k\leqslant n-2$, $\frac{n!}{k!}$ est un entier divisible par $n(n-1)$ et est donc un entier pair que l'on note $2K_n$.
   Pour $n\geqslant 2$, on obtient
   $$\sin(n!\pi e)=\sin\left(2K_n\pi+(n+1)\pi+\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right)=(-1)^{n+1}\sin\left(\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right).$$
   Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}.$$
   Maintenant, pour $k\geqslant n+3$, $\frac{n!}{k!}=\frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)}\leqslant\frac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et donc
   $$\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\leqslant\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-n}}=\frac{1}{(n+1)^3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{n^3}.$$
   On en déduit que $\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il reste
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Finalement , $\sin(n!\pi e)\underset{n\to+\infty}{=}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}+\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   $\sin(n!\pi e)$ est somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général $\sin(n!\pi e)$ converge.
   Si $p\geqslant 2$, $|\sin^p(n!\pi e)|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi^p}{n^p}$ et la série de terme général $\sin^p(n!\pi e)$ converge absolument.

Correction de l'exercice 1942 ▲

1. $\frac{n+1}{3^n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par suite, la série de terme général $\frac{n+1}{3^n}$ converge.
   1er calcul. Soit $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$. Alors
   $$\begin{aligned}\frac{1}{3}S&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\\&=(S-1)-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=S-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$
   On en déduit que $S=\frac{9}{4}$.
   $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}=\frac{9}{4}.}$$

2ème calcul. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k.$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = f_n'(x) = \left(\tfrac{x^n-1}{x-1}\right)'(x) = \tfrac{nx^{n-1}(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2} = \tfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}.$$

Pour $x = \frac{1}{3}$, on obtient $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{\frac{n-1}{3^n} - \frac{n}{3^{n-1}}+1}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}$ et quand n tend vers l'infini, on obtient de nouveau $S = \frac{9}{4}$.

2. Pour $k \geqslant 3$, $\frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{3}{8(k-2)} + \frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)}$. Puis

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + o(1) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\times\frac{3}{2} + \frac{5}{8}\times\frac{7}{12} + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{89}{96} + o(1).\end{aligned}$$

La série proposée est donc convergente de somme $\frac{89}{96}$.

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.}$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $1^{3k} + j^{3k} + (j^2)^{3k} = 3$ puis $1^{3k+1} + j^{3k+1} + (j^2)^{3k+1} = 1 + j + j^2 = 0$ et $1^{3k+2} + j^{3k+2} + (j^2)^{3k+2} = 1 + j^2 + j^4 = 0$. Par suite,

$$e + e^j + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n + j^n + (j^2)^n}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!},$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} &= \frac{1}{3}(e + e^j + e^{j^2}) = \frac{1}{3}\left(e + e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(e + 2e^{-1/2}\mathrm{Re}(e^{-i\sqrt{3}/2})\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(e + 2e^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(e + \frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).}$$

4.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

5. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

Posons $S=\sum_{k=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$ puis pour $n\geqslant 2$, $S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$. Puisque la série converge $S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{p\to+\infty}S_{2p+1}$ avec

$$\begin{aligned}S_{2p+1}&=\sum_{k=2}^{2p+1}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right)\\&=\sum_{k=1}^{p}(\ln(2k)-\ln(2k+1)+\ln(2k+1)-\ln(2k))=0\end{aligned}$$

et quand p tend vers $+\infty$, on obtient $S=0$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=0.}$$

6. Si $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors, pour tout entier naturel n, $\frac{a}{2^n}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)>0$.
Ensuite, $\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1+O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$ et la série converge. Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)&=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)=\ln\left(\frac{1}{2^{n+1}}\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)\\&=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right)\text{ (produit télescopique)}\\&\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\times\frac{a}{2^n}}\right)=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).}$$

7. Vérifions que pour tout réel x on a $\operatorname{th}(2x)=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.
$\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=\frac{1}{4}((e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2)=\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})=\operatorname{ch}(2x)$ et $2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})=\operatorname{sh}(2x)$ puis

$$\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}=\frac{2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x}=\frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)}=\operatorname{th}(2x).$$

Par suite, pour $x\in\mathbb{R}^*$, $\operatorname{th}x=\frac{2}{\operatorname{th}(2x)}-\frac{1}{\operatorname{th}x}$. Mais alors, pour $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\operatorname{th}\left(\frac{a}{2^k}\right)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\frac{2}{\operatorname{th}\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{\operatorname{th}\frac{a}{2^k}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}\operatorname{th}\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{2^k\operatorname{th}\frac{a}{2^k}}\right)\\&=\frac{2}{\operatorname{th}(2a)}-\frac{1}{2^n\operatorname{th}\frac{a}{2^n}}\text{ (somme télescopique)}\\&\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{2}{\operatorname{th}(2a)}-\frac{1}{a},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $a=0$.

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{th}\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{2}{\operatorname{th}(2a)}-\frac{1}{a}.}$$

Correction de l'exercice 1943 ▲

Il faut vérifier que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}0<(2n)u_{2n}&=2(\underbrace{u_{2n}+\ldots+u_{2n}}_{n})\leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n}u_k \text{ (car la suite } u \text{ est décroissante)}\\&=2(S_{2n}-S_n).\end{aligned}$$

Puisque la série de terme général u_n converge, $\lim_{n\to+\infty}2(S_{2n}-S_n)=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(2n)u_{2n}=0$.
Ensuite, $0<(2n+1)u_{2n+1}\leqslant(2n+1)u_{2n}=(2n)u_{2n}+u_{2n}\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Donc les suites des termes de rangs pairs et impairs extraites de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite à savoir 0. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}nu_n=0$ ou encore que $u_n\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Contre exemple avec u non monotone. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\begin{cases}0 \text{ si } n=0\\ \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est un carré parfait non nul}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. La suite u est positive et $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}<+\infty$. Pourtant, $p^2u_{p^2}=1\underset{p\to+\infty}{\to}1$ et la suite (nu_n) admet une suite extraite convergeant vers 1. On a donc pas $\lim_{n\to+\infty}nu_n=0$.

Correction de l'exercice 1944 ▲

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. Montrons que la suite $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k^2}$, $n\geqslant 1$, ne vérifie pas le critère de CAUCHY. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_{2n}-S_n&=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sigma(k)}{k^2}\geqslant\frac{1}{(2n)^2}\sum_{k=n+1}^{2n}\sigma(k)\\&\geqslant\frac{1}{4n^2}(1+2+\ldots+n) \text{ (car les } n \text{ entiers } \sigma(k),\ 1\leqslant k\leqslant n, \text{ sont strictement positifs et deux à deux distincts)}\\&=\frac{n(n+1)}{8n^2}\geqslant\frac{n^2}{8n^2}=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Si la suite (S_n) converge, on doit avoir $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. Donc la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$, $n\geqslant 1$, diverge.

Correction de l'exercice 1945 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=\ln(1+u_n)$, $w_n=\frac{u_n}{1+u_n}$ et $t_n=\int_0^{u_n}\frac{dx}{1+x^e}$.
• Si $u_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$, alors $0\leqslant u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}w_n$. Dans ce cas, les séries de termes généraux u_n, v_n et w_n sont de même nature.
D'autre part, pour $n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_n}{1+u_n^e}\leqslant t_n\leqslant u_n$ puis $\frac{1}{1+u_n^e}\leqslant\frac{t_n}{u_n}\leqslant 1$et donc $t_n\underset{n\to+\infty}{\sim}u_n$. Les séries de termes généraux u_n et t_n sont aussi de même nature.
• Si u_n ne tend pas vers 0, la série de terme général u_n est grossièrement divergente. Puisque $u_n=e^{v_n}-1$, v_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général v_n est grossièrement divergente. Dans ce cas aussi, les séries de termes généraux sont de même nature.
De même, puisque $w_n=\frac{u_n}{1+u_n}<1$, on a $u_n=\frac{w_n}{1-w_n}$ et w_n ne peut tendre vers 0.
Enfin, puisque u_n ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout entier naturel N, il existe $n=n(N)\geqslant N$ tel que $u_n\geqslant\varepsilon$. Pour cet ε et ces n, on a $t_n\geqslant\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{1+x^e}>0$ (fonction continue, positive et non nulle) et la suite t_n ne tend pas vers 0. Dans le cas où u_n ne tend pas vers 0, les quatre séries sont grossièrement divergentes.

Correction de l'exercice 1946 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=(n+1)!\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}u_n&=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{k!}\\&=1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}+\sum_{k=n+6}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots k}\end{aligned}$$

On a $0<\sum_{k=n+6}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots k}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}}=\frac{1}{(n+2)^5}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{(n+2)^4(n+1)}\leqslant\frac{1}{n^5}$. On en déduit que $\sum_{k=n+6}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots k}\underset{n\to+\infty}{=}$ $o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}u_n&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}\right)+\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\\&\quad+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{5}{n}+\frac{19}{n^2}\right)+\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{9}{n}\right)+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(n+1)!\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Correction de l'exercice 1947 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$. D'après la formule du binôme de Newton, $(2+\sqrt{3})^n=A_n+B_n\sqrt{3}$ où A_n et B_n sont des entiers naturels. Un calcul conjugué fournit aussi $(2-\sqrt{3})^n=A_n-B_n\sqrt{3}$. Par suite, $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2A_n$ est un entier pair. Par suite, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\sin\left(2A_n\pi-\pi(2-\sqrt{3})^n\right)=-\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right).$$

Mais $0<2-\sqrt{3}<1$ et donc $(2-\sqrt{3})^n\underset{n\to+\infty}{\to}0$. On en déduit que $|u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}\pi(2-\sqrt{3})^n$ terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général u_n converge.

Correction de l'exercice 1948 ▲

Si $\alpha<0$, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n^{-2\alpha}$ et si $\alpha=0$, $u_n=1+(-1)^n$. Donc si $\alpha\leqslant 0$, u_n ne tend pas vers 0. La série de terme général u_n diverge grossièrement dans ce cas.
On suppose dorénavant que $\alpha>0$. Pour tout entier naturel non nul n, $|u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^\alpha}$ et donc la série de terme général u_n converge absolument si et seulement si $\alpha>1$.
Il reste à étudier le cas où $0<\alpha\leqslant 1$. On a $u_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}$. La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant et donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. On en déduit que la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge ou encore si et seulement si $\alpha>\frac{1}{2}$.
En résumé

Si $\alpha \leqslant 0$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge grossièrement,

si $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge,

si $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ est semi convergente,

si $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge absolument.

Correction de l'exercice 1949 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers termes de la série considérée et on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Il est connu que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_{m(p+q)} &= \left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right) - \left(\frac{1}{2q+2}+\ldots+\frac{1}{4q}\right) + \ldots \\
&+ \left(\frac{1}{2(m-1)p+1}+\ldots+\frac{1}{2mp-1}\right) - \left(\frac{1}{2(m-1)q+2}+\ldots+\frac{1}{2mq}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k} = H_{2mp} - \frac{1}{2}(H_{mp}+H_{mq}) \\
&\underset{m\to+\infty}{=} (\ln(2mp)+\gamma) - \frac{1}{2}(\ln(mp)+\gamma+\ln(mq)+\gamma) + o(1) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite extraite $(S_{m(p+q)})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Montrons alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique entier naturel non nul m_n tel que $m_n(p+q) \leqslant n < (m_n+1)(p+q)$ à savoir $m_n = E\left(\frac{n}{p+q}\right)$.

$$\begin{aligned}
|S_n - S_{m_n(p+q)}| &\leqslant \frac{1}{2m_np+1}+\ldots+\frac{1}{2(m_n+1)p-1} + \frac{1}{2m_nq+2} + \frac{1}{2(m_n+1)q} \\
&\leqslant \frac{p}{2m_np+1} + \frac{q}{2m_nq+2} \leqslant \frac{1}{2m_n} + \frac{1}{2m_n} = \frac{1}{m_n}.
\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\frac{1}{m_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ et aussi $\left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors

$$\begin{aligned}
\left|S_n - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| &\leqslant |S_n - S_{m_n(p+q)}| + \left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant \frac{1}{m_n} + \left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a montré que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|S_n - \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right)\right| < \varepsilon\right)$ et donc, la série proposée converge et a pour somme $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Correction de l'exercice 1950 ▲

La série proposée est le produit de CAUCHY de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, par elle même.

- Si $\alpha > 1$, on sait que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge absolument et donc que la série proposée converge.
- Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, pour $0 < k < n$ on a $0 < k(n-k) \leqslant \frac{n}{2}\left(n-\frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4}$. Donc $u_n \geqslant \frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha}$ avec $\frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$.

Comme $2\alpha - 1 \leqslant 1$, la série proposée diverge.

• Si $\alpha < 0$, $u_n \geqslant \frac{1}{(n-1)^\alpha}$ et donc u_n ne tend pas vers 0. Dans ce cas, la série proposée diverge grossièrement.

Correction de l'exercice 1951 ▲

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+1 &= 2(n+3)(n+2)(n+1)-15n^2-22n-11 = 2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53n+79\\ &= 2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53(n+3)-80\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!}-\frac{15}{(n+1)!}+\frac{53}{(n+2)!}-\frac{80}{(n+3)!}\right) = 2e-15(e-1)+53(e-2)-80\left(e-\frac{5}{2}\right)\\ &= -40e+111.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!} = -40e+111.}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \frac{n+1}{a+n+1}u_n$. Par suite $(n+a+1)u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+a)u_n+(1-a)u_n$ puis

$$(1-a)\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (k+a+1)u_{k+1} - \sum_{k=1}^n (k+a)u_k = (n+a+1)u_{n+1}-(a+1)u_1 = (n+a+1)u_{n+1}-1.$$

Si $a=1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.
Si $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{1-a}((n+a+1)u_{n+1}-1) = \frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-1}(a+n+1)u_{n+1}$.
Si $a>1$, la suite u est strictement positive et la suite des sommes partielles (S_n) est majorée par $\frac{1}{a-1}$. Donc la série de terme général u_n converge. Il en est de même de la suite $((a+n+1)u_{n+1})$. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty}(a+n+1)u_{n+1}$.
Si $\ell \neq 0$, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n+a+1}$ contredisant la convergence de la série de terme général u_n. Donc $\ell = 0$ et

$$\text{si } a>1,\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}.$$

Si $0<a<1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{1\times2\times\ldots\times n}{2\times3\ldots\times(n+1)} = \frac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Correction de l'exercice 1952 ▲

Pour tout entier naturel non nul n, $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p>2$.

Correction de l'exercice 1953 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$, $k \geqslant 1$, converge, la suite (R_n) est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
$0 < \frac{1}{k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ et puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \text{ (surtout ne pas décomposer en deux sommes)}\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

ou encore $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}$.
Or $-\frac{1}{k^2(k-1)} + \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)}$ puis
$\frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} - \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = -\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}$ et donc

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} = \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} \\
&= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}
\end{aligned}$$

Ensuite $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^4}$ ou encore $-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{(k-1)(k-2)} - \frac{1}{k(k-1)}\right) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{N(N-1)}\right) = \frac{1}{2n(n-1)} \\
&= \frac{1}{2n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} &= \lim_{N\to+\infty} \frac{2}{3} \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)} - \frac{1}{k(k-1)(k-2)}\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{N(N-1)(N-2)}\right) = \frac{2}{3n(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{2}{3n^3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{3n^3}\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{3n^3} + \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

et finalement

$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4}\right) + \left(\frac{2}{3n^3} + \frac{2}{n^4}\right) - \frac{3}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Correction de l'exercice 1954 ▲

1. La suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, en décroissant à partir du rang 3 (fourni par l'étude de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $[e, +\infty[$) et donc la série de terme général $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$, $n \geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p}$.
$(-1)^k \frac{\ln k}{k}$ n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang et on ne peut donc lui appliquer la règle de l'équivalence des restes.
Par contre, puisque la série de terme général $(-1)^k \frac{\ln k}{k}$ converge, on sait que l'on peut associer les termes à volonté et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$R_{2k-1} = \sum_{p=2k}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p} = \sum_{p=k}^{+\infty} \left(\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}\right).$$

Puisque la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[e,+\infty[$ et donc sur $[3,+\infty[$, pour $p \geqslant 2$, $\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} \geqslant 0$ et on peut utiliser la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes.

Cherchons déjà un équivalent plus simple de $\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$ quand p tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} &= \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{1}{2p}\left(\ln(2p) + \ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{-1} \\
&\underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{1}{2p}\left(\ln(2p) + \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\
&\underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln(2p)}{4p^2} + o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right) \underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln p + \ln 2}{4p^2} + o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right) \\
&\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\ln p}{4p^2}.
\end{aligned}$$

et donc $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\sum_{p=k}^{+\infty} \frac{\ln p}{p^2}$.

Cherchons maintenant un équivalent simple de $\frac{\ln p}{p^2}$ de la forme $v_p - v_{p+1}$.

Soit $v_p = \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1}$ (suggéré par $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x^2}$). Alors

$$\begin{aligned}
v_p - v_{p+1} &= \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p}\left(\ln p + \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p}\left(\ln p + \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\
&\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\ln p}{p^2}.
\end{aligned}$$

D'après la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes, $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\sum_{p=k}^{+\infty}\left(\frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1}\right)$ $\frac{\ln k}{4k}$ (série télescopique).

Puis, $R_{2k} = R_{2k-1} - \frac{\ln(2k)}{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} - \frac{\ln(2k)}{2k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} - \frac{\ln k}{2k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$.

En résumé, $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k}$ et $R_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k}$.

On peut unifier : $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2k-1)}{2(2k-1)}$ et $R_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2k)}{2(2k)}$. Finalement,

$$\boxed{\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\frac{\ln p}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n-1}\frac{\ln n}{2n}.}$$

2. $\sum n^n$ est une série à termes positifs grossièrement divergente.

   1 ère solution.

   $0 < n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n - (n-1)^{n-1}$ car $\frac{n^n-(n-1)^{n-1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{ne} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

   D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes,

   $$\sum_{p=1}^{n} p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=2}^{n} p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=2}^{n}(p^p - (p-1)^{p-1}) = n^n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n.$$

   (La somme est équivalente à son dermier terme.)

   2 ème solution. Pour $n \geqslant 3$, $0 \leqslant \frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2} p^p \leqslant \frac{1}{n^n}\times(n-2)(n-2)^{n-2} \leqslant \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$. Donc $\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2} p^p$. On en déduit que $\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n} p^p = 1 + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} + \frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2} p^p \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1) + o(1) = 1 + o(1)$.

   $$\boxed{\sum_{p=1}^{n} p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n.}$$

Correction de l'exercice 1955 ▲

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}$, $\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)$. Donc pour $N>p$,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\,n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}&=\frac{1}{2p}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\,n\neq p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{2p}\left(\sum_{1-p\leqslant k\leqslant N-p,\,k\neq 0}\frac{1}{k}-\sum_{p+1\leqslant k\leqslant N+p,\,k\neq 2p}\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{1}{2p}\left(-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N+p}\frac{1}{k}+\frac{1}{2p}+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2p}-\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

Maintenant, $\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\frac{1}{N-p+1}+\ldots+\frac{1}{N+p}$ est une somme de $2p-1$ termes tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Puisque $2p-1$ est constant quand N varie, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=0$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\,n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\times\frac{3}{2p}=\frac{3}{4p^2}\text{ puis }\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\,n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ donné, on a aussi $\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\,p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}=-\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\,p\neq n}\frac{1}{p^2-n^2}=-\frac{3}{4n^2}$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\,p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=-\frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit que la suite double $\left(\frac{1}{n^2-p^2}\right)_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2,\,n\neq p}$ n'est pas sommable.

Correction de l'exercice 1956 ▲

La suite $\left((-1)^n\frac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $(-1)^n\frac{1}{3n+1}$, $n\geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,dt=\int_0^1\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt.$$

Mais $\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\right|=\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\leqslant\int_0^1 t^{3n+3}\,dt=\frac{1}{3n+4}$. On en déduit que $(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Calculons cette dernière intégrale.

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.}$$

Correction de l'exercice 1957 ▲

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $nv_n - (n-1)v_{n-1} = u_n$ ce qui reste vrai pour $n = 1$ si on pose de plus $v_0 = 0$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} v_n^2 - 2u_nv_n &= v_n^2 - 2(nv_n - (n-1)v_{n-1})v_n = -(2n-1)v_n^2 + 2(n-1)v_{n-1}v_n \\ &\leqslant -(2n-1)v_n^2 + (n-1)(v_{n-1}2 + v_n^2) = (n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2. \end{aligned}$$

Mais alors, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N (v_n^2 - 2u_nv_n) \leqslant \sum_{n=1}^N ((n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2) = -nv_n^2 \leqslant 0.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leqslant \sum_{n=1}^N 2u_nv_n \leqslant 2\left(\sum_{n=1}^N u_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^N v_n^2\right)^{1/2} \text{ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).}$$

Si $\left(\sum_{n=1}^N v_n^2\right)^{1/2} > 0$, on obtient après simplification par $\left(\sum_{n=1}^N v_n^2\right)^{1/2}$ puis élévation au carré

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^N u_n^2,$$

cette inégalité restant claire si $\left(\sum_{n=1}^N v_n^2\right)^{1/2} = 0$. Finalement,

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^N u_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $v_n^2 (\geqslant 0)$ est majorée. Donc la série de terme général v_n^2 converge et de plus, quand N tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

Correction de l'exercice 1958 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt \\ &= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt. \end{aligned}$$

Par suite, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^N \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 (-t^2)\frac{1-(-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Or $\left|(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{2N+2}\,dt = \frac{1}{2N+3}$. Comme $\frac{1}{2N+3}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même de $(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt$. On en déduit que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt \\ &= \left[\frac{t}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}.}$$

Correction de l'exercice 1959 ▲

1. On a pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire). Donc pour tout $x\in I$:$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$. L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.
2. Si f,g sont continues alors $\alpha f+\beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Donc les fonctions $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I. L'implication de 1. prouve alors que $|f-g|$ est continue sur I, et finalement on peut conclure :
La fonction $\sup(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ est continue sur I.

Correction de l'exercice 1962 ▲

1. $g(a)=f(\frac{a+b}{2})-f(a)$ et $g(\frac{a+b}{2})=f(b)-f(\frac{a+b}{2})$. Comme $f(a)=f(b)$ alors nous obtenons que $g(a)=-g(\frac{a+b}{2})$. Donc ou bien $g(a)\leqslant0$ et $g(\frac{a+b}{2})\geqslant0$ ou bien $g(a)\geqslant0$ et $g(\frac{a+b}{2})\leqslant0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en c pour un c entre a et $\frac{a+b}{2}$.
2. Notons t le temps (en heure) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t. Nous supposons que la fonction $t\mapsto d(t)$ est continue. Soit $f(t)=d(t)-4t$. Alors $f(0)=0$ et par hypothèse $f(1)=0$. Appliquons la question précédente avec $a=0$, $b=1$. Il existe $c\in[0,\frac{1}{2}]$ tel que $g(c)=0$, c'est-à-dire $f(c+\frac{1}{2})=f(c)$. Donc $d(c+\frac{1}{2})-d(c)=4(c+\frac{1}{2})-4c=2$. Donc entre c et $c+\frac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la personne parcourt exactement 2 km.

Correction de l'exercice 1963 ▲

Il existe $x<0$ tel que $f(x)<0$ et $y>0$ tel que $f(y)>0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z\in]x,y[$ tel que $f(z)=0$. Donc f s'annule. Les polynômes de degré impair vérifient les propriétés des limites, donc s'annulent. Ceci est faux, en général, pour les polynômes de degré pair, par exemple regardez $f(x)=x^2+1$.

Correction de l'exercice 1965 ▲

Comme $f(x)^2=1$ alors $f(x)=\pm1$. Attention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1. Supposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x)=+1$. Montrons que f est constante égale à $+1$. S'il existe $y\neq x$ tel que $f(y)=-1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z)=0$, ce qui contredit $f(z)^2=1$. Donc f est constante égale à $+1$.

Correction de l'exercice 1966 ▲

Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists A\in\mathbb{R}\quad x>A\Rightarrow\ell-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant\ell+\varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon=+1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x>A$, $\ell-1\leqslant f(x)\leqslant\ell+1$. Nous venons de montrer que f est bornée "à l'infini". La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,A]$, donc f est bornée sur cet intervalle : il existe m,M tels que pour tout $x\in[0,A]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$. En prenant $M'=\max(M,\ell+1)$, et $m'=\min(m,\ell-1)$ nous avons que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $m'\leqslant f(x)\leqslant M'$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.
La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes : regardez $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

Correction de l'exercice 1973 ▲

1. Si $f(0) = 0$ et c'est fini, on a trouver le point fixe ! Sinon $f(0)$ n'est pas nul. Donc $f(0) > 0$ et $0 \in E$. Donc E n'est pas vide.
2. Maintenant E est un partie de $[0,1]$ non vide donc $\sup E$ existe et est fini. Notons $c = \sup E \in [0,1]$. Nous allons montrer que c est un point fixe.
3. Nous approchons ici $c = \sup E$ par des éléments de E : Soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \to c$ et $x_n \leqslant c$. Une telle suite existe d'après les propriétés de $c = \sup E$. Comme $x_n \in E$ alors $x_n < f(x_n)$. Et comme f est croissante $f(x_n) \leqslant f(c)$. Donc pour tout n, $x_n < f(c)$; comme $x_n \to c$ alors à la limite nous avons $c \leqslant f(c)$.
4. Si $c = 1$ alors $f(1) = 1$ et nous avons notre point fixe. Sinon, nous utilisons maintenant le fait que les élements supérieurs à $\sup E$ ne sont pas dans E : Soit (t_n) une suite telle que $t_n \to c$, $t_n \geqslant c$ et telle que $f(t_n) \leqslant t_n$. Une telle suite existe car sinon c ne serait pas égal à $\sup E$. Nous avons $f(c) \leqslant f(t_n) \leqslant t_n$ et donc à la limite $f(c) \leqslant c$.
   Nous concluons donc que $c \leqslant f(c) \leqslant c$, donc $f(c) = c$ et c est un point fixe de f.

Correction de l'exercice 1980 ▲

1. Soit $x \in [0,1]$ et $y = f(x) \in [0,1]$. Alors $f(y) = y$ car $f(f(x)) = f(x)$. Donc $E_f \neq \varnothing$. Nous venons de montrer que $I = f([0,1])$ est inclus dans E_f.
2. Montrons réciproquement E_f est inclus dans I. Soit $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$ alors $x \in I = f([0,1])$ (car $x = f(x)$!). Ainsi $E_f = I = f([0,1])$. Mais l'image de l'intervalle $[0,1]$ par la fonction continue f est un intervalle donc E_f est un intervalle.
3. La réciproque est vraie : une fonction continue pour laquelle $E_f = f([0,1])$ vérifie aussi $f \circ f = f$. En effet pour $x \in [0,1]$ et $y = f(x)$ alors $y \in f([0,1])$ donc $y \in E_f$. Donc $f(y) = y$, autrement dit $f(f(x)) = f(x)$.
   Les fonctions continues qui vérifient $f \circ = f$ sont donc exactement les fonctions continues telles que $E_f = f([0,1])$. Pour une telle fonction si l'on note $[a,b] = E_f$ alors f est définie sur $[0,a]$ par n'importe qu'elle fonction continue prenant ses valeurs entre a et b, et valant a en a : $f([0,a]) \subset [a,b]$ et $f(a) = a$. Elle est ensuite définie par l'identité sur $[a,b]$: pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = x$. Et enfin sur $[b,1]$ elle est définie par n'importe quelle fonction continue prenant ses valeurs entre a et b, et valant b en b : $f([b,1]) \subset [a,b]$ et $f(b) = b$.

Correction de l'exercice 1982 ▲

Non, par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Avec $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f n'est pas continue (en 0), mais pour tout a,b et pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

Correction de l'exercice 1989 ▲

1. Pour tout $x \in]a,b[$, on a $x \in [a,b]$ donc $f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant b} f(t)$. Par conséquent $\sup_{a \leqslant t \leqslant b} f(t)$ est un majorant de f sur l'intervalle $]a,b[$, donc il est plus grand que le plus petit des majorants : $\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant b} f(t)$.
2. f est continue sur un intervalle fermé et borné, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes. Soit x_0 le réel où le maximum est atteint : $f(x_0) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.
   — si $x_0 = a$, considérons la suite $a_n = a + 1/n$. Pour $n \geqslant \frac{1}{b-a}$ on a $a_n \in [a,b]$, donc on peut considérer la suite $(f(a_n))_{n \geqslant \frac{1}{b-a}}$. Or a_n tend vers a quand n tend vers $+\infty$, et comme f est continue, ceci implique que $f(a_n)$ tend vers $f(a)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in |||, f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(a_n) \leqslant f(x_0)$, ce qui implique que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
   — si $x_0 = b$ on obtient le résultat de manière identique en considérant la suite $b_n = b - 1/n$.
   — si $a < x_0 < b$: $f(x_0)$ est majoré par le sup de f sur $]a,b[$, donc
   $$f(x_0) \leqslant \sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_0)$$
   donc $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.

3. Avec la fonction g, on a $\sup_{0<x<1} g(x) = 0$ car pour chaque $x \in]0,1[$, $g(x) = 0$, et $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x) = 1$ car $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. La propriété démontrée précédemment n'est pas vraie dans notre cas, car la fonction g ne remplit pas la condition essentielle d'être continue.

Correction de l'exercice 2000 ▲

1. $f(x)-x$ change de signe entre 0 et 1.
2. Sinon $f-g$ est de signe constant, par exemple positif. Si a est le plus grand point fixe de f alors $g(a) > a$ et $g(a)$ est aussi point fixe de f, absurde.

Correction de l'exercice 2002 ▲

En posant $b = f(a)$ on a $(f(a)-a)+(f(b)-b) = 0$ donc $x \mapsto f(x)-x$ s'annule entre a et b. De même, s'il existe $k \in |||^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f^k(a) = a$ alors $(f(a)-a)+(f^2(a)-f(a))+\cdots+(f^k(a)-f^{k-1}(a)) = 0$ donc $f(x)-x$ s'annule entre $\min(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ et $\max(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$.

Correction de l'exercice 2005 ▲

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que f est discontinue en a. Il existe une suite a_n telle que $a_n \to a$ et $|f(a_n)-f(a)| \geqslant \varepsilon$. Alors $f(a) \pm \varepsilon$ a une infinité d'antécédents.
2.

Correction de l'exercice 2013 ▲

Si f n'est pas identiquement nulle, alors $f(0) = \pm 1$ et f est paire, de signe constant.
Par récurrence, $\forall\, p \in |||,\ f(px) = \pm f^{p^2}(x) \Rightarrow$ par densité, $f(x) = \pm \lambda^{x^2}$.

Correction de l'exercice 2014 ▲

$\omega(\delta) \to 0 \Leftrightarrow f$ (lorsque $\delta \to 0^+$) est uniformément continue.
Continuité en $\delta > 0$: on remarque que ω est croissante donc $\omega(\delta^-)$ et $\omega(\delta^+)$ existent et encadrent $\omega(\delta)$. Si $\delta_n \to \delta^+$ (lorsque $n \to \infty$), soient x_n, y_n tels que $\omega(\delta_n) = |f(x_n)-f(y_n)|$ et $|x_n - y_n| \leqslant \delta_n$. On extrait de (x_n, y_n) une suite convergente vers (x,y) avec $|x-y| \leqslant \delta$ et $|f(x)-f(y)| = \omega(\delta^+)$ d'où $\omega(\delta^+) \leqslant \omega(\delta)$ puis $\omega(\delta^+) = \omega(\delta)$.
On a aussi $\omega(\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)| \text{ tq } |x-y| < \delta\} \leqslant \omega(\delta^-)$ d'où $\omega(\delta^-) = \omega(\delta)$.

Correction de l'exercice 2015 ▲

f admet des points fixes car l'application $x \mapsto f(x)-x$ change de signe entre 0 et 1. Si E est l'ensemble des points fixes de f alors E est stable par g donc $f-g$ a des signes opposés en $\min(E)$ et $\max(E)$.

Correction de l'exercice 2016 ▲

1. Non. Si φ est lipschitzienne alors $\varphi(x) = O(\|x\|)$ lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini, donc toute fonction f à décroissance suffisament rapide vers $-\infty$ n'est pas minorable par une fonction lipschitzienne. Contre-exemple explicite : $f(x) = -\|x\|^2$.
2. CNS : $x \mapsto f(x) + k\|x\|$ est minorée.
3. On pose $\varphi(x) = \sup\{g(x),\ g\ k\text{-lipschitzienne minorant } f\}$. Il suffit de vérifier que φ est k-lipschitzienne, ce sera alors la plus grande fonction k-lipschitzienne minorant f. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ et g_x, g_y des fonctions k-lipschitziennes minorant f telles que $g_y(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g_x(x)+\varepsilon$ et $g_x(y) \leqslant \varphi(y) \leqslant g_y(y)+\varepsilon$. On a :
$$\varphi(y) \leqslant g_y(y)+\varepsilon \leqslant g_y(x)+k\|x-y\|+\varepsilon \leqslant \varphi(x)+k\|x-y\|+\varepsilon,$$
$$\varphi(y) \geqslant g_x(y) \geqslant g_x(x)-k\|x-y\| \geqslant \varphi(x)-k\|x-y\|-\varepsilon.$$

Donc $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant k\|x-y\|+\varepsilon$ et on fait tendre ε vers 0^+.

Correction de l'exercice 2017 ▲

Soit pour $x>0$, $\ell(x)=\lim_{n\to+\infty} f(nx)$. On a $\ell(kx)=\ell(x)$ pour tout $k\in |||^*$ d'où aussi pour tout $k\in\mathbb{Q}^{+*}$. Montrons alors que $f(x)\to\ell(1)$ lorsque $x\to+\infty$: soit $\varepsilon>0$ et δ associé dans la définition de l'uniforme continuité de f. On choisit un rationnel $\alpha\in]0,\delta[$ et un entier N tel que $|f(n\alpha)-\ell(1)|=|f(n\alpha)-\ell(\alpha)|\leqslant\varepsilon$ pour tout $n\geqslant N$. Alors $|f(x)-\ell(1)|\leqslant 2\varepsilon$ pour tout $x\geqslant N\alpha$.

Correction de l'exercice 2018 ▲

Il existe $a>0$ tel que f est définie et continue sur $[a,+\infty[$.
1er cas. Supposons que ℓ est réel. Soit $\varepsilon>0$.

$$\exists A_1\geqslant a/\ \forall X\in[a,+\infty[,\ (X\geqslant A_1\Rightarrow \ell-\frac{\varepsilon}{2}<f(X+1)-f(X)<\ell+\frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit $X\geqslant A_1$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\ell-\frac{\varepsilon}{2})<\sum_{k=0}^{n-1}(f(X+k+1)-f(X+k))=f(X+n)-f(X)<\sum_{k=0}^{n-1}(\ell+\frac{\varepsilon}{2}),$$

et on a donc montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists A_1\geqslant a/\ \forall X\geqslant A_1,\ \forall n\in\mathbb{N}^N*,\ n(\ell-\frac{\varepsilon}{2})<f(X+n)-f(X)<n(\ell+\frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit de nouveau $\varepsilon>0$. Soit ensuite $x\geqslant A_1+1$ puis $n=E(x-A_1)\in\mathbb{N}^*$ puis $X=x-n$.
On a $X=x-E(x-A_1)\geqslant x-(x-A_1)=A_1$ et donc $n(\ell-\frac{\varepsilon}{2})<f(x)-f(x-n)<n(l+\frac{\varepsilon}{2})$ ou encore

$$\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell-\frac{\varepsilon}{2})<\frac{f(x)}{x}<\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell+\frac{\varepsilon}{2}).$$

Ensuite,

$$1-\frac{A_1+1}{x}=\frac{x-A_1-1}{x}\leqslant\frac{n}{x}=\frac{E(x-A_1)}{x}\leqslant\frac{x-A_1}{x}=1-\frac{A_1}{x},$$

et comme $1-\frac{A_1+1}{x}$ et $1-\frac{A_1}{x}$ tendent vers 1 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{n}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
Puis, puisque f est continue sur le segment $[A_1,A_1+1]$, f est bornée sur ce segment. Or $n\leqslant x-A_1<n+1$ s'écrit encore $A_1\leqslant x-n<A_1+1$ et donc, en posant $M=\sup\{|f(t)|,\ t\in[A_1,A_1+1]\}$, on a $\left|\frac{x-n)}{x}\right|\leqslant\frac{M}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. En résumé, $\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell-\frac{\varepsilon}{2})$ et $\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell+\frac{\varepsilon}{2})$ tendent respectivement vers $\ell-\frac{\varepsilon}{2}$ et $\ell+\frac{\varepsilon}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. On peut donc trouver un réel $A_2\geqslant a$ tel que $x\geqslant A_2\Rightarrow\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell+\frac{\varepsilon}{2})>(\ell-\frac{\varepsilon}{2})-\frac{\varepsilon}{2}=\ell-\varepsilon$ et un réel $A_3\geqslant a$ tel que $x\geqslant A_2\Rightarrow\frac{f(x-n)}{x}+\frac{n}{x}(\ell+\frac{\varepsilon}{2})<\ell+\varepsilon$.
Soit $A=\mathrm{Max}(A_1,A_2,A_3)$ et $x\geqslant A$. On a $\ell-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<\ell+\varepsilon$. On a montré que $\forall\varepsilon>0$, $(\exists A\geqslant a/\ \forall x\geqslant A,\ \ell-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<\ell+\varepsilon$ et donc $\lim_{x\to+\infty}=\ell$.
2ème cas. Supposons $\ell=+\infty$ (si $\ell=-\infty$, remplacer f par $-f$).
Soit $B>0$. $\exists A_1\geqslant a/\ \forall X\geqslant A_1,\ f(X+1)-f(X)\geqslant 2B$.
Pour $X\geqslant A_1$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $f(X+n)-f(X)=\sum_{k=0}^{n-1}(f(X+k+1)-f(X+k))\geqslant 2nB$.
Soient $x\geqslant 1+A_1$, $n=E(x-A_1)$ et $X=x-n$. On a $f(x)-f(x-n)\geqslant 2nB$ et donc,

$$\frac{f(x)}{x}\geqslant\frac{f(x-n)}{x}+\frac{2nB}{x},$$

qui tend vers $2B$ quand x tend vers $+\infty$ (démarche identique au 1er cas).
Donc $\exists A\geqslant A_1>a$ tel que $x\geqslant A\Rightarrow\frac{f(x-n)}{x}+\frac{2nB}{x}>B$.
Finalement : $(\forall B>0,\ \exists A>a/\ (\forall x\geqslant A,\ \frac{f(x)}{x}>B$ et donc, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

Correction de l'exercice 2019 ▲

Pour $x \neq 0$, posons $g(x) = \frac{f(2x)-f(x)}{x}$. f est définie sur un voisinage de 0 et donc il existe $a > 0$ tel que $]-a,a[\subset D_f$. Mais alors, $]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[\setminus\{0\} \subset D_g$.
Soit $x \in]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[\setminus\{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})) + f(\frac{x}{2^n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{2^{k+1}} g(\frac{x}{2^{k+1}}) + f(\frac{x}{2^n}).$$

Par suite, pour $x \in]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[\setminus\{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left|g(\frac{x}{2^{k+1}})\right| + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque par hypothèse, g tend vers 0 quand x tend vers 0,

$$\exists \alpha \in]0,\frac{a}{2}[/\ \forall X \in]-\alpha,\alpha[,\ |g(X)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour $x \in]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$ et pour k dans $N*$, $\frac{x}{2^k}$ est dans $]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$ et par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left|g(\frac{x}{2^{k+1}})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}(1-\frac{1}{2^n}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc, $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|$. On a ainsi montré que

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|.$$

Mais, à x fixé, $\frac{f(x/2^n)}{x}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, on peut choisir n tel que $\frac{f(x/2^n)}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$ et on a alors $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ (\forall x \in D_f,\ 0 < |x| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon,$$

ce qui montre que (f est dérivable en 0 et que) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Correction de l'exercice 2020 ▲

$\mathrm{Min}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ et $\mathrm{Max}(f,g) = \frac{1}{2}(f-g+|f-g|)$ sont continues en x_0 en vertu de théorèmes généraux.

Correction de l'exercice 2021 ▲

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in A$. $|x-z| \leqslant |x-y|+|y-z|$. Or, $forall z \in A,\ |x-z| \geqslant d(x,A)$ et donc $d(x,A)-|x-y|$ est un minorant de $\{|y-z|,\ z \in A\}$. Par suite, $d(x,A)-|x-y| \leqslant d(y,A)$. On a montré que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x,A)-d(y,A) \leqslant |y-x|.$$

En échangeant les roles de x et y, on a aussi montré que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d(y,A)-d(x,A) \leqslant |y-x|$.
Finalement, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \||f(y)-f(x)| \leqslant |y-x|$. Ainsi, f est donc 1-Lipschitzienne et en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2022 ▲

Soit $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{5\}$. Pour $x \neq 5$,

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\frac{3x-1}{x-5} - \frac{3x_0-1}{x_0-5}\right| = \frac{14|x-x_0|}{|x-5|.|x_0-5|}.$$

Puis, pour $x \in]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[$, on a $|x-5| > \frac{|x_0-5|}{2}[(>0)$, et donc,

$$\forall x \in]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[,\ |f(x) - f(x_0)| = \frac{28}{(x_0-5)^2}|x - x_0|.$$

Soient $\varepsilon > 0$ puis $\alpha = \text{Min}\{\frac{|x_0-5|}{2}, \frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28}\}(>0)$.

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{28}{(x_0-5)^2}|x - x_0| < \frac{28}{(x_0-5)^2}\frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28} = \varepsilon.$$

On a monté que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ (\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{5\},\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$. f est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Correction de l'exercice 2023 ▲

Soit χ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$. Soit x_0 un réel. On note que

$$x_0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}Q \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{\pi}{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}\chi(x_0 + \frac{1}{n})$ existe, $\lim_{n\to+\infty}\chi(x_0 + \frac{\pi}{n})$ existe et$\lim_{n\to+\infty}\chi(x_0 + \frac{1}{n}) \neq \lim_{n\to+\infty}\chi(x_0 + \frac{\pi}{n})$ (bien que $\lim_{n\to+\infty} x_0 + \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} x_0 + \frac{\pi}{n} = x_0$. Ainsi, pour tout réel $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'a pas de limite en x_0 et est donc discontinue en x_0.

Correction de l'exercice 2024 ▲

Soit a un réel strcitement positif. On peut déjà noter que $\lim_{x\to a,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} f(x) = 0$. Donc, si f a une limite quand x tend vers a, ce ne peut être que 0 et f est donc discontinue en tout rationnel strictement positif.
a désigne toujours un réel strictement positif fixé. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit x un réel strictement positif tel que $f(x) \geqslant \varepsilon$.
x est nécessairement rationnel, de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux vérifiant $\frac{1}{p+q} \geqslant \varepsilon$ et donc

$$2 \leqslant p + q \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mais il n'y a qu'un nombre fini de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) vérifiant ces inégalités et donc, il n'y a qu'un nombre fini de réels strictement positifs x tels que $f(x) \geqslant \varepsilon$.
Par suite, $\exists \alpha > 0$ tel que aucun des réels x de $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ ne vérifie $f(x) \geqslant \varepsilon$. Donc,

$$\forall a > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x > 0,\ (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon),$$

ou encore

$$\forall a > 0,\ \lim_{x\to a,\ x\neq a} f(x) = 0.$$

Ainsi, f est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Correction de l'exercice 2025 ▲

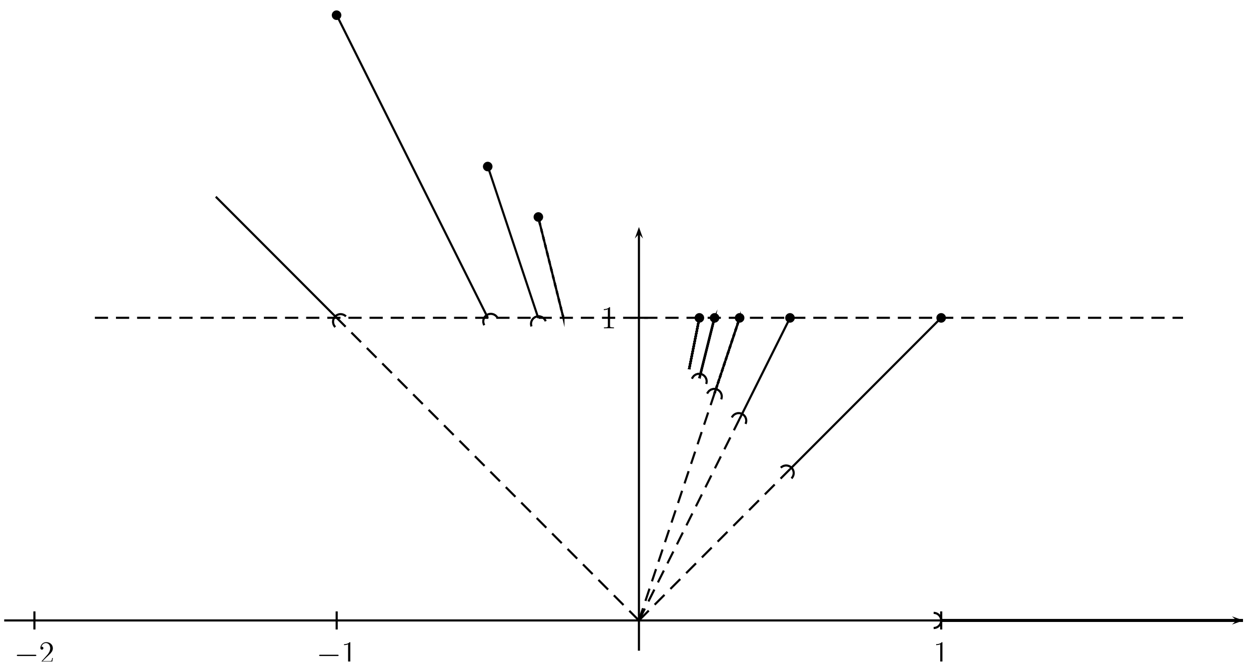
Donnons tout d'abord une expression plus explicite de $f(x)$ pour chaque réel x.
Si $x > 1$, alors $\frac{1}{x} \in]0,1[$ et donc, $f(x) = 0$.
Si $\exists p \in \mathbb{N}^*/\ x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, $f(x) = px$.
$f(0) = 1$ (et plus généralement, $\forall p \in \mathbb{Z}^*,\ f(\frac{1}{p}) = 1$).
Si $x \leqslant -1$, alors $\frac{1}{x} \in [-1,0[$ et donc, $f(x) = -x$.
Enfin, si $\exists p \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ tel que $x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, alors $\frac{1}{p+1} < x \leqslant \frac{1}{p}(<0)$ fournit, par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[$, $p \leqslant \frac{1}{x} < p+1(<0)$ et donc $f(x) = px$.
Etude en 0. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leqslant \frac{1}{x}$ et donc $1 - x < f(x) \leqslant 1$ si $x > 0$ et $1 \leqslant f(x) < 1 - x$ si $x < 0$. Par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - 1 \leqslant |x|,$$

et $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. f est donc continue en 0.
f est affine sur chaque intervalle de la forme $]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$ pour p élément de $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ et donc est continue sur ces intervalles et en particulier continue à gauche en chaque $\frac{1}{p}$. f est affine sur $]-\infty, -1]$ et aussi sur $]1, +\infty[$ et est donc continue sur ces intervalles. Il reste donc à analyser la continuité à droite en $\frac{1}{p}$, pour p entier relatif non nul donné. Mais,

$$f(\frac{1}{p}^+) = \lim_{x\to\frac{1}{p},\, x>\frac{1}{p}} (x(p-1)) = 1 - \frac{1}{p} \neq 1 = f(\frac{1}{p}).$$

f est donc discontinue à droite en tout $\frac{1}{p}$ où p est un entier relatif non nul donné.
Graphe de f :



Correction de l'exercice 2026 ▲

Soit $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \setminus \{0, \frac{1}{2}\} \\ 1 - x \text{ si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ 0 \text{ si } x = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$. f est bien une application définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.
De plus, si $x \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, alors $f(f(x)) = f(x) = x$.
Si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$, alors $1 - x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ et donc $f(f(x)) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$.
Enfin, $f(f(0)) = f(\frac{1}{2}) = 0$ et $f(f(\frac{1}{2})) = f(0) = \frac{1}{2}$.
Finalement, $f \circ f = Id_{[0,1]}$ et f, étant une involution de $[0,1]$, est une permutation de $[0,1]$.
Soit a un réel de $[0,1]$. On note que $\lim_{x\to a,\, x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} f(x) = 1 - a$ et $\lim_{x\to a,\, x\in\mathbb{Q}} f(x) = a$. Donc, si f a une limite en a, nécessairement $1 - a = a$ et donc $a = \frac{1}{2}$. Mais, si $a = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to a,\, x\in\mathbb{Q},\, x\neq a} f(x) = a = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\frac{1}{2})$ et donc f est discontinue en tout point de $[0,1]$.

Correction de l'exercice 2027 ▲

Soit T une période strictement positive de f. On note ℓ la limite de f en $+\infty$.
Soit x un réel. $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x + nT)$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x + nT) = \ell.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$ et donc, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2028 ▲

Voir la correction de l'exercice 2021.

Correction de l'exercice 2029 ▲

Soit $E = \{x \in [a,b] / \ f(x) \geqslant x\}$. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car a est dans E) et majorée (par b). Donc, E admet une borne supèrieure c vérifiant $a \leqslant c \leqslant b$.
Montrons que $f(c) = c$.
Si $c = b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E / \ b - \frac{1}{n} < x_n \leqslant b$. Puisque f est à valeurs dans $[a,b]$ et que les x_n sont dans E, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$x_n \leqslant f(x_n) \leqslant b \ (*).$$

Quand n tend vers $+\infty$, la suite (x_n) tend vers b (théorème des gendarmes) et donc, f étant croissante sur $[a,b]$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(b^-) \leqslant f(b)$. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient alors $b \leqslant f(b^-) \leqslant f(b) \leqslant b$ et donc $f(b) = b$. Finalement, dans ce cas, b est un point fixe de f.
Si $c \in [a,b[$, par définition de c, pour x dans $]c,b]$, $f(x) < x$ (car x n'est pas dans E) et par passage à la limite quand x tend vers c par valeurs supérieures et d'après les propriétés usuelles des fonctions croissantes, on obtient : $f(c)(\leqslant f(c+)) \leqslant c$.
D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E / \ c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c$. x_n étant dans E, on a $f(x_n) \geqslant x_n$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $f(c) \geqslant f(c^-) \geqslant c$. Finalement, $f(c) = c$ et dans tous les cas, f admet au moins un point fixe.

Correction de l'exercice 2030 ▲

Puisque f est croissante sur $[a,b]$, on sait que f admet en tout point x_0 de $]a,b[$ une limite à gauche et une limite à droite réelles vérifiant $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$ puis une limite à droite en a élément de $[f(a),+\infty[$ et une limite à gauche en b élément de $]-\infty, f(b)]$.
Si f est discontinue en un x_0 de $]a,b[$, alors on a $f(x_0^-) < f(x_0)$ ou $f(x_0) < f(x_0^+)$. Mais, si par exemple $f(x_0^-) < f(x_0)$ alors, $\forall x \in [a,x_0[\ (\neq \emptyset)$, $f(x) \leqslant f(x_0-)$ et $\forall x \in [x_0,b]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
Donc $]f(x_0^-), f(x_0)[\cap f([a,b]) = \emptyset$ ce qui est exclu puisque d'autre part $]f(x_0^-), f(x_0)[\neq \emptyset$ et $]f(x_0^-), f(x_0)[\subset [f(a), f(b)]$ (la démarche est identique si $f(x_0^+) > f(x_0)$). Donc, f est continue sur $]a,b[$. Par une démarche analogue, f est aussi continue en a ou b et donc sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 2031 ▲

Posons $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.
Soit $\varepsilon > 0$. $\exists A > 0 / \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, $(x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $(x,y) \in [A,+\infty[^2$. Alors, $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0,A]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Donc, $\exists \alpha > 0 / \ \forall (x,y) \in [0,A]^2$, $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$.
Résumons. $\alpha > 0$ étant ainsi fourni, soient x et y deux réels de $[0,+\infty[$ vérifiant $|x - y| < \alpha$.
Si $(x,y) \in [0,A]^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
Si $(x,y) \in [A,+\infty[^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
Si enfin on a $x \leqslant A \leqslant y$, alors, puisque $|A - x| \leqslant |x - y| < \alpha$, on a $|f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et puisque A et y sont dans $[A,+\infty[$, on a $|f(y) - f(A)| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Mais alors,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(A)| + |f(y) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \ \forall (x,y) \in [0,+\infty[^2$, $(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$. f est donc uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2032 ▲

Soit T une pèriode strictement positive de f. f est continue sur le segment $[0,T]$ et donc est bornée sur ce segment. f est par suite bornée sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité.
Soit $\varepsilon > 0$.
f est continue sur le segment $[0,T]$ et donc, d'après le théorème de HEINE, f est uniformément continue sur ce segment. Donc,

$$\exists \alpha \in]0,T[/ \ \forall (x,y) \in [0,T], \ (|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient x et y deux réels tels que $|x-y| < \alpha$. Si il existe un entier naturel k tel que $(x,y) \in [kT,(k+1)T]$, alors $x-kT \in [0,T]$, $y-kT \in [0,T]$, puis $|(x-kT)-(y-kT)| = |y-x| < \alpha$ et donc $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Sinon, en supposant par exemple que $x \leqslant y$, puisque l'on a choisi $\alpha < T$,

$$\exists k \in \mathbb{Z}/ \ (k-1)T \leqslant x \leqslant kT \leqslant y \leqslant (k+1)T.$$

Mais alors, $|x-kT| = |y-x| < \alpha$ et $|y-kT| \leqslant |y-x| < \alpha$. Par suite,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(kT)| + |f(y)-f(kT)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dans tous les cas, si $|x-y| < \alpha$, alors $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0/ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ (|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon).$$

f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2033 ▲

Commençons par la fin, trouver un tel δ montrera que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-(-3)| < \varepsilon$$

autrement dit la limite de f en $x_0 = 0$ est -3. Comme $f(0) = -3$ alors cela montre aussi que f est continue en $x_0 = 0$.

On nous donne un $\varepsilon > 0$, à nous de trouver ce fameux δ. Tout d'abord

$$|f(x)+3| = \left|\frac{2x+3}{3x-1} + 3\right| = \frac{11|x|}{|3x-1|}.$$

Donc notre condition devient :

$$|f(x)+3| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11|x|}{|3x-1|} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \varepsilon \frac{|3x-1|}{11}.$$

Comme nous voulons éviter les problèmes en $x = \frac{1}{3}$ pour lequel la fonction f n'est pas définie, nous allons nous placer "loin" de $\frac{1}{3}$. Considérons seulement les $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \frac{1}{6}$. Nous avons :

$$|x| < \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < x < +\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} < 3x-1 < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < |3x-1|.$$

Et maintenant explicitons δ : prenons $\delta < \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11}$. Alors pour $|x| < \delta$ nous avons

$$|x| < \delta = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} < \varepsilon \cdot |3x-1| \cdot \frac{1}{11}$$

ce qui implique par les équivalences précédentes que $|f(x)+3| < \varepsilon$.
Il y a juste une petite correction à apporter à notre δ : au cours de nos calculs nous avons supposé que $|x| < \frac{1}{6}$, mais rien ne garantie que $\delta \leqslant \frac{1}{6}$ (car δ dépend de ε qui pourrait bien être très grand, même si habituellement ce sont les ε petits qui nous intéressent). Au final le δ qui convient est donc :

$$\delta = \min(\frac{1}{6}, \frac{\varepsilon}{22}).$$

Remarque finale : bien sûr on savait dès le début que f est continue en $x_0 = 0$. En effet f est le quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas en x_0. Donc nous savons dès le départ qu'un tel δ existe, mais ici nous avons fait plus, nous avons trouvé une formule explicite pour ce δ.

Correction de l'exercice 2034 ▲

1. Le graphe est composé d'une portion de droite au dessus des $x \in]-\infty,1[$; d'une portion de parabole pour les $x \in [1,4]$, d'une portion d'une autre parabole pour les $x \in]4,+\infty$. (Cette dernière branche est bien une parabole, mais elle n'est pas dans le sens "habituel", en effet si $y = 8\sqrt{x}$ alors $y^2 = 64x$ et c'est bien l'équation d'une parabole.)

   On "voit" immédiatement sur le graphe que la fonction est continue (les portions se recollent !). On "voit" aussi que la fonction est bijective.
2. La fonction est continue sur $]-\infty,1[$, $]1,4[$ et $]4,+\infty[$ car sur chacun des ces intervalles elle y est définie par une fonction continue. Il faut examiner ce qui se passe en $x = 1$ et $x = 4$. Pour $x < 1$, $f(x) = x$, donc la limite à gauche (c'est-à-dire $x \to 1$ avec $x < 1$) est donc $+1$. Pour $x \geqslant 1$, $f(x) = x^2$ donc la limite à droite vaut aussi $+1$. Comme on a $f(1) = +1$ alors les limites à gauche, à droite et la valeur en 1 coïncident donc f est continue en $x = 1$.

   Même travail en $x = 4$. Pour $x \in [1,4]$, $f(x) = x^2$ donc la limite à gauche en $x = 4$ est $+16$. On a aussi $f(4) = +16$. Enfin pour $x > 4$, $f(x) = 8\sqrt{x}$, donc la limite à droite en $x = 4$ est aussi $+16$. Ainsi f est continue en $x = 4$.

   Conclusion : f est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Le graphe devrait vous aider : tout d'abord il vous aide à se convaincre que f est bien bijective et que la formule pour la bijection réciproque dépend d'intervalles. Petit rappel : le graphe de la bijection réciproque f^{-1} s'obtient comme symétrique du graphe de f par rapport à la bissectrice d'équation $(y = x)$ (dans un repère orthonormal).

   Ici on se contente de donner directement la formule de f^{-1}. Pour $x \in]-\infty,1[$, $f(x) = x$. Donc la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in]-\infty,1[$. Pour $x \in [1,4]$, $f(x) = x^2$. L'image de l'intervalle $[1,4]$ est l'intervalle $[1,16]$. Donc pour chaque $y \in [1,16]$, la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Enfin pour $x \in]4,+\infty[$, $f(x) = 8\sqrt{x}$. L'image de l'intervalle $]4,+\infty[$ est donc $]16,+\infty[$ et f^{-1} est définie par $f^{-1}(y) = \frac{1}{64}y^2$ pour chaque $y \in]16,+\infty[$.
   Nous avons définie $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de telle sorte que f^{-1} soit la bijection réciproque de f.

   C'est un bon exercice de montrer que f est bijective sans calculer f^{-1} : vous pouvez par exemple montrer que f est injective et surjective. Un autre argument est d'utiliser un résultat du cours : f est continue, strictement croissante avec une limite $-\infty$ en$-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et on sait même que la bijection réciproque est continue).

Correction de l'exercice 2035 ▲

Soit $x_0 \neq 0$, alors la fonction f est continue en x_0, car elle s'exprime sous la forme d'un quotient de fonctions continues où le dénominateur ne s'annule pas en x_0. Reste à étudier la continuité en 0. Mais

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0.

Correction de l'exercice 2040 ▲

1. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ t elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.

   $$|f(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leqslant |\sin x|.$$

   Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue.

2. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0. Il faut remarquer que g est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $k(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$: en effet $g(x)=\frac{k(x)-k(0)}{x-0}$. Donc si k est dérivable en 0 alors la limite de g en 0 est égale à la valeur de k' en 0.
   Or la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ donc $k'(0)=0$. Bilan : en posant $g(0)=0$ nous obtenons une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. h est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
$$h(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{(1+x)}.$$
   Donc h a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $h(1)=-\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En -1 la fonction h ne peut être prolongée continuement, car en -1, h n'admet de limite finie.

Correction de l'exercice 2043 ▲

Fixons $x\in\mathbb{R}$ et soit $y=x/2$, comme $f(y)=f(2y)$ nous obtenons $f(\frac{1}{2}x)=f(x)$. Puis en prenant $y=\frac{1}{4}x$, nous obtenons $f(\frac{1}{4}x)=f(\frac{1}{2}x)=f(x)$. Par une récurrence facile nous avons
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f(\frac{1}{2^n}x)=f(x).$$
Notons (u_n) la suite définie par $u_n=\frac{1}{2^n}x$ alors $u_n\to 0$ quand $n\to+\infty$. Par la continuité de f en 0 nous savons alors que : $f(u_n)\to f(0)$ quand $n\to+\infty$. Mais $f(u_n)=f(\frac{1}{2^n}x)=f(x)$, donc $(f(u_n))_n$ est une suite constante égale à $f(x)$, et donc la limite de cette suite est $f(x)$! Donc $f(x)=f(0)$. Comme ce raisonnement est valable pour tout $x\in\mathbb{R}$ nous venons de montrer que f est une fonction constante.

Correction de l'exercice 2053 ▲

Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes de racines carrées, il est utile de faire intervenir “l'expression conjuguée" :
$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$
Les racines au numérateur ont “disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.
Appliquons ceci sur un exemple :
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}\\&=\frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\&=\frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\&=\frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\&=\frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}\end{aligned}$$
Et nous avons
$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}=1.$$
Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x\mapsto x^{m-n}$.
Distinguons plusieurs cas pour la limite de f en 0.

— Si $m > n$ alors x^{m-n}, et donc $f(x)$, tendent vers 0.
— Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ tendent vers 1.
— Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n-m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n-m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n-m > 0$ impair *f n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Correction de l'exercice 2056 ▲

1. Soit $p > 0$ la période : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. Par une récurrence facile on montre :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+np) = f(x).$$
Comme f n'est pas constante il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Notons $x_n = a+np$ et $y_n = b+np$. Supposons, par l'absurde, que f a une limite ℓ en $+\infty$. Comme $x_n \to +\infty$ alors $f(x_n) \to \ell$. Mais $f(x_n) = f(a+np) = f(a)$, donc $\ell = f(a)$. De même avec la suite (y_n) : $y_n \to +\infty$ donc $f(y_n) \to \ell$ et $f(y_n) = f(b+np) = f(b)$, donc $\ell = f(b)$. Comme $f(a) \neq f(b)$ nous obtenons une contradiction.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Notons
$$F = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
F est un ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$, notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de F, alors $\ell < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant y_0 \leqslant \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme f est croissante alors :
$$\forall x \geqslant x_0 \qquad f(x) \geqslant f(x_0) = y_0 \geqslant \ell - \varepsilon.$$
De plus par la définition de ℓ :
$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) \leqslant \ell.$$
Les deux propriétés précédentes s'écrivent :
$$\forall x \geqslant x_0 \qquad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell.$$
Ce qui exprime bien que la limite de f en $+\infty$ est ℓ.

Correction de l'exercice 2060 ▲

1. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$. Si $x > 0$ cette expression vaut $x+2$ donc la limite à droite en $x = 0$ est $+2$. Si $x < 0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x = 0$ est -2. Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x = 0$.
2. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$ pour $x < 0$. Donc la limite quand $x \to -\infty$ est $-\infty$.
3. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, lorsque $x \to 2$ cette expression tend vers 4.
4. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x$. Lorsque $x \to \pi$ la limite est donc 2.
5. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$. Lorsque $x \to 0$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.
6. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}\right) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$. Lorsque $x \to +\infty$, la limite vaut 0.
7. Nous avons l'égalité $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :
$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

Lors que $x \to 0$, alors $a \to 1$ et la limite cherchée est $\frac{1}{3}$.
Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f dérivable en a alors
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$
Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a = 0$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8. $\frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+x^2+\cdots+x^n$. Donc si $x \to 1$ la limite de $\frac{x^n-1}{x-1}$ est n. Donc la limite de $\frac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\frac{1}{n}$.
La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ et $a = 1$. Alors $\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1) = n$.

Correction de l'exercice 2067 ▲

1. $-\infty$
2. 0
3. $+\infty$
4. $+\infty$
5. $\frac{3}{2}$
6. $-\infty$
7. 0
8. 0
9. 0
10. 0
11. -2
12. $-\infty$
13. 1
14. e^4
15. 1
16. e
17. e
18. 0
19. 0
20. 0

Correction de l'exercice 2072 ▲

1. Montrons d'abord que la limite de
$$f(x) = \frac{x^k-\alpha^k}{x-\alpha}$$
en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2 x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2 x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1})(x-\alpha) = x^k-\alpha^k$. Donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de

f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme

$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n} = \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha} \times \frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}.$$

Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est

$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La fonction $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{1-\cos x}{\cos x(\cos 2x - \cos x)}$. Or $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Posons $u = \cos x$, alors

$$f(x) = \frac{1-u}{u(2u^2-u-1)} = \frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)} = \frac{1}{u(-1-2u)}$$

Lorsque x tend vers 0, $u = \cos x$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.

3.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}
\end{aligned}$$

Quand $x \to +\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ et $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}} \to 0$, donc la limite recherchée est $\frac{1}{2}$.

4. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Notons $g(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \to \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \frac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

5. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y-1 < E(y) \leqslant y$. Donc pour $y>0$, $\frac{y-1}{y} < \frac{E(y)}{y} \leqslant 1$. On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\frac{E(y)}{y}$ tend 1. On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$. En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $xE(\frac{1}{x}) = \frac{E(y)}{y}$ tend vers 1.

6.

$$\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}.$$

La limite de $\frac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 ($\frac{e^x-e^2}{x-2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto e^x$ en la valeur $x=2$), la limite voulue est $\frac{e^2}{5}$.

7. Soit $f(x)=\frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x}$. Supposons $\alpha\geqslant 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet pour pour $u_k=2k\pi$, $f(2k\pi)=(2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$. Cependant pour $v_k=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $f(v_k)=\frac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha=4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
   Reste le cas $\alpha<4$. Il existe β tel que $\alpha<\beta<4$.
$$f(x)=\frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x}=\frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta}+\frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x}.$$
   Le numérateur tend $+\infty$ car $4-\beta>0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x$ (car $\beta>\alpha$ et $\sin^2 x$ est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives). La limite est donc de type $+\infty/0^+$ (qui n'est pas indéterminée !) et vaut donc $+\infty$.

Correction de l'exercice 2078 ▲

Réponse : $\frac{2}{3}$

Correction de l'exercice 2079 ▲

1. Comme $-1\leqslant\sin\frac{1}{x}\leqslant+1$ alors $1\leqslant 2+\sin\frac{1}{x}\leqslant+3$. Donc pour $x>0$, nous obtenons $\frac{x}{3}\leqslant\frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}\leqslant x$. On obtient une inégalité similaire pour $x<0$. Cela implique $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}=0$.
2. Sachant que $\frac{\ln(1+t)}{t}\to 1$ lorsque $t\to 0$, on peut le reformuler ainsi $\ln(1+t)=t\cdot\mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t)\to 1$ lorsque $t\to 0$. Donc $\ln(1+e^{-x})=e^{-x}\mu(e^{-x})$. Maintenant
$$\begin{aligned}(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}&=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right)\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(e^{-x}\mu(e^{-x})\right)\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{x}\left(-x+\ln\mu(e^{-x})\right)\right)\\&=\exp\left(-1+\frac{\ln\mu(e^{-x})}{x}\right)\end{aligned}$$
   $\mu(e^{-x})\to 1$ donc $\ln\mu(e^{-x})\to 0$, donc $\frac{\ln\mu(e^{-x})}{x}\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.
   Bilan : la limite est $\exp(-1)=\frac{1}{e}$.
3.
4. Sachant $\frac{e^x-1}{x}\to 1$ lorsque $x\to 0$, on reformule ceci en $e^x-1=x\cdot\mu(x)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(x)\to 1$ lorsque $x\to 0$. Cela donne $\ln(e^x-1)=\ln(x\cdot\mu(x))=\ln x+\ln\mu(x)$.
$$\begin{aligned}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}&=\exp\left(\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{\ln x+\ln\mu(x)}\ln x\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln\mu(x)}{\ln x}}\right)\end{aligned}$$

Maintenant $\mu(x) \to 1$ donc $\ln \mu(x) \to 0$, et $\ln x \to -\infty$ lorsque $x \to 0$. Donc $\frac{\ln \mu(x)}{\ln x} \to 0$. Cela donne

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \lim_{x \to 0^+} \exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln \mu(x)}{\ln x}}\right) = \exp(1) = e.$$

Correction de l'exercice 2080 ▲

Réponse : 1.

Correction de l'exercice 2081 ▲

Supposons $a \geqslant b$. Alors

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(a^x \times \frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Or $0 \leqslant \frac{b}{a} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\frac{b}{a})^x \leqslant 1$ pour tout $x \geqslant 1$. Donc $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{x}} \leqslant \left(\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant 1^{\frac{1}{x}}$. Les deux termes extrêmes tendent vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ donc le terme du milieu tend aussi vers 1. Conclusion : si $a \geqslant b$ alors $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a$. Si $b \geqslant a$ alors cette limite vaudrait b. Cela se résume dans le cas général où a,b sont quelconques par $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \max(a,b)$.

Correction de l'exercice 2082 ▲

Soit

$$f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)$$

$a^x \to 1$, $b^x \to 1$ donc $\frac{a^x+b^x}{2} \to 1$ lorsque $x \to 0$ et nous sommes face à une forme indéterminée. Nous savons que $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. Autrement dit il existe un fonction μ telle que $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$ avec $\mu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$.
Appliquons cela à $g(x) = \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$. Alors

$$g(x) = \ln\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right) \cdot \mu(x)$$

où $\mu(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$. (Nous écrivons pour simplifier $\mu(x)$ au lieu de $\mu(\frac{a^x+b^x}{2}-1)$.)

Nous savons aussi que $\lim_{t \to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$. Autrement dit il existe un fonction ν telle que $e^t - 1 = t \cdot \nu(t)$ avec $\nu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$.
Appliquons ceci :

$$\begin{aligned}
\frac{a^x+b^x}{2} - 1 &= \frac{1}{2}(e^{x\ln a} + e^{x\ln b}) - 1 \\
&= \frac{1}{2}(e^{x\ln a} - 1 + e^{x\ln b} - 1) \\
&= \frac{1}{2}(x\ln a \cdot \nu(x\ln a) + x\ln b \cdot \nu(x\ln b)) \\
&= \frac{1}{2}x(\ln a \cdot \nu(x\ln a) + \ln b \cdot \nu(x\ln b))
\end{aligned}$$

Reste à rassembler tous les éléments du puzzle :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}g(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\cdot\mu(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot x\left(\ln a\cdot\nu(x\ln a)+\ln b\cdot\nu(x\ln b)\right)\cdot\mu(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\left(\ln a\cdot\nu(x\ln a)+\ln b\cdot\nu(x\ln b)\right)\cdot\mu(x)\right)
\end{aligned}$$

Or $\mu(x)\to 1$, $\nu(x\ln a)\to 1$, $\nu(x\ln b)\to 1$ lorsque $x\to 0$. Donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)\right) = \sqrt{ab}.$$

Correction de l'exercice 2084 ▲

Pour $x>0$, $(x^x)^x = e^{x\ln(x^x)} = e^{x^2\ln x}$ et $x^{(x^x)} = e^{x^x\ln x}$. Par suite,

$$\forall x>0,\ \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2-x^x)).$$

Or, $x^2-x^x = -x^x(1-x^{2-x}) = -e^{x\ln x}(1-e^{(2-x)\ln x})$. Quand x tend vers $+\infty$, $(2-x)\ln x$ tend vers $-\infty$. Donc, $1-e^{(2-x)\ln x}$ tend vers 1 puis x^2-x^x tend vers $-\infty$. Mais alors, $\ln x(x^2-x^x)$ tend vers $-\infty$, puis $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2-x^x))$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0.}$$

Correction de l'exercice 2085 ▲

(a) Il faut que le dénominateur ne s'annule pas donc $x\neq\frac{5}{2}$. En plus il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul, c'est-à-dire $(2+3x)\times(5-2x)\geqslant 0$, soit $x\in[-\frac{2}{3},\frac{5}{2}]$. L'ensemble de définition est donc $[-\frac{2}{3},\frac{5}{2}[$.

(b) Il faut $x^2-2x-5\geqslant 0$, soit $x\in]-\infty,1-\sqrt{6}]\cup[1+\sqrt{6},+\infty[$.

(c) Il faut $4x+3>0$ soit $x>-\frac{3}{4}$, l'ensemble de définition étant $]-\frac{3}{4},+\infty[$.

Correction de l'exercice 2089 ▲

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$0\leqslant|f(x)| = \frac{|\cos x|}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1.$$

Par conséquent, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\in[-1,1]$ donc f est minorée (-1 est un minorant), majorée (1 est un majorant) et $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)\leqslant 1$. Comme $f(0)=1$ on a nécessairement $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)\geqslant 1$. Conclusion :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$$

Correction de l'exercice 2101 ▲

$\alpha = \inf(A) \Rightarrow f(\alpha^+) \leqslant \alpha$ et $f(\alpha^-) \geqslant \alpha$.

Correction de l'exercice 2102 ▲

Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f(b) < f(a)$. On note $E = \{x \in [a,b] \text{ tq } f(x) < f(a)\}$ et $c = \inf(E)$. On a $c \in E$ et $c > a$ par hypothèse et donc $f(c) = \lim_{x \to c^-} f(x) \geqslant f(a)$, absurde.

Correction de l'exercice 2103 ▲

Injectivité évidente.

Monotonie : pour $a < b < c$ on a $|a-b| < |a-c|$ et $|c-b| < |c-a|$ d'où les mêmes inégalités pour $f(a), f(b), f(c)$ ce qui prouve que $f(b)$ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(c)$.

Continuité : soit $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $x = a - \delta$, $y = a + \delta$ et $z = a - 4\delta$. On a $2\delta = |x-y| < |x-z| = 3\delta$ donc $|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(z)|$ et en faisant tendre δ vers 0^+ : $|f(a^-) - f(a^+)| \leqslant |f(a^-) - f(a^-)| = 0$.

Affine : soient $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $z = x + h$ et $x - h < y < x$. On a $|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(x+h)|$ d'où en faisant tendre y vers $(x-h)^+$: $|f(x) - f(x-h)| \leqslant |f(x) - f(x+h)|$. On obtient l'inégalité inverse en permutant y et z, donc $f(x-h)$ et $f(x+h)$ sont équidistants de $f(x)$ et, par injectivité de f : $f(x) = \frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$ ce qui permet de conclure avec la continuité de f.

Correction de l'exercice 2106 ▲

(a) Étudier les logs.

(b) Idem.

Correction de l'exercice 2107 ▲

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{(1+ax)\ln(1+ax)} - \frac{b}{(1+bx)\ln(1+bx)}$.

Pour $x \geqslant 0$ fixé, la fonction $t \longmapsto \frac{t}{(1+tx)\ln(1+tx)}$ est décroissante.

Correction de l'exercice 2110 ▲

(a) Oui ssi $|a| > |b|$.

(b) Oui ssi $|a| < |b|$.

Correction de l'exercice 2111 ▲

$= \frac{\operatorname{ch}(nx/2)\operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}$.

Correction de l'exercice 2112 ▲

$x = -\frac{2}{3}a$.

Correction de l'exercice 2113 ▲

$2\coth 2x - \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 2114 ▲

$\coth \frac{x}{2} - 1$.

Correction de l'exercice 2116 ▲

Poser $X = e^x$, $Y = e^y$: $\Rightarrow \begin{cases} X+Y = a+b \\ XY = \frac{a+b}{a-b}. \end{cases}$ Il y a des solutions si et seulement si $a \geqslant \sqrt{b^2+4}$.

Correction de l'exercice 2118 ▲

$= x + \ln \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2119 ▲

$x = \frac{5}{4}$.

Correction de l'exercice 2120 ▲

(a) $F(x) = \operatorname{argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

(b) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left|\frac{\sqrt{5}-2x-1}{\sqrt{5}+2x+1}\right|$.

Correction de l'exercice 2121 ▲

(a) Étude de $x \mapsto \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \cdots + \left(\frac{a_p}{a}\right)^x$.

(b) $x_a > x_b$.

(c) $x_a \to \ell$. Si $\ell > 0$, $a^{a_a} \to +\infty$, mais $a_1^{x_a} + \cdots + a_p^{x_a} \to a_1^\ell + \cdots + a_p^\ell$.
Donc $\ell = 0$, et $x_a \ln a \to \ln p$.

Correction de l'exercice 2122 ▲

(a) Pour $x = 1$ on a $f \circ f(y) = yf(1)$ donc f est injective et pour $y = 1$: $f(xf(1)) = f(x)$ d'où $f(1) = 1$.

(b) $f(xy) = f(xf(f(y))) = f(y)f(x)$.
Pour $0 < x < 1$ on a $f(x^n) = f(x)^n \to +\infty$ (lorsque $n \to \infty$) donc $f(x) > 1$ ce qui entraîne par morphisme la décroissance de f. Enfin f est monotone et $f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$ donc f n'a pas de saut et est continue.

(c) En tant que morphisme continu, f est de la forme $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et l'involutivité et la décroissance donnent $\alpha = -1$.

Correction de l'exercice 2123 ▲

(a) $4\cos\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) = 2 \iff \theta \equiv \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

(b) $\sin\theta + \cdots + \sin 4\theta = 2\sin\theta\cos\theta(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1) = 4\sin(5\theta/2)\cos\theta\cos(\theta/2)$
$4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0 \iff \cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(2\pi/5)$ ou $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin(2\pi/5)$
$\Rightarrow$ modulo 2π, $\theta \in \{0, \pi, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5\}$.

(c) $\cos\theta \in \left\{-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \iff \theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ ou $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}$.

(d) $2\sin(3\theta/2)\sin(\theta/2) = 2\sin(3\theta/2)\cos(3\theta/2) \iff \theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$ ou $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$ ou $\theta \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

(e) $2\cos 4\theta\cos 3\theta = \cos 4\theta \iff \theta \equiv \frac{\pi}{8} \pmod{\frac{\pi}{4}}$ ou $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{9} \pmod{\frac{2\pi}{3}}$.

(f) $2\cos 7\theta\cos 5\theta = \sqrt{3}\cos 5\theta \iff \theta \equiv \frac{\pi}{10}(\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{5})$ ou $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{42}(\mathrm{mod}\,\frac{2\pi}{7})$.

(g) $\theta \equiv 0 \,\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{3}$ ou $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{12}(\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{2})$.

(h) $\cos^3\theta\sin 3\theta + \cos 3\theta\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin 4\theta \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{8}(\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{2})$.

(i) $\theta \equiv 0(\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{8})$.

(j) $\sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{6}(\mathrm{mod}\,2\pi)$ ou $\theta \equiv \frac{5\pi}{6}(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

(k) $\theta \equiv 0, \pm\arctan\sqrt{5}(\mathrm{mod}\,\pi)$.

(l) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos\theta\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)$.

$\cos\theta + \sin\theta = 0 \iff \theta \equiv -\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\,\pi)$.

$\cos\theta - \sin\theta = \cos\theta\sin\theta \Rightarrow (\cos\theta\sin\theta)^2 + 2\cos\theta\sin\theta = 1 \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+1}{2}.\end{cases}$

Les valeurs trouvées conviennent.

(m) $\tan x = \tan y = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2124 ▲

(a) $-\frac{2\pi}{3} < \theta(\mathrm{mod}\,2\pi) < \frac{\pi}{3}$.

(b) $2\alpha < \theta(\mathrm{mod}\,2\pi) < 2\pi$ avec $\begin{cases}\cos\alpha = 2/\sqrt{5}\\ \sin\alpha = 1/\sqrt{5}.\end{cases}$

Correction de l'exercice 2126 ▲

(a) $1 - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$,

$\cos\beta + \cos\gamma = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$.

(b) $= 1$.

Correction de l'exercice 2128 ▲

$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$.

$$S_n = \begin{cases}\frac{\tan((n+1)\theta)-\tan\theta}{\sin\theta} & \text{si } \sin\theta \neq 0\\ n & \text{si } \theta \equiv 0(\mathrm{mod}\,2\pi)\\ -n & \text{si } \theta \equiv \pi(\mathrm{mod}\,2\pi).\end{cases}$$

Correction de l'exercice 2129 ▲

linéariser : $\sum = \frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n} - \sin\alpha\right)$.

Correction de l'exercice 2130 ▲

$\mathrm{cotan}x - 2\mathrm{cotan}2x = \tan x$, $\sum = \frac{1}{2^n}\mathrm{cotan}\frac{\alpha}{2^n} - 2\mathrm{cotan}2\alpha$.

Correction de l'exercice 2131 ▲

$\theta = \frac{\pi}{7}$: $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin 3\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{\sin 3\theta} = \frac{1}{\sin 2\theta}$.

Correction de l'exercice 2132 ▲

(a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est paire, alors, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x),$$

et donc f' est impaire. De même, si f est impaire, pour tout réel x, on a $f(-x) = -f(x)$, et par dérivation on obtient pour tout réel x, $f'(-x) = f'(x)$. f' est donc paire.

$$\boxed{(f \text{ paire} \Rightarrow f' \text{ impaire) et } (f \text{ impaire} \Rightarrow f' \text{ paire.})}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons f paire. Par suite, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. Immédiatement par récurrence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(-x) = (-1)^n f(x).$$

Ceci montre que $f^{(n)}$ a la parité de n, c'est-à-dire que $f^{(n)}$ est une fonction paire quand n est un entier pair et est une fonction impaire quand n est un entier impair. De même, si f est impaire et n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ a la parité contraire de celle de n.

(c) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire et F une primitive de f. Montrons que F est paire. Pour x réel, posons $g(x) = F(x) - F(-x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0.$$

g est donc constante sur $\mathbb{R}$ et par suite, pour tout réel x, $g(x) = g(0) = F(0) - F(0) = 0$. Ainsi, g est la fonction nulle et donc, pour tout réel x, $F(x) = F(-x)$. On a montré que F est paire. Par contre, si f est paire, F n'est pas nécessairement impaire. Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto 1$ est paire, mais $F\ :\ x \mapsto x+1$ est une primitive de f qui n'est pas impaire.

(d) On montre aisément en dérivant une ou plusieurs fois l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$, que les dérivées successives d'une fonction T-périodique sont T-périodiques. Par contre, il n'en est pas de même des primitives. Par exemple, si pour tout réel x, $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, f est π-périodique, mais la fonction $F\ :\ x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$, qui est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, n'est pas π-périodique ni même périodique tout court.

Correction de l'exercice 2133 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sqrt[n]{n}$ puis, pour x réel strictement positif, $f(x) = x^{1/x}$ de sorte que pour tout naturel non nul n, on a $u_n = f(n)$. f est définie sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$, $f(x) = e^{\ln x/x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} e^{\ln x/x}.$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ et donc f' est strictement positive sur $]0,e[$ et strictement négative sur $]e,+\infty[$. f est donc strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. En particulier, pour $n \geqslant 3$,

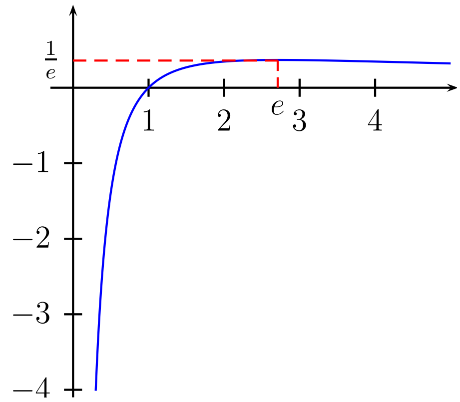
$$u_n = f(n) \leqslant f(3) = u_3 = \sqrt[3]{3}.$$

Comme $u_2 = \sqrt{2} > 1 = u_1$, on a donc $\text{Max}\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \text{Max}\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\}$. Enfin, $\sqrt{2} = 1{,}41... < 1{,}44.. = \sqrt[3]{3}$ (on peut aussi constater que $(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$). Finalement,

$$\boxed{\text{Max}\{\sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} = \sqrt[3]{3} = 1{,}44...}$$

Correction de l'exercice 2134 ▲

(a) Pour $x>0$, posons $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x>0$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. f est donc strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Le graphe de f s'en déduit facilement :



(b) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a<b$. On a alors

$$a^b=b^a\Leftrightarrow \ln(a^b)=\ln(b^a)\Leftrightarrow b\ln a=a\ln b\Leftrightarrow \frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}\Leftrightarrow f(a)=f(b).$$

Si $a\geqslant 3$, puisque f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, on a alors $f(a)>f(b)$ et en particulier, $f(a)\neq f(b)$. a n'est donc pas solution. $a=1$ n'est évidemment pas solution. Par exemple, $a^b=b^a\Rightarrow 1^b=b^1\Rightarrow b=1=a$ ce qui est exclu. Donc, nécessairement $a=2$ et b est un entier supérieur ou égal à 3, et donc à e, vérifiant $f(b)=f(2)$. Comme f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, l'équation $f(b)=f(2)$ a au plus une solution dans $[e,+\infty[$. Enfin, comme $2^4=16=4^2$, on a montré que : il existe un et un seul couple (a,b) d'entiers naturels non nuls tel que $a<b$ et $a^b=b^a$, à savoir $(2,4)$.

Correction de l'exercice 2135 ▲

(a) Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leqslant \ln 2 &\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\leqslant \ln 2\Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\leqslant 2 \text{ et } x+1\neq 0\\
&\Leftrightarrow -2\leqslant \frac{x+1}{2x+1}\leqslant 2 \text{ et } x\neq -1\Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1}+2\geqslant 0 \text{ et } \frac{x+1}{2x+1}-2\leqslant 0 \text{ et } x\neq -1\\
&\Leftrightarrow \frac{5x+3}{2x+1}\geqslant 0 \text{ et } \frac{-3x-1}{2x+1}\leqslant 0 \text{ et } x\neq -1\\
&\Leftrightarrow \left(x\in\left]-\infty,-\frac{3}{5}\right]\cup\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \text{ et } \left(\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[\right) \text{ et } x\neq -1\\
&\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup\left]-1,-\frac{3}{5}\right]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[
\end{aligned}$$

(b) Pour $x>0$

$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x=x\ln\sqrt{x}\Leftrightarrow \ln x(\sqrt{x}-\frac{x}{2})=0\\
&\Leftrightarrow \ln x\times\sqrt{x}(2-\sqrt{x})=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=4.
\end{aligned}$$

(c) $\operatorname{argch}3=\ln(3+\sqrt{3^2-1})=\ln(3+\sqrt{8})$ et $\operatorname{argth}\frac{7}{9}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}\right)=\ln\sqrt{8}$. Donc, $\operatorname{argch}3-\operatorname{argth}\frac{7}{9}=\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$. Par suite,

$$2\operatorname{argsh} x = \operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth}\frac{7}{9} \Leftrightarrow x = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{8}}\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)}{4}.$$

(d) Pour $x \in]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{100},\frac{1}{10},1\right\}$,

$$\ln_x(10)+2\ln_{10x}(10)+3\ln_{100x}(10) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(10)}{\ln x}+2\frac{\ln(10)}{\ln(10x)}+3\frac{\ln(10)}{\ln(100x)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))+2\ln x(\ln x+2\ln(10))+3\ln x(\ln x+\ln(10))}{\ln x(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))} = 0$$
$$\Leftrightarrow 6\ln^2 x+10\ln(10)\times\ln x+2\ln^2(10) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x \in \left\{\frac{-5\ln(10)+\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}, \frac{-5\ln(10)-\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.$$

Comme aucun de ces deux nombres n'est dans $\left\{\frac{1}{100},\frac{1}{10},1\right\}$, $\mathscr{S} = \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}$.

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x}+2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1) \Leftrightarrow 3\times 2^{2x-1} = 4\times 3^{x-\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow (2x-3)\ln 2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)\ln 3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2-\ln 3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

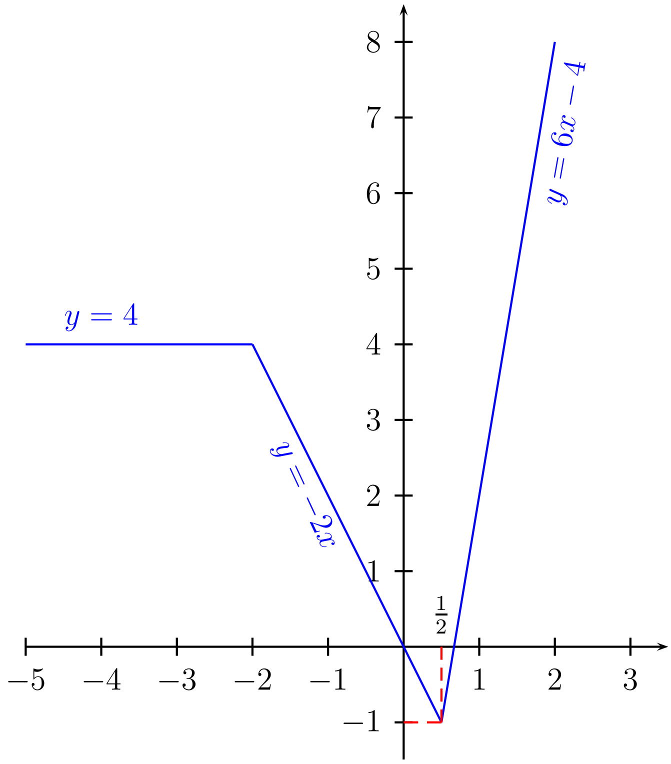
Correction de l'exercice 2136 ▲

On notera $\mathscr{C}_i$ le graphe de f_i.

(a) f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$. On précise dans un tableau l'expression de $f_1(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$ -2	-2 $1/2$	$1/2$ $+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	$-2x+1$	$2x-1$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$f_1(x)$	4	$-2x$	$6x-4$

On en déduit $\mathscr{C}_1$.



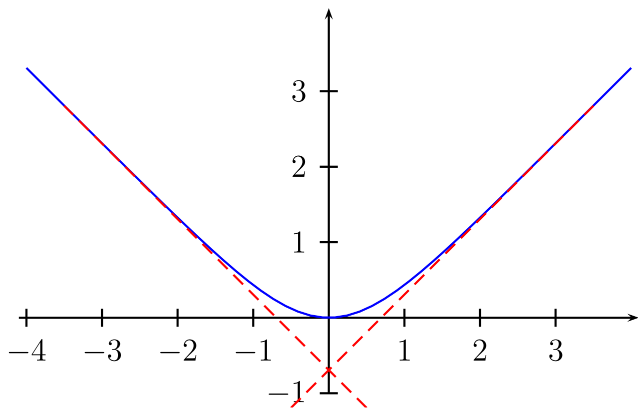
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\text{ch}\,x \geqslant 1$ et donc $f_2(x)$ existe et $f_2(x) \geqslant 0$. f_2 est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f_2 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire. Puisque la fonction $x \mapsto \text{ch}\,x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et que la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, par parité, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. f_2 est paire et donc f_2' est impaire. Par suite, $f_2'(0) = 0$ et $\mathscr{C}_2$ admet l'axe des abscisses pour tangente en $(0, f_2(0)) = (0,0)$.
Etude en $+\infty$. Pour $x \geqslant 0$,

$$f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-2x} tend vers 0 et donc, $\ln(1 + e^{-2x})$ tend vers 0. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x\to+\infty}(f_2(x) - (x - \ln 2)) = 0$ et la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_2$ en $+\infty$. Par symétrie par rapport à la droite (Oy), la droite (D') d'équation $y = -x - \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_2$ en $-\infty$. Enfin, pour tout réel x,

$$f_2(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}) > \ln 1 = 0,$$

et $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. De même, $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de (D') sur $\mathbb{R}$. On en déduit $\mathscr{C}_2$.



(c) f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. **Etude en** $-\infty$. Soit $x\leqslant -1$.

$$f_3(x)=x+\sqrt{x^2-1}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Or, quand x tend vers $-\infty$, $x-\sqrt{x^2-1}$ tend vers $-\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty}f_3(x)=0$. **Etude en** $+\infty$. Immédiatement, $\lim_{x\to+\infty}f_3(x)=+\infty$. Ensuite, pour $x\geqslant 1$,

$$\frac{f_3(x)}{x}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}},$$

qui tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$. Mais alors,

$$f_3(x)-2x=-x+\sqrt{x^2-1}=\frac{(-x+\sqrt{x^2-1})(-x-\sqrt{x^2-1})}{-x-\sqrt{x^2-1}}=-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty}(f_3(x)-2x)=0$ et donc que la droite (D) d'équation $y=2x$ est asymptote à $\mathscr{C}_3$ en $+\infty$. **Etude en** 1. Pour $x>1$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}=\frac{(x-1)+\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1}=1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

et pour $x\in]-1,1[$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}=\frac{(x-1)+\sqrt{(-x+1)(x+1)}}{-(-x+1)}=1-\sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}.$$

Par suite, $\lim_{x\to1,\,x>1}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}=+\infty$ et $\lim_{x\to1,\,x<1}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}=-\infty$. On en déduit que f_3 n'est pas dérivable en 1, mais que $\mathscr{C}_3$ admet deux demi-tangentes parallèles à (Oy) au point de $\mathscr{C}_3$ d'abscisse 1. Les résultats sont analogues en -1. **Etude des variations de $\mathbf{f_3}$**. Pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f_3(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ et donc

$$f_3'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Si $x>1$, on a $x+\sqrt{x^2-1}>0$ et donc, $f_3'(x)>0$. Si $x<-1$, on a

$$\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x^2}=|x|=-x,$$

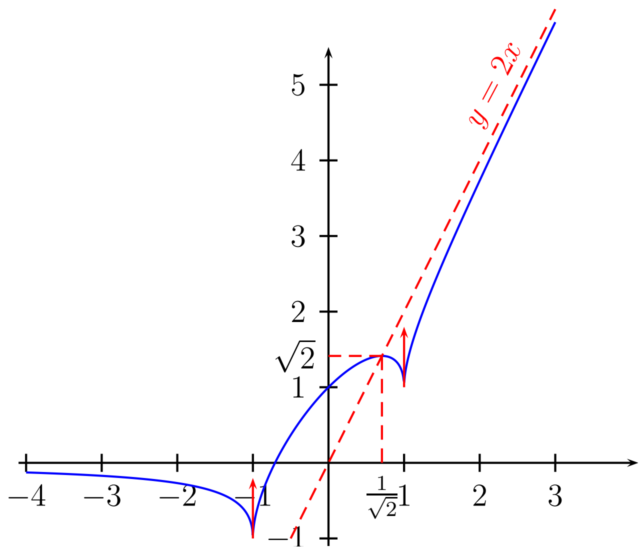
et donc, $x+\sqrt{x^2-1}<0$ puis $f_3'(x)<0$. Ainsi, f_3 est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Pour $x\in]-1,1[$, $f_3(x)=x+\sqrt{-x^2+1}$ et donc

$$f_3'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}=\frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}.$$

Si $x\in]-1,0]$, on a clairement $f_3'(x)>0$. Si x$\in[0,1[$, par stricte croissance de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\mathrm{sgn}(f_3'(x))=\mathrm{sgn}(\sqrt{-x^2+1}-x)=\mathrm{sgn}((-x^2+1)-x^2)=\mathrm{sgn}(1-2x^2)=\mathrm{sgn}((1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2}))=\mathrm{sgn}[\frac{1}{\sqrt{2}}-x$$

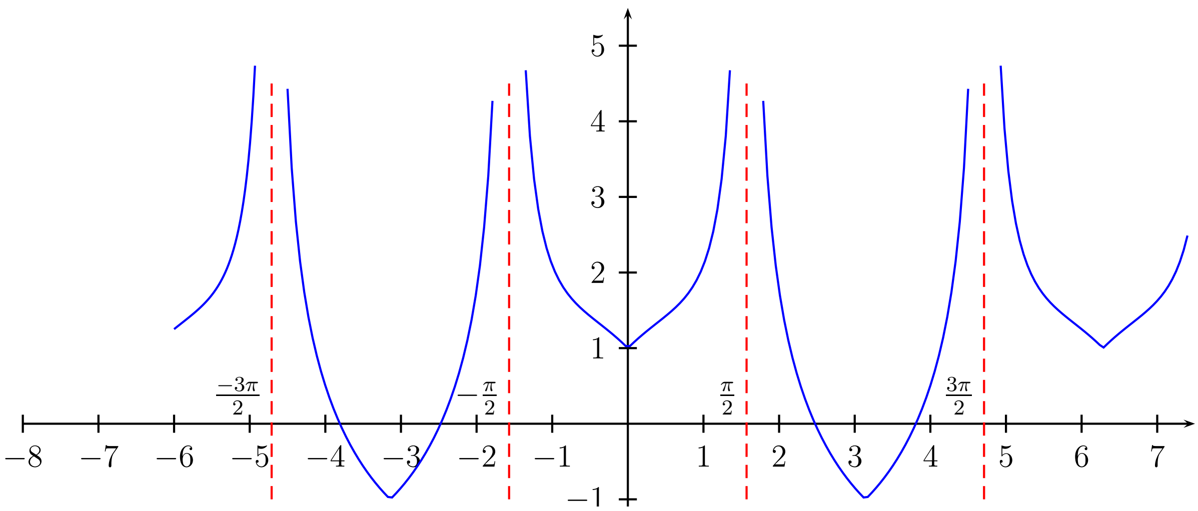
Donc, f_3' est strictement positive sur $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En résumé, f_3' est strictement négative sur $]-\infty,-1[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et strictement positive sur $\left]-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $]1,+\infty[$. f_3 est donc strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et strictement décroissante sur $\left[-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $[1,+\infty[$. On en déduit $\mathscr{C}_3$.



(d) f_4 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, 2π-périodique et paire. On étudie donc f_4 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. **Etude des variations de $\mathbf{f_4}$**. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_4(x) = \tan x + \cos x$ et donc,

$$f_4'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \geqslant 1 - 1 = 0,$$

avec égalité si et seulement si $\sin x = \cos^2 x = 1$ ce qui est impossible. Donc, f_4' est strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et f_4 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_4(x) = -\tan x + \cos x$ et f_4 est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. On a immédiatement $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = +\infty$. On en déduit $\mathscr{C}_4$.



(e) Soit $x > 0$. x n'est pas nul donc $\frac{1}{x}$ existe puis $1 + \frac{1}{x} > 0$ et $f_6(x)$ existe. **Etude en 0**. Pour $x > 0$, $x\ln(1 + \frac{1}{x}) = -x\ln x + x\ln(1+x)$. Par suite, $x\ln(1 + \frac{1}{x})$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $f_5(x) = \exp(x\ln(1 + \frac{1}{x}))$ tend vers 1. Posons encore $f_5(0) = 1$ et étudions la dérivabilité de f_5 en 0. Pour $x > 0$,

$$\frac{f_5(x) - f_5(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\exp(x\ln(1 + \frac{1}{x})) - 1\right) = \frac{\exp\left(x\ln(1 + \frac{1}{x})\right) - 1}{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Or, $x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\exp(x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)) - 1}{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

D'autre part, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} = +\infty.$$

Ainsi, f_5 n'est pas dérivable en 0 mais $\mathscr{C}_5$ admet l'axe des ordonnées pour tangente en $(0, f_5(0)) = (0,1)$. **Etude en** $+\infty$. Pour $x>0$, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = e.$$

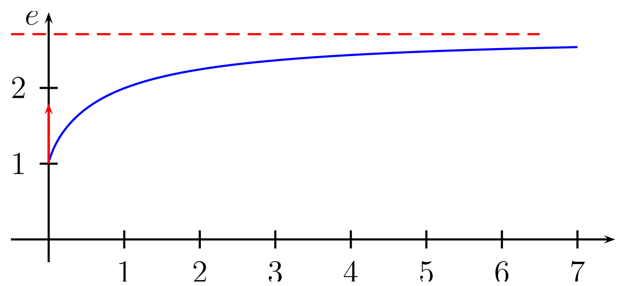
Etude des variations de $\mathbf{f_5}$. Pour $x>0$, $f_5(x)>0$ puis $\ln(f_5(x)) = x\ln(1+\frac{1}{x})$. Par suite, pour $x>0$,

$$f_5'(x) = f_5(x)\ln(f_5)'(x) = f_5(x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}}\right) = f_5(x)g(x),$$

où $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$. Sur $]0,+\infty[$, f_5' est du signe de g. Pour déterminer le signe de g, étudions d'abord les variations de g sur $]0,+\infty[$. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il en est de même de f_5'. f_5 est strictement croissante sur $]0,+\infty($. On en déduit $\mathscr{C}_5$.



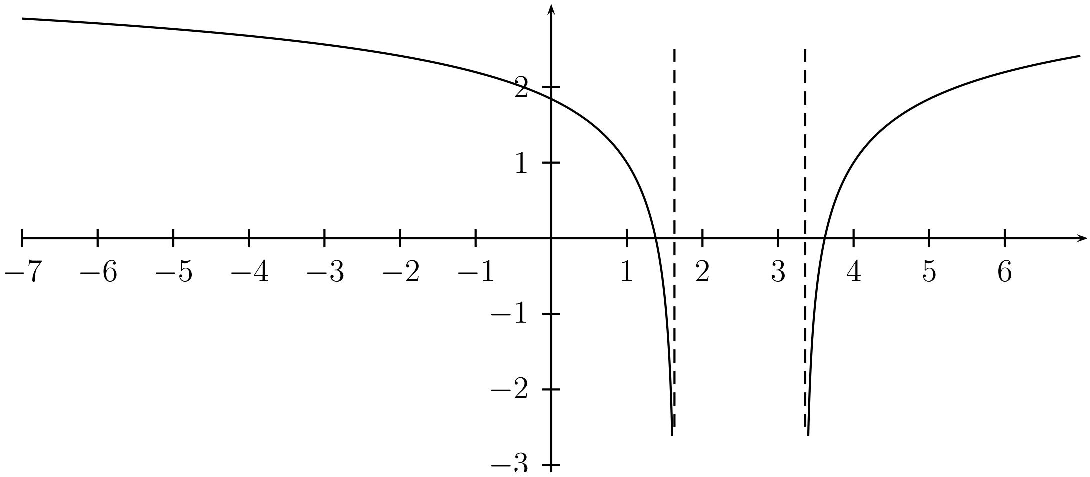
(f) **Domaine de définition de $\mathbf{f_6}$**. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$f_6(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } 1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>0 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } \frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln\frac{1}{2}} < 1$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } \ln(x^2-5x+6) > \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-5x+6 > \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+\frac{11}{2}>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty[= \mathscr{D}_f.$$

Variations de $\mathbf{f_6}$. La fonction $x\mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$. Comme $\frac{5+\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{2}$ et que $\frac{5-\sqrt{3}}{2} < \frac{5}{2}$, la fonction $x\mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme néperien est strictement croissante. La fonction $x\mapsto 1+\frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln 2}$ a le même sens de variations et finalement f_6 est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$. **Axe de symétrie** Soit $x\in\mathbb{R}$. $x\in\mathscr{D}_f \Leftrightarrow \frac{5}{2}-x\in\mathscr{D}_f$ et de plus, $\left(\frac{5}{2}-x\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}-x\right)+6 = x^2-5x+6$. Par suite,

$$\forall x\in D,\ f_6(\frac{5}{2}-x) = f_6(x).$$

$\mathscr{C}_6$ admet donc la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ pour axe de symétrie.
Le calcul des limites étant immédiat, on en déduit $\mathscr{C}_6$.



Correction de l'exercice 2137 ▲

On a $0 \leqslant f(0) \leqslant 1$ et $0 \leqslant f(1) \leqslant 1$. Donc $|f(1) - f(0)| \leqslant 1$. Mais, par hypothèse, $|f(1) - f(0)| \geqslant 1$. Par suite, $|f(1) - f(0)| = 1$ et nécessairement, $(f(0), f(1)) \in \{(0,1),(1,0)\}$.
Supposons que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et montrons que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$.
Soit $x \in [0,1]$. On a $|f(x) - f(0)| \geqslant |x - 0|$ ce qui fournit $f(x) \geqslant x$. On a aussi $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$ ce qui fournit $1 - f(x) \geqslant 1 - x$ et donc $f(x) \leqslant x$. Finalement, $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$ et $f = Id$.
Si $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, posons pour $x \in [0,1]$, $g(x) = 1 - f(x)$. Alors, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ puis, pour $x \in [0,1]$, $g(x) \in [0,1]$. Enfin,

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |g(y) - g(x)| = |f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|.$$

D'après l'étude du premier cas, $g = Id$ et donc $f = 1 - Id$. Réciproquement, Id et $1 - Id$ sont bien bien solutions du problème.

Correction de l'exercice 2138 ▲

(a) f_1 est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. De plus, f_1 est paire. On étudiera f_1 sur $[0,+\infty[$ (se méfier alors pour la dérivabilité en 0).
Etude en 0 (à gauche et à droite).

$$\begin{aligned} f_1(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^3}(1+x^2)[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) - x(1 - x^2 + x^4 + o(x^4))] \\ &= (1+x^2)(\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + o(x^5)) = (1+x^2)(\frac{2}{3} - \frac{4x^2}{5} + o(x^2)) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2x^2}{15} + o(x^2). \end{aligned}$$

Par suite, f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0) = \frac{2}{3}$. Puisque f_1 admet en 0 un développement limité d'ordre 1, le prolongement encore noté f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$. C_1 admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à $(0x)$ d'équation $y = \frac{2}{3}$. Enfin, puisque $f(x) - \frac{2}{3}$ est, au voisinage de 0, du signe de $-\frac{2x^2}{15}$, la courbe est localement en dessous de sa tangente.
Etude en $+\infty$ (et $-\infty$). $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, et de même $f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$.
Dérivée, variations.

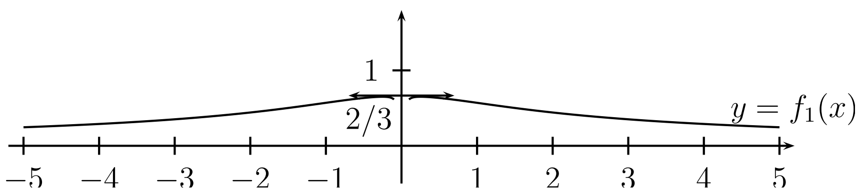
Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-\frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^2})(\arctan x - \frac{x}{1+x^2}) + \frac{1+x^2}{x^3}(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}) \\
&= -\frac{3+x^2}{x^4}(\arctan x - \frac{x}{1+x^2}) + \frac{1+x^2}{x^3}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan x + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^4}{3+x^2}\frac{2}{x(1+x^2)}) \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan x + \frac{x(3+x^2)+2x^3}{(1+x^2)(3+x^2)}) = \frac{3+x^2}{x^4}g(x)
\end{aligned}$$

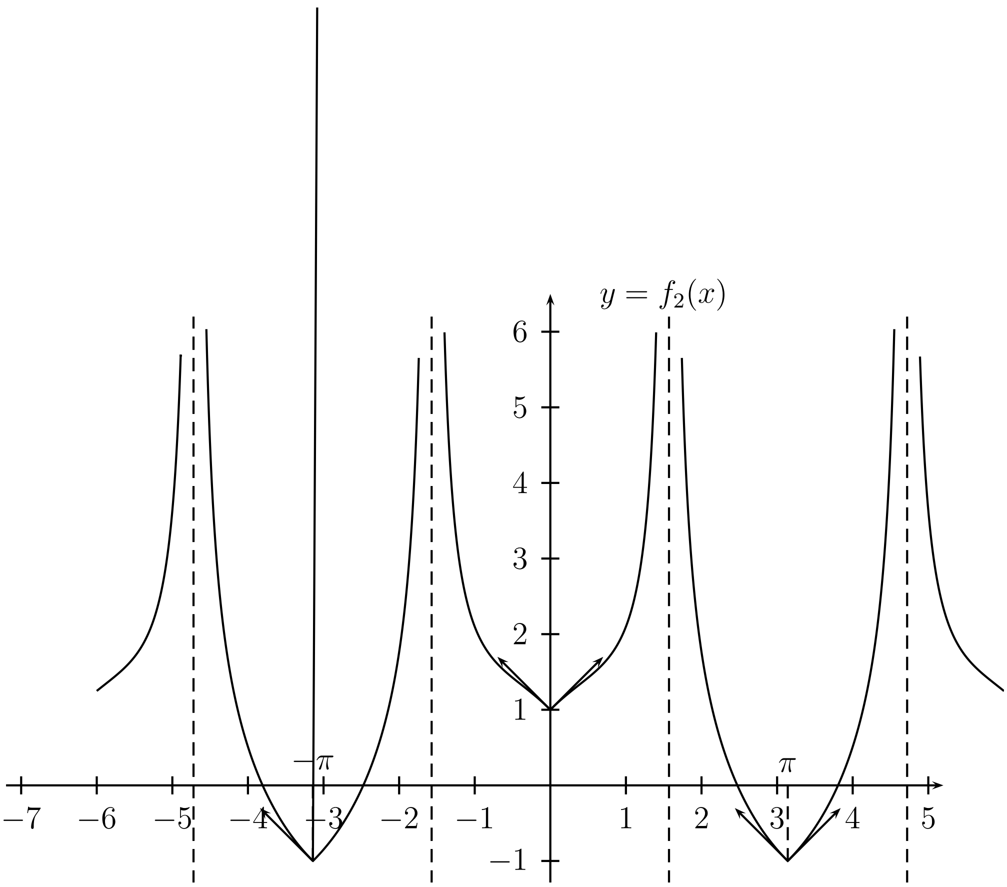
où, pour tout réel x, $g(x) = -\arctan x + \frac{3x}{3+x^2}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel,

$$g'(x) = 3\frac{(3+x^2)-2x^2}{(3+x^2)^2} - \frac{1+x^2}{=}\frac{3(3-x^2)(1+x^2)-(3+x^2)^2}{(1+x^2)(3+x^2)^2} = \frac{-4x^4}{(3+x^2)^2(1+x^2)}.$$

g' est donc strictement négative sur $]0,+\infty[$ et par suite, g est donc strictement décroisante sur $[0,+\infty[$. Puisque $g(0) = 0$, pour $x > 0$, $g(x) < 0$. Finalement, f_1' est strictement négative sur $]0,+\infty[$ et f_1 est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
Le tableau de variations de f_1 n'apporte rien de plus.
Graphe



(b) f_2 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, paire et 2π-périodique. f_2 est continue sur D en vertu de théorèmes généraux. On étudie f_2 sur $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$.
Etude en $\frac{\pi}{2}$.
$f(x) \underset{x\to\pi/2}{\sim} |\tan x|$ et donc, $\lim_{x\to\pi/2} f(x) = +\infty$. C_2 admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.
Dérivabilité et dérivée.
f_2 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $f_2'(x) = \varepsilon\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$ où ε est le signe de $\tan x$.
f_2 est aussi dérivable à droite en 0 et $(f_2)'_d(0) = 1$. Par symétrie, f_2 est dérivable à gauche en 0 et $(f_2)'_g(0) = -1$. f_2 n'est pas dérivable en 0.
De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_2)'_g(\pi) = -1$ et $(f_2)'_d(\pi) = 1$, et n'est donc pas dérivable en π.
Variations.
f_2 est strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$. Puis, pour x élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$, $f_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 1 - 1 = 0$. f_2' est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc f_2 est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
Graphe.



(c) Pour x réel, posons $P(x) = x^3 + 12x^2 + 60x + 120$. Pour tout réel x, on a $P'(x) = 3(x^2 + 8x + 20) = 3((x+4)^2 + 4) > 0$. P est une fonction polynôme de degré 3 strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule donc une et une seule fois en un certain réel noté α. De plus, $P(-5)P(-4) < 0$ et $\alpha \in]-5, -4[$. Enfin, P est strictement négatif sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement positif sur $]\alpha, +\infty[$.
f_3 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$, et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$,

$$f_3(x) = x - \ln\left|\frac{P(x)}{P(-x)}\right| = x - \ln|P(x)| + \ln|P(-x)|.$$

Notons que f_3 est impaire.
Dérivabilité et dérivée.
f_3 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$,

$$f_3'(x) = 1 - \frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{P'(-x)}{P(-x)} = \frac{P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x)}{P(-x)P(x)}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
&P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x) \\
&\qquad = ((12x^2 + 120) + (x^3 + 60x))((12x^2 + 120) - (x^3 + 60x)) \\
&\qquad\quad - 3((x^2 + 20) + 8x)((12x^2 + 120) - (x^3 + 60x))) - 3((x^2 + 20) - 8x))((12x^2 + 120) + (x^3 + 60x)) \\
&\qquad = 144(x^2 + 10)^2 - x^2(x^2 + 60)^2 - 6((x^2 + 20)(12x^2 + 120) - (8x)(x^3 + 60x)) \\
&\qquad = (-x^6 + 24x^4 - 720x^2 + 14400) - 6(4x^4 - 120x^2 + 2400) = -x^6,
\end{aligned}$$

et donc $f_3'(x) = \frac{-x^6}{P(x)P(-x)}$.
Etude en $+\infty$.

$$f_3(x) - x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln(1+\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x})) + \ln(1-\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x})) = -\frac{24}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

On en déduit tout d'abord que $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$ (resp.$\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$, puis que C_3 admet en $+\infty$ (resp.$-\infty$) la droite d'équation $y = x$ pour droite asymptote et que C_3 est au-dessous (resp. au-dessus) de cette droite au voisinage de $+\infty$ (resp.$-\infty$).

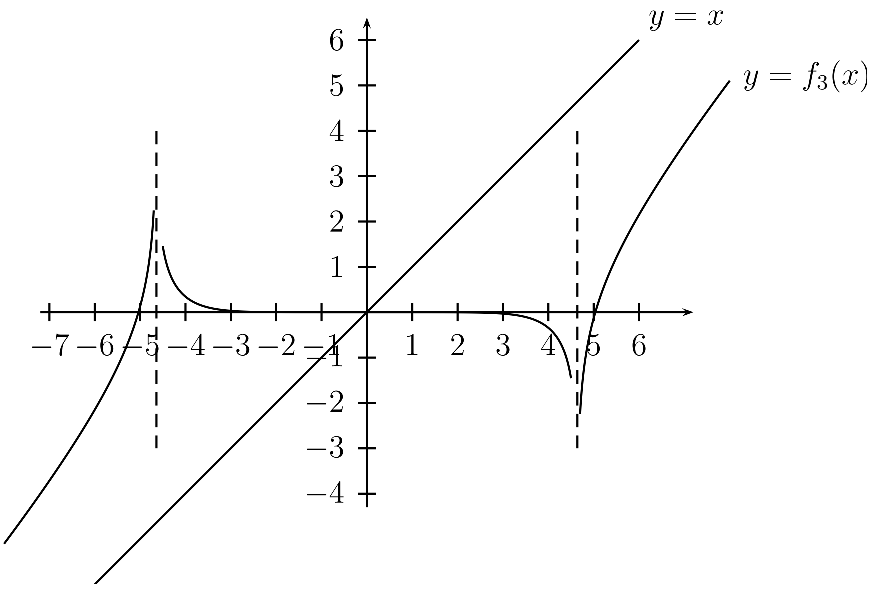
Variations.

D'une part, $f_3'(0) = 0$. D'autre part, pour $x > 0$, $P(x) > 0$. f_3' est donc du signe de $-P(-x)$ sur $]0,+\infty[\setminus\{\alpha\}$. Ainsi, f_3' est strictement négative sur $]0,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$.

On en déduit le tableau de variations de f_3.

x	0		α		$+\infty$
$f_3'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_3	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe.



(d) f_4 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$f_4(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}e^{\frac{2/x}{1/x^2-1}} = \frac{1}{x}e^{-\frac{2x}{x^2-1}} = \frac{1}{f_4(x)}.$$

Ce genre de constatation peut servir à calculer $\lim_{x\to+\infty} f_4(x)$ si l'on connait $\lim_{x\to 0,\, x>0} f_4(x)$, obtenir les variations de f_4 sur $]0,1[$ si on les connait sur $]1,+\infty[$ ...

On peut aussi noter que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f_4(-x)f_4(x) = -x^2$ et donc, pour $x \neq 0$, $f_4(-x) = \frac{-x^2}{f_4(x)}$. Cette constatation pourra être utile pour déduire l'étude de f_4 en -1 de l'étude en 1.

Etude en $+\infty$ et $-\infty$.

Puisque $\frac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, on a $f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$ ce qui montre déjà que $\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f_4(x) = -\infty$ et que C_4 admet en $+\infty$ et $-\infty$, une direction asymptotique d'équation $y = x$. Plus précisément,

$$\frac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{=} \frac{2}{x}(1-\frac{1}{x^2})^{-1} = \frac{2}{x}+o(\frac{1}{x^2}),$$

puis,

$$e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1+(\frac{2}{x})+(\frac{2}{x})^2+o(\frac{1}{x^2}) = 1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}).$$

On en déduit que

$$f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} x+2+\frac{2}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

Par suite, C_4 admet la droite d'équation $y = x+2$ pour droite asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, le signe de $f_4(x)-(x+2)$ étant localement le signe de $\frac{2}{x}$, C_4 est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et au-dessous au voisinage de $-\infty$.

Etude en 1 (et -1).

Clairement, $\lim_{x\to 1,\, x>1} f_4(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -1,\, x>-1} f_4(x) = -\infty$. Ensuite, $\lim_{x\to 1,\, x<1} f_4(x) = 0$ et $\lim_{x\to -1,\, x<-1} f_4(x) = 0$.

On prolonge f_4 par continuité à gauche en 1 en posant $f_4(1) = 0$, et de même en -1 et on étudie la dérivabilité du prolongement encore noté f_4.

f_4 est continue sur $]-1,1]$, de classe C^1 sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$ (voir dérivée-variations),

$$f_4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to 1,\, x<1}{\to} 0.$$

D'après un théorème classique d'analyse, f_4 est de classe C^1 sur $]-1,1]$ et en particulier dérivable à gauche en 1 et $f_g'(1) = 0$.

De même, f_4 est dérivable à gauche en -1 et $f_g'(-1) = 0$. C_4 admet en ces points des demi-tangentes parallèles à l'axe (Ox).

Dérivée. Variations.

f_4 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f_4'(x)}{f_4(x)} &= (\ln|f_4|)'(x) = (\ln|x| + \frac{2x}{x^2-1})'(x) = \frac{1}{x} + 2\frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-1)^2-2x(x^2+1)}{x(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{x(x^2-1)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \neq 0,\ f4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}},$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité de f_4' en 0.

f_4' est donc du signe de $P(x) = x^4-2x^3-2x^2-2x+1$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2((x^2+\frac{1}{x^2}) - 2(x+\frac{1}{x}) - 2) = x^2((x+\frac{1}{x})^2 - 2(x+\frac{1}{x}) - 4) = \\ &= x^2(x+\frac{1}{x} - (1-\sqrt{5})(x+\frac{1}{x} - (1+\sqrt{5})) = (x^2-(1-\sqrt{5})x+1)(x^2-(1+\sqrt{5})x+1),\end{aligned}$$

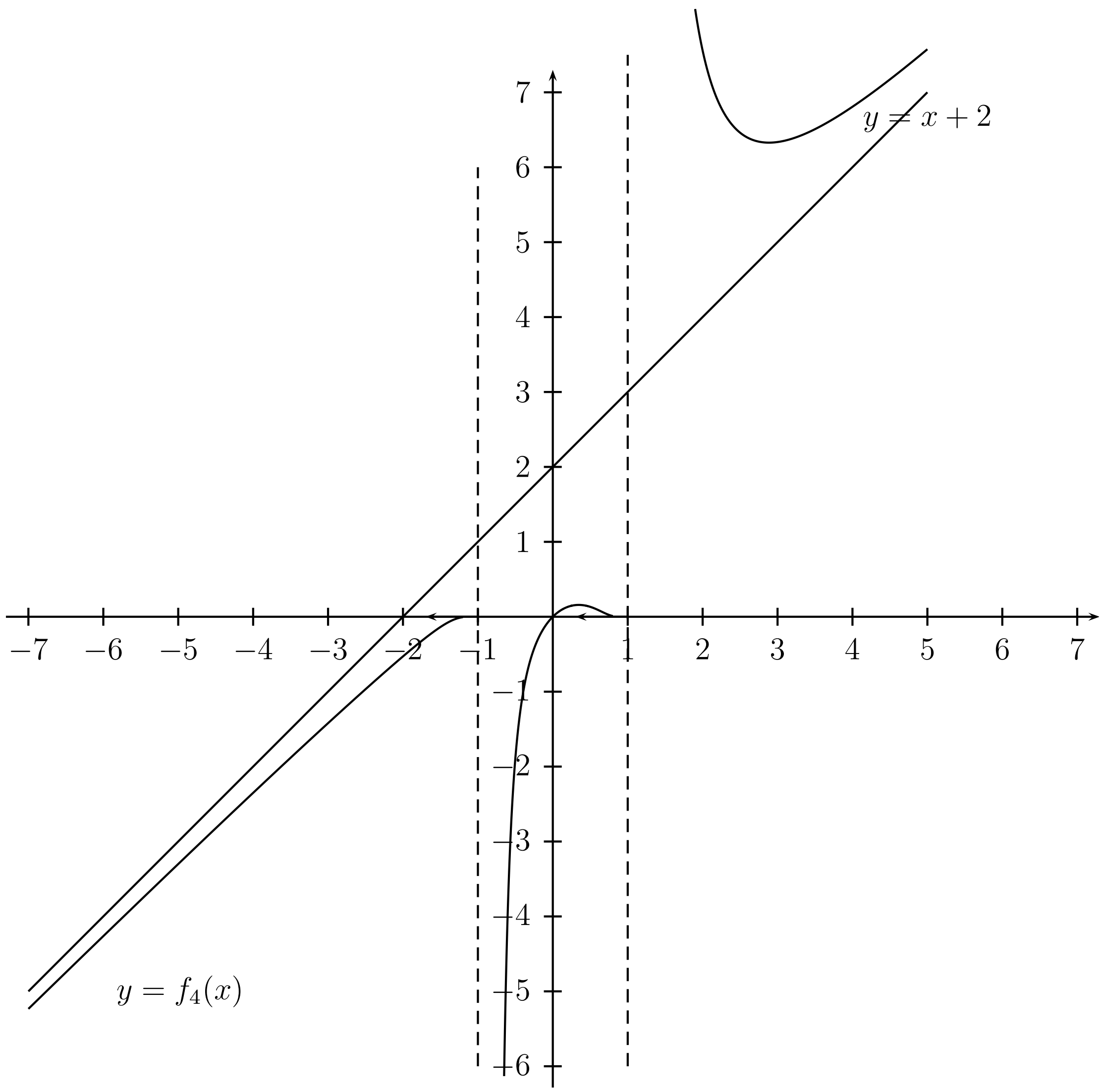
ce qui reste vrai pour $x = 0$.

Le premier trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}-1)^2-4 = 2-2\sqrt{5} < 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2-(1-\sqrt{5})x+1 > 0$.

Le deuxième trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}+1)^2-4 = 2+2\sqrt{5} > 0$ et admet donc deux racines réelles $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}+\sqrt{2+\sqrt{5}})2,89... > 1$ et $\beta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}) = \frac{1}{\alpha}0,34... \in]0,1[$. On en déduit le tableau de variation de f_4.

x	$-\infty$		-1		0		β		1		α		$+\infty$
$f_4'(x)$		$+$	$\Vert$		$+$		0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f_4	$-\infty$	$\nearrow$	0 $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$			$0,15...$	$\searrow$	0 $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$6,34...$	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe.



(e) Si $x > 0$, $e^x - 1 > 0$ et si $x < 0$, $e^x - 1 < 0$. Donc, pour $x \neq 0$, > 0 et f_5 est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x \neq 0$,

$$f_5(-x) = -\frac{1}{x}\ln\frac{e^{-x}-1}{-x} = -\frac{1}{x}\ln(e^{-x}) - \frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x} = 1 - f(x).$$

Donc, pour tout réel non nul x, $f(x) + f(-x) = 1$. Le point de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de C_5.

Etude en 0.

$$f_5(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\ln(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)) = \frac{1}{x}((\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}) - \frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2 + o(x^2)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x + o(x).$$

Ainsi, f_5 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_5(0) = \frac{1}{2}$. Le prolongement, encore noté f_5, admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est donc dérivable en 0 avec $f_5'(0) = \frac{1}{24}$. Une

équation de la tangente à C_5 en le point d'abscisse 0 est $y = \frac{1}{24}x + \frac{1}{2}$. Par symétrie, ce point est un point d'inflexion.
Etude en $+\infty$.

$$f_5(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}(\ln(e^x) + \ln(1-e^{-x}) - \ln x) = 1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1-e^{-x}}{x} = 1 + o(1).$$

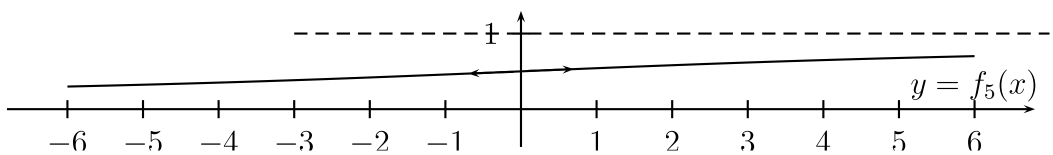
Donc, $\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = 1$. Par symétrie, $\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim_{x\to-\infty}(1 - f_5(-x)) = 1 - 1 = 0$.
Dérivée. Variations.
f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x \neq 0$, (puisque $\ln\frac{e^x-1}{x} = \ln\left|\frac{e^x-1}{x}\right| = \ln|e^x - 1| - \ln|x|$),

$$f_5'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\frac{e^x-1}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\ln\frac{e^x-1}{x} + \frac{xe^x}{e^x-1} - 1\right).$$

f_5' est, sur $\mathbb{R}^*$, du signe de $g(x) = -\ln\frac{e^x-1}{x} + \frac{xe^x}{e^x-1} + -1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour x réel non nul,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{e^x}{e^x-1} + \frac{1}{x} + \frac{(e^x + xe^x)(e^x-1) - xe^x.e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-xe^x(e^x-1) + (e^x-1)^2 + xe^x(e^x - x - 1)}{x(e^x-1)^2}\\
&= \frac{(e^x-1)^2 - x^2e^x}{x(e^x-1)^2} = \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2 - x^2}{x(e^{x/2} - e^{-x/2})^2}\\
&= \frac{(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2})^2 - x^2}{x(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2})^2} = \frac{\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2} - (\frac{x}{2})^2}{x\,\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

L'inégalité $\mathrm{sh}\,x > x$, valable pour $x > 0$, est classique (par exemple, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit pour $x > 0$, $\mathrm{sh}\,x = x + \int_0^x (x-t)\,\mathrm{sh}\,t\,dt > x$.) Par suite, g' est strictement positive sur $]0,+\infty[$, et donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. En tenant compte de $g(0^+) = 0$, g est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il en est de même de f_5' et f_5 est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Par symétrie et continuité en 0, f_5 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Graphe.



(f) f_6 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux.
Etude en 1.
$f_6(x) - f_6(1) = x - 1 + \sqrt{|x^2-1|} \underset{x\to1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x-1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en 1 mais que C_6 admet au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy).
Etude en -1.
$f_6(x) - f_6(-1) = x + 1 + \sqrt{|x^2-1|} \underset{x\to-1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x+1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en -1 mais que C_6 admet au point d'abscisse -1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy).
Etude en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on a

$$f_6(x) = x + x(1 - \frac{1}{x^2})^{1/2} = x + x(1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = 2x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}),$$

ce qui montre tout à la fois que $\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$, puis que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_6 en $+\infty$ et que C_6 est au-dessous de cette droite au voisinage de $+\infty$.

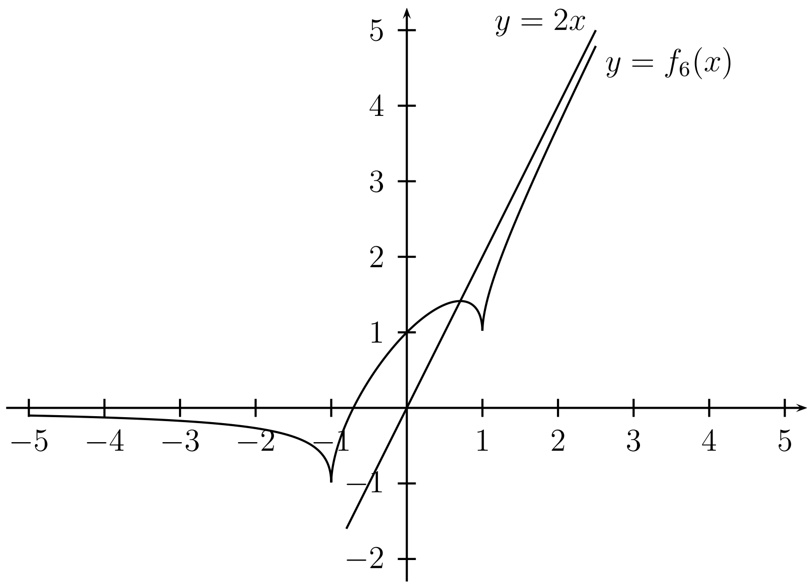
Etude en $-\infty$.
Au voisinage de $-\infty$, on a, $f_6(x) = x - x(1+o(\frac{1}{x})) = o(1)$, et $\lim_{x\to-\infty} f_6(x) = 0$.
Dérivée. Variations.
Soit ε le signe de x^2-1. Pour $x \neq \pm 1$,

$$f_6'(x) = 1 + \frac{2\varepsilon x}{2\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}+\varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}.$$

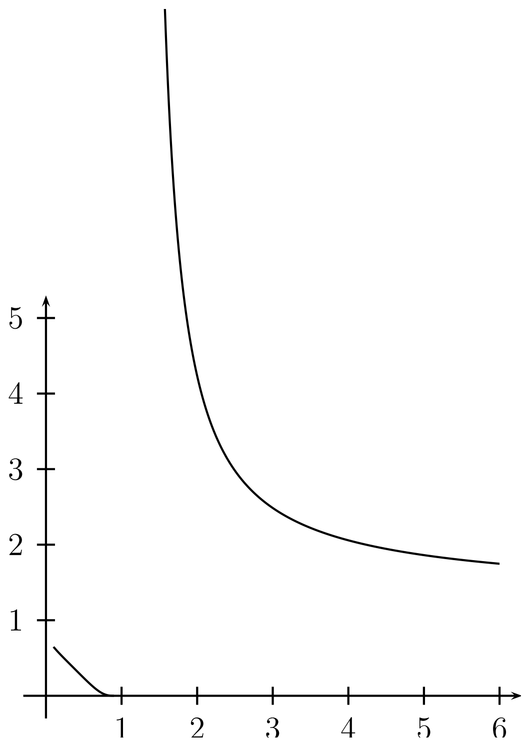
Si $-1 < x \leqslant 0$, (de sorte que $\varepsilon x > 0$) ou $x > 1$, $f_6'(x) > 0$.
Si $x < -1$, $\mathrm{sgn}(f_6'(x)) = \mathrm{sgn}(x+\sqrt{x^2-1}) = \mathrm{sgn}(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = -$ et $f_6'(x) < 0$.
Si $0 \leqslant x < 1$. $\mathrm{sgn}(f_6'(x)) = \mathrm{sgn}(-x+\sqrt{x^2-1}) = \mathrm{sgn}(-x^2-(x^2-1)) = \mathrm{sgn}(\frac{1}{\sqrt{2}} - x)$.
D'où le tableau de variations de f_6 :

x	$-\infty$		-1		$1/\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f_6'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_6	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$-\infty$

Graphe.



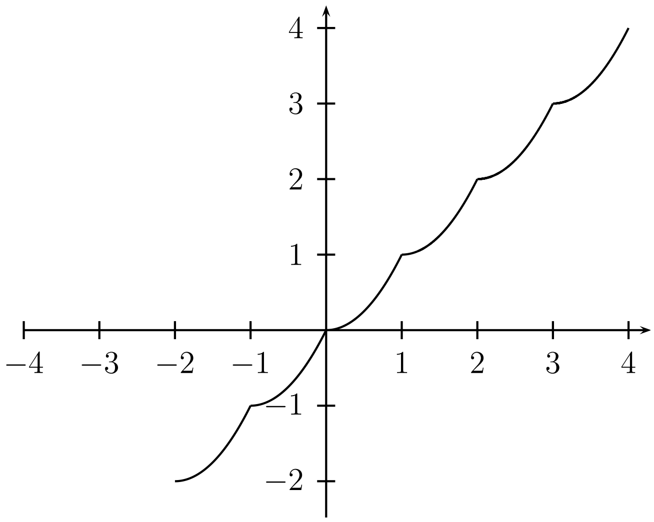
(g)



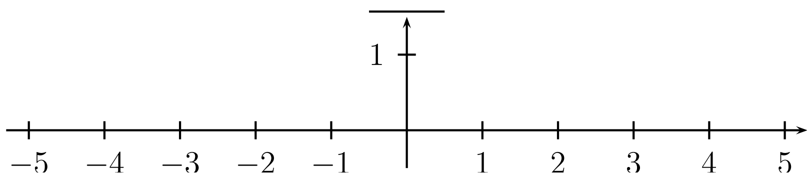
(h)

(i)

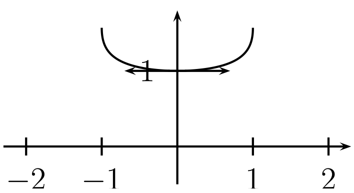
(j)



(k)



(l)



(m)

(n)

(o)

(p)

(q)

(r)

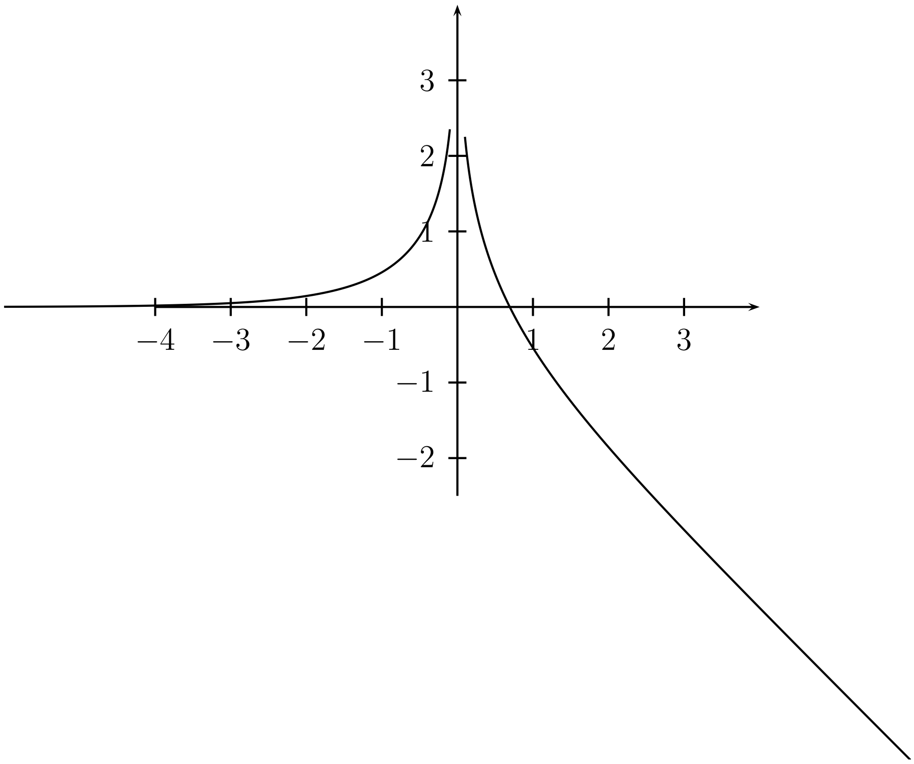
(s)

(t)

(u)

(v)

(w)



Correction de **l'exercice 2147 ▲**

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = -1/2.$$

Correction de **l'exercice 2148 ▲**

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} = 0.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6x)} = 1/6.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(e+x))^{x^{-1}} = e^{e^{-1}}.$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{x^{-1}} = e^{-1}.$

Correction de **l'exercice 2150 ▲**

(a) $\frac{2}{3}$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{8x^3}$

(c) $\frac{a^3}{b^3}$

(d) -1

(e) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(f) $\frac{1}{2}x^2$

(g) $-\frac{3}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)$

(h) $\sqrt{e}$

(i) $\frac{1}{\pi}$

(j) 1

(k) x

Correction de l'exercice 2152 ▲

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.

$$n!^2 = \prod_{k=1}^{n}(n+1-k)\prod_{k=1}^{n}k = \prod_{k=1}^{n}k(n+1-k).$$

Maintenant, la fonction $x \mapsto x(n+1-x)$ est strictement croissante sur $[0, \frac{n+1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{n+1}{2}, n+1]$. Puisque $f(1) = f(n) = n$, on en déduit que pour $x \in [2, n-1]$, $f(x) > n$. Puisque $n \geqslant 3$, on a $n-1 \geqslant 2$ et on peut écrire

$$n!^2 = n^2\prod_{k=2}^{n-1}k(n+1-k) > n^2\prod_{k=2}^{n-2}n = n^n,$$

et donc,

$$\sqrt[n]{n!} = (n!^2)^{1/(2n)} > (n^n)^{1/2n} = \sqrt{n}.$$

Correction de l'exercice 2153 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$.

- C'est clair pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$. Alors,

$$\begin{aligned}
|\sin(n+1)x| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| &\leqslant |\sin nx|.|\cos x| + |\cos nx|.|\sin x| \\
&\leqslant |\sin nx| + |\sin x| \\
&\leqslant n|\sin x| + |\sin x| \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)|\sin x|
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|}$.

Correction de l'exercice 2154 ▲

Pour $x \in [a,b]$, posons $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[a,b]$ puisque f l'est. De plus, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $[a,b]$ ou encore, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

Correction de l'exercice 2155 ▲

Puisque $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $\ell \in [0,1[$, il existe $A > 0$ tel que pour $x \geqslant A$, $\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{\ell+1}{2} < 1$. Mais alors, $f(A) < A$ (et $f(0) \geqslant 0$) ce qui ramène à la situation de l'exercice 2154 : pour $x \in [0,A]$, soit $g(x) = f(x) - x$...

Correction de l'exercice 2156 ▲

Soit $x > 0$. Pour tout naturel n, $f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{1/4}) = ... = f(x^{1/2^n})$. Or, à x fixé, $\lim_{n\to+\infty} x^{1/2^n} = 1$ et, f étant continue en 1, on a :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x^{1/2^n}) = f(1).$$

f est donc constante sur $]0,+\infty[$, puis sur $[0,+\infty[$ par continuité de f en 0.

Pour $x \geqslant 0$, posons $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(x) = 1$ si $x = 1$. Pour $x \geqslant 0$, on a $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. f vérifie donc : $\forall x \geqslant 0,\ f(x^2) = f(x)$, mais f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^+$.

Correction de l'exercice 2157 ▲

Soit f un morphisme de $(\mathbb{R},+)$, c'est-à-dire que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y).$$

On sait déjà $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ et donc $f(0) = 0$. Puis, pour x réel donné, $f(-x)+f(x) = f(-x+x) = f(0) = 0$ et donc, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$ (f est donc impaire). On a aussi $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = f(x)+...+f(x) = nf(x)$. De ce qui précède, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x).$$

Soit $a = f(1)$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = f(n.1) = nf(1) = an$.

Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $nf(\frac{1}{n}) = f(n\frac{1}{n}) = f(1) = a$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(\frac{1}{n}) = a\frac{1}{n}$.

Puis, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = pa\frac{1}{q} = a\frac{p}{q}$.

Finalement,

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = ar.$$

Maintenant, si l'on n'a pas l'hypothèse de continuité, on ne peut aller plus loin. Supposons de plus que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels, convergente de limite x.

f étant continue en x, on a :

$$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} r_n) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} ar_n = ax.$$

Donc, si f est un morphisme continu de $(\mathbb{R},+)$, f est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Réciproquement, les applications linéaires conviennent.

Correction de l'exercice 2158 ▲

Soient a et b deux réels fixés tels que $0 < a < b$. Trouvons les entiers naturels non nuls k tels que $]ka,kb[\cap](k+1)a,(k+1)b[\neq \emptyset$. Pour k dans $\mathbb{N}^*$, posons $I_k =]ka,kb[$.

$$I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset \Leftrightarrow ka < (k+1)a < kb < (k+1)b \Leftrightarrow k > \frac{a}{b-a} \Leftrightarrow k \geqslant E(\frac{a}{b-a})+1.$$

Posons $k_0 = E(\frac{a}{b-a}) + 1$. Pour $k \geqslant k_0$, on a donc $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ et donc $\bigcup_{k \geqslant k_0}]ka, kb[=]k_0 a, +\infty[$.

Maintenant, si $k_0 = 1$, $\bigcup_{k \geqslant k_0}]ka, kb[=]a, +\infty[$ et si $k_0 > 1$, $\bigcup_{k \geqslant k_0}]ka, kb[= (\bigcup_{k=1}^{k_0 - 1}]ka, kb[) \cup]k_0 a, +\infty[$. Mais, si x est dans $\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka, kb[$, alors $x < (k_0 - 1)b < k_0 a$ et donc, $(\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka, kb[) \cap]k_0 a, +\infty[= \emptyset$. La plus petite valeur de A est donc $(E(\frac{a}{b-a}) + 1)a$.

Correction de l'exercice 2159 ▲

Si f est strictement monotone sur I, on sait que f est injective.

Réciproquement, supposons f injective et continue sur I et montrons que f est strictement monotone.

Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement monotone. On peut alors trouver trois réels a, b et c dans l'intervalle I tels que

$$a < b < c \text{ et } ((f(b) \geqslant f(a) \text{ et } f(b) \geqslant f(c)) \text{ ou } (f(b) \leqslant f(a) \text{ et } f(b) \leqslant f(c))).$$

Quitte à remplacer f par $-f$, on supposera que $a < b < c$ et $f(b) \geqslant f(a)$ et $f(b) \geqslant f(c)$.

Puisque f est injective, on a même $a < b < c$ et $f(b) > f(a)$ et $f(b) > f(c)$. Soit $M = \text{Max}\{f(a), f(c)\}$. On a $M < f(b)$. M est élément de $[f(a), f(b)]$ et, puisque f est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = M$. De plus, on ne peut avoir $\alpha = b$ car $f(\alpha) = M \neq f(b)$ (et f injective). Donc,

$$\exists \alpha \in [a, b[/ \ f(\alpha) = M.$$

De même, puisque M est élément de $[f(c), f(b)]$, $\exists \beta \in]b, c] / \ f(\beta) = M$. Ainsi, on a trouvé dans I deux réels α et β vérifiant $\alpha \neq \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta)$ ce qui contredit l'injectivité de f.

Donc, f est strictement monotone sur I.

Correction de l'exercice 2160 ▲

Soit f la fonction caractéristique de Q. Le groupe des périodes de f est $\mathbb{Q}$. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r \in \mathbb{Q}, \ x + r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q},$$

et donc

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r \in \mathbb{Q}, \ f(x + r) = f(x)$. Mais on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \ x + r \in \mathbb{Q}, \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q},$$

et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \ f(x + r) \neq f(x)$.

Correction de l'exercice 2161 ▲

Id est solution.

Réciproquement, soit f une bijection de $[0, 1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x \in [0, 1], \ f(2x - f(x)) = x$. Nécessairement, $\forall x \in [0, 1], \ 0 \leqslant 2x - f(x) \leqslant 1$ et donc $\forall x \in [0, 1], \ 2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 2x$.

Soit f^{-1} la réciproque de f.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \ f(2x - f(x)) = x &\Leftrightarrow \forall x \in [0, 1], \ 2x - f(x) = f^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in [0, 1], \ f(f(y)) - 2f(y) + y = 0 \text{ (car } \forall x \in [0, 1], \ \exists ! y \ [0, 1] / \ x = f(y)) \end{aligned}$$

Soit $y \in [0, 1]$ et $u_0 = y$. En posant $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n)$, on définit une suite de réels de $[0, 1]$ (car $[0, 1]$ est stable par f). La condition $\forall y \in [0, 1], \ f(f(y)) - 2f(y) + y = 0$ fournit $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$,

ou encore $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ou encore u est arithmétique. Mais, u est également bornée et donc u est constante.
En particulier, $u_1 = u_0$ ce qui fournit $f(y) = y$. On a montré que $\forall y \in [0,1],\ f(y) = y$ et donc $f = Id$.

Correction de l'exercice 2162 ▲

(a) Soit n un entier naturel non nul donné. Pour x élément de $[0,1-\frac{1}{n}]$, posons $g(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$. g est définie et continue sur $[0,1-\frac{1}{n}]$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})) = f(1) - f(0) = 0.$$

Maintenant, s'il existe un entier k élément de $\{0,...,n-1\}$ tel que $g(\frac{k}{n}) = 0$, on a trouvé un réel x de $[0,1]$ tel que $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$ (à savoir $x = \frac{k}{n}$).
Sinon, tous les $g(\frac{k}{n})$ sont non nuls et, étant de somme nulle, il existe deux valeurs de la variable en lesquels g prend des valeurs de signes contraires. Puisque g est continue sur $[0,1-\frac{1}{n}]$, le théorème des valeurs intermédiares permet d'affirmer que g s'annule au moins une fois dans cet intervalle ce qui fournit de nouveau une solution à l'équation $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$.

(b) Soit $a \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{a} \notin \mathbb{N}^*$. Soit, pour $x \in [0,1]$, $f(x) = |\sin\frac{\pi x}{a}| - x|\sin\frac{\pi}{a}|$. f est continue sur $[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ mais,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+a) - f(x) = (|\sin\frac{\pi(x+a)}{a}| - |\sin\frac{\pi x}{a}|) - ((x+a) - x)|\sin\frac{\pi}{a}| = -a|\sin\frac{\pi}{a}| \neq 0.$$

(c) (a) et b)) Soit $g(t)$ la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par le cycliste à l'instant t exprimé en heures, $0 \leqslant t \leqslant 1$, puis, pour $t \in [0,1]$, $f(t) = g(t) - 20t$. f est continue sur $[0,1]$ (si le cycliste reste un tant soit peu cohérent) et vérife $f(0) = f(1) = 0$.
D'après 1), $\exists t_1 \in [0,\frac{1}{2}]$, $\exists t_2 \in [0,\frac{19}{20}]$ tels que $f(t_1+\frac{1}{2}) = f(t_1)$ et $f(t_2+\frac{1}{20}) = f(t_2)$ ce qui s'écrit encore $g(t_1+\frac{1}{2}) - g(t_1) = 10$ et $g(t_2+\frac{1}{20}) - g(t_2) = 1$.
c) Posons pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f(t) = |\sin\frac{4\pi t}{3}| - \frac{t\sqrt{3}}{2}$ et donc, $g(t) = |\sin\frac{4\pi t}{3}| + (20 - \frac{\sqrt{3}}{2})t$. $\forall t \in [0,\frac{1}{4}]$, $f(t+\frac{3}{4}) - f(t) \neq 0$ ou encore $g(t+\frac{3}{4}) - g(t) \neq 15$.

Correction de l'exercice 2163 ▲

(a) La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x = 0$. En effet $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puis par multiplication par la fonction dérivable $x \mapsto x^2$, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par la suite on omet souvent ce genre de discussion ou on l'abrège sous la forme "f est dérivable sur I comme somme, produit, composition de fonctions dérivables sur I".
Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x\cos\frac{1}{x}.$$

Mais $x\cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \to 0$) car $|\cos(1/x)| \leqslant 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$.

(b) Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x = 0$ est :

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}\sin\frac{1}{x}$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

(c) La fonction f_3 s'écrit :
$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

— Donc pour $x \geqslant 1$ on a $f_3(x) = x$; pour $0 \leqslant x < 1$ on a $f_3(x) = -x$; pour $x < 0$ on a $f_3(x) = x$.

— La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Attention ! La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

— La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x\to 1+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x\to 1-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.

— La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x > 0$ est
$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1$$
et pour $x < 0$,
$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x-0} = \frac{x}{x} = +1.$$
Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'exercice 2164 ▲

La fonction f est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Le seul problème est en $x = 1$.

Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim_{x\to 1^+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc $a + b + 1 = 1$. Autrement dit $b = -a$.

Il faut maintenant que les dérivées à droite et à gauche soient égales. Comme la fonction f restreinte à $]0,1]$ est définie par $x \mapsto \sqrt{x}$ alors elle est dérivable à gauche et la dérivée à gauche s'obtient en évaluant la fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x = 1$. Donc $f'_g(1) = \frac{1}{2}$.

Pour la dérivée à droite il s'agit de calculer la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, lorsque $x \to 1$ avec $x > 1$. Or
$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{ax^2 + bx + 1 - 1}{x-1} = \frac{ax^2 - ax}{x-1} = \frac{ax(x-1)}{x-1} = ax.$$
Donc f est dérivable à droite et $f'_d(1) = a$. Afin que f soit dérivable, il faut et il suffit que les dérivées à droite et à gauche existent et soient égales, donc ici la condition est $a = \frac{1}{2}$.

Le seul couple (a,b) que rend f dérivable sur $]0,+\infty[$ est $(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 2165 ▲

f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

(a) Comme $|\sin(1/x)| \leqslant 1$ alors f tend vers 0 quand $x \to 0$. Donc en prolongeant f par $f(0) = 0$, la fonction f prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Le taux d'accroissement est
$$\frac{f(x) - f(0)}{x-0} = x \sin \frac{1}{x}.$$
Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) en $x = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(c) Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$, Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f' n'est pas continue en 0.

Correction de l'exercice 2166 ▲

(a) Selon que $n \equiv 0 \pmod 4, 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4$ alors $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.

(b) La dérivée de $\sin^2 x$ est $2\sin x \cos x = \sin 2x$. Et donc les dérivées suivantes seront : $2\cos 2x, -4\sin 2x, -8\cos 2x, 16$
Et selon que $n \equiv 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4, 0 \pmod 4$, alors $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1}\sin 2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\sin 2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.

(c) $\sin(x)^3+\cos(x)^3=-\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$ et on dérive...

Correction de l'exercice 2174 ▲

La limite de f en 0 est 0, donc f est continue en 0. De même le taux d'accroissement de f en 0 est $f(x)/x$ qui tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$. En dehors de 0, on a $f'(x)=2e^{-x^{-2}}x^{-3}$ donc f' est continue en 0.

On continue de la même façon en remarquant que si $f^{(n)}(x)=P(1/x)\exp(-1/x^2)$ où P est un polynôme et $f^{(n)}(0)=0$. Donc $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 si x tend vers 0. Donc $f^{(n)}$ est continue. De plus $f^{(n)}$ est dérivable en 0 car son taux d'accroissement vaut $1/xP(1/x)\exp(-1/x^2)$ qui tend vers 0, donc $f^{(n+1)}(0)=0$. En dehors de 0 on $f^{(n+1)}(x)=Q(1/x)\exp(-1/x^2)$ où Q est un polynôme. Et on recommence...

Correction de l'exercice 2188 ▲

(a) Pour $n\geqslant 1$, on a d'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)}\ (\text{car }(x^{n-1})^{(n)})=0)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}(-1)^{n-1-k}\frac{(n-1-k)!}{(x+1)^{n-k}}\\&(\text{car }(\ln(1+x))^{(n-k)}=(\frac{1}{1+x})^{(n-k-1)}).\end{aligned}$$

Puis, pour $x=0$, $(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(0)=n.(n-1)!=n!$, et pour $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(x)&=-\frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-\frac{x}{x+1})^{n-k}=-\frac{(n-1)!}{x}((1-\frac{x}{x+1})^n-1)\\&=\frac{(n-1)!}{x}\frac{(x+1)^n-1}{(x+1)^n}.\end{aligned}$$

(b) On sait dériver facilement des sommes ou plus généralement des combinaisons linéaires. Donc, on linéarise :

$$\begin{aligned}\cos^3x\sin(2x)&=\frac{1}{8}(e^{ix}+e^{-ix})^3(-\frac{1}{4})(e^{2ix}-e^{-2ix})=-\frac{1}{32}(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix})(e^{2ix}-2+e^{-2ix})\\&=-\frac{1}{32}(e^{5ix}+e^{3ix}-2e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-3ix}+e^{-5ix})=-\frac{1}{16}(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x))\end{aligned}$$

Puis, pour n naturel donné :

$$(\cos^3x\sin 2x)^{(n)}=-\frac{1}{16}(5^n\cos(5x+n\frac{\pi}{2})+3^n\cos(3x+n\frac{\pi}{2})-2cos(x+n\frac{\pi}{2})),$$

expression que l'on peut détailler suivant la congruence de n modulo 4.

(c) On sait dériver des objets simples et donc on décompose en éléments simples :

$$\frac{X^2+1}{(X-1)^3}=\frac{X^2-2X+1+2X-2+2}{(X-1)^3}=\frac{1}{X-1}+\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{2}{(X-1)^3}.$$

Puis, pour n entier naturel donné,

$$\left(\frac{X^2+1}{(X-1)^3}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+1}} + 2\frac{(-1)^n(n+1)!}{(X-1)^{n+2}} + \frac{(-1)^n(n+2)!}{(X-1)^{n+3}}$$
$$= \frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+3}}((X-1)^2 + 2(n+1)(X-1) + (n+2)(n+1))$$
$$= \frac{(-1)^n n!(X^2+2nX+n^2+n+1)}{(X-1)^{n+3}}.$$

(d) La fonction proposée est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux. La formule de LEIBNIZ fournit pour $n \geqslant 3$:

$$((x^3+2x-7)e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{3}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(e^x)^{(n-k)}$$
$$= ((x^3+2x-7)+n(3x^2+2)+\frac{n(n-1)}{2}(6x)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.6)e^x$$
$$= (x^3+3nx^2+(3n^2-3n+2)x+n^3-3n^2+4n-7)e^x.$$

Correction de l'exercice 2189 ▲

$Q_n(t) = (1-t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n. Les valeurs -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n, donc $Q_n(1) = Q_n'(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$. Même chose en -1. Enfin $Q(-1) = 0 = Q(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]-1,1[$ telle que $Q_n'(c) = 0$.

Donc $Q_n'(-1) = 0$, $Q_n'(c) = 0$, $Q_n'(-1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1,c]$ et sur $[c,+1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q_n'', qui s'ajoutent aux racines -1 et $+1$.

On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines. Par constructions ces racines sont réelles distinctes, donc simples.

Correction de l'exercice 2191 ▲

(a) Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racines distinctes pour $P_n(X) = X^n + aX + b$. Notons les $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre x_1 et x_2, entre x_2 et x_3,...) il existe $x_1' < x_2' < x_3'$ des racines de P_n'. On applique deux fois le théorème Rolle entre x_1' et x_2' et entre x_2' et x_3'. On obtient deux racines distinctes pour P_n''. Or $P_n'' = n(n-1)X^{n-2}$ ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.

(b) *Autre méthode :* Le résultat est évident si $n \leqslant 3$. On suppose donc $n \geqslant 3$. Soit P_n l'application $X \mapsto X^n + aX + b$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Alors $P_n'(X) = nX^{n-1} + a$ s'annule en au plus deux valeurs. Donc P_n est successivement croissante-décroissante-croissante ou bien décroissante-croissante-décroissante. Et donc P_n s'annule au plus trois fois.

Correction de l'exercice 2192 ▲

Comme f' est dérivable, elle est continue. Comme f s'annule $n+1$ fois, f' change de signe (au moins) $n+1$ fois donc s'annule (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Correction de l'exercice 2195 ▲

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[a,b]$. Le théorème des accroissement finis assure l'existence d'un nombre $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Mais pour la fonction particulière de cet exercice nous pouvons expliciter ce c. En effet $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ implique $\alpha(b^2-a^2)+\beta(b-a)=(2\alpha c+\beta)(b-a)$. Donc $c=\frac{a+b}{2}$.

Géométriquement, le graphe $\mathscr{P}$ de f est une parabole. Si l'on prend deux points $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$ appartenant à cette parabole, alors la droite (AB) est parallèle à la tangente en $\mathscr{P}$ qui passe en $M=(\frac{a+b}{2},f(\frac{a+b}{2}))$. L'abscisse de M étant le milieu des abscisses de A et B.

Correction de l'exercice 2198 ▲

(a) Soit $g(t)=\ln t$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$. Il existe $c\in]x,y[$, $g(y)-g(x)=g'(c)(y-x)$. Soit $\ln y-\ln x=\frac{1}{c}(y-x)$. Donc $\frac{\ln y-\ln x}{y-x}=\frac{1}{c}$. Or $x<c<y$ donc $\frac{1}{y}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$. Ce qui donne les inégalités recherchées.

(b) $f'(\alpha)=\frac{x-y}{\alpha x+(1-\alpha)y}-\ln x+\ln y$. Et $f''(\alpha)=-\frac{(x-y)^2}{(\alpha x+(1-\alpha)y)^2}$. Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0,1]$. Or $f'(0)=\frac{x-y-y(\ln x-\ln y)}{y}>0$ d'après la première question et de même $f'(1)<0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in[x,y]$ tel que $f'(c)=0$. Maintenant f' est positive sur $[0,c]$ et négative sur $[c,1]$. Donc f est croissante sur $[0,c]$ et décroissante sur $[c,1]$. Or $f(0)=0$ et $f(1)=0$ donc pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)\geqslant 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.

(c) Géométriquement nous avons prouvé que la fonction ln est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x,f(x))$ à $(y,f(y))$ est sous la courbe d'équation $y=f(x)$.

Correction de l'exercice 2199 ▲

Le théorème des accroissements finis donne : $\ln(n+1)-\ln(n)=\frac{1}{c_n}(n+1-n)=\frac{1}{c_n}$, avec $c_n\in[n,n+1]$. Or $c_n\geqslant n$ donc $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{c_n}$. Donc :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln(k)=\ln(n+1).$$

La dernière égalité s'obtient car la somme est téléscopique et $\ln 1=0$. Donc $S_n\geqslant\ln(n+1)$, donc $S_n\to+\infty$.

Correction de l'exercice 2201 ▲

Pour simplifier nous supposons $x>0$.

(a) Appliquer le théorème des accroissements finis ne va pas être suffisant. En effet, soit $f(x)=e^x-1-x$. Alors il existe $c\in]0,x[$ tel que $f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$. Soit $f(x)=(e^c-1)x$. Soit maintenant $g(x)=e^x-1$ alors, par le théorème des accroissements finis sur $[0,c]$ il existe $d\in]0,c[$ tel que $g(c)-g(0)=g'(d)(c-0)$, soit $e^c-1=e^dc$. Donc $e^x-1-x=f(x)=(e^c-1)x=e^dcx$. Comme $d\leqslant c\leqslant x$, alors $e^x-1-x\leqslant e^xx^2$.

Cela donne une inégalité, mais il manque un facteur $1/2$.

(b) Nous allons obtenir l'inégalité par application du théorème de Rolle. Soit maintenant $f(t)=e^t-1-t-k\frac{t^2}{2}$. Nous avons $f(0)=0$, $x>0$ étant fixé, nous choisisons k tel que $f(x)=0$, (un tel k existe car $e^x-1-x>0$ et $x^2>0$). Comme $f(0)=0=f(x)$ alors par Rolle il existe $c\in]0,x[$ tel que $f'(c)=0$. Mais $f'(t)=e^t-t-kt$, donc $f'(0)=0$. Maintenant $f'(0)=0=f'(c)$ donc il existe (par Rolle toujours !) $d\in]0,c[$ tel que $f''(d)=0$. Or $f''(t)=e^t-k$, donc $f''(d)=0$ donne $k=e^d$. Ainsi $f(x)=0$ devient $e^x-1-x=e^d\frac{x^2}{2}$. Comme $d\leqslant x$ alors $e^x-1-x\leqslant e^x\frac{x^2}{2}$.

Correction de l'exercice 2203 ▲

On a déjà $g(b)=f(b)-f(b)=0$. Puisque $a\neq b$, on peut choisir A tel que $g(a)=0$ (à savoir $A=\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}(f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k)$.

Avec les hypothèses faites sur f, g est d'autre part continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Le théorème de ROLLE permet alors d'affirmer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Pour $x \in]a,b[$, on a

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + A\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + A\frac{(b-x)^n}{n!} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + A\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= \frac{(b-x)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(x)).
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{(b-c)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(c)) = 0$, et donc, puisque $c \neq b$, tel que $A = f^{(n+1)}(c)$.
L'égalité $g(a) = 0$ s'éxrit alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

pour un certain réel c de $]a,b[$.

Correction de l'exercice 2204 ▲

Pour $x \in [a,b]$, posons $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est choisi de sorte que $g(b) = g(a) = 0$ (c'est-à-dire $A = \frac{1}{(b-a)^3}(f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)))$.
$f \in C^2([a,b],\mathbb{R}) \cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$ et donc $g \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$. Pour $x \in [a,b]$, on a :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x) + f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) - 3A(x-a)^2,$$

puis

$$g''(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}f''(x) - \frac{x-a}{2}f^{(3)}(x) - 6A(x-a) = \frac{x-a}{2}(-12A - f^{(3)}(x)).$$

g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie de plus $g(a) = g(b)$. Donc, d'après le théorème de ROLLE, il existe $d \in]a,b[$ tel que $g'(d) = 0$. De même, g' est continue sur $[a,d] \subset [a,b]$, dérivable sur $]a,d[(\neq \emptyset)$ et vérifie de plus $g'(a) = g'(d)(= 0)$. D'après le théorème de ROLLE, il existe $c \in]a,d[\subset]a,b[$ tel que $g''(c) = 0$ ou encore tel que $A = -\frac{1}{12}f^{(3)}(c)$ (puisque $c \neq a$).
En écrivant explicitement l'égalité $g(b) = 0$, on a montré que :

$$\exists c \in]a,b[/ \ f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)) - \frac{1}{12}f^{(3)}(c)(b-a)^3.$$

Si $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$ et si F est une primitive de f sur $[a,b]$, la formule précédente s'écrit :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = \frac{b-a}{2}(F'(b) + F'(a)) - \frac{1}{12}F^{(3)}(c)(b-a)^3 = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

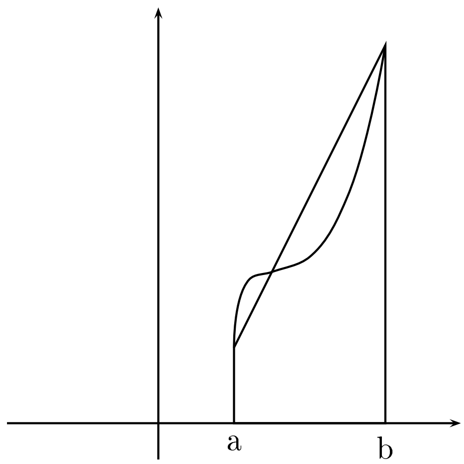
Donc, si $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$,

$$\exists c \in]a,b[/ \ \int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Interprétation géométrique.

Si f est positive, $A_1 = \int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire du domaine $D = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et $A_2 = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$ est l'aire du trapèze $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$. Si $M_2 = \sup\{|f''(x)|,\ x \in [a,b]\}$ existe dans $\mathbb{R}$, on a :

$$|A_1 - A_2| \leqslant M_2 \frac{(b-a)^3}{12}.$$



Correction de l'exercice 2205 ▲

(a) $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ et donc, L_n est de degré $2n-n=n$. Puis, $\mathrm{dom}(L_n) = \mathrm{dom}((X^{2n})^{(n)}) = \frac{(2n)!}{n!}$.

(b) 1 et -1 sont racines d'ordre n de A_n et donc racines d'ordre $n-k$ de $A_n^{(k)}$, pour tout k élément de $\{0,...,n\}$.

Montrons par récurrence sur k que $\forall k \in \{0,...,n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs deux à deux distinctes de l'intervalle $]-1,1[$.

Pour $k=1$, A_n est continu sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. De plus, $A_n(0) = A_n(1) = 0$ et d'après le théorème de ROLLE, A_n' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

Soit k élément de $\{1,...,n-1\}$. Supposons que $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1,1[$. $A_n^{(k)}$ s'annule de plus en 1 et -1 car $k \leqslant n-1$ et donc s'annule en $k+2$ valeurs au moins de l'intervalle $[-1,1]$. D'après le théorème de ROLLE, $A_n^{(k+1)}$ s'annule en au moins $k+1$ points de $]-1,1[$ (au moins une fois par intervalle ouvert).

On a montré que $\forall k \in \{0,...,n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1,1[$. En particulier, $A_n^{(n)} = L_n$ s'annule en au moins n réels deux à deux distincts de $]-1,1[$. Puisque L_n est de degré n, on a trouvé toutes les racines de L_n, toutes réelles, simples et dans $]-1,1[$.

Correction de l'exercice 2206 ▲

Montrons que $(\forall x > 0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$. Soit $x > 0$.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \Leftrightarrow x\ln(1+\frac{1}{x}) < 1 < (x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$$
$$\Leftrightarrow x(\ln(x+1)-\ln x) < 1 < (x+1)(\ln(x+1)-\ln x) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln x < \frac{1}{x}.$$

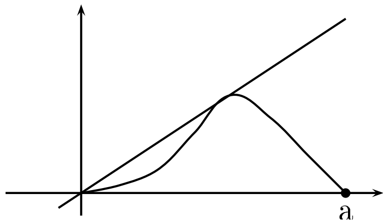
Soit x un réel strictement positif fixé. Pour $t \in [x,x+1]$, posons $f(t) = \ln t$. f est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]x,x+1[$ tel que $f(x+1)-f(x) = (x+1-x)f'(c)$ ou encore

$$\exists c \in]x, x+1[/ \ \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c},$$

ce qui montre que $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, et donc que

$$\forall x > 0, \ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Correction de l'exercice 2207 ▲



Soit x_0 un réel non nul. Une équation de la tangente (T_{x_0}) à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. (T_{x_0}) passe par l'origine si et seulement si

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Pour x réel, on pose $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ (g est « la fonction pente à l'origine »).

Puisque f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, g est déjà continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Puisque f est dérivable en 0 et que $f(0) = f'(0) = 0$, g est de plus continue en 0.

Finalement, g est continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$ et vérifie $g(0) = g(a)(= 0)$. D'après le théorème de ROLLE, il existe un réel x_0 dans $]0, a[$ tel que $g'(x_0) = 0$. Puisque x_0 n'est pas nul, on a $g'(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}$. L'égalité $g'(x_0) = 0$ s'écrit $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$ et, d'après le début de l'exercice, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 passe par l'origine.

Correction de l'exercice 2208 ▲

En pensant à l'expression développée de Δ, on voit que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\Delta(a) = \Delta(b)(= 0)$ (un déterminant ayant deux colonnes identiques est nul).

Donc, d'après le théorème de ROLLE, $\exists c \in]a, b[/ \ \Delta'(c) = 0$.

Mais, pour $x \in]a, b[$, $\Delta'(x) = f'(x)(g(a) - g(b)) - g'(x)(f(a) - f(b))$ (dérivée d'un déterminant). L'égalité $\Delta'(c) = 0$ s'écrit : $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$ ce qu'il fallait démontrer.

(Remarque. Ce résultat généralise le théorème des accroissements finis ($g = Id$ « est » le théorème des accroissements finis.))

Correction de l'exercice 2210 ▲

(a) Pour tout $n \geqslant 2$ on a : $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = 3$. Comme l'application $X \mapsto P_n(X)$ est continue, elle s'annule en (au moins) un point de l'intervalle $]0, 1[$. Comme par ailleurs, pour tout X positif, $P_n'(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 2X + 1$ est strictement positif, l'application $X \mapsto P_n(X)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule en au plus un point de $\mathbb{R}_+$. En conséquence P_n a une unique racine positive λ_n qui de plus satisfait à l'inégalité $0 < \lambda_n < 1$.

(b) Pour tout $X \in]0, 1[, P_n(X) - P_{n-1}(X) = X^n - X^{n-2} < 0$. En particulier $P_n(\lambda_{n-1}) < 0$ donc $\lambda_n > \lambda_{n-1}$. La suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 2}$ est donc croissante et majorée (cf 1.) : elle est convergente.

(c) Pour tout $n \geqslant 2$ on a : $\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} = -\lambda_n^2 - \lambda_n + 1$. Or $P_n\left(\frac{3}{4}\right) > \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - 1 > 0$ donc la suite $(\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1})_{n\in|||}$ satisfait aux inégalités $0 < \lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} < \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ et converge vers 0. Il en va de même de la suite $(-\lambda_n^2 - \lambda_n + 1)_{n\geqslant 2}$. En passant à la limite, on obtient l'égalité : $\ell^2 + \ell - 1 = 0$. La seule solution positive de cette équation étant $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, on a l'égalité : $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarques

(a) L'inégalité $0 < \lambda_n < 1$ (pour tout $n \geqslant 2$) n'implique pas que $(\lambda_n^n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0. Par exemple la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ converge vers $\frac{1}{e}$. (Pour le vérifier appliquer le 1. du problème à $\log(v_n)$.)

(b) La propriété $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right) = 0$ n'implique pas que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right) = 0$. Par exemple... $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \log(2)$.

Correction de l'exercice 2214 ▲

(a) $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)$. Comme f est continue, ε est continue sur $]a,b[-\{c\}$ et la continuité en c de ε équivaut à la dérivabilité de f en c. L'unicité est évidente.

(b) Pour tout $n \geqslant 1, S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} < 0$ (par exemple parce que $\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$ donc $\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} < 2 \times \frac{1}{2n}$) donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Elle est minorée (par 0) donc elle converge.

(c) Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n, \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n}$ donc $(n+1) \times \frac{1}{2n} \leqslant S_n \leqslant (n+1) \times \frac{1}{n}$ d'où, en passant à la limite, l'inégalité $\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1$.

(d) Soit ε l'application de $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$. Pour tous $n,k \in |||, n > 0$, on a l'égalité :

$$f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n+k}f'(0) + \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

donc $\sigma_n(f) - f'(0)S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)$. Comme, pour tout $k \geqslant 0$, on a $\frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n}$, on en déduit les inégalités :

$$|\sigma_n(f) - f'(0)S_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{n} \max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|.$$

Comme $\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant \sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]} |\varepsilon(x)|$, cette quantité converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini (puisque ε est continue et s'annulle en 0).

(e) Des égalités $\log\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \log\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) = \log(n+k+1) - \log(n+k)$ on déduit que :

$$\sigma_n(f) = \log(2n+1) - \log(n) = \log\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \log\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Comme la fonction logarithme est continue, $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\log(2)$ lorsque n tend vers l'infini. Ainsi $S = \log(2)$.

(f) Par les deux questions qui précédent il est immédiat que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \log(2)$.

(g) Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Soit ε l'application de $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$.
On pose, pour tous $n,k \in |||, n > 0$:

$$\sigma_n(p,f) = \sum_{k=0}^{pn} f(\frac{1}{n+k}) \text{ et } S_{n,p} = \sum_{k=0}^{pn} \frac{1}{n+k}.$$

Pour tous $n,k \in |||, n > 0$ on a l'égalité : $f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n+k} f'(0) + \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)$ d'où

$$|\sigma_n(p,f) - f'(0)S_{n,p}| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{pn}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant \frac{pn+1}{n} \sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|$$

donc cette différence converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Lorsque f est la fonction $x \mapsto \log(1+x)$, on obtient (comme précédemment) que :

$$\sigma_n(p,f) = \log((p+1)n+1) - \log(n) = \log\left(1+p+\frac{1}{n}\right)$$

puis que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(p,f) = \log(p+1)$ c'est à dire $S_p = \log(p+1)$.

Correction de l'exercice 2219 ▲

$y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}} \Rightarrow \frac{n}{y_1\cdots y_n} \leqslant \frac{y_1+\cdots+y_n}{n}$.

Correction de l'exercice 2225 ▲

(a)

(b) $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \to 0$.
TAF entre x et $x/2 \Rightarrow 2\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant xf'(x) \leqslant 0 \Rightarrow xf'(x) \to 0$.

Correction de l'exercice 2231 ▲

(a) Fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(b) $f(x) - xf'(x) = -x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Donc, $x \mapsto \frac{f(x)-p}{x} \searrow$ et $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x} \nearrow$.

(c) $p \leqslant f(x) - mx \leqslant f(x) - xf'(x)$.

Correction de l'exercice 2232 ▲

(a) Soient $x < y$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geqslant \frac{f(y)-f(0)}{y-0} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(y)}{y} + f(0)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$.

(b) Pour $x < y$: $f(x+y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$ avec $t = \frac{x}{x-y} < 0$,
donc $f(x+y) - f(x) - f(y) \leqslant \frac{xy}{x-y}\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y}\right) \leqslant 0$.

Correction de l'exercice 2236 ▲

(a)

(b) Prendre x tel que $f(x)$ soit maximal.

(c)

(d)

Correction de l'exercice 2237 ▲

Pour a_0 : $\left|f(a_0+h)-f(a_0)-|h|\right| \leqslant \frac{|h|}{2}$.

Correction de l'exercice 2240 ▲

Soit $F(x)=x^2+xG(x)$. On a pour $h>0$: $f(x)\leqslant \frac{F(x+xh)-F(x)}{xh}=2x+xh+\frac{G(x+xh)-G(x)}{h}+G(x+xh)$. Soit $\varepsilon>0$ et A tel que $y\geqslant A\Rightarrow |G(y)|\leqslant \varepsilon^2$. On prend $h=\varepsilon/\sqrt{x}$ et on obtient $f(x)-2x-\varepsilon\sqrt{x}\leqslant \varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2$ d'où $f(x)\leqslant 2x+o(\sqrt{x})$. L'inégalité inverse se montre de même.

Correction de l'exercice 2241 ▲

$f'(x)=2(1-k)^3x+3(1+k)x^2$, $f''(x)=2(1-k)^2+6(1+k)x$. Nous avons $f'(0)=0$ et $f''(0)=2(1-k)^3$. Donc si $k\neq 1$ alors, la dérivée seconde étant non nulle en $x=0$, 0 est un extremum (maximum ou minimum) local. Si $k=1$ alors $f(x)=2x^3$ et bien sûr 0 n'est pas un extremum local. Dans tous les cas 0 n'est ni un minimum global, ni un maximum global (regardez les limites en $+\infty$ et $-\infty$).

Correction de l'exercice 2246 ▲

$f'(x)=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$ donc les extremums appartiennent à $\{0,\frac{3}{4}\}$. Comme $f''(x)=12x^2-6x=6x(2x-1)$. Alors f'' ne s'annule pas en $\frac{3}{4}$, donc $\frac{3}{4}$ donne un extremum local (qui est même un minimum global). Par contre $f''(0)=0$ et $f'''(0)\neq 0$ donc 0 est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum (même pas local, pensez à un fonction du type $x\mapsto x^3$).

Correction de l'exercice 2247 ▲

(a) $f'_\lambda(x)=\lambda e^x+2x$, $f''_\lambda(x)=\lambda e^x+2$. Les points d'inflexion sont les racines de f''_λ, donc si $\lambda\geqslant 0$ il n'y a pas de point d'inflexion, si $\lambda<0$ alors il y a un point d'inflexion en $x_\lambda=\ln(-2/\lambda)$.

(b) Si $\lambda\geqslant 0$ alors f''_λ est toujours strictement positive, donc f'_λ est strictement croissante, en $-\infty$ la limite de f'_λ est $-\infty$, en $+\infty$ la limite de f'_λ est $+\infty$, donc il existe un unique réel y_λ tel que $f'_\lambda(y_\lambda)=0$. f_λ est décroissante sur $]-\infty,y_\lambda]$ et croissante sur $[y_\lambda,+\infty[$. Et en y_λ nous avons un minimum absolu.

(c) Nous supposons $\lambda<0$. Alors f''_λ s'annule seulement en x_λ. f'_λ est croissante sur $]-\infty,x_\lambda]$ et décroissante sur $[x_\lambda,+\infty[$. Donc f'_λ a des racines si et seulement si $f'(x_\lambda)\geqslant 0$. Or $f'(x_\lambda)=-2+2x_\lambda$.

   i. Si $\lambda=-2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda)=0$. Comme $f''_\lambda(x_\lambda)=0$ et f'''_λ ne s'annule pas alors x_λ est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum local.

   ii. Si $\lambda>-2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda)<0$ donc f'_λ est négative donc f est strictement décroissante. Il n'y a pas d'extremum local.

   iii. Si $-2/e<\lambda<0$ alors $f'_\lambda(x_\lambda)>0$. Donc f'_λ s'annule en deux points, une fois sur $]-\infty,x_\lambda[$ et une sur $]x_\lambda,+\infty[$. Ce sont des extremums locaux (minimum et maximum respectivement).

Correction de l'exercice 2251 ▲

Le théorème de Rolle dit que si $h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a,b[$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $h'(c)=0$.

(a) Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_0\in]a,b]$ tel que $g(x_0)=g(a)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à la restriction de g à l'intervalle $[a,x_0]$ (les hypothèses étant clairement vérifiées), on en déduit qu'il existe $c\in]a,x_0[$ tel que $g'(c)=0$, ce qui contredit les hypothèses faites sur g. Par conséquent on a démontré que $g(x)\neq g(a)$ pour tout $x\in]a,b]$.

(b) D'après la question précédente, on a en particulier $g(b) \neq g(a)$ et donc p est un nombre réel bien défini et $h = f - p \cdot g$ est alors une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Un calcul simple montre que $h(a) = h(b)$. D'après le théorème de Rolle il en résulte qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Ce qui implique la relation requise.

(c) Pour chaque $x \in]a,b[$, on peut appliquer la question 2. aux restrictions de f et g à l'intervalle $[x,b]$, on en déduit qu'il existe un point $c(x) \in]x,b[$, dépendant de x tel que

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Alors, comme $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ et $\lim_{x\to b^-} c(x) = b$, (car $c(x) \in]x,b[$) on en déduit en passant à la limite dans $(*)$ que

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$

Ce résultat est connu sous le nom de "règle de l'Hôpital".

(d) Considérons les deux fonctions $f(x) = \arccos x$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [0,1]$. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1[$ et $f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$, $g'(x) = -x/\sqrt{1-x^2} \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[$. En appliquant les résultats de la question 3., on en déduit que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

Correction de l'exercice 2252 ▲

(a) i. Il est clair que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est une fonction rationnelle sans pôle dans cet intervalle. De plus d'après la formule de la dérivée d'un quotient, on obtient pour $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = \frac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}}.$$

ii. Par l'expression précédente $f'(x)$ est du signe de $x^{n-1} - 1$ sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent on obtient : $f'(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$. Il en résulte que f est décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$ et par suite f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ au point 1 et ce minimum vaut $f(1) = 2^{1-n}$.

(b) i. Il résulte de la question 1.b que $f(x) \geqslant f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et donc

$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n).$$

ii. En appliquant l'inégalité précédente avec $x = b/a$, on en déduit immédiatement l'inégalité requise (le cas du couple $(0,0)$ étant trivial).

Correction de l'exercice 2253 ▲

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est nulle sur cet intervalle ; étudions donc la dérivabilité en 0.

On a

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

(b) On a

$$f'(t)=\begin{cases}-e^{1/t}/t^2 & \text{si } t<0\\ 0 & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}$$

donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est

$$\frac{f'(t)-f'(0)}{t}=\begin{cases}-e^{1/t}/t^3 & \text{si } t<0\\ 0 & \text{si } t>0\end{cases}$$

et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0, et $f''(0)=0$.

(c) i. On a déjà trouvé que $f'(t)=-e^{1/t}/t^2$, donc $f'(t)=P_1(t)/t^2e^{1/t}$ si on pose $P_1(t)=-1$. Par ailleurs, $f''(t)=e^{1/t}/t^4+e^{1/t}(2/t^3)=\frac{1+2t}{t^4}e^{1/t}$ donc la formule est vraie pour $n=2$ en posant $P_2(t)=1+2t$.

ii. Supposons que la formule est vraie au rang n. Alors $f^{(n)}(t)=\frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$ d'où

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(t)&=\frac{P_n'(t)t^{2n}-P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}}e^{1/t}+\frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}(-1/t^2)\\&=\frac{P_n'(t)t^2-(2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t}\end{aligned}$$

donc la formule est vraie au rang $n+1$ avec

$$P_{n+1}(t)=P_n'(t)t^2-(2nt+1)P_n(t).$$

(d) Sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, f est indéfiniment dérivable, donc il suffit d'étudier ce qui se passe en 0. Montrons par récurrence que f est indéfiniment dérivable en 0, et que pour tout $n\in|||, f^{(n)}(0)=0$. On sait que c'est vrai au rang 1. Supposons que f est n-fois dérivable, et que $f^{(n)}(0)=0$. Alors le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 est :

$$\frac{f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)}{t}=\begin{cases}P_n(t)e^{1/t}/t^{2n+1} & \text{si } t<0\\ 0 & \text{si } t>0\end{cases}$$

et sa limite est 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0)=0$. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$. Par conséquent, f est de classe C^∞.

Correction de l'exercice 2256 ▲

Contre-exemple : $f(t)=t^2$ si $t\geqslant 0$ et $f(t)=-t^2$ si $t<0$.

Correction de l'exercice 2261 ▲

Poser $g(x)=\int_{t=0}^x f^2(t)\,dt$. On obtient $(g^3)'(x)\to 3\ell^2$ lorsque $x\to+\infty$, ce qui implique (classiquement) que $g^3(x)\sim 3\ell^2x$, puis $f(x)\sim\sqrt[3]{\frac{\ell}{3x}}$.

Correction de l'exercice 2265 ▲

TAF $\Rightarrow \ell=\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2271 ▲

Dériver par rapport à a puis par rapport à b.

Correction de l'exercice 2275 ▲

(a)

(b) $f^{(n)}(1) = 2^n n!$, $f^{(n)}(-1) = (-2)^n n!$.

(c)

Correction de l'exercice 2279 ▲

$\frac{f'(0)}{2}$.

Correction de l'exercice 2281 ▲

$f = \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 2284 ▲

(a) AF $\Rightarrow \exists\, w(x)$ compris entre $u(x)$ et $v(x)$ tel que $\frac{u^v - v^v}{u-v} = vw^{v-1} \to a^a$.

(b) $u^v - v^u = (u^v - v^v) + (v^v - v^u) = (u-v)(vw_1^{v-1} - (\ln v)v^{w_2})$

$u^u - v^v = (u-v)w_3^{w_3}(1 + \ln w_2)$

$\Rightarrow \lim = \frac{1-\ln a}{1+\ln a}$.

Correction de l'exercice 2285 ▲

(a)

(b) Pour $k \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante et $\ln u_n \leqslant \frac{k}{1-k}$.

Pour $k < 0$, (u_{2n}) décroît et converge, et $u_{2n+1} \sim u_{2n}$.

Correction de l'exercice 2287 ▲

$(1+x^2)f^{(n+1)} + 2nxf^{(n)} + n(n-1)f^{(n-1)} = 0$ pour $n \geqslant 1$.

$g^{(n+1)} = 3x^2 g^{(n)} + 6nxg^{(n-1)} + 3n(n-1)g^{(n-2)}$ pour $n \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 2288 ▲

$(-1)^n e^{-x}\big(x^3 + (2-3n)x^2 + (3n^2 - 7n)x + (-n^3 + 5n^2 - 4n - 5)\big)$.

Correction de l'exercice 2289 ▲

$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin(x + n\frac{\pi}{6})$.

Correction de l'exercice 2290 ▲

$\frac{d^n}{dx^n}\big(x^n(1-x)^n\big) = \sum_{k=0}^n n!\,\big(C_n^k\big)^2(-1)^{n-k}x^{n-k}(1-x)^k$.

coefficient de $x^n = (-1)^n n!\,\sum_{k=0}^n \big(C_n^k\big)^2 = (-1)^n A_{2n}^n$.

Correction de l'exercice 2291 ▲

$\frac{(n-1)!}{t}$, $\qquad \frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\exp(1/t)$.

Correction de l'exercice 2292 ▲

(a) $a_{n+1,k} = a_{n,k-1} + 2(2k-n)a_{n,k}$.

(b) $a_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!(2k-n)!}$.

Correction de l'exercice 2297 ▲

(a) Au point d'abscisse α tq $\ln\alpha = \frac{a\ln a}{1-a} + 1$ pour $\mathscr{C}$, et $\alpha' = a\alpha$ pour $\mathscr{C}'$.

(b) Centre = $\left(0, \frac{a\ln a}{1-a}\right)$, rapport = a.

Correction de l'exercice 2298 ▲

Si f change de signe, soit par exemple $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $a < b$ et $c = \sup\{x \text{ tq } f_{|[a,x]} \text{ est croissante}\}$. Alors f est croissante sur $[a,c]$ et $f(c) = 0$, contradiction.

Correction de l'exercice 2299 ▲

Si l'on pose $F(x) = \int_{t=0}^{x} e^{t^2}\,dt$, on constate que $a(x) = F^{-1}(1+F(x))$ ce qui prouve l'existence, l'unicité et le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de a. Pour la symétrie, il faut montrer que $a(-a(x)) = -x$ soit $\int_{t=-a(x)}^{-x} e^{t^2}\,dt = 1$ ce qui est immédiat.

Correction de l'exercice 2300 ▲

Toute fonction linéaire $\varphi : x \mapsto ax$ convient. Réciproquement, si φ est solution alors $\varphi(0) = 0$. On note $a = \varphi'(0)$ et $\psi(x) = \varphi(x) - ax$: ψ est également solution et $\psi'(0) = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in |||$ alors $\psi(x) = 2^n\psi(x/2^n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, d'où $\psi = 0$ et $\varphi(x) = ax$.

Correction de l'exercice 2301 ▲

(a) $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = m^{-1/m}$.

(b)

(c)

(d) f et f' ont des limites nulles en 0^+ et infinies en $+\infty$ donc $f(x) = o_{x\to 0^+}(x)$ et $x = o_{x\to+\infty}(f(x))$, ce qui implique que $f(x) - x$ s'annule sur $]0,+\infty[$. S'il y a deux points fixes, $a < b$, alors par le thm. des accroissements finis l'équation $f'(x) = 1$ admet une solution dans $]0,a[$ et une dans $]a,b[$, en contradiction avec la bijectivité de $f' = f^{-1}$.

(e) On note a le point fixe de f, b celui de g et on suppose $a \neq b$, par exemple $a < b$. On a $g(x) < x$ pour $x \in]0,b[$ donc $g(a) < a = f(a)$. Par conséquent $g(x) < x \leqslant f(x)$ si $x \in [a,b[$; soit $]c,b[$ le plus grand intervalle sur lequel $g(x) < f(x)$. On a $0 \leqslant c < a$, $g(c^+) = f(c^+) \leqslant c$ et f, g sont strictement croissantes, donc $g^{-1}(x) > f^{-1}(x)$ pour $x \in]c,b[$. Ainsi $g - f$ est strictement croissante sur $]c,b[$ a une limite nulle en c^+ et est négative en b, c'est absurde.

Remarque : le point fixe est le nombre d'or m. De plus, si f et g sont deux éléments de E distincts alors $f - g$ n'est de signe constant sur aucun voisinage de m^- (même démonstration).

Correction de l'exercice 2302 ▲

On a $f' \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$, et en particulier elle admet des limites finies, a et b en $-\infty$ et $+\infty$ avec $-1 \leqslant b \leqslant a \leqslant 1$.

Supposons $a > 0$: soit $\alpha \in]0,a[$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ x \leqslant x_0,\ f(x) \geqslant a - \alpha > 0$, d'où $f'(x) \leqslant -1 + \sqrt{a-\alpha} < 0$. Ceci est incompatible avec le caractère borné de f, donc on a en fait $a \leqslant 0$. On montre de même que $b \geqslant 0$ et comme $b \leqslant a$, on a finalement $a = b = 0$.

Correction de l'exercice 2303 ▲

f' est continue sur le segment $[a,b]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit $M = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$, et soit g la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en a et b (c'est-à-dire $\forall x \in [a,b],\ g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) =$) puis $h = f - g$. On va montrer que $h = 0$ sous l'hypothèse $M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

h est dérivable sur $[a,b]$ et, pour $x \in [a,b]$, $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x) - M \leqslant 0$. h est donc décroissante sur $[a,b]$. Par suite, $\forall x \in [a,b],\ 0 = h(b) \leqslant h(x) \leqslant h(a) = 0$. Ainsi, $\forall x \in [a,b],\ h(x) = 0$, ou encore $f = g$. f est donc affine sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 2304 ▲

Supposons que f est convexe sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$ (a et b réels ou infinis).

Soit $x_0 \in I$. On sait que la fonction pente en x_0 est croissante.

Pour $x \neq x_0$, posons $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Soit x' un élément de $]x_0,b[$. $\forall x \in]a,x_0[$, on a $g(x) < g(x')$, ce qui montre que g est majorée au voisinage de x_0 à gauche. Etant croissante, g admet une limite réelle quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures ou encore, $\lim_{x\to x_0,\, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe dans $\mathbb{R}$. f est donc dérivable à gauche en x_0. On montre de même que f est dérivable à droite en x_0.

Finalement, f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. En particulier, f est continue à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$ et donc continue sur $]a,b[$.

Correction de l'exercice 2305 ▲

(a) La fonction $f\ :\ x \mapsto \ln x$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Par suite, f est concave sur $]0,+\infty[$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in (]0,+\infty[)^n,\ \forall (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in (]0,1[)^n,\ (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \Rightarrow \ln(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ln(x_k),$$

et donc par croissance de f sur $]0,+\infty[$,

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Si l'un des x_k est nul, l'inégalité précédente est immédiate.

En choisissant en particulier $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, de sorte que $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in (]0,1[)^n$ et que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in ([0,+\infty[)^n,\ \sqrt[n]{x_1\dots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n).$$

(b) i. Soient p et q deux réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ (de sorte que l'on a même $\frac{1}{p} < \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ et donc $p > 1$ et aussi $q > 1$).

Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité proposée est immédiate.

Soit alors a un réel strictement positif puis, pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{a^p}{p}+\frac{x^q}{q} - ax$.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ (car $q > 1$) et pour $x \geqslant 0$, $f'(x) = x^{q-1} - a$. q étant un réel strictement plus grand que 1, $q-1$ est strictement positif et donc, la fonction $x \mapsto x^{q-1}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Par suite,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{q-1} > a \Leftrightarrow x > a^{1/(q-1)}.$$

f est donc strictement décroissante sur $[0,a^{1/(q-1)}]$ et strictement croissante sur $[a^{1/(q-1)},+\infty[$. Ainsi,

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant f(a^{1/(q-1)}) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a.a^{1/(q-1)}.$$

Maintenant, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ fournit $q=\frac{p}{p-1}$ puis $q-1=\frac{1}{p-1}$. Par suite, $\frac{q}{q-1}=p$. Il en résulte que

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a.a^{1/(q-1)} = (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)a^p = 0.$$

f est donc positive sur $[0,+\infty[$, ce qui fournit $f(b) \geqslant 0$. De plus,

$$f(b) = 0 \Leftrightarrow b = a^{1/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^{q/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^p.$$

ii. Soient $A = \sum_{k=1}^n |a_k|^p$ et $B = \sum_{k=1}^n |b_k|^q$.
Si $A = 0$, alors $\forall k \in \{1,...,n\}$, $a_k = 0$ et l'inégalité est immédiate. De même, si $B = 0$.
Si $A > 0$ et $B > 0$, montrons que $\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A^{1/p}}\frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leqslant 1$.
D'après a),

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A^{1/p}}\frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leqslant \sum_{k=1}^n (\frac{1}{p}\frac{|a_k|^p}{A} + \frac{1}{q}\frac{|b_k|^q}{B}) = \frac{1}{pA}.A + \frac{1}{qB}.B = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

iii. Pour $p > 1$, la fonction $x \mapsto x^p$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$. Donc, la fonction $x \mapsto x^p$ est strictement convexe sur $]0,+\infty[$ et donc sur $[0,+\infty[$ par continuité en 0. Donc,

$$\forall (x_1,...,x_n) \in (]0,+\infty[)^n,\ \forall (\lambda_1,...,\lambda_n) \in ([0,+\infty[)^n \setminus \{(0,...,0)\},\ \left(\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}\right)^p \leqslant \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p}{\sum_{k=1}^n \lambda_k},$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \leqslant (\sum_{k=1}^n \lambda_k)^{1-\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

On applique alors ce qui précède à $\lambda_k = |b_k|^q$ puis $x_k = \lambda_k^{-1/p}|a_k|$ (de sorte que $\lambda_k x_k = |a_k b_k|$) et on obtient l'inégalité désirée.

iv. Pour $p = q = 2$, c'est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ démontrée dans une planche précédente.

Correction de l'exercice 2306 ▲

---

f est de classe $^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X]/\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$.

C'est vrai pour $n = 0$ avec $P_0 = 1$.

Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]/\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = (\frac{2}{x^3}\frac{P_n(x)}{x^{3n}} + (P_n'(x)\frac{1}{x^{3n}} - 3nP_n(x)\frac{1}{x^{3n+1}})e^{-1/x^2} = \frac{P_{n+1}(x)}{3^{3(n+1)}}e^{-1/x^2},$$

où $P_n + 1 = 2P_n + X^3P_n' - 3nX^2P_n$ est un polynôme. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X]/\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}.$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.

Pour $n = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, $\lim_{x\to 0,\ x\neq 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \geqslant 0$. Supposons que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$. Alors, d'une part f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et C^{n+1} sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, d'après les théorèmes de croissances comparées, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, $x \neq 0$. D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et en particulier, $f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0,\, x\neq 0} f^{(n+1)}(x) = 0$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$. f est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2307 ▲

(a) Soit m un élément de $]f'(a), f'(b)[$. Puisque $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ et que $\lim_{h\to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} = f'(b)$, on a (en prenant par exemple $\varepsilon = \mathrm{Min}\{m - f'(a), f'(b) - m\} > 0$)

$$\exists h_1 > 0/ \ \forall h \in]0, h_1[, \ (a+h \in I \Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m \text{ et}$$
$$\exists h_2 > 0/ \ \forall h \in]0, h_2[\ (b+h \in I \Rightarrow \frac{f(b+h)-f(b)}{h} > m.$$

L'ensemble $E = \{h \in]0, \mathrm{Min}\{h_1, h_2\}[/ \ a+h \text{ et } b+h \text{ sont dans } I\}$ n'est pas vide (car I est ouvert) et pour tous les h de E, on a : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.

$h > 0$ est ainsi dorénavant fixé.

(b) La fonction f est continue sur I et donc, la fonction $g \ : \ x \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $g(a) < m < g(b)$, $\exists y \in [a, b]/ \ g(y) = m$ ou encore $\exists y \in [a, b]/ \ \frac{f(y+h)-f(y)}{h} = m$.

Maintenant, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists x \in]y, y+h[\subset I/ \ m = \frac{f(y+h)-f(y)}{h} = f'(x)$.

Donc une fonction dérivée n'est pas nécessairement continue mais vérifie tout de même le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème de DARBOUX).

Correction de l'exercice 2308 ▲

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \frac{1}{2}\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{(\sqrt{x})^2/2} \to -\frac{1}{2}.$$

f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

Autre solution. f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$. Quand x tend vers 0, f' tend vers $-\frac{1}{2}$. En résumé, f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0. On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2309 ▲

Soit $n \geqslant 2$ le degré de P.

(a) Si P admet n racines réelles simples, le théorème de ROLLE fournit au moins $n-1$ racines réelles deux à deux distinctes pour P'. Mais, puisque P' est de degré $n-1$, ce sont toutes les racines de P', nécessairement toutes réelles et simples.

(Le résultat tombe en défaut si les racines de P ne sont pas toutes réelles. Par exemple, $P = X^3 - 1$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ mais $P' = 3X^2$ admet une racine double)

(b) Séparons les racines simples et les racines multiples de P. Posons $P = (X - a_1)\ldots(X - a_k)(X - b_1)^{\alpha_1}\ldots(X - b_l)^{\alpha_l}$ où les a_i et les b_j sont $k + l$ nombres réels deux à deux distincts et les α_j des entiers supérieurs ou égaux à 2 (éventuellement $k = 0$ ou $l = 0$ et dans ce cas le produit vide vaut conventionnellement 1).

P s'annule déjà en $k + l$ nombres réels deux à deux distincts et le théorème de ROLLE fournit $k + l - 1$ racines réelles deux à deux distinctes et distinctes des a_i et des b_j. D'autre part, les b_j sont racines d'ordre α_j de P et donc d'ordre $\alpha_j - 1$ de P'. On a donc trouvé un nombre de racines (comptées en nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) égal à $k+l-1+\sum_{j=1}^{l}(\alpha_j - 1) = k+\sum_{j=1}^{l}\alpha_j - 1 = n-1$ racines réelles et c'est fini.

Correction de l'exercice 2310 ▲

Puisque $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$, $\exists A > 0/\ \forall x > 0,\ (x \geqslant A \Rightarrow xf'(x) \geqslant \frac{1}{2})$.
Soit x un réel fixé supérieur ou égal à A. $\forall t \in [A,x],\ f'(t) \geqslant \frac{1}{2x}$ et donc, par croissance de l'intégrale, $\int_A^x f'(t)\,dt \geqslant \int_A^x \frac{1}{2t}\,dt$ ce qui fournit :

$$\forall x \geqslant A,\ f(x) \geqslant f(A) + \frac{1}{2}(\ln x - \ln A),$$

et montre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Correction de l'exercice 2311 ▲

$$\forall x \in \mathbb{R} f(\frac{x}{2}+3) = f(f\circ f(x)) = f\circ f(f(x)) = \frac{f(x)}{2}+3.$$

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient en dérivant $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}f'(\frac{x}{2}+3) = \frac{1}{2}f'(x)$,
et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(\frac{x}{2}+3) = f'(x).$$

Soit alors x un réel donné et u la suite définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N},\ f'(x) = f'(u_n)$. Maintenant, u est une suite arithmético-géométrique et on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 6 = \frac{1}{2^n}(u_0 - 6)$$

ce qui montre que la suite u converge vers 6. La suite $(f'(u_n))_{n\geqslant 0}$ est constante, de valeur $f'(x)$. f' étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f'(6),$$

ce qui montre que la fonction f' est constante sur $\mathbb{R}$ et donc que f est affine.
Réciproquement, pour x réel, posons $f(x) = ax+b$.

$$f \text{ solution} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ a(ax+b)+b = \frac{x}{2}+3 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (a^2-\frac{1}{2})x+ab+b-3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \text{ et } (a+1)b = 3 \Leftrightarrow (a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3(2-\sqrt{2})) \text{ ou } (a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = 3(2+\sqrt{2})).$$

On trouve deux fonctions solutions, les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x+3(2-\sqrt{2}) \text{ et } f_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x+3(2+\sqrt{2}).$$

Correction de l'exercice 2312 ▲

Montrons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Pour x réel, posons $g(x) = e^x f(x)$. g est dérivable sur R et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x(f(x)+f'(x))$. Il s'agit donc maintenant de montrer que si $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}g'(x) = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}g(x) = 0$.

Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists A > 0 / \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < e^{-x}g'(x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}e^{x} \leqslant g'(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}e^{x}).$$

Pour x réel donné supérieur ou égal à A, on obtient en intégrant sur $[A,x]$:

$$-\frac{\varepsilon}{2}(e^{x}-e^{A}) = \int_{A}^{x} -\frac{\varepsilon}{2}e^{t}\,dt \leqslant \int_{A}^{x} g'(t)\,dt = g(x)-g(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(e^{x}-e^{A}),$$

et donc

$$\forall x \geqslant A,\ g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}) \leqslant e^{-x}g(x) \leqslant g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}).$$

Maintenant, $g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x})$ et $g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x})$ tendent respectivement vers $-\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{\varepsilon}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. Donc,

$$\exists B \geqslant A / \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant B \Rightarrow g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}) > -\varepsilon \text{ et } < g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}) < \varepsilon.$$

Pour $x \geqslant B$, on a donc $-\varepsilon < e^{-x}g(x) < \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 / \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant B \Rightarrow |e - xg(x)| < \varepsilon)$ et donc $\lim_{x \to +\infty} e^{-x}g(x) = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 2313 ▲

Habituellement on trouve le développement limité d'une fonction à partir des dérivées successives. Ici on va faire l'inverse.
Calcul du dl (à un certain ordre) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{1+x^6} = x^3\frac{1}{1+x^6} \\ &= x^3\left(1 - x^6 + x^{12} - \cdots \pm x^{6\ell}\cdots\right) \\ &= x^3 - x^9 + x^{15} - \cdots \pm x^{3+6\ell}\cdots \\ &= \sum_{\ell \geqslant 0} (-1)^{\ell} x^{3+6\ell} \end{aligned}$$

Il s'agit d'identifier ce développement avec la formule de Taylor :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Par unicité des DL, en identifiant les coefficients devant x^n on trouve :

$$\begin{cases} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{\ell} & \text{si } n = 3+6\ell \\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $n = 3+6\ell$ (avec $\ell \in \mathbb{N}$) alors on peut écrire $\ell = \frac{n-3}{6}$ et donc on peut conclure :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-3}{6}} \cdot n! & \text{si } n \equiv 3 \pmod 6 \\ f^{(n)}(0) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2314 ▲

(a) La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x+h$ (avec $h>0$) donne :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(c_{x,h})\frac{h^2}{2!}$$

où $c_{x,h} \in]x, x+h[$.
Cela donne :

$$f'(x)h = f(x+h) - f(x) - f''(c_{x,h})\frac{h^2}{2!}.$$

On peut maintenant majorer $f'(x)$:

$$\begin{aligned} h|f'(x)| &\leqslant |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2}\left|f''(c_{x,h})\right| \\ &\leqslant 2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2 \end{aligned}$$

Donc

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

(b) Soit $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0$. C'est une fonction continue et dérivable. La limite en 0 et $+\infty$ est $+\infty$. La dérivée $\phi'(h) = \frac{1}{2}M_2 - \frac{2M_0}{h^2}$ s'annule en $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ et en ce point ϕ atteint son minimum $\phi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}$.
Fixons $x > a$. Comme pour tout $h > 0$ on a $|f'(x)| \leqslant \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0 = \phi(h)$ alors en particulier pour $h = h_0$ on obtient $|f'(x)| \leqslant \phi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}$. Et donc f' est bornée.

(c) Fixons $\varepsilon > 0$. g'' est bornée, notons $M_2 = \sup_{x>0} |g''(x)|$. Comme $g(x) \to 0$ alors il existe $a > 0$ tel que sur l'intervalle $]a, +\infty[$, g soit aussi petit que l'on veut. Plus précisément nous choisissons a de sorte que

$$M_0 = \sup_{x>a} |g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4M_2}.$$

La première question appliquée à g sur l'intervalle $]a, +\infty[$ implique que pour tout $h > 0$:

$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$$

En particulier pour $h = \frac{\varepsilon}{M_2}$ et en utilisant $M_0 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4M_2}$ on obtient :

$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{\frac{\varepsilon}{M_2}}\frac{\varepsilon^2}{4M_2} + \frac{\frac{\varepsilon}{M_2}}{2}M_2 \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi pour chaque ε on a trouvé $a > 0$ tel que si $x > a$ alors $|g'(x)| \leqslant \varepsilon$. C'est exactement dire que $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

Correction de l'exercice 2320 ▲

$f'(a)f'''(a) - f''(a)^2$.

Correction de l'exercice 2323 ▲

(a) Formule de Taylor Lagrange entre $\frac{1}{2}$ et 0.

(b) Sinon, la fonction $g : x \mapsto f(x) - (1-2x)^n$ est monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$ et nulle en 0 et $\frac{1}{2}$, donc identiquement nulle. Impossible car $g^{(n)}(\frac{1}{2}) \neq 0$.

Correction de l'exercice 2324 ▲

(a) Formule de Taylor pour f et $f' \Rightarrow \lambda = 1/180$.

(b)

Correction de l'exercice 2325 ▲

(a) Formule de Taylor pour calculer $f(a)$ et $f(b)$ à partir de $f(x)$.

(b) Étudier $f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \pm M(x-a)^2/2$.

Correction de l'exercice 2326 ▲

Appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 de x à a et de x à $-a$.

Correction de l'exercice 2327 ▲

$f^{(n)}(a+h\theta_h) = f^{(n)}(a) + h\theta_h f^{(n+1)}(a+\theta' h) = f^{(n)}(a) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(a+\theta'' h)$.

Correction de l'exercice 2329 ▲

(a) $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta h) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(x+\theta h)$.

(b) $h = 2\sqrt{\alpha/\beta} \Rightarrow |f'| \leqslant 2\sqrt{\alpha\beta}$.

Correction de l'exercice 2330 ▲

(a) $= f(x+y) + \frac{y^2}{2}(M - f''(z))$.

(b) $\Delta \leqslant 0$.

(c) $\sqrt{f}$ est affine.

Correction de l'exercice 2332 ▲

Soit $\varepsilon > 0$: $f(x+\varepsilon x) = f(x) + \varepsilon x f'(x) + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} f''(x+\varepsilon\theta x) \Rightarrow x f'(x) = \frac{f(x+\varepsilon x)-f(x)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon x^2}{2} f''(x+\varepsilon\theta x)$.

Correction de l'exercice 2333 ▲

Si $Q = P \circ f$ alors $Q' = f' \times (P' \circ f)$ a autant de racines que P' d'où $p = q$, $f(y_i) = x_i$ et $Q(y_i) = P(x_i)$. De plus, au voisinage de y_i :

$$\lambda_i (y-y_i)^{n_i} \sim Q'(y) = f'(y) \times P'(f(y)) \sim f'(y_i) \times \mu_i (f(y)-x_i)^{m_i} \sim \mu_i f'(y_i)^{1+m_i} (y-y_i)^{m_i}$$

d'où $m_i = n_i$.

Réciproquement, si $p = q$, $P(x_i) = Q(y_i)$ et $m_i = n_i$ alors en posant $x_0 = y_0 = -\infty$ et $x_{p+1} = y_{p+1} = +\infty$, P induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]x_i, x_{i+1}[$ sur $P(]x_i, x_{i+1}[) = Q(]x_i, x_{i+1}[)$ (les limites de P et Q en $+\infty$ sont égales à $+\infty$ vu les coefficients dominants de P et Q ; celles en $-\infty$ s'en déduisent en comptant les changements de signe pour P' ou pour Q' et on trouve le même compte puisque $m_i = n_i$). On note f_i la fonction réciproque de $P_{|]x_i, x_{i+1}[}$ et f définie par $f(y) = f_i(Q(y))$ si $y_i < y < y_{i+1}$ et $f(y_i) = x_i$. f ainsi définie est strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^1$ à dérivée non nulle sauf peut-être aux y_i, et $P \circ f = Q$. Reste à étudier le caractère $\mathscr{C}^1$ en y_i et à vérifier que $f'(y_i) \neq 0$.

Au voisinage de y_i, par intégration des DL de P et Q on a :

$$\frac{\lambda_i}{1+m_i}(y-y_i)^{1+m_i} \sim Q(y)-Q(y_i) = P(f(y))-P(f(y_i)) \sim \frac{\mu_i}{1+m_i}(f(y)-f(y_i))^{1+m_i}$$

d'où $\frac{f(y)-f(y_i)}{y-y_i} \to \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)}$ lorsque $y \to y_i$, car les taux d'accroissement de f sont positifs. Ceci prouve que f est dérivable en y_i et $f'(y_i) = \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)} \neq 0$. Enfin on a, lorsque $y \to y_i$:

$$f'(y) = \frac{Q'(y)}{P'(f(y))} \sim \frac{\lambda_i(y-y_i)^{m_i}}{\mu_i(f(y)-f(y_i))^{m_i}} \to \frac{\lambda_i}{\mu_i}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{-m_i/(1+m_i)} = \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)}$$

et donc f est $\mathscr{C}^1$ en y_i.

Correction de l'exercice 2334 ▲

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Puisque f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 2 permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+yf'(x)+\tfrac{y^2}{2}f''(x)+\textstyle\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt \text{ et}\\ f(x-y) &= f(x)-yf'(x)+\tfrac{y^2}{2}f''(x)\textstyle\int_x^{x-y}\frac{(x-y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}(f(x)^2) &\geqslant f(x+y)f(x-y)\\ &= (f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x)+\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt)\times\\ &\quad (f(x)-yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x)+\int_x^{x-y}\frac{(x-y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt)\\ &= (f(x))^2+y^2(f(x)f''(x)-(f'(x))^2)\\ &\quad +(f(x)-yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x))\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\\ &\quad +(f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x))\int_x^{x-y}\frac{(x-y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt \ (*)\end{aligned}$$

Maintenant, pour $y\in[-1,1]$, ($f^{(3)}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur le segment $[-1,1]$),

$$\left|\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\right| \leqslant |y|.\frac{y^2}{2}\mathrm{Max}\{|f^{(3)}(t)|,\ t\in[x-1,x+1]\},$$

et donc,

$$\frac{1}{y^2}\left|\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\right| \leqslant |y|\mathrm{Max}\{|f^{(3)}(t)|,\ t\in[x-1,x+1]\}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{1}{y^2}\left|\int_x^{x+y}\frac{(x+y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\right|$ tend vers 0 quand y tend vers 0. De même, $\frac{1}{y^2}\left|\int_x^{x-y}\frac{(x-y-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\right|$ tend vers 0 quand y tend vers 0. On simplifie alors $(f(x)^2$ dans les deux membres de $(*)$. On divise les deux nouveaux membres par y^2 pour $y\neq 0$ puis on fait tendre y vers 0 à x fixé. On obtient $0 \geqslant f(x)f''(x)-(f'(x))^2$, qui est l'inégalité demandée.

Correction de l'exercice 2335 ▲

Soit $x \in [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.
D'après la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit

$$\sin x = x - \int_0^x (x-t)\sin t\,dt \leqslant x,$$

car pour $t \in [0,x]$, $(x-t) \geqslant 0$ et pour $t \in [0,x] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geqslant 0$.
De même, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 3 fournit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\sin t\,dt \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$

Donc, $\forall x \in [0,1]$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
Soient alors $n \geqslant 1$ et $k \in \{1,\ldots,n\}$. On a $0 \leqslant \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant 1$ et donc

$$\frac{1}{(n+k)^2} - \frac{1}{6(n+k)^6} \leqslant \sin\frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{(n+k)^2},$$

puis en sommant

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} \leqslant \sum_{k=1}^n \sin\frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n}\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx + o(1)\right) = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

D'autre part,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} \leqslant n.\frac{1}{6n^6} = \frac{1}{6n^5},$$

et donc, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} = o(\frac{1}{n})$.
On en déduit que $2n(\frac{1}{(n+k)^2} - \frac{1}{6(n+k)^6}) = 2n(\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) = 1 + o(1)$ et que $2n\frac{1}{(n+k)^2} = 1 + o(1)$. Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $2n\sum_{k=1}^n \sin\frac{1}{(n+k)^2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ou encore

$$\sum_{k=1}^n \sin\frac{1}{(n+k)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Correction de l'exercice 2336 ▲

(a) $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^6\right)$.

(b) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$.

(c) $\sin(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right)$.

(d) $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right)$.

(e) $\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$.

(f) $\sin^6 x = x^6 + o\left(x^6\right)$.

Correction de l'exercice 2338 ▲

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)-\sin(x)}{\tan(x)-\arcsin(x)} = -1.$$

Correction de l'exercice 2339 ▲

(a) $\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right)$.

(b) $\dfrac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x} = 2 - \frac{11}{10}x^2 + o\left(x^3\right)$.

(c) $\ln(\tan(1/2x+1/4\pi)) = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)$.

(d) $\ln\sin x = \ln(1/2\sqrt{2}) + x - \frac{\pi}{4} - \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.

(e) $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x} = 2/3\,\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^4})$.

(f) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - 1/2\,ex + \frac{11}{24}\,ex^2 - \frac{7}{16}\,ex^3 + o\left(x^3\right)$.

(g) $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right) = 1/8\,\frac{\sqrt{2}}{x^2} + o(x^{-5})$.

Correction de l'exercice 2342 ▲

(a) Première méthode. On applique la formule de Taylor (autour du point $x=1$)

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Comme $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ et donc $f'(1) = \frac{1}{2}$. Ensuite on calcule $f''(x)$ (puis $f''(1)$), $f'''(x)$ (et enfin $f'''(1)$).
On trouve le dl de $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x=1$:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Deuxième méthode. Posons $h = x-1$ (et donc $x = h+1$). On applique la formule du dl de $\sqrt{1+h}$ autour de $h=0$.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} &= \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3) \qquad \text{c'est la formule du dl de } \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \end{aligned}$$

(b) La première méthode consiste à calculer $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\exp\sqrt{x}$, $g''(x)$, $g'''(x)$ puis $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ pour pouvoir appliquer la formule de Taylor conduisant à :

$$\exp(\sqrt{x}) = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

(avec $e = \exp(1)$).

Autre méthode. Commencer par calculer le dl de $k(x) = \exp x$ en $x = 1$ ce qui est très facile car pour tout n, $k^{(n)}(x) = \exp x$ et donc $k^{(n)}(1) = e$:

$$\exp x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Pour obtenir le dl $g(x) = h(\sqrt{x})$ en $x = 1$ on écrit d'abord :

$$\exp(\sqrt{x}) = e + e(\sqrt{x}-1) + \frac{e}{2!}(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{e}{3!}(\sqrt{x}-1)^3 + o((\sqrt{x}-1)^3).$$

Il reste alors à substituer $\sqrt{x}$ par son dl obtenu dans la première question.

(c) Posons $u = x - \frac{\pi}{3}$ (et donc $x = \frac{\pi}{3} + u$). Alors

$$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{3} + u) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(u) + \sin(u)\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u$$

On connaît les dl de $\sin u$ et $\cos u$ autour de $u = 0$ (car on cherche un dl autour de $x = \frac{\pi}{3}$) donc

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{2!}u^2 + o(u^3)\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{3!}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

Maintenant pour le dl de la forme $\ln(a+v)$ en $v = 0$ on se ramène au dl de $\ln(1+v)$ ainsi :

$$\ln(a+v) = \ln\big(a(1+\frac{v}{a})\big) = \ln a + \ln(1+\frac{v}{a}) = \ln a + \frac{v}{a} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{v^3}{a^3} + o(v^3)$$

On applique ceci à $h(x) = \ln(\sin x)$ en posant toujours $u = x - \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
h(x) = \ln(\sin x) &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\right) \\
&= \cdots \qquad \text{on effectue le dl du } \ln \text{ et on regroupe les termes} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u - \frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}u^3 + o(u^3) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)$$

Bien sûr une autre méthode consiste à calculer $h(1)$, $h'(1)$, $h''(1)$ et $h'''(1)$.

Correction de l'exercice 2343 ▲

(a) Dl de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1+x+1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \qquad \text{car } \sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \\
&= \left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\times\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4)} \qquad \text{on pose } u = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\times\frac{1}{1+u} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\times\left(1-u+u^2+o(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\times\left(1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})^2+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\times\left(1-\frac{x}{2}+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)
\end{aligned}$$

(b) En $+\infty$ on va poser $h = \frac{1}{x}$ et se ramener à un dl en $h = 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\left(\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)} = \frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h+\sqrt{1+h^2}} = f(h).$$

Ici -miraculeusement- on retrouve exactement l'expression de f dont on a déjà calculé le dl en $h = 0$: $f(h) = \frac{1}{2}-\frac{h}{4}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)$. Ainsi

$$f(x) = f(h) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

(c) Attention cela ne fonctionne plus du tout en $-\infty$. Dans le calcul de la deuxième question on était on voisinage de $+\infty$ et nous avons considéré que x était positif. En $-\infty$ il faut faire attention au signe, par exemple $\sqrt{1+x^2} = |x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$.

Ainsi toujours en posant $h = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\big(1+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\big)} \\
&= -\frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h-\sqrt{1+h^2}} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1+h-\big(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\big)} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{h-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)} \\
&= -\frac{1}{h}\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1-\frac{1}{2}h+o(h)} \\
&= -\frac{1}{h}\big(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\big)\times\big(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\big) \\
&= -\frac{1}{h}\big(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{4}h^2+o(h^2)\big) \\
&= -\frac{1}{h}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}h+o(h) \\
&= -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Ainsi un développement (asymptotique) de f en $-\infty$ est

$$f(x) = -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$$

On en déduit par exemple que $f(x)$ se comporte essentiellement comme la fonction $-x$ en $-\infty$ et en particulier $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$.

Correction de l'exercice 2346 ▲

$$\ln(x+1) = \ln\Big(x\times(1+\frac{1}{x})\Big) = \ln x+\ln\big(1+\frac{1}{x}\big) = \ln x+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$$

Donc

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1+\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \\
&= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x})\right)\right) \\
&= \exp\left(x\left(\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x})\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{\ln x}+o(\frac{1}{\ln x})\right) \\
&= 1+\frac{1}{\ln x}+o(\frac{1}{\ln x})
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1$$

et que lorsque $x \to +\infty$

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 \sim \frac{1}{\ln x}.$$

Correction de l'exercice 4231 ▲

A 1.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\Big[\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\phi^{(n-m)}(t)(z-a)f^{(m+1)}(a+t(z-a))\Big]\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&\qquad\qquad+\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^{m+1}\phi^{(n-m)}(t)f^{(m+1)}(a+t(z-a))
\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice de sommation $m = m'+1$ dans la deuxième somme ; tous les termes s'éliminent deux à deux, à l'exception du premier terme de la première somme et du dernier terme de la deuxième somme, d'où le résultat demandé.

2.a. Plus généralement, on a le résultat suivant : si une fonction f est nulle en zéro et de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant zéro, $g(t) = f(t)/t$ est prolongeable par continuité en zéro et son prolongement est de classe C^n. Gardons nous de déduire fallacieusement ce résultat de l'existence d'un développement limité d'ordre n de g. On montre à l'aide d'un développement limité d'ordre 1 de f que g est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{g}(0) = f'(0)$. Par ailleurs, g est de classe C^{n+1} sur $I\setminus\{0\}$. Faisons l'hypothèse de récurrence $g^{(k-1)}(t) = \frac{f^{(k)}(0)}{k} + \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}\frac{t}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!} + o(t^{n-k+1})$ $(1 \leqslant k \leqslant n,\ t \neq 0)$. En dérivant k fois l'identité $f(t) = tg(t)$, on obtient que $\forall t \neq 0\ \ g^{(k)}(t) = \frac{f^{(k)}(t)-kg^{(k-1)}(t)}{t}$. Or $f^{(k)}(t) = f^{(k)}(0) + f^{(k+1)}(0)\frac{t}{1!} + \cdots + f^{(n+1)}(0)\frac{t^{n+1-k}}{(n-k)!} + o(t^{n+1-k})$. En substituant ces développements limités dans l'identité précédente, on montre que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang suivant, donc pour tout entier k de 1 à $n+1$. Faisons l'hypothèse de récurrence que $g^{(k)}(0)$ existe et est égale à $f^{(k+1)}(0)/(k+1)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Du développement limité de $g^{(k)}$ (tronqué à l'ordre 1) et de l'hypothèse de récurrence, il résulte que $g^{(k)}$ est continue et dérivable en zéro et que, si $k < n$, $g^{(k+1)}(0) = f^{(k+2)}(0)/(k+2)$, ce qui prouve par récurrence que g est n fois continument dérivable sur I.

Par conséquent, $t \mapsto \frac{e^t-1}{t}$ est prolongeable par continuité en une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Cette fonction ne s'annulant jamais, son inverse est également définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}$ est paire car

$$\begin{aligned}
\frac{-t}{e^{-t}-1} + \frac{-t}{2} &= \frac{-te^t}{1-e^t} - \frac{t}{2}\\
&= \frac{te^t - t + t}{e^t-1} - \frac{t}{2}\\
&= \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

Donc le développement limité de $\frac{t}{e^t-1}$, dont l'existence est garantie par le fait que la fonction est indéfiniment dérivable, est de la forme demandée par l'énoncé.
Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{t}{e^t-1}(e^{zt}-1) &= \Big(1-\frac{t}{2}+\frac{b_1t^2}{2!}+\frac{b_2t^4}{4!}+\cdots+\frac{b_Nt^{2N}}{(2N)!}+o(t^n)\Big)\\ &\times\Big(zt+\frac{z^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{z^nt^n}{n!}+o(t^n)\Big)\end{aligned}$$

et $\phi_n(z)/n!$ est le coefficient de t^n dans ce développement :

$$\phi_n(z)/n! = \frac{z^n}{n!}-\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{b_1}{2!}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{b_2}{4!}\frac{z^{n-4}}{(n-4)!}+\cdots+\frac{b_N}{(2N)!}\frac{z^{n-2N}}{(n-2N)!},$$

d'où l'expression de ϕ_n demandée.

2.b.

$$\begin{aligned}\phi_n(z+1)-\phi_n(z) &= \frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\left(t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}-t\frac{e^{(z+1)t}-1}{e^t-1}\right)\\ &= \frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\left(te^{zt}\right)\end{aligned}$$

Comme $t\mapsto te^{zt}$ est de classe C^∞ et que son développement limité d'ordre n en $t=0$ est $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{k!}t^{k+1}+o(t^n)$, il vient $\phi_n(z+1)-\phi_n(z)=nz^{n-1}$.

3. (i) est obtenue en dérivant autant de fois que nécessaire l'identité précédente et en donnant à z la valeur zéro. (ii), (iii), (iv), (v) et (vi) sont des conséquences immédiates de 2.a.
4.a. On applique la question 1 au polynôme ϕ_{2n} de degré 2n et on intègre entre 0 et 1. Il vient

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m(z-a)^m\Big[\phi_{2n}^{(2n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\phi_{2n}^{(2n-m)}(0)f^{(m)}(a)\Big]\\ &= -(2n)!\big(f(z)-f(a)\big)+(z-a)^{2n+1}\int_0^1\phi_{2n}(t)f\Big(a+(z-a)t\Big)dt\end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $\phi_{2n}^{(2n)}=(2n)!$
On obtient l'égalité demandée en substituant aux dérivées itérées de ϕ_{2n} les expressions déterminées dans la question 3.

4.b. Appliquons la question précédente en remplaçant f par une primitive de F et z par ω. Il vient

$$\begin{aligned}0 &= \int_a^{a+\omega}F(t)dt-\frac{\omega}{2}(F(a+\omega)+F(a))+\sum_{m=1}^{n-1}b_m\frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\Big[F^{(2m-1)}(a+\omega)-F^{(2m-1)}(a)\Big]\\ &-\frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\phi_{2n}(t)F^{(2n)}\Big(a+(z-a)t\Big)dt\end{aligned}$$

Lorsqu'on somme les égalités obtenues en remplaçant a successivement par lui-même, $a+\omega$, ..., $a+(r-1)\omega$, on obtient le résultat demandé, certains termes se simplifiant deux à deux.

B 1. On a pour tout $x>0$ fixé

$$u_k(x)=\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)+x\ln\left(1-\frac{k}{k+1}\right)=\frac{x}{k}-\frac{x}{k+1}+O(\frac{1}{k^2})=O(\frac{1}{k^2})$$

Donc la série $\sum_{k\geqslant 1}u_k(x)$ converge.

2.
$$\begin{aligned}
&\ln(x+1)+\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1)\\
&\qquad = \ln(x+1)+\sum_{k=2}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}\Big[-\ln(k)+(x+1)\big(\ln(k)-\ln(k+1)\big)\Big]\\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}x(\ln(k)-\ln(k+1))-\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)\\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n}u_k(x)+\ln(x+n+1)-\ln(n+1)
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln(x+n+1)-\ln(n+1)=\ln\left(\frac{x+n+1}{n+1}\right)$ tend vers zéro ; on obtient donc par passage à la limite l'égalité souhaitée.

3. Pour tout $k \geqslant 1$ entier, $u_k(1)=0$, donc $G(1)=0$ et on prouve aisément par récurrence à l'aide de la question précédente que pour tout entier strictement positif n, $G(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$, égalité de laquelle on déduit immédiatement le résultat demandé.

4. immédiat

5. C'est une application directe de la question A.4.b.
$T_{p,n}(x,y)=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^1 \phi_{2p}(t)\sum_{m=0}^{n-1}f^{(2p)}(m+t)dt=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^n \phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$

6. L'intégrande dans l'expression de $T_{p,n}(x,y)$ est majorée en valeur absolue par le produit de la borne supérieure de la fonction continue ϕ_{2p} sur le segment $[0,1]$ et de la valeur absolue de $f^{(2p)}$.
On prouve aisément par récurrence que $f^{(m)}(t)=(-1)^{m-1}\left(\frac{1}{(y+t)^m}-\frac{1}{(x+t)^m}\right)=O\left(\frac{1}{t^{m+1}}\right)$ (quand $t\to+\infty$). Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$ est absolument convergente, ce qui prouve que $T_{p,n}(x,y)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

7. D'après les questions 4 et 5,

$$\begin{aligned}
G(y)-G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln(y+k)-\ln(x+k)+(y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]+\ln y-\ln x\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}[\ln(y+k)-\ln(x+k)]+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\right\}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\Bigg\{(y+n)\ln(y+n)-(y+n)-y\ln y+y-(x+n)\ln(x+n)\\
&\qquad +(x+n)+x\ln x-x+\frac{1}{2}\big(\ln y-\ln x+\ln(y+n)-\ln(x+n)\big)\\
&\qquad +\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n)-\frac{1}{y^{2h-1}}+\frac{1}{x^{2h-1}}\big)+T_{p,n}(x,y)+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\Bigg\}
\end{aligned}$$

Or $(y+n)\ln(y+n)-(x+n)\ln(x+n)=(y-x)\ln n+y-x+o(1)$ quand $n\to+\infty$. On obtient donc après simplifications $G(y)-G(x)=g(x)-g(y)+R_n(x,y)$, ce qu'il fallait démontrer.

8. D'après la question 5 et l'expression des dérivées successives de f donnée dans la question 6, $T_{p,n}(x,y)$ est majoré en valeur absolue par le produit d'une constante et de l'intégrale $\int_0^n\left|\frac{1}{(y+t)^{2p}}-\frac{1}{(x+t)^{2p}}\right|dt$. $|R_p(x,y)|$ est majoré de la même façon en remplaçant la borne finale d'intégration n par $+\infty$. L'argument de la valeur absolue gardant un signe constant, l'intégrale majorante est égale à $\frac{1}{2p-1}\left[\left|\frac{1}{(y+t)^{2p-1}}-\frac{1}{(x+t)^{2p-1}}\right|\right]_0^{+\infty}$ et on obtient ainsi l'estimée souhaitée.

9. On a $g(m)=m\ln m-m-\frac{1}{2}\ln m+o(1)$ et $G(m)=-\ln(m-1)!=-\ln m!+\ln m$ pour m entier, donc le résultat demandé découle immédiatement de la formule de Stirling $m!\sim\sqrt{2\pi}m^{m+\frac{1}{2}}e^{-m}$.

10. Le résultat demandé est obtenu à partir de l'égalité de la question 7 par passage à la limite. On fait tendre x vers $+\infty$ par valeurs entières et on tient compte de l'estimée obtenue dans la question 8.

11. En calculant les premiers termes du développement limité de la question A.2.a, on trouve $b_1 = 1/6$, $b_2 = -1/30$, $b_3 = 1/42$. Des questions 3 et 10, il résulte que

$$\begin{aligned}\ln(m!) &= -G(m) + \ln m \\ &= m\ln m - m + \frac{1}{2}\ln m + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{12}\frac{1}{m} - \frac{1}{360}\frac{1}{m^3} + \frac{1}{1260}\frac{1}{m^5} + O(\frac{1}{m^7})\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2349 ▲

$e^{1/3}\left(1+\frac{7}{90}x^2+o(x^3)\right)$.

Correction de l'exercice 2350 ▲

(a) Si $x \in]0,\pi[$, $\sin x > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ auquel on a enlevé le point $\frac{\pi}{2}$) et de plus $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ tend vers 1 et donc

$$\ln(\sin x) \sim \sin x - 1 = -\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 = -\frac{(2x-\pi)^2}{8}.$$

Donc, $\frac{\ln(\sin x)}{2x-\pi} \sim -\frac{2x-\pi}{8} \to 0$ et enfin $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)} \to e^0 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = 1.}$$

(b) Si $x \in]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $|\tan x| > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ et de plus $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x\ln(|\tan x|)}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$\ln|\tan x| = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| \sim -\ln|\cos x|,$$

puis $\cos x\ln|\tan x| \sim -\cos x\ln|\cos x| \to 0$ (car, quand u tend vers 0, $u\ln u \to 0$). Donc, $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x\ln|\tan x|} \to e^0 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}|\tan x|^{\cos x} = 1.}$$

(c) Quand n tend vers $+\infty$, $\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1} \to \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} = 1$ (et on est en présence d'une indétermination du type $1^{+\infty}$). Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\cos\frac{n\pi}{3n+1} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\sin\frac{n\pi}{6n+1} &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{-1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{36n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{36n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{36n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Puis,

$$n\ln\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1}+\sin\frac{n\pi}{6n+1}\right)=n\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}\pi}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=n\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{24}+o(1),$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1}+\sin\frac{n\pi}{6n+1}\right)^n=e^{\sqrt{3}\pi/24}.}$$

(d) Quand x tend vers 0, $\ln(\cos x)\sim\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}$. Puis, $\ln|x|\ln(\cos x)\sim-\frac{x^2}{2}\ln|x|\to 0$. Donc, $(\cos x)^{\ln|x|}\to e^0=1$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|}=1.}$$

(e) Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{1-\sin x}$ tend vers $+\infty$. Posons $h=x-\frac{\pi}{2}$ puis $\varepsilon=\mathrm{sgn}(h)$, de sorte que

$$(\cos x)e^{1/(1-\sin x)}=-\varepsilon|\sin h|e^{1/(1-\cos h)}=-\varepsilon e^{\ln|\sin h|+\frac{1}{1-\cos h}}.$$

Or, quand h tend vers 0,

$$\ln|\sin h|+\frac{1}{1-\cos h}=\frac{(1-\cos h)\ln|\sin h|+1}{1-\cos h}=\frac{(-\frac{h^2}{2}+o(h^2))(\ln|h|+o(\ln|h|))+1}{\frac{h^2}{2}+o(h^2)}=\frac{1+o(1)}{\frac{h^2}{2}+o(h^2)}\sim\frac{2}{h^2},$$

et donc, quand h tend vers 0, $\ln|\sin h|+\frac{1}{1-\cos h}\sim\frac{2}{h^2}\to+\infty$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/2,\,x<\pi/2}\cos(x)e^{1/(1-\sin x)}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to\pi/2,\,x>\pi/2}\cos(x)e^{1/(1-\sin x)}=-\infty.}$$

(f) Pour $x\in\mathbb{R}$, $2\cos^2x-3\cos x+1=(2\cos x-1)(\cos x-1)$ et donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 2\cos^2x-3\cos x+1=0\Leftrightarrow x\in\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup 2\pi\mathbb{Z}.$$

Pour $x\notin\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{2\cos^2x+\cos x-1}{2\cos^2x-3\cos x+1}=\frac{(2\cos x-1)(\cos x+1)}{(2\cos x-1)(\cos x-1)}=\frac{\cos x+1}{\cos x-1},$$

et donc, $\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\cos^2x+\cos x-1}{2\cos^2x-3\cos x+1}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}=-3$.

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\cos^2x+\cos x-1}{2\cos^2x-3\cos x+1}=-3.}$$

(g) Quand x tend vers 0,

$$\frac{1+\tan x}{1+\mathrm{th}\,x}=\frac{1+x+o(x)}{1+x+o(x)}=(1+x+o(x)(1-x+o(x))=1+o(x).$$

Puis, quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\mathrm{th}\,x}\right)=\frac{\ln(1+o(x))}{x+o(x)}=\frac{o(x)}{x+o(x)}=\frac{o(1)}{1+o(1)}\to 0.$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\mathrm{th}\,x}\right)^{1/\sin x}=1.}$$

(h) Quand x tend vers e par valeurs inférieures, $\ln(x)$ tend vers 1 et donc

$$\ln(\ln x) \sim \ln x - 1 = \ln\left(\frac{x}{e}\right) \sim \frac{x}{e} - 1 = -\frac{1}{e}(e-x),$$

puis,

$$\ln(e-x)\ln(\ln x) \sim -\frac{1}{e}(e-x)\ln(e-x) \to 0,$$

et donc $(\ln x)^{\ln(e-x)} = e^{\ln(e-x)\ln(\ln x)} \to 1$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to e\\ x<e}} (\ln x)^{\ln(e-x)} = 1.}$$

(i) Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $x\ln x \to 0$, et donc

$$x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \sim x\ln x \sim 1 \times (x-1) = x-1.$$

Ensuite, $\sqrt{x^2-1}$ tend vers 0 et donc

$$\ln(1-\sqrt{x^2-1}) \sim -\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{(x-1)(x+1)} \sim -\sqrt{2(x-1)}.$$

Finalement, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} \sim \frac{x-1}{-\sqrt{2(x-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-1} \to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x>e}} \frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} = 0.}$$

(j) Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(\text{ch}\,x - 1) \sim \ln(\text{ch}\,x) \sim \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = x - \ln 2 \sim x,$$

et donc

$$\frac{x\ln(\text{ch}\,x-1)}{x^2+1} \sim \frac{x\times x}{x^2} = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(\text{ch}\,x-1)}{x^2+1} = 1.}$$

(k) Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\ln(x-x^2) + x - \ln x = x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Ensuite,

$$(\sin x)^x = e^{x\ln(\sin x)} = e^{x\ln(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))} = e^{x\ln x}e^{x\ln(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))} = x^x e^{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right),$$

et,

$$x^{\sin x} = e^{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\ln x} = e^{x\ln x}e^{-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)} = x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right).$$

Donc,

$$(\sin x)^x - x^{\sin x} = x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) - x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right) = x^x\left(\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right) \sim \frac{x^3\ln x}{6},$$

et enfin

$$\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x2^) + x - \ln x} \sim \frac{x^3\ln x/6}{-x^2/2} = -\frac{x\ln x}{3} \to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x2^) + x - \ln x} = 0.}$$

(l) Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

Ensuite,

$$x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right) = \frac{1}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right) \to 0.$$

Donc, $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \to e^0 = 1.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1.}$$

(m) Quand x tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1} = \frac{1}{2} \times \frac{\arcsin x + \frac{\pi}{4}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$\to \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(\arcsin)'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1/\sqrt{2}} \frac{(\arcsin x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1} = \frac{\pi}{4}.}$$

(n) Quand x tend vers $+\infty$,

$$x\ln\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right) = x\ln\left(\cos\frac{1}{x} - \tan a\sin\frac{1}{x}\right) = x\ln\left(1-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= -\tan a + o(1),$$

et donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x = e^{-\tan a}.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x = e^{-\tan a}.}$$

Correction de **l'exercice 2351 ▲**

(a)

$$\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1+(x^2+x^3)+(x^2+x^3)^2+(x^2+x^3)^3+o(x^7) = 1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o(x^7).$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o(x^7).}$$

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)\right)^{-1} = 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^7)$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}+x^4\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right)+x^6\left(\frac{1}{720}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)+o(x^7) = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^7).$$

(b) $$\boxed{\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^7).}$$

(c) **Remarques.**

i. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$, on a $0 < \frac{x}{\tan x} < 1$ et donc la fonction $x \mapsto \arccos\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ (qui est un voisinage pointé de 0).

ii. Quand x tend vers 0, $\frac{x}{\tan x} \to 1$ et donc $\arccos\left(\frac{x}{\tan x}\right) = o(1)$ (développement limité à l'ordre 0).

iii. La fonction $x \mapsto \arccos x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (donc à priori, c'est mal parti).

iv. La fonction proposée est paire et, si elle admet en 0 un développement limité d'ordre 3, sa partie régulière ne contient que des exposants pairs.

• Recherche d'un équivalent simple de $\arccos x$ en 1 à gauche. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\arccos x \to 0$ et donc,

$$\arccos x \sim \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

• Déterminons un équivalent simple de $\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ en 0. D'après ce qui précède,

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \sim \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \sim \sqrt{\frac{x^3/3}{x}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ n'est pas dérivable en 0 (mais est dérivable à droite et à gauche) et n'admet donc pas de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (mais admet éventuellement des développements limités à gauche et à droite pour lesquels la remarque initiale sur la parité des exposants ne tient plus). • Déterminons un équivalent simple de $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} \sim \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)$$
$$= \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = g(x)$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} &= \left(\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^{-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{45}+o(x^5)\right)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{x^2}{15}+o(x^2)\right)^{1/2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{30\sqrt{3}}+o(x^3),\end{aligned}$$

et donc,

$$\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{30\sqrt{3}}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{15\sqrt{3}}+o(x^3).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) &= \left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^{-1/2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o(x^3)\right) = \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o(x^3\right. \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o(x^3),\end{aligned}$$

et finalement,

$$g(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{15\sqrt{3}}+o(x^3)\right)-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o(x^3)\right) = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3) \sim \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}.$$

Ainsi, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3).$$

f étant paire, on en déduit que

$$\boxed{\arccos\left(\sqrt{\tfrac{x}{\tan x}}\right) \underset{x\to 0}{=} \tfrac{|x|}{\sqrt{3}}+\tfrac{4|x|^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3).}$$

(Ce n'est pas un développement limité).

(d) La fonction $x \mapsto \tan x$ est trois fois dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et admet donc en $\frac{\pi}{4}$ un développement limité d'ordre 3 à savoir son développement de TAYLOR-YOUNG. $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ puis $(\tan)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1+\tan^2\frac{\pi}{4} = 2$. Ensuite, $(\tan)''(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x)$ et $(\tan)''(\frac{\pi}{4}) = 4$. Enfin,

$$(\tan)^{(3)}(x) = 2(1+\tan^2 x)^2+4\tan^2 x(1+\tan^2 x),$$

et $(\tan)^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = 16$. Finalement,

$$\boxed{\tan x \underset{x\to\pi/4}{=} 1+2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^2+\tfrac{8}{3}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^3\right).}$$

$$\frac{1}{x^2}\ln(\operatorname{ch} x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right) = \frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2),$$

et donc

$$(\operatorname{ch} x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)} = e^{1/2}e^{-\frac{x^2}{12}+o(x^2)} = \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12}x^2 + o(x^2).$$

(e) $\boxed{(\operatorname{ch} x)^{1/x^2} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12}x^2 + o(x^2).}$

(f) $\tan^3 x(\cos(x^2)-1) = \tan x \times \tan^2 x(\cos(x^2)-1)$ et un équivalent de $\tan^2 x(\cos(x^2)-1)$ en 0 est $-\frac{x^6}{2}$. On écrit donc $\tan x$ à l'ordre 2. De même, un équivalent de $\tan^3 x$ est x^3 et on écrit donc $\cos(x^2)-1$ à l'ordre 5.

$$\tan^3 x(\cos(x^2)-1) \underset{x\to 0}{=} (x+o(x^2))^3\left(-\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right) = (x^3+o(x^4))\left(-\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right) = -\frac{x^7}{2}+o(x^8).$$

$$\boxed{\tan^3 x(\cos(x^2)-1) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^7}{2}+o(x^8).}$$

(g) On pose $h = x-1$ ou encore $x = 1+h$, de sorte que x tend vers 1 si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{x^2} &= \ln(2+h)(1+h)^{-2}\\ &\underset{h\to 0}{=} \left(\ln 2 + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)\left(1-2h+\frac{(-2)(-3)}{2}h^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{6}h^3+o(h^3)\right)\\ &= \left(\ln 2+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+\frac{h^3}{24}+o(h^3)\right)(1-2h+3h^2-4h^3+o(h^3))\\ &= \ln 2+\left(\frac{1}{2}-2\ln 2\right)h+\left(3\ln 2-\frac{9}{8}\right)h^2+\left(-4\ln 2+\frac{43}{24}\right)h^3+o(h^3).\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 1}{=} \ln 2+\left(\tfrac{1}{2}-2\ln 2\right)(x-1)+\left(3\ln 2-\tfrac{9}{8}\right)(x-1)^2+\left(-4\ln 2+\tfrac{43}{24}\right)(x-1)^3+o((x-1)^3).}$$

(h) Pour x réel, posons $f(x) = \arctan(\cos x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour x réel, $f'(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Puis,

$$\begin{aligned}f'(x) &\underset{x\to 0}{=} -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2\right)^{-1}\\ &= -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)(2-x^2+o(x^3))^{-1} = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = -\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).\end{aligned}$$

Donc, f' admet un développement limité d'ordre 4 en 0 et on sait que f admet en 0 un développement limité d'ordre 5 obtenu par intégration.

$$\arctan(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(\cos 0)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5) = \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).$$

$$\boxed{\arctan(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).}$$

(i) Pour $x>-1$, posons $f(x)=\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x>-1$,

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{(x+2)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}\frac{1}{1+\frac{x+1}{x+2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(2x+3)\sqrt{(1+x)(2+x)}}\\
&=\frac{1}{2\times 3\times\sqrt{2}}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-1}(1+x)^{-1/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{2x}{3}+o(x)\right)\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)\Big(1-\frac{x}{4}+o(\\
&=\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x+o(x)\right)=\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{17x}{12}+o(x)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, f' admet donc en 0 un développement limité d'ordre 1 et on sait alors que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration.

$$\boxed{\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\underset{x\to 0}{=}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}x-\frac{17}{144\sqrt{2}}x^2+o(x^2).}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}&=(1-x^2)^{-1/2}\underset{x\to 0}{=}1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-x^2)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}(-x^2)^3+o(x^7)\\
&\underset{x\to 0}{=}1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+o(x^7).
\end{aligned}$$

Donc, $\arcsin x\underset{x\to 0}{=}x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+o(x^8)$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\arcsin^2 x}&=(\arcsin x)^{-2}\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}+o(x^7)\right)^{-2}\\
&=\frac{1}{x^2}\left(1-2\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}\right)+3\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}\right)^2-4\left(\frac{x^2}{6}\right)^3+o(x^7)\right)\\
&=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{20}+\frac{1}{12}\right)x^2+\left(-\frac{5}{56}+\frac{3}{40}-\frac{1}{54}\right)x^4+o(x^5)\\
&=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}-\frac{x^2}{15}-\frac{31x^4}{945}+o(x^5).
\end{aligned}$$

Finalement,

(j) $$\boxed{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\arcsin^2 x}\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{3}+\frac{x^2}{15}+\frac{31x^4}{945}+o(x^5).}$$

(k) Pour x réel, posons $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 puis, pour x réel, soit $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel $g(x)=F(x^2)-F(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$g'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=2xf(x^2)-f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Puis,

$$g'(x)\underset{x\to 0}{=}2x\left(1-\frac{1}{2}x^8+o(x^8)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8+o(x^9)\right)=-1+2x+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{8}x^8-x^9+o(x^9).$$

Ainsi g' admet un développement limité d'ordre 9 en 0 et on sait que g admet un développement limité d'ordre 10 en 0 obtenu par intégration. En tenant compte de $g(0)=0$, on obtient

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} -x+x^2+\frac{x^5}{10}-\frac{x^9}{24}-\frac{x^{10}}{10}+o(x^{10}).}$$

(l)

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(e^x-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)=\ln(e^x)+\ln\left(1-e^{-x}\left(\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)\right)$$
$$=x+\ln\left(1-(1+o(1))\left(\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})\right)\right)=x+\ln\left(1-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})\right)=x-\frac{x^{100}}{(100)!}+o($$

$$\boxed{\ln\left(\textstyle\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100}).}$$

(m) Posons $h=x-\pi$ ou encore $x=\pi+h$ de sorte que x tend vers π si et seulement si h tend vers 0.

$$\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}=\sqrt[3]{4(\pi^3+(\pi+h)^3)}=\sqrt[3]{8\pi^3+12\pi^2h+12\pi h^2+4h^3}$$
$$\underset{h\to 0}{=} 2\pi\left(1+\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)^{1/3}$$
$$=2\pi\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{3h}{2\pi}\right)^3+o(h^3)\right)$$
$$=2\pi+h+h^2\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\pi}\right)+h^3\left(\frac{1}{3\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}+\frac{5}{12\pi^2}\right)+o(h^3)$$
$$=2\pi+h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o(h^3).$$

Puis,

$$\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)})=\tan\left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o(h^3)\right)$$
$$=\left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}\right)+\frac{1}{3}h^3+o(h^3)=h+\frac{h^2}{2\pi}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi^2}\right)h^3+o(h^3).$$

Finalement,

$$\boxed{\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) \underset{x\to \pi}{=} (x-1)+\frac{1}{2\pi}(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi^2}\right)(x-1)^3+o((x-1)^3).}$$

Correction de l'exercice 2352 ▲

Puisque $a>0$, $b>0$ et que pour tout réel x, $\frac{a^x+b^x}{2}>0$, f est définie sur $\mathbb{R}^*$, et pour

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right).$$

Etude en 0.

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)=\ln\left(\frac{e^{x\ln a}+e^{x\ln b}}{2}\right)\underset{x\to 0}{=}\ln\left(1+x\left(\frac{1}{2}\ln a+\frac{1}{2}\ln b\right)+x^2\left(\frac{1}{4}\ln^2 a+\frac{1}{4}\ln^2 b\right)+o(x^2)\right)$$
$$=\ln\left(1+x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}+o(x^2)\right)=x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}-\frac{1}{2}(x\ln\sqrt{ab})^2+o(x^2$$
$$=x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+\frac{1}{8}(\ln^2 a-2\ln a\ln b+\ln^2 b)x^2+o(x^2)=x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{1}{8}\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)+o(x^2).$$

Enfin,

$$f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}=\exp(\ln(\sqrt{ab})+\frac{1}{8}\ln^2\frac{a}{b}x+o(x))=\sqrt{ab}(1+\frac{1}{8}x\ln^2\frac{a}{b}+o(x)).$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=\sqrt{ab}$. Le prolongement obtenu est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{\sqrt{ab}}{8}\ln^2\frac{a}{b}(>0)$. **Etude en** $+\infty$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}(a^x+b^x)\right)&=\frac{1}{x}\left(\ln(b^x)-\ln 2+\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)\right)=\frac{1}{x}(x\ln b+o(x))\quad(\text{car }0<\frac{a}{b}<1)\\&=\ln b+o(1).\end{aligned}$$

et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=b(=\text{Max}\{a,b\})$. **Etude en** $-\infty$. Pour tout réel x,

$$f(-x)=\left(\frac{a^{-x}+b^{-x}}{2}\right)^{-1/x}=\left(\frac{a^x+b^x}{2a^xb^x}\right)^{-1/x}=\frac{ab}{f(x)},$$

et donc,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{X\to+\infty}f(-X)=\lim_{X\to+\infty}\frac{ab}{f(X)}=\frac{ab}{b}=a\quad(=\text{Min}\{a,b\}).$$

Dérivée et variations. f est dérivable sur $]-\infty,0\cup]0,+\infty[$ en vertu de théorèmes généraux (et aussi en 0 d'après l'étude faite plus haut), et pour $x\neq 0$ (puisque $f>0$ sur $\mathbb{R}^*$),

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln f)'(x)=\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)+\frac{1}{x}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

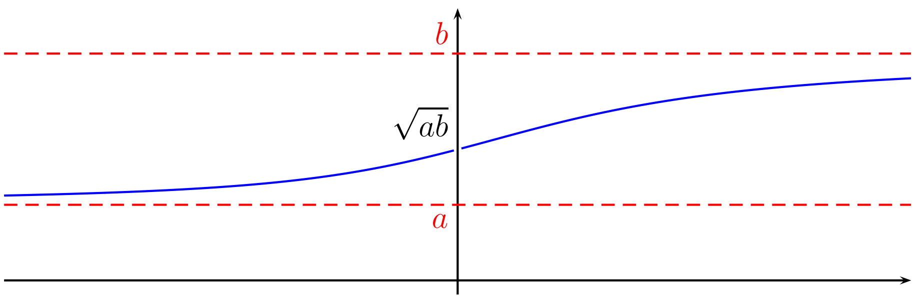
f' a le même signe que $(\ln f)'$ qui, elle-même, a le même signe que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=-\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)+x\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}+\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}+x\frac{(a^x\ln^2a+b^x\ln^2b)(a^x+b^x)-(a^x\ln a+b^x\ln b)^2}{(a^x+b^x)^2}\\&=x\frac{(ab)^x(\ln a-\ln b)^2}{(a^x+b^x)^2}.\end{aligned}$$

g' est donc strictement négative sur $]-\infty,0[$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$. Par suite, g est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. g' admet donc un minimum global strict en 0 et puisque $g(0)=0$, on en déduit que g est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. De même, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. En tant compte de l'étude en 0, on a montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le **graphe de** f a l'allure suivante :



On peut noter que les inégalités $\lim_{x\to-\infty}f<f(-1)<f(0)<f(1)<\lim_{x\to+\infty}f$ fournissent :

$$a < \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Correction de **l'exercice 2353 ▲**

Quand x tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{x^2-3} = x\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{1/2} = x\left(1-\frac{3}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right) = x-\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et,

$$\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1} = 2x\left(1+\frac{7}{8x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3} = 2x\left(1+\frac{7}{24x}-\frac{49}{576x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x+\frac{7}{12}-\frac{49}{288x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x-\frac{7}{12}-\frac{383}{288x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f admet donc en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y=-x-\frac{7}{12}$. De plus, le signe de $f(x)-\left(-x-\frac{7}{12}\right)$ est, au voisinage de $+\infty$, le signe de $-\frac{383}{288x}$. Donc la courbe représentative de f est au-dessous de la droite d'équation $y=-x-\frac{7}{12}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction de **l'exercice 2354 ▲**

f est de classe C^∞ sur son domaine $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en tant que fraction rationelle et en particulier admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout entier naturel n, on a

$$f(x) \underset{x\to0}{=} x+x^3+\ldots+x^{2n+1}+o(x^{2n+1}),$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité et d'après la formule de TAYLOR-YOUNG, on obtient

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(2n)}(0)=0 \text{ et } f^{(2n+1)}(0)=(2n+1)!.}$$

Ensuite, pour $x\notin\{-1,1\}$, et n entier naturel donné,

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(x)=\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

Correction de **l'exercice 2355 ▲**

(a)
$$\sqrt{x^2+3x+5}-x+1 \underset{x\to-\infty}{\sim} -x-x=-2x,$$

et,

$$\sqrt{x^2+3x+5}-x+1=\frac{(x^2+3x+5)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+3x+5}+x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x+2x}{x+x}=\frac{5}{2}.$$

(b) $3x^2-6x \underset{x\to0}{\sim} -6x$ et $3x^2-6x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2$. Ensuite, quand x tend vers 1, $3x^2-6x$ tend vers $-3\neq0$ et donc, $3x^2-6x \underset{x\to1}{\sim} -3$. Enfin, $3x^2-6x=3x(x-2) \underset{x\to2}{\sim} 6(x-2)$.

$$\boxed{3x^2-6x \underset{x\to 0}{\sim} -6x \qquad 3x^2-6x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2 \qquad 3x^2-6x \underset{x\to 0}{\sim} -3 \qquad 3x^2-6x \underset{x\to 2}{\sim} 6(x-2).}$$

(c)

$$(x-x^2)\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{=} (x-x^2)\ln x+(x-x^2)\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = x\ln x - x^2\ln x + o(x^2\ln x).$$

Ensuite,

$$\sin x\ln(x-x^2) \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)(\ln x+\ln(1-x)) = (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))(\ln x - x+o(x)) = x\ln x+o(x^2\ln x).$$

Donc,

$$\begin{aligned}(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x} &= e^{x\ln x}(e^{-x^2\ln x+o(x^2\ln x)}-e^{o(x^2\ln x)}) = e^{x\ln x}(1-x^2\ln x-1+o(x^2\ln x))\\ &= (1+o(1))(-x^2\ln x+o(x^2\ln x)) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2\ln x.\end{aligned}$$

$$\boxed{(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} -x^2\ln x.}$$

(d) $\text{th}\,x = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{=} = (1-e^{-2x})(1-e^{-2x}+o(e^{-2x})) = 1-2e^{-2x}+o(e^{-2x})$, et donc $\text{th}\,x\ln x = (1-2e^{-2x}+o(e^{-2x}))\ln x = \ln x+o(1)$. Par suite,

$$x^{\text{th}x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\ln x} = x.$$

(e) **Tentative à l'ordre 3.**
$\tan(\sin x) \underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) = \left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{3}(x)^3+o(x^3) = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, et,
$\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} \sin\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) = \left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{6}(x)^3+o(x^3) = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. Donc, $\tan(\sin x)-\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$. L'ordre 3 est insuffisant pour obtenir un équivalent. **Tentative à l'ordre 5.**

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right) = \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\frac{2}{15}(x)^5+o(x^5)\\ &= x+\frac{x^3}{6}+x^5\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\right)+o(x^5) = x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o(x^5),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &\underset{x\to 0}{=} \sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right) = \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3+\frac{1}{120}(x)^5+o(x^5)\\ &= x+\frac{x^3}{6}+\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)x^5+o(x^5) = x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o(x^5).\end{aligned}$$

Donc, $\tan(\sin x)-\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} o(x^5)$. L'ordre 5 est insuffisant pour obtenir un équivalent. Le contact entre les courbes représentatives des fonctions $x\mapsto\sin(\tan x)$ et $x\mapsto\tan(\sin x)$ est très fort. **Tentative à l'ordre 7.**

$$\begin{aligned}
\tan(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)\right)\\
&=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3+\frac{2}{15}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\\
&=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{3}\left(3\times\frac{1}{120}+3\times\frac{1}{36}\right)+\frac{2}{15}\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{17}{315}\right)x^7+o(x^7)\\
&=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{17}{315}\right)x^7+o(x^7),
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\sin(\tan x) &\underset{x\to 0}{=} \sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17}{x^7}315+o(x^7)\right)\\
&=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^3+\frac{1}{120}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^5-\frac{1}{5040}(x)^7+o(x^7)\\
&=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{6}\left(3\times\frac{2}{15}+3\times\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{120}\times\frac{5}{3}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o(x^7)\\
&=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{15}-\frac{1}{18}+\frac{1}{72}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o(x^7).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\tan(\sin x)-\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}-\frac{1}{72}\right)x^7+o(x^7)=\frac{x^7}{30}+o(x^7),$$

et donc

$$\boxed{\tan(\sin x)-\sin(\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} \tfrac{x^7}{30}.}$$

Correction de l'exercice 2356 ▲

Pour $n\geqslant 5$, on a

$$u_n=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}.$$

Ensuite,

$$0\leqslant n^3\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}\leqslant n^3(n-4)\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

Donc, $\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et de même $\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Il reste

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k! \underset{n\to+\infty}{=} 1+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}+\tfrac{2}{n^3}+o\left(\tfrac{1}{n^3}\right).}$$

Correction de l'exercice 2357 ▲

(a)

$$\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)^{-1}-1\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+o(x^4)\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x}{2}+x^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)+x^3\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+x^4\left(-\frac{1}{120}+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{24}\right)-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+o(x\right.$$

$$=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).$$

$$\boxed{\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}\underset{x\to 0}{=}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).}$$

$$x\ln(x+1)-(x+1)\ln x=x\left(\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-(x+1)\ln x\underset{x\to+\infty}{=}-\ln x+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

$$=-\ln x+1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

(b) $$\boxed{x\ln(x+1)-(x+1)\ln x\underset{x\to+\infty}{=}-\ln x+1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).}$$

Correction de l'exercice 2358 ▲

(a)

$$f_n(a)=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(a-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

En remplaçant a par b ou $a+b$, on obtient

$$f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)\underset{n\to+\infty}{=}e^{a+b}\left(1-\frac{(a+b)^2}{2n}\right)-e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}\right)e^b\left(1-\frac{b^2}{2n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=e^{a+b}\frac{-(a+b)^2+a^2+b^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{ab\,e^{a+b}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc, si $ab\neq 0$, $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{ab\,e^{a+b}}{n}$. Si $ab=0$, il est clair que $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)=0$.

(b) $e^{-a}f_n(a)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(-a+\left(a-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1+\left(-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{2n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc

$$e^{-a}f_n(a)-1+\frac{a^2}{2n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2}.$$

Correction de l'exercice 2359 ▲

Pour n entier naturel donné, posons $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$. • Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in I_n$, posons $f(x) = \tan x - x$. f est dérivable sur I_n et pour x dans I_n, $f'(x) = \tan^2 x$. Ainsi, f est dérivable sur I_n et f' est strictement positive sur $I_n \setminus \{n\pi\}$. Donc f est strictement croissante sur I_n.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue et strictement croissante sur I_n et réalise donc une bijection de I_n sur $f(I_n) = \mathbb{R}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! x_n \in I_n / \ f(x_n) = 0$ (ou encore tel que $\tan x_n = x_n$. • On a $x_0 = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$. En particulier,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + O(1).}$$

• Posons alors $y_n = x_n - n\pi$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\tan(y_n) = \tan(x_n) = n\pi + y_n$ et donc, puisque $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\pi}{2} > y_n = \arctan(y_n + n\pi) \geqslant \arctan(n\pi).$$

Puisque $\arctan(n\pi)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on a $y_n = \frac{\pi}{2} + o(1)$ ou encore

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).}$$

• Posons maintenant $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et d'autre part $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Ensuite, $\tan\left(z_n + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n$ et donc $-\text{cotan}(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$. Puisque z_n tend vers 0, on en déduit que

$$-\frac{1}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\text{cotan}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi,$$

ou encore $z_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

• Posons enfin $t_n = z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. On sait que $t_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que

$$-\text{cotan}\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = -\text{cotan}(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par suite,

$$-\tan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis,

$$\frac{1}{n\pi} - t_n = \arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc $t_n = \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalement,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Correction de l'exercice 2360 ▲

(a) Pour $x > 0$, posons $f(x) = x + \ln x$. f est continue sur $]0, +\infty[$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $]0, +\infty[$. f réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) =]\lim_{x\to 0,\, x>0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. En particulier,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{R},\ \exists! x_k \in]0,+\infty[/\ f(x_k) = k.}$$

(b) $f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2} + \ln\frac{k}{2} < k$ pour k suffisament grand (car $k - \left(\frac{k}{2} + \ln\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2} - \ln\frac{k}{2} \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées). Donc, pour k suffisament grand, $f\left(\frac{k}{2}\right) < f(x_k)$. Puisque f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $x_k > \frac{k}{2}$ pour k suffisament grand et donc que $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$. Mais alors, $k = x_k + \ln x_k \sim x_k$ et donc, quand k tend vers $+\infty$,

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{=} k + o(k).}$$

Posons $y_k = x_k - k$. On a $y_k = o(k)$ et de plus $y_k + \ln(y_k + k) = 0$ ce qui s'écrit :

$$y_k = -\ln(k + y_k) = -\ln(k + o(k)) = -\ln k + \ln(1 + o(1)) = -\ln k + o(1).$$

Donc,

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{=} k - \ln k + o(1).}$$

Posons $z_k = y_k + \ln k = x_k - k + \ln k$. Alors, $z_k = o(1)$ et $-\ln k + z_k = -\ln(k - \ln k + z_k)$. Par suite,

$$z_k = \ln k - \ln(k - \ln k + o(1)) = -\ln\left(1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right) = \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{=} k - \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).}$$

Correction de l'exercice 2361 ▲

(a) $x^3 \sin\frac{1}{x^2} \underset{x\to0}{=} O(x^3)$ et en particulier $x^3 \sin\frac{1}{x} \underset{x\to0}{=} o(x^2)$. Donc, en tenant compte de $f(0) = 1$,

$$f(x) \underset{x\to0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2).$$

f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.

(b) $f(x) \underset{x\to0}{=} 1 + x + o(x)$. Donc, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 1$. f est d'autre part dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2}$.

(c) f' est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'a pas de limite en 0. f' n'admet donc même pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

Correction de l'exercice 2362 ▲

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$, et donc

$$\arcsin x \underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

Puis,

$$\frac{1}{\arcsin x} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o(x^4)\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} - \frac{3x^4}{40} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360} + o(x^3),$$

et donc,

$$\boxed{\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\underset{x\to 0}{=}\frac{x}{6}+\frac{17x^3}{360}+o(x^3).}$$

La fonction f proposée se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. Le prolongement est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{6}$. La courbe représentative de f admet à l'origine une tangente d'équation $y=\frac{x}{6}$. Le signe de la différence $f(x)-\frac{x}{6}$ est, au voisinage de 0, le signe de $\frac{17x^3}{360}$. La courbe représentative de f admet donc à l'origine une tangente d'inflexion d'équation $y=\frac{x}{6}$.

Correction de l'exercice 2363 ▲

(a) $\arccos x \underset{x\to 1^-}{=} o(1)$ (développement limité à l'ordre 0). Mais la fonction $x\mapsto \arccos x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développemement limité d'ordre 1.

2) Puisque $\arccos x \underset{x\to 1^-}{=} o(1)$,

$$\arccos x \underset{x\to 1^-}{\sim} \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1+x)(1-x)}\underset{x\to 1^-}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

$$\boxed{\arccos x \underset{x\to 1^-}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{1-x}.}$$

Correction de l'exercice 2364 ▲

(a) Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}&=\frac{1}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k+2\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k\right)+o(x^n)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+3+(-1)^k}{4}x^k+o(x^n).\end{aligned}$$

(b) On a aussi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}&=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}\underset{x\to 0}{=}\left(\sum_{k=0}^{n}x^p\right)\left(\sum_{k=0}^{n}x^{2q}\right)+o(x^n)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+2q=k}1\right)x^k+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n).\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ a_k=\frac{2k+3+(-1)^k}{4}.}$$

(a_k est le nombre de façons de payer k euros en pièces de 1 et 2 euros).

Correction de l'exercice 2365 ▲

(a) $\cos x\cdot\exp x$ (à l'ordre 3).

Le dl de $\cos x$ à l'ordre 3 est

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\varepsilon_1(x)x^3.$$

Le dl de $\exp x$ à l'ordre 3 est

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3.$$

Par convention toutes nos fonctions $\varepsilon_i(x)$ vérifierons $\varepsilon_i(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

On multiplie ces deux expressions

$$\begin{aligned}
\cos x \times \exp x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\right) \times \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \\
&= 1 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \quad \text{on développe la ligne du dessus} \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \\
&\quad + \varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)
\end{aligned}$$

On va développer chacun de ces produits, par exemple pour le deuxième produit :

$$-\frac{1}{2!}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3.$$

Mais on cherche un dl à l'ordre 3 donc tout terme en x^4, x^5 ou plus se met dans $\varepsilon_3(x)x^3$, y compris $x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3$ qui est un bien de la forme $\varepsilon(x)x^3$. Donc

$$-\frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3.$$

Pour le troisième produit on a

$$\varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = \varepsilon_1(x)x^3 + x\varepsilon_1(x)x^3 + \cdots = \varepsilon_4(x)x^3$$

On en arrive à :

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \exp x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\right) \times \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_1(x)x^3 \\
&\qquad - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3 \\
&\qquad + \varepsilon_4(x)x^3 \qquad \text{il ne reste plus qu'à regrouper les termes :} \\
&= 1 + x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \varepsilon_5(x)x^3 \\
&= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3
\end{aligned}$$

Ainsi le dl de $\cos x \cdot \exp x$ en 0 à l'ordre 3 est :

$$\cos x \cdot \exp x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3.$$

(b) $(\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).

Il s'agit juste de multiplier le dl de $\ln(1+x)$ par lui-même. En fait si l'on réfléchit un peu on s'aperçoit qu'un dl à l'ordre 3 sera suffisant (car le terme constant est nul) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3$$

$\varepsilon_5(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

$$\begin{aligned}
(\ln(1+x))^2 &= \ln(1+x) \times \ln(1+x) \\
&= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&= x \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}x^3 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&\quad + \varepsilon(x)x^3 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon(x)x^4 \\
&\quad - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \varepsilon_1(x)x^4 \\
&\quad + \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon_2(x)x^4 \\
&\quad + \varepsilon_3(x)x^4 \\
&= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \varepsilon_4(x)x^4
\end{aligned}$$

(c) $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ (à l'ordre 6).

Pour le dl de $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ on commence par faire un dl du numérateur. Tout d'abord :

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9$$

donc

$$\operatorname{sh} x - x = \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par x^3 :

$$\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 + \frac{1}{9!}x^6 + \varepsilon(x)x^6$$

Remarquez que nous avons commencé par calculer un dl du numérateur à l'ordre 9, pour obtenir après division un dl à l'ordre 6.

(d) $\exp\big(\sin(x)\big)$ (à l'ordre 4).

On sait $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$ et $\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4)$.

On note désormais toute fonction $\varepsilon(x)x^n$ (où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$) par $o(x^n)$. Cela évite les multiples expressions $\varepsilon_i(x)x^n$.

On substitue $u = \sin(x)$, il faut donc calculer u, u^2, u^3 et u^4 :

$$u = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$$

$$u^2 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$u^3 = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^3 = x^3 + o(x^4)$$
$$u^3 = x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad o(u^4) = o(x^4)$$

Pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\exp(\sin(x)) = 1 + x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) & \\
+ \frac{1}{2!}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) & \\
+ \frac{1}{3!}\left(x^3 + o(x^4)\right) & \\
+ \frac{1}{4!}\left(x^4 + o(x^4)\right) & \\
+ o(x^4) & \\
= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4). &
\end{aligned}$$

(e) $\sin^6(x)$ (à l'ordre 9).
On sait $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$.
Si l'on voulait calculer un dl de $\sin^2(x)$ à l'ordre 5 on écrirait :

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^2 = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) = x^2 - 2\frac{1}{3!}x^4 + o(x^5).$$

En effet tous les autres termes sont dans $o(x^5)$.
Le principe est le même pour $\sin^6(x)$:

$$\sin^6(x) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^6 = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \cdots$$

Lorsque l'on développe ce produit en commençant par les termes de plus petits degrés on obtient

$$\sin^6(x) = x^6 + 6 \cdot x^5 \cdot \left(-\frac{1}{3!}x^3\right) + o(x^9) = x^6 - x^8 + o(x^9)$$

(f) $\ln\big(\cos(x)\big)$ (à l'ordre 6).
Le dl de $\cos x$ à l'ordre 6 est

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Le dl de $\ln(1+u)$ à l'ordre 6 est $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6)$.
On pose $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$ de sorte que

$$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6).$$

Il ne reste qu'à développer les u^k, ce qui n'est pas si dur que cela si les calculs sont bien menés et les puissances trop grandes écartées.
Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
u^2 &= \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right)^2 \\
&= \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right)^2 + o(x^6) \\
&= \left(-\frac{1}{2!}x^2\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2!}x^2\right)\left(\frac{1}{4!}x^4\right) + o(x^6) \\
&= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6)
\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} u^3 &= \left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)\right)^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2!}x^2\right)^3+o(x^6) \\ &= -\frac{1}{8}x^6+o(x^6) \end{aligned}$$

En effet lorsque l'on développe u^3 le terme $(x^2)^6$ est le seul terme dont l'exposant est $\leqslant 6$.
Enfin les autres termes u^4, u^5, u^6 sont tous des $o(x^6)$. Et en fait développer $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 est suffisant.
Il ne reste plus qu'à rassembler :

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &= \ln(1+u) \\ &= u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+o(u^3) \\ &= \left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6+o(x^6)\right) \\ &\quad +\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6+o(x^6)\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6) \end{aligned}$$

(g) $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
Le dl de $\cos x$ à l'ordre 4 est

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4).$$

Le dl de $\frac{1}{1+u}$ à l'ordre 2 (qui sera suffisant ici) est $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+o(u^2)$.
On pose $u=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$ et on a $u^2=\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} \\ &= 1-u+u^2+o(u^2) \\ &= 1-\left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)+\left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)^2+o(x^4) \\ &= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4) \end{aligned}$$

(h) $\tan x$ (à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)).
Pour ceux qui souhaitent seulement un dl à l'ordre 5 de $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$ alors il faut multiplier le dl de $\sin x$ à l'ordre 5 par le dl de $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 (voir question précédente).
Si l'on veut un dl de $\tan x$ à l'ordre 7 il faut d'abord refaire le dl $\frac{1}{\cos x}$ mais cette fois à l'ordre 6 :

$$\frac{1}{\cos x} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^6)$$

Le dl à l'ordre 7 de $\sin x$ étant :

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^7)$$

Comme $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$, il ne reste donc qu'à multiplier les deux dl pour obtenir après calculs :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$$

(i) $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ (à l'ordre 3).
Si l'on pense bien à écrire $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\left(\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\right)$ alors c'est juste des calculs utilisant les dl à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$ et $\exp x$.
On trouve

$$(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

(j) $\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right)$ (à l'ordre 6).
Tout d'abord $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$. Et $\arcsin u = u + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Donc en posant $u = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$ on a :

$$\begin{aligned}
\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right) &= \arcsin\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right) \\
&= \arcsin u \\
&= u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3) \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right)^3 + o(x^6) \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right) + \frac{x^6}{6} + o(x^6) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2366 ▲

(a) On a

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

On s'aperçoit qu'en fait un dl à l'ordre 2 suffit :

$$e^{x^2} - \cos x = \left(1 + x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi $\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2} + o(1)$ (où $o(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0) et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

(b) On sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Les dl sont distincts dès le terme de degré 2 donc un dl à l'ordre 2 suffit :

$$\ln(1+x)-\sin x = \left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x+o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

donc

$$\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} = -\frac{x}{2}+o(x)$$

et ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} = 0.$$

(c) Sachant

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

et

$$\sqrt{1-x^2} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4}\\ &= \frac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4}\\ &= \frac{1}{6}+o(1)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$$

Correction de l'exercice 2367 ▲

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)-x}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\arctan(x)-x^4}{\cos(x^2)-1} = 0.$$

Correction de l'exercice 2368 ▲

Commençons en $x=0$, le dl de $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 2 est

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+o(x^2) = x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

Par identification avec $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ cela entraîne donc $f(0)=0$, $f'(0)=1$ (et $f''(0)=1$). L'équation de la tangente est donc $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ donc $y=x$.
La position par rapport à la tangente correspond à l'étude du signe de $f(x)-y(x)$ où $y(x)$ est l'équation de la tangente.

$$f(x)-y(x) = x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\;-\;x = \frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

Ainsi pour x suffisamment proche de 0, $f(x)-y(x)$ est du signe de $\frac{1}{2}x^2$ et est donc positif. Ainsi dans un voisinage de 0 la courbe de f est au-dessus de la tangente en 0.

Même étude en $x=1$.

Il s'agit donc de faire le dl de $f(x)$ en $x=1$. On pose $x=1+h$ (de sorte que $h=x-1$ est proche de 0) :

$$\begin{aligned}
f(x)=\ln(1+x+x^2) &= \ln\left(1+(1+h)+(1+h)^2\right)\\
&= \ln\left(3+3h+h^2\right)\\
&= \ln\left(3\big(1+h+\frac{h^2}{3}\big)\right)\\
&= \ln 3+\ln\big(1+h+\frac{h^2}{3}\big)\\
&= \ln 3+\big(h+\frac{h^2}{3}\big)-\frac{\big(h+\frac{h^2}{3}\big)^2}{2}+o\big((h+\frac{h^2}{3})^2\big)\\
&= \ln 3+h+\frac{h^2}{3}-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\\
&= \ln 3+h-\frac{1}{6}h^2+o(h^2)\\
&= \ln 3+(x-1)-\frac{1}{6}(x-1)^2+o((x-1)^2)
\end{aligned}$$

La tangente en $x=1$ est d'équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ et est donc donnée par le dl à l'ordre 1 : c'est $y=(x-1)+\ln 3$. Et la différence $f(x)-\big(\ln 3+(x-1)\big)=-\frac{1}{6}(x-1)^2+o((x-1)^2)$ est négative pour x proche de 1. Donc, dans un voisinage de 1, le graphe de f est en-dessous de la tangente en $x=1$.

Correction de l'exercice 2381 ▲

(a) La fonction g est définie en x sauf si $\sin(x)=0$ ou $x=0$. Son domaine de définition est donc $\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

(b) On peut prolonger g en une fonction continue en 0 si et seulement si elle y admet une limite. Elle est dérivable en ce point si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Toutefois, comme l'énoncé demande la position du graphe de g par rapport à sa tangente en 0, nous allons calculer directement le développement limité à l'ordre 2 de g en 0.

Le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\arctan x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+x^5\varepsilon_1(x)$.

Or $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+x^5\varepsilon_2(x)$. Donc $\sin^3 x = x^3-\dfrac{x^5}{2}+\dfrac{13x^7}{120}+x^7\varepsilon_3(x)$ et $\dfrac{1}{\sin^3 x}=\dfrac{1}{x^3}(1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{9x^4}{40}+x^4\varepsilon_4(x))$. On en déduit que :

$\dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^3}(x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{31x^5}{120}+x^5\varepsilon_5(x))-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{31x^2}{120}+x^2\varepsilon_5(x)$.

Ainsi on peut prolonger g en une fonction continue en 0 en posant $g(0)=\dfrac{1}{6}$. La fonction obtenue est dérivable en 0 et sa dérivée est nulle. La tangente en 0 à son graphe est la droite d'équation $y=\dfrac{1}{6}$. Enfin le graphe de g est au-dessus de cette droite au voisinage de 0.

Correction de l'exercice 2384 ▲

(a) i. La première limite n'est pas une forme indéterminée, en effet

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}+x=+\infty$$

ii. Lorsque $x \to -\infty$ la situation est tout autre car

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

donc $\sqrt{x^2+3x+2}+x$ est une forme indéterminée !
Calculons un développement limité à l'ordre 1 en $-\infty$ en faisant très attention au signe (car par exemple $|x| = -x$) :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+3x+2}+x &= |x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right) \\
&= |x|\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)+o(\frac{1}{x})\ -1)\right) \\
&= |x|\left(\frac{1}{2}\frac{3}{x}+o(\frac{1}{x})\right) \\
&= -\frac{3}{2}+o(1)
\end{aligned}$$

Et donc

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x = -\frac{3}{2}$$

(b) Nous utiliserons que

$$\begin{aligned}
(\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(\arctan x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\big(x+o(x)\big)\right) \qquad \text{car } \arctan x = x+o(x)
\end{aligned}$$

Mais lorsque $x \to 0^+$ on sait que $\ln(x+o(x)) \to -\infty$, $x^2 \to 0$ donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+o(x))}{x^2} = -\infty$$

Composé avec l'exponentielle on trouve :

$$\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} = 0$$

(c) Effectuons le dl à l'ordre 2 : comme

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$$

alors

$$(1+3x)^{\frac{1}{3}} = 1+x-x^2+o(x^2).$$

$$\sin x = x+o(x^2) \quad \text{et} \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x} &= \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}\\ &= \frac{-1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} \quad \text{après factorisation par } x^2\\ &= -2+o(1)\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x} = -2$$

Correction de l'exercice 2390 ▲

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=0 \Rightarrow L=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}a_k$.

Correction de l'exercice 2391 ▲

$v_p=\left(\frac{2^{1+1/p}-1}{1+1/p}\right)^p$, $w_n=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$, $v=w=\frac{4}{e}$.

Correction de l'exercice 2392 ▲

$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)\to\frac{f'(0)}{2}$ lorsque $n\to\infty$. $\left(\text{Utiliser } |f(x)-xf'(0)|\leqslant\frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|f''(t)| \text{ pour } 0\leqslant x\leqslant 1\right)$

Correction de l'exercice 2393 ▲

(a) $y=1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}$.
(b) $y=-\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}$.
(c) $y=-\frac{x}{6}-\frac{17x^3}{360}$.
(d) $y=e^3(1-4x+16x^2)$.
(e) $y=-1+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}$.
(f) $y=\sqrt{2}\left(1+\frac{x}{8}-\frac{5x^2}{128}\right)$.

Correction de l'exercice 2394 ▲

$h\leqslant k\leqslant g\leqslant f$.

Correction de l'exercice 2395 ▲

(a) $y=x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}$.
(b) $y=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}$.
(c) $y=2x-\frac{4}{3x}$.
(d) $y=\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}+1-\frac{1}{3x^2}$.
(e) $y=\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi/4-1}{x}$.
(f) $y=\frac{\pi x}{2}+\pi-1+\frac{5\pi/4-2}{x}$.

(g) $y = x + \frac{1}{2} - \frac{9}{8x}$.

Correction de l'exercice 2396 ▲

(a) Notons I_n l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Alors sur chaque I_n la fonction définie par $f(x) = \tan x - x$ est un fonction continue et dérivable. De plus $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$. La dérivée est strictement positive sauf en un point où elle est nulle et ainsi la fonction f est strictement croissante sur I_n. La limite à gauche est $-\infty$ et la limite à droite est $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $f(x_n) = 0$ c'est-à-dire $\tan x_n = x_n$.

(b) $x \mapsto \arctan x$ est la bijection réciproque de la restriction de la tangente $\tan_| :]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\to]-\infty, +\infty[$. Sur ces intervalles on a bien $\tan x = y \iff x = \arctan y$. Mais si $y \notin]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ il faut d'abord se ramener dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.
Ainsi $x_n \in I_n$ donc $x_n - n\pi \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Maintenant $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$.
Donc $\arctan x_n = \arctan\big(\tan(x_n - n\pi)\big) = x_n - n\pi$. Ainsi

$$x_n = \arctan x_n + n\pi.$$

L'erreur classique est de penser que $\arctan(\tan x) = x$. Ce qui n'est vrai que pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$!

(c) Comme $x_n \in I_n$ alors $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
On sait par ailleurs que pour $x > 0$ on a $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\arctan x_n = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x_n}$
Lorsque n tend vers $+\infty$ alors $\frac{1}{x_n} \to 0$ donc $\arctan \frac{1}{x_n} \to 0$.
Ainsi

$$x_n = n\pi + \arctan x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x_n} = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

(d) On va utiliser le dl obtenu précédemment pour obtenir un dl à un ordre plus grand :

$$\begin{aligned}
x_n &= n\pi + \arctan x_n \\
&= n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x_n} \\
&= n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} \\
&= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} + o(\frac{1}{n^2}) \qquad \text{car } \arctan u = u + o(u^2) \text{ en } u = 0 \\
&= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi}\frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} + o(\frac{1}{n^2}) \\
&= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi}\big(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\big) + o(\frac{1}{n^2}) \\
&= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

Ainsi en $+\infty$ on a le développement :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Correction de l'exercice 2397 ▲

(a) $f_n'(x) = 0 \iff \operatorname{cotan} x = nx$.

(b) 0.

(c) $x_n \tan x_n = \frac{1}{n}$.

(d) $\ln\left(\frac{y_n}{x_n}\right) \to -\frac{1}{e} \Rightarrow y_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}e}$.

Correction de l'exercice 2398 ▲

(a)

(b) i.

ii. $a \sim e^{-b} \Rightarrow a\ln b \to 0 \Rightarrow b^a \to 1$.

Correction de l'exercice 2399 ▲

Existence et unicité de x_n par étude de f sur $[3,+\infty[$ (pour $x \leqslant 3$ on ne peut pas avoir $0 < f(x) < 1$). On a facilement $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.
$\ln(x_n - 2) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(x_n) \Rightarrow \ln\left(1-\frac{2}{x_n}\right) = -\frac{\ln(x_n)}{n} \Rightarrow x_n\ln(x_n) \sim 2n \Rightarrow x_n \sim \frac{2n}{\ln n}$.

Correction de l'exercice 2400 ▲

$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Correction de l'exercice 2401 ▲

Existence et unicité de x_n par étude de la fonction $x \mapsto e^x + x$ sur $\mathbb{R}^+$. On a clairement $x_n \to +\infty$ (lorsque $n \to \infty$) et $n = e^{x_n} + x_n$ d'où :

$$\ln n = \ln(e^{x_n} + x_n) = x_n + \ln(1 + x_n e^{-x_n}) = x_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2}e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}).$$

On en déduit $x_n \sim \ln n$. Écrivons $x_n = \ln n + y_n$:

$$0 = y_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2}e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n})$$

d'où $y_n \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) et $y_n \sim -x_n e^{-x_n} \sim -\frac{\ln n}{n}e^{-y_n} \sim -\frac{\ln n}{n}$. Écrivons maintenant $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\ln n}{n} + z_n + (\ln n + y_n)\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2}e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\
&= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2}e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\
&= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2}e^{-2y_n} + o\left(\frac{x_n^2 e^{-2y_n}}{n^2}\right) \\
&= z_n + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

d'où $z_n \sim -\frac{\ln^2 n}{2n^2}$ et finalement, $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Correction de l'exercice 2402 ▲

(a)

(b)

$$nx_n^n(x_n-1) = x_n^n + \frac{1}{2} \Rightarrow f_{n+1}(x_n) = \frac{n+1}{n}\left(x_n^{n+1} + \frac{x_n}{2}\right) - x_n^{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{x_n^{n+1}}{n} + \frac{(n+1)x_n - n}{2n} > 0$$
$$\Rightarrow x_{n+1} < x_n.$$

Donc la suite (x_n) est décroissante et minorée par 1, elle converge vers $\ell \geqslant 1$.
$0 \leqslant x_n - 1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2nx_n^n} \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) donc $\ell = 1$.
Soit $y_n = n(x_n-1) = 1 + \frac{1}{2x_n^n}$. On a $f(y_n) = \frac{\ln(2(y_n-1))}{y_n} = -\frac{\ln x_n}{x_n - 1} = -g(x_n)$ et f, g sont strictement coissantes sur $[1, +\infty[$ donc les suites (x_n) et (y_n) varient en sens contraire. On en déduit que la suite (y_n) décroît donc admet une limite $\lambda \geqslant 1$, soit $x_n = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $x_n^n \to e^\lambda$ (lorsque $n \to \infty$) d'où $\lambda = 1 + \frac{1}{2e^\lambda}$.

Correction de l'exercice 2403 ▲

Il s'agit bien sûr de calculer un développement limité, le premier terme de ce développement donne l'équivalent cherché.

(a) Le dl à l'ordre 3 en 0 est

$$2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} = -\frac{11x^3}{3} + o(x^3)$$

donc

$$2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} \sim -\frac{11x^3}{3}.$$

(b) De même

$$(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x} \sim \frac{x^5}{4}.$$

(c) On pose $h = x - \sqrt{3}$ alors

$$\arctan x + \arctan\frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{h^2}{8\sqrt{3}} + o(h^2)$$

donc

$$\arctan x + \arctan\frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3} \sim -\frac{(x-\sqrt{3})^2}{8\sqrt{3}}.$$

(d) En $+\infty$

$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} = \frac{1}{12x} + o(\frac{1}{x})$$

donc

$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} \sim \frac{1}{12x}.$$

(e) Il faut distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$ pour trouver :

$$\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right) \sim |x|.$$

Correction de l'exercice 2404 ▲

Le dl de $\cos x$ en 0 à l'ordre 6 est :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Calculons celui de $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= (1+ax^2)\times\frac{1}{1+bx^2}\\
&= (1+ax^2)\times\big(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6)\big) \quad \text{car } \frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+o(u^3)\\
&= \cdots \qquad \text{on développe}\\
&= 1+(a-b)x^2-b(a-b)x^4+b^2(a-b)x^6+o(x^6)
\end{aligned}$$

Notons $\Delta(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ alors

$$\Delta(x)=\big(-\frac{1}{2}-(a-b)\big)x^2+\big(\frac{1}{24}+b(a-b)\big)x^4+\big(-\frac{1}{720}-b^2(a-b)\big)x^6+o(x^6).$$

Pour que cette différence soit la plus petite possible (lorsque x est proche de 0) il faut annuler le plus possible de coefficients de bas degré. On souhaite donc avoir

$$-\frac{1}{2}-(a-b)=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{24}+b(a-b)=0.$$

En substituant l'égalité de gauche dans celle de droite on trouve :

$$a=-\frac{5}{12} \qquad \text{et} \qquad b=\frac{1}{12}.$$

On obtient alors

$$\Delta(x)=\big(-\frac{1}{720}-b^2(a-b)\big)x^6+o(x^6)=\frac{1}{480}x^6+o(x^6).$$

Avec notre choix de a,b nous avons obtenu une très bonne approximation de $\cos x$. Par exemple lorsque l'on évalue $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ (avec $a=-\frac{5}{12}$ et $b=\frac{1}{12}$) en $x=0.1$ on trouve :

$$0.9950041631\ldots$$

Alors que

$$\cos(0.1)=0.9950041652\ldots$$

En l'on trouve ici $\Delta(0.1)\simeq 2\times 10^{-9}$.

Correction de l'exercice 2405 ▲

$a=-7/60$, $b=1/20$, $\Delta\sim 11x^7/50400$.

Correction de l'exercice 2407 ▲

(a) $(3a\alpha(\alpha-a)+2(b\alpha-a\beta))X^7$.

(b) $-x^7/30+o_{x\to 0}(x^7)$.

Correction de l'exercice 2410 ▲

$\sim x$ pour k impair, et $=1+x\ln(x)+o_{x\to 0}(x\ln x)\sim 1$ si k est pair $\geqslant 2$.

Correction de l'exercice 2413 ▲

(a)

(b) $e\left(1-\frac{\ln 2}{x}+\frac{\ln^2 2}{2!x^2}-\cdots+(-1)^n\frac{\ln^n 2}{n!x^n}\right)+o(x^{-n})$.

Correction de l'exercice 2415 ▲

$f^{-1}(y)=\frac{y}{a_1}-\frac{a_2y^2}{a_1^3}+o(y^2)$.

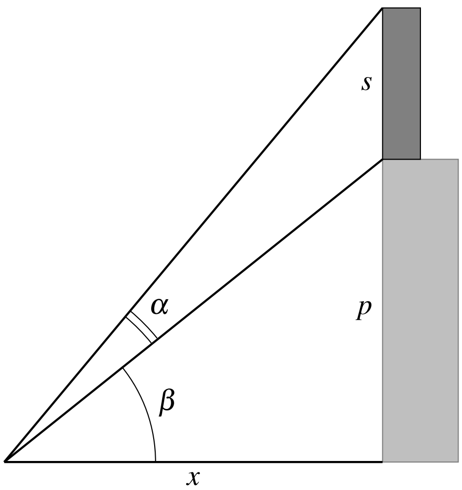
Correction de l'exercice 2416 ▲

$(1-e^x)^n=\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^ke^{kx}=\sum_{p=0}^{n+2}\left(\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^kk^p\right)\frac{x^p}{p!}+o(x^{n+2})$,

$(1-e^x)^n=(-x)^n\left(1+\frac{nx}{2}+\frac{n(3n+1)}{24}x^2+o(x^2)\right)$.

Correction de l'exercice 2424 ▲

(a) On note x la distance de l'observateur au pied de la statue. On note α l'angle d'observation de la statue seule, et β l'angle d'observation du piédestal seul.



Nous avons les relations trigonométriques dans les triangles rectangles :

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{p+s}{x}\qquad \text{et}\qquad \tan\beta=\frac{p}{x}$$

On en déduit les deux identités :

$$\alpha+\beta=\arctan\left(\frac{p+s}{x}\right)\qquad \text{et}\qquad \beta=\arctan\left(\frac{p}{x}\right)$$

à partir desquelles on obtient $\alpha=\alpha(x)=\arctan\left(\frac{p+s}{x}\right)-\arctan\left(\frac{p}{x}\right)$.
Étudions cette fonction sur $]0,+\infty[$: elle est dérivable et

$$\alpha'(x)=\frac{-\frac{s+p}{x^2}}{1+\left(\frac{s+p}{x}\right)^2}-\frac{-\frac{p}{x^2}}{1+\left(\frac{p}{x}\right)^2}=\frac{s}{(x^2+p^2)(x^2+(s+p)^2)}\left(p(p+s)-x^2\right)$$

Ainsi α' ne s'annule sur $]0,+\infty[$ qu'en $x_0=\sqrt{p(p+s)}$. Par des considérations physiques, à la limite en 0 et en $+\infty$, l'angle α est nul, alors en x_0 nous obtenons un angle α maximum. Donc la distance optimale de vision est $x_0=\sqrt{p(p+s)}$.

(b) Pour calculer l'angle maximum α_0 correspondant, on pourrait calculer $\alpha_0 = \alpha(x_0)$ à partir de la définition de la fonction $\alpha(x)$. Pour obtenir une formule plus simple nous utilisons la formule trigonométrique suivante : si a, b et $a-b$ sont dans l'intervalle de définition de la fonction tan, alors $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$, ce qui donne ici

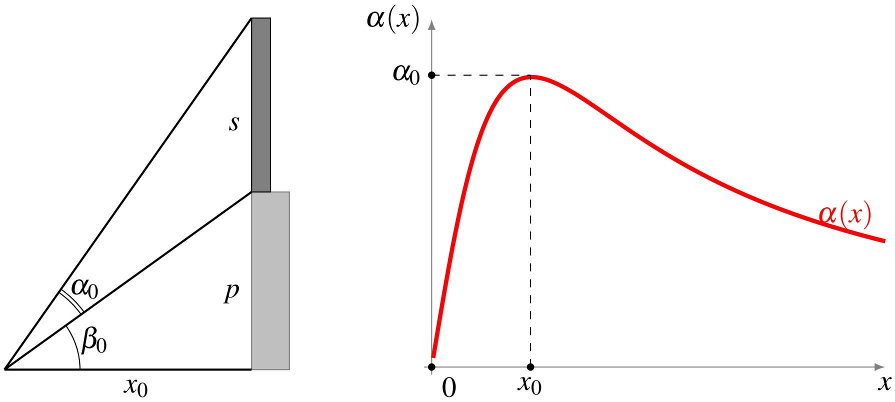
$$\tan\alpha_0 = \tan\big((\alpha_0+\beta_0)-\beta_0\big) = \frac{\frac{p+s}{x_0} - \frac{p}{x_0}}{1+\frac{p+s}{x_0}\cdot\frac{p}{x_0}} = \frac{s}{2x_0} = \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$$

Comme $\alpha_0 \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on en déduit $\alpha_0 = \arctan\frac{s}{2x_0} = \arctan\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.

(c) Pour la statue de la liberté, on a la hauteur de la statue $s = 46$ mètres et la hauteur du piédestal $p = 47$ mètres. On trouve donc

$$x_0 = \sqrt{p(p+s)} \simeq 65{,}40\text{mètres} \qquad \alpha_0 = \arctan\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}} \simeq 19^\circ.$$

Voici les représentations de la statue et de la fonction $\alpha(x)$ pour ces valeurs de s et p.



Correction de l'exercice 2425 ▲

(a) Soit $f(a) = \arcsin a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ sur $]0,1[$. Alors $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}(1-a^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{-a^2}{1-a^2}$ donc $f'(a) \leqslant 0$. Ainsi f est strictement décroissante et $f(0) = 0$ donc $f(a) < 0$ pout tout $a \in]0,1[$.

(b) Si $g(a) = \arctan a - \frac{a}{1+a^2}$ alors $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$. Donc g est strictement croissante et $g(0) = 0$ donc g est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2426 ▲

(a) $\sin^2 y = 1-\cos^2 y$, donc $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Avec $y = \arccos x$, il vient $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Or $\arccos x \in [0,\pi]$, donc $\sin(\arccos x)$ est positif et finalement $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$. De la même manière on trouve $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Or $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(\arcsin x)$ est positif et finalement $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-x^2}$.
Ces deux égalités sont à connaître ou à savoir retrouver très rapidement :

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x).$$

Enfin, puisque $\cos(2y) = \cos^2 y - \sin^2 y$, on obtient avec $y = \arcsin x$,

$$\cos(2\arcsin x) = (\sqrt{1-x^2})^2 - x^2 = 1-2x^2.$$

(b) Commençons par calculer $\sin(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$. On utilise l'identité $1+\tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$ avec $y = \arctan x$, ce qui donne $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$ et $\sin^2 y = 1-\cos^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$. Il reste à déterminer les signes de $\cos(\arctan x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ Or $y = \arctan x$ donc $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et y a le même signe que x : ainsi $\cos y > 0$, et $\sin y$ a le même signe que y et donc que x. Finalement, on a $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Il ne reste plus qu'à linéariser $\sin(3y)$:

$$\begin{aligned}\sin(3y) &= \sin(2y+y) = \cos(2y)\sin(y)+\cos(y)\sin(2y)\\ &= (2\cos^2 y-1)\sin y+2\sin y\cos^2 y\\ &= 4\sin y\cos^2 y-\sin y\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\sin(3\arctan x) &= \sin(3y) = 4\sin y\cos^2 y-\sin y\\ &= 4\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Remarque : la méthode générale pour obtenir la formule de linéarisation de $\sin(3y)$ est d'utiliser les nombres complexes et la formule de Moivre. On développe

$$\cos(3y)+i\sin(3y) = (\cos y+i\sin y)^3 = \cos^3 y+3i\cos^2 y\sin y+\cdots$$

puis on identifie les parties imaginaires pour avoir $\sin(3y)$, ou les parties réelles pour avoir $\cos(3y)$.

Correction de **l'exercice 2428 ▲**

(a) On vérifie d'abord que $2\arccos\frac{3}{4} \in [0,\pi]$ (sinon, l'équation n'aurait aucune solution). En effet, par définition, la fonction arccos est décroissante sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$, donc puisque $\frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4} \leqslant 1$ on a $\frac{\pi}{3} \geqslant \cos\left(\frac{3}{4}\right) \geqslant 0$. Puisque par définition $\arccos x \in [0,\pi]$, on obtient en prenant le cosinus :

$$\arccos x = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \iff x = \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right)$$

En appliquant la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u-1$, on arrive donc à une unique solution $x = 2(\frac{3}{4})^2-1 = \frac{1}{8}$.

(b) Vérifions d'abord que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5} \leqslant \frac{\pi}{2}$. En effet, la fonction arcsin est strictement croissante et $0 < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui donne $0 < \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) < \frac{\pi}{6} < \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{4}$, d'où l'encadrement $0+\frac{\pi}{6} < \arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5} \leqslant \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$.
Puisque par définition on aussi $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, il vient en prenant le sinus :

$$\begin{aligned}&\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5}\\ \iff\quad & x = \sin\left(\arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5}\right)\\ \iff\quad & x = \frac{3}{5}\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{5}\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\end{aligned}$$

La dernière équivalence vient de la formule de $\sin(a+b) = \cos a\sin b+\cos b\sin a$ et de l'identité $\sin\left(\arcsin u\right) = u$.

En utilisant la formule $\cos\left(\arcsin x\right) = \sqrt{1-x^2}$, on obtient une unique solution : $x = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}}+\frac{2}{5}\frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{21}+8}{25}$.

(c) Supposons d'abord que x est solution. Remarquons d'abord que x est nécessairement positif, puisque $\arctan x$ a le même signe que x. Alors, en prenant la tangente des deux membres, on obtient $\tan\big(\arctan(2x)+\arctan(x)\big)=1$.

En utilisant la formule donnant la tangente d'une somme : $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$, on obtient $\frac{2x+x}{1-2x\cdot x}=1$, et finalement $2x^2+3x-1=0$ qui admet une unique solution positive $x_0=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$. Ainsi, *si* l'équation de départ admet une solution, c'est nécessairement x_0.

Or, en posant $f(x)=\arctan(2x)+\arctan(x)$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\pi$ et $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\pi$, on sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires que f prend la valeur $\frac{\pi}{4}$ au moins une fois (et en fait une seule fois, puisque f est strictement croissante comme somme de deux fonctions strictement croissantes). Ainsi l'équation de départ admet bien une solution, qui est x_0.

Correction de l'exercice 2431 ▲

(a) Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=\arcsin x+\arccos x$: f est continue sur l'intervalle $[-1,1]$, et dérivable sur $]-1,1[$. Pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$. Ainsi f est constante sur $]-1,1[$, donc sur $[-1,1]$ (car continue aux extrémités). Or $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x\in[-1,1]$, $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

(b) Soit $g(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$. Cette fonction est définie sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ (mais pas en 0). On a

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=0,$$

donc g est constante sur chacun de ses intervalles de définition : $g(x)=c_1$ sur $]-\infty,0[$ et $g(x)=c_2$ sur $]0,+\infty[$. Sachant $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, on calcule $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1=-\frac{\pi}{2}$ et $c_2=+\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2436 ▲

$\arcsin x=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Correction de l'exercice 2437 ▲

$\arctan a+\arctan b\equiv\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)\pmod{\pi}$.

Correction de l'exercice 2438 ▲

$x=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$.

Correction de l'exercice 2439 ▲

$\cos 4x=-\sin x\Rightarrow x\equiv\frac{3\pi}{10}\pmod{\frac{2\pi}{5}}$ ou $x\equiv\frac{\pi}{6}\pmod{\frac{2\pi}{3}}$. Donc $x=\frac{3\pi}{10}$.

Correction de l'exercice 2440 ▲

(a) $x>-1\Rightarrow=\frac{\pi}{4}-\arctan x,\qquad x<-1\Rightarrow=-\frac{3\pi}{4}-\arctan x.$

(b) $=\frac{1}{2}\arccos x.$

(c) $-1\leqslant x<-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow=\arcsin x+\frac{3\pi}{4},\qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1\Rightarrow=\arcsin x-\frac{\pi}{4}.$

(d) $=\frac{\pi}{4}.$

(e) $f(x)=0$ pour $x\in]-\infty,0[$;
$f(x)=\pi$ pour $x\in]0,1[$;
$f(x)=0$ pour $x\in]1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2441 ▲

$D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $\quad f(x) = \frac{1}{2} - x^2 - x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$.

Correction de l'exercice 2442 ▲

$\cos(3\arctan x) = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$. $\qquad \cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Correction de l'exercice 2443 ▲

$f(x) = 0$ pour $x \in]0, \pi/2[$; $f(x) = 2x - \pi$ pour $x \in]\pi/2, \pi[$; $f(x) = 3\pi - 2x$ pour $x \in]\pi, 3\pi/2[$; $f(x) = 0$ pour $x \in]3\pi/2, 2[$.

Correction de l'exercice 2444 ▲

$f(x) = -8\arctan x - 2\pi$ pour $x \in]-\infty, -1[$, solution $-\sqrt{3}$;
$f(x) = -4\arctan x$ pour $x \in]-1, 0[$, solution $-1/\sqrt{3}$;
$f(x) = 4\arctan x$ pour $x \in]0, 1[$, solution $1/\sqrt{3}$;
$f(x) = 2\pi$ pour $x \in]1, +\infty[$.

Correction de l'exercice 2445 ▲

$f(x) = x + \pi/4$ pour $x \in]-\pi, -\pi/2[$;
$f(x) = -\pi/4$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$;
$f(x) = x - 3\pi/4$ pour $x \in]\pi/2, \pi[$.

Correction de l'exercice 2446 ▲

$= \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$.

Correction de l'exercice 2447 ▲

(a) $x = \frac{1}{6}$.

(b) $x = \pm 1\sqrt{2}$.

(c) $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

(d) $x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5, -1 \pm \sqrt{3}$. Seule la solution $x = 5$ convient.

Correction de l'exercice 2450 ▲

$\sin(2g(x)) = \sin(f(x))$.
$f(x) = -\pi - 2g(x)$ pour $x \in]-\infty, \sin a - \cos a[$;
$f(x) = 2g(x)$ pour $x \in]\sin a - \cos a, \sin a + \cos a[$;
$f(x) = \pi - 2g(x)$ pour $x \in]\sin a + \cos a, +\infty[$.

Correction de l'exercice 2454 ▲

$\arcsin x$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$. Donc, $\sin(\arcsin x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$ et pour x dans $[-1, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.

5. $\arcsin(\sin x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x-2k\pi)) = x-2k\pi.$$

De plus, on a $k \leqslant \frac{x}{2\pi}+\frac{1}{4} < k+\frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{4}\right)$. • S'il existe un entier relatif k tel que $\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x + 2k\pi)) = \pi - x + 2k\pi.$$

De plus, $k \leqslant \frac{x}{2\pi}-\frac{1}{4} < k+\frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{4}\right)$.

6. $\arccos x$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\cos(\arccos x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $\cos(\arccos x) = x$.
7. $\arccos(\cos x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[0,\pi]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $2k\pi \leqslant x < \pi+2k\pi$, alors $\arccos(\cos x) = x-2k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\pi+2k\pi \leqslant x < 2k\pi$ alors $\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$ avec $k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.
8. Pour tout réel x, $\tan(\arctan x) = x$.
9. $\arctan(\tan x)$ existe si et seulement si x n'est pas dans $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et pour ces x, il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$. Dans ce cas, $\arctan(\tan x) = \arctan(\tan(x-k\pi)) = x-k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 2455 ▲

(a) **1ère solution**. Posons $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ pour x dans $[-1,1]$. f est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. De plus, pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.}$$

2ème solution. Il existe un unique réel θ dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$, à savoir $\theta = \arccos x$. Mais alors,

$$\arccos x + \arcsin x = \theta + \arcsin\left(\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car $\frac{\pi}{2}-\theta$ est dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$).

(b) **1ère solution**. Pour x réel non nul, posons $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. f est impaire. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. f est donc constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ (mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}^*$). Donc, pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$, et puisque f est impaire, pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0\\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0\end{array}\right. = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x).}$$

2ème solution Pour x réel strictement positif donné, il existe un unique réel θ dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$ à savoir $\theta = \arctan x$. Mais alors,

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \theta + \arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \theta + \arctan\left(\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car θ et $\frac{\pi}{2}-\theta$ sont éléments de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$).

(c) $\cos^2(\arctan a) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan a)} = \frac{1}{1+a^2}$. De plus , $\arctan a$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(\arctan a) > 0$. On en déduit que pour tout réel a, $\cos(\arctan a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ puis

$$\sin(\arctan a) = \cos(\arctan a)\tan(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan a) = \frac{1}{1+a^2} \text{ et } \sin(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

(d) D'après 3),

$$\cos(\arctan a+\arctan b) = \cos(\arctan a)\cos(\arctan b) - \sin(\arctan a)\sin(\arctan b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà , puisque $ab \neq 1$, que $\cos(\arctan a+\arctan b) \neq 0$ et donc que $\tan(\arctan a + \arctan b)$ existe. On a immédiatement,

$$\tan(\arctan a+\arctan b) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant, $\arctan a+\arctan b$ est dans $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1er cas. Si $ab < 1$ alors $\cos(\arctan a+\arctan b) > 0$ et donc $\arctan a+\arctan b$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dans ce cas, $\arctan a+\arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

2ème cas. Si $ab > 1$ alors $\cos(\arctan a+\arctan b) < 0$ et donc $\arctan a+\arctan b$ est dans $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Si de plus $a > 0$, $\arctan a+\arctan b > -\frac{\pi}{2}$ et donc $\arctan a+\arctan b$ est dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Dans ce cas, $\arctan a+\arctan b-\pi$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et a même tangente que $\arctan \frac{a+b}{1-ab}$. Donc, $\arctan a+\arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} + \pi$. Si $a < 0$, on trouve de même $\arctan a+\arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} - \pi$.

En résumé,

$$\boxed{\arctan a+\arctan b = \begin{cases} \arctan \frac{a+b}{1-ab} \text{ si } ab < 1 \\ \arctan \frac{a+b}{1-ab} + \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \arctan \frac{a+b}{1-ab} - \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 2456 ▲

Pour x réel, on pose $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \arcsin\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \arcsin\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, $x \mapsto \sin^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $t \mapsto \arccos\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \arccos\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x\cos x\arcsin(\sqrt{\sin^2 x}) - 2\sin x\cos x\arccos(\sqrt{\cos^2 x}) \\ &= 2\sin x\cos x\left(\arcsin(|\sin x|) - \arccos(|\cos x|)\right). \end{aligned}$$

On note alors que f est π-pérodique et paire. Pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 2\sin x\cos x(x-x) = 0$. f est donc constante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{1/2} \arccos\sqrt{t}dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}$. Mais alors, par parité et π-périodicité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 2457 ▲

(a) **1ère solution.** Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}x\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x).$$

Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $f_1(x) = \arctan x + C$. $x = 0$ fournit $C = 0$ et donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan x.}$$

2ème solution. Pour x réel donné, posons $\theta = \arctan x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \sqrt{\cos^2\theta}\tan\theta = \cos\theta\tan\theta \text{ (car } \cos\theta > 0)\\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \arcsin(\sin\theta) = \theta \text{ (car } \theta \text{ est dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[)\\ &= \arctan x.\end{aligned}$$

(b) **1ère solution.** Pour tout réel x, $-1 < -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant -1+2 = 1$ (avec égalité si et seulement si $x = 0$). f_2 est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\arctan x + C$ (y compris $x = 0$ puisque f est continue en 0).
$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc, pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\arctan x$. Par parité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan|x|.}$$

2ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}$ puis $\theta = \arctan x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta(1-\tan^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$f_2(x) = \arccos(\cos(2\theta)) = \left\{\begin{array}{l} 2\theta \text{ si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ -2\theta \text{ si } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right] \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} 2\arctan x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -2\arctan x \text{ si } x \leqslant 0 \end{array}\right. = 2\arctan|x|.$$

(c) La fonction $x \mapsto \arcsin\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ car pour x élément de $[-1,1]$, $1-x^2$ est élément de $[0,1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0. $\frac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $]-1,1]$, et nul si et seulement si $x=1$. f_3 est donc définie et continue sur $]-1,1]$, dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. Pour x dans $]-1,0[\cup]0,1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $]0,1[$, $f_3'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\frac{1}{2}\arcsin)'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $[0,1]$ (par continuité) $f_3(x) = -\frac{1}{2}\arcsin x + C$. $x=1$ fournit $C=\frac{\pi}{4}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin x = \frac{1}{2}\arccos x.}$$

Si x est dans $]-1,0[$, $f_3'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{3}{2}\arcsin)'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $]-1,0]$ (par continuité) $f_3(x) = \frac{3}{2}\arcsin x + C'$. $x=0$ fournit $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in]-1,0],\ f_3(x) = \frac{3}{2}\arcsin x + \frac{\pi}{4}.}$$

(d) f_4 est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ et pour x élément de $\mathscr{D}$, on a :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2}\frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0. \end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour $-1<x<0$, $f(x) = \lim\limits_{\substack{t\to-1\\ t>-1}} f(t) = \arctan\frac{1}{2} - (-\frac{\pi}{2}) + \arctan 2 = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$.
Pour $x<-1$, $f(x) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\},\ f_4(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \pi \text{ si } x \in]-1,0[\end{array}\right. .}$$

Correction de l'exercice 2458 ▲

$0 \leqslant \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} < \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

Comme $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} \in [0,\frac{\pi}{2}[$, on a donc $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{7}{9}$. De même, $\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8} \in [0,\frac{\pi}{2}[$ et

$$\tan\left(\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8}\right) = \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

et donc $\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 2459 ▲

(On va retrouver le résultat de l'exercice 2455 dans un cas particulier)

Soient a et b deux réels positifs. Alors, $\arctan a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\arctan a - \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) - \tan(\arctan b)}{1 + \tan(\arctan a)\tan(\arctan b)} = \frac{a-b}{1+ab},$$

et donc, puisque $\arctan a - \arctan b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\boxed{\forall a \geqslant 0,\ \forall b \geqslant 0,\ \arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).}$$

Soit alors k un entier naturel non nul. $\arctan\frac{2}{k^2} = \arctan\frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1)$ (puisque $k-1$ et $k+1$ sont positifs). Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{2}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}(\arctan(k+1) - \arctan(k-1)) = \sum_{k=2}^{n+1}\arctan k - \sum_{k=0}^{n-1}\arctan k \\ &= \arctan(n+1) + \arctan n - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

La limite de u_n vaut donc $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 2460 ▲

(a) f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$.

(b) Pour x élément de $\mathscr{D}$,

$$f'(x) = 2x\arctan\frac{1}{2x-1} + (x^2-1)\frac{-2}{(2x-1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{(2x-1)^2}} = 2x\arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x) = 2xg(x)$ où $g(x) = \arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x}\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

(c) Pour x élément de $\mathscr{D}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x(2x^3-2x^2+x)-(x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1)+2x^4-7x^2+4x-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(x^2-2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4-4x^3+9x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7} > 0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Quand x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}<0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0,\frac{1}{2}[$ en un certain réel x_0 de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. g est de plus strictement négative sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0,x_0[$. Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $]-\infty,0[$. Enfin, puisque $f'(x)=2xg(x)$ pour $x\neq 0$, on a les résultats suivants : sur $]-\infty,0[$, $f'>0$, sur $]0,x_0[$, $f'>0$, sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f'<0$, sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'>0$. Comme $f'(0)=1>0$, on a donc : sur $]-\infty,x_0[$, $f'>0$, sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f'<0$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'>0$. f est strictement croissante sur $]-\infty,x_0]$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left[x_0,\frac{1}{2}\right[$.

Correction de l'exercice 2461 ▲

(a) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin(2\arcsin x)=2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}$.

(b) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1$.

(c) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin^2(\frac{1}{2}\arccos x)=\frac{1}{2}(1-\cos(\arccos x))=\frac{1-x}{2}$.

(d) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|=\mathrm{Max}\{x,-x\}.$$

Donc, $\sqrt{x^2+1}+x>0$ et $\sqrt{x^2+1}-x>0$. L'expression proposée existe pour tout réel x. De plus,

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\left((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\right)=\ln(x^2+1-x^2)=\ln 1=0.$$

(e) L'expression proposée est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire. Soit alors $x>0$.

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)&=\ln\left(\frac{x^2-1}{2x}+\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2}+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2+1+4x^2})\right)\\&=\ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{(x^2+1)^2})\right)=\ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+x^2+1)\right)=\ln x\end{aligned}$$

Par imparité, si $x<0$, $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=-\ln(-x)$. En résumé, en notant ε le signe de x,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=\varepsilon\ln|x|.}$$

(f) L'expression proposée existe si et seulement si $2x^2-1\in[1,+\infty[$ ou encore $x^2\in[1,+\infty[$ ou enfin $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. Cette expression est paire. Soit donc $x\in[1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\operatorname{argch}(2x^2-1)&=\ln(2x^2-1+\sqrt{(2x^2-1)^2-1})=\ln(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1})=\ln\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\right)\\&=2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=2\operatorname{argch}x\end{aligned}$$

Par parité, on en déduit que

$$\boxed{\forall x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[,\ \operatorname{argch}(2x^2-1)=2\operatorname{argch}|x|.}$$

(g) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\text{ existe}&\Leftrightarrow \operatorname{ch}x+1\neq 0\text{ et }\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\geqslant 0\text{ et }\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\in]-1,1[\\&\Leftrightarrow\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\in[0,1[\end{aligned}$$

Mais, d'une part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geqslant 0$ et d'autre part, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} = \frac{\operatorname{ch}x+1-2}{\operatorname{ch}x+1} = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}x+1} < 1$. L'expression proposée existe donc pour tout réel x et est paire. Ensuite, pour x réel positif, on a

$$\frac{1+\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}}{1-\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}-\sqrt{\operatorname{ch}x-1}} = \frac{(\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1})^2}{(\operatorname{ch}x+1)-(\operatorname{ch}x-1)} = \frac{2\operatorname{ch}x+2\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{2}$$
$$= \operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x} = \operatorname{ch}x+|\operatorname{sh}x| = \operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x = e^x$$

Par suite, x étant toujours positif,

$$\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2}.$$

Par parité, on a alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right) = \frac{|x|}{2}.}$$

(Remarque. Pour 5), 6) et 7), on peut aussi dériver chaque expression)

(h) Pour $x > 0$,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x}\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Correction de l'exercice 2462 ▲

(a) $\operatorname{ch}x = 2 \Leftrightarrow x = \pm\operatorname{argch}2 = \pm\ln(2+\sqrt{2^2-1}) = \pm\ln(2+\sqrt{3})$. Les solutions sont $\ln(2+\sqrt{3})$ et $-\ln(2+\sqrt{3})$ (ou encore $\ln(2-\sqrt{3})$ car $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$).

(b) Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Soit donc $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}) \Rightarrow \sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}))$$
$$\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1-(x\sqrt{2})^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{2-2x^2} =$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1-2x^2+2-2x^2+2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 4$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 1+4x^2$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4(4x^4-6x^2+2) = (4x^2+1)^2$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x, la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leqslant \frac{16}{64} = (\frac{1}{2})^2$) et $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mais,

$$0 \leqslant \arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin\sqrt{\frac{7}{16}} \leqslant 2\arcsin\sqrt{\frac{8}{16}} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De même, par parité, $\arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}) + \arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ ce qui achève la résolution.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\arcsin x$ existe si et seulement si $x \in [-1,1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1] \\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leqslant 1 \\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^4-4x^2+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } (2x^2-1)^2 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

Pour $x \in [-1,1]$, $\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus,
$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$

Correction de l'exercice 2463 ▲

Il faut prendre garde au fait que les nombres $x_k = \text{cotan}^2(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.

1er cas. Si n est pair, posons $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{p-1} \text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}) + \sum_{k=p}^{2p-1} \text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}) + \sum_{k=0}^{p-1} \text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{(2p-1-k)\pi}{2p})
\end{aligned}$$

Or, $\text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{(2p-1-k)\pi}{2p}) = \text{cotan}^2(\pi - \frac{\pi}{4p} - \frac{k\pi}{2p}) = \text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p})$ et donc $S_n = 2\sum_{k=0}^{p-1} \text{cotan}^2(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p})$.
Mais cette fois ci,

$$0 \leqslant k \leqslant p-1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p} \leqslant \frac{\pi}{4p} + \frac{(p-1)\pi}{2p} = \frac{(2p-1)\pi}{4p} < \frac{2p\pi}{4p} = \frac{\pi}{2}.$$

et comme, la fonction $x \mapsto \text{cotan}^2 x$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, les x_k, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, sont deux à deux distincts.
Pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$, posons $y_k = \text{cotan}(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p})$.

$$\begin{aligned}
y_k = i\frac{e^{(2k+1)i\pi/4p}+1}{e^{(2k+1)i\pi/4p}-1} &\Rightarrow e^{(2k+1)i\pi/4p}(y-k-i) = y_k + i \\
&\Rightarrow (y_k+i)^{2p} = e^{(2k+1)i\pi}(y_k-i)^{2p} = (-1)^{2k+1}(y_k-i)^{2p} = -(y_k-i)^{2p} \\
&\Rightarrow (y_k+i)^{2p} + (y_k-i)^{2p} = 0 \Rightarrow 2(y_k^{2p} - C_{2p}^2 y_k^{2p-2} + \ldots + (-1)^p) = 0 \\
&\Rightarrow x_k^p - C_{2p}^2 x_k^{p-1} + \ldots + (-1)^p = 0.
\end{aligned}$$

Les p nombres deux à deux distincts x_k sont racines de l'équation de degré p : $z^p - C_{2p}^2 z^{p-1} + ... + (-1)^p = 0$ qui est de degré p. On en déduit que

$$S_n = 2\sum_{k=0}^{p-1} x_k = 2C_{2p}^2 = n(n-1).$$

2ème cas. Si n est impair, posons $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{p-1} \text{cotan}^2(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}) + \text{cotan}^2 \frac{\pi}{2} + \sum_{k=p+1}^{2p} \text{cotan}^2(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}) \\ &= 2\sum_{k=0}^{p-1} \text{cotan}^2(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}) \end{aligned}$$

La même démarche amène alors à $S_n = 2C_{2p+1}^2 = n(n-1)$.
Dans tous les cas,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{cotan}^2(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}) = n(n-1).$$

Correction de l'exercice 2464 ▲

Posons $I_0 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ et enfin $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Pour $x \in D$, posons $f(x) = \tan x - x$. La fonction f est dérivable sur D et pour $x \in D$, $f'(x) = \tan^2 x$. La fonction f est ainsi strictement croissante sur chaque I_n et s'annule donc au plus une fois dans chaque I_n.
$f(0) = 0$ et donc f s'annule exactement une fois dans I_0 en $x_0 = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur I_n et de plus $f\left(\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+\right) \times f\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-\right) = -\infty \times +\infty < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois dans I_n et donc exactement une fois dans I_n.
L'équation $\tan x = x$ admet donc dans chaque intervalle I_n, $n \in \mathbb{N}$, une et une seule solution notée x_n. De plus, $\forall n \geqslant 1$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc $x_n \in]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.
Pour $n \geqslant 1$, $n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$ et donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ puis $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$ et même

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + O(1).$$

Ensuite, puisque $x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$, $x_n - n\pi = \arctan(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$. Donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Posons $y_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Alors d'après ce qui précède, $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. De plus, l'égalité $\tan(x_n) = x_n$ fournit $\tan(n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n$ ou encore

$$n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n = -\text{cotan}(y_n).$$

Puisque $y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, on obtient $n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{y_n}$ ou encore $y_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons $z_n = y_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. D'après ce qui précède, $\tan\left(-\frac{1}{n\pi} + z_n\right) = -\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + z_n}$ et aussi $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. On en déduit que

$$z_n = \frac{1}{n\pi} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+z_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Correction de l'exercice 2465 ▲

1ère solution. Soit $z\in\mathbb{C}$. Posons $z = x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $1+\frac{r}{n} = r_n e^{i\theta}$ où $r_n \geqslant 0$ et $\theta_n \in]-\pi,\pi]$ de sorte que

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = r_n^n\, e^{in\theta_n}.$$

Puisque $1+\frac{z}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, pour n assez grand on a $r_n > 0$ et $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Mais alors pour n assez grand

$$r_n = \sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right).$$

Maintenant, $r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(x+o(1))$ et donc r_n^n tend vers e^x quand n tend vers $+\infty$.

Ensuite $n\theta_n \underset{n\to+\infty}{=} n\arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\arctan\left(\frac{y}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} y+o(1)$ et donc $n\theta_n$ tend vers y quand n tend vers $+\infty$.

Finalement, $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = r_n^n\, e^{in\theta_n}$ tend vers $e^x\times e^{iy} = e^z$.

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.}$$

2ème solution. Le résultat est connu quand z est réel. Soit $z\in\mathbb{C}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^n\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right)z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^n\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right||z|^k.$$

Maintenant, $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{\overbrace{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{n\times n\times\ldots\times n}_{k}}\right) \geqslant 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^n\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right||z|^k = \sum_{k=0}^n\frac{|z|^k}{k!} - \left(1+\frac{|z|^n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{|z|}-e^{|z|} = 0.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^n\frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et puisque $\sum_{k=0}^n\frac{z^k}{k!}$ tend vers e^z quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Correction de l'exercice 2466 ▲

Posons $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$ pour tout $x>0$. La fonction f est dérivable, et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\frac{2}{2x^3}}{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}\\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(1+x)^2+x^2} + \frac{1}{x^2+(x-1)^2}\\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{-(x^2+(x-1)^2)+((1+x)^2+x^2)}{((1+x)^2+x^2)(x^2+(x-1)^2)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi f est une fonction constante. Or $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \arctan 0 - \arctan 1 + \arctan 1 = 0$. Donc la constante vaut 0, d'où l'égalité cherchée.
Alors :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \quad \text{(par l'identité prouvée)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \sum_{k'=0}^{n-1} \arctan\left(\frac{k'}{k'+1}\right) \quad \text{(en posant } k' = k-1\text{)} \\
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{0}{0+1}\right) \quad \text{(les sommes se simplifient)} \\
&= \arctan\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad (\text{car } \tfrac{n}{n+1} = 1 - \tfrac{1}{n+1})
\end{aligned}$$

Ainsi $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 2467 ▲

(a) Si $x > 0$, alors $\frac{y}{x}$ est bien défini et $\arctan \frac{y}{x}$ aussi. Comme $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a bien $\frac{y}{x} = \tan\theta$. Puisque par hypothèse $\theta \in]-\pi, \pi]$ et que l'on a supposé $x > 0$, alors $\cos\theta > 0$. Cela implique $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\theta = \arctan(\tan\theta) = \arctan\frac{y}{x}$. (Attention ! Il est important d'avoir $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour considérer l'identité $\arctan(\tan\theta) = \theta$.)

(b) Si $\theta \in]-\pi, \pi[$ alors $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$. Or

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{1+\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

d'où $\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$.

(c) Remarquons que $z = x + iy$, supposé non nul, est un nombre réel négatif si et seulement si ($x = r\cos\theta < 0$ et $y = r\sin\theta = 0$), c'est-à-dire $\theta = \pi$. Par conséquent, dire que z n'est pas réel négatif ou nul signifie que $\theta \in]-\pi, \pi[$. On a alors $x + \sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ (sinon, on aurait $\sqrt{x^2+y^2} = -x$ et donc $y = 0$ et $x \leqslant 0$) et

$$\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta + r} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}.$$

Par la question précédente :

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Correction de l'exercice 2469 ▲

(a) Si f existe alors pour $x = 1$ on a $f(\operatorname{ch} 1) = e$ et pour $x = -1$ on a $f(\operatorname{ch} -1) = f(\operatorname{ch} 1) = 1/e$. Une fonction ne peut prendre deux valeurs différentes au même point (ici $t = \operatorname{ch} 1$).

(b) Notons $X = e^x$, l'équation devient

$$f(X) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

Comme la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, alors l'unique façon de définir f sur $]0, +\infty[$ est par la formule $f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$.

(c) Comme e^x est toujours non nul, alors f peut prendre n'importe quelle valeur en 0. $f(0) = c \in \mathbb{R}$ et $f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$ pour $t > 0$. Il y a une infinité de solutions. Mais aucune de ces solutions n'est continue car la limite de $f(t)$ quand $t > 0$ et $t \to 0$ est $+\infty$.

Correction de l'exercice 2470 ▲

(a) Par la formule du binôme de Newton nous avons $\operatorname{ch}^3 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x}\right)$. Et de même $\operatorname{sh}^3 x = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}\right)$. Donc $e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) = \frac{1}{8}e^{-x}(6e^x + 2e^{-3x}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x}$ qui tend vers $\frac{3}{4}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) $x - \ln(\operatorname{ch} x) = x - \ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2}) = x - \ln(e^x + e^{-x}) + \ln 2 = x - \ln(e^x(1 + e^{-2x})) + \ln 2 = x - x + \ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2 = \ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2$. Lorsque $x \to +\infty$, $\ln(1 + e^{-2x}) \to 0$ donc $x - \ln(\operatorname{ch} x) \to \ln 2$.

Correction de l'exercice 2475 ▲

(a) i. Remarquons d'abord que, par construction, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, t est donc dans le domaine de définition de la fonction tan. En prenant la tangente de l'égalité $t = \arctan(\operatorname{sh} x)$ on obtient directement $\tan t = \tan\left(\arctan(\operatorname{sh} x)\right) = \operatorname{sh} x$.

ii. Ensuite, $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1 + \tan^2\left(\arctan(\operatorname{sh} x)\right) = 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$. Or la fonction ch ne prend que des valeurs positives, et $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos t > 0$. Ainsi $\frac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x$.

iii. Enfin, $\sin t = \tan t \cdot \cos t = \operatorname{sh} x \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$.

(b) Puisque $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, donc $\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ est bien défini et strictement positif. Ainsi $y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ est bien défini.
Ensuite :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} y &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{-\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

car $\sin(2u) = 2\cos u \sin u$ et $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$.
Enfin, puisque $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ et $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$, on a $\operatorname{sh} y = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t = \operatorname{sh} x$. Puisque la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit $y = x$. Conclusion : $x = y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Correction de l'exercice 2484 ▲

(a) Soit $f(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$ alors $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $f(0) = 0$ alors $f(x) > f(0) = 0$ pour $x > 0$. Ce qui donne l'inégalité recherchée.

(b) De même avec $g(x) = e^x - x - 1$, $g'(x) = e^x - 1$. Sur $[0, +\infty[$ $g'(x) \geqslant 0$ et g est croissante sur $]-\infty, 0]$, $g'(x) \leqslant 0$ et g est décroissante. Comme $g(0) = 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 2487 ▲

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y\ln x} = e^{x\ln y} \Leftrightarrow y\ln x = x\ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

(la fonction exponentielle est bijective). Etudions la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

donc f est croissante sur $[1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Donc pour $z \in]0, f(e)[=]0, 1/e[$, l'équation $f(x) = z$ a exactement deux solutions, une dans $]1, e[$ et une dans $]e, +\infty[$.

Revenons à l'équation $x^y = y^x$ équivalente à $f(x) = f(y)$. Prenons y un entier, nous allons distinguer trois cas : $y = 1$, $y = 2$ et $y \geqslant 3$. Si $y = 1$ alors $f(y) = z = 0$ on doit donc résoudre $f(x) = 0$ et alors $x = 1$. Si $y = 2$ alors il faut résoudre l'équation $f(x) = \frac{\ln 2}{2} \in]0, 1/e[$. Alors d'après l'étude précédente, il existe deux solutions une sur $]0, e[$ qui est $x = 2$ (!) et une sur $]e, +\infty[$ qui est 4, en effet $\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$. Nous avons pour l'instant les solutions correspondant à $2^2 = 2^2$ et $2^4 = 4^2$.

Si $y \geqslant 3$ alors $y > e$ donc il y a une solution x de l'équation $f(x) = f(y)$ dans $]e, +\infty[$ qui est $x = y$, et une solution x dans l'intervalle $]1, e[$. Mais comme x est un entier alors $x = 2$ (c'est le seul entier appartenant à $]1, e[$) c'est un cas que nous avons déjà étudié conduisant à $4^2 = 2^4$.

Conclusion : les couples d'entiers qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ sont les couples $(x, y = x)$ et les couples $(2, 4)$ et $(4, 2)$.

Correction de l'exercice 2489 ▲

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}a\operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b & \text{et} & \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}a\operatorname{ch}b - \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b, \\ \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b + \operatorname{ch}a\operatorname{sh}b & \text{et} & \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b - \operatorname{sh}b\operatorname{ch}a \\ \operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{1+\operatorname{th}a\operatorname{th}b} & \text{et} & \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th}a-\operatorname{th}b}{1-\operatorname{th}a\operatorname{th}b}. \end{array}}$$

Deux démonstrations :

$$\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b = \frac{1}{4}((e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})) = \frac{1}{2}(e^{a+b} + e^{-a-b}) = \operatorname{ch}(a+b).$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b + \operatorname{sh}b\operatorname{ch}a}{\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b} = \frac{\operatorname{th}a + \operatorname{th}b}{1 + \operatorname{th}a\operatorname{th}b}$$

après division du numérateur et du dénominateur par le nombre non nul $\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b$. En appliquant à $a = b = x$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + sh^2 x = 2ch^2 x - 1 = 2sh^2 x + 1,\ \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x \text{ et } \operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2 x}.}$$

En additionnant entre elles les formules d'addition, on obtient les formules de linéarisation :

$$\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)),\ \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)) \text{ et } \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)),$$

et en particulier

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2} \text{ et } \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{2}.$$

Correction de l'exercice 2490 ▲

• Pour tout réel x, $\operatorname{ch}x > 0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \operatorname{sh} x \frac{1}{\operatorname{ch} x} - 1 = \operatorname{th} x - 1 < 0.$$

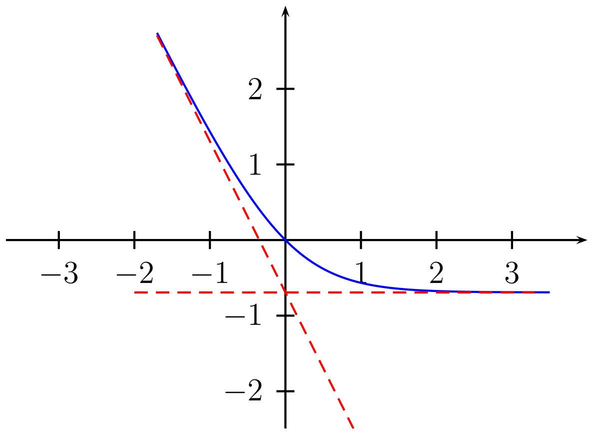
f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. • Etude en $-\infty$. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Cherchons une éventuelle droite asymptote.

$f(x) = \ln \frac{e^x+e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x+e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^{-x}) - x - \ln 2 + \ln(1+e^{2x}) = -2x - \ln 2 + \ln(1+e^{2x})$.

Donc, $f(x) - (-2x - \ln 2) = \ln(1+e^{2x})$. Or, d'une part $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{2x}) = 0$ et donc la droite (D) d'équation $y = -2x - \ln 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et d'autre part, pour tout réel x, $\ln(1+e^{2x}) > 0$ et la courbe représentative de f est strictement au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. • Etude en $+\infty$.

$f(x) = \ln \frac{e^x+e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x+e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^x) - x - \ln 2 + \ln(1+e^{-2x}) = -\ln 2 + \ln(1+e^{-2x})$

et f tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$. • Graphe.



Correction de l'exercice 2491 ▲

Soit x un réel.

$$S = \sum_{k=1}^{100} \operatorname{sh}(2+kx) = \frac{1}{2}\left(e^2 \sum_{k=1}^{100} e^{kx} - e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{-kx}\right).$$

Si $x = 0$ alors directement $S = 100 \operatorname{sh} 2 \neq 0$. Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$. Dans ce cas,

$$S = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2} e^{-x} \frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} + e^{-2} \frac{1-e^{-100x}}{1-e^x}\right).$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par e^x. Pour $x \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} S = 0 &\Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2}(1-e^{-100x}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2-100x}(e^{100x}-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-e^{100x})(e^{x+2} - e^{-100x-2}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2} \text{ (car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x+2 = -100x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{101}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{4}{101}\right\}.}$$

Correction de l'exercice 2492 ▲

On a vu au 2489 que pour tout réel x, $\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\frac{1+\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th} x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou encore $\operatorname{th} x + \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.}$$

Soient n un entier naturel non nul et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

Ensuite, pour $x > 0$, $\operatorname{th}(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Correction de l'exercice 2493 ▲

Par définition des fonctions ch et sh, on a

$$\begin{aligned} 2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x) &= 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2} \\ &= 1 + e^{-2x} \end{aligned}$$

Et en utilisant les deux relations $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(e^x) = x$ on calcule :

$$\begin{aligned} x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2 &= x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \ln 2 \\ &= x - \ln(e^x + e^{-x}) + \ln 2 - \ln 2 \\ &= x - \ln\left(e^x(1 + e^{-2x})\right) \\ &= x - \ln(e^x) - \ln(1 + e^{-2x}) \\ &= x - x - \ln(1 + e^{-2x}) \\ &= -\ln(1 + e^{-2x}) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2} = -\frac{1 + e^{-2x}}{\ln(1 + e^{-2x})}$$

C'est une expression de la forme $-\frac{u}{\ln u}$ avec $u = 1 + e^{-2x}$:

— si $x \to +\infty$, alors $u \to 1^+$, $\frac{1}{\ln u} \to +\infty$ donc $-\frac{u}{\ln u} \to -\infty$;

— si $x \to -\infty$, alors $u \to +\infty$ donc d'après les relations de croissances comparées, $-\frac{u}{\ln u} \to -\infty$.

Correction de l'exercice 2494 ▲

Puisque $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$, les expressions $C_n + S_n = \sum_{k=1}^n e^{kx}$ et $C_n - S_n = \sum_{k=1}^n e^{-kx}$ sont des sommes de termes de suites géométriques, de raison respectivement e^x et e^{-x}.

Si $x = 0$, on a directement $C_n = \sum_{k=1}^n 1 = n$ et $S_n = \sum_{k=1}^n 0 = 0$.

Supposons $x \neq 0$, alors $e^x \neq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
C_n + S_n &= \sum_{k=1}^{n} e^{kx} = \frac{e^x - e^{(n+1)x}}{1-e^x} \\
&= e^x \frac{1-e^{nx}}{1-e^x} \\
&= e^x \frac{e^{\frac{nx}{2}}(e^{-\frac{nx}{2}} - e^{\frac{nx}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}})} \\
&= e^{\frac{(n+1)x}{2}} \frac{e^{\frac{nx}{2}} - e^{-\frac{nx}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \\
&= e^{\frac{(n+1)x}{2}} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

De même $C_n - S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$; c'est donc la même formule que ci-dessus en remplaçant x par $-x$. Ainsi :

$$C_n - S_n = e^{-\frac{(n+1)x}{2}} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

En utilisant $C_n = \frac{(C_n+S_n)+(C_n-S_n)}{2}$ et $S_n = \frac{(C_n+S_n)-(C_n-S_n)}{2}$, on récupère donc

$$C_n = \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} + e^{-\frac{(n+1)x}{2}}}{2} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{ch}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

$$S_n = \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-(n+1)\frac{x}{2}}}{2} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

Correction de l'exercice 2495 ▲

$$\begin{aligned}
(S) \begin{cases} \operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}(y) = 2a \\ \operatorname{sh}(x)+\operatorname{sh}(y) = 2b \end{cases} &\iff \begin{cases} e^x + e^{-x} + e^y + e^{-y} = 4a \\ e^x - e^{-x} + e^y - e^{-y} = 4b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} e^x + e^y = 2a+2b \\ e^x - e^{-x} + e^y - e^{-y} = 4b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} e^x + e^y = 2a+2b \\ -e^{-x} - e^{-y} = 2b-2a \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} e^x + e^y = 2(a+b) \\ \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^y} = 2(a-b) \end{cases}
\end{aligned}$$

ce qui donne, en posant $X = e^x$ et $Y = e^y$:

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} X+Y = 2(a+b) \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = 2(a-b) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X+Y = 2(a+b) \\ \frac{X+Y}{XY} = 2(a-b) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X+Y = 2(a+b) \\ \frac{2(a+b)}{XY} = 2(a-b) \end{cases}
\end{aligned}$$

Or $a \neq b$ puisque par hypothèse, $a^2 - b^2 = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} X+Y = 2(a+b) \\ XY = \frac{a+b}{a-b} \end{cases} \\
&\iff X \text{ et } Y \text{ sont les solutions de } z^2 - 2(a+b)z + \frac{a+b}{a-b} = 0
\end{aligned}$$

Remarque : On rappelle que si X, Y vérifient le système $\begin{cases} X+Y=S \\ XY=P \end{cases}$, alors X et Y sont les solutions de l'équation $z^2-Sz+P=0$.

Or le discriminant du trinôme $z^2-2(a+b)z+\frac{a+b}{a-b}=0$ vaut

$$\Delta = 4(a+b)^2-4\frac{a+b}{a-b} = 4(a+b)\left(a+b-\frac{1}{a-b}\right) = \frac{4(a+b)(a^2-b^2-1)}{a-b} = 0$$

Il y a donc une racine double qui vaut $\frac{2(a+b)}{2}$, ainsi $X=Y=a+b$ et donc :

$$(S) \iff e^x = e^y = a+b$$

On vérifie que $a+b \geqslant 0$ (car $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$) et $a+b \neq 0$ (car $a^2-b^2=1$). Conclusion : le système (S) admet une unique solution, donnée par $\big(x=\ln(a+b), y=\ln(a+b)\big)$.

Correction de l'exercice 2496 ▲

(a) i. On sait que $\operatorname{ch}^2 u = 1+\operatorname{sh}^2 u$. Comme de plus la fonction ch est à valeurs positives, $\operatorname{ch} u = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}$ et donc $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh} x)} = \sqrt{1+x^2}$.

ii. Alors
$$\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x) = \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

iii. Et $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x) = 2\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = 2x\sqrt{1+x^2}$.

(b) On pourrait, comme pour la question précédente, appliquer les formules trigonométriques hyperboliques. Pour changer, on va plutôt utiliser les expressions explicites des fonctions hyperboliques réciproques. Supposons $x \geqslant 1$, pour que $\operatorname{argch} x$ soit bien défini, alors on a la formule (à connaître) :

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) &= \frac{e^{\operatorname{argch} x} - e^{-\operatorname{argch} x}}{2} \\
&= \frac{x+\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2} \\
&= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)} \\
&= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\left(x^2-(x^2-1)\right)} \\
&= \sqrt{x^2-1}
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x) = \dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x)} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

Enfin, si $u = \operatorname{argch} x$: $\operatorname{ch}(3u) = \operatorname{ch}(2u+u) = \operatorname{ch}(2u)\operatorname{ch} u + \operatorname{sh}(2u)\operatorname{sh} u$, où

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(2u) = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u = x^2+(x^2-1) = 2x^2-1 \\ \operatorname{sh}(2u) = 2\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2x\sqrt{x^2-1} \end{cases}$$

Donc $\operatorname{ch}(3\operatorname{argch} x) = (2x^2-1)x + 2x\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1} = x(4x^2-3)$.

Correction de l'exercice 2497 ▲

La fonction argch est définie sur $[1,+\infty[$. Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 1 &\iff \frac{x^2+1}{x}\geqslant 2\\ &\iff \frac{x^2+1-2x}{x}\geqslant 0\\ &\iff \frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0\\ &\iff x>0\end{aligned}$$

donc f est définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $x>0$, alors $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 1$ et on sait que $\operatorname{argch} y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$. Ainsi $\sqrt{y^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{4x^2}-1}=\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}}=\left|\frac{x^2-1}{2x}\right|$, on obtient

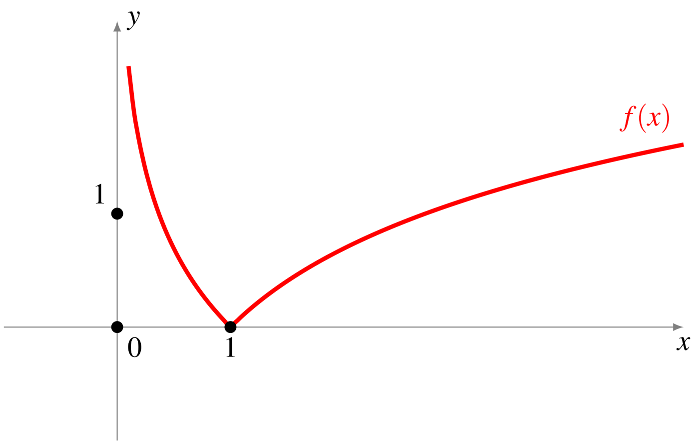
$$f(x)=\operatorname{argch} y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\left|\frac{x^2-1}{2x}\right|\right)$$

On a supposé $x>0$, il suffit donc de distinguer les cas $x\geqslant 1$ et $0<x\leqslant 1$.

— Si $x\geqslant 1$, $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\frac{x^2-1}{2x}\right)=\ln x$.

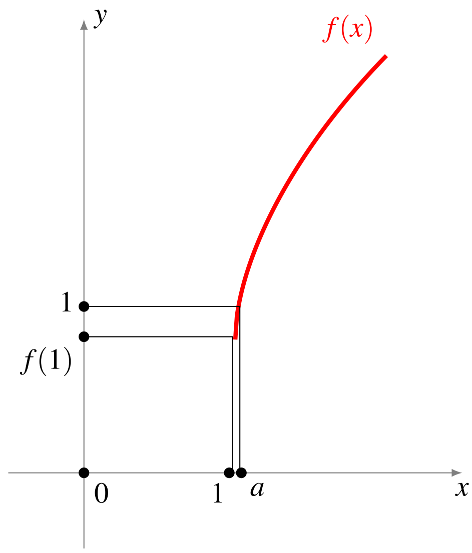
— Si $0<x\leqslant 1$, $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\frac{1-x^2}{2x}\right)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$.

Puisque $\ln x$ est positif si $x\geqslant 1$ et négatif si $x\leqslant 1$, on obtient dans les deux cas $f(x)=|\ln x|$.



Correction de l'exercice 2498 ▲

Soit $f(x)=\operatorname{argsh} x+\operatorname{argch} x$. La fonction f est bien définie, continue, et strictement croissante, sur $[1,+\infty[$ (comme somme de deux fonctions continues strictement croissantes).



De plus, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc f atteint exactement une fois toute valeur de l'intervalle $[f(1),+\infty[$. Comme (par la formule logarithmique) $f(1) = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2}) < \ln(e) = 1$, on a $1 \in [f(1),+\infty[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, que l'on notera a.

Déterminons la solution :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} 1 &= \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a + \operatorname{argch} a) \\
&= \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a)\operatorname{ch}(\operatorname{argch} a) + \operatorname{sh}(\operatorname{argch} a)\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} a) \\
&= a^2 + \sqrt{a^2-1}\sqrt{a^2+1} = a^2 + \sqrt{a^4-1}
\end{aligned}$$

donc $\sqrt{a^4-1} = \operatorname{sh} 1 - a^2$. En élevant au carré et en simplifiant, on obtient $a^2 = \frac{1+\operatorname{sh}^2 1}{2\operatorname{sh} 1} = \frac{\operatorname{ch}^2 1}{2\operatorname{sh} 1}$. Comme on cherche a positif (et que $\operatorname{ch} 1 > 0$), on en déduit $a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2\operatorname{sh} 1}}$. Cette valeur est la seule solution possible de l'équation $f(x) = 1$, il faudrait normalement vérifier qu'elle convient bien, puisqu'on a seulement raisonné par implication (et pas par équivalence). Or on sait déjà que l'équation admet une unique solution : c'est donc nécessairement

$$a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2\operatorname{sh} 1}} = \frac{1}{2}\frac{e+\frac{1}{e}}{\sqrt{e-\frac{1}{e}}} = 1,0065\ldots.$$

Correction de **l'exercice 2525 ▲**

(a) On trouve $\int_0^4 f(t)\,dt = +7$. Il faut tout d'abord tracer le graphe de cette fonction. Ensuite la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de la fonction en un point, c'est-à-dire ici les valeurs en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ n'ont aucune influence sur l'intégrale. Ensuite on revient à la définition de $\int_0^4 f(t)\,dt$: pour la subdivision de $[0,4]$ définie par $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4\}$, on trouve la valeur de l'intégrale (ici le sup et l'inf sont atteints et égaux pour cette subdivision et toute subdivision plus fine). Une autre façon de faire est considérer que f est une fonction en escalier (en «oubliant» les accidents en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$) dont on sait calculer l'intégrale.

(b) C'est la même chose pour $\int_0^x f(t)\,dt$, mais au lieu d'aller jusqu'à 4 on s'arrête à x, on trouve

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3-2x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4x-9 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

(c) Les seuls points à discuter pour la continuité sont les points $x=1$ et $x=2$, mais les limites à droite et à gauche de F sont égales en ces points donc F est continue. Par contre F n'est pas dérivable en $x=1$ (les dérivées à droite et à gauche sont distinctes), F n'est pas non plus dérivable en $x=2$.

Correction de l'exercice 2526 ▲

Les fonctions sont continues donc intégrables !

(a) En utilisant les sommes de Riemann, on sait que $\int_0^1 f(x)dx$ est la limite (quand $n\to+\infty$) de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Notons $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Alors $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$. On a utilisé que la somme des entiers de 0 à $n-1$ vaut $\frac{n(n-1)}{2}$. Donc S_n tend vers $\frac{1}{2}$. Donc $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$.

(b) Même travail : $\int_1^2 g(x)dx$ est la limite de $S'_n=\frac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(1+k\frac{2-1}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2})$. En séparant la somme en trois nous obtenons : $S'_n=\frac{1}{n}(n+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k^2)=1+\frac{2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. Donc à la limite on trouve $S'_n\to 1+1+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$. Donc $\int_1^2 g(x)dx=7/3$. Remarque : on a utilisé que la somme des carrés des entiers de 0 à $n-1$ est $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

(c) Même chose pour $\int_0^x h(t)dt$ qui est la limite de $S''_n=\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{kx}{n})=\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{kx}{n}}=\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{x}{n}})^k$. Cette dernière somme est la somme d'une suite géométrique (si $x\neq 0$), donc $S''_n=\frac{x}{n}\frac{1-(e^{\frac{x}{n}})^n}{1-e^{\frac{x}{n}}}=\frac{x}{n}\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}}=(1-e^x)\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}$ qui tend vers e^x-1. Pour obtenir cette dernière limite on remarque qu'en posant $u=\frac{x}{n}$ on a $\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}=-1/\frac{e^u-1}{u}$ qui tend vers -1 lorsque $u\to 0$ (ce qui est équivalent à $n\to+\infty$).

Correction de l'exercice 2527 ▲

(a) On calcul d'abord $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt$. Par le théorème de Riemann-Darboux c'est la limite de

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot f(x_k).$$

Pour $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ (on obtient en fait un somme de Riemann) :

$$S_n=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{ik\pi}{2n}}=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{i\pi}{2n}})^k.$$

Ce qui est une somme géométrique de somme $S_n=(1-i)\frac{\frac{\pi}{2n}}{1-e^{i\frac{\pi}{2n}}}$. La limite de ce taux d'accroissement est $1+i$ (en posant $u=\frac{\pi}{2n}$ et en remarquant que $\frac{e^{iu}-1}{u}\to i$ quand $u\to 0$). Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt=1+i$. Mais $e^{it}=\cos t+i\sin t$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1+i$. Par identification des parties réelles et imaginaires on trouve : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=1$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1$.

(b) On veut $x_k=aq^k$ ce qui donne bien $x_0=a$, mais il faut aussi $x_n=b$ donc $aq^n=b$, donc $q^n=\frac{b}{a}$ soit $q=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$. Nous cherchons la limite de $S'_n=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot g(x_k)$. Il est n'est pas trop dur de montrer que $S'_n=n(q-1)$. Pour trouver la limite quand $n\to+\infty$ c'est plus délicat car q dépend de n : $S'_n=n(q-1)=n((\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}-1)=n(e^{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}}-1)$. En posant $u=\frac{1}{n}$ et en remarquant que l'on obtient un taux d'accroissement on calcule : $S'_n=\frac{1}{u}(e^{u\ln\frac{b}{a}}-1)\to\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a$. Donc $\int_a^b\frac{dt}{t}=\ln b-\ln a$.

(c) À l'aide des sommes géométrique est des taux d'accroissement on trouve

$$\int_a^b \alpha^t\,dt=\frac{e^{\alpha b}-e^{\alpha a}}{\alpha}.$$

Correction de l'exercice 2528 ▲

(a) Oui.

(b) Non.

(c) Non.

(d) Non.

Correction de l'exercice 2529 ▲

(a) Écrivons la continuité de f en x_0 avec $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on ait $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Avec notre choix de ε cela donne pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ que $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$. Pour évaluer $\int_a^b f(x)\,dx$ nous la coupons en trois morceaux par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Comme f est positive alors par positivité de l'intégrale $\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx \geqslant 0$ et $\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geqslant 0$. Pour le terme du milieu on a $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ donc $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}dx = 2\delta\frac{f(x_0)}{2}$ (pour la dernière équation on calcule juste l'intégrale d'une fonction constante !). Le bilan de tout cela est que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 2\delta\frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Donc pour une fonction continue et positive f, si elle est strictement positive en un point alors $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Par contraposition pour une fonction continue et positive si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ alors f est identiquement nulle.

(b) Soit f est tout le temps positive, soit elle tout le temps négative, soit elle change (au moins un fois) de signe. Dans le premier cas f est identiquement nulle par la première question, dans le second cas c'est pareil (en appliquant la première question à $-f$). Pour le troisième cas le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe c tel que $f(c) = 0$.

(c) Posons $g(x) = f(x) - x$. Alors $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \big(f(x) - x\big)dx = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} = 0$. Donc par la question précédente, g étant continue, il existe $d \in [0,1]$ tel que $g(d) = 0$, ce qui est équivalent à $f(d) = d$.

Correction de l'exercice 2530 ▲

Notons $I = \int_a^b \frac{f(t)^n}{m^n}dt$. Comme $f(t) \leqslant m$ pour tout $t \in [a,b]$ alors $I \leqslant 1$. Ceci implique que $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$. Fixons $\alpha > 0$ (aussi petit que l'on veut). Comme f est continue et m est sa borne supérieure sur $[a,b]$ alors il existe un intervalle $[x,y]$, $(x < y)$, sur le quel $f(t) \geqslant m - \alpha$. Comme f est positive alors

$$I \geqslant \int_x^y \frac{f(t)^n}{m^n}dt \geqslant \int_x^y \frac{(m-\alpha)^n}{m^n} = (y-x)\left(\frac{m-\alpha}{m}\right)^n$$

.

Donc $I^{\frac{1}{n}} \geqslant (y-x)^{\frac{1}{n}}\frac{m-\alpha}{m}$. Quand $n \to +\infty$ on a $(y-x)^{\frac{1}{n}} \to 1$, donc à la limite nous obtenons $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{m-\alpha}{m}$.

Comme α est quelconque, nous pouvons le choisir aussi proche de 0 de sorte que $\frac{m-\alpha}{m}$ est aussi proche de 1 que désiré. Donc $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$.

En conclusion nous trouvons que $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} = 1$ ce qui était l'égalité recherchée.

Correction de l'exercice 2531 ▲

Soit $\alpha > 0$ fixé. Soit $0 < x_0 < 1$ tel que pour tout $x \in [0, x_0]$, $f(x) \leqslant 1 - \alpha$. Ce x_0 existe bien car f est strictement croissante et $f(0)=0$, $f(1)=1$. Séparons l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^n(t)dt &= \int_0^{x_0} f^n(t)dt + \int_{x_0}^1 f^n(t)dt \\
&\leqslant \int_0^{x_0} (1-\alpha)^n dt + \int_{x_0}^1 1^n dt \\
&\leqslant x_0(1-\alpha)^n + (1-x_0) \\
&\leqslant (1-\alpha)^n + (1-x_0) \qquad \text{car } x_0 \leqslant 1
\end{aligned}$$

Soit maintenant donné un $\varepsilon > 0$, on choisit $\alpha > 0$ tel que $1-x_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (en remarquant que si $\alpha \to 0$ alors $x_0(\alpha) \to 1$), puis il existe n assez grand tel que $(1-\alpha)^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n assez grand tel que $\int_0^1 f^n(t)dt \leqslant \varepsilon$. Donc $\int_0^1 f^n(t)dt \to 0$.

Correction de l'exercice 2532 ▲

(a) Vrai.

(b) Vrai.

(c) Faux ! Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x)=x$ alors F est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.

(d) Faux. Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x)=x^2$ alors F est négative sur $]-\infty,0]$ et positive sur $[0,+\infty[$.

(e) Vrai.

(f) Faux. Faire le calcul avec la fonction $f(x)=1+\sin(x)$ par exemple.

(g) Vrai.

Correction de l'exercice 2533 ▲

(a) Commençons plus simplement avec la fonction

$$H(x) = \int_a^{v(x)} f(t)dt.$$

En fait H est la composition de la fonction $x \mapsto v(x)$ avec la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$:

$$H = G \circ v.$$

La fonction v est dérivable et la fonction G aussi (c'est une primitive) donc la composée $H = G \circ v$ est dérivable, de plus $H'(x) = v'(x) \cdot G'(v(x))$. En pratique comme $G'(x) = f(x)$ cela donne $H'(x) = v'(x)f(v(x))$.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de connaître cette formule mais il est important de savoir refaire ce petit raisonnement.

On montrerait de même que la fonction $x \to \int_{u(x)}^a f(t)dt$ est dérivable de dérivée $-u'(x)f(u(x))$.

Revenons à notre fonction $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \int_{u(x)}^a f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt$, c'est la somme de deux fonctions dérivables donc est dérivable de dérivée :

$$F'(x) = v(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

(b) On applique ceci à $u(x)=x$ et $v(x)=2x$ nous obtenons :

$$G'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2+(2x)^4} - \frac{1}{1+x^2+x^4}.$$

Correction de l'exercice 2534 ▲

(a) F est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. F est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Pour vois cela il suffit d'écrire $F(x)=\int_x^a \frac{dt}{\ln t}+\int_a^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$. La première de ces fonctions est continue et dérivable (c'est une primitive), la seconde est la composée de $x\mapsto x^2$ avec $x\mapsto \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$ et est donc aussi continue et dérivable. On pourrait même calculer la dérivée.

(b) Notons $f(t)=\frac{1}{\ln t}$ et $g(t)=\frac{1}{t\ln t}$. On se place sur $]1,+\infty[$. Bien évidemment $g(t)\leqslant f(t)$, mais nous avons aussi que pour $\varepsilon>0$ fixé il existe $x>1$ tel que pour tout $t\in[1,x^2]$ on ait $\frac{1}{t}\leqslant 1+\varepsilon$ donc sur $]1,x^2]$ nous avons $f(t)\leqslant(1+\varepsilon)g(t)$. Par intégration de l'inégalité $g(t)\leqslant f(t)\leqslant(1+\varepsilon)g(t)$ sur $[x,x^2]$ nous obtenons pour x assez proche de 1 :

$$H(x)\leqslant F(x)\leqslant(1+\varepsilon)H(x).$$

Il ne reste plus qu'a calculer $H(x)$. En fait $g(t)=\frac{1}{t\ln t}$ est la dérivée de la fonction $h(t)=\ln(\ln t)$. Donc

$$\begin{aligned}H(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}&=[\ln(\ln t)]_x^{x^2}=\ln(\ln(x^2))-\ln(\ln x)\\&=\ln(2\ln x)-\ln(\ln x)=\ln\frac{2\ln x}{\ln x}\\&=\ln 2.\end{aligned}$$

Nous obtenons alors, pour $\varepsilon>0$ fixé et $x>1$ assez proche de 1, l'encadrement

$$\ln 2\leqslant F(x)\leqslant(1+\varepsilon)\ln 2.$$

Donc la limite de $F(x)$ quand $x\to 1^+$ est $\ln 2$.

Correction de l'exercice 2541 ▲

(a)

(b)

(c) $\frac{1}{2}f(0)$.

Correction de l'exercice 2545 ▲

DL de $1-\cos u\Rightarrow \lim=\frac{1}{2}\ln(b/a)$.

Correction de l'exercice 2547 ▲

$$a_{n+1}=\begin{cases}b_n & \text{si } b_n<-1\\ -(b_n-1)^2/4 & \text{si } -1\leqslant b_n\leqslant 1\\ 0 & \text{si } b_n>1,\end{cases}$$

$$b_{n+1}=\begin{cases}0 & \text{si } a_n<-1\\ (a_n+1)^2/4 & \text{si } -1\leqslant a_n\leqslant 1\\ a_n & \text{si } a_n>1.\end{cases}$$

Donc $a_{n+1}=f(a_{n-1})$, $b_{n+1}=g(b_{n-1})$. Point fixe : $a_n\to\sqrt{8}-3$, $b_n\to 3-\sqrt{8}$.

Correction de l'exercice 2549 ▲

$\frac{\pi^2}{4}$.

Correction de l'exercice 2550 ▲

$u = \pi - t \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{1+\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_{t=-\pi/2}\pi/2\ \frac{1}{1+\cos t}\,dt = \pi.$

Correction de l'exercice 2552 ▲

f est continue sur le segment $[a,b]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Puisque f est strictement positive sur $[a,b]$, ce maximum est strictement positif.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n}$. Par croissance de l'intégrale, on a déjà

$$u_n \leqslant \left(\int_a^b M^n\,dx\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n},$$

(car $\forall x \in [a,b],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \forall x \in [a,b],\ (f(x))^n \leqslant M^n$ par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,+\infty[$).

D'autre part, par continuité de f en x_0 tel que $f(x_0) = M$, pour $\varepsilon \in]0,2M[$ donné, $\exists[\alpha,\beta] \subset [a,b]/\ \alpha < \beta$ et $\forall x \in [\alpha,\beta],\ f(x) \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on a alors

$$u_n \geqslant \left(\int_\alpha^\beta (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} \geqslant \left(\int_\alpha^\beta (M-\frac{\varepsilon}{2})^n\,dx\right)^{1/n} = (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}.$$

En résumé,

$$\forall \varepsilon \in]0,2M[,\ \exists(\alpha,\beta) \in [a,b]^2/\ \alpha < \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n} \leqslant u_n \leqslant M(b-a)^{1/n}.$$

Mais, $\lim_{n\to+\infty} M(b-a)^{1/n} = M$ et $\lim_{n\to+\infty}(M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n} = (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}$.

Par suite, $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \geqslant n_1,\ M(b-a)^{1/n} < M+\varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \geqslant n_2,\ (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n} > M-\varepsilon$.

Soit $n_0 = \mathrm{Max}\{n_1,n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $M-\varepsilon < u_n < M+\varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - M| < \varepsilon),$$

et donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n = M$.

Plus généralement, si g continue sur $[a,b]$, g admet un minimum m_1 et un maximum M_1 sur cet intervalle, tous deux strictement positifs puisque g est strictement positive. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$m_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n} \leqslant M_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right),$$

et comme d'après l'étude du cas $g=1$, on a $\lim_{n\to+\infty} m_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} M_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} = M$, le théorème de la limite par encadrements permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n} = M$. On a montré que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n} = \mathrm{Max}\{f(x),\ x \in [a,b]\}.$$

Correction de l'exercice 2553 ▲

(a) Soient m un réel strictement positif et, pour $t\in\mathbb{R}$, $f_m(t)=e^{mt}$. f_m est bien un élément de E et de plus,

$$\begin{aligned}\varphi(f_m)&=\frac{1}{m^2}(e^{mb}-e^{ma})(e^{-ma}-e^{-mb})\\&=\frac{1}{m^2}e^{m(a+b)/2}(e^{m(b-a)/2}+e^{-m(b-a)/2})e^{-m(a+b)/2}(e^{m(b-a)/2}+e^{-m(b-a)/2})\\&=\frac{4\,\mathrm{sh}^2(m(b-a)/2)}{m^2}.\end{aligned}$$

Cette expression tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$ et $\varphi(E)$ n'est pas majoré.

(b) Soit f continue et strictement positive sur $[a,b]$. L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ montre que :

$$\varphi(f)=\int_a^b\left(\sqrt{f(t)}\right)^2\,dt\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2\,dt\geqslant\left(\int_a^b\sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,dt\right)^2=(b-a)^2,$$

avec égalité si et seulement si la famille de fonctions $(\sqrt{f(t)},\frac{1}{\sqrt{f(t)}})$ est liée ou encore si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\ \forall t\in[a,b],\ \sqrt{f(t)}=\lambda\frac{1}{\sqrt{f(t)}}$ ou enfin si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\ \forall t\in[a,b],\ f(t)=\lambda$, c'est-à-dire que f est une constante strictement positive.

Tout ceci montre que $\varphi(E)$ admet un minimum égal à $(b-a)^2$ et obtenu pour toute fonction f qui est une constante strictement positive.

Correction de l'exercice 2554 ▲

(a) Soit $\varepsilon>0$ donné. Puisque f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe une subdivision $\sigma_1=\{a_0=a<a_1<\cdots<a_n=b\}$ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_f^{\sigma_1}\leqslant\underline{S}_f^{\sigma_1}+\frac{\varepsilon}{2}$. Puisque g est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe une subdivision $\sigma_2=\{b_0=a<b_1<\cdots<b_p=b\}$ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_g^{\sigma_2}\leqslant\underline{S}_g^{\sigma_2}+\frac{\varepsilon}{2}$. On note $\sigma_1\cup\sigma_2=\{c_0=a<c_1<\cdots<c_{q-1}<c_q=b\}$ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en ordonnant l'ensemble $\{a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_n\}$ par ordre croissant, puis en identifiant les points qui apparaissent plusieurs fois (on obtient une subdivision de $[a,b]$ en q intervalles avec $max\{n,p\}\leqslant q\leqslant n+p$). Puisque $\sigma_1\cup\sigma_2$ est une subdivision *plus fine* que σ_1, on a :

$$\overline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leqslant\overline{S}_f^{\sigma_1}\quad\text{et}\quad\underline{S}_f^{\sigma_1}\leqslant\underline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}.\tag{29}$$

De même,

$$\overline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leqslant\overline{S}_g^{\sigma_2}\quad\text{et}\quad\underline{S}_g^{\sigma_2}\leqslant\underline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}.\tag{30}$$

De plus, sur un intervalle $]c_{k-1},c_k[$ donné, on a :

$$\begin{aligned}\sup\{f(x)+g(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}&\leqslant\sup\{f(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}\\&\quad+\sup\{g(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\inf\{f(x)+g(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}&\geqslant\inf\{f(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}\\&\quad+\inf\{g(x),x\in]c_{k-1},c_k[\}.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leqslant\overline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}+\overline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2},\tag{31}$$

et

$$\underline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}+\underline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}\leqslant\underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}.\tag{32}$$

En utilisant les inégalités (46), (45), (31) et (32), il vient alors :

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \overline{S}_f^{\sigma_1} + \overline{S}_g^{\sigma_2} \leqslant \underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} + \varepsilon \leqslant \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} + \varepsilon.$$

D'après le théorème rappelé en introduction, on en déduit que $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De plus, de l'inégalité

$$\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} \leqslant \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2},$$

on déduit que

$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2}\left(\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2}\right) \leqslant \sup_{\sigma_1,\sigma_2} \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}.$$

Or

$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2}\left(\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2}\right) = \sup_{\sigma_1}\underline{S}_f^{\sigma_1} + \sup_{\sigma_2}\underline{S}_g^{\sigma_2} = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

et

$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2} \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} = \sup_{\sigma}\underline{S}_{f+g}^{\sigma} = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$

De même, l'inégalité

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \overline{S}_f^{\sigma_1} + \overline{S}_g^{\sigma_2}$$

implique $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. En conclusion, $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

(b) · Pour $\lambda = 0$ il n'y a rien a démontrer.
· Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda > 0$, alors pour tout subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}\inf\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\} &= \lambda \inf\{f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\}\\ \sup\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\} &= \lambda \sup\{f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \underline{S}_f^{\sigma}$ et $\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \overline{S}_f^{\sigma}$. On en déduit que

$$\sup_{\sigma}\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \sup_{\sigma}\underline{S}_f^{\sigma} = \lambda \int_a^b f(x)\,dx = \lambda \inf_{\sigma}\overline{S}_f^{\sigma} = \inf_{\sigma}\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma}.$$

En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.
· Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda < 0$, alors pour tout subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}\inf\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\} &= \lambda \sup\{f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\}\\ \sup\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\} &= \lambda \inf\{f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \overline{S}_f^{\sigma}$ et $\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \underline{S}_f^{\sigma}$. On en déduit que

$$\sup_{\sigma}\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \inf_{\sigma}\overline{S}_f^{\sigma} = \lambda \int_a^b f(x)\,dx = \lambda \sup_{\sigma}\underline{S}_f^{\sigma} = \inf_{\sigma}\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma}.$$

En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

(c) Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Soit $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. Alors

$$\inf\{f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\} \leqslant \inf\{g(x), x \in]a_{k-1},a_k[\}.$$

Il en découle que

$$\sup_{\sigma}\underline{S}_f^{\sigma} \leqslant \sup_{\sigma}\underline{S}_f^{\sigma},$$

c'est-à-dire $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

(d) Soit $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables, qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $N > 0$ tel que $\forall i > N$, $\sup_{[a,b]} |f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$. En particulier, $f_i(t) - \varepsilon < f(t) < f_i(t) + \varepsilon$. Pour un tel i, on en déduit que pour toute subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$, on a

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f \leqslant \sup_{]a_{k-1},a_k[} f_i + \varepsilon \quad \text{et} \quad \inf_{]a_{k-1},a_k[} f \geqslant \inf_{]a_{k-1},a_k[} f_i - \varepsilon$$

En particulier :

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f - \inf_{]a_{k-1},a_k[} f \leqslant \sup_{]a_{k-1},a_k[} f_i - \inf_{]a_{k-1},a_k[} f_i + 2\varepsilon.$$

Il en découle que :

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma \leqslant \overline{S}_{f_i}^\sigma - \underline{S}_{f_i}^\sigma + 2\varepsilon(b-a).$$

Comme f_i est Riemann-intégrable, d'après le théorème de l'introduction, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_{f_i}^\sigma - \underline{S}_{f_i}^\sigma \leqslant \varepsilon$. On en déduit que

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma \leqslant \varepsilon\left(1 + 2(b-a)\right),$$

ce qui implique que f est Riemann-intégrable.

Correction de l'exercice 2555 ▲

Soit f une fonction croissante $[a,b]$. Pour montrer que f est Riemann-intégrable, il suffit de trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, une subdivision de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma < \varepsilon$. Soit $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ la subdivision régulière de $[a,b]$, de pas $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. On a

$$\inf_{]a_{k-1},a_k[} f = f(a_{k-1}) \quad \text{et} \quad \sup_{]a_{k-1},a_k[} f = f(a_k).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})\left(f(a_k) - f(a_{k-1})\right) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(f(a_k) - f(a_{k-1})\right) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(b) - f(a)\right). \end{aligned}$$

Pour n assez grand, la subdivision régulière de $[a,b]$ satisfait $\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma < \varepsilon$. D'autre part, si g est décroissante, $f = -g$ est croissante, donc g est Riemann-intégrable par l'exercice précédent (question 2.) avec $\lambda = -1$.

Correction de l'exercice 2556 ▲

Une fonction f continue sur $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n > 0$ tel que

$$|x-y| < \left(\frac{b-a}{n}\right) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ la subdivision régulière de $[a,b]$, de pas $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. On a :

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f - \inf_{]a_{k-1},a_k[} f \leqslant 2\varepsilon.$$

Il vient alors :

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma \leqslant \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^n 2\varepsilon = (b-a)2\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure grâce au théorème de l'introduction que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 2557 ▲

(a) Considérons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a :

$$\overline{S}_f^\sigma = 1 \quad \text{et} \quad \underline{S}_f^\sigma = 0.$$

On en déduit que $1 = \sup_\sigma \overline{S}_f^\sigma \neq \inf_\sigma \underline{S}_f^\sigma = 0$, ce qui implique que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

(b) Considérons la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \end{cases}.$$

Pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a :

$$\underline{S}_g^\sigma = 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, la fonction g prend des valeurs supérieures à $\frac{\varepsilon}{b-a}$ en un nombre fini de points seulement (les points $\frac{k}{q}$, avec $\frac{1}{q} > \frac{\varepsilon}{b-a}$ ce qui équivaut à $q < \frac{b-a}{\varepsilon}$). Notons x_i, $i = 1, \dots, p$ ces points ordonnés par ordre (strictement) croissant.

Sur $[0,1] \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ la fonction g prend des valeurs $\leqslant \varepsilon$ et $\geqslant 0$. Ainsi avec la subdivision $\sigma = \{x_1, \dots, x_p\}$ nous obtenons :

$$0 \leqslant \overline{S}_g^\sigma \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Comme On en conclut que g est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 2558 ▲

cf André Gramain, *Intégration*, p. 7, Hermann (1998).

Correction de l'exercice 2559 ▲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Pour tout $x \in]0,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} ne^{-nx} = 0$. On en déduit que la suite de fonctions f_n converge ponctuellement (ou *simplement*) vers la fonction identiquement nulle $f \equiv 0$. On a $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ mais

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - e^{-n},$$

et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0,1]$, car pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sup_{]0, -\frac{1}{n}\log\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)[} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

Correction de l'exercice 2560 ▲

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann.

Notons $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 1, \dots, n$ les points où

Soit $a_0 = a$, $a_{n+1} = b$ et $a_k = a + \frac{2k+1}{2n}$ pour $k = 1, \dots, n$.
Considérons la subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_k < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$. Cette subdivision est presque régulière, seul le premier intervalle et le dernier ont des longueurs différentes. Pour $k = 1, \dots, n-1$, x_k est le milieu de $]a_k, a_{k+1}[$.
Notons $m_k = \inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$ et $M_k = \sup\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$.
Donc pour $k = 1, \dots, n-1$ on a $m_k \leqslant f(x_k) \leqslant M_k$. Mais il faut aussi tenir compte de $f(x_n) = f(b)$ et des premiers et derniers intervalles. D'où pour la minoration :

$$\underline{S}_f^\sigma = (m_0 + m_n)\frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant (m_0 + m_n)\frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k).$$

Cela donne

$$\underline{S}_f^\sigma - (m_0 + m_n + 2f(b))\frac{b-a}{2n} \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Quand n tend vers $+\infty$ on trouve que $\underline{S}_f^\sigma \to \int_a^b f$ et $(m_0 + m_n + 2f(b))\frac{b-a}{2n} \to 0$ cela donne l'inégalité :

$$\int_a^b f \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

La somme $\overline{S}_f^\sigma$ conduit de manière similaire à l'inégalité inverse, d'où :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

On a :

$a)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n} = -\log(\cos 1)$ $\qquad$ $b)$ $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$

$c)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} = -2\ln 2 + 1.$

Correction de **l'exercice 2561 ▲**

(a)

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_a^b f(a+b-x)(a+b-x)'dx$$

$$= -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

où $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, $\varphi(x) = a+b-x$ est une fonction de classe C^1.

(b) $a)$

$$I := \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

où $\varphi : [0,\pi] \to [-1,1]$, $\varphi(x) = \cos x$ est une fonction de classe C^1.

b)

$$J := \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx = \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx = \frac{\pi}{4}\log 2 - J$$

d'où la valeur de l'intégrale est $J = \frac{\pi}{8}\log 2$.

Correction de l'exercice 2568 ▲

(a) Soit

$$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n convergeant vers $\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

(b) Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $I = \int_0^1 g(x)dx$. Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\ &= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\ &= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \ln 2 - 2\left[x - \arctan x\right]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Correction de l'exercice 2569 ▲

(a)

(b) $\ln k$.

(c) $\frac{\pi}{8}$.

(d) $\frac{4}{e}$.

(e) $\frac{1}{3}\int_{t=0}^{3\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = \int_{t=0}^{\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

(f) $\frac{4}{3}n\sqrt{n}$.

(g) $\frac{4}{\pi}$.

Correction de l'exercice 2572 ▲

(a)

(b) $\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 2574 ▲

(a) Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = x^2\sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0,1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx)\\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi})\\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.\end{aligned}$$

(b) On peut avoir envie d'écrire :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}(\ln(a+k) - \ln k)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{a}{k}).$$

La suite de nombres a, $\frac{a}{2}$,..., $\frac{a}{n}$ « est une subdivision (à pas non constant) de $[0,a]$ » mais malheureusement son pas $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On n'est pas dans le même type de problèmes.

Rappel. (exo classique) Soit v une suite strictement positive telle que la suite $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ tend vers un réel positif ℓ, alors la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tend encore vers ℓ.

Posons $v_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$ puis $u_n = \sqrt[n]{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n+1}{n+1} \to 1,$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(c) Encore une fois, ce n'est pas une somme de RIEMANN. On tente un encadrement assez large : pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)$\times$nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\frac{3n+1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{3n+1}{2n}$. Or, $\frac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\frac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

(d) Tout d'abord

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$. u_n est donc effectivement une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0,1[$.

Puisque f est croissante sur $[0,1[$, pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$, on a $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, et pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(1-\frac{1}{n}),$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ &= \arcsin(1-\frac{1}{n}) - \arcsin\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, et donc u_n tend vers $\frac{\pi}{2}$.

(e) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\sqrt{k}-1 \leqslant E(\sqrt{k}) \leqslant \sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et la somme de RIEMANN $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ tend vers $\int_0^1\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

(f) $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$ tend vers $\int_0^1\frac{x^2}{8x^3+1}\,dx = \left[\frac{1}{24}\ln|8x^3+1|\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$.

(g) $u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\frac{2k+1}{n}}$ tend vers $\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{2+x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \ln 2$.

(h) Soit $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ si $x>0$ et 0 si $x=0$. f est continue sur $[0,1]$ (théorèmes de croissances comparées). Donc, $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f(x)\,dx$. Pour $x\in[0,1]$, posons $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, F l'est et

$$\int_0^1 f(x)\,dx=F(0)=\lim_{x\to 0,\,x>0}F(x)=\lim_{x\to 0,\,x>0}\left[e^{-1/t}\right]_x^1=\lim_{x\to 0,\,x>0}(e^{-1}-e^{-1/x})=\frac{1}{e}.$$

Donc, u_n tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 2575 ▲

Supposons f de classe C^2 sur $[0,1]$. Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_n=\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})=\sum_{k=0}^{n-1}(\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,dt-\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}))=\sum_{k=0}^{n-1}(F(\frac{k+1}{n})-F(\frac{k}{n})-\frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})).$$

f est de classe C^2 sur le segment $[0,1]$. Par suite, $F^{(3)}=f''$ est définie et bornée sur ce segment. En notant M_2 la borne supérieure de $|f''|$ sur $[0,1]$, l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 3 appliquée à F sur le segment $[0,1]$ fournit

$$\left|F(\frac{k+1}{n})-F(\frac{k}{n})-\frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})-\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})\right|\leqslant\frac{(1/n)^3M_2}{6},$$

et donc,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n})-F(\frac{k}{n})-\frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})-\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})]\right|&\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|F(\frac{k+1}{n})-F(\frac{k}{n})-\frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})-\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1/n)^3M_2}{6}=\frac{M_2}{6n^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n})-F(\frac{k}{n})-\frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})-\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})]=O(\frac{1}{n^2})$, ou encore $\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n})-F(\frac{k}{n})-\frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})-\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})]=o(\frac{1}{n})$, ou enfin,

$$u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})+o(\frac{1}{n}).$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})=\frac{1}{2n}.\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n}).$$

Or, la fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$. Par suite, la somme de RIEMANN $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f'(t)\,dt=f(1)-f(0)$ et donc

$$\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n})=\frac{1}{2n}(f(1)-f(0)+o(1))=\frac{f(1)-f(0)}{2n}+o(\frac{1}{n}).$$

Finalement,

$$\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})=\frac{f(1)-f(0)}{2n}+o(\frac{1}{n}).$$

Correction de l'exercice 2576 ▲

$S = \dfrac{\pi}{(1-\lambda^2)^{3/2}}$.

Correction de l'exercice 2577 ▲

$L = \dfrac{3\pi a}{2}, \quad A_1 = \dfrac{5\pi - 9\sqrt{3}}{32} a^2, \quad A_2 = \dfrac{5\pi + 18\sqrt{3}}{32} a^2.$

Correction de l'exercice 2578 ▲

$A = 4\pi^2 Rr, \quad V = 2\pi^2 Rr^2.$

Correction de l'exercice 2579 ▲

$L = 8R, \quad A = 3\pi R^2, \quad V_1 = 5\pi^2 R^3, \quad V_2 = 6\pi^3 R^3, \quad A_1 = \dfrac{64\pi R^2}{3}, \quad A_2 = 16\pi^2 R^2.$

Correction de l'exercice 2580 ▲

$L = 8(n+1)r = 8\dfrac{n+1}{n}R, \quad A = \pi(n+1)(n+2)r^2 = \pi\dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2}R^2, \quad S = \dfrac{128\pi R^2}{5}, \quad V = \dfrac{64\pi R^3}{3}.$

Correction de l'exercice 2581 ▲

$L = 4R\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right).$

Correction de l'exercice 2582 ▲

$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{\pi}{2}R^2.$

Correction de l'exercice 2583 ▲

La courbe d'équation $y = x^2/2$ est une parabole, la courbe d'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$ est une courbe en cloche. Dessinez les deux graphes. Ces deux courbes délimitent une région dont nous allons calculer l'aire. Tout d'abord ces deux courbes s'intersectent aux points d'abscisses $x = +1$ et $x = -1$: cela se devine sur le graphique puis se vérifie en résolvant l'équation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.

Nous allons calculer deux aires :

— L'aire $\mathscr{A}_1$ de la région sous la parabole, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $(x = -1)$ et $(x = +1)$. Alors

$$\mathscr{A}_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}.$$

— L'aire $\mathscr{A}_2$ de la région sous la cloche, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $(x = -1)$ et $(x = +1)$. Alors

$$\mathscr{A}_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}.$$

— L'aire $\mathscr{A}$ sous la cloche et au-dessus de la parabole vaut maintenant

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Correction de [**l'exercice 2588** ▲]

Calculons seulement un quart de l'aire : la partie du quadrant $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Pour ce quadrant les points de l'ellipse ont une abscisse x qui vérifie $0 \leqslant x \leqslant a$. Et la relation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ donne $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Nous devons donc calculer l'aire sous la courbe d'équation $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équations $(x=0)$ et $(x=a)$ (faites un dessin !).

Cette aire vaut donc : $\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$. Nous allons calculer cette intégrale à l'aide du changement de variable $x=a\cos u$ qui donne $dx=-a\sin u du$. La variable x variant de $x=0$ à $x=a$ alors la nouvelle variable u varie du $u=\frac{\pi}{2}$ (pour lequel on a bien $a\cos\frac{\pi}{2}=0$) à $u=\frac{\pi}{2}$ (pour lequel on a bien $a\cos 0=a$). Autrement dit la fonction $u\mapsto a\cos u$ est une bijection de $[\frac{\pi}{2},0]$ vers $[0,a]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sqrt{1-\cos^2 u}(-a\sin u du) \qquad \text{en posant } x=a\cos u\\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin u(-a\sin u du)\\
&= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du\\
&= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2u)}{2} du\\
&= ab\left[\frac{u}{2}-\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{\pi ab}{4}
\end{aligned}$$

L'aire d'un quart d'ellipse est donc $\frac{\pi ab}{4}$.
Conclusion : l'aire d'une ellipse est πab, où a et b sont les longueurs des demi-axes. Si $a=b=r$ on retrouve que l'aire d'un disque de rayon r est πr^2.

Correction de [**l'exercice 2600** ▲]

(a) On pose $t=\frac{1}{x}$ et donc $x=\frac{1}{t}$ et $dx=-\frac{1}{t^2}\,dt$. On obtient

$$I=\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = -\int_a^{1/a}\frac{\ln(1/t)}{\frac{1}{t^2}+1}\frac{1}{t^2}\,dt = -\int_{1/a}^a\frac{\ln t}{t^2+1}\,dt=-I,$$

et donc, $I=0$.

(b) (p et q sont des entiers naturels)
$\cos(px)\cos(qx)=\frac{1}{2}(\cos(p+q)x+\cos(p-q)x)$ et donc,
Premier cas. Si $p\neq q$,

$$\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q}+\frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right]_0^\pi=0.$$

Deuxième cas. Si $p=q\neq 0$,

$$\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi(1+\cos(2px))\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi dx=\frac{\pi}{2}.$$

Troisième cas. Si $p = q = 0$. $\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,dx = \int_0^\pi \,dx = \pi$.
La démarche est identique pour les deux autres et on trouve $\int_0^\pi \sin(px)\sin(qx)\,dx = 0$ si $p \neq q$ et $\frac{\pi}{2}$ si $p = q \neq 0$ puis $\int_0^\pi \sin(px)\cos(qx)\,dx = 0$ pour tout choix de p et q.

(c) La courbe d'équation $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-(a+b)x+ab=0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right.$ est le demi-cercle de diamètre $[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}]$. Par suite, si $a \leqslant b$, $I = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(b-a)^2}{8}$ et si $a > b$, $I = -\frac{\pi(b-a)^2}{8}$.

(d) L'intégrale proposée est somme de quatre intégrales. Chacune d'elles est la somme des aires de deux triangles. Ainsi, $I = \frac{1}{2}((1^2+3^2)+(2^2+2^2)+(3^2+1^2)+4^2) = 22$.

(e) On pose $u = \frac{1}{x}$. On obtient

$$I = \int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx = \int_{2}^{1/2}(1+u^2)\arctan u\frac{-du}{u^2} = \int_{1/2}^{2}(1+\frac{1}{u^2})(\frac{\pi}{2}-\arctan u)\,du$$
$$= \frac{\pi}{2}((2-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-2))-I).$$

Par suite, $I = \frac{3\pi}{2} - I$ et donc $I = \frac{3\pi}{4}$.

(f) $I = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx = \int_{-1}^{0}\sqrt{1+x(x-1)}\,dx + \int_0^1\sqrt{1+x(1-x)}\,dx = I_1 + I_2$.
Pour I_1, $1+x(x-1) = x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ et on pose $x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t$ et donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt$.

$$I_1 = \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt = \frac{3}{4}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{3}{16}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}(e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt$$
$$= \frac{3}{16}(\frac{1}{2}(e^{-2\ln(\sqrt{3})}-e^{2\ln(2-\sqrt{3})})-\frac{1}{2}(e^{2\ln(\sqrt{3})}-e^{-2\ln(2-\sqrt{3})})+2(-\ln(\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})))$$
$$= \frac{3}{16}(\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-(2-\sqrt{3})^2)-\frac{1}{2}(3-\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2})-2\ln(2\sqrt{3}-3))$$
$$= \frac{3}{16}(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}(-(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2))-2\ln(2\sqrt{3}-3))$$
$$= -\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\ln(2\sqrt{3}-3).$$

Pour I_2, $1+x(1-x) = -x^2+x+1 = -(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{5}}{2})^2$ et on pose $x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$ et donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\,dt$.

$$I_2 = \int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\,dt = \frac{3}{4}\int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}\cos^2 t\,dt = \frac{3}{8}\int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}(1+\cos(2t))\,dt$$
$$= \frac{3}{8}(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\left[\sin t\cos t\right]_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{3}{4}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}$$
$$= \frac{3}{4}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{10}...$$

(g)

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_\pi^0 \frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\,-du = \pi\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,du - \int_0^\pi \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,du$$
$$= -\pi\left[\arctan(\cos u)\right]_0^\pi - I = \frac{\pi^2}{2} - I,$$

et donc, $I = \frac{\pi^2}{4}$.

(h) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \int_1^x \ln^n t\, dt$.

$$I_{n+1} = \left[t \ln^{n+1} t\right]_1^x - (n+1) \int_1^x t \ln^n t \frac{1}{t}\, dt = x \ln^{n+1} x - (n+1) I_n.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} + \frac{I_n}{n!} = \frac{x(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}$, et de plus, $I_1 = x\ln x - x + 1$.
Soit $n \geqslant 2$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{I_k}{k!} + \frac{I_{k+1}}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{I_k}{k!} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{I_k}{k!} = -I_1 - (-1)^n \frac{I_n}{n!},$$

Par suite,

$$I_n = (-1)^n n! \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{x(\ln x)^{k+1}}{(k+1)!} - x\ln x + x - 1\right) = (-1)^n n! \left(1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x(\ln x)^k}{k!}\right).$$

Correction de l'exercice 2601 ▲

(a) $\int (\cos x)^{1234} \sin x\, dx$
En posant le changement de variable $u = \cos x$ on a $x = \arccos u$ et $du = -\sin x\, dx$ et on obtient

$$\int (\cos x)^{1234} \sin x\, dx = \int u^{1234}(-du) = -\frac{1}{1235} u^{1235} + c = -\frac{1}{1235} (\cos x)^{1235} + c$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$
En posant le changement de variable $u = \ln x$ on a $x = \exp u$ et $du = \frac{dx}{x}$ on écrit :

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int \frac{1}{\ln x} \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

Cette primitive est définie sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$ (la constante peut être différente pour chacun des intervalles).

(c) $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}\, dx$
Soit le changement de variable $u = \exp x$. Alors $x = \ln u$ et $du = \exp x\, dx$ ce qui s'écrit aussi $dx = \frac{du}{u}$.

$$\int \frac{1}{3+\exp(-x)}\, dx = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u+1}\, du = \frac{1}{3} \ln|3u+1| + c = \frac{1}{3} \ln(3\exp x + 1) + c$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\, dx$
Le changement de variable a pour but de se ramener à quelque chose de connu. Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \arcsin u + c,$$

car on connaît la dérivée de la fonction $\arcsin(t)$ c'est $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On va donc essayer de s'y ramener. Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $4x - x^2$ sous la forme $1 - t^2$: $4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2\right)$. Donc il est naturel d'essayer le changement de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$ pour lequel $4x - x^2 = 4(1-u^2)$ et $dx = 2du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-u^2)}} 2du = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$$

La fonction $\arcsin u$ est définie et dérivable pour $u \in]-1,1[$ alors cette primitive est définie sur $x \in]0,4[$.

Correction de l'exercice 2605 ▲

(a) Par IPP, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

(b) $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$ et

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{2p\times(2p-2)\times\cdots\times 2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}, \quad I_{2p+1} = \frac{2p\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

(c) En regardant l'intégrand.

(d) D'après la question précédente, $0 < I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ donc

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

par conséquent $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

(e)

$$(2p-1)I_{2p-1}I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\frac{\pi}{2}, \quad 2pI_{2p}I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{\pi}{2}$$

soit $nI_nI_{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}$, ce qui peut aussi se démontrer par récurrence.

(f) Comme $\frac{\pi}{2(n+1)} I_n I_{n+1} \sim I_n^2$ on en déduit que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Correction de l'exercice 2610 ▲

(a) $\int x^2 \ln x\, dx$

Considérons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = x^2$. On a donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^3}{3}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int \ln x \times x^2\, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\
&= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\, dx \\
&= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^2}{3}\, dx \\
&= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c
\end{aligned}$$

(b) $\int x \arctan x\, dx$

Considérons l'intégration par parties avec $u = \arctan x$ et $v' = x$. On a donc $u' = \frac{1}{1+x^2}$ et $v = \frac{x^2}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int \arctan x \times x\, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\
&= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2}\, dx \\
&= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c \\
&= \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x + c
\end{aligned}$$

(c) $\int \ln x\,dx$ puis $\int (\ln x)^2\,dx$

Pour la primitive $\int \ln x\,dx$, regardons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = 1$. Donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int uv' = \big[uv\big] - \int u'v \\ &= [\ln x \times x] - \int \frac{1}{x} \times x\,dx \\ &= [\ln x \times x] - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x + c\end{aligned}$$

Par la primitive $\int (\ln x)^2\,dx$ soit l'intégration par parties définie par $u = (\ln x)^2$ et $v' = 1$. Donc $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2\,dx &= \int uv' = \big[uv\big] - \int u'v \\ &= \big[x(\ln x)^2\big] - 2\int \ln x\,dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne on a utilisé la primitive calculée précédemment.

(d) Notons $I = \int \cos x \exp x\,dx$.

Regardons l'intégration par parties avec $u = \exp x$ et $v' = \cos x$. Alors $u' = \exp x$ et $v = \sin x$.

Donc

$$I = \int \cos x \exp x\,dx = \big[\sin x \exp x\big] - \int \sin x \exp x\,dx$$

Si l'on note $J = \int \sin x \exp x\,dx$, alors on a obtenu

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J \tag{33}$$

Pour calculer J on refait une deuxième intégration par parties avec $u = \exp x$ et $v' = \sin x$. Ce qui donne

$$J = \int \sin x \exp x\,dx = \big[-\cos x \exp x\big] - \int -\cos x \exp x\,dx = \big[-\cos x \exp x\big] + I$$

Nous avons ainsi une deuxième équation :

$$J = \big[-\cos x \exp x\big] + I \tag{34}$$

Repartons de l'équation (33) dans laquelle on remplace J par la formule obtenue dans l'équation (34).

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J = \big[\sin x \exp x\big] - \big[-\cos x \exp x\big] - I$$

D'où

$$2I = \big[\sin x \exp x\big] + \big[\cos x \exp x\big]$$

Ce qui nous permet de calculer notre intégrale :

$$I = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\exp x + c.$$

Correction de l'exercice 2613 ▲

a-$\int \sin^8 x \cos^3 x dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$ sur $\mathbb{R}$.
b-$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$ sur $\mathbb{R}$.
c-$\int \cos^{2003} x \sin x dx = -\frac{1}{2004}\cos^{2004} x + c$ sur $\mathbb{R}$.
d-$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ (changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \tan\frac{x}{2}$).
e-$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (changement de variable $u = \sin x$ ou $u = \tan\frac{x}{2}$).
f-$\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x} dx = -\frac{1}{5}\ln(2-\sin x) + \frac{7}{10}\ln|1+2\sin x| + c$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}[2\pi], -\frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$ (changement de variable $u = \sin x$).
g-$\int \frac{1}{7+\tan x} dx = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}\ln|\tan x + 7| + \frac{1}{50}\ln|\cos x| + c$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7) + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$ (changement de variable $u = \tan x$).
h-$\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x} dx = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}}\right) + c$ sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ (changement de variable $u = \tan(x/2)$).

Correction de l'exercice 2614 ▲

(a) i.

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \cdot \sin x dx.$$

En posant $u(x) = \sin^{n+1} x$ et $v'(x) = \sin x$ et en intégrant par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \Big[-\cos x \sin^{n+1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x dx \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^n x dx \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. Conclusion

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

ii. Nous avons donc une formule de récurrence pour I_n qui s'exprime en fonction de I_{n-2} qui a son tour s'exprime en fonction de I_{n-4}, etc. On se ramène ainsi à l'intégrale de I_0 (si n est pair) ou bien de I_1 (si n est impair). Un petit calcul donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. Par récurrence nous avons donc pour n pair :

$$I_n = \frac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}\frac{\pi}{2},$$

et pour n impair :

$$I_n = \frac{2\cdot 4\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdots n}.$$

iii. Pour calculer $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx$ nous allons nous ramener à une intégrale de Wallis. Avec le changement de variable $x=\cos u$, on montre assez facilement que :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx &= 2\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx\\ &= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2 u\right)^n(-\sin u\,du) \quad \text{avec } x=\cos u\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}u\,du\\ &= 2I_{2n+1}\end{aligned}$$

(b) i. Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ la fonction sinus est positive donc I_n est positive. De plus, sur ce même intervalle $\sin x \leqslant 1$ donc $(\sin x)^{n+1} \leqslant (\sin x)^n$. Cela implique

$$I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{n+1}dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx = I_n.$$

ii. Comme (I_n) est décroissante alors $I_{n+2}\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$, en divisant le tout par $I_n>0$ nous obtenons $\frac{I_{n+2}}{I_n}\leqslant\frac{I_{n+1}}{I_n}\leqslant 1$. Mais nous avons déjà calculé $\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ tend vers $+1$ donc $I_n\sim I_{n+1}$.

(c) i. Nous allons calculer $I_n\cdot I_{n+1}$. Supposons par exemple que n est pair, alors par les formules obtenues précédemment :

$$I_n\times I_{n+1}=\frac{1\cdot3\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdots n}\frac{\pi}{2}\times\frac{2\cdot4\cdots n}{1\cdot3\cdots(n+1)}=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n+1}.$$

Si n est impair nous obtenons la même fraction. On en déduit que pour tout n : $I_n\cdot I_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)}$.

ii. Maintenant

$$I_n^2=I_n\cdot I_n\sim I_n\cdot I_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)}\sim\frac{\pi}{2n},$$

donc

$$I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

iii.

$$\frac{1\cdot3\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdots(2n)}=I_{2n}\cdot(2n+1)\cdot\frac{2}{\pi}\sim\sqrt{\frac{\pi}{4n}}\cdot(2n+1)\cdot\frac{2}{\pi}\sim2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Correction de l'exercice 2616 ▲

(a) $I_0=\int_0^{\pi/4}dx=\frac{\pi}{4}$ et $I_1=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=[-\ln|\cos x|]_0^{\pi/4}=\frac{\ln 2}{2}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\pi/4}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)\,dx=\int_0^{\pi/4}\tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx=\left[\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{n+1}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(I_{2k-2}+I_{2k})=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_{2k-2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_{2k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kI_{2k}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^kI_{2k}=I_0-(-1)^nI_{2n}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_{2n}=(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$.
De même, $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}=I_1-(-1)^nI_{2n+1}$ et donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{2}\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

(b) Soient $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leqslant I_n = \int_0^{\pi/4-\varepsilon/2} \tan^n x\,dx + \int_{\pi/4-\varepsilon/2}^{\pi/4} \tan^n x\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}\tan^n(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, $0 < \tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}) < 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \tan^n(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}) = 0$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \tan^n(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors $0 \leqslant I_n < \varepsilon$.

Ainsi, I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit immédiatement que u_n tend vers $\ln 2$ et v_n tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 2617 ▲

Résultats valables sur chaque intervalle du domaine de définition.

(a) $\frac{1}{x^2+a^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + k$.

(b) $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + k$.

(c) $\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2} + \ln(x^2-4)^2 + k$.

(d) $\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$. Primitives : $4\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + k$.

(e) $\frac{1}{x^2+x+1}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + k$.

(f) $\frac{1}{(t^2+2t-1)^2} = \frac{1}{8(t+1+\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{16(t+1+\sqrt{2})} + \frac{1}{8(t+1-\sqrt{2})^2} + \frac{-\sqrt{2}}{16(t+1-\sqrt{2})}$.
Primitives : $-\frac{t+1}{4(t^2+2t-1)} + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}}\right| + k$.

(g) $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ est un élément simple.
Primitives : $-\frac{3}{2(t^2-2t+10)} + \frac{2(t-1)}{9(t^2-2t+10)} + \frac{2}{27}\arctan(\frac{t-1}{3}) + k$.

(h) $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10) + \frac{4}{3}\arctan(\frac{t-1}{3}) + k$.

(i) $\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{t-2}{3(t^2-t+1)}$. Primitives : $\frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}) + k$.

(j) $\frac{x^3+2}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + k$.

(k) $\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{3}{2(x-2)^2}$. Primitives : $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{2(x-2)} + k$.

(l) $\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2} = \frac{1}{2}(x^3-x^2+3) - \frac{3}{2x}$. Primitives : $\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2} - \frac{3}{2}\ln|x| + k$.

(m) $\frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)} = \frac{1}{4^3(x+1)} + \frac{1-x}{4^3(x^2+3)} + \frac{1-x}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{3(1-x)}{4(x^2+3)^3}$.
Primitives : $-\frac{x+3}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{2x-3}{3.2^5(x^2+3)} - \frac{1}{2^7}\ln(x^2+3) - \frac{1}{3\sqrt{3}2^6}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{4^3}\ln|x+1| + k$.

(n) $\frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2} = x^2 - 2 - \frac{1}{x} + \frac{x+4}{x^2+1} + \frac{x-6}{(x^2+1)^2}$.
Primitives : $\frac{x^3}{3} - 2x - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x - \frac{6x+1}{2(x^2+1)} + k$.

(o) $\frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}$.
Primitives : $-\frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3\ln|x-1| - \arctan x + k$.

Correction de l'exercice 2618 ▲

(a) $\frac{1}{x^2+2}$ est un élément simple. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Décomposition : $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}$. Intégrale : $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{1-x^2} = \ln 3$.

(c) Pas besoin de décomposer la fraction rationnelle, car $2x+1$ est la dérivée de x^2+x-3 ! $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \ln 3$.

(d) On peut évidemment décomposer la fraction rationnelle en éléments simples : $\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4}$, mais il est bien plus simple de faire le changement de variables $x^2 = u$. Alors $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}$.

(e) La décomposition de $\frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}$ est $x+18+\frac{163}{x-4}+\frac{507}{(x-4)^2}+\frac{565}{(x-4)^3}$; les primitives sont $\frac{x^2}{2}+18x-\frac{1014x-3491}{2(x-4)^2}+163\ln|x-4|+C$. Enfin, $\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx = \frac{5565}{32}-326\ln 2$.

(f) Décomposition : $\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}$. Primitives : $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right|+C$, d'où $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln(27/4)$.

(g) Décomposition : $\frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8} = 2x+3+\frac{2}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2-2x+4}$. Les primitives sont : $x^2+3x+\ln(x+2)^2+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. Intégrale : $\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx = 6+\frac{7\ln 3-3\ln 7}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(h) Décomposition : $\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$. Primitives : $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+2\arctan x+C$, d'où $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = \ln\frac{3}{2}+2\arctan\frac{1}{7}$.

(i) La décomposition est $\frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2} = 1+\frac{4/3}{(x-1)^2}+\frac{11/9}{x-1}-\frac{11/9}{x+2}$. On trouve alors $\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{5}{3}-\frac{22}{9}\ln 2$.

(j) La décomposition de $\frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}$ est $\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^2+2}-\frac{6}{(x^2+2)^2}-\frac{12x-16}{(x^2+2)^3}$; les primitives sont $-\frac{1}{x^3}+\frac{2x+3}{(x^2+2)^2}+\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. Enfin $\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx = \frac{37}{72}+2\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(k) Décomposition de la fraction rationnelle : $\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4} = \frac{2x+3}{x^2+1}-\frac{2x+5}{x^2+4}$. Primitives : $\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+4}\right|+3\arctan x-\frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$. Alors $\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx = \ln\left|\frac{a^2+1}{a^2+4}\right|+3\arctan a-\frac{5}{2}\arctan\frac{a}{2}+2\ln 2$. Enfin $\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4}+2\ln 2$.

(l) Pour factoriser le dénominateur, penser à faire $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2$; on trouve alors $\frac{1}{x^4+1} = \frac{(x\sqrt{2}+2)/4}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{(x\sqrt{2}-2)/4}{x^2-x\sqrt{2}+1}$. Les primitives s'écrivent

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\arctan(x\sqrt{2}+1)+\arctan(x\sqrt{2}-1)\Big)+C$$

ce qui donne $\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{33+20\sqrt{2}}{17}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\pi-\arctan\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 2621 ▲

(a) Pour $x>0$ on a $\frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$, donc

$$I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Donc $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

(c) Soit $S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\pm\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Par la question précédente nous avons $S_n = (I_0+I_1)-(I_1+I_2)+(I_2+I_3)-\cdots\pm(I_{n-1}+I_n)$. Mais d'autre part cette somme étant télescopique cela conduit à $S_n = I_0 \pm I_n$. Alors la limite de S_n et donc de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (quand $n\to+\infty$) est I_0 car $I_n \to 0$. Un petit calcul montre que $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Donc la somme alternée des inverses des entiers converge vers $\ln 2$.

Correction de l'exercice 2625 ▲

$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\left(x-\ln|\cos x+\sin x|\right)+c$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\left(x+\ln|\cos x+\sin x|\right)+c$ sur $\mathbb{R}$ (en calculant la somme et la différence).

Correction de l'exercice 2626 ▲

(a) Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx$. Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ transforme toute fraction rationnelle de sinus et cosinus en une fraction rationnelle en t (que l'on sait résoudre !).
En posant $t = \tan\frac{x}{2}$ on a $x = \arctan\frac{t}{2}$ ainsi que les formules suivantes :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ici, on a seulement à remplacer $\sin x$. Comme x varie de $x=0$ à $x=\frac{\pi}{2}$ alors $t=\tan\frac{x}{2}$ varie de $t=0$ à $t=1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t}dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}dt \\ &= \left[\frac{-2}{1+t}\right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

(b) Notons $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$. Alors

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $J = \frac{\pi}{2} - I = \frac{\pi}{2} - 1$.

Correction de l'exercice 2631 ▲

(a) Changement de variable $u = \sin^2 x$ (ou d'abord $u = \sin x$) ; $e^{\sin^2 x}+C$.
(b) Deux méthodes : changement de variable $u = \sin t$ (ou $u = \sinh t$), ou linéarisation.
$\frac{1}{15}(15\sin t - 10\sin^3 t + 3\sin^5 t)+C$ ou $\frac{1}{80}\sin 5t + \frac{5}{48}\sin 3t + \frac{5}{8}\sin t + C$;
$\sinh t + \frac{1}{3}\sinh^3 t + C$ ou $\frac{1}{12}\sinh 3t + \frac{3}{4}\sinh t + C$;
$\frac{1}{32}(\sin 4t + 8\sin 2t + 12t)+C$; $\frac{1}{32}(\sinh 4t - 8\sinh 2t + 12t)+C$.
(c) Intégrations par parties : $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$.
(d) Intégration par parties : $x\ln x - x + C$; $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}+C$; $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C$.
(e) Intégrations par parties : $\frac{1}{2}(\sinh t\sin t - \cosh t\cos t)+C$.
(f) Changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$; $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ sur chaque intervalle...
(g) Changement de variable $x = a\sin u$; $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.
(h) Changement de variable $u = e^x$; $\frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}(e^x-2)+C$.
(i) Intégrations par parties : $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)+C$;
$\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx)+C$.
(j) Changement de variable $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$; $2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$.
(k) Changement de variable $t = \arcsin x$; $\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2})+C$.

(l) Changements de variable $u=\tan\frac{x}{2}$, $t=1+u$; $\arctan(\tan\frac{x}{2}+1)+C$ sur chaque intervalle... Mais, au fait, ne cherchait-on pas une primitive *sur* **R** ?

(m) Changement de variable $x^3=u^2$; $\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}+C$.

(n) Multiplier et diviser par $\cosh x-\sinh x$, ou passer en e^x ; $\frac{x}{2}+\frac{\sinh 2x}{4}-\frac{\cosh 2x}{4}+C$ ou $\frac{x}{2}-\frac{e^{-2x}}{4}+C$.

Correction de l'exercice 2639 ▲

---

a-$\int\arctan x dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$ sur $\mathbb{R}$ (intégration par parties)
b-$\int\tan^2 x dx=\tan x-x+c$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$
c-$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\ln|\ln x|+c$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (changement de variable : $u=\ln x$)
d-$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{2}{3}(x-2)(x+1)^{\frac{1}{2}}+c$ sur $]-1,+\infty[$ (changement de variable : $u=\sqrt{x+1}$ ou intégration par parties)
e-$\int\arcsin x dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$ sur $]-1,1[$ (intégration par parties)
f-$\int\frac{1}{3+\exp(-x)}dx=\frac{1}{3}\ln(3\exp x+1)+c$ sur $\mathbb{R}$ (changement de variable : $u=\exp x$)
g-$\int\frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx=\arccos\left(\frac{1}{2}x-1\right)+c$ sur $]0,4[$ (changement de variable : $u=\frac{1}{2}x-1$)
h-$\int\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx=\arcsin(\ln x)+c$ sur $\left]\frac{1}{e},e\right[$ (changement de variable : $u=lnx$)
i-$\int\frac{1}{\sqrt{1+\exp x}}dx=x-2\ln\left(1+\sqrt{\exp x+1}\right)+c$ sur $\mathbb{R}$ (changement de variable : $u=\sqrt{\exp x+1}$)
j-$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c$ sur $\mathbb{R}$
k-$\int\frac{x+2}{x^2-3x-4}dx=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{6}{5}\ln|x-4|+c$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,4\}$ (décomposition en éléments simples)
l-$\int\cos x\exp x dx=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\exp x+c$ sur $\mathbb{R}$ (deux intégrations par parties)

Correction de l'exercice 2640 ▲

---

a-$\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\frac{\pi^2}{32}$ (changement de variables ou intégration par parties).
b-$\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx=\frac{3\pi}{4}$ (changement de variables $u=\frac{1}{x}$ et $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$).
c-$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=1$ (intégration par parties).
d-$\int_{-1}^1(\arccos x)^2 dx=\pi^2+4$ (2 intégrations par parties).
e-$\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ (changement de variables ou intégration par parties).
f-$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (changement de variables $u=\arcsin\frac{x}{2}$).
g-$\int_1^2 x^2\ln x dx=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$ (intégration par parties).
h-$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+4x+7}dx=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ (changement de variables $u=\frac{x+2}{\sqrt{3}}$).
i-$\int_0^1\frac{3x+1}{(x+1)^2}dx=3\ln 2-1$ (décomposition en éléments simples).

Correction de l'exercice 2647 ▲

Pour t réel, posons $g(t)=\frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}$ puis, pour x réel, $G(x)=\int_1^x g(t)\,dt$. Puisque g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 et $G'=g$ (G est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1). Plus précisément, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc G est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Finalement, f est définie et de classe C^∞ sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.
Etude en 1.
Pour $x\neq 1$,

$$f(x)=\frac{G(x)}{x-1}=\frac{G(1)+G'(1)(x-1)+\frac{G''(1)}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)}{x-1}=g(1)+g'(1)(x-1)+o((x-1)).$$

Donc, f admet en 1 un développement limité d'ordre 1. Par suite, f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ puis le prolongement est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}g'(1)$. Or, pour tout réel x, $g'(x) = 2x\frac{1}{\sqrt{1+x^8}} + x2.(-\frac{4x^7}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}) = 2x\frac{1-x^8}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}$ et $g'(1) = 0$. Donc, $f'(1) = 0$.

Dérivée. Variations

Pour $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{G'(x)(x-1)-G(x)}{(x-1)^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $h(x) = G'(x)(x-1) - G(x)$ dont la dérivée est $h'(x) = G''(x)(x-1) + G'(x) - G'(x) = (x-1)g'(x)$. h' est du signe de $2x(1-x^8)(x-1)$ ou encore du signe de $-2x(1+x)$. h est donc décroissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $[-1,0]$.

Maintenant, quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), $G'(x)(x-1) = g(x)(x-1) \sim x\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$ et donc $G'(x)(x-1)$ tend vers 0. Ensuite, pour $x \geqslant 1$

$$0 \leqslant G(x) \leqslant \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^8}}\, dt = 1 - \frac{1}{x} \leqslant 1,$$

et G est bornée au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$). Comme G est croissante sur $\mathbb{R}$, G a une limite réelle en $+\infty$ et en $-\infty$. Cette limite est strictement positive en $+\infty$ et strictement négative en $-\infty$. Par suite, h a une limite strictement positive en $-\infty$ et une limite strictement négative en $+\infty$. Sur $[0,+\infty[$, h est décroissante et s'annule en 1. Donc, h est positive sur $[0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$.

Ensuite,

$$h(-1) = \int_{-1}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\, dt - \sqrt{2} = 2\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\, dt - \sqrt{2} < 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt - \sqrt{2} = 0,$$

et $h(-1) < 0$. h s'annule donc, une et une seule fois sur $]-\infty,-1[$ en un certain réel α et une et une seule fois sur $]-1,0[$ en un certain réel β. De plus, h est strictement positive sur $]-\infty,\alpha[$, strictement négative sur $]\alpha,\beta[$, strictement positive sur $]\beta,1[$ et strictement négative sur $]1,+\infty[$.

f est strictement croissante sur $]-\infty,\alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha,\beta]$, strictement croissante sur $[\beta,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Etude en l'infini.

En $+\infty$ ou $-\infty$, G a une limite réelle et donc f tend vers 0.

Correction de l'exercice 2648 ▲

(a) La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\, dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f.

La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est paire et donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\, dt$ est impaire. Comme la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire, f est impaire.

(b) Pour x réel, $f'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\, dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xf(x) + 1$.

(c) Pour $x \geqslant 1$, une intégration par parties fournit :

$$\int_1^x e^{t^2}\, dt = \int_1^x \frac{1}{2t}.2te^{t^2}\, dt = \left[\frac{1}{2t}e^{t^2}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt,$$

et donc,

$$|1-2xf(x)| = \left|1 - 2xe^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\, dt - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\, dt\right|$$
$$\leqslant xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt + exe^{-x^2} + 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\, dt.$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il reste le premier.

Pour $x \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}0 \leqslant xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt &= xe^{-x^2}\int_1^{x-1}\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + xe^{-x^2}\int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt\\ &\leqslant x(x-1)e^{-x^2}\frac{e^{(x-1)^2}}{1^2} + xe^{-x^2}e^{x^2}\int_{x-1}^x \frac{1}{t^2}\,dt\\ &= x(x-1)e^{-2x+1} + x\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right) = x(x-1)e^{-2x+1} + \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que $xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Finalement, $1-2xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ou encore, $f(x) \sim \frac{1}{2x}$.

(d) Pour $x > 0$, $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x)) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2}\,dt$ puis,

$$g'(x) = e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc, g s'annule au plus une fois sur $]0,+\infty[$. Ensuite, $f'(1) = 1-2f(1) = 1-2e^{-1}\int_0^1 e^{t^2}\,dt$. Or, la méthode des rectangles fournit $\int_0^1 e^{t^2}\,dt = 1,44... > 1,35... = \frac{e}{2}$, et donc $f'(1) < 0$ puis $g(1) < 0$. Enfin, comme en 0^+, $g(x) \sim \frac{1}{2x}f'(0) = \frac{1}{2x}$, $g(0^+) = +\infty$.

Donc, g s'annule exactement une fois sur $]0,+\infty[$ en un certain réel x_0 de $]0,1[$.

(e) g est strictement positive sur $]0,x_0[$ et strictement négative sur $]x_0,+\infty[$. Il en de même de f'. f est ainsi strictement croissante sur $[0,x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2649 ▲

(a) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, quand t tend vers 0, $f(t) \sim \frac{t^2}{t} = t$ et $\lim_{t\to 0,\, t\neq 0} f(t) = 0 = f(0)$. Ainsi, f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

(b) f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, $F' = f$ est positive sur $[0,+\infty[$, de sorte que F est croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que F admet en $+\infty$ une limite dans $]-\infty,+\infty]$.

Vérifions alors que F est majorée sur $\mathbb{R}$. On contate que $t^2.\frac{t^2}{e^t-1}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, il existe un réel A tel que pour $t \geqslant A$, $0 \leqslant t^2.\frac{t^2}{e^t-1} \leqslant 1$ ou encore $0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$. Pour $x \geqslant A$, on a alors

$$\begin{aligned}F(x) = \int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x \frac{t^2}{e^t-1}\,dt &\leqslant \int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x \frac{1}{t^2}\,dt\\ &= \int_0^A f(t)\,dt + \frac{1}{A} - \frac{1}{x} \leqslant \int_0^A f(t)\,dt + \frac{1}{A}.\end{aligned}$$

F est croissante et majorée et donc a une limite réelle ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}f(t) = t^2e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} &= t^2e^{-t}(\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-t})^k + \frac{(e^{-t})^n}{1-e^{-t}})\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} t^2e^{-(k+1)t} + \frac{t^2e^{-t}}{1-e^{-t}}e^{-nt} = \sum_{k=1}^{n} t^2e^{-kt} + f_n(t)\ (*),\end{aligned}$$

où $f_n(t) = \frac{t^2e^{-t}}{1-e^{-t}}e^{-nt}$ pour $t > 0$. En posant de plus $f_n(0) = 0$, d'une part, f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et d'autre part, l'égalité $(*)$ reste vraie quand $t = 0$. En intégrant, on obtient

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^2e^{-kt}\,dt + \int_0^x f_n(t)\,dt\ (**).$$

Soient alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\int_0^x t^2e^{-kt}\,dt = \left[-\frac{1}{k}t^2e^{-kt}\right]_0^x + \frac{2}{k}\int_0^x te^{-kt}\,dt = -\frac{1}{k}x^2e^{-kx} + \frac{2}{k}(\left[-\frac{1}{k}te^{-kt}\right]_0^x + \frac{1}{k}\int_0^x e^{-kt}\,dt)$$
$$= -\frac{1}{k}x^2e^{-kx} - \frac{2}{k^2}xe^{-kx} - \frac{2}{k^3}e^{-kx} + \frac{2}{k^3}.$$

Puisque $k > 0$, quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2e^{-kt}\,dt = \frac{2}{k^3}$. On fait alors tendre x vers $+\infty$ dans $(**)$ et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt\ (***).$$

Vérifions enfin que $\lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt) = 0$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et a une limite réelle en $+\infty$. On en déduit que cette fonction est bornée sur $]0,+\infty[$. Soit M un majorant de cette fonction sur $]0,+\infty[$. Pour $x \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$0 \leqslant \int_0^x f_n(t)\,dt \leqslant M\int_0^x e^{-nt}\,dt = \frac{M}{n}(1-e^{-nx}).$$

A $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt \leqslant \frac{M}{n},$$

puis on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt\right) = 0.$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$ puis quand n tend vers $+\infty$ dans $(***)$, on obtient enfin

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{t^2}{e^t-1}\,dt = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}.$$

Correction de l'exercice 2650 ▲

(a) I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$. f est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+j} + \frac{\overline{b}}{X+j^2},$$

où $a = \frac{1}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3(-j)^2} = \frac{j}{3}$. Par suite,

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}(\frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{X^2-X+1})$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}).$$

Mais alors,

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

(b) I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$. Sur I, $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C$.

(c) $X^3-X^2-X+1 = X^2(X-1)-(X-1) = (X^2-1)(X-1) = (X-1)^2(X+1)$. Donc, la décomposition en éléments simples de $f = \frac{X^5}{X^3-X^2-X+1}$ est de la forme $aX^2+bX+c+\frac{d_1}{X-1}+\frac{d_2}{(X-1)^2}+\frac{e}{X+1}$.
Détermination de a, b et c. La division euclidienne de X^5 par X^3-X^2-X+1 s'écrit $X^5 = (X^2+X+2)(X^3-X^2-X+1)+2X^2+X-2$. On a donc $a=1$, $b=1$ et $c=2$.
$e = \lim_{x\to-1}(x+1)f(x) = \frac{(-1)^5}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{4}$. Puis, $d_2 = \lim_{x\to1}(x-1)^2 f(x) = \frac{1^5}{1+1} = \frac{1}{2}$. Enfin, $x=0$ fournit $0 = c-d_1+d_2+e$ et donc, $d_1 = -2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$. Finalement,

$$\frac{X^5}{X^3-X^2-X+1} = X^2+X+2-\frac{9}{4}\frac{1}{X-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{X+1},$$

et donc, I désignant l'un des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$, on a sur I

$$\int \frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C.$$

(d) Sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^5}\,dx = \frac{1}{8(x^2+x+1)^4} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^5}\,dx\\ &= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{((\frac{\sqrt{3}}{2}u)^2+\frac{3}{4})^5}\frac{\sqrt{3}}{2}\,du \text{ (en posant } x+\frac{1}{2} = \frac{u\sqrt{3}}{2})\\ &= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4} + \frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int \frac{1}{(u^2+1)^5}\,du.\end{aligned}$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons alors $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$. Une intégration par parties fournit

$$I_n = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}),$$

et donc, $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{u}{(u^2+1)^n} + (2n-1)I_n\right)$. Mais alors,

$$\begin{aligned}I_5 &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8}I_4 = \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3} + \frac{7.5}{8.6}I_3\\ &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3} + \frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{7.5.3}{8.6.4}I_2\\ &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3} + \frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{u}{u^2+1} + \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}I_1\\ &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4} + \frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3} + \frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{u}{u^2+1} + \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\arctan u + C.\end{aligned}$$

Maintenant,

$$u^2+1 = (\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1 = \frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}(x^2+x+1).$$

Par suite,

$$\frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int\frac{1}{(u^2+1)^5}\,du = \frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\left(\frac{1}{8}\frac{3^4}{4^4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{3^3}{4^3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{3^2}{4^2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{3}{4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{x^2+x+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right).$$
$$=\frac{1}{8}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}+\frac{7}{36}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}+\frac{35}{108}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{35}{54}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
$$+\frac{70\sqrt{3}}{81}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,$$

(il reste encore à réduire au même dénominateur).

(e) On pose $u=x^2$ et donc $du=2xdx$

$$\int\frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{x}{x^2(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u(u+1)^2}=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2})\,du$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|u|-\ln|u+1|+\frac{1}{u+1})+C$$
$$=\frac{1}{2}(\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1})+C.$$

(f) $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx=\int\frac{x^2}{x^6+1}\,dx+\int\frac{x}{x^6+1}\,dx.$
Ensuite, en posant $u=x^3$ et donc $du=3x^2\,dx$,

$$\int\frac{x^2}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{u^2+1}\,du=\frac{1}{3}\arctan u+C=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C,$$

et en posant $u=x^2$ et donc $du=2x\,dx$,

$$\int\frac{x}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^3+1}\,du=\frac{1}{6}\ln\frac{(u-1)^2}{u^2-u+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C\text{ (voir 1))}$$
$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+C$$

Finalement,

$$\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+C.$$

(g) $\frac{1}{X^4+1}=\sum_{k=0}^{3}\frac{\lambda_k}{X-z_k}$ où $z_k=e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$. De plus, $\lambda_k=\frac{1}{4z_k^3}=\frac{z_k}{4z_k^4}=-\frac{z_k}{4}$. Ainsi,

$$\frac{1}{X^4+1}=-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\pi/4}}{X-e^{i\pi/4}}+\frac{e^{-i\pi/4}}{X-e^{-i\pi/4}}+\frac{-e^{i\pi/4}}{X+e^{i\pi/4}}+\frac{-e^{-i\pi/4}}{X+e^{-i\pi/4}}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1}-\frac{\sqrt{2}X+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right).$$

Mais,

$$\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}-\frac{1}{(X-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2},$$

et donc,

$$\int \frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)-\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C,$$

et de même,

$$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C.$$

Finalement,

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2}x-1)+\arctan(\sqrt{2}x+1))+C.$$

(h) Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+1}\,dx &= \frac{x}{x^4+1}+\int \frac{4x^4}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^4+1}+4\int \frac{x^4+1-1}{(x^4+1)^2}\,dx\\ &= \frac{x}{x^4+1}+4\int \frac{1}{x^4+1}\,dx-4\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx\end{aligned}$$

Et donc,

$$\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\Big(\frac{x}{x^4+1}+3\int \frac{1}{x^4+1}\,dx\Big) = \ldots$$

(i) Posons $R=\frac{1}{X^8+X^4+1}$.

$$\begin{aligned}X^8+X^4+1 &= \frac{X^{12}-1}{X^4-1} = \frac{\prod_{k=0}^{11}(X-e^{2ik\pi/12})}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)}\\ &= (X-e^{i\pi/6})(X-e^{-i\pi/6})(X+e^{i\pi/6})(X+e^{-i\pi/6})(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).\end{aligned}$$

R est réelle et paire. Donc,

$$R = \frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}-\frac{a}{X+j}-\frac{\overline{a}}{X+j^2}+\frac{b}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}}-\frac{b}{X+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{b}}{X+e^{-i\pi/6}}.$$

$a=\frac{1}{8j^7+4j^3}=\frac{1}{4(2j+1)}=\frac{2j^2+1}{4(2j+1)(2j^2+1)}=\frac{-1-2j}{12}$ et donc,

$$\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2} = \frac{1}{12}\Big(\frac{-1-2j}{X-j}+\frac{-1-2j^2}{X-j^2}\Big) = \frac{1}{4}\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2},$$

et par parité,

$$\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}-\frac{a}{X+j}-\frac{\overline{a}}{X+j^2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\Big).$$

Ensuite, $b=\frac{1}{8e^{7i\pi/6}+4e^{3i\pi/6}}=\frac{1}{4e^{i\pi/6}(-2-j^2)}=\frac{e^{-i\pi/6}}{4(-1+j)}=\frac{e^{-i\pi/6}(-1+j^2)}{12}=\frac{e^{-i\pi/6}(-2-j)}{12}=\frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{12}$, et donc,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}} = \frac{1}{12}\Big(\frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{-2e^{i\pi/6}+i}{X-e^{-i\pi/6}}\Big) = \frac{1}{12}\frac{-2\sqrt{3}X+3}{X^2-\sqrt{3}X+1} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}.$$

Par parité,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}}-\frac{b}{X+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{b}}{X+e^{-i\pi/6}}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X+\sqrt{3}}{X^2+\sqrt{3}X+1}.$$

Finalement,

$$\int\frac{1}{x^8+x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+C.$$

(j) En posant $u=x^2$ et donc $du=2x\,dx$, on obtient $\int\frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(u^2+1)^3}$.
Pour $n\geqslant 1$, posons $I_n=\int\frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$. Une intégration par parties fournit :

$$I_n=\frac{u}{(u^2+1)^n}+\int\frac{u.(-n)(2u)}{(u^2+1)^{n+1}}\,du=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n\int\frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du$$
$$=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n(I_n-I_{n+1}),$$

et donc, $\forall n\geqslant 1,\ I_{n+1}=\frac{1}{2n}(\frac{u}{(u^2+1)^n}+(2n-1)I_n)$.
On en déduit que

$$I_3=\frac{1}{4}(\frac{u}{(u^2+1)^2}+3I_2)=\frac{u}{4(u^2+1)^2}+\frac{3}{8(u^2+1)}+\frac{3}{8}\arctan u+C,$$

et finalement que

$$\int\frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx=\frac{1}{16}(\frac{2x^2}{(x^4+1)^2}+\frac{3}{x^4+1}+3\arctan(x^2))+C.$$

(k)

$$(X+1)^7-X^7-1=7X^6+21X^5+35X^4+35X^3+21X^2+7X=7X(X^5+3X^4+5X^3+5X^2+3X+1)$$
$$=7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)=7X(X+1)(X^2+X+1)^2.$$

Par suite,

$$\frac{7}{(X+1)^7-X^7-1}=\frac{1}{X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c_1}{X-j}+\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_1}}{X-j^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}.$$

$a=\lim_{x\to 0}xR(x)=1$, $b=\lim_{x\to -1}(x+1)R(x)=-1$, et
$c_2=\lim_{x\to j}(x-j)^2R(x)=\frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2}=-\frac{1}{j^2(1-2j+j^2)}=\frac{1}{3}$. Puis,

$$\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}=\frac{1}{3}(\frac{(X-j^2)^2+(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2}=\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2},$$

et

$$R-(\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2})=\frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)^2}-\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}=\frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}$$
$$=\frac{-2X(X+1)(X^2+X+1)+3+3X(X+1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}=\frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.$$

Puis, $c_2=\frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)}=-\frac{5}{j-j^2}=\frac{5(j-j^2)}{(j-j^2)(j^2-j)}=\frac{5(j-j^2)}{3}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1} &= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{5(j-j^2)}{X-j}+\frac{5(j^2-j)}{X-j^2}+\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{X^2+X+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx &= \frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-j}+\frac{1}{x-j^2}\right)\right)+C\\ &= \frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\right)+C.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2651 ▲

(a) On pose $t=\tan\frac{x}{2}$ et donc $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int 2\frac{1}{1-t^2}\,dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C = \ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right|+C\\ &= \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+C.\end{aligned}$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C\ldots$$

ou bien, en posant $u=x+\frac{\pi}{2}$, (voir 2))

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos(u-\frac{\pi}{2})}\,du = \int \frac{1}{\sin u}\,du = \ln|\tan\frac{u}{2}|+C = \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+C.$$

Ensuite, en posant $t=e^x$ et donc $dx=\frac{dt}{t}$,

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{2}{t+\frac{1}{t}}\frac{dt}{t} = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\arctan(e^x)+C,$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x+1}\,dx = \arctan(\operatorname{sh} x)+C.$$

(b) En posant $t=\tan\frac{x}{2}$,

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|+C = \ln|\tan\frac{x}{2}|+C.$$

(c) $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|+C$ et $\int \frac{1}{\operatorname{th} x} = \ln|\operatorname{sh} x|+C$.

(d) $\int \frac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-\sin x|+C$.

(e) $\frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 x}+\tan^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2+3\tan^2 x}d(\tan x)$, et en posant $u=\tan x$,

$$\int \frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{2+3u^2}\,du = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}u)+C = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x)+C.$$

(f) Posons $I=\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$ et $J=\int \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$. Alors, $I+J=\int dx = x+C$ et $I-J=\int \frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx = \ln|\cos x+\sin x|+C$. En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$I=\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx = \frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|)+C.$$

ou bien, en posant $u=x-\frac{\pi}{4}$,

$$I=\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}\,dx = \int \frac{\cos(u+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\cos u}\,du = \frac{1}{2}\int (1-\frac{\sin u}{\cos u})\,du = \frac{1}{2}(u+\ln|\cos u|)+C$$
$$= \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4}+\ln|\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)|)+C = \frac{1}{2}(x+\ln|\cos x+\sin x|)+C.$$

(g)

$$\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\,dx = \frac{4\cos^3 x-3\cos x}{4\sin x-4\sin^3 x} = \frac{1}{4}\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\sin x(1-\sin^2 x)} = \frac{1}{4}(\frac{4\cos x}{\sin x}-\frac{3}{\sin x\cos x}) = \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{3}{2}\frac{1}{\sin(2x)}.$$

Par suite,

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\,dx = \ln|\sin x|-\frac{3}{4}\ln|\tan x|+C.$$

(h) $\cos^4 x+\sin^4 x = (\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x = 1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)$, et donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx &= \int \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)}\,dx = \int \frac{1}{2-\sin^2 u}\,du \text{ (en posant } u=2x)\\ &= \int \frac{1}{1+\cos^2 u}\,du = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+v^2}}\frac{dv}{1+v^2} \text{ (en posant } v=\tan u)\\ &= \int \frac{dv}{v^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{v}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}\frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}\,dx &= \frac{2\sin^2 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x+1}\cos x\,dx = \frac{2\sin^2 x}{2-2\sin^2 x(1-\sin^2 x)}\cos x\,dx\\ &= \frac{u^2}{u^4-u^2+1}\,du \text{ (en posant } u=\sin x).\end{aligned}$$

Maintenant, $u^4-u^2+1=\frac{u^6+1}{u^2+1}=(u-e^{i\pi/6})(u-e^{-i\pi/6})(u+e^{i\pi/6})(u+e^{-i\pi/6})$, et donc,

$$\frac{u^2}{u^4-u^2+1} = \frac{a}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{a}}{u-e^{-i\pi/6}}-\frac{a}{u+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{a}}{u+e^{-i\pi/6}},$$

ou $a=\frac{(e^{i\pi/6})^2}{(e^{i\pi/6}-e^{-i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{-i\pi/6})} = \frac{(e^{i\pi/6})^2}{i.2e^{i\pi/6}.\sqrt{3}} = \frac{-ie^{i\pi/6}}{2\sqrt{3}}$, et donc

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{u^4-u^2+1} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{-ie^{i\pi/6}}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{ie^{-i\pi/6}}{u-e^{-i\pi/6}}+\frac{ie^{i\pi/6}}{u+e^{i\pi/6}}-\frac{ie^{-i\pi/6}}{u+e^{-i\pi/6}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{3}u+1}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{1}{2}\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2+\sqrt{3}u+1}\right)\\
&= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(u+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{(u-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}\right)
\end{aligned}$$

et donc,

$$\int \frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x+1}{\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+1}\right|+\frac{1}{2}(\arctan(2\sin x-\sqrt{3})+\arctan(2\sin x+\sqrt{3})+C.$$

(j) En posant $u=\sin x$, on obtient

$$\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}\,dx = \frac{\sin x}{1+3\sin x-4\sin^3 x}\frac{1}{\cos^2 x}\cos x\,dx = \frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}\,du$$

Or, $1+3u-4u^3=(u+1)(-4u^2-4u-1)=-(u-1)(2u+1)^2$ et donc, $(1+3u-4u^3)(1-u^2)=(u+1)(u-1)^2(2u+1)^2$ et donc,

$$\frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}=\frac{a}{u+1}+\frac{b_1}{u-1}+\frac{b_2}{(u-1)^2}+\frac{c_1}{2u+1}+\frac{c_2}{(2u+1)^2}.$$

$a=\lim_{u\to-1}(u+1)f(u)=\frac{-1}{(-1-1)^2(-2+1)^2}=-\frac{1}{4}$, $b_2=\frac{1}{(1+1)(2+1)^2}=\frac{1}{18}$
et $c_2=\frac{-1/2}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}-1)^2}=-\frac{4}{9}$.
Ensuite, $u=0$ fournit $0=a-b_1+b_2+c_1+c_2$ ou encore $c_1-b_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{4}{9}=\frac{23}{36}$. D'autre part, en multipliant par u, puis en faisant tendre u vers $+\infty$, on obtient $0=a+b_1+c_1$ et donc $b_1+c_1=\frac{1}{4}$ et donc, $c_1=\frac{4}{9}$ et $b_1=-\frac{7}{36}$. Finalement,

$$\frac{u}{(u+1)(u-1)^2(2u+1)^2}=-\frac{1}{4(u+1)}-\frac{7}{36(u-1)}+\frac{1}{18(u-1)^2}+\frac{4}{9(2u+1)}-\frac{4}{9(2u+1)^2}.$$

Finalement,

$$\int \frac{\tan x}{1+\sin(3x)}\,dx = -\frac{1}{4}\ln(\sin x+1)-\frac{7}{36}\ln(1-\sin x)-\frac{1}{18(\sin x-1)}+\frac{2}{9}\ln|2\sin x+1|+\frac{2}{9}\frac{1}{2\sin x+1}+C$$

(k) (voir 6))

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}((\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x))+((\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}\,dx\\
&= \frac{3}{2}\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{1}{2}\int dx\\
&= \frac{3}{2}\ln|\sin x-\cos x|+\frac{x}{2}+C.
\end{aligned}$$

(l)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos(3x)}\,dx &= \int \frac{\sin x}{4\cos^3 x - 3\cos x}\,dx = \int \frac{1}{3u-4u^3}\,du \text{ (en posant } u=\cos x)\\ &= \int (\frac{1}{3u} - \frac{1}{3(2u-\sqrt{3})} - \frac{1}{3(2u+\sqrt{3})})\,du\\ &= \frac{1}{3}(\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\ln|2\cos x - \sqrt{3}| - \frac{1}{2}\ln|2\cos x + \sqrt{3}|) + C.\end{aligned}$$

(m) Dans tous les cas, on pose $t = \tan x$ et donc $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\alpha + \beta\tan^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{\alpha+\beta t^2}.$$

Si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$, $\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\tan x + C$.
Si $\beta \neq 0$ et $\alpha\beta > 0$,

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{t^2 + (\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\arctan(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\tan x) + C.$$

Si $\beta \neq 0$ et $\alpha\beta < 0$,

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{t^2 - (\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}})^2}\,dt = \frac{\mathrm{sgn}(\beta)}{2\sqrt{-\alpha\beta}}\ln\left|\frac{\tan x - \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}{\tan x + \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}\right| + C.$$

(n)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{ch}^3 x}{1+\mathrm{sh}\,x}\,dx &= \int \frac{1+\mathrm{sh}^2 x}{1+\mathrm{sh}\,x}\mathrm{ch}\,x\,dx\\ &= \int \frac{u^2+1}{u+1}\,du \text{ (en posant } u = \mathrm{sh}\,x)\\ &= \int (u - 1 + \frac{2}{u+1})\,du = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{2} - \mathrm{sh}\,x + 2\ln|1+\mathrm{sh}\,x| + C.\end{aligned}$$

(o) On peut poser $u = e^x$ mais il y a mieux.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\mathrm{ch}\,x - 1}\,dx &= \int \frac{\sqrt{(\mathrm{ch}\,x-1)(\mathrm{ch}\,x+1)}}{\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1}}\,dx = \mathrm{sgn}(x)\int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1}}\,dx\\ &= 2\mathrm{sgn}(x)\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1} + C.\end{aligned}$$

(p)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{th}\,x}{\mathrm{ch}\,x+1}\,dx &= \int \frac{1}{\mathrm{ch}\,x(\mathrm{ch}\,x+1)}\mathrm{sh}\,x\,dx\\ &= \int \frac{1}{u(u+1)}\,du \text{ (en posant } u = \mathrm{ch}\,x)\\ &= \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})\,du = \ln\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,x+1} + C.\end{aligned}$$

(q) $\int \frac{1}{\mathrm{sh}^5 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}^6 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}^6 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{(\mathrm{ch}^2 x-1)^3}\,dx = \int \frac{1}{(u^2-1)^3}\,du$ (en posant $u = \mathrm{ch}\,x$).

(r)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-\mathrm{ch}\,x}\,dx &= \int \frac{1+\mathrm{ch}\,x}{1-\mathrm{ch}^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx - \int \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx\\ &= \mathrm{coth} x + \frac{1}{\mathrm{sh}\,x} + C.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2652 ▲

(a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,dx = \operatorname{argsh}\frac{x+1}{2}+C$$
$$= \ln\left(\frac{x+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right)+C = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C.$$

Puis,

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int (x+1)\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$$
$$= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \frac{x^2+2x+5-4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$$
$$= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx,$$

et donc,

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C.$$

(On peut aussi poser $x+1=2\operatorname{sh}u$).

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \arcsin(x-1)+C.$

(c) On pose $u=x^6$ puis $v=\sqrt{1+u}$ (ou directement $u=\sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}\,x^5dx = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{v}{v^2-1}2v\,dv = \frac{1}{3}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv = \frac{1}{3}\left(v+\int \frac{1}{v^2-1}\,dv\right) = \frac{1}{3}\left(v+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right)+C$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^6}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|\right)+C$$

(d)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{u}{u^2-1}2u\,du + \int \frac{v}{1-v^2}2v\,dv\right) \text{ (en posant } u=\sqrt{1+x} \text{ et } v=\sqrt{1-x})$$
$$= \int \left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du + \int \left(-1+\frac{1}{1-v^2}\right)dv$$
$$= u-v+\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right)+C$$
$$= \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right|+\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|\right)+C.$$

(e) On pose $u=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ et donc $x=\frac{u^2+1}{u^2-1}$, puis $dx=\frac{2u(-2)}{(u^2-1)^2}\,du$. Sur $]1,+\infty[$, on obtient

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx &= -2\int u\frac{2u}{(u^2-1)^2}\,du\\ &= 2\frac{u}{u^2-1}-2\int\frac{u^2-1}{}du\\ &= \frac{2u}{u^2-1}+2\ln\left||\frac{1+u}{1-u}\right|+C\\ &= 2\sqrt{x^2-1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right|+C\end{aligned}$$

(f) On note ε le signe de x.
$\sqrt{x^4-x^2+1}=\varepsilon x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=\varepsilon x\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+1}$ puis, $\frac{x^2+1}{x}.\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})'$. On pose donc $u=x-\frac{1}{x}$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\,dx &= \varepsilon\int\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+1}}.\frac{x^2+1}{x}\frac{1}{x}\,dx=\varepsilon\int\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du=\varepsilon\,\mathrm{argsh}(x-\frac{1}{x})+C\\ &= \varepsilon\ln(\frac{x^2-1+\varepsilon\sqrt{x^4-x^2+1}}{x})+C.\end{aligned}$$

(g) Sur $]0,1]$, on pose déjà $u=\sqrt{x}$ et donc, $x=u^2$, $dx=2u\,du$.

$$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx=\int\sqrt{\frac{1-u}{u}}2u\,du=2\int\sqrt{u(1-u)}\,du=2\int\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(u-\frac{1}{2})^2}\,du.$$

Puis, on pose $u-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin v$ et donc $du=\frac{1}{2}\cos v\,dv$. On note que $x\in]0,1]\Rightarrow u\in]0,1]\Rightarrow v=\arcsin(2u-1)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\Rightarrow\cos v\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx &= 2\int\sqrt{\frac{1}{4}(1-\sin^2 v)}\frac{1}{2}\cos v\,dv=\frac{1}{2}\int\cos^2 v\,dv=\frac{1}{4}\int(1+\cos(2v))\,dv\\ &= \frac{1}{4}(v+\frac{1}{2}\sin(2v))+C=\frac{1}{4}(v+\sin v\cos v)+C\\ &= \frac{1}{4}(\arcsin(2\sqrt{x}-1)+(2\sqrt{x}-1)\sqrt{1-(2\sqrt{x}-1)^2})+C\\ &\frac{1}{4}(\arcsin(2\sqrt{x}-1)+2(2\sqrt{x}-1)\sqrt{\sqrt{x}-x})+C\end{aligned}$$

(h) On pose $x=\mathrm{sh}\,t$ puis $u=e^t$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int\frac{1}{1+\mathrm{ch}\,t}\mathrm{ch}\,t\,dt=\int\frac{\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})}\frac{du}{u}=\int\frac{u^2+1}{u(u^2+2u+1)}\,du=\int(\frac{1}{u}-\frac{2}{(u+1)^2})\,du\\ &= \ln|u|+\frac{2}{u+1}+C.\end{aligned}$$

Maintenant, $t=\mathrm{argsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ et donc, $u=x+\sqrt{x^2+1}$. Finalement,

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{2}{x+\sqrt{x^2+1}}+C.$$

(i) On pose $u = \frac{1}{x}$ puis $v = \sqrt[3]{u^3+1} = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$ et donc $v^3 = u^3+1$ puis $v^2\,dv = u^2\,du$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}\,dx &= \int \frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{u})^3+1}}{\frac{1}{u^2}}\,\frac{-du}{u^2} = -\int \frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u}\,du = -\int \frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u^3}u^2\,du \\
&= -\int \frac{v}{v^3-1}v^2\,dv = \int (-1-\frac{1}{(v-1)(v^2+v+1)})\,dv \\
&= \int (-1-\frac{1}{3}\frac{1}{v-1}+\frac{1}{3}\frac{v+2}{v^2+v+1})\,dv \\
&= -v-\frac{1}{3}\ln|v-1|+\frac{1}{6}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}\,dv+\frac{1}{2}\int \frac{1}{(v+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dv \\
&= -v-\frac{1}{3}\ln|v-1|+\frac{1}{6}\ln(v^2+v+1)+\sqrt{3}\arctan(\frac{2v+1}{\sqrt{3}})+C...
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2653 ▲

(a) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x|+C$.

(b) $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

(c) $\int \arctan x\,dx = x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

(d) $\int \arccos x\,dx = x\arccos x+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

(e) $\int \operatorname{argsh} x\,dx = x\operatorname{argsh} x-\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\operatorname{argsh} x-\sqrt{1+x^2}+C$.

(f) $\int \operatorname{argch} x\,dx = x\operatorname{argch} x-\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = x\operatorname{argch} x-\sqrt{x^2-1}+C$.

(g) $\int \operatorname{argth} x\,dx = x\operatorname{argth} x-\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = x\operatorname{argth} x+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$ (on est sur $]-1,1[$).

(h) $\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2)-2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$.

(i)

$$\begin{aligned}
\int e^{\operatorname{Arccos} x}\,dx &= xe^{\operatorname{Arccos} x}+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\operatorname{Arccos} x}\,dx \\
&= xe^{\operatorname{Arccos} x}-\sqrt{1-x^2}e^{\operatorname{Arccos} x}+\int \sqrt{1-x^2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\operatorname{Arccos} x}\,dx
\end{aligned}$$

et donc, $\int e^{\operatorname{Arccos} x}\,dx = \frac{1}{2}(xe^{\operatorname{Arccos} x}-\sqrt{1-x^2}e^{\operatorname{Arccos} x})+C$.

(j)

$$\begin{aligned}
\int \cos x\ln(1+\cos x)\,dx &= \sin x\ln(1+\cos x)-\int \sin x\frac{-\sin x}{1+\cos x}\,dx = \sin x\ln(1+\cos x)-\int \frac{\cos^2 x-1}{\cos x+1}\,dx \\
&= \sin x\ln(1+\cos x)-\int (\cos x-1)\,dx = \sin x\ln(1+\cos x)-\sin x+x+C.
\end{aligned}$$

(k) $\int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\arctan x-2\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$.

Dans la dernière intégrale, on pose $u=\sqrt{x}$ et donc $x=u^2$ puis, $dx = 2u\,du$. On obtient $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du$. Mais,

$$\begin{aligned}
\frac{2u^2}{u^4+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1})+\frac{1}{2}(\frac{1}{(u-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}+\frac{1}{(u+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan(\sqrt{2}u-1)+\arctan(\sqrt{2}u+1))+C,$$

et donc,

$$\int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1}) - \sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2x}-1)+\arctan(\sqrt{2x}+1))+C.$$

(l) $\frac{x}{(x+1)^2}e^x = \frac{1}{x+1}e^x - \frac{1}{(x+1)^2}e^x = \left(\frac{1}{x+1}e^x\right)'$ et donc $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1}+C$.

(m) $\int \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x\,dx = \int e^{x\ln x - x}\,d(x\ln x - x) = e^{x\ln x-x}+C = \left(\frac{x}{e}\right)^x\,dx$.

(n) $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$.

(o)

$$\int e^{ax}\cos(\alpha x)\,dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{(a+i\alpha)x}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(a+i\alpha)x}}{a+i\alpha}\right)+C = \frac{e^{ax}}{a^2+\alpha^2}\mathrm{Re}((a-i\alpha)(\cos(\alpha x)+i\sin(\alpha x))+C$$
$$= \frac{e^{ax}(a\cos(\alpha x)+\alpha\sin(\alpha x))}{a^2+\alpha^2}+C$$

(p) $\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int\sin(\ln x)\,dx$ et donc $\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$.

(q) En posant $u=x^n$ et donc $du = nx^{n-1}dx$, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x^n}x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int\frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du,$$

puis en posant $v=\sqrt{u+1}$ et donc $u=v^2-1$ et $du=2vdv$, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du = \int\frac{v}{v^2-1}\,2vdv = 2\int\frac{v^2-1+1}{v^2-1}\,dv = 2v+\ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right|+C.$$

Finalement,

$$\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,dx = \frac{1}{n}(2\sqrt{x^n+1}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^n+1}}{1+\sqrt{x^n+1}}\right|)+C.$$

(r) $\int x^2e^x\sin x\,dx = \mathrm{Im}(\int x^2e^{(1+i)x}\,dx)$. Or,

$$\int x^2e^{(1+i)x}\,dx = x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\int xe^{(1+i)x}\,dx = x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}(x\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \int e^{(1+i)x}\,dx)$$
$$= x^2\frac{(1-i)e^{(1+i)x}}{2} + ixe^{(1+i)x} - i\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}+C$$
$$= e^x(\frac{1}{2}x^2(1-i)(\cos x+i\sin x)+ix(\cos x+i\sin x) - \frac{1}{2}(1+i)(\cos x+i\sin x)+C.$$

Par suite,

$$\int x^2e^x\sin x\,dx = e^x(\frac{x^2}{2}(\cos x+\sin x) - x\sin x - \frac{1}{2}(\cos x-\sin x))+C.$$

Correction de l'exercice 2654 ▲

Si $c \neq d$, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si il existe A et B tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-d)^2} \ (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} A+B=1 \\ -2(Ad+Bc) = -(a+b) \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} B = 1-A \\ A(d-c)+c = \frac{1}{2}(a+b) \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{a+b-2c}{2(d-c)} \\ B = \frac{2d-a-b}{2(d-c)} \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{a+b-2c}{2(d-c)}d^2 + \frac{2d-a-b}{2(d-c)}c^2 = ab$$

$$\Leftrightarrow d^2(a+b-2c)+c^2(2d-a-b) = 2ab(d-c) \Leftrightarrow (a+b)(d^2-c^2)-2cd(d-c) = 2ab(d-c)$$

$$\Leftrightarrow 2cd+(a+b)(c+d) = 2ab \Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab-cd).$$

Si $c = d$, il existe trois nombres A, B et C tels que $(x-a)(x-b) = A(x-c)^2+B(x-c)+C$ et donc tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^4} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-c)^3} + \frac{C}{(x-c)^4}.$$

Dans ce cas, les primitives sont rationnelles. Finalement, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si $c = d$ ou ($c \neq d$ et $(a+b)(c+d) = 2(ab-cd)$).

Correction de l'exercice 2655 ▲

(a) $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx$

Pour calculer cette intégrale on décompose la fraction $\frac{x+2}{x^2-3x-4}$ en éléments simples, le dénominateur n'étant pas irréductible. On sait que cette fraction rationnelle se décompose avec des dénominateurs de degré 1 et des constantes aux numérateurs :

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-4}$$

Il ne reste plus qu'à calculer α et β à l'aide de votre méthode favorite :

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{-\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{\frac{6}{5}}{x-4}$$

Chacune de ces fractions est du type $\frac{1}{u}$ qui s'intègre en $\ln|u|$, d'où :

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{6}{5}\int \frac{1}{x-4}\,dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + c$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,4\}$

(b) $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$

Le dénominateur $u = x^2+x+1$ est irréductible, la fraction est donc déjà décomposée en éléments simples. On fait apparaître artificiellement une fraction du type $\frac{u'}{u}$ qui s'intégrera à l'aide du logarithme :

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

Chacune de ces fractions s'intègre, la première est du type $\frac{u'}{u}$ dont une primitive sera $\ln|u|$, la deuxième sera du type $\frac{1}{1+v^2}$ dont une primitive est $\arctan v$.
En détails cela donne :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+x+1|\right] - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+x+1|\right] - 2\int \frac{1}{1+v^2}\frac{\sqrt{3}}{2}dv \quad \text{en posant } v = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+x+1|\right] - \sqrt{3}\left[\arctan v\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c
\end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

(c) $\int \sin^8 x \cos^3 x\,dx$

Lorsque l'on a une fonction qui s'exprime comme un polynôme (ou une fraction rationnelle), on peut tester un des changements de variable $u = \cos x$, $u = \sin x$ ou $u = \tan x$. Soit vous essayez les trois, soit vous appliquez les règles de Bioche. Ici, si l'on change x en $\pi - x$ alors $\sin^8 x \cos^3 x\,dx$ devient $\sin^8(\pi-x)\cos^3(\pi-x)\,d(\pi-x) = \sin^8 x(-\cos^3 x)(-dx) = \sin^8 x\cos^3 x\,dx$. Donc le changement de variable adéquat est $u = \sin x$.
Posons $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^8 x\cos^3 x\,dx &= \int \sin^8 x\cos^2 x(\cos x\,dx) = \int \sin^8 x(1-\sin^2 x)(\cos x\,dx) \\
&= \int u^8(1-u^2)du = \int u^8\,du - \int u^{10}\,du \\
&= \left[\frac{1}{9}u^9\right] - \left[\frac{1}{11}u^{11}\right] = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c
\end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

(d) $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

Comme $\frac{1}{\sin(-x)}(-dx) = \frac{1}{\sin x}\,dx$ la règle de Bioche nous indique le changement de variable $u = \cos x$.
Donc $du = -\sin x\,dx$.
Donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{-1}{\sin^2 x}(-\sin x\,dx) \\
&= \int \frac{-1}{1-\cos^2 x}(-\sin x\,dx) \\
&= -\int \frac{1}{1-u^2}\,du
\end{aligned}$$

On décompose cette fraction en éléments simples : $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+u} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-u}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\left[\ln|1+u|\right] - \frac{1}{2}\left[\ln|1-u|\right] \\
&= -\frac{1}{2}\ln|1+\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1-\cos x| + c
\end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur tout intervalle du type $]k\pi,(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{Z}$. Elle peut se réécrire sous différentes formes :
$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$
Un autre changement de variable possible aurait été $t=\tan\frac{x}{2}$.

(e) $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}dx$
La règle de Bioche nous indique le changement de variable $u=\sin x$, $du=\cos x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}dx &= \int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}\frac{1}{\cos x}(\cos x\,dx)\\ &= \int \frac{3-\sin x}{2\cos^2 x+3\sin x}(\cos x\,dx)\\ &= \int \frac{3-\sin x}{2-2\sin^2 x+3\sin x}(\cos x\,dx)\\ &= \int \frac{3-u}{2-2u^2+3u}du\end{aligned}$$

Occupons nous de la fraction que l'on réduit en éléments simples :
$$\frac{3-u}{2-2u^2+3u} = \frac{u-3}{(u-2)(2u+1)} = \frac{\alpha}{u-2}+\frac{\beta}{2u+1}$$
On trouve $\alpha=-\frac{1}{5}$ et $\beta=\frac{7}{5}$.
Ainsi
$$\begin{aligned}\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}dx &= \int\frac{\alpha\,du}{u-2}+\int\frac{\beta\,du}{2u+1}\\ &= \alpha\ln|u-2|+\beta\ln|2u+1|+c\\ &= -\frac{1}{5}\ln|2-\sin x|+\frac{7}{5}\ln|1+2\sin x|+c\end{aligned}$$

Cette primitive est définie pour les x vérifiant $1+2\sin x>0$ donc sur tout intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 2656 ▲

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$
Par intégration par parties avec $u=x$, $v'=\sin x$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx &= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u'v\\ &= \big[-x\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\ &= \big[-x\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\big[\sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 0-0 \quad + \quad 1-0\\ &= 1\end{aligned}$$

(b) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$
Posons le changement de variable $u = e^x$ avec $x = \ln u$ et $du = e^x\,dx$. La variable x varie de $x = 0$ à $x = 1$, donc la variable $u = e^x$ varie de $u = 1$ à $u = e$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}}\,dx &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\ &= \left[2\sqrt{u+1}\right]_1^e \\ &= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(c) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$
Posons le changement de variable $x = \tan t$, alors on a $dx = (1+\tan^2 t)dt$, $t = \arctan x$ et on sait aussi que $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = 1$ alors t doit varier de $t = \arctan 0 = 0$ à $t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2}(1+\tan^2 t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2 t} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t)+1)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

(d) $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$
Commençons par décomposer la fraction en éléments simples :

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

où l'on a trouvé $\alpha = 3$ et $\beta = -2$. La première est une intégrale du type $\int \frac{1}{u} = [\ln|u|]$ et la seconde $\int \frac{1}{u^2} = [-\frac{1}{u}]$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx &= 3\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= 3\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1 - 2\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 \\ &= 3\ln 2 - 0 \quad + \quad 1-2 \\ &= 3\ln 2 - 1\end{aligned}$$

(e) Notons $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$.
Posons le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et on a $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$. Alors x variant de $x = \frac{1}{2}$ à $x = 2$, u varie lui de $u = 2$ à $u = \frac{1}{2}$ (l'ordre est important !).

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac12}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx\\
&= \int_{2}^{\frac12}(1+u^2)\arctan\frac{1}{u}\left(-\frac{du}{u^2}\right)\\
&= \int_{\frac12}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan\frac{1}{u}\,du\\
&= \int_{\frac12}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan u\right)du \quad \text{car} \quad \arctan u+\arctan\frac{1}{u}=\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\frac12}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)du-\int_{\frac12}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan u\,du\\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{u}+u\right]_{\frac12}^{2}-I\\
&= \frac{3\pi}{2}-I
\end{aligned}
$$

Conclusion : $I=\frac{3\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 2657 ▲

(a) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente (en fait elle vaut $\sqrt{\pi}$).

(b) $\int_1^{\infty}x^x dx$ est divergente.

(c) $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(x^{-1})}{\ln(1+x)}dx$ est divergente.

(d) $\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\ln(2+\sqrt{3})$.

(e) $\int_0^{\infty}\frac{x^5}{x^{12}+1}dx=1/12\,\pi$.

(f) $\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx=2$.

(g) $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sinh(x)}dx=-\ln\operatorname{th}(1/2)$.

Correction de l'exercice 2668 ▲

Réponses : $\frac{\pi}{2}-\ln 2, \pi, \frac{1}{(n-1)^2}$.

Correction de l'exercice 2694 ▲

$f(x)=\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $-1<x<1$.

Correction de l'exercice 2695 ▲

$\frac{\pi^2}{4}$.

Correction de l'exercice 2696 ▲

$2nI_n - (2n+2)I_{n+1} = 0 \Rightarrow I_n = -\frac{\pi}{4n}$.

Correction de l'exercice 2697 ▲

$I_n + I_{n+2} = \frac{2I_{n+1}}{\sin\alpha} \Rightarrow I_n = \frac{\pi}{\cos\alpha}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^n$.

Correction de l'exercice 2698 ▲

$I_n = \pi\sqrt{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{3}{4k}\right)$.

Correction de l'exercice 2699 ▲

Décomposer en éléments simples et intégrer. On obtient $I_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n-1}^{k-1}\ln k$.

Correction de l'exercice 2700 ▲

(a)

(b)

(c) $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0 \Rightarrow A_n = \frac{n\pi}{2}$.
$A_n - B_n = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ pour $n \geqslant 1$.

(d) $J = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2704 ▲

$1-\gamma$.

Correction de l'exercice 2705 ▲

(a) Intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt &= \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\left(\ln t - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{k}\right)dt\\ &= \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\ln(t/k)\,dt + \left(\ln k - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

Soit $I_k = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\ln(t/k)\,dt$. On pose $t = ku$:

$$\begin{aligned}I_k &= \frac{k^{k+1}}{k!}\int_{u=0}^{+\infty}(ue^{-u})^k\ln u\,du\\ &= \frac{k^{k+1}}{k!}\int_{u=0}^{+\infty} d\left(\frac{(ue^{-u})^{k-1}}{k-1}\right)\frac{u^2e^{-u}\ln u}{1-u}\\ &= -\frac{k^{k+1}}{k!(k-1)}\int_{u=0}^{+\infty}(ue^{-u})^{k-1}d\left(\frac{u^2e^{-u}\ln u}{1-u}\right).\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant ue^{-u} \leqslant e^{-1}$, il reste $\sqrt{k}$ au dénominateur multiplié par quelque chose de borné.

(b)

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{1}\frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,dt &= \int_{t=0}^{1}\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt-\int_{t=1}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(-\ln x-\int_{t=x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\left((e^{-x}-1)\ln x-\int_{t=x}^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt\right)\\ &= -\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt.\end{aligned}$$

(c) $\int_{t=x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=(t=-\ln(1-u))=\int_{u=1-e^{-x}}^{1}\frac{-du}{\ln(1-u)}$.

Correction de l'exercice 2707 ▲

$\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2709 ▲

(a) En supposant f positive décroissante, $\int_0^{+\infty}f\leqslant tg(t)\leqslant tf(0)+\int_0^{+\infty}f$.

(b) $\int_{u=Pt}^{Qt}f(u)\,du-\sum_{n=P}^{Q-1}tf(nt)=\int_{u=Pt}^{Qt}(f(u)-f(t[u/t]))\,du=\int_{u=Pt}^{Qt}t(1-\{u/t\})f'(u)\,du\to 0$ lorsque $P,Q\to\infty$.

Donc la série de terme général $tf(nt)$ est de Cauchy ; elle converge.

On a alors $\int_0^{+\infty}f-tg(t)=\int_{u=0}^{+\infty}t(1-\{u/t\})f'(u)\,du\to 0$ lorsque $t\to 0^+$.

(c) $\int_0^{+\infty}2f-2tg(t)=\int_{u=0}^{+\infty}tf'(u)\,du+\int_{u=0}^{+\infty}t(1-2\{u/t\})f'(u)\,du=tf(0)-\int_{u=0}^{+\infty}t^2\{u/t\}(1-\{u/t\})f''(u)\,du$.

Correction de l'exercice 2712 ▲

$0\leqslant xf(x)\leqslant 2\int_{t=x/2}^{x}f(t)\,dt\to 0$ (lorsque $x\to+\infty$).

$\int_{t=1}^{x}t(f(t)-f(t+1))\,dt=\int_{t=1}^{2}tf(t)\,dt+\int_{t=2}^{x}f(t)\,dt-\int_{t=x}^{x+1}(t-1)f(t)\,dt\to\int_{t=1}^{2}tf(t)\,dt+\int_{t=2}^{+\infty}f(t)\,dt$ (lorsque $x\to+\infty$).

Correction de l'exercice 2714 ▲

(a) $\int_{t=x}^{y}\frac{f(at)}{t}\,dt=\int_{t=ax}^{ay}\frac{f(t)}{t}\,dt\Rightarrow\int_{t=x}^{y}\frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt=\int_{t=ax}^{x}\frac{f(t)}{t}\,dt+\int_{t=y}^{ay}\frac{f(t)}{t}\,dt$.

On obtient $\int_{t=0}^{+\infty}\frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt=(L-\ell)\ln a$.

(b) $I=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt=\ln 2$.

Correction de l'exercice 2715 ▲

(a)

(b) $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$.

Correction de l'exercice 2716 ▲

$\int_{t=a}^{b}F(t)\,dt=\int_{u=a-1}^{a+1}\frac{u-(a-1)}{2}f(u)\,du+\int_{u=a+1}^{b-1}f(u)\,du+\int_{u=b-1}^{b+1}\frac{b+1-u}{2}f(u)\,du$.

$= \varphi(a+1) - \frac{1}{2}\int_{u=a-1}^{a+1} \varphi(u)\,du + \int_{u=a+1}^{b-1} f(u)\,du + \frac{1}{2}\int_{u=b-1}^{b+1} \varphi(u)\,du - \varphi(b-1)$ où φ est une primitive de f.

Correction de l'exercice 2717 ▲

Soit $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$: $\frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} tf(t)\,dt = F(x) - \frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} F(t)\,dt$.

Correction de l'exercice 2720 ▲

(a)

(b) e^{-x}/x.

(c) $-\ln x$.

Correction de l'exercice 2721 ▲

(a)

(b) $I_n = \sqrt{n}K_{2n+1}$, $J_n = \sqrt{n}K_{2n-1}$.

(c) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l'exercice 2722 ▲

$I_n = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$.

Correction de l'exercice 2723 ▲

Intégrale trivialement convergente. Couper en $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$, changer x en $\frac{1}{x}$ dans l'une des intégrales, regrouper et poser $u = x - \frac{1}{x}$. On obtient $I = \int_{u=0}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l'exercice 2724 ▲

L'intégrale converge par parties.

Correction de l'exercice 2725 ▲

$\int^x \cos(P(t))\,dt = \left[\frac{\sin(P(t))}{P'(t)}\right]^x - \int^x \sin(P(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P'(t)}\right)dt$.

Correction de l'exercice 2726 ▲

$I = J$ par changement $u \mapsto 1/u$.

$I + J = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 2729 ▲

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{X}\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\,dx &= \left[x\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\right]_{x=0}^{X}+\int_{x=0}^{X}\sin x\,dx\\
&= X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt+1-\cos X\\
&= X\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{t=X}^{+\infty}-X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt+1-\cos X\\
&= -X\left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_{t=X}^{+\infty}-X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{2\sin t}{t^3}\,dt+1\\
&\to 1 \text{ lorsque } X\to+\infty
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2730 ▲

$2|ff''|\leqslant f^2+f''^2$ donc ff'' est intégrable. On en déduit que f'^2 admet une limite finie en $+\infty$, et cette limite est nulle sans quoi f^2 ne serait pas intégrable (si $f'(x)\to\ell$ lorsque $x\to+\infty$ alors $f(x)/x\to\ell$). Ainsi f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, f est lipschitzienne et donc uniformément continue. De plus,

$$\int_{t=0}^{X} f'^2(t)\,dt = f(X)f'(X)-f(0)f'(0)-\int_{t=0}^{X} f(t)f''(t)\,dt$$

donc $f(X)f'(X)$ admet en $+\infty$ une limite finie ou $+\infty$, et le cas $f(X)f'(X)=\frac{1}{2}(f^2)'(X)\to+\infty$ lorsque $X\to+\infty$ contredit l'intégrabilité de f^2 donc ce cas est impossible, ce qui prouve que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Enfin, ff' est intégrable (produit de deux fonctions de carrés intégrables) donc f^2 admet une limite finie en $+\infty$ et cette limite vaut zéro par intégrabilité de f^2.

Correction de l'exercice 2731 ▲

On pose $u_n=\int_{t=n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt=\int_{t=0}^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt$. Par encadrement du dénominateur on a $u_n\sim\frac{2}{n\pi}$, d'où $u_0+\dots+u_n\sim\frac{2\ln n}{\pi}$ et, par encadrement encore, l'intégrale arrêtée en x est équivalente à $\frac{2\ln x}{\pi}$.

Correction de l'exercice 2732 ▲

(a) Pour $x\geqslant 0$, $x^2+4x+1\geqslant 0$ et donc la fonction $f\,:\,x\mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand x tend vers $+\infty$, $x+2--\sqrt{x^2+4x+1}=\frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}}\sim 32x$. Comme la fonction $x\mapsto\frac{3}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n ?est pas intégrable sur $[0;+\infty[$.

(b) Pour $x\geqslant 1$, $1+\frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc la fonction $f\,:\,x\mapsto e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$.
Quand x tend vers $+\infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}=e-\frac{e}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ puis $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e}{2x}$.
Puisque la fonction $x\mapsto\frac{e}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

(c) La fonction $f\,:\,x\mapsto\frac{\ln x}{x+e^x}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.
• En 0, $\frac{\ln x}{x+e^x}\sim\ln x$ et donc $f(x)\underset{x\to 0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Comme $\frac{1}{2}<1$, la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f.
• En $+\infty$, $f(x)\sim\frac{\ln x}{e^x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme $2>1$, la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction f.
Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(d) La fonction $x\mapsto\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$ est continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction $f\,:\,x\mapsto\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

En $+\infty$, $\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\frac{1}{3}\ln x+\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right)=\frac{1}{3}\ln x+\ln\left(\frac{1}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{2}{3}\ln x-\ln 3+O\left(\frac{1}{x}\right)$. Par suite, $\sqrt{x}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+o(1)$.
Mais alors $x^2f(x)\underset{x\to+\infty}{=}\exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+2\ln x+o(1)\right)$ et donc $\lim_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$. Finalement $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

(e) La fonction $f\ :\ x\mapsto e^{-\sqrt{x^2-x}}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
Quand x tend vers $+\infty$, $x^2f(x)=\exp\left(-\sqrt{x^2-x}+2\ln x\right)=\exp(-x+o(x))$ et donc $x^2f(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$.
$f(x)$ est ainsi négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

(f) La fonction $f\ :\ x\mapsto x^{-\ln x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
• Quand x tend vers 0, $x^{-\ln x}=e^{-\ln^2 x}\to 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 0.
• Quand x tend vers $+\infty$, $x^2f(x)=\exp\left(-\ln^2 x+2\ln x\right)\to 0$. Donc f est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ et f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(g) La fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
• Quand x tend vers 0, $f(x)\sim\frac{5x-3x}{x^5/3}=\frac{2}{x^{2/3}}>0$. Puisque $\frac{2}{3}<1$, la fonction $x\mapsto\frac{2}{x^{2/3}}$ est positive et intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f.
• En $+\infty$, $|f(x)|\leqslant\frac{2}{x^{5/3}}$ et puisque $\frac{5}{3}>1$, la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(h) La fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{\ln x}{x^2-1}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
• En 0, $f(x)\sim-\ln x=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
• En 1, $f(x)\sim\frac{\ln x}{2(x-1)}\sim\frac{1}{2}$. La fonction f se prolonge par continuité en 1 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 1 à gauche ou à droite.
• En $+\infty$, $x^{3/2}f(x)\sim\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=o(1)$. Donc $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^{3/2}}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
Finalement, f est intégrable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

(i) La fonction$f\ :\ x\mapsto\frac{e^x}{\sqrt{|x|}}$ est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ et paire. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0,+\infty[$.
f est positive et équivalente en 0 à droite à $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.
f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ puis par parité sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut par parité $2\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$.

(j) La fonction$f\ :\ x\mapsto\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$, paire et équivalente au voisinage de 1 à droite à $\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. f est donc intégrable sur $]-1,1[$.

(k) La fonction$f\ :\ x\mapsto\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ est continue et positive sur $]0,1[$, équivalente au voisinage de 0 à droite à $\frac{1}{x^{2/3}}$ et au voisinage de 1 à gauche à $\frac{1}{(1-x)^{1/3}}$. f est donc intégrable sur $]0,1[$.

(l) La fonction$f\ :\ x\mapsto\frac{1}{\arccos(1-x)}$ est continue et positive sur $]0,1]$.
En 0, $\arccos(1-x)=o(1)$. Donc $\arccos(1-x)\sim\sin\left(\arccos(1-x)\right)=\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{2x-x^2}\sim\sqrt{2}\sqrt{x}$.
Donc $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ et f est intégrable sur $]0,1[$.

Correction de l'exercice 2733 ▲

(a) Pour tout couple de réels (a,b), la fonction $f\ :\ x\mapsto \frac{1}{x^a\ln^b x}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$. Etudions l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$.

1er cas. Si $a>1$, $x^{(a+1)/2}f(x)=\frac{1}{x^{(a-1)/2}\ln^b x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ car $\frac{a-1}{2}>0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^{(a+1)/2}}\right)$. Comme $\frac{a+1}{2}>1$, la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f est intégrable sur $[2,+\infty[$.

2ème cas. Si $a<1$, $x^{(a+1)/2}f(x)=\frac{x^{(1-a)/2}}{\ln^b x}\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$ car $\frac{1-a}{2}>0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x)$ est prépondérant devant $\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ en $+\infty$. Comme $\frac{a+1}{2}<1$, la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$.

3ème cas. Si $a=1$. Pour $X>2$ fixé , en posant $t=\ln x$ et donc $dt=\frac{dx}{x}$ on obtient

$$\int_2^X\frac{1}{x\ln^b}\,dx=\int_{\ln 2}^{\ln X}\frac{dt}{t^b}.$$

Puisque $\ln X$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ et que les fonctions considérées sont positives, f est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $b>1$.

En résumé ,

$$\boxed{\text{la fonction } x\mapsto\frac{1}{x^a\ln^b x}\text{ est intégrable sur }[2,+\infty[\text{ si et seulement si } a>1 \text{ ou } (a=1 \text{ et } b>1).}$$

(En particulier, la fonction $x\mapsto\frac{1}{x\ln x}$ n'est pas intégrable sur voisinage de $+\infty$ bien que négligeable devant $\frac{1}{x}$ en $+\infty$).

(b) Pour tout réel a, la fonction $f\ :\ x\mapsto(\tan x)^a$ est continue et strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout réel x de$\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{f(x)}$.

• **Etude en** 0 **à droite.** $f(x)\underset{x\to0}{\sim}x^a$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite si et seulement si $a>-1$.

• **Etude en** $\frac{\pi}{2}$ **à gauche.**$f(x)=\frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-a}$. Donc f est intégrable sur un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à gauche si et seulement si $a<1$.

En résumé, f est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si $-1<a<1$.

(c) Pour $x\geqslant1$, $1+\frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc pour tout couple (a,b) de réels, la fonction $f\ :\ x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

En $+\infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{=}(1-a)+\frac{1-b}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

• Si $a\neq1$, f a une limite réelle non nulle en $+\infty$ et n'est donc pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

• Si $a=1$ et $b\neq1$, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1-b}{x}$. En particulier, f est de signe constant sur un voisinage de $+\infty$ et n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

• Si $a=b=1$, $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et dans ce cas, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

En résumé, f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $a=b=1$.

(d) Pour tout couple (a,b) de réels, la fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{1}{x^a(1+x^b)}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

• **Etude en** 0**.**

-Si $b>0$, $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a<1$,

-si $b=0$, $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a<1$,

-si $b<0$, $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a+b<1$.

• **Etude en** $+\infty$**.**

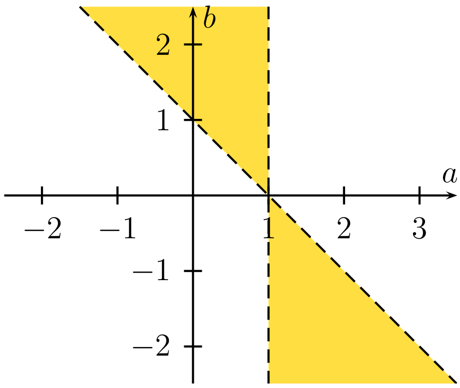
-Si $b>0$, $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a+b>1$,

-si $b=0$, $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a>1$,

-si $b<0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a>1$.

En résumé, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si (($b\geqslant 0$ et $a<1$) ou ($b<0$ et $a+b<1$)) et (($b>0$ et $a+b>1$) ou ($b\leqslant 0$ et $a>1$)) ce qui équivaut à ($b>0$ et $a+b>1$ et $a<1$) ou ($b<0$ et $a>1$ et $a+b<1$).

Représentons graphiquement l'ensemble des solutions. La zone solution est la zone colorée.



Correction de l'exercice 2734 ▲

(a) Soient ε et X deux réels tels que $0<\varepsilon<X$. Les deux fonction $x\mapsto 1-\cos x$ et $x\mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_1^X + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{1-\cos X}{X} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

• La fonction $x\mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et donc intégrable sur un voisinage de 0, est dominée par $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction $x\mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ a une limite réelle quand ε tend vers 0 et X tend vers $+\infty$.

• $\left|\frac{1-\cos X}{X}\right| \leqslant \frac{1}{X}$ et donc $\lim_{X\to+\infty}\frac{1-\cos X}{X} = 0$.

• $\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\lim_{\varepsilon\to\varepsilon}\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} = 0$.

On en déduit que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ est une intégrale convergente et de plus

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(u)}{4u^2}\,2du = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx \text{ converge et de plus } \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.}$$

(b) La fonction $f\ :\ x\mapsto \frac{\sin x}{x^a}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Sur $]0,1[$, la fonction f est de signe constant et l'existence de $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$ équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $]0,1]$. Puisque f est équivalente en 0 à $\frac{1}{x^{a-1}}$, l'intégrale impropre $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge en 0 si et seulement si $a>0$. On suppose dorénavant $a>0$.

• Soit $X>1$. Les deux fonction $x\mapsto -\cos x$ et $x\mapsto \frac{1}{x^a}$ sont de classe C^1 sur le segment $[1,X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x^a}\right]_1^X - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx = -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1 - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx.$$

Maintenant, $\left|\frac{\cos x}{x^{a+1}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{a+1}}$ et puisque $a+1>1$, la fonction $x\mapsto \frac{\cos x}{x^{a+1}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $X\mapsto \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Comme d'autre part, la fonction $X\mapsto -\frac{\cos X}{X^a}+\cos 1$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$, on a montré que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge en $+\infty$.

Finalement

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx \text{ converge si et seulement si } a > 0.}$$

(c) Soit X un réel strictement positif. Le changement de variables $t = x^2$ suivi d'une intégration par parties fournit :

$$\int_1^X e^{ix^2}\,dx = \int_1^{X^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{i}{2}\left(-\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} + e^i - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\,dt\right)$$

Maintenant, $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} = 0$ car $\left|\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}}\right| = \frac{1}{\sqrt{X}}$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\left|\frac{e^{it}}{t^{3/2}}\right| = \frac{1}{t^{3/2}}$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\,dx$ est une intégrale convergente et puisque d'autre part la fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a montré que

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx \text{ converge.}}$$

On en déduit encore que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ sont des intégrales convergentes (intégrales de FRESNEL).

(d) La fonction $f : x \mapsto x^3\sin(x^8)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = x^4$ fournit

$$\int_0^X x^3\sin(x^8)dx = \frac{1}{4}\int_0^{X^4} \sin(t^2)\,dt = \frac{1}{4}\mathrm{Im}\left(\int_0^{X^4} e^{it^2}\,dt\right).$$

D'après 3), $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ est une intégrale convergente et donc $\int_0^{+\infty} x^3\sin(x^8)\,dx$ converge.

(e) La fonction $f : x \mapsto \cos(e^x)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = e^x$ fournit

$$\int_0^X \cos(e^x)\,dx = \int_1^{e^X} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

On montre la convergence en $+\infty$ de cette intégrale par une intégration par parties analogue à celle de la question 1). L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,dx$ converge .

(f) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $1 + x^3\sin^2 x \geqslant 1 > 0$ et donc la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^3\sin^2 x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

La fonction f étant positive, la convergence de l'intégrale proposée équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $[0,+\infty[$, intégrabilité elle-même équivalente à la convergence de la série numérique de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x^3\sin^2 x}\,dx$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n \geqslant 0$ et d'autre part

$$\mathrm{u}_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x^3\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(u+n\pi)^3\sin^2 u}\,du$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{1+n^3\pi^3\sin^2}\,du = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+n^3\pi^3\sin^2 u}\,du$$

$$\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+n^3\pi^3\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}\,du \text{ (par concavité de la fonction sinus sur } [0,\pi])$$

$$= 2\times\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}\int_0^{(n\pi)^{3/2}} \frac{1}{1+v^2}\,dv \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}.$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et la série de terme général u_n converge. On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^3\sin^2 x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2735 ▲

Existence et calcul de :

1) (** I) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ 2) (très long) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}\,dx$
3) (** I) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx$ 4) (***) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\,dx$

5)(***) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ 6) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx$

7) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{5\operatorname{ch}x+3\operatorname{sh}x+4}\,dx$ 8) (***) $\int_0^{+\infty} \left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$

9) (** I) $\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$ 10) (I très long) $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^a}\,dx$ (calcul pour $a \in \left\{\frac{3}{2},2,3\right\}$)

11) (***) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx$ 12) (*** I) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ $(0<a<b)$

Correction de l'exercice 2736 ▲

La fonction $f\ :\ x\mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, quand x tend vers 0, $\ln(\sin x)\sim \ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Par suite, f est intégrable sur$\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Soient $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$ et $J=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$. Le changement de variables $x=\frac{\pi}{2}-t$ fournit J existe et $J=I$. Par suite,

$$2I = I+J = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin x\cos x)\,dx = -\frac{\pi\ln 2}{2}+\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(2x))\,dx = -\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,du$$
$$= -\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin u)\,du\right) = -\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{0}\ln(\sin(\pi-t))\,(-dt)\right) = -\frac{\pi\ln 2}{2}+I.$$

Par suite, $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx = -\frac{\pi\ln 2}{2}.}$$

(b) Pour $n\geqslant 2$, posons $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a $0<\frac{k\pi}{2n}<\frac{\pi}{2}$ et donc $P_n>0$. D'autre part, $\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)=\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ et $\sin\frac{n\pi}{2n}=1$. On en déduit que

$$P_n^2=\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right),$$

puis

$$P_n^2=\prod_{k=1}^{2n-1}\frac{e^{ik\pi/(2n)}-e^{-ik\pi/(2n)}}{2i} = \frac{1}{(2i)^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(-e^{-ik\pi/(2n)}\right)\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)$$
$$=\frac{1}{(2i)^{2n-1}}(-1)^{2n-1}(e^{-i\pi/2})^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right) = \frac{1}{2^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)$$

Maintenant, le polynôme Q unitaire de degré $2n-1$ dont les racines sont les $2n-1$ racines $2n$-èmes de l'unité distinctes de 1 est

$$\frac{X^{2n}-1}{X-1}=1+X+X^2+\dots+X^{2n-1}$$

et donc $\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)=Q(1)=2n$. Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=P_n=\sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Pour $0\leqslant k\leqslant n$, posons alors $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ de sorte que $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=\frac{\pi}{2}$ est une subdivision de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ à pas constant égal à $\frac{\pi}{2n}$.
Puisque la fonction $x\mapsto\ln(\sin x)$ est continue et croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a $\frac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_k))\leqslant\int_{x_k}^{x_{k+1}}\ln(\sin x)\,dx$ puis en sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)\leqslant\int_{\pi/(2n)}^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$$

De même, pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}}\ln(\sin x)\,dx\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_{k+1}))$ et en sommant

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(P_n).$$

Finalement, $\forall n\geqslant 2$, $\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)+\int_0^{\pi/(2n)}\ln(\sin x)\,dx\leqslant I\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$. Mais $\ln(P_n)=\ln n-(n-1)\ln 2$ et donc $\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$ tend vers $-\frac{\pi\ln 2}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et comme d'autre part, $\int_0^{\pi/(2n)}\ln(\sin x)\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (puisque la fonction $x\ :\mapsto\ln(\sin x)$ est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$), on a redémontré que $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

Correction de l'exercice 2737 ▲

La fonction $f\ :\ t\mapsto\frac{\ln t}{t-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$, négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0 et prolongeable par continuité en 1. La fonction f est donc intégrable sur $]0;1[$.
1ère solution. (à la main, sans utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Pour $t\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\ln t}{t-1}=\frac{-\ln t}{1-t}=-\sum_{k=0}^{n}t^k\ln t+\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}$$

Pour $t\in]0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $f_n(t)=-t^n\ln t$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Chaque fonction f_k, $0\leqslant k\leqslant n$, est continue sur $]0,1]$ et négligeable en 0 devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Donc chaque fonction f_k est intégrable sur $]0,1]$ et donc sur $]0,1[$. Mais alors, il en est de même de la fonction $t\mapsto\frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}=\frac{\ln t}{t-1}+\sum_{k=0}^{n}t^k\ln t$ et

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt=-\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^k\ln t\,dt+\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt$$

• La fonction $g\ :\ t\mapsto\frac{t\ln t}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1. Cette fonction est en particulier bornée sur $]0,1[$. Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt\right|\leqslant\int_0^1 t^n|g(t)|\,dt\leqslant M\int_0^1 t^n\,dt=\frac{M}{n+1}.$$

Par suite, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt=0$. On en déduit que la série de terme général $-\int_0^1 t^k\ln t\,dt$ converge et que

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1(-t^k\ln t)\,dt.$$

• Soit $\varepsilon\in]0,1[$. Pour $k\in\mathbb{N}$, une intégration par parties fournit

$$\int_\varepsilon^1(-t^k\ln t)\,dt=\left[-\frac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_\varepsilon^1+\frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 t^k\,dt=\frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1}+\frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\int_\varepsilon^1(-t^k\ln t)\,dt=\frac{1}{(k+1)^2}$. Finalement,

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.}$$

2ème solution. (utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,1[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et de plus, la fonction f est continue sur $]0,1[$. Enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 2738 ▲

La fonction $f\ :\ t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc est intégrable sur $]0,1[$.

Soit $x\in]0,1[$. Chacune des deux fonctions $t\mapsto\frac{t}{\ln t}$ et $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ se prolonge par continuité en 0 et est ainsi intégrable sur $]0,x]$. On peut donc écrire

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,dt.$$

Dans la première intégrale, on pose $u=t^2$ et on obtient $\int_0^x \frac{t}{\ln t}\,dt = \int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)}\,dt = \int_0^{x^2}\frac{1}{\ln u}\,du$ et donc

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_0^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt.$$

On note alors que, puisque $x\in]0,1[$, $x^2<x$. Pour $t\in[x^2,x]$, on a $t\ln t<0$ et donc $\frac{x}{t\ln t}\leqslant\frac{t}{t\ln t}=\frac{1}{\ln t}\leqslant\frac{x^2}{\ln}t$ puis par croissance de l'intégrale, $\int_{x^2}^x\frac{x}{t\ln t}\,dt\leqslant\int_{x^2}^x\frac{1}{\ln t}\,dt\leqslant\int_{x^2}^x\frac{x^2}{t\ln t}\,dt$ et donc

$$x^2\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt\leqslant\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dtx\leqslant x\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt$$

Maintenant, $\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt=\ln|\ln(x^2)|-\ln|\ln x|=\ln 2$ et on a montré que, pour tout réel x de $]0,1[$,

$$x^2\ln 2\leqslant\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}\,dt\leqslant x\ln 2$$

Quand x tend vers 1, on obtient

$$\boxed{\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,dt=\ln 2.}$$

Correction de l'exercice 2739 ▲

(a) La fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, quand t tend $+\infty$,

$$e^{-t^2}\sim\left(1+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right).$$

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison, quand x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,dt\sim\int_x^{+\infty}\left(-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right)'\,dt=\frac{1}{2x}e^{-x^2},$$

et donc

$$\boxed{e^{x^2}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,dt\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}.}$$

(b) Pour $a>0$ fixé, $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$ converge (se montre en intégrant par parties (voir exercice 2734)) puis

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx&=-\int_1^a\frac{\cos x}{x}\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx\underset{a\to0}{=}-\int_1^a\frac{\cos x}{x}\,dx+O(1)\\&\underset{a\to0}{=}-\int_1^a\frac{1}{x}\,dx+\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx+O(1)\underset{a\to0}{=}-\ln a+\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx+O(1).\end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{1-\cos x}{x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{2}$ et en particulier, $\frac{1-\cos x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par suite, la fonction $x\mapsto\frac{1-\cos x}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur $]0,1]$ et en particulier, $\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx$ a une limite réelle quand a tend vers 0. On en déduit que $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx\underset{a\to0}{=}-\ln a+O(1)$ et finalement

$$\boxed{\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to 0}{\sim} -\ln a.}$$

(c) Soit $a>0$.

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,dx-\frac{1}{a^2}\right| = \left|\int_0^1\left(\frac{1}{x^3+a^2}-\frac{1}{a^2}\right)\,dx\right| = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^3+a^2)a^2}\,dx \leqslant \frac{1}{a^4}$$

Donc, $\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{=} \frac{1}{a^2}+o\left(\frac{1}{a^2}\right)$ ou encore

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}.}$$

Correction de l'exercice 2740 ▲

• **Domaine de définition.** Soit $x\in\mathbb{R}$.

Si $x<0$, la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ n'est pas définie sur $[x,0[\subset[x,x^2]$ et $f(x)$ n'est pas défini.

Si $0<x<1$, $[x^2,x]\subset]0,1[$. Donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2,x]$. Dans ce cas, $f(x)$ existe et est de plus strictement positif car $\ln t<0$ pour tout t de $]0,1[$.

Si $x>1$, $[x,x^2]\subset]1,+\infty[$. Donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x,x^2]$. Dans ce cas aussi, $f(x)$ existe et est strictement positif.

Enfin, $f(0)$ et $f(1)$ n'ont pas de sens.

$$\boxed{f \text{ est définie sur } D=]0,1[\cup]1,+\infty[\text{ et strictement positive sur } D.}$$

• **Dérivabilité.** Soit I l'un des deux intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur I. Soit F une primitive de cette fonction sur I.

Si $x\in]0,1[$, on a $[x^2,x]\subset]0,1[$ et donc $f(x)=F(x^2)-F(x)$. De même, si $x\in]1,+\infty[$.

On en déduit que f est de classe C^1 sur D. De plus, pour $x\in D$,

$$f'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=\frac{2x}{\ln(x^2)}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}.$$

• **Variations.** f' est strictement positive sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (mais pas nécessairement sur D).

• **Etude en 0.** Soit $x\in]0,1[$. On a $0<x^2<x<1$ et de plus la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est décroissante sur $[x^2,x]\subset]0,1[$ en tant qu'inverse d'une fonction strictement négative et strictement croissante sur $]0,1[$. Donc, $\frac{x-x^2}{\ln x}\leqslant\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln t}\,dt\leqslant\frac{x-x^2}{\ln(x^2)}$ puis

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x^2-x}{2\ln x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{x^2-x}{\ln x}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to0^+}f(x)=0$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ (on note encore f le prolongement).

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers 0. Ainsi,

- f est continue sur $[0,1[$,
- f est de classe C^1 sur $]0,1[$,
- f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0.

D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et $f'(0)=0$.

• **Etude en 1.** On a vu à l'exercice 2738 que $\lim_{x\to1}f(x)=\ln 2$ (la limite à droite en 1 se traite de manière analogue). On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1)=\ln 2$ (on note encore f le prolongement obtenu).

Ensuite quand x tend vers 1, $f'(x)$ tend vers 1. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(1)=1$.

En particulier, f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et d'après plus haut f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• **Etude en $+\infty$.** Pour $x>1$, $f(x)\geqslant x^2-x\ln x$. Donc $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

• **Convexité.** Pour $x\in D$, $f''(x)=\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\ln^2 x}$.

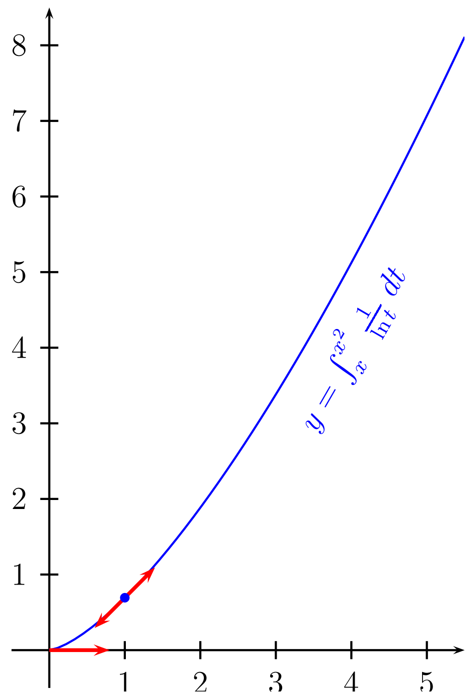
En 1, en posant $x=1+h$ où h tend vers 0, on obtient

$$f''(1+h) = \frac{(1+h)\ln(1+h)-h}{(1+h)\ln^2(1+h)} = \frac{(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)-h}{h^2+o(h^2)} = \frac{1}{2}+o(1).$$

f est donc de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $f''(1) = \frac{1}{2}$.

Pour $x \neq 1$, $f''(x)$ est du signe de $g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ dont la dérivée est $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. La fonction g est stictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Donc pour $x \neq 1$, $g(x) > g(1) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) > 0$ et donc que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^+$.

• **Graphe.**



Correction de l'exercice 2741 ▲

La fonction $f : x \mapsto \frac{(-1)^{E(x)}}{x}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ et donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$.

Soient X un réel élément de $[2,+\infty[$ et $n = E(X)$.

$$\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx.$$

Or, $\left|\int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{X-n}{n} \leqslant \frac{1}{E(X)}$. Cette dernière expression tend vers 0 quand le réel X tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{X\to+\infty}\int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = 0$.

D'autre part, la suite $\left((-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ est de signe alternée et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $k \geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore, quand le réel X tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ a une limite réelle.

Il en est de même de $\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$ converge. De plus

$$\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Calcul. Puisque la série converge, on a $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(1\times 3\times\ldots\times(2n-1))^2\times(2n+1)}{(2\times 4\times\ldots\times(2n))^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1)\right).$$

D'après la formule de STIRLING,

$$\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2^{4n}}\times\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{4\pi n})^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{2\pi n})^4}\times(2n)=\frac{2}{\pi}.$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ et on a montré que

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Correction de l'exercice 2742 ▲

(a) Puisque f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, pour $x\geqslant 2$ on a

$$0\leqslant xf(x)=2\left(x-\frac{x}{2}\right)f(x)\leqslant 2\int_{x/2}^{x}f(t)\,dt=2\left(/dintx/2+\infty f(t)\,dt-\int_x^{+\infty}f(t)\,dt\right)$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ car f est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc si f est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$ alors $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) La fonction $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.
Soit $X\geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx&=\int_1^X xf(x)\,dx-\int_2^{X+1}(x-1)f(x)\,dx=\int_1^X xf(x)\,dx-\int_2^{X+1}xf(x)\,dx+\int_2^{X+1}f(x)\,dx\\&=\int_1^2 xf(x)\,dx-\int_X^{X+1}xf(x)\,dx+\int_2^{X+1}f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Maintenant $0\leqslant\int_X^{X+1}xf(x)\,dx\leqslant(X+1-X)(X+1)f(X)\leqslant 2Xf(X)$. D'après 1), cette dernière expression tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. Donc, quand X tend vers $+\infty$, $\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx$ tend vers $\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_2^{+\infty}f(x)\,dx$.
Puisque la fonction $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$, on sait que $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si la fonction $X\mapsto\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Donc la fonction $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et

$$\boxed{\int_1^{+\infty}x(f(x)-f(x+1))\,dx=\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_2^{+\infty}f(x)\,dx.}$$

Correction de l'exercice 2743 ▲

(a) Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, pour $x\geqslant 0$, $\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-f(0)$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}f'(t)\,dt$ converge en $+\infty$ si et seulement si f a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$.
Si de plus l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ converge, il est exclus d'avoir $\ell\neq 0$ et réciproquement si $\ell=0$ alors $\int_0^x f'(t)\,dt$ tend vers $-f(0)$ quand x tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}f'(t)\,dt$ converge si et seulement si $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

(b) i. Soit $x\geqslant 0$. D'après la formule de TAYLOR-LAGRANGE, il existe un réel $\theta_x\in]x,x+1[$

$$f(x+1)=f(x)+(x+1-x)f'(x)+\frac{1}{2}f''(\theta_x).$$

ce qui s'écrit encore $f'(x)=f(x+1)-f(x)-\frac{1}{2}f''(\theta_x)$. Quand x tend vers $+\infty$, $f(x+1)-f(x)$ tend vers 0 et d'autre part, θ_x tend vers $+\infty$. Ainsi, si f et f'' ont une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, f' a également une limite réelle et de plus $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}f''(x)$.
Ensuite, puisque pour $x\geqslant 0$, $\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-f(0)$ et $\int_0^x f''(t)\,dt=f'(x)-f'(0)$, les intégrales $\int_0^{+\infty}f'(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty}f''(t)\,dt$ convergent et d'après 1), $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0\ (=\lim_{x\to+\infty}f''(x))$.

ii. Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. F est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $F''(x) = f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt$ tend vers $f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(t)\,dt$. Donc F et F'' ont des limites réelles en $+\infty$. D'après a), $f = F'$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 2744 ▲

L'inégalité $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + f''^2)$ montre que la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ puis, pour X et Y tels que $X \leqslant Y$, une intégration par parties fournit

$$\int_X^Y f'^2(x)\,dx = [f(x)f'(x)]_X^Y - \int_X^Y f(x)f''(x)\,dx.$$

Puisque la fonction f'^2 est positive, l'intégrabilité de f'^2 sur $\mathbb{R}$ équivaut à l'existence d'une limite réelle quand X tend vers $+\infty$ et Y tend vers $-\infty$ de $\int_X^Y f'^2(x)\,dx$ et puisque la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$, l'existence de cette limite équivaut, d'après l'égalité précédente, à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ et $-\infty$ pour la fonction ff'.

Si f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\int_0^{+\infty} f'^2(x)dx = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$. En particulier, pour x suffisament grand, $f(x)f'(x) \geqslant 1$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant x$ contredisant l'intégrabilité de la fonction f^2 sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

De même la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $-\infty$.

Si cette limite est un réel non nul ℓ, supposons par exemple $\ell > 0$. Pour x suffisament grand, on a $f(x)f'(x) \geqslant \ell$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant \ell x$ contredisant de nouveau l'intégrabilité de la fonction f^2. Donc la fonction ff' tend vers 0 en $+\infty$ et de même en $-\infty$.

Finalement, la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx\right)^2 = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\,dx\right)^2.$$

Puisque les fonctions f et f'' sont continues sur $\mathbb{R}$, on a l'égalité si et seulement si la famille (f, f'') est liée.

Donc nécessairement, ou bien f est du type $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)$, ω réel non nul, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A = B = 0$, ou bien f est affine et nulle encore une fois, ou bien f est du type $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ et nulle encore une fois.

Donc, on a l'égalité si et seulement si f est nulle.

Correction de l'exercice 2745 ▲

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$

Pour $n \geqslant 0$, on a $\frac{1}{(n+1)\pi} \leqslant \frac{1}{t}$, donc

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$

Or $|\sin t| = (-1)^n \sin t$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$. Ainsi

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt = (-1)^n [-\cos t]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = 2.$$

Il en découle que $\frac{2}{(n+1)\pi} \leqslant u_n$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

est divergente.

(b) *Deuxième formule de la moyenne.* D'après l'énoncé, F est une primitive de f et est positive et décroissante. Puisque la fonction g admet des primitives, la fonction $G(y) := \int_a^y g(x)\,dx$ est la primitive de g s'annulant en a. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour montrer qu'il existe $y \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(a)\int_a^y g(x)\,dx,$$

il suffit de montrer que

$$F(a)\min_{y\in[a,b]} G(y) \leqslant \int_a^b F(x)g(x)\,dx \leqslant F(a)\max_{y\in[a,b]} G(y).$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

avec $F(a)G(a) = 0$. Comme f est négative sur $[a,b]$, on a :

$$\min_{y\in[a,b]} G(y)\int_a^b -f(x)\,dx \leqslant -\int_a^b f(x)G(x)\,dx \leqslant \max_{y\in[a,b]} G(y)\int_a^b -f(x)\,dx,$$

$$\Leftrightarrow \min_{y\in[a,b]} G(y)\,(F(a)-F(b)) \leqslant -\int_a^b f(x)G(x)\,dx \leqslant \max_{y\in[a,b]} G(y)\,(F(a)-F(b)).$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$F(b)\left(G(b) - \min_{y\in[a,b]} G(y)\right) + F(a)\min_{y\in[a,b]} G(y) \leqslant \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$
$$\leqslant F(b)\left(G(b) - \max_{y\in[a,b]} G(y))\right) + F(a)\max_{y\in[a,b]} G(y).$$

Les inégalités $G(b) - \min_{y\in[a,b]} G(y) \geqslant 0$ et $G(b) - \max_{y\in[a,b]} G(y) \leqslant 0$ et la positivité de F permettent de conclure.

(c) D'après le critère de Cauchy (voir la proposition des rappels), pour montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente, il suffit de montrer que $\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$. D'après la formule de la moyenne appliquée à $F(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$, il vient :

$$\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{x}\int_x^y \sin t\,dt$$

pour un certain $y \in [x,x']$. On en déduit que

$$\left|\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| = \frac{1}{x}|\cos y - \cos x| \leqslant \frac{2}{x}.$$

Ainsi $\lim_{x,x'\to+\infty} \int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt = 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

(d) i. Posons pour $t > 0$, $U(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{t}$. On a $u(t) = U'(t) = -\frac{e^{-\lambda t}}{t^2}(\lambda t + 1) < 0$. Ainsi U est positive et décroissante sur $]0,+\infty[$. D'après la deuxième formule de la moyenne, pour $0 < x \leqslant y$, il vient :

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| = \left|\int_x^y U(t)\sin t\,dt\right| = \left|\frac{e^{-\lambda x}}{x}\int_x^{y'} \sin t\,dt\right|,$$

pour un certain $y' \in [x,y]$. On en déduit que

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| \leqslant \frac{2e^{-\lambda x}}{x}.$$

ii. On remarque que, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t,\lambda)$ est continue sur $[0,x]$, donc Riemann-intégrable sur cet intervalle. D'après le critère de Cauchy et la question 4.a), les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ sont convergentes. Soit $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$. Pour montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ convergent uniformément en $\lambda \geqslant 0$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$ et pour tout $\lambda \geqslant 0$,

$$\left|F(\lambda) - \int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right| \leqslant \varepsilon.$$

Or, d'après la question 4.a),

$$\left|F(\lambda) - \int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right| \leqslant \frac{2e^{-\lambda x}}{x} \leqslant \frac{2e^{-\lambda x_0}}{x_0} \leqslant \frac{2}{x_0}.$$

Ainsi pour $x_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, on a l'inégalité désirée, et ce indépendamment de la valeur de λ. Posons $F_n(\lambda) = \int_0^n f(t,\lambda)\,dt$. D'après ce qui précède,

$$\sup_{\lambda\in[0,+\infty[} |F(\lambda) - F_n(\lambda)| \leqslant \frac{2}{n},$$

i.e. F_n converge uniformément vers F sur $[0,+\infty[$. Comme les fonction F_n sont continues, il en découle que F est continue. On peut aussi revenir à la définition de continuité : pour montrer que la fonction $\lambda \mapsto F(\lambda)$ est continue en un point $\lambda_0 \in [0,+\infty[$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de λ_0 tel que $|F(\lambda) - F(\lambda_0)| < \varepsilon$ pour tout λ dans ce voisinage. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et posons $x_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned}
|F(\lambda) - F(\lambda_0)| &= \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt + \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt - \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt\right| + \frac{2}{3}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de trouver un voisinage de λ_0 tel que $\left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout λ dans ce voisinage. L'existence d'un tel voisinage est garantie par la continuité de la fonction $\lambda \mapsto \int_0^{x_\varepsilon} f(t,\lambda)\,dt$ donnée par le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels). On peut également déterminer l'existence de ce voisinage à la main de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0))\,dt\right| &\leqslant \int_0^{x_\varepsilon} |(f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)|\,dt \\
&\leqslant \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}\right| \int_0^{x_\varepsilon} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt, \\
&\leqslant x_\varepsilon \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}\right|,
\end{aligned}$$

où l'on a utiliser l'inégalité $|\sin t| \leqslant |t|$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}\right| &= \left|e^{-\frac{(\lambda+\lambda_0)t}{2}} \left(e^{-\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}} - e^{\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}}\right)\right| \\
&\leqslant 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|t}{2}\right) \leqslant 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|x_\varepsilon}{2}\right),
\end{aligned}$$

car la fonction sinh est croissante. Ainsi le voisinage de λ_0 déterminé par $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{argsinh}\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right)$ convient.

iii. Pour $x \in [0,+\infty[$ et $\lambda \in]0,+\infty[$, posons

$$\tilde{F}(x,\lambda) = \int_0^x f(t,\lambda)\,dt.$$

D'après le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels), la fonction $\tilde{F}$ est dérivable par rapport à la deuxième variable et sa dérivée partielle vaut :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x,\lambda) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,\lambda)\,dt.$$

Lorsque $x \to +\infty$, $\tilde{F}(x,\lambda)$ tend vers $F(\lambda)$. D'après la question 4.b) cette convergence est uniforme pour $\lambda \geqslant 0$. D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x,\lambda)$ tend vers $F'(\lambda) := -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt$. On peut montrer comme dans la question 4.b) que cette convergence est uniforme pour $\lambda > 0$ (attention il faut exclure $\lambda = 0$ ici). Il en découle que $\lim_{h\to 0} \frac{F(\lambda+h)-F(\lambda)}{h} = F'(\lambda)$ (écrivez l'argument ! On pourra soit utiliser le dernier théorème des rappels, soit le montrer à la main...).

iv. Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
-\int_0^x e^{-\lambda t}\sin t\,dt &= \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\cos t\,dt \\
&= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\sin x + \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\cos t\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\sin t\,dt \\
&= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\cos x - \frac{1}{\lambda^2} + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\sin t\,dt.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$-\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)\int_0^x e^{-\lambda t}\sin t\,dt = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\cos x - \frac{1}{\lambda^2}.$$

On en déduit que

$$F'(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} -\int_0^x e^{-\lambda t}\sin t\,dt = \frac{-1}{1+\lambda^2}.$$

v. De la question précédente, il découle que

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + C,$$

où C est une constante réelle. Montrons que $F(\lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x > \frac{4}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned}
|F(\lambda)| &= \left|\int_0^x e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt + \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^x e^{-\lambda t}\frac{|\sin t|}{t}\,dt + \left|\int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

où on a utiliser que $|\sin t| \leqslant t$ et la question 4.b). Ainsi

$$|F(\lambda)| \leqslant \frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} = 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que pour $\lambda > \lambda_0$, $|F(\lambda)| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$. Alors $C = \lim_{\lambda\to+\infty} \arctan\lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 2755 ▲

$I_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$.

Correction de l'exercice 2756 ▲

Couper en intervalles de $k\pi/n$. On obtient $I_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Correction de l'exercice 2757 ▲

f est paire, π-périodique. $f'(x) = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = f(\pi/4) = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 2758 ▲

Comparaison entre $\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{(1+t)^2}$ et son approximation des trapèzes. Découper et intégrer deux fois par parties, $u_n \to \frac{3}{8}$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 2760 ▲

$I = \Big[f'(t)(1+\cos t)\Big]_0^{2\pi} + \int_{t=0}^{2\pi} f''(t)(1+\cos t)\,dt \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 2764 ▲

(a) formule de Taylor-intégrale.

(b)

Correction de l'exercice 2767 ▲

$H' = f(2F - f^2) = fK$ et $K' = 2f(1-f')$ donc H est croissante et positive.

Correction de l'exercice 2772 ▲

(a)

(b) Soit $F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,dt$ et $G = F^{-1}$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ G(\frac{k}{n}) \to \int_{t=a}^{b} f^2(t)\,dt \Big/ \int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 2773 ▲

On a $f = e^g$ avec g de classe $\mathscr{C}^1$ par le théorème de relèvement d'où $I(f) = \frac{g(2\pi)-g(0)}{2i\pi} \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 2774 ▲

(a) Il existe toujours une unique fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $g'' = f$, $g(a) = g'(a) = 0$: $g(x) = \int_{t=a}^{x}(x-t)f(t)\,dt$ (Taylor-Intégral).

(b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f_1 : x \mapsto f(x) - \lambda - \mu x$ vérifie $\int_{x=a}^{b} f_1(x)\,dx = \int_{x=a}^{b} x f_1(x)\,dx = 0$. On trouve

$$\begin{cases} (b-a)\lambda + (b^2-a^2)/2\mu & = -\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \\ (b^2-a^2)/2\lambda + (b^3-a^3)/3\mu & = -\int_{x=a}^{b} x f(x)\,dx \end{cases}$$

et ce système a pour déterminant $(b-a)^4/12 \neq 0$ donc λ, μ existent et sont uniques. Soit $g_1 \in F$ telle que $g_1'' = f_1$: $\int_{x=a}^b g_1''(x)g''(x)\,dx = 0$ pour tout $g \in F$, en particulier pour $g = g_1$ donc $g_1'' = f_1 = 0$ et $f(x) = \lambda + \mu x$.

Correction de l'exercice 2775 ▲

Soit $g = f - a$. On a $0 \leqslant g \leqslant b-a$ et $\int_0^1 g = -a$ d'où $\int_0^1 g^2 \leqslant (b-a)\int_0^1 g = -a(b-a)$ et $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 g^2 + 2a\int_0^1 g + a^2 \leqslant -ab$.

Correction de l'exercice 2776 ▲

(a) f est continue sur le segment $[0,1]$ et est donc bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leqslant \int_0^1 t^n |f(t)|\,dt \leqslant M\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1},$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$, on a montré que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$u_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt.$$

Puisque f' est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt = 0$ ou encore $-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt = o(\frac{1}{n})$. D'autre part, puisque $f(1) \neq 0$, $\frac{f(1)}{n+1} \sim \frac{f(1)}{n}$ ou encore $\frac{f(1)}{n+1} = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$. Finalement, $u_n = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$, ou encore

$$u_n \sim \frac{f(1)}{n}.$$

(b) Puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f(1) = 0$, une intégration par parties fournit $u_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt$. Puisque f' est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f'(1) \neq 0$, le 1) appliqué à f' fournit

$$u_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt \sim -\frac{1}{n}\frac{f'(1)}{n} = -\frac{f'(1)}{n^2}.$$

Par exemple, $\int_0^1 t^n \sin\frac{\pi t}{2}\,dt \sim \frac{1}{n}$ et $\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi t}{2}\,dt \sim \frac{\pi}{2n^2}$

Correction de l'exercice 2777 ▲

(a) Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour $\lambda > 0$:

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{\lambda}(-[\cos(\lambda t)f(t)]_a^b + \int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt)\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, et donc $\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

(b) Si f est simplement supposée continue par morceaux, on ne peut donc plus effectuer une intégration par parties.

Le résultat est clair si $f = 1$, car pour $\lambda > 0$, $\left|\int_a^b \sin(\lambda t)\,dt\right| = ... \leqslant \frac{2}{\lambda}$.

Le résultat s'étend aux fonctions constantes par linéarité de l'intégrale puis aux fonctions constantes par morceaux par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire aux fonctions en escaliers.

Soit alors f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe une fonction en escaliers g sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Pour $\lambda > 0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-g(t))\sin(\lambda t)\,dt + \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|.\end{aligned}$$

Maintenant, le résultat étant établi pour les fonctions en esacliers,

$$\exists A > 0 /\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda > A \Rightarrow \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $\lambda > A$, on a alors $\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 /\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda > A \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \varepsilon),$$

et donc que $\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 2778 ▲

Pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}f^2(t) &= \left(\int_0^t f'(u)\,du\right)^2 \leqslant (\int_0^t f'^2(u)\,du)(\int_0^t 1\,du) \quad (\text{CAUCHY} - \text{SCHWARZ}) \\ &= t\int_0^t f'^2(u)\,du \leqslant t\int_0^1 f'^2(u)\,du,\end{aligned}$$

et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant \int_0^1 t(\int_0^1 f'^2(u)\,du)\,dt = (\int_0^1 f'^2(u)\,du)\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(u)\,du.$$

Correction de l'exercice 2779 ▲

Puisque f est continue et strictement croissante sur $[0,a]$, f réalise une bijection de $[0,a]$ sur $f([0,a]) = [0, f(a)]$.

Soit $x \in [0,a]$. Pour $y \in [0, f(a)]$, posons $g(y) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt - xy$. Puisque f est continue sur $[0,a]$, on sait que f^{-1} est continue sur $[0, f(a)]$ et donc la fonction $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ est définie et de classe C^1 sur $[0, f(a)]$. Donc g est de classe C^1 sur $[0, f(a)]$ et pour $y \in [0, f(a)]$, $g'(y) = f^{-1}(y) - x$.

Or, f étant strictement croissante sur $[0,a]$, $g'(y)>0 \Leftrightarrow f^{-1}(y)>x \Leftrightarrow y>f(x)$. Par suite, g' est strictement négative sur $[0,f(x)[$ et strictement positive sur $]f(x),f(a)]$, et g est strictement décroissante sur $[0,f(x)]$ et strictement croissante sur $[f(x),f(a)]$. g admet en $y=f(x)$ un minimum global égal à $g(f(x))=\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt-xf(x)$. Notons $h(x)$ cette expression.

f est continue sur $[0,a]$. Donc, $x\mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0,a]$. Ensuite f est de classe C^1 sur $[0,a]$ à valeurs dans $[0,f(a)]$ et $y\mapsto \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0,f(a)]$ (puisque f^{-1} est continue sur $[0,f(a)]$). On en déduit que $x\mapsto \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0,a]$. Il en est de même de h et pour $x\in[0,a]$,

$$h'(x)=f(x)+f'(x)f^{-1}(f(x))-f(x)-xf'(x)=0.$$

h est donc constante sur $[0,a]$ et pour $x\in[0,a]$, $h(x)=h(0)=0$.

On a montré que

$$\forall (x,y)\in[0,a]\times[0,f(a)],\ \int_0^x f(t)\,dt+\int_0^y f^{-1}(t)\,dt-xy\geqslant \int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt-xf(x)=0.$$

Correction de l'exercice 2780 ▲

Soit, pour $x\in[0,1]$, $g(x)=f(x)-x$. g est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

Si g est de signe constant, g étant de plus continue sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, on sait que g est nulle. Sinon, g change de signe sur $[0,1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule au moins une fois. Dans tous les cas, g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$ ou encore, f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

Correction de l'exercice 2781 ▲

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right)=\left(\int_0^1 (\sqrt{f(t)})^2\,dt\right)\left(\int_0^1 (\sqrt{g(t)})^2\,dt\right)\geqslant\left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}\sqrt{g(t)}\,dt\right)^2\geqslant\left(\int_0^1 1\,dt\right)^2=1$$

Correction de l'exercice 2782 ▲

f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive donnée de f sur $\mathbb{R}$. Notons $(*)$ la relation :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y)=F(x+y)-F(x-y).$$

Pour $x=y=0$, on obtient $forall x\in\mathbb{R},\ f(0)=0$. Puis $x=0$ fournit $\forall y\in\mathbb{R},\ F(y)-F(-y)=0$. F est donc nécessairement paire et sa dérivée f est nécessairement impaire.

La fonction nulle est solution du problème. Soit f une éventuelle solution non nulle. Il existe alors un réel y_0 tel que $f(y_0)\neq 0$. Pour tout réel x, on a alors

$$f(x)=\frac{1}{f(y_0)}\int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t)\,dt=\frac{1}{f(y_0)}(F(x+y_0)-F(x-y_0)).$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(y_0)}(F(x+y_0)-F(x-y_0))$ et donc de f. Mais alors, F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc f l'est aussi (f est en fait de classe C^∞ par récurrence).

En dérivant $(*)$ à y fixé, on obtient $f'(x)f(y) = f(x+y)-f(x-y)$ $(**)$, mais en dérivant à x fixé, on obtient aussi $f(x)f'(y) = f(x+y)+f(x-y)$ $(***)$. En redérivant $(**)$ à y fixé, on obtient $f''(x)f(y) = f'(x+y)-f'(x-y)$ et en dérivant $(***)$ à x fixé, on obtient $f(x)f''(y) = f'(x+y)-f'(x-y)$. Mais alors,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x)f(y) = f(x)f''(y),$$

et en particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} f(x) = 0.$$

On a montré que si f est solution du problème, il existe un réel λ tel que f est solution de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ (E).

- si $\lambda > 0$, en posant $k = \sqrt{\lambda}$, (E) s'écrit $y'' - k^2 y = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{sh}(kx) + B\,\mathrm{ch}(kx)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{sh}(kx)$, $A \in \mathbb{R}$.

  Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A \in \mathbb{R}^*$ (on sait que la fonction nulle est solution) et $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = A\,\mathrm{sh}(kx)$. Alors

  $$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{A}{k}(\mathrm{ch}(k(x+y)) - \mathrm{ch}(k(x-y)))\frac{2A}{k}\,\mathrm{sh}(kx)\,\mathrm{sh}(ky) = \frac{2}{kA} f(x)f(y).$$

  f est solution si et seulement si $\frac{2}{kA} = 1$ ou encore $A = \frac{2}{k}$.

- si $\lambda < 0$, en posant $k = \sqrt{-\lambda}$, (E) s'écrit $y'' + k^2 y = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\sin(kx) + B\cos(kx)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\sin(kx)$, $A \in \mathbb{R}$.

  Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = A\sin(kx)$. Alors

  $$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{A}{k}(\cos(k(x-y)) - \cos(k(x+y))) = \frac{2A}{k}\sin(kx)\sin(ky) = \frac{2}{kA} f(x)f(y).$$

  f est solution si et seulement si $\frac{2}{kA} = 1$ ou encore $A = \frac{2}{k}$.

- si $\lambda = 0$, (E) s'écrit $y'' = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions affines et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ax$, $A \in \mathbb{R}$.

  Réciproquement, si $f(x) = Ax$

  $$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{A}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2Axy = \frac{2}{A} f(x)f(y),$$

  et f est solution si et seulement si $A = 2$.

Les solutions sont la fonction nulle, la fonction $x \mapsto 2x$, les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k}\sin(kx)$, $k > 0$ et les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k}\,\mathrm{sh}(kx)$, $k > 0$.

Correction de l'exercice 2783 ▲

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. F est de classe C^2 sur le segment $[a,b]$ et l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE permet d'écrire

$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(a) - \frac{b-a}{2}F'(a)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}\sup\{|F''(x)|,\ x \in [a,b]\}.$$

Mais $F'(a) = f(a) = 0$ et $F'' = f'$. Donc,

$$|F(\frac{a+b}{2})-F(a)| \leqslant \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

De même, puisque $F'(b)=f(b)=0$,

$$|F(\frac{a+b}{2})-F(b)| \leqslant \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Mais alors,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = |F(b)-F(a)| \leqslant |F(b)-F(\frac{a+b}{2})|+|F(\frac{a+b}{2})-F(a)| \leqslant \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4} = M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Correction de l'exercice 2784 ▲

Si $\int_0^1 f(t)\,dt \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 (|f(t)|-f(t))\,dt = 0\\ \Leftrightarrow |f|-f=0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\ \Leftrightarrow f=|f| \Leftrightarrow f \geqslant 0.\end{aligned}$$

Si $\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant 0$, alors $\int_0^1 -f(t)\,dt \geqslant 0$ et d'après ce qui précède, f est solution si et seulement si $-f=|-f|$ ou encore $f \leqslant 0$.
En résumé, f est solution si et seulement si f est de signe constant sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 2792 ▲

Ils sont égaux.

Correction de l'exercice 2794 ▲

Les deux membres sont n-linéaires alternés. On le vérifie sur la base du déterminant.

Correction de l'exercice 2795 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1}\ldots b_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+2+\ldots+n+\sigma(1)+\ldots+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(n),n}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{2(1+2+\ldots+n)} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(n),n}\\ &= \det A.\end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie les lignes numéros 2, 4,... de B par -1 puis les colonnes numéros 2, 4,... de la matrice obtenue par -1. On obtient la matrice A qui se déduit donc de la matrice B par multiplication des lignes ou des colonnes par un nombre pair de -1 (puisqu'il y a autant de lignes portant un numéro pair que de colonnes portant un numéro pair). Par suite, $\det(B)=\det(A)$.

Correction de l'exercice 2796 ▲

Soient $C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $\varphi \,:\, \begin{array}{rcl} (\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p & \to & \mathbb{K} \\ (C_1,\ldots,C_p) & \mapsto & \det\begin{pmatrix} X & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{array}$ où $X = (C_1 \ldots C_p) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

• φ est linéaire par rapport à chacune des colonnes $C_1,\ldots, C_p$.

• Si il existe $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $C_i = C_j$, alors $\varphi(C_1,\ldots,C_p) = 0$.

Ainsi, φ est une forme p-linéaire alternée sur l'espace $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ qui est de dimension p. On sait alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathscr{B}_0}$ (où $\det_{\mathscr{B}_0}$ désigne la forme déterminant dans la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$) ou encore il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ indépendant de $(C_1,\ldots,C_p)$ tel que $\forall (C_1,\ldots,C_p) \in (\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p$, $f(C_1,\ldots,C_p) = \lambda \det_{\mathscr{B}_0}(C_1,\ldots,C_p)$ ou enfin il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ indépendant de X tel que $\forall X \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\det\begin{pmatrix} X & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \lambda \det(X)$. Pour $X = I_p$, on obtient $\lambda = \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et donc

$$\forall B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}),\ \det\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(B) \times \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

De même, l'application $Y \mapsto \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ est une forme q-linéaire alternée des lignes de Y et donc il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $\forall Y \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $\det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \mu \det(Y)$ puis $Y = I_q$ fournit $\mu = \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ et donc

$$\forall B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K}),\ \forall D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),$$
$$\det\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(B) \times \det(C) \times \det\begin{pmatrix} I_p & D \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det(B) \times \det(C),$$

(en supposant acquise la valeur d'un déterminant triangulaire qui peut s'obtenir en revenant à la définition d'un déterminant et indépendamment de tout calcul par blocs).

$$\boxed{\forall (B,C,D) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_q(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \det\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(B) \times \det(C).}$$

Correction de l'exercice 2826 ▲

Commençons par un travail préparatoire : le calcul du déterminant de taille $(n-1) \times (n-1)$:

$$\Gamma_k = \left|\begin{array}{cccc|cccc} x & & & & & & & \\ -1 & x & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -1 & x & & & & \\ \hline & & & & -1 & x & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & x \\ & & & & & & & -1 \end{array}\right|$$

où le bloc en haut à gauche est de taille $k \times k$.

On développe, en commençant par la première ligne, puis encore une fois par la première ligne,... pour trouver que

$$\Gamma_k = x^k \times (-1)^{n-1-k}$$

Autre méthode : on retrouve le même résultat en utilisant les déterminant par blocs :

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right| = \det A \times \det C$$

Revenons à l'exercice !

Contrairement à l'habitude on développe par rapport à la colonne qui a le moins de 0. En développant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}a_0 \begin{vmatrix} -1 & x & & \\ & -1 & x & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^n a_1 \begin{vmatrix} x & & & & \\ & -1 & x & & \\ & & -1 & x & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{2n-3}a_{n-2} \begin{vmatrix} x & & & & \\ -1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & x & \\ & & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n-2}(x+a_{n-1}) \begin{vmatrix} x & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-1+k} a_k \times \Gamma_k \quad + \quad (-1)^{2n-2}(x+a_{n-1})\Gamma_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-1+k} a_k \times x^k \times (-1)^{n-1-k} \quad + \quad (x+a_{n-1})x^{n-1} \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2828 ▲

(a) En développant par rapport à la première colonne on trouve la relation suivante :

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ a & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 3 \\ 0 & \cdots & a & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

Notons δ ce dernier déterminant (dont la matrice est de taille $n-1 \times n-1$). On le calcule en développant par rapport à la première ligne

$$\delta = (-1)^{n-2}(n-1) \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2}.$$

Donc

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - a^{n-2}(n-1)^2.$$

(b) Prouvons la formule

$$\Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

par récurrence sur $n \geqslant 2$.

— **Initialisation.** Pour $n=2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$ donc la formule est vraie.

— **Hérédité.** Supposons la formule vraie vraie au rang $n-1$, c'est-à-dire $\Delta_{n-1} = a^{n-1} - a^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2$. Calculons Δ_n :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= a\Delta_{n-1} - a^{n-2}(n-1)^2 \qquad \text{par la première question} \\
&= a\Big(a^{n-1} - a^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2\Big) - a^{n-2}(n-1)^2 \qquad \text{par l'hypothèse de récurrence} \\
&= a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-2} i^2 - a^{n-2}(n-1)^2 \\
&= a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2
\end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang n.

— **Conclusion.** Par le principe de récurrence la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

Correction de l'exercice 2836 ▲

Notons V_n le déterminant à calculer et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice correspondante.

Nous allons faire les opérations suivantes sur les colonnes en partant de la dernière colonne. C_n est remplacée par $C_n - t_nC_{n-1}$, puis C_{n-1} est remplacée par $C_{n-1} - t_nC_{n-2}$,... jusqu'à C_2 qui est remplacée par $C_2 - t_nC_1$. On obtient donc

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t_1 - t_n & t_1^2 - t_1t_n & \dots & t_1^{n-1} - t_1^{n-2}t_n \\ 1 & t_2 - t_n & t_2^2 - t_2t_n & \dots & t_2^{n-1} - t_2^{n-2}t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne et on écrit $t_i^k - t_i^{k-1}t_n = t_i^{k-1}(t_i - t_n)$ pour obtenir :

$$V_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} t_1 - t_n & t_1(t_1 - t_n) & \dots & t_1^{n-2}(t_1 - t_n) \\ t_2 - t_n & t_2(t_2 - t_n) & \dots & t_2^{n-2}(t_2 - t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1} - t_n & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Nous utilisons maintenant la linéarité du déterminant par rapport à chacune des lignes : on factorise la première ligne par $t_1 - t_n$; la second par $t_2 - t_n$,... On obtient

$$V_n = (-1)^{n-1}(t_1 - t_n)(t_2 - t_n)\cdots(t_{n-1} - t_n) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & \dots & t_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Donc

$$V_n = V_{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(t_n - t_j).$$

Si maintenant on suppose la formule connue pour V_{n-1} c'est-à-dire $V_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1}(t_j - t_i)$

Alors on obtient par récurrence que

$$V_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) = V_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})\prod_{j=1}^{n-1}(t_n - t_j) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(t_j - t_i).$$

Correction de l'exercice 2842 ▲

Soient a,b,c des réels vérifiant $a^2+b^2+c^2=1$ et P la matrice réelle 3×3 suivante :

$$P=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculons le déterminant de P.

$$\det P=\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{vmatrix}=0.$$

(b) Déterminons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $\ker P$ et $\operatorname{Im} P$.

$$\ker P=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

on a

$$(x,y,z)\in\ker P \iff \begin{cases} a(ax+by+cz)=0 \\ b(ax+by+cz)=0 \\ c(ax+by+cz)=0 \end{cases}$$

Or, a,b et c ne sont pas simultanément nuls car $a^2+b^2+c^2=1$, ainsi

$$\ker P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ ax+by+cz=0\},$$

c'est le plan vectoriel d'équation $ax+by+cz=0$.
L'image de P est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice P. Sachant que $\dim\ker P+\dim\operatorname{Im} P=\dim\mathbb{R}^3=3$, on sait que la dimension de l'image de P est égale à 1, c'est-à-dire que l'image est une droite vectorielle. En effet, les vecteurs colonnes de P sont les vecteurs

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix},\begin{pmatrix} ab \\ b^2 \\ bc \end{pmatrix},\begin{pmatrix} ac \\ bc \\ c^2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$a\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},b\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},c\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace $\operatorname{Im} P$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

(c) Soit $Q=I-P$, calculons P^2, PQ, QP et Q^2.

$$\begin{aligned}
P^2&=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^3b+ab^3+abc^2 & a^3c+ab^2c+ac^3 \\ a^3b+ab^3+abc^2 & a^2b^2+b^4+b^2c^2 & a^2bc+b^3c+bc^3 \\ a^3c+ab^2c+ac^3 & a^2bc+b^3c+bc^3 & a^2c^2+b^2c^2+c^4 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} a^2(a^2+b^2+c^2) & ab(a^2+b^2+c^2) & ac(a^2+b^2+c^2) \\ ab(a^2+b^2+c^2) & b^2(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) \\ ac(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) & c^2(a^2+b^2+c^2) \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}=P.
\end{aligned}$$

Car $a^2+b^2+c^2=1$.
Si $Q=I-P$, on a
$$PQ = P(I-P) = PI - P^2 = P-P = 0,$$
$$QP = (I-P)P = IP - P^2 = P-P = 0$$
et
$$Q^2 = (I-P)(I-P) = I^2 - IP - PI + P^2 = I-P-P+P = I-P = Q.$$

(d) Caractérisons géométriquement P et Q.
Nous avons vu que le noyau de P était égal au plan vectoriel d'équation $ax+by+cz=0$ et que son image de était la droite vectorielle engendrée par le vecteur (a,b,c). Par ailleurs, on a $P^2=P$, égalité qui caractérise les projecteurs, l'endomorphisme de matrice P est donc la projection sur $\operatorname{Im} P$ suivant la direction $\ker P$.
Soit $X \in \mathbb{R}^3$, on a
$$QX = 0 \iff IX - PX = 0 \iff PX = X \iff X \in \operatorname{Im} P,$$
ainsi $\ker Q = \operatorname{Im} P$. D'autre part,
$$Q = I-P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$
On a $\dim \operatorname{Im} Q = 2$ et les vecteurs colonnes de Q vérifient l'équation $ax+by+cz=0$, ainsi $\operatorname{Im} Q = \ker P$. L'égalité $Q^2=Q$ prouve que Q est également un projecteur, c'est la projection sur $\operatorname{Im} Q$ dirigée par $\ker Q$.

Correction de l'exercice 2843 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculons le déterminant de A et déterminons pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1-a^3.$$
La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si et seulement si $1+a^3 \neq 0$, ce qui équivaut à $a \neq -1$ car $a \in \mathbb{R}$.

(b) Calculons A^{-1} lorsque A est inversible, c'est-à-dire $a \neq -1$. Pour cela nous allons déterminer la comatrice $\tilde{A}$ de A. On a
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix},$$
on remarque que $\tilde{A} = {}^t\tilde{A}$ et on a bien $A{}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = (-1-a^3)I_3$ d'où
$$A^{-1} = \frac{1}{(-1-a^3)}\tilde{A} = \frac{1}{-1-a^3}\begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2844 ▲

(a) L'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ est la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ donc $\mathscr{A} = |ad - bc|$. Ici on trouve $\mathscr{A} = \text{abs}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +5$ où abs désigne la fonction valeur absolue.

(b) Le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice formée des trois vecteurs. Ici

$$\mathscr{V} = \text{abs}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \text{abs}\left(+1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\right) = 4$$

où l'on a développé par rapport à la première ligne.

(c) Si un parallélépipède est construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coefficients sont des entiers alors le volume correspond au déterminant d'une matrice à coefficients entiers. C'est donc un entier.

Correction de l'exercice 2852 ▲

Notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\text{mod} 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

(a) $(b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$.

(b) $(a+b+c)^3$

(c) $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$

(d) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.

(e) $-(a^3-b^3)^2$.

(f) $\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ où $\alpha \neq \beta$ sont les racines de $X^2 - aX + bc = 0$.
$(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$ si $\alpha = \beta$.

(g) $a^{n-3}(a-b)\left(a^2+ab-2(n-2)b^2\right)$.

(h) 1.

(i) $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\frac{b_1}{a_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right)$.

(j) 0

(k) $\varepsilon_n\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

(l) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Correction de l'exercice 2853 ▲

(a) $-x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)$.

(b) $(x-a_1)\ldots(x-a_n)(x+a_1+\cdots+a_n)$.

(c) $z(y-z)(x-y)\ldots(a-b)$.

(d) $\frac{V(a,b,c)V(x,y,z)}{(a+x)\ldots(c+z)}$.

Correction de l'exercice 2854 ▲

3.$\sin\alpha - \sin\beta - \sin(\alpha-\beta)$.

Correction de l'exercice 2855 ▲

(a) Développer.

(b) i. $\begin{cases} D(a-b,0,c-b) = (a-b)^n \\ D(a-c,b-c,0) = (a-c)^n \end{cases} \Rightarrow D(a,b,c) = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$

ii. $\det((a-b)I + bU) = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1}$.

Correction de l'exercice 2858 ▲

(a) $M^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & n \\ \vdots & & \dots & \\ 0 & n & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 = \varepsilon_{n-1} n^n$.

(b)

(c) $n^{n/2} \exp\left(i\frac{\pi}{4}(n-1)(3n+2)\right)$.

Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\text{mod} 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction de l'exercice 2859 ▲

Polynômes de Tchebychev $\Rightarrow D = 2^{(n-1)(n-2)/2} V(\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$.

Correction de l'exercice 2860 ▲

$M = (x_i^{j-1}) \times (C_k^{i-1} y_j^{k-i+1}) \Rightarrow$

$\det M = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n-1 \\ \varepsilon_n C_{n-1}^0 C_{n-1}^1 \dots C_{n-1}^{n-1} V(x_1,\dots,x_n) V(y_1,\dots,y_n) & \text{si } k = n-1. \end{cases}$

Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\text{mod} 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction de l'exercice 2861 ▲

$A = \left(\frac{i^{j-1}}{(j-1)!}\right) \times \left(P^{(i-1)}(j)\right) \Rightarrow \det A = \varepsilon_n \left(a_{n-1}(n-1)!\right)^n$. Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\text{mod} 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction de l'exercice 2862 ▲

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Notons Δ le déterminant de l'énoncé. Pour x réel, on pose $D(x) = \begin{vmatrix} -2x & x+b & x+c \\ b+x & -2b & b+c \\ c+x & c+b & -2c \end{vmatrix}$ (de sorte que $\Delta = D(a)$)). D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Le coefficient de x^2 vaut

$$-(-2c) + (b+c) + (b+c) - (-2b) = 4(b+c).$$

Puis,

$$D(-b) = \begin{vmatrix} 2b & 0 & -b+c \\ 0 & -2b & b+c \\ c-b & c+b & -2c \end{vmatrix} = 2b(4bc - (b+c)^2) + 2b(c-b)^2 = 0,$$

et par symétrie des rôles de b et c, $D(-c) = 0$. De ce qui précède, on déduit que si $b \neq c$, $D(x) = 4(b+c)(x+b)(x+c)$ (même si $b+c = 0$ car alors D est un polynôme de degré infèrieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines distinctes et est donc le polynôme nul). Ainsi, si $b \neq c$ (ou par symétrie des roles, si $a \neq b$ ou $a \neq c$), on a : $\Delta = 4(b+c)(a+b)(a+c)$. Un seul cas n'est pas encore étudié à savoir le cas où $a = b = c$. Dans ce cas,

$$D(a) = \begin{vmatrix} -2a & 2a & 2a \\ 2a & -2a & 2a \\ 2a & 2a & -2a \end{vmatrix} = 8a^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 32a^3 = 4(a+a)(a+a)(a+a),$$

ce qui démontre l'identité proposée dans tous les cas (on pouvait aussi conclure en constatant que, pour a et b fixés, la fonction Δ est une fonction continue de c et on obtient la valeur de Δ pour $c = b$ en faisant tendre c vers b dans l'expression de Δ déjà connue pour $c \neq b$).

$$\boxed{\Delta = 4(a+b)(a+c)(b+c).}$$

Correction de l'exercice 2863 ▲

Soit $P = \begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$. P est un polynôme unitaire de degré 4. En remplaçant C_1 par $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ et par linéarité par rapport à la première colonne, on voit que P est divisible par $(X+a+b+c)$. Mais aussi, en remplaçant C_1 par $C_1 - C_2 - C_3 + C_4$ ou $C_1 - C_2 + C_3 - C_4$ ou $C_1 + C_2 - C_3 - C_4$, on voit que P est divisible par $(X-a-b+c)$ ou $(X-a+b-c)$ ou $(X+a-b-c)$. **1er cas.** Si les quatre nombres $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ et $a+b-c$ sont deux à deux distincts, P est unitaire de degré 4 et divisible par les quatre facteurs de degré 1 précédents, ceux-ci étant deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, $P = (X+a+b+c)(X+a+b-c)(X+a-b+c)(X-a+b+c)$. **2ème cas.** Deux au moins des quatre nombres $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ et $a+b-c$ sont égaux. Notons alors que $-a-b-c = a+b-c \Leftrightarrow b = -a$ et que $-a+b+c = a-b+c \Leftrightarrow a = b$. Par symétrie des roles, deux des quatre nombres $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ et $a+b-c$ sont égaux si et seulement si deux des trois nombres $|a|$, $|b|$ ou $|c|$ sont égaux. On conclut dans ce cas que l'expression de P précédemment trouvée reste valable par continuité par rapport à a, b ou c.

$$\boxed{P = (X+a+b+c)(X+a+b-c)(X+a-b+c)(X-a+b+c).}$$

Correction de l'exercice 2864 ▲

(a) Pour $n \geqslant 2$, posons $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Tout d'abord, on fait apparaître beaucoup de 1. Pour cela, on effectue les transformations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis ... puis $C_{n-1} = C_{n-1} - C_n$. On obtient

$$\Delta_n = \det(C_1 - C_2, C_2 - C_3, ..., C_{n-1} - C_n, C_n) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & & \vdots & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On fait alors apparaître un déterminant triangulaire en constatant que $\det(L_1, L_2, ..., L_n) = \det(L_1, L_2 + L_1, ..., L_{n-1} + L_1, L_n + L_1)$. On obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -2 & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (1-n)(-2)^{n-2}.$$

.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = (1-n)(-2)^{n-2}.}$$

(b) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sin(a_i + a_j) = \sin a_i \cos a_j + \cos a_i \sin a_j$ et donc si on pose $C = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \cos a_2 \\ \vdots \\ \cos a_n \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \sin a_1 \\ \sin a_2 \\ \vdots \\ \sin a_n \end{pmatrix}$, on a $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = \cos a_j S + \sin a_j C$. En particulier, $\mathrm{Vect}(C_1,...,C_n) \subset \mathrm{Vect}(C,S)$ et le rang de la matrice proposée est inférieur ou égal à 2. Donc,

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 0.}$$

Si $n = 2$, $\det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} = \sin(2a_1)\sin(2a_2) - \sin^2(a_1 + a_2)$.

(c) L'exercice n'a de sens que si le format n est pair. Posons $n = 2p$ où p est un entier naturel non nul.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(pour } 1 \leqslant j \leqslant p,\ C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j}\text{)}$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(par linéarité par rapport aux colonnes } C_1,\ C_2, ...,\ C_p\text{)}$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ & & \ddots & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \text{(pour } p+1 \leqslant i \leqslant 2p,\ L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}\text{)}.$$

et $\Delta_n = (a+b)^p(a-b)^p = (a^2 - b^2)^p$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{2p} = (a^2-b^2)^p.}$$

(d) On retranche à la première colonne la somme de toutes les autres et on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(n-2).$$

(e) Pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$L_{i+1} - L_i = (C_{n+i}^0 - C_{n+i-1}^0, C_{n+i}^1 - C_{n+i-1}^1, \dots, C_{n+i}^p - C_{n+i-1}^p) = (0, C_{n+i-1}^0, C_{n+i-1}^1, \dots, C_{n+i-1}^{p-1}).$$

On remplace alors dans cet ordre L_p par $L_p - L_{p-1}$ puis L_{p-1} par $L_{p-1} - L_{p-2}$ puis ... puis L_2 par $L_2 - L_1$ pour obtenir, avec des notations évidentes

$$\det(A_p) = \begin{vmatrix} 1 & \\ 0 & A_{p-1} \end{vmatrix} = \det(A_{p-1}).$$

Par suite, $\det(A_p) = \det(A_{p-1}) = \dots = \det(A_1) = 1$.

(f) En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = (a_{n-1} - X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \Delta_k,$$

où $\Delta_k = \left|\begin{array}{ccc|ccc} -X & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & -X & & & \\ \hline 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & -X & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & -X & 1 \end{array}\right| = (-1)^k X^k$ et donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ D_n = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right).}$$

Correction de l'exercice 2865 ▲

Si deux des b_j sont égaux, $\det(A)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts. Soient λ_1,..., λ_n, n nombres complexes tels que $\lambda_n \neq 0$. On a

$$\det A = \frac{1}{\lambda_n} \det(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j) = \det B,$$

où la dernière colonne de B est de la forme $(R(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $R = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{X+b_j}$. On prend $R = \frac{(X-a_1)\dots(X-a_{n-1})}{(X+b_1)\dots(X+b_n)}$. R ainsi définie est irréductible (car $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_i \neq -b_j$). Les pôles de R sont simples et la partie entière de R est nulle. La décomposition en éléments simples de R a bien la forme espérée. Pour ce choix de R, puisque $R(a_1) = \dots = R(a_{n-1}) = 0$, on obtient en développant suivant la dernière colonne

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} R(a_n) \Delta_{n-1},$$

avec

$$\lambda_n = \lim_{z \to -b_n} (z+bn)R(z) = \frac{(-b_n-a_1)\dots(-b_n-a_{n-1})}{(-b_n+b_1)\dots(-b_n+b_{n-1})} = \frac{(a_1+b_n)\dots(a_{n-1}+b_n)}{(b_n-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})}.$$

Donc

$$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = \frac{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})(b_n-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})}{(a_n+b_1)(a_n+b_2)\dots(a_n+b_n)..(a_2+b_n)(a_1+b_n)}\Delta_{n-1}.$$

En réitérant et compte tenu de $\Delta_1 = 1$, on obtient

$$\boxed{\Delta_n = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_1,\dots,a_n)\mathrm{Van}(b_1,\dots,b_n)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.}$$

Dans le cas particulier où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$, en notant H_n le déterminant (de HILBERT) à calculer : $H_n = \frac{\mathrm{Van}(1,2,\dots,n)^2}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)}$. Mais,

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n}k!}{\left(\prod_{k=1}^{n}k!\right)^2},$$

et d'autre part,

$$\mathrm{Van}(1,2,\dots,n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) = \prod_{i=1}^{n-1}(n-i)! = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}k!.$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ H_n = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n}k!\right)^3}{n!^2\times\prod_{k=1}^{2n}k!}.}$$

Correction de **l'exercice 2866 ▲**

On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$. • Pour $n = 1$, c'est clair. • Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout déterminant Δ_n de format n et du type de l'énoncé soit divisible par 2^{n-1}. Soit Δ_{n+1} un déterminant de format $n+1$, du type de l'énoncé. Si tous les coefficients $a_{i,j}$ de Δ_{n+1} sont égaux à 1, puisque $n+1 \geqslant 2$, Δ_{n+1} a deux colonnes égales et est donc nul. Dans ce cas, Δ_{n+1} est bien divisible par 2^n. Sinon, on va changer petit à petit tous les -1 en 1. Soit (i,j) un couple d'indices tel que $a_{i,j} = -1$ et Δ'_{n+1} le déterminant dont tous les coefficients sont égaux à ceux de Δ_{n+1} sauf le coefficient ligne i et colonne j qui est égal à 1.

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = \det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_n) - \det(C_1,\dots,C'_j,\dots,C_n) = \det(C_1,\dots,C_j - C'_j,\dots,C_n),$$

où $C_j - C'_j = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ -2\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}$ (-2 en ligne i). En développant ce dernier déterminant suivant sa j-ème colonne, on obtient :

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = -2\Delta_n,$$

où Δ_n est un déterminant de format n et du type de l'énoncé. Par hypothèse de récurrence, Δ_n est divisible par 2^{n-1} et donc $\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1}$ est divisible par 2^n. Ainsi, en changeant les -1 en 1 les uns après les autres, on obtient

$$\Delta_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \pmod{2^n}.$$

Ce dernier déterminant étant nul, le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 2867 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\ldots+n+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n} \text{ (car } 1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\ldots+n+\sigma(n) = 2(1+2+\ldots+n)\in 2\mathbb{N}) \\
&= \det A
\end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie par -1 les lignes 2, 4, 6... puis les colonnes 2, 4, 6...On obtient $\det B = (-1)^{2p}\det A = \det A$ (où p est le nombre de lignes ou de colonnes portant un numéro pair).

Correction de l'exercice 2868 ▲

• Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de P^2 est

$$\alpha_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k+l-2)(u-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} (\omega^{k+l-2})^u.$$

Or, $\omega^{k+l-2} = 1 \Leftrightarrow k+l-2 \in n\mathbb{Z}$. Mais, $0 \leqslant k+l-2 \leqslant 2n-2 < 2n$ et donc, $k+l-2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k+l-2 \in \{0,n\} \Leftrightarrow k+l = 2$ ou $k+l = n+2$. Dans ce cas, $\alpha_{k,l} = n$. Sinon,

$$\alpha_{k,l} = \frac{1-(\omega^{k+l-2})^n}{1-\omega^{k+l-2}} = \frac{1-1}{1-\omega^{k+l-2}} = 0.$$

Ainsi, $P^2 = n\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. • Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de $P\overline{P}$ est

$$\beta_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} (\omega^{k-l})^{u-1}.$$

Or, $\omega^{k-l} = 1 \Leftrightarrow k-l \in n\mathbb{Z}$. Mais, $-n < -(n-1) \leqslant k-l \leqslant n-1 < n$ et donc $k-l \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k = l$. Dans ce cas, $\beta_{k,l} = n$. Sinon, $\beta_{k,l} = 0$. Ainsi, $P\overline{P} = nI_n$ (ce qui montre que $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P}$). Calculons enfin PA. Il faut d'abord écrire proprement les coefficients de A. Le coefficient ligne k, colonne l de A peut s'écrire a_{l-k+1} si l'on adopte la convention commode $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et plus généralement pour tout entier relatif k, $a_{n+k} = a_k$. Avec cette convention d'écriture, le coefficient ligne k, colonne l de PA vaut

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} a_{l-u+1} = \sum_{v=l-n+1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v.$$

Puis on réordonne cette somme pour qu'elle commence par a_1.

$$\begin{aligned}\sum_{v=l-n+1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v+\sum_{v=l-n+1}^{0}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v\\ &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v+\sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n}\text{ (en posant } w=v+n)\\ &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v+\sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w)}a_w\\ &= \sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v=\omega^{(k-1)(l-1)}\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\end{aligned}$$

(le point clé du calcul précédent est que les suites (a_k) et (ω^k) ont la même période n ce qui s'est traduit par $\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n}=\omega^{(k-1)(l-v)}a_v$). Pour k élément de $[\![1,n]\!]$, posons alors $S_k=\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v$. On a montré que $PA=(\omega^{(k-1)(l-1)}S_k)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$.
Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a alors

$$\det(PA)=\det(\omega^{(k-1)(l-1)}S_k)_{1\leqslant k,l\leqslant n}=(\prod_{k=1}^{n}S_k)\times\det(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leqslant k,l\leqslant n}=(\prod_{k=1}^{n}S_k)\times\det P.$$

Donc $(\det P)(\det A)=(\prod_{k=1}^{n}S_k)\det P$ et finalement, puisque $\det P\neq 0$,

$$\boxed{\det A=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\right).}$$

Par exemple, pour $n=3$, $\det A=(a_1+a_2+a_3)(a_1+ja_2+j^2a_3)(a_1+j^2a_2+ja_3)$.

Correction de l'exercice 2869 ▲

On a toujours $A\times{}^t\mathrm{com}A=(\det A)I_n$ et donc

$$(\det A)(\det(\mathrm{com}A))=(\det A)(\det({}^t\mathrm{com}A))=\det(\det A\ I_n)=(\det A)^n.$$

• Si $\det A\neq 0$, on obtient $\det(\mathrm{com}A)=(\det A)^{n-1}$. • Si $\det A=0$, alors $A^t\mathrm{com}A=0$ et $\mathrm{com}A$ n'est pas inversible car sinon, $A=0$ puis $\mathrm{com}A=0$ ce qui est absurde. Donc, $\det(\mathrm{com}A)=0$. Ainsi, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall A\in M_n(\mathbb{C}),\ \det(\mathrm{com}A)=(\det A)^{n-1}.}$$

• Si $\mathrm{rg}A=n$, alors $\mathrm{com}A\in GL_n(\mathbb{K})$ (car $\det(\mathrm{com}A)\neq 0$) et $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A)=n$. • Si $\mathrm{rg}A\leqslant n-2$, alors tous les mineurs de format $n-1$ sont nuls et $\mathrm{com}A=0$. Dans ce cas, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A)=0$. • Si $\mathrm{rg}A=n-1$, il existe un mineur de format $n-1$ non nul et $\mathrm{com}A\neq 0$. Dans ce cas, $1\leqslant\mathrm{rg}(\mathrm{com}A)\leqslant n-1$. Plus précisément,

$$A^t\mathrm{com}A=0\Rightarrow\mathrm{com}A^tA=0\Rightarrow\mathrm{Im}({}^tA)\subset\mathrm{Ker}(\mathrm{com}A)\Rightarrow\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{com}A))\geqslant\mathrm{rg}({}^tA)=\mathrm{rg}A=n-1\Rightarrow\mathrm{rg}(\mathrm{com}A)\leqslant 1,$$

et finalement si $\mathrm{rg}A=n-1$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A)=1$.

Correction de l'exercice 2870 ▲

$$\begin{aligned}(\det A)'&=\left(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}\right)'=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\left(\sum_{k=1}^{n}a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(k),k}\dots a_{\sigma(n),n}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(k),k}\dots a_{\sigma(n),n}=\sum_{k=1}^{n}\det(C_1,\dots,C'_k,\dots,C_n)\end{aligned}$$

Applications.

(a) Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$. Δ_n est un polynôme dont la dérivée est d'après ce qui précède, $\Delta_n' = \sum_{k=1}^n \delta_k$ où δ_k est le déterminant déduit de Δ_n en remplaçant sa k-ème colonne par le k-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. En développant δ_k par rapport à sa k-ème colonne, on obtient $\delta_k = \Delta_{n-1}$ et donc $\Delta_n' = n\Delta_{n-1}$. Ensuite, on a déjà $\Delta_1 = X+1$ puis $\Delta_2 = (X+1)^2 - 1 = X^2 + 2X$ ... Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$. C'est vrai pour $n = 1$ puis, si pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$ alors $\Delta_{n+1}' = (n+1)X^n + (n+1)nX^{n-1}$ et, par intégration, $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n + \Delta_{n+1}(0)$. Mais, puisque $n \geqslant 1$, on a $n+1 \geqslant 2$ et $\Delta_{n+1}(0)$ est un déterminant ayant au moins deux colonnes identiques. Par suite, $\Delta_{n+1}(0) = 0$ ce qui montre que $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n$. Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = x^n + nx^{n-1}.}$$

(b) Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$. $\Delta_n = \det(a_1e_1 + xC, \dots, a_ne_n + xC)$ où e_k est le k-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et C est la colonne dont toutes les composantes sont égales à 1. Par linéarité par rapport à chaque colonne, Δ_n est somme de 2^n déterminants mais dès que C apparait deux fois, le déterminant correspondant est nul. Donc, $\Delta_n = \det(a_1e_1, \dots, a_ne_n) + \sum \det(a_1e_1, \dots, xC, \dots, a_ne_n)$. Ceci montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. La formule de TAYLOR fournit alors : $\Delta_n = \Delta_n(0) + X\Delta_n'(0)$. Immédiatement, $\Delta_n(0) = \prod_{k=1}^n a_k = \sigma_n$ puis $\Delta_n'(0) = \sum_{k=1}^n \det(a_1e_1, \dots, C, \dots, a_ne_n) = \sum_{k=1}^n \prod_{i \neq k} a_i = \sigma_{n-1}$. Donc, $\Delta_n = \sigma_n + X\sigma_{n-1}$.

Correction de l'exercice 2871 ▲

(a) Pour le premier déterminant, on retranche la première colonne à chacune des autres et on obtient un déterminant triangulaire inférieur dont la valeur est $(-1)^{n-1}$. Pour le deuxième, on ajoute à la première colonne la somme de toutes les autres, puis on met $(n-1)$ en facteurs de la première colonne et on tombe sur le premier déterminant. Le deuxième déterminant vaut donc $(-1)^{n-1}(n-1)$.

(b) Pour (i,j) élément de $[\![1,n]\!]^2$, $(i+j-1)^2 = j^2 + 2(i-1)j + (i-1)^2$. Donc,

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ C_j = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2j(i-1)_{1\leqslant i\leqslant n} + ((i-1)^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Les colonnes de la matrice sont donc éléments de $\text{Vect}((1)_{1\leqslant i\leqslant n}, (i-1)_{1\leqslant i\leqslant n}, ((i-1)2)_{1\leqslant i\leqslant n})$ qui est de dimension inférieure ou égale à 3 et la matrice proposée est de rang infèrieur ou égal à 3. Donc, si $n \geqslant 4$, $\Delta_n = 0$. Il reste ensuite à calculer $\Delta_1 = 1$ puis $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -7$ puis $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = (225-256) - 4(100-144) + 9(64-81) = -31 + 176 - 153 = -8$.

(c)

$$\Delta_n = \det(C_1, \dots, C_n) = \det(C_1 + \dots + C_n, C_2, \dots, C_n) = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix},$$

par linéarité par rapport à la première colonne. Puis, aux lignes numéros 2,..., n, on retranche la première ligne pour obtenir :

$$\Delta_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

(d) Par n linéarité, D_n est somme de 2^n déterminants. Mais dans cette somme, un déterminant est nul dès qu'il contient au moins deux colonnes de x. Ainsi, en posant $\Delta_n = \det(C_1 + xC, ..., C_n + xC)$ où $C_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ b \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $C = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on obtient :

$$\Delta_n = \det(C_1, ..., C_n) + \sum_{k=1}^{n} \det(C_1, ..., C_{k-1}, xC, C_{k+1}, ..., C_n),$$

ce qui montre que Δ_n est un polynôme de degré infèrieur ou égal à 1. Posons $\Delta_n = AX + B$ et $P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X)$. Quand $x = -b$ ou $x = -c$, le déterminant proposé est triangulaire et se calcule donc immédiatement. Donc : **1er cas.** Si $b \neq c$. $\Delta_n(-b) = P(b)$ et $\Delta_n(-c) = P(c)$ fournit le système $\left\{\begin{array}{l} -bA + B = P(b) \\ -cA + B = P(c) \end{array}\right.$ et donc $A = -\frac{P(c)-P(b)}{c-b}$ et $B = \frac{cP(b)-bP(c)}{c-b}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } b \neq c,\ \Delta_n = -\frac{P(c)-P(b)}{c-b}x + \frac{cP(b)-bP(c)}{c-b} \text{ où } P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X).}$$

2ème cas. Si $b = c$, l'expression obtenue en fixant x et b est clairement une fonction continue de c car polynômiale en c. On obtient donc la valeur de Δ_n quand $b = c$ en faisant tendre c vers b dans l'expression déjà connue de Δ_n pour $b \neq c$. Maintenant, quand b tend vers c, $-\frac{P(c)-P(b)}{c-b}$ tend vers $-P'(b)$ et

$$\frac{cP(b) - bP(c)}{c-b} = \frac{c(P(b) - P(c)) + (c-b)P(c)}{c-b},$$

tend vers $-bP'(b) + P(b)$.

$$\boxed{\text{si } b = c,\ \Delta_n = -xP'(b) + P(b) - bP'(b) \text{ où } P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X).}$$

(e) $\Delta_2 = 3$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2 = 4$. Puis, pour $n \geqslant 4$, on obtient en développant suivant la première colonne :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

D'où, pour $n \geqslant 4$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ et la suite $(\Delta_n - \Delta_{n-1})_{n\geqslant 3}$ est constante. Par suite, pour $n \geqslant 3$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_3 - \Delta_2 = 1$ et donc la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 2}$ est arithmétique de raison 1. On en déduit que, pour $n \geqslant 2$, $\Delta_n = \Delta_2 + (n-2) \times 1 = n + 1$ (on pouvait aussi résoudre l'équation caractéristique de la récurrence double).

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = n + 1.}$$

Correction de l'exercice 2872 ▲

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2+2(-7) = -12 \neq 0$ et le sytème est de CRAMER en x_1, x_2 et x_4. On note aussi que le système est homogène de rang 3 et donc que l'ensemble des solutions F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension $5-3=2$.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_4=x_3-x_5 \\ x_2-2x_4=-x_3-2x_5 \\ 2x_1+x_2=5x_3+4x_5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=-2x_1+5x_3+4x_5 \\ x_4=\frac{1}{2}((-2x_1+5x_3+4x_5)+x_3+2x_5) \\ x_1+2x_2+3x_4=x_3-x_5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=-2x_1+5x_3+4x_5 \\ x_4=-x_1+3x_3+3x_5 \\ x_1+2(-2x_1+5x_3+4x_5)+3(-x_1+3x_3+3x_5)=x_3-x_5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=3x_3+3x_5x_2=-x_3-2x_5 \\ x_4=0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est $F=\{(3x_3+3x_5,-x_3-2x_5,x_3,0,x_5),\ (x_3,x_5)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}(e_1,e_2)$ où $e_1=(3,-1,1,0,0)$ et $e_2=(3,-2,0,0,1)$ et, puisque $\dim F=2$, une base de F est (e_1,e_2).

Correction de l'exercice 2873 ▲

Soit n un entier naturel non nul. On note L_0, L_1,..., L_n les lignes du déterminant $\text{Van}(x_0,\dots,x_n)$

A la ligne numéro n du déterminant $\text{Van}(x_0,\dots,x_n)$, on ajoute une combinaison linéaire des lignes précédentes du type $L_n \leftarrow L_n+\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i L_i$. La valeur du déterminant n'a pas changé mais sa dernière ligne s'écrit maintenant $(P(x_0),...,P(x_n))$ où P est un polynôme unitaire de degré n. On choisit alors pour P (le choix des λ_i équivaut au choix de P) le polynôme $P=\prod_{i=0}^{n-1}(X-x_i)$ (qui est bien unitaire de degré n). La dernière ligne s'écrit alors $(0,...,0,P(x_{n+1}))$ et en développant ce déterminant suivant cette dernière ligne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \text{Van}(x_0,\dots,x_n)=P(x_n)\text{Van}(x_0,\dots,x_{n-1})=\prod_{i=0}^{n-1}(x_n-x_i)\text{Van}(x_0,\dots,x_{n-1}).$$

En tenant compte de $\text{Van}(x_0)=1$, on obtient donc par récurrence

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^n,\ \text{Van}(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}=\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j-x_i).}$$

En particulier, $\text{Van}(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}\neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Correction de l'exercice 2874 ▲

Si deux des a_i sont égaux ou deux des b_j sont égaux, C_n est nul car C_n a soit deux lignes identiques, soit deux colonnes identiques.

On suppose dorénavant que les a_i sont deux à deux distincts de même que les b_j (et toujours que les sommes a_i+b_j sont toutes non nulles).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note L_1,..., L_{n+1} les lignes de C_{n+1}.

On effectue sur C_{n+1} la transformation $L_{n+1}\leftarrow\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i L_i$ avec $\lambda_{n+1}\neq 0$.

On obtient $C_{n+1}=\frac{1}{\lambda_{n+1}}D_{n+1}$ où D_{n+1} est le déterminant obtenu en remplaçant la dernière ligne de C_{n+1} par la ligne $(R(b_1),...,R(b_{n+1}))$ avec $R=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda_i}{X+a_i}$. On prend $R=\frac{(X-b_1)...(X-b_n)}{(X+a_1)...(X+a_{n+1})}$.

- Puisque les $-a_i$ sont distincts des b_j, R est irréductible.
- Puisque les a_i sont deux à deux distincts, les pôles de R sont simples.
- Puisque $\deg((X-b_1)...(X-b_n))<\deg((X+a_1)...(X+a_{n+1}))$, la partie entière de R est nulle.

R admet donc effectivement une décomposition en éléments simples de la forme $R = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{X+a_i}$ où $\lambda_{n+1} \neq 0$.

Avec ce choix des λ_i, la dernière ligne de D_{n+1} s'écrit $(0,...,0,R(b_{n+1}))$ et en développant D_{n+1} suivant sa dernière ligne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}} R(b_{n+1}) C_n.$$

Calculons λ_{n+1}. Puisque $-a_{n+1}$ est un pôle simple de R,

$$\lambda_{n+1} = \lim x \to -a_{n+1} (x + a_{n+1}) R(x) = \frac{(-a_{n+1}-b_1)...(-a_{n+1}-b_n)}{(-a_{n+1}+a_1)...(-a_{n+1}+a_n)} = \frac{(a_{n+1}+b_1)...(a_{n+1}+b_n)}{(a_{n+1}-a_1)...(a_{n+1}-a_n)}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} R(b_{n+1}) = \frac{(a_{n+1}-a_1)...(a_{n+1}-a_n)}{(a_{n+1}+b_1)...(a_{n+1}+b_n)} \frac{(b_{n+1}-b_1)...(b_{n+1}-b_n)}{(b_{n+1}+a_1)...(b_{n+1}+a_n)}$$

puis la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_i) \prod_{i=1}^{n}(b_{n+1}-b_i)}{\prod_{i=n+1 \text{ ou } j=n+1}(a_i+b_j)} C_n.$$

En tenant compte de $C_1 = \frac{1}{a_1+b_1}$, on obtient par récurrence

$$\boxed{\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)} = \frac{\text{Van}(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \times \text{Van}(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.}$$

(y compris dans les cas particuliers analysés en début d'exercice).

Calcul du déterminant de HILBERT. On est dans le cas particulier où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$. D'abord

$$\text{Van}(1,...,n) = \prod_{j=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(j-i)\right) = \prod_{j=2}^{n}(j-1)! = \prod_{j=1}^{n-1} i!.$$

Puis $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(i+n)!}{i!} =$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} i!\right)^4}{n!^2 \prod_{i=1}^{2n} i!}.}$$

Correction de l'exercice 2875 ▲

On note $C_1,\ldots, C_n$ les colonnes du déterminant de l'énoncé puis on pose $C = (\cos(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $S = (\sin(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $Cj = \sin(a_j)C + \cos(a_j)S$. Ainsi, les colonnes de la matrice proposée sont dans $\text{Vect}(C,S)$ qui est un espace de dimension au plus deux et donc,

$$\boxed{\text{si } n \geqslant 3,\ \det(\sin(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

Si $n = 2$, on a $\begin{vmatrix} \sin(2a_1) & \sin(a_1+a_2) \\ \sin(a_1+a_2) & \sin(2a_2) \end{vmatrix} = \sin(2a_1)\sin(2a_2) - \sin^2(a_1+a_2)$.

Correction de l'exercice 2876 ▲

Soient les vecteurs colonnes $A = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $U = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = A + b_jU$. Les colonnes de la matrice proposée sont dans un espace de dimension au plus deux et donc,

$$\boxed{\text{si } n \geqslant 3,\ \det(a_i+b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

Si $n=2$, on a $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1+b_1)(a_2+b_2)-(a_1+b_2)(a_2+b_1) = a_1b_2+a_2b_1-a_1b_1-a_2b_2 = (a_2-a_1)(b_1-b_2)$.

Correction de l'exercice 2877 ▲

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$C_j = ((a+i+j)^2)_{1\leqslant i\leqslant n} = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2(a+j)(i)_{1\leqslant i\leqslant n} + (i^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Les colonnes de la matrice proposée sont dans un espace de dimension au plus trois et donc,

$$\boxed{\text{si } n \geqslant 4,\ \det((a+i+j)^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

Le calcul est aisé pour $n \in \{1,2,3\}$.

Correction de l'exercice 2878 ▲

$\frac{x_j-x_i}{j-i}$ est déjà un rationnel strictement positif.

Posons $P_i = 1$ si $i=1$, et si $i \geqslant 2$, $P_i = \frac{X(X-1)...(X-(i-2))}{(i-1)!}$.

Puisque, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\deg(P_i) = i-1$, on sait que la famille $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$. De plus, pour $i \geqslant 2$, $P_i - \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$ est de degré $i-2$ et est donc combinaison linéaire de $P_1, P_2,..., P_{i-2}$ ou encore, pour $2 \leqslant i \leqslant n$, la ligne numéro i du déterminant $\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est somme de la ligne $\left(\frac{x_j^{i-1}}{(i-1)!}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et d'une combinaison linéaire des lignes qui la précède. En partant de la dernière ligne et en remontant jusqu'à la deuxième, on retranche la combinaison linéaire correspondante des lignes précedentes sans changer la valeur du déterminant. On obtient par linéarité par rapport à chaque ligne

$$\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(i-1)!}\mathrm{Van}(x_1,...,x_n) = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)}.$$

Finalement,

$$\boxed{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_j-x_i}{j-i} = \det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{N}^*.}$$

Correction de l'exercice 2879 ▲

Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, de la matrice A vaut a_{k-j} avec la convention : si $-(n-1) \leqslant u \leqslant -1$, $a_u = a_{n+u}$.

Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, de la matrice $A\Omega$ vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{n} a_{u-j}\omega^{(u-1)(k-1)} &= \sum_{v=-(j-1)}^{n-j} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} = \sum_{v=-(j-1)}^{-1} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} + \sum_{v=0}^{n-j} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} \\
&= \sum_{v=-(j-1)}^{-1} a_{v+n}\omega^{(v+n+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} \text{ (car } a_{v+n} = a_v \text{ et } \omega^n = 1) \\
&= \sum_{u=n-j+1}^{n-1} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} \\
&= \omega^{(j-1)(k-1)}\sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}.
\end{aligned}$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, posons $S_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}$. Le coefficient ligne j, colonne k de $A\Omega$ vaut donc $\omega^{(j-1)(k-1)}S_k$.
Par passage au détereminant, on en déduit que :

$$\det(A\Omega) = \det\left(\omega^{(j-1)(k-1)}S_k\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^n S_k\right)\det(\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$$

(S_k est en facteur de la colonne k) ou encore $(\det A)(\det\Omega) = \left(\prod_{k=1}^n S_k\right)(\det\Omega)$. Enfin, Ω est la matrice de VANDERMONDE des racines n-èmes de l'unité et est donc inversible puisque celles-ci sont deux à deux distinctes. Par suite $\det\Omega \neq 0$ et après simplification on obtient

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^n S_k \text{ où } S_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}.}$$

Par exemple, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = S_1S_2S_3 = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Un calcul bien plus simple sera fourni dans la planche « Réduction ».

Correction de l'exercice 2880 ▲

(a) $d = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(n),n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$\begin{aligned} d' &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(n),n})' = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\sum_{i=1}^n a_{\sigma(1),1}\ldots a'_{\sigma(i),i}\cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\ldots a'_{\sigma(i),i}\cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{i=1}^n \det(C_1,\ldots,C_i',\ldots,C_n) \text{ (où } C_1,\ldots,C_n \text{ sont les colonnes de la matrice).} \end{aligned}$$

(b) **1 ère solution.** D'après ce qui précède, la fonction d_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $n \geqslant 2$ et x réel, on a

$$\begin{aligned} d_n'(x) &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & & & & \\ & & \ddots & x+1 & 0 & \vdots & & & \\ \vdots & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & \vdots & 0 & x+1 & \ddots & & \\ & & & & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & x+1 \end{vmatrix} \text{ (la colonne particulière est la colonne } i) \\ &= \sum_{i=1}^n d_{n-1}(x) \text{(en développant le } i\text{-ème déterminant par rapport à sa } i\text{-ème colonne)} \\ &= nd_{n-1}(x). \end{aligned}$$

En résumé, $\forall n \geqslant 2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $d_n(x) = nd_{n-1}(x)$. D'autre part $\forall x\in\mathbb{R}$, $d_1(x) = x+1$ et $\forall n \geqslant 2$, $d_n(0) = 0$ (déterminant ayant deux colonnes identiques).

Montrons alors par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $d_n(x) = x^n + nx^{n-1}$.

• C'est vrai pour $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\forall n \geqslant 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $d_n(x) = x^n + nx^{n-1}$. Alors, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$d_{n+1}(x) = d_{n+1}(0) + \int_0^x d_{n+1}'(t)\,dt = (n+1)\int_0^x d_n(t\,dt) = x^{n+1} + (n+1)x^n.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, d_n(x) = x^n + nx^{n-1}.}$$

2 ème solution. d_n est clairement un polynôme de degré n unitaire. Pour $n \geqslant 2$, puisque dn(0) = 0 et que $d'_n = nd_{n-1}$, 0 est racine de d_n, d'_n, ..., $d_n^{(n-2)}$ et est donc racine d'ordre $n-1$ au moins de d_n. Enfin, $d_n(-n) = 0$ car la somme des colonnes du déterminant obtenu est nulle. Finalement $\forall n \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = x^{n-1}(x+n)$ ce qui reste vrai pour $n = 1$.

Une variante peut être obtenue avec des connaissances sur la réduction.

Correction de l'exercice 2881 ▲

On effectue sur la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ les transformations : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + iC_{n+j}$ (où $i^2 = -1$) sans modifier la valeur du déterminant. On obtient $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{pmatrix}$.

Puis en effectuant les transformations : $\forall j \in [\![n+1,2n]\!]$, $L_j \leftarrow L_j - iL_{j-n}$, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{pmatrix} = \det(A+iB) \times \det(A-iB).$$

Comme les matrices A et B sont réelles, $\det(A-iB) = \overline{\det(A+iB)}$ et donc

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A+iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Correction de l'exercice 2882 ▲

Si D est inversible, un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ CD-DC & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ (car } C \text{ et } D \text{ commutent)}$$

et donc, puisque

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \det D \times \det D^{-1}$$
$$= \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

et que $\det\begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$, on a bien $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$ (si C et D commutent).

Si D n'est pas inversible, $\det(D-xI)$ est un polynôme en x de degré n et donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Par suite, la matrice $D-xI$ est inversible sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x. D'autre part, pour toute valeur de x, les matrices C et $D-xI$ commutent et d'après ce qui précède, pour toutes valeurs de x sauf peut-être pour un nombre fini, on a

$$\det\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A(D-xI)-BC).$$

Ces deux expressions sont encore des polynômes en x qui coïncident donc en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ces deux polynômes prennent en particulier la même valeur en 0 et on a montré que

$$\text{si } C \text{ et } D \text{ commutent, } \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC).$$

Correction de l'exercice 2883 ▲

En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_n - x \end{vmatrix} = (-x)^n(a_n - x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}a_k\Delta_k$$

$$\text{où } \Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & \dots & \times & -x & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-x)^k 1^{n-k} = (-x)^k \text{ (déterminant par blocs)}$$

Finalement,

$$\det(A - xI_n) = (-x)^n(a_n - x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}a_k(-x)^k = (-1)^{n+1}\left(x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right).$$

Correction de l'exercice 2884 ▲

(a) Sans modifier la valeur de $\det A$, on effectue les transformations :$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + C_{2n+1-j}$. On obtient alors par linéarité du déterminant par rapport à chacune des n premières colonnes

$$\det A = (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

On effectue ensuite les transformations : $\forall i \in [\![n+1, 2n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - L_{2n+1-i}$ et par linéarité du déterminant par rapport aux n dernières lignes, on obtient

$$\det A = (a+b)^n(a-b)^n = (a^2 - b^2)^n.$$

(b) Ce déterminant a deux colonnes égales et est donc nul.

(c) On retranche la première colonne à toutes les autres et on obtient un déterminant triangulaire : $D_n = (-1)^{n-1}$.

Pour le deuxième déterminant, on ajoute les $n-1$ dernières colonnes à la première puis on met $n-1$ en facteur de la première colonne et on retombe sur le déterminant précédent. On obtient : $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

(d) On ajoute les $n-1$ dernières colonnes à la première puis on met $a+(n-1)b$ en facteur de la première colonne. On obtient

$$D_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

On retranche ensuite la première ligne à toutes les autres et on obtient

$$D_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.}$$

Correction de l'exercice 2885 ▲

(a) Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$. Donc $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 7\times 4 - 11\times(-8) =$ 116.

(b) Nous allons voir différentes méthodes pour calculer les déterminants.

Première méthode. *Règle de Sarrus.* Pour le matrice 3×3 il existe une formule qui permet de calculer directement le déterminant.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1\times 4\times 21 + 0\times 15\times 5 + 3\times 6\times 6 - 5\times 4\times 6 - 6\times 15\times 1 - 3\times 0\times 21 = -18$$

Attention ! La règle de Sarrus ne s'applique qu'aux matrices 3×3.

(c) **Deuxième méthode.** *Se ramener à une matrice diagonale ou triangulaire.*

Si dans une matrice on change un ligne L_i en $L_i - \lambda L_j$ alors le déterminant reste le même. Même chose avec les colonnes.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-5L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-\frac{3}{2}L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 1\times 4\times(-\tfrac{3}{2}) = -6$$

On a utilisé le fait que le déterminant d'une matrice diagonale (ou triangulaire) est le produit des coefficients sur la diagonale.

(d) **Troisième méthode.** *Développement par rapport à une ligne ou une colonne.* Nous allons développer par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-0) \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (+3) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 3 \times 7 - 1 \times 7 = 14$$

Bien souvent on commence par simplifier la matrice en faisant apparaître un maximum de 0 par les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Puis on développe en choisissant la ligne ou la colonne qui a le plus de 0.

(e) On fait apparaître des 0 sur la première colonne puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

Pour calculer le déterminant 3×3 on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on la développe.

$$-\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = -96$$

Donc $\Delta = 96$.

(f) La matrice a déjà beaucoup de 0 mais on peut en faire apparaître davantage sur la dernière colonne, puis on développe par rapport à la dernière colonne.

$$\Delta' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

(g) Toujours la même méthode, on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\Delta'' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la deuxième colonne :

$$\Delta'' = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

Correction de l'exercice 2886 ▲

(a) Par la règle de Sarrus :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

(b) On développe par rapport à la seconde ligne qui ne contient qu'un coefficient non nul et on calcule le déterminant 3×3 par la règle de Sarrus :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

(c)

$$\Delta_3 = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\Delta_3 = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

(d) Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses lignes et aussi chacune de ses colonnes. Par exemple les coefficients de la première ligne sont tous des multiples de 5 donc

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On fait la même chose avec la troisième ligne :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Et enfin les coefficients la première colonne sont des multiples de 2 et ceux de la troisième colonne sont des multiples de 7 donc :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times 2 \times 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Les coefficients sont plus raisonnables ! On fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ pour obtenir :

$$\Delta_4 = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times 56 = 7840$$

(e)

$$\Delta_5 = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4-L_3 \end{array} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \\ c & 0 & a & a \\ -c & c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On fait ensuite les opérations suivantes sur les colonnes : $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_4$ pour obtenir une dernière ligne facile à développer :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b & b \\ c & c & 0 & a \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +c \times \begin{vmatrix} 2a & b & 0 \\ 0 & -2b & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = bc(bc-4a^2)$$

(f) On fait d'abord les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$ et on développe par rapport à la première ligne :

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 3 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (-2) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant à calculer se développe par rapport à la deuxième colonne et le second déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_6 = (-2) \times a \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times b \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = 4a^3 + 27b^2$$

(g) Nous allons permuter des lignes et des colonnes pour se ramener à une matrice diagonale par blocs. Souvenons-nous que lorsque l'on échange deux lignes (ou deux colonnes) alors le déterminant change de signe. Nous allons rassembler les zéros. On commence par échanger les colonnes C_1 et C_3 : $C_1 \leftrightarrow C_3$:

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis on échange les lignes L_1 et L_4 : $L_1 \leftrightarrow L_4$:

$$\Delta_7 = + \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Notre matrice est sous la forme d'une matrice diagonale par blocs et son déterminant est le produit des déterminants.

$$\Delta_7 = \left|\begin{array}{cc|ccc} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-31) \times (-6) = 186$$

Correction de l'exercice 2887 ▲

(a) On retire la première colonne à toutes les autres colonnes

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_1 & 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2 - a_1 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne :

$$\Delta_1 = (-1)^{n-1} a_1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 - a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_1 (a_2 - a_1)^{n-1}$$

Où l'on a reconnu le déterminant d'un matrice triangulaire supérieure. Donc

$$\Delta_1 = a_1(a_1-a_2)^{n-1}.$$

(b) On va transformer la matrice correspondante en une matrice triangulaire supérieure, on commence par remplacer la ligne L_2 par $L_2 - L_1$ (on ne note que les coefficients non nuls) :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & +1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & -1 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis on remplace la ligne L_3 par $L_3 - L_2$ (attention il s'agit de la nouvelle ligne L_2) et on continue ainsi de suite jusqu'à $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$ (n est la taille de la matrice sous-jacente) :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & (-1)^n \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On fait attention pour le dernier remplacement $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ légèrement différent et qui conduit au déterminant d'une matrice triangulaire : :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & (-1)^n \\ & & & & 0 & 1-(-1)^n \end{vmatrix} = 1-(-1)^n.$$

En conclusion $\Delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

(c) On retire la colonne C_1 aux autres colonnes C_i pour faire apparaître des 0 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -b & & \cdots & -b \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

On remplace ensuite L_1 par $L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$ (ou ce qui revient au même : faites les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$,...chacune de ces opérations fait apparaître un 0 sur la première ligne) pour obtenir une matrice triangulaire inférieure :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} na+b & 0 & & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix} = (na+b)b^{n-1}.$$

Correction de l'exercice 2888 ▲

(a) Remarquons que comme le système est homogène (c'est-à-dire les coefficients du second membre sont nuls) alors $(0,0,0)$ est une solution du système. Voyons s'il y en a d'autres. Nous faisons semblant de ne pas voir que la seconde ligne implique $x=y$ et que le système est en fait très simple à résoudre. Nous allons appliquer le pivot de Gauss en faisant les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait maintenant $L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

En partant de la dernière ligne on trouve $z=0$, puis en remontant $y=0$, puis $x=0$. Conclusion l'unique solution de ce système est $(0,0,0)$.

(b) On applique le pivot de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ pour obtenir un système équivalent qui est triangulaire donc facile à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

(c) On fait les opérations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & 7y & + & z & = & 3c-a \end{array}\right.$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, ce qui donne un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & & & 54z & = & 5(3c-a)-7(3b+a) \end{array}\right.$$

En partant de la fin on en déduit : $z = \frac{1}{54}(-12a-21b+15c)$ puis en remontant cela donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{18}(8a+5b-c) \\ y & = & \frac{1}{18}(-2a+b+7c) \\ z & = & \frac{1}{18}(-4a-7b+5c) \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 2891 ▲

(S_1) : solution unique si $m^2 \neq 4$, impossible sinon. (S_2) : solution unique si $m^2 \neq 1/2$, infinité sinon.

Correction de l'exercice 2892 ▲

(S_1) : $a=b$ ou $b=c$ ou $c=a$.
(S_2) : $2abc+bc+ca+ab=1$.

Correction de l'exercice 2893 ▲

(S_1) : solution unique quels que soient b_1,b_2,b_3,b_4.
(S_2) : solutions si $b_2=b_1+b_3$.
(S_3) : solutions si $b_1+b_2-2b_4=0$ et $2b_1-b_3-2b_4=0$.
(S_4) : solutions si $b_2=-2b_1$ et $b_3=-b_1$ et $b_4=3b_1$.

Correction de l'exercice 2894 ▲

(a) On commence par simplifier le système en effectuant les opérations suivantes sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1-L_4$, $L_2 \leftarrow L_2-L_4$, $L_3 \leftarrow L_3-L_4$:

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \lambda x & & & & & - & \lambda t & = & a-d \\ & & \lambda y & & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ x & + & y & + & z & + & (1+\lambda)t & = & d \end{array} \right.$$

(b) Traitons le cas particulier $\lambda=0$. Si $\lambda=0$ alors le système n'a des solutions que si $a=b=c=d$. Les solutions sont alors les (x,y,z,t) qui vérifie $x+y+z+t=d$. (C'est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.)

(c) Si $\lambda \neq 0$ alors on peut faire l'opération suivante sur la dernière ligne : $L_4 \leftarrow L_4-\frac{1}{\lambda}L_1-\frac{1}{\lambda}L_2-\frac{1}{\lambda}L_3$ pour obtenir :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda x & & & - & \lambda t & = & a-d \\ & \lambda y & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ & & & & (\lambda+4)t & = & d-\frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \end{array} \right.$$

(d) Cas particulier $\lambda=-4$. La dernière ligne devient $0=a+b+c+d$. Donc si $a+b+c+d \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions.
Si $\lambda=-4$ et $a+b+c+d=0$ alors existe une infinité de solutions :

$$\left\{ \left(t-\frac{a-d}{4}, t-\frac{b-d}{4}, t-\frac{c-d}{4}, t\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) Cas général : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$. On calcule d'abord $t=\frac{1}{\lambda+4}\left(d-\frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d)\right)$ et en remplaçant par la valeur de t obtenue on en déduit les valeurs pour $x=t+\frac{1}{\lambda}(a-d), y=t+\frac{1}{\lambda}(b-d), z=t+\frac{1}{\lambda}(c-d)$. Il existe donc une solution unique :

$$\left(\frac{(\lambda+3)a-b-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)b-a-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)c-a-b-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)d-a-b-c}{\lambda(\lambda+4)}\right).$$

Correction de l'exercice 2895 ▲

Pas de solution si $\lambda^2+\lambda-2 \neq 0$ ($\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$). Si $\lambda=1$, pas de solution si $a+1 \neq 0$, infinité de solutions sinon. Si $\lambda=-2$, solution unique.

Correction de l'exercice 2903 ▲

On commence par simplifier le système :

— on place la ligne L_3 en première position pour le pivot de Gauss ;
— on réordonne les variables dans l'ordre : y,t,x,z pour profiter des lignes déjà simples.

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ 3y + 3t + z = 0 \\ -y - t + 2x + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

On commence le pivot de Gauss avec les opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour obtenir :

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ -3x - 2z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

Les 3 dernières lignes sont identiques, on se ramène donc à un système avec 2 équations et 4 inconnues :

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

Nous choisissons x et y comme paramètres, alors $z = -\frac{3}{2}x$ et $t = -x-y-z = \frac{1}{2}x - y$. Les solutions du système sont donc les

$$\left\{ \left(x, y, z = -\frac{3}{2}x, t = \frac{1}{2}x - y\right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Correction de l'exercice 2922 ▲

S_1 : si $a \neq 0$, le système est équivalent à $y = -1 - 2\cosh a\, x$ et $z = x + 2\cosh a$
si $a = 0$, il est équivalent à $x + y + z = 1$

S_2 : On peut soustraire à chaque ligne la ligne précédente, puis 2 fois la précédente, etc...On obtient ainsi un système triangulaire cramérien et après bien des calculs la solution $x_k = (-1)^{k+1}C_n^k$.
Voici une solution plus astucieuse. Soit $P(X) = x_1X + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ et T l'opérateur $Q(x) \mapsto XQ'(X)$. Le système peut s'écrire $P(1) = 1,\ (TP)(1) = 0,\ (T^2P)(1) = 0, \ldots,\ (T^{n-1}P)(1) = 0$. On en déduit que $P'(1) = P''(1) = \ldots = P^{(n-1)}(1) = 0$, donc P est de la forme $P(X) = 1 + \lambda(1-X)^n$, et $\lambda = -1$ car le terme constant de P est nul. Donc $x_k = (-1)^{k+1}C_n^k$.

Correction de l'exercice 2932 ▲

(a) i. **Par substitution.** La première équation s'écrit aussi $y = 1 - 2x$. On remplace maintenant y dans la deuxième équation

$$3x + 7y = -2 \implies 3x + 7(1-2x) = -2 \implies 11x = 9 \implies x = \frac{9}{11}.$$

On en déduit y : $y = 1 - 2x = 1 - 2\frac{9}{11} = -\frac{7}{11}$. La solution de ce système est donc le couple $(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11})$.
N'oubliez pas de vérifier que votre solution fonctionne !

ii. **Par le pivot de Gauss.** On garde la ligne L_1 et on remplace la ligne L_2 par $2L_2 - 3L_1$:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 11y = -7 \end{cases}$$

On obtient un système triangulaire : on en déduit $y = -\frac{7}{11}$ et alors la première ligne permet d'obtenir $x = \frac{9}{11}$.

iii. **Par les matrices.** En terme matriciel le système s'écrit

$$AX = Y \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On trouve la solution du système en inversant la matrice :

$$X = A^{-1}Y.$$

L'inverse d'une matrice 2×2 se calcule ainsi

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Il faut bien sûr que le déterminant $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ soit différent de 0.

Ici on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

iv. **Par les formules de Cramer.** Les formules de Cramer pour un système de deux équations sont les suivantes si le déterminant vérifie $ad - bc \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \implies x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Ce qui donne ici :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9}{11} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}$$

(b) i. Avant tout on regarde s'il existe une solution unique, c'est le cas si et seulement si le déterminant est non nul. Pour le premier système le déterminant est $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$ donc il y a une unique solution si et seulement si $a \neq \pm 1$.

Bien sûr toutes les méthodes conduisent au même résultat ! Par exemple par substitution, en écrivant la première ligne $y = 2 - ax$, la deuxième ligne devient $(a^2+1)x + 2a(2-ax) = 1$. On en déduit que si $a \neq \pm 1$ alors $x = \frac{4a-1}{a^2-1}$ puis $y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}$.

Traitons maintenant les cas particuliers. Si $a = 1$ alors le système devient : $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

Mais on ne peut avoir en même temps $x + y = 2$ et $x + y = \frac{1}{2}$. Donc il n'y a pas de solution.

Si $a = -1$ alors le système devient : $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$ et il n'y a pas de solution.

ii. Ici le déterminant est $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a$.

Si $a \neq 0$ alors on trouve la solution unique (x, y). Par exemple avec la formule de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

Si $a = 0$ il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 2934 ▲

Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 2$; compatible ssi $m \neq 2$.

Correction de l'exercice 2935 ▲

Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 1, \pm i$; compatible ssi $m \neq 0, \pm i$.

Correction de l'exercice 2936 ▲

Système de Cramer ssi $m \neq 1, \pm 2i$; compatible ssi $m \neq 1$.

Correction de l'exercice 2937 ▲

Si $m \neq 0, -2$ alors système de Cramer ; sinon, système incompatible.

Correction de l'exercice 2938 ▲

Système de Cramer ssi a, b, c sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi $d \in \{a, b, c\}$.

Correction de l'exercice 2939 ▲

Système compatible ssi $3a + 2b + 2c + d = 0$.

Correction de l'exercice 2940 ▲

Système de Cramer.

Correction de l'exercice 2941 ▲

Système de Cramer ssi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi les seconds membres correspondants sont égaux.

Correction de l'exercice 2942 ▲

CN d'existence de solution : $p + q + r = 0$. C'est une CNS si la liste (a, b, c) comporte au plus un zéro.

Correction de l'exercice 2943 ▲

(a) Pour éviter d'avoir à diviser par a on réordonne nos lignes puis on applique la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & by & + & az & = & 1 \quad {\scriptstyle L_1} \\ x & + & aby & + & z & = & b \quad {\scriptstyle L_2} \\ ax & + & by & + & z & = & 1 \quad {\scriptstyle L_3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & by & + & az & = & 1 \quad {\scriptstyle L_1} \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - aL_1} \end{array}\right.$$

On fait ensuite $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ pour obtenir un système triangulaire équivalent au système initial :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ & & & & (2-a-a^2)z & = & b-a \end{array}\right.$$

(b) Nous allons maintenant discuter de l'existence des solutions. Remarquons d'abord que $2 - a - a^2 = -(a-1)(a+2)$. Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $2 - a - a^2 \neq 0$ donc $z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$. On a donc trouvé la valeur de z. La deuxième ligne du système triangulaire est $b(a-1)y + (1-a)z = b-1$ on sait déjà $a - 1 \neq 0$. Si $b \neq 0$ alors, en reportant la valeur de z obtenue, on trouve la valeur $y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$. Puis avec la première ligne on en déduit aussi $x = 1 - by - az$.

Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$ alors il existe une unique solution (x, y, z).

(c) Il faut maintenant s'occuper des cas particuliers.

i. Si $a=1$ alors notre système triangulaire devient :

$$\begin{cases} x & + & by & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b-1 \end{cases}$$

Si $b\neq 1$ il n'y a pas de solution. Si $a=1$ et $b=1$ alors il ne reste plus que l'équation $x+y+z=1$. On choisit par exemple y,z comme paramètres, l'ensemble des solutions est

$$\{(1-y-z,y,z) \mid y,z\in\mathbb{R}\}.$$

ii. Si $a=-2$ alors le système triangulaire devient :

$$\begin{cases} x & + & by & - & 2z & = & 1 \\ & & -3by & + & 3z & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b+2 \end{cases}$$

Donc si $b\neq -2$ il n'y a pas de solution. Si $a=-2$ et $b=-2$ alors le système est

$$\begin{cases} x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & -1 \end{cases}$$

Si l'on choisit y comme paramètre alors il y a une infinité de solutions

$$\{(-1-2y,y,-1-2y) \mid y\in\mathbb{R}\}.$$

iii. Enfin si $b=0$ alors la deuxième et troisième ligne du système triangulaire sont : $(1-a)z=-1$ et $(2-a-a^2)z=-a$. Donc $z=\frac{-1}{1-a}=\frac{-a}{2-a-a^2}$ (le sous-cas $b=0$ et $a=1$ n'a pas de solution). Dans tous les cas il n'y a pas de solution.

iv. Conclusion :
- Si $a\neq 1$ et $a\neq -2$ et $b\neq 0$, c'est un système de Cramer : il admet une unique solution.
- Si $a=1$ et $b\neq 1$ il n'y a pas de solution (le système n'est pas compatible).
- Si $a=1$ et $b=1$ il y a une infinité de solutions (qui forment un plan dans $\mathbb{R}^3$).
- Si $a=-2$ et $b\neq -2$ il n'y a pas de solution.
- Si $a=-2$ et $b=-2$ il y a une infinité de solutions (qui forment une droite dans $\mathbb{R}^3$).
- Si $b=0$ il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 2944 ▲

Décomposition en éléments simples de $F=\dfrac{x}{X+a}+\dfrac{y}{X+2a}+\dfrac{z}{X+3a}$ avec $F(1)=F(2)=F(3)=1$ donc une solution unique si $a\neq 0$.

Correction de l'exercice 2950 ▲

Notons $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ un polynôme de degré $\leqslant 3$.

(a) Tout d'abord calculons l'intégrale :

$$\int_2^4 P(x)\,dx=\left[a\frac{x^4}{4}+b\frac{x^3}{3}+c\frac{x^2}{2}+dx\right]_2^4=60a+\frac{56}{3}b+6c+2d.$$

(b) D'autre part

$$\alpha P(2)+\beta P(3)+\gamma P(4)=\alpha\big(8a+4b+2c+d\big)+\beta\big(27a+9b+3c+d\big)+\gamma\big(64a+16b+4c+d\big).$$

Donc

$$\alpha P(2)+\beta P(3)+\gamma P(4)=(8\alpha+27\beta+64\gamma)a+(4\alpha+9\beta+16\gamma)b+(2\alpha+3\beta+4\gamma)c+(\alpha+\beta+\gamma)d.$$

(c) Pour avoir l'égalité $\int_2^4 P(x)\,dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ quelque soit les coefficients a, b, c, d il faut et il suffit que

$$(8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ 2\alpha & + & 3\beta & + & 4\gamma & = & 6 \\ 4\alpha & + & 9\beta & + & 16\gamma & = & \frac{56}{3} \\ 8\alpha & + & 27\beta & + & 64\gamma & = & 60 \end{array}\right.$$

De façon surprenante ce système à 3 inconnues et 4 équations a une solution unique :

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Correction de l'exercice 2951 ▲

2.
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -4 & -3 & 12 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2^{-2}3^{6} \\ y & = & 2^{-3}3^{12} \\ z & = & 2^{2}3^{-7}. \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 2952 ▲

Si $\mathrm{rg}(A) = n$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n$. Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1$. Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 0$.

Correction de l'exercice 2954 ▲

(a) 3.

(b) 4.

(c) 2.

(d) 3.

Correction de l'exercice 2956 ▲

$\mathrm{rg} = 3$ si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq -25$.
$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \mathrm{rg} = 2 : 11L_1 = 5L_2 + 9L_3$.
$\lambda = -25 \Rightarrow \mathrm{rg} = 2 : L_1 + 2L_2 + 9L_3 = 0$.

Correction de l'exercice 2957 ▲

$\mathrm{rg} = 3$ si $a \neq \frac{1}{3}$ ou $b \neq -3$, $\mathrm{rg} = 2$ sinon.

Correction de l'exercice 2958 ▲

$\mathrm{rg}ABC \leqslant 2 \Rightarrow x = 13$. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 13 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2959 ▲

Les colonnes de A engendrent les $n-p$ derniers vecteurs de la base canonique.

Correction de l'exercice 2960 ▲

Échange des lignes i et j.

Correction de l'exercice 2963 ▲

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x_i) \text{ et } (y_j) \text{ ne sont pas constantes} \\ 1 & \text{ou } 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^2 & \dots & y_n^2 \\ 2y_1 & \dots & 2y_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(B) = \begin{cases} 3 & \text{si } \mathrm{Card}\,(x_i) \geqslant 3 \text{ et } \mathrm{Card}\,(y_j) \geqslant 3 \\ 2 & \text{si } \min\big(\mathrm{Card}\,(x_i), \mathrm{Card}\,(y_j)\big) = 2 \\ 1 & \text{ou } 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2965 ▲

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2967 ▲

$$M = \mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ \vdots \\ e^{ni\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & e^{(n-1)i\theta} \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \mathrm{rg} M \leqslant 2.$$

Le premier mineur 2×2 vaut $-\sin^2\theta \Rightarrow \mathrm{rg} M = 2$ si $\theta \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\,\pi)$. Sinon, $\mathrm{rg} M = 1$.

Correction de l'exercice 2969 ▲

E est un sev et un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il est isomorphe à $\mathscr{L}(H, \mathbb{R}^n)$ où H est un supplémentaire de $\mathrm{Im} A$ dans $\mathbb{R}^n$. $\dim E = n(n - \mathrm{rg}(A))$.

Correction de l'exercice 2972 ▲

2 ou 0.

Correction de l'exercice 2976 ▲

(a)

(b) B admet r lignes indépendantes d'indices $i_1, \dots, i_r$ et C admet r colonnes indépendantes d'indices $j_1, \dots, j_r$. Soient B' et C' les sous matrices carrées associées dans B et C. Alors la sous-matrice de A d'indices $i_1, \dots, i_r$ pour les lignes et $j_1, \dots, j_r$ pour les colonnes est $B'C'$, de rang r. Donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$ et l'inégalité inverse est bien connue.

(c) Soient $i_1, \dots, i_r$ r indices tels que les lignes associées dans A sont linéairement indépendantes, et $B \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ la sous-matrice correpondante. Par construction, $\mathrm{rg}(B) = r$. Chaque ligne de A étant combinaison linéaire des lignes de B, il existe $C \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = BC$. Et on a $r = \mathrm{nb.lignes}(C) \geqslant \mathrm{rg}(C) \geqslant \mathrm{rg}(A) = r$.

(d)

(e) Comprendre dans cette question que B, C ne sont pas forcément les matrices construites en **2**. Notons $\mathrm{vect}(X)$ l'espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice X. De $A = BC = {}^tC^tB$ on tire $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$ et $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}({}^tC)$, et tous ces espaces sont de dimension r, donc ils sont égaux. On en déduit qu'il existe une matrice $P \in GL_r(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tCP$ d'où $CB = C^tCP$. $\mathrm{rg}(C^tC) = \mathrm{rg}(C) = r$ et P est inversible donc $\mathrm{rg}(CB) = r$.

Correction de l'exercice 2978 ▲

$\Delta = \det M = \mathrm{Van}(1,2,...,n) \neq 0$ et le système est de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors pour $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ où

$$\Delta_k = \mathrm{Van}(1,...,k-1,0,k+1,...,n) = (-1)^{k+1}\begin{vmatrix} 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \\ 1 & & (k-1)^2 & (k+1)^2 & & n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & & (k-1)^{n-1} & (k+1)^{n-1} & & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(en développant par rapport à la k-ème colonne). Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a alors

$$\begin{aligned}\Delta_k &= (-1)^{k+1} 1 \times 2 \ldots \times (k-1) \times (k+1) \times \ldots \times n \times \mathrm{Van}(1,2,...,k-1,k+1,...,n) \\ &= (-1)^{k+1}\frac{n!}{k}\frac{\mathrm{Van}(1,2,...,n)}{(k-(k-1))\ldots(k-1)((k+1)-k)\ldots.(n-k)} = (-1)^{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\Delta,\end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = (-1)^{k+1} C_n^k.}$$

Correction de l'exercice 2979 ▲

m est un paramètre réel

(a) $\det S = 2(m(m-5)-6) + (3(m-5)-3) + 7(6-m) = 2m^2 - 14m + 12 = 2(m-1)(m-6)$. Le système est de CRAMER si et seulement si $m \in \{1,6\}$. Si $m \notin \{1,6\}$, les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1}$$

$$y = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1}$$

$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & m7 \end{vmatrix} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}$$

Si $m \in \{1,6\}$, $\det S = 0$. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \frac{14-(2m+3)y}{5} \end{array}\right.$.
La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en y disparaissent automatiquement pour $m \in \{1,6\}$ et donc pas la peine de les calculer).

$$\begin{aligned} 7x+2y+(m-5)z = 7 &\Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)y}{5} + 3y + (m-5)\frac{14-(2m+3)y}{5} = 7 \Leftrightarrow 21 + 14(m-5) - 35 = 0 \\ &\Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6. \end{aligned}$$

Si $m = 1$, le système n'a pas de solution et si $m = 6$, l'ensemble des solutions est $\{(\frac{3}{5}, y, -\frac{y}{5}),\ y \in \mathbb{R}\}$.

(b) $\det S = 2(-8m-4+2)-(4m+1)+5(2m+2m+1) = 0$. Le système n'est jamais de CRAMER. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{6m-4-(4m+1)y}{3} \\ z = \frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} \end{array}\right.$. La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité.

$$5x-y+4z = 3m-2 \Leftrightarrow 5\frac{6m-4-(4m+1)y}{3} - y + 4\frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} = 3m-2$$
$$\Leftrightarrow 5(6m-4)+4(-3m+8)-3(3m-2) = 0 \Leftrightarrow 9(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Si $m \neq -2$, le système n'a pas de solution. Si $m = -2$, l'ensemble des solutions est $\{(\frac{-16+7y}{3}, y, \frac{14-8y}{3}),\ y \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & -1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2+2m = -2m(m-1)$. Le système est de CRAMER en x, y et z si et seulement si $m \in \{0,1\}$.

Si $m \notin \{0,1\}$, les formules de CRAMER fournissent :

$$x = \frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ m+2+mt & m & 1 \\ -1+t & -1 & -m \end{vmatrix} = \frac{(2m^2-2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -t+1$$
$$y = \frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix} 1 & 3-t & 1 \\ 1 & m+2+mt & 1 \\ m & -1+t & -m \end{vmatrix} = \frac{(-2m^2-2m)+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = \frac{m+1}{m-1}t+1$$
$$z = \frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-t \\ 1 & m & m+2+mt \\ m & -1 & -1+t \end{vmatrix} = \frac{(2m^2+2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -\frac{m+1}{m-1}t+1.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(-t+1, \frac{m+1}{m-1}t+1, -\frac{m+1}{m-1}t+1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = 0$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t = 3 \\ x+z = 2 \\ y+t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2-x \\ t = -1-y \end{array}\right.$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(x,y,2-x,1-y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Si $m = 1$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t = 3 \\ x+y+z-t = 3 \\ x-y-z-t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ x+y+z = 3 \\ x-y-z = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 1 \\ z = 2-y \end{array}\right.$. Dans ce cas, l'ensemble de solutions est $\{(1,y,2-y,0),\ z \in \mathbb{R}\}$.

(d)

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & m & 1 & 2 \\ m & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+6 & 2 & 3 & m \\ m+6 & 1 & m & 3 \\ m+6 & m & 1 & 2 \\ m+6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (m+6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (m+6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & m-3 & 3-m \\ 0 & m-2 & -2 & 2-m \\ 0 & 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} = (m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 3-m \\ m-2 & -2 & 2-m \\ 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix}$$
$$= (m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & -m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = -m(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -m(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 \\ m-3 & -1 \end{vmatrix} = m(m-2)(m-4)(m+6).$$

Le système est de CRAMER si et seulement si $m \notin \{0,2,4,-6\}$. Dans ce cas :

$$m(m-2)(m-4)(m+6)x = \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-(m-1) & 3-m(m-1) & m-3(m-1) \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 3-m & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ m & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5m-6 & -m^2+5m-3 & -2m+3 \\ m-6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -[-3(5m-6)-(m-6)(-m^2+5m-3)]$$
$$= -m^3+11m^2-18m = -m(m-2)(m-9).$$

et $x = -\frac{m-9}{(m-4)(m+6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)y = \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & 0 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 3m^2-5m-6 & -m^2+m+3 & 2m^2-4m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ m-6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= -3(3m^2-5m-6)-(m-6)(2m^2-4m-3)$$
$$= -2m^3+7m^2-6m = -m(2m-3)(m-2)$$

et $y = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)z=\begin{vmatrix}1&2&m-1&m\\2&1&1&3\\3&m&0&2\\m&3&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2m+3&-m+3&0&-2m+3\\2&1&1&3\\3&m&0&2\\m&3&0&1\end{vmatrix}$$
$$=-\begin{vmatrix}-2m+3&-m+3&-2m+3\\3&m&2\\m&3&1\end{vmatrix}$$
$$=-(-2m+3)(m-6)+3(5m-6)-m(2m^2-5m+6)=-2m^3+7m^2-6m$$
$$=-m(2m-3)(m-2),$$

et $z=-\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)t=\begin{vmatrix}1&2&3&m-1\\2&1&m&1\\3&m&1&0\\m&3&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2m+3&-m+3&-m^2+m+3&0\\2&1&m&1\\3&m&1&0\\m&3&2&0\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-2m+3&-m+3&-m^2+m+3\\3&m&1\\m&3&2\end{vmatrix}$$
$$=(-2m+3)(2m-3)-3(3m^2-5m-3)+m(m^3-m^2-4m+3)$$
$$=m^4-m^3-17m^2+30m=m(m-2)(m^2+m-15)$$

et $t=\frac{m^2+m-15}{(m-4)(m-6)}$.
Si $m=0$, le système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l}x+2y+3z=-1\\2x+y+3t=1\\3x+z+2t=0\\3y+2z+t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=\ (E_1+E_2)\\2x+y+3t=1\\x+y+z+t=0(E_3+E_4)\\3y+2z+t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t=-x-y-z\\-x-2y-3z=1\\-x+2y+z=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=x-2y\\-x-2y-3(x-2y)=1\\t=-x-y-z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x+\frac{1}{4}\ z=-x-\frac{1}{2}\\t=-x+\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

D'où l'ensemble de solutions : $\{(x,x+\frac{1}{4},-x-\frac{1}{4};-x+\frac{1}{2}),\ x\in\mathbb{R}\}$.
Si $m=2$, on obtient pour ensemble de solutions : $\{(x,-x-\frac{5}{8},x+\frac{1}{2};-x-\frac{1}{8}),\ x\in\mathbb{R}\}$.
Si $m=4$ ou $m=-6$, on voit en résolvant que le système est incompatible.

(e) $\begin{vmatrix}m&1&1\\-1&-1&m\\1&-1&-m\end{vmatrix}=m(2m)+(-m+1)+(m+1)=2(m^2+1)\neq0$ (m désignant un paramètre réel).
Le système formé des équations 1, 2 et 4 est donc de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x=\frac{2m^2-m-1}{m^2+1},\ y=3-m \text{ et } z=\frac{3m-1}{m^2+1}.$$

La troisième équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$-m\frac{2m^2-m-1}{m^2+1}+3-m+m\frac{3m-1}{m^2+1}=-m$$
$$\Leftrightarrow -m(2m^2-m-1)+(3-m)(m^2+1)+m(3m-1)=-m(m^2+1)$$
$$\Leftrightarrow -2m^3+7m^2+3=0$$

Le système est compatible si et seulement si m est l'une des trois racines de l'équation $-2X^3+7X^2+3=0$.

(f) $\det S = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{Van}(a,b,c)}{abc}$.

Si a, b et c sont deux à deux distincts, le système est de CRAMER. On obtient :

$$x = \frac{abc}{mbc}\frac{\mathrm{Van}(m,b,c)}{\mathrm{Van}(a,b,c)} = \frac{a(b-m)(c-m)}{m(b-a)(c-a)},$$

puis, par symétrie des rôles, $y = \frac{b(a-m)(c-m)}{m(a-b)(c-b)}$ et $z = \frac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}$.

Si $a = b \neq c$ (ou $a = c \neq b$ ou $b = c \neq a$), le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1-z \\ ax+ay+cz=m \\ \frac{1}{a}x+\frac{1}{a}y+\frac{1}{c}z=\frac{1}{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=1-z \\ a(1-z)+cz=m \\ \frac{1}{a}(1-z)+\frac{1}{c}z=\frac{1}{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=1-z \\ z=\frac{m-a}{c-a} \\ (\frac{1}{c}-\frac{1}{a})\frac{m-a}{c-a}=\frac{1}{m}-\frac{1}{a} \end{array}\right. .$$

Le système est compatible si et seulement si $(m-a)(m-c)=0$ ou encore ($m=a$ ou $m=c$). Dans ce cas, l'ensemble des solutions est : $\{(x, \frac{m-c}{a-c}-x; \frac{m-a}{c-a}),\ x \in \mathbb{R}\}$.

Si $a=b=c$, le système s'écrit : $x+y+z=1=\frac{m}{a}=\frac{a}{m}$. Le système est compatible si et seulement si $m=a=b=c$ et dans ce cas l'ensemble des solutions est : $\{(x,y,1-x-y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

(g)

$$\det S = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2-(b+c)^2 & (a+c)^2-b^2 & 0 \\ 0 & b^2-(a+c)^2 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a-b-c & a+c-b & 0 \\ 0 & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2bc & b^2 & c^2 \\ -2c & a+c-b & 0 \\ -2(b-c) & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^2(c^2(-c(b-a-c)+(b-c)(a+c-b))+(a+b-c)(bc(a+c-b)+b^2c))$$

$$= 2(a+b+c)^2(c^2b(a-b+c)+(a+b-c)bc(a+c))$$

$$= 2bc(a+b+c)^2(a^2+ab+ac) = 2abc(a+b+c)^3.$$

Si $abc(a+b+c)\neq 0$, le système est de CRAMER et on obtient après calcul :

$$x = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)},\ y = \frac{(a-b-c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)} \text{ et } z = \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2abc(a+b+c)}.$$

Si $a=0$ (ou $b=0$ ou $c=0$), le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} (b+c)^2x+b^2y+c^2z=1 \\ c^2(y+z)=1 \\ b^2(y+z)=1 \end{array}\right. .$$

Donc,

Si (($a=0$ et $b^2\neq c^2$) ou ($b=0$ et $a^2\neq c^2$) ou ($c=0$ et $a^2\neq b^2$)), le système n'a pas de solution.

Si $a=0$ et $b=c\neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(0,y,-\frac{y}{b^2}),\ y\in\mathbb{R}\}$ (résultats analogues pour les cas ($b=0$ et $a=c\neq 0$) et ($c=0$ et $a=b\neq 0$)).

Si $a=b=c=0$, il n'y a pas de solution.

Si $a=0$ et $c=-b\neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(x,y-\frac{y}{b^2}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ (résultats analogues pour ($b=0$ et $c=-a\neq 0$) et ($c=0$ et $b=-a\neq 0$).

Si $abc\neq 0$ et $a+b+c=0$, le système équivaut à l'équation $a^2x+b^2y+c^2z=1$. L'ensemble des solutions est $\{(x,y,\frac{1-a^2x-b^2y}{c^2}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

(h)

$$\det S=\begin{vmatrix} a&b&c\\ c&a&b\\ b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1&b&c\\ 1&a&b\\ 1&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1&b&c\\ 0&a-b&b-c\\ 0&c-b&a-c\end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)((a-b)(a-c)+(b-c)^2)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=(a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$$

Si $\det S\neq 0$, les formules de CRAMER fournissent :

$$x\det S=\begin{vmatrix} p&b&c\\ q&a&b\\ r&c&a\end{vmatrix}=p(a^2-bc)+q(c^2-ab)+r(b^2-ac).$$

Je n'ai pas envie de finir.

(i) Soit $P=X^3-X-1$. P et $P'=3X^2-1$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$ car $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas racines de P et donc les racines de P sont simples ou encore, a, b et c sont deux à deux distincts.
Ainsi, $\det S=\mathrm{Van}(a,b,c)\neq 0$ et le système est de CRAMER.

$$(b-a)(c-a)(c-b)x=\begin{vmatrix} 0&1&1\\ 2&b&c\\ 3&b^2&c^2\end{vmatrix}=-2(c^2-b^2)+3(c-b)=(c-b)(3-2(b+c))=(c-b)(3+2a),$$

(car $a+b+c=0$) et $x=\frac{3+2a}{(b-a)(c-a)}$.

$$(b-a)(c-a)(c-b)y=\begin{vmatrix} 1&0&1\\ a&2&c\\ a^2&3&c^2\end{vmatrix}=2(c^2-a^2)-3(c-a)=(c-a)(2(a+c)-3)=-(c-a)(3+2b),$$

et $y=-\frac{3+2b}{(b-a)(c-a)}$.

$$(b-a)(c-a)(c-b)z=\begin{vmatrix} 1&1&0\\ a&b&2\\ a^2&b^2&3\end{vmatrix}=-2(b^2-a^2)+3(b-a)=(b-a)(3+2c),$$

et $z=\frac{3+2c}{(c-a)(c-b)}$ (difficile d'aller plus loin).

Correction de l'exercice 2980 ▲

Soit D_n le déterminant du système pour $n\geqslant 3$.
En développant ce déterminant suivant sa première colonne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n\geqslant 5,\ D_n=D_{n-1}-D_{n-2},$$

ce qui fournit aisément par récurrence, en tenant compte de $D_3=D_4=-1$:

$$\forall k\geqslant 1,\ D_{3k}=D_{3k+1}=(-1)^k \text{ et } D_{3k+2}=0.$$

Pour n élément de $3\mathbb{N}^*\cup(1+3\mathbb{N}^*)$, le système est de CRAMER et homogène et admet donc une et une seule solution à savoir la solution nulle.

Pour $n=3k+2$, puisque $D_n=0$ mais que le mineur de format $n-1$ constitué des $n-1$ premières lignes et colonnes est D_{n-1} et est donc non nul, le système est homogène de rang $n-1$ et l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1. On trouve aisément $\mathscr{S}=\{\lambda(1,-1,0,1,-1,0...,1,-1),\ ;\lambda\in\mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 2981 ▲

Soit $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $F=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{X+b_k}$.
La fraction rationnelle F s'écrit, après réduction au même dénominateur :

$$F=\frac{P}{Q} \text{ où } Q=\prod_{k=1}^{n}(X+b_k) \text{ et } P \text{est un polynôme de degré infèrieur ou égal à } n-1.$$

Maintenant,

$$(x_1,...,x_n) \text{ solution de } (S)\Leftrightarrow \forall k\in\{1,...,n\},\ F(a_k)=1\Leftrightarrow \forall k\in\{1,...,n\},\ (Q-P)(a_k)=0.$$

Par suite, puisque les a_k sont deux à deux distincts, $Q-P$ est divisible par $\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$. Mais, Q est unitaire de degré n et P est de degré infèrieur ou égal à $n-1$, et donc $Q-P$ est unitaire de degré n ce qui montre que $Q-P=\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$ ou encore que

$$P=\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)-\prod_{k=1}^{n}(X-a_k).$$

Réciproquement, si $F=\frac{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)-\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$, alors $\forall k\in\{1,...,n\},\ F(a_k)=1$.
En résumé,

$$\begin{aligned}(x_1,...,x_n) \text{ solution de } (S) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{X+b_k}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)-\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}\\ &\Leftrightarrow \forall i\in\{1,...,n\},\ x_i=\lim_{x\to -b_i}(x+b_i)\frac{\prod_{k=1}^{n}(x+b_k)-\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(x+b_k)}\\ &\Leftrightarrow \forall i\in\{1,...,n\},\ x_i=\frac{\prod_{k=1}^{n}(b_i+a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(b_k-b_i)}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2982 ▲

Le déterminant du système est $\Delta=\mathrm{Van}(1,\ldots,n)\neq 0$. Le système proposé est donc un système de CRAMER.
Les formules de CRAMER donnent : $\forall j\in[\![1,n]\!],\ x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}$ où

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & j-1 & 0 & j+1 & & n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & (j-1)^{n-1} & 0 & (j+1)^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & (j-1)^{n-1} & (j+1)^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} \text{(en développant suivant la } j\text{-ème colonne)}$$

$$= (-1)^{j+1} 1 \dots (j-1)(j+1) \dots n \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & j-1 & j+1 & & n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & (j-1)^{n-2} & (j+1)^{n-2} & \dots & n^{n-2} \end{vmatrix} \text{(par } n-\text{linéarité)}$$

$$= (-1)^{j+1} \frac{n!}{j} \mathrm{Van}(1, \dots, (j-1), (j+1), \dots, n) = (-1)^{j+1} \frac{n!}{j} \frac{\mathrm{Van}(1, \dots, n)}{(j-1) \dots (j-(j-1))((j+1)-j) \dots (n-j)}$$

$$= (-1)^{j+1} \frac{n!}{j!(n-j)!} \mathrm{Van}(1, \dots, n) = (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \mathrm{Van}(1, \dots, n).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j = (-1)^{j+1} \binom{n}{j}.}$$

Correction de l'exercice 2983 ▲

Pour les trois premiers systèmes, on élimine les dénominateurs en multipliant, et les termes de degré deux se simplifient ce qui conduit à des systèmes linéaires. Les ensembles de solutions sont :

$$\{(4,8)\}; \quad \{(7,26)\}; \quad \{(19,32)\}.$$

Pour les trois suivants, on effectue des changements de variable simples du type $X = \frac{1}{x}$, ce qui conduit à des systèmes linéaires. Il faut alors vérifier la compatibilité avec le domaine de résolution des équations, le cas échéant. Le second système aboutit en effet à un système linéaire auxiliaire qui a une unique solution dont une composante est nulle, ce qui ne convient pas. Le troisième système aboutit à un système linéaire ayant une infinité de solutions. L'ensemble de solutions du système initial est alors une hyperbole privée d'un point. Plus précisément, les ensembles de solutions sont :

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{7}\right)\right\}; \quad \emptyset; \quad \left\{\left(t, \frac{3t}{2t-1}\right), t \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right\}.$$

Pour les deux systèmes restants, on effectue également des changements de variable : $X = \frac{1}{4(x-2)}$ et $Y = \frac{1}{15(y-1)}$ pour le premier, et $X = \frac{1}{x-y}$, $Y = \frac{1}{x+y}$ pour le dernier, ce qui conduit à la résolution d'un deuxième système linéaire pour conclure. Les ensembles de solutions sont :

$$\left\{\left(\frac{17}{8},\frac{16}{5}\right)\right\}; \quad \left\{\left(\frac{4}{15},\frac{1}{15}\right)\right\}.$$

Correction de l'exercice 2984 ▲

17 et 12.

Correction de l'exercice 2985 ▲

Si a et b sont les mesures des deux autres côtés, on obtient par Pythagore $a^2+b^2=13^2=169$, et $ab=60$. On en déduit que $(a+b)^2=289=17^2$ et $(a-b)^2=49=7^2$, et d'où on tire un système linéaire. Les solutions sont 12 et 5.

Correction de l'exercice 2987 ▲

Les solutions réelles sont $\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Correction de l'exercice 2988 ▲

On trouve une unique solution $\left(\frac{3}{8},\frac{16}{3\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Correction de l'exercice 2990 ▲

Si n est impair, le système possède une solution unique. Si n est pair alors le système possède une solution si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.

Cet exercice peut également se résoudre en considérant les symétries centrales dont les centres ont pour affixes les a_k, et la composition de toutes ces isométries. Si n est impair, cette composée est une symétrie centrale. Sinon, c'est une translation.

Correction de l'exercice 2991 ▲

Prendre le logarithme des équations puis changer de variable. Solution unique : $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$.

Correction de l'exercice 2992 ▲

(a) Dans le cas $n=2$, $n=4$ les matrice suivantes conviennent :

$$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad J'=\begin{pmatrix}J & (0)\\ (0) & J\end{pmatrix}.$$

(b) Supposons qu'un tel morphisme existe. Soit J sa matrice pour une base fixée. Alors $J^2=-I_n$ où I_n est la matrice identité de taille n. En termes de déterminant nous avons : $\det(J^2)=\det I_n$, ce qui s'écrit $(\det J)^2=(-1)^n$. Donc n est pair car $(\det J)^2$ est positif.

Correction de l'exercice 2994 ▲

$27a^4=256b^3$.

Correction de l'exercice 2998 ▲

ctrex : $A=\mathbb{Z}$, $P(0)=0$ et $P(2)=1$.

Correction de l'exercice 2999 ▲

On se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et on considère $J = (\delta_{i,i+1 \bmod p})$. On a $J^p = I$ et $A = a_0 J^0 + \dots a_{p-1} J^{p-1}$ donc $A^p = (a_0^p + \dots + a_{p-1}^p) I$ (car on est en caractéristique p).
On en déduit $\det(A) = \det(A)^p = (a_0^p + \dots + a_{p-1}^p)^p = a_0 + \dots + a_{p-1}$.
Autre méthode en restant dans $\mathbb{Z}$: $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{p,\sigma(p)} = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \dots a_{\sigma(p)-p \bmod p}$.
Notons $x(\sigma) = \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \dots a_{\sigma(p)-p \bmod p}$ et c le cycle $(1,2,\dots,p)$. Alors $x(\sigma) = x(c^{-k} \circ \sigma \circ c^k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Le nombre de permutations distinctes que l'on obtient à σ fixé en faisant varier k est égal à 1 si σ et c commutent, et à p sinon, d'après la relation : $\mathrm{Card}\,(\text{orbite}) \times \mathrm{Card}\,(\text{stabilisateur}) = \mathrm{Card}\,(< c >) = p$. De plus, c et σ commutent si et seulement si $\sigma \in < c >$ (facile), d'où $\det(A) \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon(c^k) a_k^p \equiv a_0 + \dots + a_{p-1} \bmod p$.

Correction de l'exercice 3000 ▲

$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma \neq \sigma^{-1}$. Alors les termes associés à σ et σ^{-1} sont égaux car M est symétrique, donc la somme de ces deux termes est paire. Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma = \sigma^{-1}$. Alors comme n est impair, il existe $i \in [[1,n]]$ tel que $\sigma(i) = i$ donc le terme associé à σ est pair.

Correction de l'exercice 3002 ▲

Si z_k est l'affixe complexe de M_k et a_k est l'affixe complexe de A_k, le problème posé équivaut au système :

$$\forall k \in \{1,...,n-1\},\ z_k + z_{k+1} = 2a_k \text{ et } z_n + z_1 = 2a_n.$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1^{n-1} + (-1)^{n+1}.1^{n-1} \text{ (en développant suivant la première colonne)}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1}.$$

Si n est impair, $\det S = 2 \neq 0$ et le système admet une et une seule solution.
On obtient $z_2 = 2a_1 - z_1$, $z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1$,..., $z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + ... + 2a_2 - 2a_1 + z_1$ et enfin :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + ... + 2a_2 - 2a_1 + z_1 + z_1 = 2a_n,$$

et donc $z_1 = a_1 - a_2 + ... - a_{n-1} + a_n$ puis $z_2 = a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{n-1} - a_n$ puis $z_3 = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 ... + a_n$ ... puis $z_n = -a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$.
Si n est pair, $\det S = 0$ mais le mineur formé des $n-1$ premières lignes et $n-1$ dernières colonnes est non nul. Donc, le système est de rang $n-1$, les $n-1$ premières équations et $n-1$ dernières inconnues peuvent être choisies pour équations et inconnues principales.
On résout les $n-1$ premières équations constituant un sytème de CRAMER en z_2,...,z_n. On obtient

$$z_2 = 2a_1 - z1,\ z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, ...,\ z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + ... - 2a_2 + 2a_1 - z_1.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + ... - 2a_2 + 2a_1 - z_1 + z_1 = 2a_n \Leftrightarrow a_1 + a_3 ... = a_2 + a_4 + ...$$

Cette dernière condition se traduit géométriquement par le fait que les systèmes de points $(A_1, A_3, ...)$ et $(A_2, A_4, ...)$ ont même isobarycentre.

En résumé, si n est pair et si les systèmes de points $(A_1, A_3, \dots)$ et $(A_2, A_4, \dots)$ n'ont pas même isobarycentre, le problème n'a pas de solutions.

Si n est pair et si les systèmes de points $(A_1, A_3, \dots)$ et $(A_2, A_4, \dots)$ ont même isobarycentre, le problème a une infinité de solutions : M_1 est un point quelconque puis on construit les symétriques successifs par rapport aux points A_1, A_2 ...

Correction de l'exercice 3007 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\det A = 0$, mais $\det B = a^2$ est non nul si $a \neq 0$.

Correction de l'exercice 3016 ▲

(a)

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $|\lambda| > \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3018 ▲

3. On complète par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ base $= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Correction de l'exercice 3019 ▲

Développer le produit.

Un seul coeff. non nul par ligne et colonne, ou une ligne nulle.

Correction de l'exercice 3020 ▲

(a)

(b) Si $d_{ab} \neq 0$, prendre

$$\begin{cases} \vec{c} = -\frac{d_{bc}}{d_{ab}}\vec{a} + \frac{d_{ac}}{d_{ab}}\vec{b} \\ \vec{d} = \frac{d_{db}}{d_{ab}}\vec{a} + \frac{d_{ad}}{d_{ab}}\vec{b}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3021 ▲

Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base, décomposer $\vec{d}$. Si $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$, on obtient $\vec{0} = \vec{0}$.

Correction de l'exercice 3024 ▲

2. (b) $(I + E_{ij})^k = I + kE_{ij}$. Calculer le pgcd d'une ligne par opérations élémentaires à l'aide de Bézout. Ce pgcd vaut 1 sinon $M \notin SL_n(\mathbb{Z})$.

Correction de l'exercice 3025 ▲

$(\det A)^n$.

Correction de l'exercice 3026 ▲

En remplaçant les colonnes $C_1,..., C_n$ par respectivement $C_1+iC_{n+1},..., C_n+iC_{2n}$, on obtient :

$$\det C = \det\begin{pmatrix} A+iB & B \\ -B+iA & A \end{pmatrix},$$

puis en remplaçant les lignes $L_{n+1},..., L_{2n}$ de la nouvelle matrice par respectivement $L_{n+1}-iL_1,..., L_{2n}-iL_n$, on obtient :

$$\det C = \det\begin{pmatrix} A+iB & B \\ 0 & A-iB \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB) = |\det(A+iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Correction de l'exercice 3027 ▲

On suppose $n \geqslant 2$. La matrice nulle est solution du problème. Soit A un élément de $M_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$, $\det(A+B) = \det A + \det B$. En particulier, $2\det A = \det(2A) = 2^n \det A$ et donc $\det A = 0$ car $n \geqslant 2$. Ainsi, $A \notin GL_n(\mathbb{C})$. Si $A \neq 0$, il existe une certaine colonne C_j qui n'est pas nulle. Puisque la colonne $-Cj$ n'est pas nulle, on peut compléter la famille libre $(-C_j)$ en une base $(C'_1,...,-C_j,...,C'_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. La matrice B dont les colonnes sont justement C_1'$,...,-C_j,...,C'_n$ est alors inversible de sorte que $\det A + \det B = \det B \neq 0$. Mais, $A+B$ a une colonne nulle et donc $\det(A+B) = 0 \neq \det A + \det B$. Ainsi, seule la matrice nulle peut donc être solution du problème .

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ (\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \det(A+M) = \det(A)+\det(M)) \Leftrightarrow A = 0.}$$

Correction de l'exercice 3028 ▲

$(1) \Rightarrow (2)$. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que : $(\forall(a_1,...,a_n) \in E^n/\ (\det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0) \Rightarrow ((f_1,...,f_n)$ liée).

Pour $n = 1$,

$$(\forall a_1 \in E/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant 1} = 0) \Rightarrow (\forall a_1/\ f_1(a_1) = 0) \Rightarrow (f_1 = 0) \Rightarrow (f_1) \text{ liée.}$$

Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $(\forall(a_1,...,a_{n-1}) \in E^{n-1}/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} = 0) \Rightarrow (f_1,...,f_{n-1})$ liée.

Soient $f_1,..., f_n$ n fonctions telles que $\forall(a_1,...,a_n) \in E^n/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0$.

Si $(f_1,...,f_{n-1})$ est liée alors $(f_1,...,f_n)$ est liée en tant que sur famille d'une famille liée. Si $(f_1,...,f_{n-1})$ est libre, par hypothèse de récurrence, il existe $a_1,...,a_{n-1}$ $n-1$ éléments de E tels que $\det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \neq 0$. Mais, par hypothèse, on a :

$$\forall x \in E,\ \det(f_i(a_1),...,f_i(a_{n-1}),f_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n} = 0.$$

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient une égalité du type $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$ où les λ_i sont indépendants de x ou encore une égalité du type $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ avec $\lambda_n = \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \neq 0$ ce qui montre encore que $(f_1,...,f_n)$ est liée.

$(2) \Rightarrow (1)$. On suppose que $\exists(a_1,...,a_n) \in E^n/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0)$. Montrons que $(f_1,...,f_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. En particulier : $\forall j \in \{1,...,n\}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(a_j) = 0$. Les n égalités précédentes fournissent un système d'équations linéaires en les λ_i à n inconnues, n équations, de déterminant non nul et homogène ou encore un système de CRAMER homogène dont on sait qu'il admet pour unique solution $(\lambda_1,...,\lambda_n) = (0,...,0)$. On a montré que $(f_1,...,f_n)$ est libre.

Correction de l'exercice 3029 ▲

Soit A_n la matrice de l'énoncé.

En développant $\det A_n$ suivant sa première colonne puis en développant le déterminant de format $n-1$ obtenu suivant sa première ligne, on obtient $\det A_n = -\det A_{n-2}$ pour $n \geqslant 3$.

Par suite, pour $p \geqslant 1$, $\det A_{2p} = (-1)^{p-1}\det A_2 = (-1)^p \neq 0$ et pour $p \geqslant 1$, A_{2p} est inversible.

On a aussi, pour $p \geqslant 1$, $\det A_{2p+1} = (-1)^{p-1}\det A_3 = 0$ et, pour $p \geqslant 1$, A_{2p+1} n'est pas inversible. Finalement, A_n est inversible si et seulement si n est pair.

Dorénavant, on pose $n = 2p$ ($p \geqslant 1$).

Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ vecteurs colonnes donnés, on a :

$$AX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = y_1 \\ \forall i \in \{2,...,2p-1\},\ x_{i-1} + x_{i+1} = y_i \\ x_{2p-1} = y_{2p} \end{array}\right. .$$

Ce système se résoud en $x_2 = y_1$ puis, par récurrence, pour $k \leqslant p$, $x_{2k} = y_{2k-1} - y_{2k-3} + ... + (-1)^{k-1}y_1$ et aussi $x_{2p-1} = y_{2p}$, puis, par récurrence, pour $k \leqslant p$, $x_{2k-1} = y_{2k} - y_{2k+2} + ... + (-1)^{p-k}y_{2p}$. D'où l'inverse de A quand $n = 8$ par exemple :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3030 ▲

On a toujours $A^t(\text{com}A) = (\det A)I_n$. Par passage au déterminant et puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée, on obtient

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)^n.$$

• Si $\det A$ n'est pas nul, on en déduit $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$.

• Si $\det A$ est nul, on a $A^t(\text{com}A) = 0$ et donc ${}^t\text{com}A$ est soit nulle, soit diviseur de zéro, et donc dans tous les cas non inversible. Il en est de même de $\text{com}A$ et donc $\det(\text{com}A) = 0 = (\det A)^{n-1}$. Finalement

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}),\ \det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

Correction de l'exercice 3031 ▲

• Si A est de rang n, c'est-à-dire inversible, l'égalité $(\text{com}A) \times \frac{1}{\det A}{}^tA = I_n$ montre que $\text{com}A$ est inversible et donc de rang n.

Dans ce qui suit, le lien entre le rang d'une matrice et la nullité des différents mineurs est hors programme. On suppose maintenant $\text{rg}(A) \leqslant n-1$.

• Si $\text{rg}A \leqslant n-2$. Montrons que tous les mineurs de format $n-1$ extraits de A sont nuls.

Soient $j_1,\dots,\ j_{n-1}$, $n-1$ numéros de colonnes deux à deux distincts puis $A' \in \mathscr{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $C_{j_1},\dots,C_{j_{n-1}}$. Puisque A est de rang au plus $n-2$, la famille des colonnes de A' est liée et donc A' est de rang au plus $n-2$. Il en est de même de la matrice ${}^tA' \in \backslash -\infty, \backslash(\mathbb{K})$ et donc toute matrice A'' obtenue en supprimant l'une des colonnes de A' est carrée, de format $n-1$, non inversible. Son déterminant est donc nul.

Ainsi, tout déterminant obtenu en supprimant une ligne et une colonne de $\det(A)$ est nul ou encore tous les mineurs de format $n-1$ extraits de A sont nuls. Finalement, si $\text{rg}A \leqslant n-2$, $\text{com}A = 0$.

• Il reste à étudier le cas où $\text{rg}A = n-1$ et donc $\dim KerA = 1$.

L'égalité $\det A = 0$ impose $A^t(\text{com}A) = 0$. Mais alors $\text{Im}({}^t(\text{com}A)) \subset \text{Ker}A$ et en particulier $\text{rg}(\text{com}A) = \text{rg}({}^t(\text{com}A)) \leqslant \dim(\text{Ker}A) = 1$. Ainsi, si $\text{rg}(A) = n-1$ alors $\text{rg}(\text{com}A) \in \{0,1\}$.

Montrons que l'un au moins des mineurs de format $n-1$ extraits de A est non nul ce qui montrera que $\text{rg}(\text{com}A)=1$.
Puisque $\text{rg}A=n-1$, il existe $n-1$ colonnes $C_{j_1},\dots,C_{j_{n-1}}$ de A constituant une famille libre. La matrice $A'\in\mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ constituée par ces colonnes est de rang $n-1$. Il en est de même de sa transposée. Mais alors, il existe $n-1$ colonnes de ${}^tA'$ linéairement indépendantes. La matrice A'' constituée de ces $n-1$ colonnes est carrée de format $n-1$ et de rang $n-1$. A'' est donc inversible et il en est de même de ${}^tA''$. Le déterminant de ${}^tA''$ est un mineur de format $n-1$ extrait de A et non nul.
En résumé,

$$\boxed{\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{rg}(\text{com}A)=\left\{\begin{array}{l}n \text{ si } \text{rg}(A)=n\\ 1 \text{ si } \text{rg}(A)=n-1\\ 0 \text{ si } \text{rg}(A)\leqslant n-2\end{array}\right.}.$$

Correction de l'exercice 3032 ▲

Si $\text{rg}M\leqslant n-1$, l'égalité $M=\text{com}M$ entraîne $M^tM=M^t(\text{com}M)=(\text{det}M)I_n=0$ et donc $M=0$. En effet,

$$\begin{aligned}M^tM=0&\Rightarrow\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ M^tMX=0\Rightarrow\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXM^tMX=0\Rightarrow\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|{}^tMX\right\|^2=0\\&\Rightarrow\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tMX=0\Rightarrow{}^tM=0\Rightarrow M=0.\end{aligned}$$

En résumé, si M est solution, $M=0$ ou M est inversible.
Dans le deuxième cas, d'après l'exercice 3030, on doit avoir $\text{det}M=(\text{det}M)^{n-1}$ et donc, puisque $\text{det}M\neq 0$, $\text{det}M\in\{-1,1\}$ (et même $\text{det}M=1$ si n est impair) car $\text{det}M$ est réel.
• Si $\text{det}M=-1$, on doit avoir $M^tM=-I_n$ mais ceci est impossible car le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice M^tM vaut $m_{1,1}^2+\dots+m_{1,n}^2\neq -1$.
• Il reste le cas où $\text{det}M=1$, l'égalité $M=\text{com}M$ entraîne $M^tM=I_n$ c'est-à-dire M est orthogonale positive.
Réciproquement, si M est orthogonale positive, ${}^tM=M^{-1}=\frac{1}{\text{det}M}{}^t(\text{com}M)={}^t\text{com}M$ et donc $M=\text{com}M$.
Finalement ,

$$\boxed{\mathcal{S}=\{0\}\cup O_n^+(\mathbb{R}).}$$

Correction de l'exercice 3033 ▲

$A=0$ convient.
Réciproquement, on a tout d'abord $\text{det}(A+A)=\text{det}A+\text{det}A$ ou encore $(2^n-2)\text{det}A=0$ et, puique $n\geqslant 2$, $\text{det}A=0$. Donc,

$$A\notin GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } A \text{ vérifie : } \forall M\in M_n(\mathbb{K}),\ \text{det}(A+M)=\text{det}M.$$

Supposons $A\neq 0$. Il existe donc une colonne $C_j\neq 0$.
La colonne $-C_j$ n'est pas nulle et d'après le théorème de la base incomplète, on peut construire une matrice M inversible dont la j-ème colonne est $-C_j$. Puisque M est inversible, $\text{det}M\neq 0$ et puisque la j-ème colonne de la matrice $A+M$ est nulle, $\text{det}(A+M)=0$. Pour cette matrice M, on a $\text{det}(A+M)\neq\text{det}A+\text{det}M$ et A n'est pas solution du problème. Finalement

$$\boxed{(\forall M\in M_n(\mathbb{K}),\ \text{det}(A+M)=\text{det}A+\text{det}M)/lraA=0.}$$

Correction de l'exercice 3048 ▲

(a) Soit $(v,w) \in \text{Com}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. $u(\lambda v+\mu w) = \lambda uv+\mu uw = \lambda vu+\mu wu = (\lambda v+\mu w)u$. Donc Com est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,E)$.

(b) Soit $x \in E_\lambda$. $u(v(x)) = uv(x) = vu(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in E_\lambda$.

(c) Chaque valeur propre est de multiplicité 1 donc chaque espace propre est de dimension 1. Ainsi, si $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$, $E_\lambda = \mathbb{R}x$. Comme $v(x) \in E_\lambda$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}, v(x) = \alpha x$. Donc x est un vecteur propre de v.

(d) Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de vecteurs propres de u. C'est aussi une base de vecteurs propres pour tout élément de Com. Tout élément de Com est donc représenté par une matrice diagonale dans $(e_1,\dots,e_n)$. Réciproquement, tout endomorphisme représenté dans cette base par une matrice diagonale commute avec u. Donc

$$\text{Com} = \{v \in \mathscr{L}(E,E), \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n, M_{v/(e_1,\dots,e_n)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}\}$$

On en déduit que Com est de dimension n.

(e) $u\,u^i = u(u\cdots u) = (u\cdots u)u = u^i\,u$. Donc $\forall i \in \{0,\dots,n-1\}, u^i \in \text{Com}$. Ainsi $\text{Vect}(\text{id},u,\dots,u^{n-1}) \subset \text{Com}$.

(f) Soit $x_k \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\}$. $u^i(x) = \lambda_k^i x$. Donc $(\sum \alpha_i u^i)x = \sum \alpha_i u^i(x) = (\sum \alpha_i \lambda_k^i)x = 0$. Donc $\forall k \in \{1,\dots,n\}, \sum \alpha_i \lambda_k^i = 0$.

(g) Le déterminent du système $(*)$ est non nul. Il s'agit donc d'un système de Cramer : il n'a qu'une solution, $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. La famille $(\text{id},u,\dots,u^{n-1})$ est donc libre.

(h) On a $\dim \text{Vect}(\text{id},u,\dots,u^{n-1}) = n = \dim \text{Com}$ et $\text{Vect}(\text{id},u,\dots,u^{n-1}) \subset \text{Com}$ donc $\text{Vect}(\text{id},u,\dots,u^{n-1}) = \text{Com}$

Correction de l'exercice 3057 ▲

On a une suite récurrente à trois termes reliant les composantes v_i du vecteur propre. On calcule le terme général de la suite en résolvant le polynôme caractéristique. Les deux constantes sont identifiées en écrivant que $v_0 = v_{n+1} = 0$. On trouve $n+1$ valeurs propres distinctes :

$$\lambda_k = b + 2c\left(\frac{a}{c}\right)^{1/2} cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) \quad \text{pour} \quad k = 1,\dots n$$

avec le vecteur propre v^k associé, de composantes

$$v_j^k = \left(\frac{a}{c}\right)^{j/2} sin\left(\frac{2kj\pi}{n+1}\right) \quad \text{pour} \quad j = 1,\dots n$$

Correction de l'exercice 3058 ▲

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

(a) *Démontrons que* $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 0$ est valeur propre de A, alors $\ker A \neq \{0\}$, donc A n'est pas injective et sa matrice ne peut pas être inversible. Par conséquent, $\lambda \neq 0$.

(b) *Démontrons que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}* .
Comme A est inversible, on a $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\lambda\vec{x}) \iff \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$, d'où $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$. Ce qui prouve que $\vec{x}$ est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}.

Correction de l'exercice 3059 ▲

Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

(a) *Démontrons que les seules valeurs propres possibles de f sont* 1 *et* -1.

Si λ est une valeur propre de f, il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. On a donc

$$f^2(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}.$$

Mais, $f^2 = \text{mathrmId}_E$ donc si $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ on a

$$\vec{x} = f^2(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x},$$

d'où $\lambda^2 = 1$, c'est-à-dire (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. ce qui prouve que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.

(b) *Vérifions que pour tout $\vec{x} \in E$, on a*

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x})) \text{ et } f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$$

Soit $\vec{x} \in E$, on a

$$f(\vec{x} - f(\vec{x})) = f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x} = -(\vec{x} - f(\vec{x}))$$

et

$$f(\vec{x} + f(\vec{x})) = f(\vec{x}) + f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \vec{x}$$

Nous allons en déduire que f admet toujours une valeur propre.

Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de f, alors, $\vec{x} = f(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Or, pour tout $\vec{x} \in E$, on a $f(\vec{x} + f(\vec{x})) = f(\vec{x}) + \vec{x}$, donc pour tout $\vec{x} \in E$, on a $f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$, c'est-à-dire, $f(\vec{x}) = -\vec{x}$. Ce qui prouve que -1 est valeur propre de f. On a même dans ce cas $f = -\text{mathrmId}_\text{E}$.

Si -1 n'est pas valeur propre de f, on montre par un raisonnement analogue que pour tout $\vec{x} \in E$ on a $f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}$. Ce qui prouve que 1 est valeur propre de f, et dans ce cas $f = \text{mathrmId}_\text{E}$.

(c) *Démontrons que si* 1 *et* -1 *sont valeurs propres, alors E est somme directe des sous-espaces propres correspondants.*

Supposons maintenant que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Ce sont alors les seules et on a, pour tout $\vec{x} \in E$,

$$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x} + f(\vec{x})) + \frac{1}{2}(\vec{x} - f(\vec{x}))$$

Et, quelque soit $\vec{x} \in E$, $f(\vec{x} - f(\vec{x})) = -(\vec{x} - f(\vec{x}))$ et $f(\vec{x} + f(\vec{x})) = (\vec{x} + f(\vec{x}))$, c'est-à-dire $\vec{x} + f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et $\vec{x} - f(\vec{x})$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre -1. Par ailleurs on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe (on peut le vérifier également puisque leur intersection est l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{x} = -\vec{x}$, donc réduite au vecteur nul). par conséquent E est bien somme directe des sous-espaces propres correspondants aux valeurs propres 1 et -1.

(d) *Traduisons géométriquement le cas $n = 2$.*

Rappelons que si il n'y a qu'une valeur propre, f est l'identité ou son opposée. Dans le cas où 1 et -1 sont valeur propres, leurs sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Soit u un vecteur propre tel que $f(u) = u$ et v un vecteur propre tel que $f(v) = -v$, alors si $w = au + bv$, $f(w) = au - bv$.

Correction de l'exercice 3060 ▲

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n = 0$.

(a) Montrons que u n'est pas inversible.

On a : $0 = \det u^n = (\det u)^n$, d'où $\det u = 0$, ce qui prouve que u n'est pas inversible.

(b) Déterminons les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

Soit λ une valeur propre de u, il existe alors un vecteur $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Or, $u(x) = \lambda x \Rightarrow u^n(x) = \lambda^n x$. Mais, $u^n(x) = 0$ et $x \neq 0$, d'où $\lambda^n = 0$ et donc $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible de u est donc 0 et c'est une valeur propre car, comme u n'est pas inversible, le noyau de u n'est pas réduit à $\{0\}$. L'endomorphisme u admet donc 0 comme unique valeur propre, le sous-espace propre associé est $\ker u$.

Correction de l'exercice 3061 ▲

Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminons les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.

Les valeurs propres de M sont les réels λ tels que $\det(M-\lambda I)=0$.

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4-13\lambda^2+36 = (\lambda^2-4)(\lambda^2-9) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+3).$$

Les valeurs propres de M sont donc $2,-2,3$ et -3. Notons E_2, E_{-2}, E_3 et E_{-3} les sous-espaces propres associés.

$$\begin{aligned} E_2 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 2X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, 2x-z = 2y, 7y+6t = 2z, 3z = 2t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or } \left\{\begin{array}{r} y = 2x \\ 2x-z = 2y \\ 7y+6t = 2z \\ 3z = 2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} y = 2x \\ 2x-z = 4x \\ 14x+9z = 2z \\ 3z = 2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = 2x \\ z = -2x \\ t = -3x \end{array}\right.$$

ainsi, E_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = (1,2,-2,-3)$.

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -2X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -2x, 2x-z = -2y, 7y+6t = -2z, 3z = -2t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or } \left\{\begin{array}{r} y = -2x \\ 2x-z = -2y \\ 7y+6t = -2z \\ 3z = -2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} y = -2x \\ 2x-z = 4x \\ -14x-9z = 2z \\ 3z = -2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -2x \\ z = -2x \\ t = 3x \end{array}\right.$$

ainsi, E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_2 = (1,-2,-2,3)$.

$$\begin{aligned} E_3 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 3X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 3x, 2x-z = 3y, 7y+6t = 3z, 3z = 3t\right\} \end{aligned}$$

$$\text{or } \left\{\begin{array}{r} y = 3x \\ 2x-z = 3y \\ 7y+6t = 3z \\ 3z = 3t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} y = 3x \\ 2x-z = 9x \\ 21x+6t = 3z \\ z = t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = 3x \\ z = -7x \\ t = -7x \end{array}\right.$$

ainsi, E_3 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (1,3,-7,-7)$.

$$
\begin{aligned}
E_{-3} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -3X\} \\
&= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -3x, 2x - z = -3y, 7y + 6t = -3z, 3z = -3t\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\text{or} \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = -3y \\ 7y + 6t = -3z \\ 3z = -3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = 9x \\ -21x - 6z = -3z \\ z = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = -7x \\ t = 7x \end{cases}
$$

ainsi, E_{-3} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_4 = (1, -3, -7, 7)$.

(b) Montrons que M est diagonalisable.

La matrice M admet quatre valeurs propres distinctes, ce qui prouve que les quatres vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants. En effet, les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 déterminés en 1) forment une base de $\mathbb{R}^4$. L'endomorphisme dont la matrice est M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est représenté par une matrice diagonale dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) puisque $Mu_1 = 2u_1, Mu_2 = -2u_2$, $Mu_3 = 3u_3$ et $Mu_4 = -3u_4$.

(c) Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

Une base de vecteurs propres a été déterminée dans les questions précédentes. C'est la base (u_1, u_2, u_3, u_4) et la matrice de passage est la matrice

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}
$$

(d) On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in |||$ exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.

On a

$$
D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ donc } D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.
$$

Mais, $M = PDP^{-1}$, d'où, pour $k \in |||$, $M^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$.

Pour calculer M^k, il faut donc déterminer la matrice P^{-1} qui exprime les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).

On résout le système, et on a :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= i + 2j - 2k - 3l \\
u_2 &= i - 2j - 2k + 3l \\
u_3 &= i + 3j - 7k - 7t \\
u_4 &= i - 3j - 7k + 7l
\end{aligned}
\iff
\begin{cases}
i = \dfrac{1}{10}(7u_1 + 7u_2 - 2u_3 - 2u_4) \\
j = \dfrac{1}{10}(7u_1 - 7u_2 - 3u_3 + 3u_4) \\
k = \dfrac{1}{10}(u_1 + u_2 - u_3 - u_4) \\
l = \dfrac{1}{10}(3u_1 - 3u_2 - 2u_3 + 2u_4)
\end{cases}
$$

d'où

$$
P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

et

$$
M^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Correction de l'exercice 3062 ▲

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) *On détermine et on factorise le polynôme caractéristique de A.*

Soit P_A le polynôme caractéristique de A, on a

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2-6X+8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

(b) *On démontre que A est diagonalisable et on détermine une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.*

Le polynôme P_A admet deux racines, donc la matrice A admet deux valeurs propres, $\lambda_1 = 2$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 4$, valeur propre double. Déterminons les sous-espaces propres associés.

Notons $E_1 = \{\vec{V} = (x,y,z)/A\vec{V} = 2\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 2 est une droite vectorielle, dont un vecteur directeur est $\vec{e}_1 = (1,-2,1)$.

Notons $E_2 = \{\vec{V} = (x,y,z)/A\vec{V} = 4\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x$$

Le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 4 est le plan vectoriel, d'équation $z = -x$ dont une base est donnée, par exemple par les vecteurs $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (1,0,-1)$. Remarquons que l'on pouvait lire directement sur la matrice A, le fait que le vecteur $\vec{e}_2$ est vecteur propre associé à la valeur propre 4.

Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, par conséquent, l'espace $\mathbb{R}^3$ admet une base de vecteurs propres et la matrice A est diagonalisable.

Notons P la matrice de passage, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et, si D est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

on a la relation

$$A = PDP^{-1}.$$

(c) *On donne en le justifiant, mais sans calculs, le polynôme minimal de A.*

La matrice A est diagonalisable, donc son polynôme minimal n'a que des racines simples, par ailleurs les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres de A et le polynôme minimal est un polynôme unitaire qui divise le polynôme caractéristique. On a donc

$$Q_A(X) = (X-2)(X-4).$$

(d) *On calcule A^n pour $n \in |||$.*

On a vu, dans la question 2), que $A = PDP^{-1}$, on a donc, pour $n \in |||$, $A^n = P^{-1}D^nP$, or

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

il nous reste à calculer P^{-1}. On sait que $P^{-1} = \frac{1}{\det P}{}^t\tilde{P}$, d'où

$$\det P = -2,\ \tilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+4^n & 0 & 2^n-4^n \\ 2(4^n-2^n) & 2.4^n & 2(4^n-2^n) \\ 2^n-4^n & 0 & 2^n+4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3063 ▲

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *On calcule le polynôme caractéristique et on détermine les valeurs propres de A.*

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 2 = X^2 - 2X - 1.$$

Calculons ses racines, le discriminant réduit de ce polynôme du second degré est égal à $\Delta' = (-1)^2 - (-1) = 2$, les racines sont donc

$$\lambda_1 = 1+\sqrt{2} \text{ et } \lambda_2 = 1-\sqrt{2},$$

ce sont les valeurs propres de A.

(b) On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. *On détermine une base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\vec{\varepsilon}_1 \in E_1$, $\vec{\varepsilon}_2 \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme* $(1,y)$.

On cherche $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ tel que $A.\vec{\varepsilon}_1 = (1+\sqrt{2})\vec{\varepsilon}_1$, on calcule donc y tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (1+\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1+y=1+\sqrt{2} \\ 2+y=(1+\sqrt{2})y \end{cases}$$

d'où $y=\sqrt{2}$ et $\vec{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

On cherche $\vec{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}$ tel que $A.\vec{\varepsilon}_2=(1-\sqrt{2})\vec{\varepsilon}_2$, on calcule donc y tel que

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}=(1-\sqrt{2})\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1+y=1-\sqrt{2} \\ 2+y=(1-\sqrt{2})y \end{cases}$$

d'où $y=-\sqrt{2}$ et $\vec{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

(c) Soit $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note (α,β) ses coordonnées dans la base $(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2)$.*On démontre que, pour $n\in |||$, on a*

$$A^n\vec{x}=\alpha\lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1+\beta\lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2.$$

On a $\vec{x}=\alpha\vec{\varepsilon}_1+\beta\vec{\varepsilon}_2$, d'où, par linéarité $A\vec{x}=\alpha A\vec{\varepsilon}_1+\beta A\vec{\varepsilon}_2$ et $A^n\vec{x}=\alpha A^n\vec{\varepsilon}_1+\beta A^n\vec{\varepsilon}_2$. Or, on montre, par récurrence sur n, que $A^n\vec{\varepsilon}_1=\lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1$ et de même $A^n\vec{\varepsilon}_2=\lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2$. Pour $n=1$, c'est la définition des vecteurs propres. Soit n fixé, tel que $A^n\vec{\varepsilon}_1=\lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1$, on a alors $A^{n+1}\vec{\varepsilon}_1=A.A^n\vec{\varepsilon}_1=\lambda_1^nA\vec{\varepsilon}_1=\lambda_1^{n+1}\vec{\varepsilon}_1$. Ainsi, pour tout $n\in |||$, on a $A^n\vec{\varepsilon}_1=\lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1$, et, de même, $A^n\vec{\varepsilon}_2=\lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2$. D'où le résultat.

(d) Notons $A^n\vec{x}=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. *On exprime a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2 et on en déduit que, si $\alpha\neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.*

D'après la question précédente et les vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$ obtenus en 2) on a

$$A^n\vec{x}=\alpha\lambda_1^n\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}+\beta\lambda_2^n\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} a_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n \\ b_n=\sqrt{2}(\alpha\lambda_1^n-\beta\lambda_2^n) \end{cases}$$

On suppose $\alpha\neq 0$, pour n assez grand, on a

$$\frac{b_n}{a_n}=\sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n-\beta\lambda_2^n}{\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n},$$

or,

$$|\lambda_1|=|1+\sqrt{2}|>1\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}\lambda_1^n=+\infty,$$

et

$$|\lambda_2|=|1-\sqrt{2}|<1\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}\lambda_2^n=0.$$

D'où l'équivalence

$$\frac{b_n}{a_n}=\sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n-\beta\lambda_2^n}{\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n}\sim\sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n}{\alpha\lambda_1^n}=\sqrt{2}.$$

On a donc bien

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sqrt{2}.$$

(e) *On explique, sans calcul, comment obtenir, à partir des questions précédentes, une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.*

La matrice A est à coefficients entiers, aussi, pour tout $n \in |||$, la matrice A^n est à coefficients entiers. Si l'on choisit un vecteur $\vec{x}$ à coordonnées entières dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors les coordonnées a_n et b_n du vecteur $A^n\vec{x}$ sont des entiers et elles nous fournissent une suite $\frac{b_n}{a_n}$ de nombres rationnels qui tend vers $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 3064 ▲

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On note B la matrice : $B = P(A) \in M_n(\mathbb{C})$.

(a) *On démontre que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ, alors $\vec{x}$ est un vecteur propre de B de valeur propre $P(\lambda)$.*

Soit $\vec{x} \neq 0$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, notons $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d,$$

où I_n désigne la matrice unité.

Or, pour $k \in |||$, on a $A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x}$, d'où

$$B\vec{x} = P(A)\vec{x} = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \vec{x} = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\right)\vec{x} = P(\lambda)\vec{x},$$

ce qui prouve que $\vec{x}$ est un vecteur propre de la matrice $B = P(A)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Le but de cette question est de démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $P(\lambda)$, avec λ valeur propre de A.

Soit $\mu \in \mathbb{C}$, on décompose le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs de degré 1 :

$$P(X) - \mu = a(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_r).$$

i. *On démontre que* $\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n)\cdots\det(A - \alpha_r I_n)$.

Compte tenu de la décomposition du polynôme $P(X) - \mu$, on a

$$P(A) - \mu I_n = a I_n (A - \alpha_1 I_n)\cdots(A - \alpha_r I_n)$$

d'où

$$\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n)\cdots\det(A - \alpha_r I_n)$$

car le déterminant est une forme multilinéaire (d'où le a^n) et le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit de leurs déterminants.

ii. *On en déduit que si μ est valeur propre de B, alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.*

Si μ est une valeur propre de B, alors, par définition, $\det(B - \mu I_n) = 0$, ainsi, compte tenu de la question précédente, il existe un α_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, tel que $\det(A - \alpha_i I_n) = 0$, c'est-à-dire que l'un des α_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, est valeur propre de A. Or, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $P(\alpha_i) - \mu = 0$ donc si μ est une valeur propre de B, on a $\mu = P(\alpha_i)$ où α_i est une valeur propre de A.

(c) On note S_A l'ensemble des valeurs propres de A. *On démontre que*

$$S_B = \{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\}.$$

Soit λ une valeur propre de A, on a démontré en 1) que $P(\lambda)$ est une valeur propre de B, ainsi $\{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\} \subset S_B$. Réciproquement, si μ est une valeur propre de B alors, d'après 2), il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$, ainsi on a $S_B \subset \{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\}$, d'où l'égalité des deux ensembles.

(d) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et soit $Q(X)$ le polynôme

$$Q(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r),$$

on note C la matrice $C = Q(A)$.

i. *On démontre que* $S_C = \{0\}$.
D'après la question précédente, on a $S_C = \{Q(\lambda) / \ \lambda \in S_A\}$. Or, par définition du polynôme $Q(X)$, on a $Q(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de A, ainsi, $S_C = \{0\}$.

ii. *On en déduit que le polynôme caractéristique de C est $(-1)^n X^n$ et que $C^n = 0$.*
Les valeurs propres de C sont les racines de son polynôme caractéristique, or C admet une unique valeur propre : 0, ainsi $P_C(X) = (-1)^n X^n$. Par ailleurs, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_C(C) = 0$, ainsi $(-1)^n C^n = 0$, donc $C^n = 0$.

Correction de l'exercice 3073 ▲

2. $D^{-1} = BC^{-1}A + I_p$.

Correction de l'exercice 3074 ▲

(a) 0 et les racines de $6\lambda^2 - 6n\lambda - n(n-1)(2n-1) = 0$.

(b) $\sin\alpha + \sin 2\alpha, \quad -\sin\alpha, \quad -\sin 2\alpha$.

Correction de l'exercice 3075 ▲

(a) $\mathrm{rg}(A) = 2 \Rightarrow 0$ est valeur propre d'ordre au moins $n-2$. $E_0 = \{a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} = x_n = 0\}$.
vp $\lambda \neq 0 : \lambda^2 - a_n\lambda - (a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2) = 0$. Il y a deux racines distinctes, $E_\lambda = \mathrm{vect}((a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda))$.

(b) A est diagonale. vp = 0 et a_n.

Correction de l'exercice 3076 ▲

(a) $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2} \Rightarrow D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

(b) $-2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Correction de l'exercice 3077 ▲

Soit $P_n(x)$ le polynôme caractéristique de x et $Q_n(x)$ celui de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant le premier 1 par 2. On a les relations de récurrence :

$$P_n(x) = (1-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x), \qquad Q_n(x) = (2-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x).$$

D'où pour $x \notin \{0, 4\}$:

$$P_n(x) = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^{2n})}{\alpha^n(1+\alpha)}, \qquad \text{avec } x = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

Les valeurs propres de A autres que 0 et 4 sont les réels $x_k = 2(1 - \cos(k\pi/n))$ avec $0 < k < n$ et 0 est aussi valeur propre (somme des colonnes nulle) donc il n'y en a pas d'autres.

Correction de l'exercice 3078 ▲

$\lambda = 0 : E_0 = \{\vec{x} \text{ tq } x_1 + \dots + x_q + x_{n-q+1} + \dots + x_n = 0\}$,

$\lambda = 2\min(p,q) : E_\lambda = \text{vect}((\underbrace{1,\dots,1}_{p},0,\dots,0,\underbrace{1,\dots,1}_{p}))$.

Correction de l'exercice 3082 ▲

$u(X^k) = -kX^k + (k-2n)X^{k+1} \Rightarrow$ la matrice de u est triangulaire inférieure. $\text{Spec}(u) = \{0,-1,\dots,-2n\}$.
$\lambda = -k$: Résoudre l'équation différentielle $\Rightarrow P = cX^k(X-1)^{2n-k}$.

Correction de l'exercice 3083 ▲

$\alpha^3 : (X-\beta)(X-\gamma), \quad \beta^3 : (X-\alpha)(X-\gamma), \quad \gamma^3 : (X-\alpha)(X-\beta)$.

Correction de l'exercice 3084 ▲

$\lambda = 1 \quad : P = Q\big((X-1)^2\big)$.
$\lambda = -1 : P = (X-1)Q\big((X-1)^2\big)$.

Correction de l'exercice 3085 ▲

$\lambda = 1 : P = aX+b$.

Correction de l'exercice 3086 ▲

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2a & -a^2 & \dots & -a^n \\ & 2 & -2a & & (0) \\ & & 3 & \ddots & \\ & & & \ddots & -na \\ (0) & & & & n+1 \end{pmatrix}.$$

$\text{Ker} f = \{\text{polynômes constants}\}$, $\text{Im} f = \{\text{polynômes divisibles par } X-a\}$.
Valeurs propres : $0,2,3,\dots,n+1$. Pour $2 \leqslant k \leqslant n+1$, $E_k = \text{vect}\big((X-a)^{k-1}\big)$.

Correction de l'exercice 3087 ▲

Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X]$

$$AP-(X^4-X)P = (X-1)P = aX^4+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(d-c)X-d = \\ a(X^4-X)+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d.$$

et donc $AP = (X^4-X)(P+a)+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d$ et donc $f(P) = (b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d$. Par suite, f est un endomorphisme de E et la matrice de f dans la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$ de E est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

puis

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 0 & 1 \\ 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$$
$$= -(X+1)(-(X+1)^3+1) = X(X+1)(X^2+3X+3).$$

A admet quatre valeurs propres simples dans $\mathbb{C}$, deux réelles 0 et -1 et deux non réelles $-1+j$ et $-1+j^2$. χ_f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc f n'est pas diagonalisable.
• Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker} f \Leftrightarrow b-a = c-b = a+d-c = -d = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ et $d = 0$. $\text{Ker} f = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X)$.
• Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker}(f+Id) \Leftrightarrow b = c = a+d = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$ et $d = -a$. $\text{Ker}(f+Id) = \text{Vect}(X^3 - 1)$.
• $\text{rg}(f) = 3$ et immédiatement $\text{Im} f = \text{Vect}(X-1, X^2-X, X^3-X^2)$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut continuer :
$P \in \text{Ker}(f+(1-j)Id) \Leftrightarrow b-ja = c-jb = a+d-jc = -jd = 0 \Leftrightarrow b = ja,\ c = j^2a$ et $d = 0$.
Donc $\text{Ker}(f+(1-j)Id) = \text{Vect}(X^3 + jX^2 + j^2X)$ et en conjuguant $\text{Ker}(f+(1-j^2)Id) = \text{Vect}(X^3 + j^2X^2 + jX)$.
Remarque. $B = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ et on a trouvé pour base de vecteurs propres les quatre polynômes de LAGRANGE $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3+X^2+X = X(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3 + jX^2 + j^2X = X(X-1)(X-j^2)$ et enfin $X^3 + j^2X^2 + jX = X(X-1)(X-j)$. C'est une généralité. On peut montrer que si $E = \mathbb{C}_n[X]$ et si B a $n+1$ racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$ alors f est diagonalisable et une base de vecteurs propres est fournie par les polynômes de LAGRANGE associés aux racines de B et ceci pour un polynôme A quelconque.

Correction de l'exercice 3088 ▲

1er cas. Supposons $\alpha = \beta = 0$ et donc $uv = vu$. Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle, u admet au moins une valeur propre que l'on note λ. Le sous-espace propre E_λ correspondant n'est pas réduit à $\{0\}$, est stable par u et d'autre part stable par v car u et v commutent. On note u' et v' les restrictions de u et v au sous-espace E_λ. u' et v' sont des endomorphismes de E_λ. De nouveau, E_λ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle et donc v' admet au moins un vecteur propre x_0. Par construction, x_0 est un vecteur propre commun à u et v.
2ème cas. Supposons par exemple $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} uv - vu = \alpha u + \mu v &\Leftrightarrow (\alpha u + \beta v) \circ \frac{1}{\alpha} v - \frac{1}{\alpha} v \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v \\ &\Leftrightarrow fg - gf = f \text{ en posant } f = \alpha u + \beta v \text{ et } g = \frac{1}{\alpha} v. \end{aligned}$$

On va chercher un vecteur propre commun à u et v dans le noyau de f. Montrons tout d'abord que $\text{Ker} f$ n'est pas nul (on sait montrer que f est en fait nilpotent (exercice 3383) mais on peut montrer directement une propriété un peu moins forte).
Si f est inversible, l'égalité $fg - gf = f$ fournit $(g+Id) \circ f = f \circ g$ et donc $g + Id = f \circ g \circ f^{-1}$. Par suite, g et $g+Id$ ont même polynôme caractéristique ou encore, si λ est valeur propre de g alors $\lambda + 1$ est encore valeur propre de g. Mais alors $\lambda+2$, $\lambda+3$... sont aussi valeurs propres de g et g a une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est exclu et donc $\text{Ker} f$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
Maintenant, si x est un vecteur de $\text{Ker} f$, on a $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0$ et $g(x)$ est dans $\text{Ker} f$. Donc g laisse $\text{Ker} f$ stable et sa restriction à $\text{Ker} f$ est un endomorphisme de $\text{Ker} f$ qui admet au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre. Ce vecteur est bien un vecteur propre commun à f et g.
Enfin si x est vecteur propre commun à f et g alors x est vecteur propre de $v = \frac{1}{\alpha} g$ et de $u = \frac{1}{\alpha}(f - \beta v)$. x est un vecteur propre commun à u et v.

Correction de l'exercice 3089 ▲

(a) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $(\varphi(f))(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$. F est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, F étant dérivable en 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} (\varphi(f))(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = (\varphi(f))(0).$$

Finalement $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, φ est une application de E dans E. La linéarité de φ est claire et finalement

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})).}$$

(b) Si f est dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$ alors $f(0)=0$ et pour tout x non nul, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$. Par dérivation on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x)=0$ ce qui reste vrai pour $x=0$ et donc $f=0$. Finalement $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$ et φ est injective.

φ n'est pas surjective car pour toute $f \in E$, $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Mais alors par exemple, l'application $g\ :\ x \mapsto |x-1|$ est dans E mais n'est pas dans $\mathrm{Im}(\varphi)$.

$$\boxed{\varphi \text{ est injective et n'est pas surjective.}}$$

(c) On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}$ et non nulle telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(f))(x) = \lambda f(x)$. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de φ et donc nécessairement $\lambda \neq 0$.

Pour $x=0$, nécessairement $f(0)=\lambda f(0)$ et donc ou bien $\lambda=1$ ou bien $f(0)=0$.

On doit avoir pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)\,dt$. f est nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\int_0^x f(t)\,dt = \lambda x f(x)$ et par dérivation, on obtient pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \lambda(xf'(x)+f(x)).$$

Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ f(x) = \lambda(xf'(x)+f(x)) &\Rightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{\lambda-1}{\lambda x}f(x) = 0\\
&\Rightarrow \forall x \in I,\ e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f'(x) + \frac{\lambda-1}{\lambda x}e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f(x) = 0\\
&\Rightarrow \forall x \in I,\ \left(|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f\right)'(x) = 0\\
&\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ |x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f(x) = K \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

1er cas. Si $\lambda \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ alors $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$ et donc $\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = +\infty$. La fonction $x \mapsto K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ ne peut donc être la restriction à I d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ que dans le cas $K=0$. Ceci fournit $f_{/]-\infty,0[}=0$, $f_{/]0,+\infty[}=0$ et $f(0)=0$ par continuité en 0. Dons f est nécessairement nulle et λ n'est pas valeur propre de φ dans ce cas.

2ème cas. Si $\lambda=1$, les restriction de f à $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ sont constantes et donc, par continuité de f en 0, f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions constantes f vérifient bien $\varphi(f)=f$. Ainsi, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est constitué des fonctions constantes.

3ème cas. Si $\lambda \in]0,1[$, nécessairement $\exists (K_1,K_2) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} K_1x^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x \geqslant 0 \\ K_2(-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x<0 \end{array}\right.$. f ainsi définie est bien continue sur $\mathbb{R}$. Calculons alors $\varphi(f)$.

$(\varphi(f))(0) = f(0) = 0$ puis si $x>0$,

$$(\varphi(f))(x) = \tfrac{1}{x}\int_0^x K_1t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\,dt = \tfrac{\lambda K_1}{x}x^{\frac{1}{\lambda}} = \lambda K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f(x)$$

et de même si $x<0$. Enfin, $(\varphi(f))(0) = 0 = \lambda f(0)$. Finalement $\varphi(f) = \lambda f$. λ est donc valeur propre de φ ($K_1=K_2=1$ fournit une fonction non nulle) et le sous-espace propre associé à λ est de dimension 2. Une base de ce sous-espace est (f_1,f_2) où $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \left\{\begin{array}{l} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x<0 \end{array}\right.$ et $f_2(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x<0 \end{array}\right.$.

Finalement

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) =]0,1].}$$

Correction de l'exercice 3113 ▲

$\chi_A = (-1-X)(2-X)^2$. Donc A est diagonalisable ssi $\dim\ker(A-2I)=2$. Or $\operatorname{rg}(A-2I)=2$, donc $\dim\ker(A-2I)=1$ donc A n'est pas diagonalisable. Cependant, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est triangularisable sur $\mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(A+I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y+4z=0\\ -x+4y-z=0\\ -2x-y-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0\\ y=0\end{cases}$ donc $\ker(A+I)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

De même,

$\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(A-2I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+4z=0\\ -x+y-z=0\\ -2x-y-5z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y\\ z=-y\end{cases}$ donc $\ker(A+I)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

On sait que $\ker((A-2I)^2)$ est de dimension 2, et que $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \in \ker(A-2I)\subset\ker((A-2I)^2)$. On cherche donc un deuxième vecteur dans $\ker((A-2I)^2)$, linéairement indépendant de $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix}-9&0&-18\\0&0&0\\9&0&18\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ convient. De plus : $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Donc en posant $P=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$, on obtient $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3114 ▲

On a $A^3=A$, donc $P=X^3-X=(X-1)(X+1)X$ est un polynôme annulateur de A. Il s'agit d'un poynôme scindé à racine simples donc A est diagonalisable. Les valeurs propres de A sont des racines de P donc $\operatorname{Sp}(A)\subset\{0,1,-1\}$. On a $\operatorname{rg}A=2$ donc 0 est valeur propre de multiplicité 2. La résolution de système $(A+I)X=0$ montre que $\ker(A+I)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, donc -1 est valeur propre de multiplicité 1 donc 1 est nécessairement valeur propre de multiplicité 1 : on en déduit que $\chi_A = X^2(X-1)(X+1)$.

Correction de l'exercice 3119 ▲

(a) A est triangulaire inférieure donc ses valeurs sont ses coefficients diagonaux : 1, 2 et 3. A a trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

(b) $\chi_B = -(X-1)(X+1)^2$. $B+I=\begin{pmatrix}3&-2&1\\3&-2&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$, donc $\operatorname{rg}(B+I)=2$, $\dim(\ker B+I)=1<2$ donc B n'est pas diagonalisable.

$\chi_B(B)=0$ donc $B(B^2+B-I)=I$, soit $B^{-1}=B^2+B-I=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-1&1&1\\3&-2&0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3120 ▲

(a) ${}^tA=A$ donc A est diagonalisable dans une base orthonormée.

(b) Par exemple : $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(c) $Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$, $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et ${}^tQ=Q^{-1}$

Correction de l'exercice 3150 ▲

$\mathrm{tr}\, a = \mathrm{tr} A = -1$, $\det a = \det A = -6$

$$P_a(X) = X^2 - \mathrm{tr} X + \det a = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3).$$

Donc le spectre est $\{2,-3\}$, il est de taille 2 comme l'espace est de dimension 2. D'après le cours, a est diagonalisable et les espaces propres de dimension 1. L'espace propre associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des (x,y) tels que $7x-10y = 2x$ ou $x = 2y$. On peut prendre $\vec{f}_1 = (2,1)$ pour base de cet espace propre. L'espace propre associé à la valeur propre -3 est l'ensemble des (x,y) tels que $7x-10y = -3x$ ou $x = y$. On peut prendre $\vec{f}_2 = (1,1)$ pour base de cet espace propre. Alors si $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ on a

$$P = [\mathrm{id}_E]^e_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ P^{-1} = [\mathrm{id}_E]^f_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ D = [a]^f_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$D^{50} = [a^{50}]^f_f = \begin{bmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & (-3)^{50} \end{bmatrix},\ A^{50} = [a^{50}]^e_e = PD^{50}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2.2^{50}-(-3)^{50} & -2.2^{50}+2.(-3)^{50} \\ 2^{50}-(-3)^{50} & -2^{50}+2.(-3)^{50} \end{bmatrix}$$

Donc $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}}[a^{2n}]^f_f = L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}}[a^{2n}]^e_e = PLP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Correction de l'exercice 3151 ▲

Si $X = (x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in F$, il est clair que $X = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_{ij}F_{ij}$. C'est donc une famille génératrice. Elle est indépendante, car si $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_{ij}F_{ij}$ est la matrice nulle, cela implique que $x_{ij} = 0$ pour tous i et j. C'est donc une base de F. Elle est de taille n^2, donc F est de dimension n^2. Ensuite, si $D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ et si $X = (x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ alors le coefficient (i,j) de la matrice $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$ est $(\alpha d_j + \beta d_i)x_{ij}$. Donc $\Phi(F_{ij}) = (\alpha d_j + \beta d_i)F_{ij}$, ce qui est dire que F_{ij} est un vecteur propre de Φ pour la valeur propre $\alpha d_j + \beta d_i$. L'espace F admet donc une base de vecteurs propres de Φ. D'après le cours, cela entraîne que Φ est diagonalisable. Si on le représente dans la base de vecteurs propres, le déterminant de Φ est donc le produit des éléments diagonaux, c'est à dire $\det \Phi = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha d_j + \beta d_i)$. Plus généralement $\det(\Phi - \lambda \mathrm{id}_F) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha d_j + \beta d_i - \lambda)$.

Correction de l'exercice 3152 ▲

Notons $D_n = \det B$. Alors $D_1 = 2\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ et $D_2 = 4\cos^2\theta - 1 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$. Si $n > 2$, développons D_n par rapport à la dernière ligne, en recommencant encore une fois avec un des déterminants d'ordre $n-1$ obtenus. On obtient $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$. Faisons l'hypothèse de récurrence que $D_k = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ pour $k < n$. On a vu que c'est vrai pour $k = 1$ et 2. Alors par des identités trigonométriques classiques $D_n = \frac{2\cos\theta\sin n\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, et la récurrence est étendue. Puisque $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $x = k\pi$ alors $D_n = 0$ si et seulement si il existe $k = 1,2,\dots,n$ tel que $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ les autres valeurs de k étant exclues car $0 < \theta < \pi$. Par définition de P_A on a $P_A(-2\cos\theta) = D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ qui s'annule pour les n nombres distincts $-2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1,2,\dots,n$ qui sont nécessairement toutes les valeurs propres de A. Les valeurs propres de $2I_n + A$ sont donc $2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1} = 4\sin^2\frac{k\pi}{2n+2} > 0$. Le spectre de $2I_n - A$ est le même.

Correction de l'exercice 3155 ▲

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Déterminons les valeurs propres de M.*

Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-X \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-X) \begin{vmatrix} -X & 2 \\ 3 & -2-2X \end{vmatrix} \tag{35}$$

$$= (1-X)(X^2+2X-8) \tag{36}$$

$$= (1-X)(X+4)(X-2). \tag{37}$$

La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : $1, 2$, et -4.

(b) *Montrons que M est diagonalisable.*

Nous venons de voir que M, matrice réelle 3×3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que M est diagonalisable.

(c) *Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.*

Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

$\lambda = 1$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_1}$ de coordonnées $(1, 1, 1)$.

$\lambda = 2$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_2}$ de coordonnées $(4, 3, -2)$.

$\lambda = -4$: Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre -4 si et seulement si

$$\begin{cases} -4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + 3x = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_3}$ de coordonnées $(2, -3, 2)$.

Les vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ forment une base de E composée de vecteurs propres, la matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) *Exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.*

On a

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

pour $k \in |||$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix},$$

et $M^k = PD^kP^{-1}$.

Calculons donc la matrice P^{-1} : on a $P^{-1} = \frac{1}{\det P}(\mathrm{comP})^{\mathrm{t}}$. Or

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$

et

$$\mathrm{com} P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$P^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$M^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5.2^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 5.2^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15.2^k - 15(-4)^k & -12 - 18(-4)^k & -18 + 5.2^{k+1} + 3(-4)^k \\ 5.2^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 - 5.2^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 3156 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrons que A est diagonalisable et trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 1 avec la multiplicité 2, et 2 avec la multiplicité 1.

Déterminons les sous-espaces propres associés : Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1.

$E_1 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ A.V = V\}$,

$$V \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

E_1 est donc un plan vectoriel, dont les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (0,1,1)$ forment une base.

Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2.

$E_2 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ A.V = 2V\}$,

$$V \in E_2 \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0, y = 0$$

E_2 est donc une droite vectorielle, dont le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ est une base.

Les dimensions des sous-espaces propres sont égales à la multiplicité des valeurs propres correspondantes, la matrice A est donc diagonalisable. Dans la base (e_1, e_2, e_3) l'endomorphisme représenté par A (dans la base canonique) a pour matrice.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P^{-1}AP = D$.

Correction de l'exercice 3157 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorisons le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (1-X) = (1-X)((1-X)^2+1) = (1-X)(X^2-2X+2)$$

factorisons maintenant le polynôme $X^2 - 2X + 2$, le discriminant réduit $\Delta' = 1 - 2 = -1$, ce polynôme n'admet donc pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées qui sont : $1+i$ et $1-i$. On a $P_A(X) = (1-X)(1-i-X)(1+i-X)$.

La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique n'a pas toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car c'est une matrice 3×3 qui admet trois valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 3158 ▲

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrons que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - c^2) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2 \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 \\ &= (a-d)^2 + 4c^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

On a $\Delta = 0 \iff a - d = 0$ et $c = 0$, mais, si $c = 0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3162 ▲

On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$(S)\quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

(a) On diagonalise la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour cela on détermine ses valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres distinctes, qui sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$. Elle est diagonalisable. Déterminons une base de vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \iff x = y,$$

d'où le vecteur propre $u_1 = (1,1)$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \iff x = 2y,$$

d'où le vecteur propre $u_2 = (2,1)$ associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$. Dans la base (u_1, u_2), la matrice s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PA'P^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Exprimons le système (S) et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A.
Dans la base (u_1, u_2), le système (S) devient

$$(S')\quad \begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 3Y \end{cases}$$

Ses solutions sont les fonctions

$$\begin{cases} X(t) = X(0)e^{2t} \\ Y(t) = Y(0)e^{3t} \end{cases}$$

(c) Pour représenter graphiquement les trajectoires de (S) dans le repère (Oxy), on trace d'abord le repère (O, u_1, u_2) dans le repère $(0xy)$, puis, on trace les courbes

$$Y = \frac{Y(0)}{X(0)} X^{3/2}$$

dans le repère (O, u_1, u_2) (ou OXY).

(d) On voit sur le dessin que si $Y(0)$ est strictement positif, alors la population des lapins, $x(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Si $Y(0)$ est strictement négatif alors la populations des lapins s'éteint dans la mesure ou $x(t)$ dans ce cas tendrait vers $-\infty$.

Correction de **l'exercice 3163 ▲**

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$*, dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculons les valeurs propres de A.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3.$$

La matrice A admet une valeur propre triple qui est $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon son sous-espace propre serait de dimension 3 or, $A \neq I$.

(b) Calculons $(A-I)^2$.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$A^n = (A-I+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + C_n^1 (A-I) = I + n(A-I) = nA + (1-n)I.$$

Car, pour $k \geqslant 2$, on a $(A-I)^k = 0$.

(c) *Soient* $P(X) = (X-1)^2$ *et* $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exprimons le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.

Il existe des polynômes S et R, avec $d^\circ R < d^\circ P$ ou $R = 0$, tels que

$$Q(X) = S(X)(X-1)^2 + R(X).$$

Notons $R(X) = aX + b$ ($R(X)$ est de degré 1 car P est de degré 2) et dérivons, on obtient

$$Q'(X) = S'(X)(X-1)^2 + 2(X-1)S(X) + a,$$

on a donc $Q(1) = R(1) = a + b$ et $Q'(1) = a$, c'est-à-dire $a = Q'(1)$ et $b = Q(1) - Q'(1)$ d'où

$$R(X) = Q'(1)X + (Q(1) - Q'(1)).$$

D'après la question 2), on remarque que $P(A) = 0$, en choisissant le polynôme $Q(X) = X^n$ on a $Q(1) = 1$ et $Q'(1) = n$, donc

$$Q(A) = A^n = R(A) = Q'(1)A + (Q(1) - Q'(1))I = nA + (1-n)I.$$

(d) i. Montrons que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $(A-I)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

$$\forall (X,Y,Z) \in Im(A-I), \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (x+y-z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que $Im(A-I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_2 = (2,-1,1)$.

ii. Déterminons un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. On pose $\varepsilon_3 = (x,y,z)$,

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3x+2y-2z = x+2 \\ -x+z = y-1 \\ x+y = z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x+y-z) = 2 \\ -1(x+y-z) = -1 \\ (x+y-z) = +1 \end{cases} \iff x+y-z = 1.$$

On prends, par exemple $\varepsilon_3 = (1,0,0)$.
Déterminons un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x+2y-2z = x \\ -x+z = y \\ x+y = z \end{cases} \iff x+y-z = 0.$$

On peut prendre le vecteur $\varepsilon_1 = (0,1,1)$ qui n'est pas colinéaire à ε_2.

iii. Ecrivons la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, ainsi que les matrices de passage.
On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ d'où la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

iv. Pour retrouver A^n, on écrit $A' = I + N$, où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $N^2 = 0$. Par ailleurs, on a $A = PA'P^{-1}$, d'où

$$A^n = PA'^nP^{-1} = P(I+N)^nP^{-1} = P(I+nN)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nA + (1-n)I.$$

Correction de l'exercice 3164 ▲

Soient M et A deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

(a) *Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ.*

Montrons que $MAx = \lambda Ax$.

On a $Mx = \lambda x$, donc $AMx = A\lambda x = \lambda Ax$. Mais, $AM = MA$, donc $MAx = AMx = \lambda Ax$. Ce qui prouve que le vecteur Ax est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ, et comme les valeurs propres de M sont supposées distinctes, les sous-espaces propres sont de dimension 1, donc Ax est colinéaire à x. Ainsi, il existe un réel μ tel que $Ax = \mu x$, donc x est un vecteur propre de A.

(b) On note maintenant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de M et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de A.

i. Montrons l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Il s'agit du déterminant de Vandermonde. Notons le $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 2$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour $n-1$. Dans $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, retranchons à chaque colonne λ_1 fois la précédente (en commençant par la dernière colonne). On obtient

$$\begin{vmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

On factorise alors chaque ligne par $(\lambda_i - \lambda_1)$ et on obtient

$$\begin{aligned} V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) &= (\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) V(\lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned}$$

car $V(\lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$ par hypothèse de récurrence.

Ce déterminant est le déterminant du système suivant,

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

or $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq 0$ puisque les λ_i sont supposés distincts, c'est donc un système de Cramer, il admet donc une unique solution $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

ii. *Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes* :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Montrons qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k.$$

Compte tenu des matrices A' et M' l'existence de réels tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

est équivalente à l'existence d'une solution pour le système précédent, d'où le résultat.
On en déduit qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

La matrice M admet n vecteurs propres linéairement indépendants qui sont également vecteurs propres de la matrice A. Par conséquent il existe une même matrice de passage P telle que $M = PM'P^{-1}$ et $A = PA'P^{-1}$, d'où l'égalité

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

Correction de l'exercice 3165 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminons le polynôme caractéristique de A.

On a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -3-X & -2 & -2 \\ 2 & 1-X & 2 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 2 & -1-X & 2 \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 4-X \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix} = -(1+X) \begin{vmatrix} -3-X & -2 \\ 5 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= -(1+X)[(X-4)(X+3)+10] = -(1+X)(X^2-X-2) = -(1+X)^2(X-2) \end{aligned}$$

(b) Démontrons que les valeurs propres de A sont -1 et 2 et déterminons les sous-espaces propres associés.

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, ce sont donc bien les réels -1 et 2.

Les sous-espaces propres associés sont les ensembles

$$E_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A + I_3)$$

et

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A - 2I_3)$$

On a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -3x-2y-2z = -x \\ 2x+y+2z = -y \\ 3x+3y+2z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x-2y-2z = 0 \\ 2x+2y+2z = 0 \\ 3x+3y+3z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace caractéristique E_{-1} associé à la valeur propre -1 est donc le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$, il est de dimension 2, égale à la multiplicité de la racine -1.

On a

$$(x,y,z) \in E_2 \iff \begin{cases} -3x-2y-2z = 2x \\ 2x+y+2z = 2y \\ 3x+3y+2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x-2y-2z = 0 \\ 2x-y+2z = 0 \\ 3x+3y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $y=-x$ et $2z=-3x$.

Le sous-espace caractéristique E_2 associé à la valeur propre 2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2,-2,-3)$, il est de dimension 1, égale à la multiplicité de la racine 2.

(c) Démontrons que A est diagonalisable et donnons une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

La question précédente et les résultats obtenus sur les dimensions des sous-espaces propres permettent d'affirmer que la matrice A est diagonalisable. Une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de bases des sous-espaces propres est une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice de u est diagonale. Par exemple dans la base formée des vecteurs $u_1=(1,-1,0)$, $u_2=(1,0,-1)$ et $u_3=(2,-2,-3)$, la matrice de u est la matrice D qui s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

La matrice cherchée P est la matrice de passage exprimant la base de vecteurs propres (u_1,u_2,u_3) dans la base canonique. C'est donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On a $P^{-1}AP=D$.

Correction de l'exercice 3166 ▲

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliquons sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

On remarque que le polynôme caractéristique de A est égal à $(1-X)^4$. Ainsi la matrice A admet-elle une unique valeur propre : $\lambda=1$, si elle était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A=PI_4P^{-1}$ alors $A=I_4$, or ce n'est pas le cas, par conséquent la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 3167 ▲

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de A la somme des coefficients est égale à 1.

(a) Soient (x_1,x_2), (y_1,y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on suppose que

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

montrons qu'alors

$$y_1+y_2 = x_1+x_2.$$

Compte tenu des hypothèses, la matrice A est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix},$$

où a et b sont des réels. On a alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ (1-a)x_1 + (1-b)x_2 = y_2 \end{cases}$$

ce qui implique $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

(b) Montrons que le vecteur $\varepsilon = (1,-1)$ est un vecteur propre de A.

Si $A\varepsilon = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $y_1 + y_2 = 0$ donc $y_2 = -y_1$ et $A\varepsilon = y_1\varepsilon$, ce qui prouve que ε est un vecteur propre. On peut aussi le voir de la manière suivante

$$A\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)\varepsilon.$$

On note $\lambda = (a-b)$ sa valeur propre.

(c) Montrons que si v est un vecteur propre de A non colinéaire à ε, alors la valeur propre associée à v est égale à 1.

Soit $v = (x_1, x_2)$ un vecteur propre de A non colinéaire à ε, notons μ sa valeur propre, on a $Av = \mu v$, et, d'après la question 1), on a

$$x_1 + x_2 = \mu x_1 + \mu x_2 = \mu(x_1 + x_2)$$

ce qui implique $\mu = 1$ car v est supposé non colinéaire à ε donc $x_1 + x_2 \neq 0$.

(d) Soit $e_1 = (1,0)$. Montrons que la matrice, dans la base (e_1, ε), de l'endomorphisme associé à A est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour cela on écrit Ae_1 et $A\varepsilon$ dans la base (e_1, ε). On a d'une part $A\varepsilon = \lambda\varepsilon$ et, d'autre part,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où la matrice dans la base (e_1, ε)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

où $\alpha = a-1$ et $\lambda = a-b$.

On en déduit que si $\lambda \neq 1$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de A est égal à $(1-X)(\lambda - X)$, ainsi, si $\lambda \neq 1$, il admet deux racines distinctes ce qui prouve que A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3168 ▲

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Première partie :

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.*
On a

$$P_{A_\alpha}(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix}$$
$$= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X)+\alpha+1]$$
$$= -(X+1)[X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha].$$

Factorisons le polynôme $X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha$, son discriminant est égal à

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

On a donc $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, ce qui nous donne les deux racines

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

Le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ se factorise donc en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

(b) *Déterminons selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.*
Les valeurs propres de A_α sont les racines du polynôme caractéristique P_{A_α}, ainsi,
- si $\alpha = 0$, la matrice A_α admet une valeur propre triple $\lambda = -1$,
- si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ valeur propre double et $\lambda_2 = \alpha-1$, valeur propre simple.

(c) *Déterminons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.*
Il est clair que dans le cas $\alpha = 0$, la matrice n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait une matrice inversible P telle que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, ce qui n'est pas le cas.
Si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2. Déterminons ce sous-espace propre.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha + I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+(\alpha+1)z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y+\alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

Il faut distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$.
- Si $\alpha = -1$, le sous-espace E_{-1} est le plan vectoriel d'équation $x = y$, dans ce cas la matrice A_α est diagonalisable.
- Si $\alpha \neq -1$, le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$, dans ce cas la matrice A_α n'est pas diagonalisable.

(d) *Déterminons selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.*
Notons Q_A le polynôme minimal de A_α. On sait que la matrice A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ et que celles-ci sont simples. Or, nous venons de démontrer que A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement $\alpha = -1$, on a donc
- Si $\alpha = -1$, A_α est diagonalisable, donc $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.
- Si $\alpha \neq -1$, A_α n'est pas diagonalisable, donc $Q_A(X) = P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1)$.

Seconde partie :
On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A. On a donc

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_A(X) = -(X+1)^3$.

(a) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*
La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = -1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_{-1} = \ker(A+I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$.
Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = -1$, est le sous-espace $N_{-1} = \ker(A+I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A+I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_{-1} = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

(b) *Démontrons que f admet un plan stable.*
La matrice de f n'est pas diagonalisable, mais comme son polynôme caractéristique se factorise sur $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable, ce qui prouve qu'elle admet un plan stable, le plan engendré par les deux premiers vecteurs d'une base de trigonalisation.
Par ailleurs, on a $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$, le sous-espace $\ker(A+I)^2$ est clairement stable par A car pour tout $v \in \ker(A+I)^2$, $Av \in \ker(A+I)^2$, en effet

$$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

Démontrons que ce sous-espace est un plan. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\ker(A+I)^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z = 0\}$, c'est bien un plan vectoriel.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 - e_2$ et $Ae_3 = e_2 - e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A+I)$, nous choisirons $e_2 \in \ker(A+I)^2$ tel que (e_1, e_2) soit une base de $\ker(A+I)^2$. Remarquons que si l'on cherche $e_2 = (x,y,z)$ tel que $Ae_2 = e_1 - e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = 1-y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne bien un vecteur de $\ker(A+I)^2$. Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (1,0,1)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 - e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = -y \\ -x+y = 1-z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) *Décomposition de Dunford de B*

On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à $-I$. Or, il existe un unique couple de matrice D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B = D + N$ et $DN = ND$. C'est donc là la décomposition de Dunford, $B = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$ *et exprimons* $\exp tA$ *à l'aide de P et* $\exp tB$.

Remarquons tout d'abord que $N^2 = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(tN)^2 = 0$ et l'expenentielle est égale à $\exp(tN) = I + tN$, par ailleurs $ND = DN$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices tN et tD commutent également, $(tN)(tD) = (tD)(tN)$, on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(-tI)\exp(-tN) = e^{-t}(I + tN).$$

D'où

$$\exp(tB) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'exponentielle de la matrice tA, on écrit

$$\exp(tA) = \exp(t(PBP^{-1})) = \exp(P(tA)P^{-1}) = P\exp(tB)P^{-1}.$$

(f) *Solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.*

La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit

$$S(t) = \exp(tB)v$$

où $v = (a,b,c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. La solution $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit donc

$$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a + bt \\ b + ct \\ c \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la solution du système $X' = AX$, on écrit

$$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X)$$

ainsi, en notant $Y = P^{-1}X$ ou encore $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où P est la matrice vérifiant $A = PBP^{-1}$ et S une solution du système $Y' = BY$.

La solution générale du système $X' = AX$ s'écrit donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}(a + bt) \\ e^{-t}(b + ct) \\ e^{-t}c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a + b + (c + b)t \\ a + bt \\ b + c + ct \end{pmatrix}$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

II

Soient K un corps, $N \in M_n(K)$ une matrice nilpotente et A une matrice telle que $AN = NA$.

(a) *Déterminons les valeurs propres de N.*

La matrice N étant nilpotente, il existe un entier naturel m tel que $N^n = 0$, on a donc $\det N^m = (\det N)^m = 0$ donc $\det N = 0$, l'endomophisme de matrice N n'est pas bijectif ce qui prouve que 0 est valeur propre de N, c'est la seule, en effet si λ est une autre valeur propre et $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ on a

$$Nx = \lambda x \Rightarrow N^m x = \lambda^m x$$

d'où $\lambda^m x = 0$, mais $x \neq 0$ donc $\lambda = 0$. Ainsi la matrice N admet une unique valeur propre $\lambda = 0$ de multiplicité n.

(b) *Démontrons que N est trigonalisable.*

Le polynôme caractéristique de N admet une unique racine $0 \in K$, toutes ses racines sont donc dans K, ce qui prouve que la matrice N est trigonalisable. Elle est semblable à une matrice triangulaire n'ayant que des 0 sur la diagonale.

(c) *Démontrons que* $\det(I+N) = 1$.

Compte tenu de ce qui précède, la matrice $N+I$ est une matrice triangulaire n'ayant que des 1 sur la diagonale, or le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux, ainsi on a bien $\det(N+I) = 1$.

(d) *On suppose A inversible. Démontrons que les matrices AN et NA^{-1} sont nilpotentes.*

Comme les matrices A et N commutent, pour tout $k \in |||$, on a $(AN)^k = A^k N^k$ donc pour $k = m$, $(AN)^m = A^m N^m = A.0 = 0$ ce qui prouve que AN est nilpotente. De même $NA^{-1} = A^{-1}N$ et NA^{-1} est nilpotente.

On en déduit que

$$\det(A+N) = \det A.$$

L'égalité $AN = NA$ implique $N = ANA^{-1}$ ainsi, on a

$$\det(N+A) = \det(ANA^{-1}+A) = \det(A(NA^{-1}+I)) = \det A \det(NA^{-1}+I) = \det A.$$

(e) *On suppose A non inversible. En exprimant $(A+N)^k$ pour $k \in |||$, démontrons que* $\det(A+N) = 0$.

Comme les matrices A et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de $A+N$. Soit m tel que $N^m = 0$ et, pour tout $k < m, N^k \neq 0$ on a alors

$$(A+N)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k N^{m-k} = \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^k N^{m-k} = A \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^{k-1} N^{m-k}$$

ainsi

$$\det((A+N)^m) = \det A . \det \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^{k-1} N^{m-k} = 0$$

car $\det A = 0$. Or, $\det((A+N)^m) = (\det(A+N))^m$, on a donc bien $\det(A+N) = 0$.

Correction de **l'exercice 3169 ▲**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, *on montre que A est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+d)^2 - 4(ad-c^2) \\ &= a^2+d^2+2ad-4ad+4c^2 \\ &= a^2+d^2-2ad+4c^2 \\ &= (a-d)^2+4c^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

On a $\Delta = 0 \iff a-d=0$ et $c=0$, mais, si $c=0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3170 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in|||}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in |||$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

(a) *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?*
Calculons le polynôme caractéristique $P_A(X)$:

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -a & 1+a-X \end{vmatrix} = -X(1+a-X)+a = X^2-(1+a)X+a.$$

La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si le polynôme P_A admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$. En effet, si P_A admet une racine double r et A diagonalisable, alors l'endomorphisme de matrice A est égal à $r\mathrm{Id}_E$, ce qui n'est pas le cas. Calculons donc le discriminant du polynôme caractéristique.

$$\Delta = (1+a)^2 - 4a = 1+a^2+2a-4a = 1+a^2-2a = (1-a)^2.$$

Ainsi la matrice A est diagonalisable pour tout $a \neq 1$.

(b) *Lorsque A est diagonalisable, calculons A^n pour $n \in |||$.*
Lorsque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, ainsi pour tout $n \in |||$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. Déterminons les matrices P et D. Pour cela calculons les deux valeurs propres de A, ce sont les racines du polynôme P_A, on a donc

$$\lambda_1 = \frac{1+a+1-a}{2} = 1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{1+a-1+a}{2} = a.$$

Déterminons maintenant des vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et a. On cherche des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ tels que $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ et $A\vec{e}_2 = a\vec{e}_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = x$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = ax$$

ainsi on peut choisir $\vec{e}_1 = (1,1)$ et $\vec{e}_2 = (1,a)$. On a alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $n \in |||$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a-a^n & a^n-1 \\ a-a^{n+1} & a^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

(c) *On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, on exprime U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.*

On a, par définition, pour tout $n \in |||$, $u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$, ainsi,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AU_n.$$

On a donc $U_1 = AU_0$, montrons par récurrence sur n, que pour tout $n \in |||$, $U_n = A^n U_0$. C'est vrai pour $n = 0$, $U_0 = A^0 U_0 = IU_0 = U_0$ et pour $n = 1$. Soit n fixé pour lequel on suppose $U_n = A^n U_0$, on a alors $U^{n+1} = AU_n = A.A^n U_0 = A^{n+1} U_0$, le résultat est donc vrai pour tout entier naturel n.

La matrice A étant supposée diagonalisable, on a donc, pour $n \in |||$,

$$U_n = A^n U_0 = PD^n P^{-1} U_0 = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a - a^n & a^n - 1 \\ a - a^{n+1} & a^{n+1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

ainsi on peut exprimer pour $n \in |||$, le terme général de la suite u_n en fonction des premiers termes u_0 et u_1, on a

$$u_n = \frac{1}{a-1} \left((a - a^n) u_0 + (a^n - 1) u_1 \right).$$

Correction de l'exercice 3171 ▲

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

Calculons son polynôme caractéristique

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2 - 4X + 4) = (2-X)^3.$$

la matrice A admet une unique valeur propre 2, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $2.I_3$, elle serait donc égale à $2I_3$ ce qui n'est pas le cas, elle n'est donc pas diagonalisable.

(b) *Calculons $(A - 2I_3)^2$, puis $(A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in |||$.*

On a

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi, $(A - 2I_3)^0 = I$, $(A - 2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et, pour tout $n \geqslant 2$, on a $(A - 2I_3)^n = 0$.

On en déduit A^n

Notons $B = A - 2I_3$, on a $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ avec $B^n = 0$ pour $n \geqslant 2$. Par ailleurs, les matrices B et $2I_3$ commutent, ainsi

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

où les C_n^k sont les coefficients du binôme de Newton :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Or, pour $k \geqslant 2$, on a $B^k = 0$ d'où pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} nB \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n(A - 2I_3) \\ &= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} nA. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3172 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Démontrons que* 1 *et* 2 *sont des valeurs propres de* f.
Pour cela montrons que $\det(A - I) = 0$ et $\det(A - 2I) = 0$. On a

$$\det(A-I) = \begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 26 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 26 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Et

$$\det(A-2I) = \begin{vmatrix} -10 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, les réels 1 et 2 sont bien valeurs propres de la matrice A.

(b) *Déterminons des vecteurs propres de* f *associés aux valeurs propres* 1 *et* 2.
Soit $\vec{e} = (x,y,z,t)$ tel que $A\vec{e} = \vec{e}$, on résout alors le système

$$\left\{ \begin{aligned} -9x - 3y - 3z + t &= 0 \\ 6x + 2y + 2z - t &= 0 \\ 26x + 7y + 9z - 2t &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} 3x + y + z &= 0 \\ 26x + 7y + 9z &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x &= -2y \\ z &= 5y \\ t &= 0 \end{aligned} \right. ,$$

ce système représente une droite vectorielle engendrée, par exemple, par le vecteur $\vec{e} = (-2, 1, 5, 0)$.
Soit $\vec{u} = (x,y,z,t)$ tel que $A\vec{u} = 2\vec{u}$, on résout

$$\left\{ \begin{aligned} -10x - 3y - 3z + t &= 0 \\ 6x + y + 2z - t &= 0 \\ 26x + 7y + 8z - 2t &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} 10x + 3y + 3z &= 0 \\ 6x + y + 2z &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} 3y &= -2x \\ 3z &= -8x \\ t &= 0 \end{aligned} \right. ,$$

ce système représente une droite vectorielle engendrée, par exemple, par le vecteur $\vec{u} = (3, -2, -8, 0)$.

(c) *On considère le vecteur* $\vec{u}$ *précédent et on determine des vecteurs* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *tels que*

$$f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u} \text{ et } f(\vec{w}) = 2\vec{w} + \vec{v}.$$

Pour déterminer le vecteur $\vec{v}=(x,y,z,t)$, on résout le système

$$\begin{cases} -10x-3y-3z+t=3 \\ 6x+y+2z-t=-2 \\ 26x+7y+8z-2t=-8 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x+3y+3z=-3 \\ 6x+y+2z=-2 \\ t=0 \end{cases},$$

le vecteur $\vec{v}=(0,0,-1,0)$ convient. Pour déterminer le vecteur $\vec{w}=(x,y,z,t)$, on résout le système

$$\begin{cases} -10x-3y-3z+t=0 \\ 6x+y+2z-t=0 \\ 26x+7y+8z-2t=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x+3y+3z=-1 \\ 6x+y+2z=-1 \\ t=-1 \end{cases},$$

le vecteur $\vec{w}=(1/2,0,-2,-1)$ convient.

(d) *Les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ceux définis précédemment. On démontre que $(\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et on donne la matrice de f dans cette base.*

La matrice M des vecteurs $\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ dans la base cannonique est de rang 4 car son déterminant est non nul, en effet

$$\det M = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1/2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Compte tenu des définitions des vecteurs $\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, la matrice B de l'endomorphisme f dans la base $(\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont 1, valeur propre simple, et 2 de multiplicité 3. Nous avons vu dans le b) que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension $1 \neq 3$, ainsi, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 3173 ▲

Soit $m \in \mathbb{R}$, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique de A et montrons que les valeurs propres de A sont -1 et*

1. (1,5 points)

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ m & m-1 & -X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ 0 & -X-1 & -X-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+m-X & m & 1 \\ -m & 1-m-X & -1 \\ 0 & 0 & -X-1 \end{vmatrix} \\
&= (-X-1)\begin{vmatrix} 1+m-X & m \\ -m & 1-m-X \end{vmatrix} \\
&= -(1+X)\left((1-X)^2-m^2+m^2\right) \\
&= -(1+X)(1-X)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice A sont -1, valeur propre simple, et 1, valeur propre double.

(b) *Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ?* (1,5 points)

La matrice A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2. Déterminons donc ce sous-espace propre $E_1 = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = \vec{u}\}$.

$$\begin{aligned}
A\vec{u} = \vec{u} &\iff \begin{cases} mx+(1+m)y+z=0 \\ -mx-(1+m)y-z=0 \\ mx+(m-1)y-z=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} mx+(1+m)y+z=0 \\ mx+(m-1)y-z=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2y+2z=0 \\ 2mx+2my=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y+z=0 \\ m(x+y)=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'espace E_1 est de dimension 2 si et seulement si $m=0$, c'est alors le plan d'équation $y+z=0$, sinon c'est une droite, intersection des deux plans $y+z=0$ et $x+y=0$.

Déterminons suivant les valeurs de m le polynôme minimal de A. (1 point)

Si $m=0$, la matrice A est diagonalisable, son polynôme minimal n'a que des racines simples, il est égal à

$$Q(X) = (X-1)(X+1).$$

Si $m \neq 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal ne peut pas avoir uniquement des racines simples, il est donc égal à

$$Q(X) = (X-1)^2(X+1).$$

Correction de l'exercice 3174 ▲

(a) *Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.* (2 points)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2+1.$$

Le polynôme caractéristique de A admet deux racines complexes conjuguées distinctes i et $-i$ elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.

(b) *Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$.* (2 points)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2.$$

Le polynôme caractéristique de A admet une racine double 1, la matrice A admet l'unique valeur propre 1, or, elle n'est pas égale à l'identité, par conséquent, elle n'est diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3175 ▲

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Diagonalisons la matrice A.* (2 points)

Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

La matrice A admet deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Déterminons une base de vecteurs propres de A.

Soit $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$A\vec{u} = \vec{u} \iff x = y \text{ et } A\vec{u} = -\vec{u} \iff x = -y.$$

Notons $\vec{u}_1 = (1,1)$ et $\vec{u}_2 = (-1,1)$, le vecteur $\vec{u}_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et le vecteur $\vec{u}_2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1, ils sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, on a $A = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) *Exprimons les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans une base de vecteurs propres et traçons ses trajectoires.* (3 points)

Soit Y tel que $PY = X$, on a alors

$$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY.$$

Les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans la base de vecteurs propres $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ sont les solutions du système $Y' = DY$. Si $Y = (x,y)$, on a $x'(t) = x(t)$ et $y'(t) = -y(t)$, ainsi, les solutions du système sont $x(t) = ae^t$ et $y(t) = be^{-t}$ où a et b sont des constantes réelles arbitraires. Les trajectoires, exprimées dans la base de vecteurs propres $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, sont donc les courbes d'équation $y = c/x$ avec $c \in \mathbb{R}$, ce sont des branches d'hyperboles.

Correction de l'exercice 3176 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(a) *Calculons le déterminant de A et déterminons pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.*
On développe le déterminant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

$$\det A \neq 0 \iff 1 + a^3 \neq 0 \iff a \neq -1.$$

(b) *Calculons A^{-1} lorsque A est inversible.*
On suppose $a \neq -1$, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}{}^t\tilde{A}$, où $\tilde{A}$ est la comatrice de A et ${}^t\tilde{A}$ la transposée de $\tilde{A}$. On a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -a^2 & a \\ -a^2 & a & -1 \\ a & -1 & -a^2 \end{pmatrix} = {}^t\tilde{A}.$$

D'où $A^{-1} = \dfrac{1}{1+a^3} \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -a \\ a^2 & -a & 1 \\ -a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3177 ▲

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Déterminons la nature géométrique de cet endomorphisme.*
Notons $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice A est la matrice de la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ d'angle θ.
On peut ajouter que les vecteurs colinéaires à $\vec{k}$ sont fixes. Un vecteur de coordonnées (x,y,z) est envoyé sur le vecteur $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$, sa composante dans le plan engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ subit la rotation plane d'angle θ.

(b) *Démontrons que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, la matrice A admet une unique valeur propre réelle et déterminons son sous-espace propre associé.*
Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A.

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} \cos\theta - X & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} &= [(\cos\theta - X)^2 + \sin^2\theta](1-X) \\ &= (1-X)(X^2 - 2X\cos\theta + 1 \end{aligned}$$

Cherchons les racines du polynôme $X^2 - 2X\cos\theta + 1$, pour cela on calcule son discriminant réduit

$$\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta < 0,$$

en effet, si $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, alors $\sin\theta \neq 0$, donc le polynôme P_A n'admet qu'une racine réelle $\lambda = 1$. Son sous-espace propre associé est de dimension 1, c'est l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ de la rotation.
Cas où $\theta \in \pi\mathbb{Z}$
On distingue les cas $\theta = n\pi$ avec n pair ou impair :
- Si $\theta = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de l'identité.

- Si $\theta = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$. Elle admet deux valeurs propres, la valeur propre 1 dont le sous-espace propre est l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ et la valeur propre -1 dont le sous-espace propre est le plan $\mathbb{R}\vec{i} + \mathbb{R}\vec{j}$.

Correction de l'exercice 3178 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Déterminons et factorisons le polynôme caractéristique de A.*
Par opérations sur les colonnes puis les lignes, on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & -2 & -2 \\ 2 & -X & 2 \\ 3 & 3 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 3 & 2+X & 1-X \end{vmatrix},$$

d'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 5 & 0 & 3-X \end{vmatrix}$$

et, en développant par rapport à la deuxième colonne

$$P_A(X) = -(X+2)[(-4-X)(3-X)+10] = -(X+2)(X^2+X-2) = -(X+2)^2(X-1).$$

(b) *Démontrons que les valeurs propres de A sont 1 et -2 et déterminons les sous-espaces propres associés.*
Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caracteristique, c'est-à-dire, 1, valeur propre simple et, -2, valeur propre double.
Notons E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1,

$$E_1 = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A.\vec{u} = \vec{u}\}.$$

Ainsi

$$\vec{u} = (x,y,z) \in E_1 \iff \begin{cases} -5x-2y-2z = 0 \\ 2x-y+2z = 0 \\ 3x+3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ 3x+2z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_1 est donc une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné, par exemple, par $\vec{e}_1 = (-2,2,3)$.
Notons E_{-2} le sous-espace propre associé à la valeur propre -2,

$$E_{-2} = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A.\vec{u} = -2\vec{u}\}.$$

Ainsi

$$\vec{u} = (x,y,z) \in E_{-2} \iff \begin{matrix} -2x-2y-2z = 0 \\ 2x+2y+2z = 0 \\ 3x+3y+3z = 0 \end{matrix} \iff x+y+z = 0$$

Le sous-espace propre E_{-2} est donc le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$, dont une base est donnée, par exemple, par $\vec{e}_2 = (1,-1,0)$ et $\vec{e}_3 = (1,0,-1)$.

(c) *Démontrons que A est diagonalisable et donnons une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres sont de dimension la multiplicité de la valeur propre correspondante, ce qui prouve que la matrice A est diagonalisable. Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$la matrice de l'endomorphisme associé à A est diagonale, elle s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(d) *Trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

La matrice de changement de base qui exprime la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des vecteurs propres, trouvés ci-dessus, dans la base canonique est la matrice P cherchée

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

elle est inversible et on a $P^{-1}AP = D$. (Le calcul de P^{-1} n'était pas demandé, ni nécessaire).

Correction de l'exercice 3179 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Calculons les valeurs propres de A et voyons si l'endomorphisme u est diagonalisable.*

En opérant sur les colonnes et les lignes du déterminant, on obtient

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1-X & -X \end{vmatrix},$$

d'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 2 & 0 & -X-1 \end{vmatrix}$$

et, en développant par rapport à la deuxième colonne

$$P_A(X) = (1-X)[(3-X)(-1-X)+4] = (1-X)(X^2-2X+1) = (1-X)^3.$$

Ainsi, la matrice A admet 1 comme valeur propre triple. Elle n'est donc pas diagonalisable, sinon elle serait égale à $I = I_3$, la matrice identité.

(b) *Calculons $(A-I)^2$ et démontrons que $A^n = nA + (1-n)I$.*

On calcule d'abord la matrice $A - I$,

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

puis la matrice $(A-I)^2$,

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est donc la matrice nulle.

Nous allons donner deux méthodes pour démontrer que $A^n = nA + (1-n)I$.

Première méthode : En utilisant le binôme de Newton. On écrit $A^n = (A - I + I)^n$, or, les matrices $A - I$ et I commutent, on a donc

$$(A-I+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{(n-k)} = C_n^0 I + C_n^1 (A-I) = I + n(A-I) = nA + (1-n)I.$$

Deuxième méthode : Par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Fixons n arbitrairement pour lequel on suppose que $A^n = nA + (1-n)I$, on a alors

$$A^{n+1} = A(nA + (1-n)I) = nA^2 + (1-n)A,$$

sachant que $(A-I)^2 = 0$, on en déduit que $A^2 = 2A - I$ ainsi

$$A^{n+1} = n(2A - I) + (1-n)A = (n+1)A - nI = (n+1)A + (1-(n+1))I.$$

L'égalité est donc vraie pour tout $n \in |||$.

Correction de l'exercice 3180 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(a) *Déterminons les valeurs propres de A.*

Calculons les racines du polynôme caractéristique $P_A(X)$:

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2(1-X).$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 2$, valeur propre double.

(b) *Déterminons, sans calculs, des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$.*

Si l'on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la base dans laquelle est exprimée la matrice A de l'endomorphisme f, on remarque que

$$f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Ainsi, les vecteurs $\vec{u} = \vec{e}_2$ et $\vec{v} = \vec{e}_3$ répondent-ils à la question.

(c) *Soit $\vec{e}$ tel que $f(\vec{e}) = \vec{e}$. Démontrons que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrivons la matrice de f dans cette base.*

Notons $\vec{e} = (x, y, z)$ alors

$$f(\vec{e}) = \vec{e} \iff \begin{cases} x = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{e} = (1, 1, 0)$ convient. Les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des vecteurs (x,y,z) tels que

$$\begin{cases} x = 2x \\ -x+2y+z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

C'est une droite vectorielle, sa dimension n'est donc pas égale à la multiplicité de la valeur propre 2 comme racine du polynôme caractéristique, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 3181 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ *associé.*

(a) *Déterminons et factorisons le polynôme caractéristique de A.*

On note $P_A(X)$ le polynôme caractéristique, on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 \\ -1 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)^2(1-X).$$

La matrice A admet deux valeurs propres, 1, valeur propre simple, et -1, valeur propre double.

(b) *Déterminons les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A.*

La valeur propre 1 est simple, le sous-espace propre associé est égal au sous-espace caractéristique, c'est l'ensemble

$$E_1 = N_1 = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = \vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ x-y = y \\ -x+2y-z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

L'espace E_1 est une droite vectorielle dont un vecteur directeur $\vec{e}_1$ est donné, par exemple, par $\vec{e}_1 = (2,1,0)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est défini par

$$E_{-1} = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = -\vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_{-1} \iff \begin{cases} x = -x \\ x-y = -y \\ -x+2y-z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'espace E_{-1} est une droite vectorielle dont un vecteur directeur $\vec{e}_2$ est donné, par exemple, par $\vec{e}_2 = (0,0,1)$. La dimension de E_{-1} n'est pas égale à la multiplicité de la racine, la matrice n'est pas diagonalisable. Déterminons le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre -1. Pour cela calculons la matrice $(A+I)^2$.

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{-1} = \ker(A+I)^2 = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\}$$

Le sous-espace caractéristique N_{-1} est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $e_2 = (0,0,1)$ et $e_3 = (0,1,0)$.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouvons une matrice P inversible telle que $AP = PB$ (ou $A = PBP^{-1}$).

On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = (2,1,0)$ et $\vec{e}_2 = (0,0,1)$ et on cherche un vecteur $\vec{e} \in N_{-1}$ tel que $f(\vec{e}) = 2\vec{e}_2 - \vec{e}$. Notons $\vec{e} = (0,y,z)$,

$$f(\vec{e}) = 2\vec{e}_2 - \vec{e} \iff y = 1,$$

le vecteur $\vec{e} = \vec{e}_3 = (0,1,0)$ convient, on pouvait le voir directement sur la deuxième colonne de la matrice A. Ainsi, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1 = (2,1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,0,1)$ et $\vec{e}_3 = (0,1,0)$, la matrice de f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P cherchée est la matrice de passage qui exprime la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $AP = PB$ ou $A = PBP^{-1}$. On peut calculer P^{-1}, c'est la matrice qui exprime les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.*

On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}.$$

Il est clair que la matrice D est diagonalisable puisque diagonale, on vérifie facilement que $N^2 = 0$, c'est-à-dire que la matrice N est nilpotente et que les deux matrices commutent, $DN = ND$. Ainsi la décomposition $B = D + N$ est bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

(e) *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$.

On utilise la décomposition de Dunford de la matrice tB, $tB = tD + tN$, on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD).\exp(tN)$$

car les matrices commutent, par ailleurs, comme D est diagonale, on a

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

et comme $N^2 = 0$, on a

$$\exp(tN) = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(f) *Donnons les solutions des systèmes différentiels $y' = By$ et $x' = Ax$, où x et y désignent des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.*

Les solutions du système différentiel $y'(t) = B.y(t)$ sont les fonctions $y(t) = \exp(tB).V$ où V est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Donc

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix},$$

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Pour trouver les solutions du système différentiel $x'(t) = A.x(t)$, on utilise le fait suivant

$$P.y \quad \text{est solution de} \quad x' = A.x \iff y \quad \text{est solution de} \quad y' = (P^{-1}AP).y = B.y.$$

Ainsi, les solutions du système $x' = A.x$ s'écrivent

$$x(t) = P.\exp(tB).V$$

où V est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On remarque qu'il n'est pas utile de calculer la martrice P^{-1}. C'est-à-dire

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ae^t \\ ae^t + ce^{-t} \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \end{pmatrix},$$

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3182 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?*

Déterminons le polynôme caractéristique de la matrice A.

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & a-X & 0 \\ 0 & a-2 & 2-X \end{vmatrix} = -X(a-X)(2-X).$$

Ce polynôme admet trois racines $0, a$ et 2. Ainsi, si $a \notin \{0,2\}$ la matrice est diagonalisable. Examinons les cas $a = 0$ et $a = 2$.

Si $a = 0$, la valeur propre 0 est valeur propre double, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à 0 est égal à $\ker A = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A\vec{u} = \vec{0}\}$,

$$\vec{u} \in \ker A \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 0 est une droite vectorielle, la droite engendrée par $(1,0,0)$, la matrice n'est donc pas diagonalisable.

Si $a = 2$, la valeur propre 2 est double, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à 2 est égal à $E_2 = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A\vec{u} = 2\vec{u}\}$,

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff y = 2x.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est un plan vectoriel, le plan d'équation $y = 2x$, la matrice est donc diagonalisable.

Ainsi la matrice A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$.

Lorsque A est diagonalisable, déterminons une base de vecteurs propres de A.

On a $a \neq 0$ et on distingue les cas $a \neq 2$ et $a = 2$.

Si $a \neq 2$, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 2 sont lisibles sur la matrice, on a

$$E_0 = \ker A = \mathbb{R}.(1,0,0) \quad \text{et} \quad E_2 = \mathbb{R}.(0,0,1),$$

On détermine $E_a = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A\vec{u} = a\vec{u}\}$.

$$\vec{u} \in E_a \iff \begin{cases} y = ax \\ ay = ay \\ (a-2)y + 2z = az \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ (a-2)y = (a-2)z \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ y = z \end{cases}$$

C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e} = (1,a,a)$. Ainsi, une base de vecteurs propres est donnée par les vecteurs $(1,0,0),(0,0,1)$ et $(1,a,a)$.

Si $a = 2$, nous avons vu que le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est le plan d'équation $y = 2x$. Ainsi, une base de vecteurs propres est donnée par les vecteurs $(1,0,0),(0,0,1)$ et $(1,2,0)$.

(b) *Soit E l'espace vectoriel des solutions du système $x' = Ax$, où x est une fonction de la variable réelle t à valeur dans $\mathbb{R}^3$.*

i. *Lorsque A est diagonalisable, donnons une base de E en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de A et écrivons la solution générale du système.*

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de A et $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ les vecteurs propres associés, on sait qu'une base de l'espace des solutions du système différentiel $x' = Ax$ est donnée par

$$e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1,\ e^{\lambda_2 t}\vec{e}_2,\ e^{\lambda_3 t}\vec{e}_3.$$

Ainsi, si $a \neq 2$ cette base est donnée par

$$(1,0,0),\ e^{2t}(0,0,1),\ e^{at}(1,a,a)$$

et si $a = 2$, elle est donnée par

$$(1,0,0),\ e^{2t}(0,0,1),\ e^{2t}(1,2,0).$$

ii. *Lorsque A n'est pas diagonalisable, intégrons directement le système $X' = AX$.*

Lorsque A n'est pas diagonalisable, $a = 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le système $X' = AX$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \\ z' = -2y + 2z \end{cases}$$

Si $y' = 0$, alors $y(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, si $x' = \alpha$, $x(t) = \alpha t + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ et la troisième équation devient

$$z' = 2z - 2\alpha$$

et sa solution s'écrit $z(t) = \gamma e^{2t} + \alpha$, $\gamma \in \mathbb{R}$. D'où la solution générale du système

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \alpha \\ \gamma e^{2t} + \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

(c) *Soit E_0 l'ensemble des éléments s de E tels que $\lim_{t \to +\infty} s(t) = \vec{0}$. Démontrons que E_0 est un sous-espace vectoriel de E.*

Pour démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de démontrer que $0_E \in E_0$ et que E_0 est stable par combinaison linéaire. La fonction nulle est clairement dans E_0, par ailleurs, si s_1 et s_2 sont dans E_0 et si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) = \vec{0}$$

ce qui prouve que $a_1 s_1 + a_2 s_2 \in E_0$.

Déterminons sa dimension en fonction de a.

Nous avons, dans tous les cas, une base de l'espace des solutions, donc l'écriture de la solution générale, on regarde alors les solutions de E qui sont dans E_0.

1er cas : $a \neq 2$ et $a \neq 0$, la solution générale s'écrit

$$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,e^{2t}) + \gamma(e^{at}, ae^{at}, ae^{at}),\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, si $a > 0$, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$,
et si $a < 0$, $s(t) \in E_0 \iff \alpha = \beta = 0$, $\dim E_0 = 1$.

2ème cas : $a = 2$, la solution générale s'écrit

$$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,e^{2t}) + \gamma(e^{2t}, 2e^{2t}, 0),\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$.

3ème cas : $a = 0$, la solution générale s'écrit

$$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,e^{2t}) + \gamma(t,1,1),\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$.

(d) *Soit F l'ensemble des éléments s de E bornés sur $[0, +\infty[$. Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de E.*

Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de démontrer que $0_E \in F$ et que F est stable par combinaison linéaire. La fonction nulle est clairement dans F, par ailleurs, si s_1 et s_2 sont dans E_0 et si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$, donc dans F.

Déterminons sa dimension en fonction de a.

Comme dans le cas précédent, suivant la forme de la solution générale, on a
si $a \geqslant 0$, les seules solutions bornées sur $[0, +\infty[$ sont de la forme
$s(t) = \alpha(1,0,0)$, $\alpha \in R$, ainsi $\dim F = 1$.
si $a < 0$, les seules solutions bornées sur $[0, +\infty[$ sont de la forme
$s(t) = \alpha(1,0,0) + \gamma(e^{at}, ae^{at}, ae^{at})$, $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2$, $\dim F = 2$.

Correction de l'exercice 3183 ▲

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.*

On a

$$\begin{aligned} P_{A_\alpha}(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X)+\alpha+1] \\ &= -(X+1)[X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha]. \end{aligned}$$

Factorisons le polynôme $X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha$, son discriminant est égal à

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

On a donc $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, ce qui nous donne les deux racines

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

Le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ se factorise donc en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

(b) *Déterminons selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.*

Les valeurs propres de A_α sont les racines du polynôme caractéristique P_{A_α}, ainsi,

- si $\alpha = 0$, la matrice A_α admet une valeur propre triple $\lambda = -1$,

- si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ valeur propre double et $\lambda_2 = \alpha - 1$, valeur propre simple.

(c) *Déterminons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.*

Il est clair que dans le cas $\alpha = 0$, la matrice n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait une matrice inversible P telle que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, ce qui n'est pas le cas.

Si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2. Déterminons ce sous-espace propre.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha + I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+(\alpha+1)z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y+\alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

Il faut distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$.

- Si $\alpha = -1$, le sous-espace E_{-1} est le plan vectoriel d'équation $x = y$, dans ce cas la matrice A_α est diagonalisable.

- Si $\alpha \neq -1$, le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$, dans ce cas la matrice A_α n'est pas diagonalisable.

(d) *Déterminons selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.*

Notons Q_A le polynôme minimal de A_α. On sait que la matrice A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ et que celles-ci sont simples. Or, nous venons de démontrer que A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement $\alpha = -1$, on a donc

- Si $\alpha = -1$, A_α est diagonalisable, donc $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.
- Si $\alpha \neq -1$, on doit distinguer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$, en effet,
- si $\alpha \neq 0$, A_α n'est pas diagonalisable donc les racines de Q_A ne sont pas toutes les deux simples, et P_A admet deux racines distinctes, donc

$$Q_A(X) = -P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1).$$

- si $\alpha = 0$, on a $P_A(X) = -(X+1)^3$ et A_0 n'est pas diagonalisable, le polynôme minimal peut donc être égal à $(X+1)^2$ ou à $(X+1)^3$, or

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc le polynôme minimal Q_A est égal à $(X+1)^3$.

II

On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A. On a donc

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_A(X) = -(X+1)^3$.

(a) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*

La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = -1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_{-1} = \ker(A+I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$.

Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = -1$, est le sous-espace $N_{-1} = \ker(A+I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A+I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_{-1} = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

(b) *Démontrons que le sous-espace vectoriel $\ker(A+I)^2$ est un plan stable par f.*

On a $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$, le sous-espace $\ker(A+I)^2$ est clairement stable par A car pour tout $v \in \ker(A+I)^2$, $Av \in \ker(A+I)^2$, en effet

$$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

Démontrons que ce sous-espace est un plan. On a

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\ker(A+I)^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z = 0\}$, c'est bien un plan vectoriel.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Nous cherchons des vecteurs e_1,e_2,e_3 tels que $Ae_1=e_1$, $Ae_2=e_1-e_2$ et $Ae_3=e_2-e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1=\ker(A+I)$, et $\ker(A+I)$ est la droite d'équations :
$\{z=0,x-y=0\}$; nous choisirons $e_2\in\ker(A+I)^2$ tel que (e_1,e_2) soit une base de $\ker(A+I)^2$. Remarquons que si l'on cherche $e_2=(x,y,z)$ tel que $Ae_2=e_1-e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-2&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x\\1-y\\-z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-x+z=1-x\\x-2y=1-y\\-x+y=-z\end{cases}\iff\begin{cases}z=1\\x-y=1\end{cases}$$

ce qui nous donne bien un vecteur de $\ker(A+I)^2$. Ainsi, les vecteurs $e_1=(1,1,0)$ et $e_2=(1,0,1)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3=e_2-e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-2&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x\\-y\\1-z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-x+z=1-x\\x-2y=-y\\-x+y=1-z\end{cases}\iff\begin{cases}z=1\\x=y\end{cases}$$

Le vecteur $e_3=(0,0,1)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A=PBP^{-1}$,

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

(d) *Décomposition de Dunford de B*
On a

$$B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à $-I$. Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B=D+N$ et $DN=ND$. Or si

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\ \text{ et }\ N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

On a

$$N^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

et $N^3=0$. La décomposition $B=D+N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

(e) *Pour $t\in\mathbb{R}$, calculons $\exp tB$ et exprimons $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.*
On a $N^3=0$ donc pour tout $t\in\mathbb{R}$, $(tN)^3=0$ et l'exponentielle est égale à

$$\exp(tN)=I+tN+(t^2/2)N^2,$$

par ailleurs $ND=DN$, donc pour tout $t\in\mathbb{R}$, les matrices tN et tD commutent également, $(tN)(tD)=(tD)(tN)$, on a donc

$$\exp(tB)=\exp(tD+tN)=\exp(tD)\exp(tN)=\exp(-tI)\exp(tN)=e^{-t}I\left(I+tN+\frac{t^2}{2}N^2\right)$$

D'où

$$\exp(tB)=e^{-t}\begin{pmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'exponentielle de la matrice tA, on écrit

$$\exp(tA)=\exp(t(PBP^{-1}))=\exp(P(tA)P^{-1})=P\exp(tB)P^{-1}.$$

(f) *Solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.*

La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit

$$S(t) = \exp(tB)v$$

où $v = (a,b,c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. La solution $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit donc

$$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a + bt + c\frac{t^2}{2} \\ b + ct \\ c \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la solution du système $X' = AX$, on écrit

$$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X)$$

ainsi, en notant $Y = P^{-1}X$ ou encore $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où P est la matrice vérifiant $A = PBP^{-1}$ et S une solution du système $Y' = BY$.

La solution générale du système $X' = AX$ s'écrit donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}(a + bt + c\frac{t^2}{2}) \\ e^{-t}(b + ct) \\ e^{-t}c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} (a+b) + (c+b)t + c\frac{t^2}{2} \\ a + bt + c\frac{t^2}{2} \\ (b+c) + ct \end{pmatrix}$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

III

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = -1$, on note $A = A_{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) *Vérifions que la matrice A est diagonalisable.*

Nous avons vu dans la partie $I)3)$ que lorsque $\alpha = -1$, la matrice est diagonalisable, en effet, dans ce cas, elle admet deux valeurs propres : -1, valeur propre double et -2, valeur propre simple. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 étant le plan d'équation $x = y$.

(b) *Diagonalisons la matrice A.*

Pour cela déterminons une base de vecteurs propres. Le plan $x = y$ est engendré par les vecteurs $u(1,1,0)$ et $v(0,0,1)$, déterminons un vecteur directeur de la droite E_{-2} :

$$E_{-2} = \ker(A_\alpha + 2I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-2} \iff \begin{cases} -x = -2x \\ x - 2y = -2y \\ -x + y - z = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $w(0,1,-1)$. Ainsi, dans la base (u,v,w) la matrice est diagonale et s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $A = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) *Donnons les solutions du système différentiel $X' = A.X$.*

Si on note $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où S une solution du système $Y' = DY$. Ainsi, la solution générale du système $X' = A.X$ s'écrit

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \\ ce^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ ae^{-t} + be^{-t} \\ be^{-t} + ce^{-2t} \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

IV

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 1$, on note $A = A_1$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*

La matrice A admet deux valeurs propres : -1, valeur propre double et 0, valeur propre simple. Le sous-espace propre E_{-1}, associé à la valeur propre -1, est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 0)$. Déterminons le sous-espace E_0 :

$$E_0 = \ker(A) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x, y, z) \in E_0 \iff \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ x = 2y \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_0 est la droite vectorielle engendrée par $(2, 1, 1)$. Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 0 est le sous-espace propre E_0. Déterminons le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre double -1 c'est l'espace vectoriel $\ker(A + I)^2$. On a

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\ker(A + I)^2$ est le plan vectoriel d'équation $-x + y + 2z = 0$, engendré par les vecteurs $(1, 1, 0) \in E_{-1}$ et $(2, 0, 1)$.

(b) *Trigonalisons la matrice A.*

Dans la base (u, v, w) où $u(2, 1, 1)$, $v(1, 1, 0)$ et $w(2, 0, 1)$ la matrice est triangulaire, il existe λ tel que $A.w = \lambda v - w$.

$$A.w = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $A = PTP^{-1}$ où

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3184 ▲

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose $a+c = b+d = 1$ et $a-b \neq 1$.

(a) Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tels que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

On montre que $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

On a

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

d'où $y_1 + y_2 = ax_1 + bx_2 + cx_1 + dx_2 = (a+c)x_1 + (b+d)x_2 = x_1 + x_2$.

(b) *Soit le vecteur* $\vec{x} = (1, -1)$*, vérifions que* $\vec{x}$ *est un vecteur propre de A, et déterminons sa valeur propre.*

$$A.\vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix},$$

or $c - d = (1-a) - (1-b) = -(a-b)$, car $a+b = c+d = 1$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ -(a-b) \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le vecteur $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $a-b$.

(c) *Déterminons le polynôme caractéristique de A et calculons ses racines.*

Tout d'abord, compte tenu de l'hypothèse $a+b = c+d = 1$, nous écrirons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ 1-a & 1-b-X \end{vmatrix} = (a-X)(1-b-X) - b(1-a) = X^2 - (a-b+1)X + (a-b).$$

On sait, d'après la question précédente que $a-b$ est racine de ce polynôme, or, le produit des racines est égal à $a-b$ et la somme à $a-b+1$, ainsi la seconde racine est égale é 1.

(d) *Déterminons un vecteur propre,* $\vec{y}$*, de A non colinéaire à* $\vec{x}$ *et exprimons la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base* $(\vec{x}, \vec{y})$.

Un vecteur propre non colinéaire à $\vec{x}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1. Ainsi, si on note $\vec{y} = (y_1, y_2)$, on a

$$A\vec{y} = \vec{y} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} ay_1 + by_2 = y_1 \\ (1-a)y_1 + (1-b)y_2 = y_2 \end{cases} \iff (a-1)y_1 + by_2 = 0.$$

Le vecteur $\vec{y} = (b, 1-a)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Correction de l'exercice 3185 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E, si $\vec{u}$ est un vecteur de E on note (x,y,z) ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ 2x+2z \\ 4x-2y+4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) *Ecrivons la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.*
On a $f(\vec{e}_1) = (-1,2,4)$, $f(\vec{e}_2) = (1,0,-2)$ et $f(\vec{e}_3) = (-1,2,4)$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) *Déterminons les sous-espaces* $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.
Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3) = f(\vec{e}_1)$, c'est donc le plan vectoriel engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1) = (-1,2,4)$ et $f(\vec{e}_2) = (1,0,-2)$ qui sont clairement linéairement indépendants.
Pour le noyau, on a $\ker f = \{\vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{0}\}$, ainsi,

$$\vec{u} = (x,y,z) \in \ker f \iff \begin{cases} -x+y-z = 0 \\ 2(x+z) = 0 \\ 4x-2y+4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

C'est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{v} = (1,0,-1)$.

(c) Soient $\vec{u}_1 = (1,0,-1)$, $\vec{u}_2 = (1,2,0)$ et $\vec{u}_3 = (0,1,1)$. *Démontrons que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E.*
Pour cela nous allons vérifier que le déterminant de leurs coordonnées est non nul,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0.$$

Ainsi, les trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de E, car E est de dimension 3.

(d) *Calculons $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminons la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.*
On a $f(\vec{u}_1) = \vec{0}$,

$$f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}_2.$$

$$f(\vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{u}_3.$$

Ainsi la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) *Déterminons les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.*

D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont $0, 1$ et 2, et les vecteurs propres sont $\vec{u}_1$ pour la valeur propre 0, $\vec{u}_2$ pour la valeur propre 1 et $\vec{u}_3$ pour la valeur propre 2.

Correction de l'exercice 3186 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On cherche à déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

(a) *Démontrons que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n.*

Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, on a alors

$$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-1)^n,$$

ce qui implique n pair, car un carré est toujours positif.

(b) On suppose maintenant que $n = 4$.

i. *Démontrons que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} \neq 0$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.*

Soit $\vec{x} \in E$, on suppose $\vec{x} \neq 0$, supposons qu'il existe des réels a, b tels que $a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0}$, on a alors

$$a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \Longrightarrow f(a\vec{x} + bf(\vec{x})) = \vec{0} \Longrightarrow af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0},$$

car $f^2 = -\mathrm{id}_E$. Or,

$$\begin{cases} a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0} \end{cases} \Longrightarrow (a^2 + b^2)\vec{x} = \vec{0},$$

ce qui implique $a^2 + b^2 = 0$ car $\vec{x} \neq \vec{0}$, et, donc $a = b = 0$. Ce qui prouve que les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.

ii. Soit $\vec{x}_1 \neq 0$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$.

A. *Démontrons que F est stable par f.*

Soit $\vec{x} \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)$, d'où

$$f(\vec{x}) = f(a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)) = af(\vec{x}_1) + bf^2(\vec{x}) = af(\vec{x}_1) - b\vec{x}_1 \in F.$$

D'où la stabilité de F par f.

B. Soit $\vec{x}_2 \in E$, on suppose que $\vec{x}_2 \notin F$.

Démontrons que $\mathscr{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$ est une base de E. La dimension de E étant égale à 4, il suffit de démontrer que les vecteurs sont linéairement indépendants. Supposons qu'il existe $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a_1\vec{x}_1 + b_1 f(\vec{x}_1) + a_2\vec{x}_2 + b_2 f(\vec{x}_2) = \vec{0},$$

on a alors,

$$a_2\vec{x}_2 + b_2 f(\vec{x}_2) \in F,$$

et, comme F est stable par f,

$$f(a_2\vec{x}_2 + b_2 f(\vec{x}_2)) = a_2 f(\vec{x}_2) - b_2\vec{x}_2 \in F.$$

Ce qui implique

$$(a_2^2 + b_2^2)\vec{x}_2 \in F \quad \text{d'où} \quad a_2^2 + b_2^2 = 0$$

car on a supposé $\vec{x}_2 \notin F$. On a donc $a_2 = b_2 = 0$ et, par conséquent, $a_1\vec{x}_1 + b_1 f(\vec{x}_1) = 0$, or les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$ sont linéairement indépendants, ce qui implique $a_1 = b_1 = 0$. D'où l'indépendance des vecteurs $\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2)$.

iii. *Ecrivons la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.*
On calcule les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}$. On a $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_1)$, $f(f(\vec{x}_1)) = -\vec{x}_1$, $f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_2)$, $f(f(\vec{x}_2)) = -\vec{x}_2$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv. *Calculons* $\det f$ *et* $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a, en développant par blocs,

$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

De même,

$$\det(\lambda \mathrm{id}_E - f) = \det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2.$$

v. *L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?*
Les valeurs propres réelles de f sont les réels λ qui annulent $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$, ce sont donc les réels λ tels que $\lambda^2 + 1 = 0$. Ainsi, f n'admet pas de valeurs propres réelles.

Correction de l'exercice 3187 ▲

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) *Donnons les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette décomposition de $A = D + N$ est sa décomposition de Dunford si et seulement si N est nilpotente (il est clair que D est diagonale) et si $ND = DN$. Vérifions que N est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi la matrice N est bien nilpotente quelques soient les valeurs de a et b. Déterminons pour quelles valeurs de a et b les matrices commutent.

$$N.D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D.N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $ND = DN$ si et seulement si $b = 2b$, c'est-à-dire si $b = 0$. Le paramètre a peut prendre n'importe quelle valeur.

(b) On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i. *Déterminons les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A.*

Commençons par déterminer les valeurs propres de A, ce qui est immédiat car A est sous forme triangulaire. Elle admet donc deux valeurs propres, 1 valeur propre double et 2 valeur propre simple.

Notons E_1 et E_2 les sous-espaces propres de A.

$$E_1 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = \vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x + ay = x \\ y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'espace E_1 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 0, 0)$, ce sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 est de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

$$E_2 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = 2\vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x + ay = 2x \\ y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = ay \\ y = z \end{cases}$$

L'espace E_2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(a, 1, 1)$. La valeur propre 2 étant simple, le sous-espace caractéristique N_2 associé est égal à l'espace E_2.

Déterminons le sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1. On a
$N_1 = \ker(A - I)^2$. Calculons la matrice $(A - I)^2$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le noyau de $(A - I)^2$ est le plan engendré par les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$.

ii. *Déterminons D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et*

$$A = D + N.$$

Notons $\vec{e}_3 = (a, 1, 1)$, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la matrice associée à l'endomorphisme représenté par A s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M}.$$

Par construction, c'est la décomposition de Dunford de B et on a $A = PBP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $D = P\Delta P^{-1}$ et $N = PMP^{-1}$ vérifient, N nilpotente, D diagonalisable et $ND = DN$. Calculons les

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A - D.$$

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N + D = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit le système différentiel suivant :

$$\mathscr{E} : \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminons les solutions de $\mathscr{E}$.
Remarquons que, si l'on note $X = (x_1, x_2, x_3)$, le système $\mathscr{E}$ s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la matrice A précédente avec $a = 2$ et $b = 1$. La solution générale du système s'écrit

$$X(t) = \exp(tA)V$$

où $V = (a, b, c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Par ailleurs $X = PY$ est solution de $X' = AX \iff Y$ est solution de $Y' = \underbrace{P^{-1}AP}_{B}Y$. La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit $Y = \exp(tB)V$ où $V \in \mathbb{R}^3$. Calculons donc l'exponentielle de la matrice tB pour $t \in \mathbb{R}$. On a vu dans la question précédente que $B = \Delta + M$ avec $\Delta M = M\Delta$, ainsi

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \exp(t\Delta).\exp(tM) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.(I + tM) \quad \text{car } M^2 = O \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution générale du système $\mathscr{E}$ s'écrit donc $X = P\exp(tB).V$ où $V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. C'est-à-dire

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où encore

$$\begin{cases} x_1(t) = (a+2bt)e^t + 2ce^{2t} \\ x_2(t) = be^t + ce^{2t} \\ x_3(t) = ce^{2t} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3188 ▲

Questions préliminaires :

(a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ.

Démontrons que $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

On a $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, et, par récurrence sur n, pour tout $n \in |||$, $u^n(\vec{x}) = \lambda^n\vec{x}$. Notons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, l'endomorphisme $P(u)$ vérifie

$$\begin{aligned} P(u)(\vec{x}) &= (a_0\mathrm{id}_E + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_du^d)(\vec{x}) \\ &= a_0\vec{x} + a_1\lambda\vec{x} + a_2\lambda^2\vec{x} + \cdots + a_d\lambda^d\vec{x} \\ &= P(\lambda)\vec{x} \end{aligned}$$

ce qui prouve que le vecteur $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Théorème de Hamilton-Cayley. Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit P le polynôme caractéristique de u, alors $P(u) = 0$ (le zéro étant celui de l'ensemble des endomorphisme de E)

Version matricielle : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice et P_A son polynôme caractéristique, alors $P_A(A) = 0$ (le zéro étant celui de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

(a) *Déterminons les valeurs propres de A.*

Pour cela calculons son polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -9 & 1-X & 9 \\ 9 & 0 & -8-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(-8-X).$$

La matrice A admet deux valeurs propres, 1 valeur propre double et -8 valeur propre simple.

Déterminons une base de vecteurs propres de A.

Soit $\vec{u} = (x,y,z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1, on a

$$A.\vec{u} = \vec{u} \iff \begin{cases} x = x \\ -9x + y + 9z = y \\ 9x - 8z = z \end{cases} \iff x = z$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est un plan vectoriel dont les vecteurs $\vec{e}_1 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_2 = (1,0,1)$ forment une base.

Soit $\vec{u} = (x,y,z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre -8, on a

$$A.\vec{u} = -8\vec{u} \iff \begin{cases} x = -8x \\ -9x + y + 9z = -8y \\ 9x - 8z = -8z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre -8 est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_3 = (0,1,-1)$.

Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ci-dessus forment une base de E composée de vecteurs propres de A.

Diagonalisons A.

Dans cette base, la matrice s'écrit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ et on a $A = PDP^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

i. *Démontrons que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.*

On considère le polynôme $P(X) = X^3$, on applique la question préliminaire a). Si λ est une valeur propre de B, alors $P(\lambda) = \lambda^3$ est une valeur propre de $A = P(B) = B^3$.

ii. *Déterminons les valeurs propres de B et leur multiplicité.*

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de B (elles existent toujours dans $\mathbb{C}$) et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les vecteurs propres associés, alors ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3$. Sachant que les valeurs propres de A sont 1,1 et -8, on a $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 1$ et $\lambda_3^3 = -8$. Ainsi les valeurs propres de B sont 1 de multiplicité 2 et -2 de multiplicité 1.

iii. *Ecrivons le polynôme caractéristique de B.*

Compte tenu de la question précédente, on a

$$P_B(X) = (1-X)^2(-2-X).$$

iv. *Déterminons B telle que $B^3 = A$.*

On a $P_B(X) = (1-X)^2(-2-X) = -X^3 + 3X - 2$, or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_B(B) = 0$, c'est-à-dire $-B^3 + 3B - 2I = 0$, par conséquent

$$A = B^3 = 3B - 2I.$$

Ainsi, $B = 1/3(A + 2I)$, d'où,

$$B = 1/3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 9 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3189 ▲

(a) $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 3190 ▲

(a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -5 & 12 & 12 \\ -3 & 9-\sqrt{57} & 9+\sqrt{57} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3-\sqrt{57}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3+\sqrt{57}}{2} \end{pmatrix}$

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(d) $P = \begin{pmatrix} -7 & 5+3\sqrt{5} & 5-3\sqrt{5} \\ 11 & -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 2 & 5+5\sqrt{5} & 5-5\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

(e) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(f) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(h) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(i) $P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(j) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Correction de **l'exercice 3191 ▲**

(a) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 30 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -99 \\ 0 & 0 & 21 & 99 \\ 0 & 1 & -11 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$

(e) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -8 \\ 3 & 1 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(f) 1 est valeur propre quadruple, non diagonalisable.

(g) 0 est valeur propre quadruple, non diagonalisable.

(h) 0 est vp double, $\mathrm{rg}A = 2$. Autres vp : $\frac{-3\pm 3\sqrt{13}}{2}$, diagonalisable.

Correction de l'exercice 3192 ▲

$$n \text{ pair} : P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \dots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & \dots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{pmatrix}, D = \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1).$$

$$n \text{ impair} : P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & \dots & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & & -1 & & \\ & \dots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & -1 \end{pmatrix}, D = \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1).$$

Correction de l'exercice 3193 ▲

$P = \left(\omega^{(i-1)(1-j)}\right)$, $D = \mathrm{diag}(1,\omega,\dots,\omega^{n-1})$ avec $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

Correction de l'exercice 3194 ▲

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \mathrm{diag}\,(a+b+c+e, a-b-c+e, -a+b-c+e, -a-b+c+e).$$

Correction de l'exercice 3196 ▲

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & & (0) \\ & 2 & 2 & \ddots & \\ & & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ & & & \ddots & n \\ (0) & & & & n(n+1) \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3197 ▲

Oui ssi $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ ou $A = 0$.

Correction de l'exercice 3198 ▲

Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$ et de plus, si a est le coefficient de X^{2n} dans P, le coefficient de X^{2n+1} dans $f(P)$ est $2na-2na=0$. Donc $f(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. La linéarité de f étant claire, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
Cherchons maintenant P polynôme non nul et λ réel tels que $f(P)=\lambda P$ ce qui équivaut à

$$\frac{P'}{P}=\frac{2nX+\lambda}{X^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2n+\lambda}{X-1}-\frac{-2n+\lambda}{X+1}\right).$$

En identifiant à la décomposition en éléments simples classique de $\frac{P'}{P}$ (à savoir si $P=K(X-z_1)^{\alpha_1}\dots(X-z_k)^{\alpha_k}$ avec $K\neq 0$ et les z_i deux à deux distincts, alors $\frac{P'}{P}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{X-z_i}$), on voit que nécessairement P ne peut admettre pour racines dans $\mathbb{C}$ que -1 et 1 et d'autre part que P est de degré $\frac{1}{2}(2n+\lambda+2n-\lambda)=2n$. P est donc nécessairement de la forme

$$P=aP_k \text{ avec } a\in\mathbb{R}^* \text{ et } P_k=(X-1)^k(X+1)^{2n-k} \text{ avec } k\in[\![0,2n]\!].$$

Réciproquement, chaque P_k est non nul et vérifie

$$\frac{P_k'}{P_k}=\frac{k}{X-1}+\frac{2n-k}{X+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2n+(2k-2n)}{X-1}+\frac{2n-(2k-2n)}{X+1}\right).$$

Donc, pour chaque $k\in[\![0,2n]\!]$, P_k est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_k=2(k-n)$.
Ainsi, f admet $2n+1$ valeurs propres, nécessairement simples car $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X]=2n+1)$. f est donc diagonalisable et les sous espaces propres de f sont les droites $\text{Vect}(P_k)$, $0\leqslant k\leqslant 2n$.

Correction de l'exercice 3199 ▲

$\det M=\det\begin{pmatrix}A&4A\\A&A\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-3A&4A\\0&A\end{pmatrix}$ $(\forall k\in[\![1,n]\!], L_k\leftarrow L_k-L_{n+k})$ et donc $\det M=\det(A)\det(-3A)=(-3)^n(\det A)^2$.

$$\boxed{\det M=(-3)^n(\det A)^2.}$$

L'idée de l'étude de M qui suit vient de l'étude de la matrice de format 2, $B=\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}$.

Une diagonalisation rapide amène à $B=\begin{pmatrix}-2&2\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&2\\1&2\end{pmatrix}$. Soit alors P la matrice de format $2n$ définie par blocs par $P=\begin{pmatrix}-2I_n&2I_n\\I_n&I_n\end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que P est inversible et que $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-I_n&2I_n\\I_n&2I_n\end{pmatrix}$ puis que

$$P^{-1}MP=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-I_n&2I_n\\I_n&2I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&4A\\A&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2I_n&2I_n\\I_n&I_n\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}A&-2A\\3A&6A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2I_n&2I_n\\I_n&I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A&0\\0&3A\end{pmatrix}.$$

On pose $N=\begin{pmatrix}-A&0\\0&3A\end{pmatrix}$. Puisque les matrices M et N sont semblables, M et N ont même polynôme caractéristique et de plus M est diagonalisable si et seulement si N l'est.

Cherchons les vecteurs propres Z de N sous la forme $Z=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ où X et Y sont des vecteurs colonnes de format n. Sois $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$NZ=\lambda Z\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-A&0\\0&3A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\Leftrightarrow -AX=\lambda X \text{ et } 3AY=\lambda Y.$$

Par suite

Z est vecteur propre de N associé à $\lambda \Leftrightarrow (X \neq 0$ ou $Y \neq 0)$ et $(X \in \text{Ker}(A+\lambda I)$ et $Y \in \text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right))$.

Une discussion suivant λ s'en suit :
1er cas. Si $-\lambda$ et $\frac{\lambda}{3}$ ne sont pas valeurs propres de A alors λ n'est pas valeur propre de M.
2ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\frac{\lambda}{3}$ n'y est pas, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X \\ X \end{pmatrix}$ où X décrit $\text{Ker}(A+\lambda I)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\text{Ker}(A+\lambda I)$.
3ème cas. Si $-\lambda$ n'est pas dans SpA et $\frac{\lambda}{3}$ y est, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Y \\ Y \end{pmatrix}$ où Y décrit $\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim\left(\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.
4ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\frac{\lambda}{3}$ aussi, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X+2Y \\ X+Y \end{pmatrix}$ où X décrit $\text{Ker}(A+\lambda I)$ et Y décrit $\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\text{Ker}(A+\lambda I)) + \dim\left(\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.
Dans tous les cas, $\dim(E_\lambda(M)) = \dim(E_{-\lambda}(A)) + \dim(E_{\lambda/3}(A))$ (et en particulier $\dim(\text{Ker}M) = 2\dim(\text{Ker}A)$).
Comme les applications $\lambda \mapsto -\lambda$ et $\lambda \mapsto \frac{\lambda}{3}$ sont des bijections de $\mathbb{C}$ sur lui-même,

$$\begin{aligned}
A \text{ est diagonalisable} &\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = n \\
&\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = 2n \\
&\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_{-\lambda}(A)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_{\lambda/3}(A)) = 2n \\
&\Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable.}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3200 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = e_{n+1-i}$ et donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^2(e_i) = e_i$. Donc f est une symétrie distincte de l'identité et en particulier Sp$A = \{-1, 1\}$ et f est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3201 ▲

A est de format 2 et donc, soit a deux valeurs propres distinctes et est dans ce cas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, soit a une valeur propre double λ non nulle car Tr$A = 2\lambda \neq 0$.
Dans ce dernier cas, A^2 est diagonalisable et est donc est semblable à $\text{diag}(\lambda^2, \lambda^2) = \lambda^2 I$. Par suite, $A^2 = \lambda^2 I$. Ainsi, A annule le polynôme $X^2 - \lambda^2 = (X-\lambda)(X+\lambda)$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Dans ce cas aussi, A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3202 ▲

Trouvons un polynôme scindé à racines simples annulant f.
Le polynôme $P = X(X-\lambda)(X-\mu) = X^3 - (\lambda+\mu)X^2 + \lambda\mu X$ est annulateur de f. En effet,

$$\begin{aligned}
P(f) = f^3 - (\lambda+\mu)f^2 + \lambda\mu f &= (\lambda^3 - (\lambda+\mu)\lambda^2 + (\lambda\mu)\lambda)u + (\mu^3 - (\lambda+\mu)\mu^2 + (\lambda\mu)\mu)v \\
&= P(\lambda)u + P(\mu)v = 0.
\end{aligned}$$

• Si λ et μ sont distincts et non nuls, P est un polynôme scindé à racines simples annulateur de f et donc f est diagonalisable.
• Si $\lambda = \mu = 0$, alors $f = 0$ et donc f est diagonalisable.
• Si par exemple $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$, $f^2 = \lambda^2 u = \lambda f$ et et le polynôme $P = X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f. Dans ce cas aussi f est diagonalisable.
• Enfin si $\lambda = \mu \neq 0$, $f^2 = \lambda^2(u+v) = \lambda f$ et de nouveau $P = X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f.
Dans tous les cas, f est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3203 ▲

(Si les a_k sont réels, la matrice A est symétrique réelle et les redoublants savent que la matrice A est diagonalisable.)
Si tous les a_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont nuls la matrice A est diagonalisable car diagonale.
On suppose dorénavant que l'un au moins des a_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, est non nul. Dans ce cas, $\mathrm{rg}A = 2$.
0 est valeur propre d'ordre $n-2$ au moins. Soient λ et μ les deux dernières valeurs propres. On a

$$\lambda + \mu = \mathrm{Tr}A = a_n \text{ et } \lambda^2 + \mu^2 = \mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2.$$

λ et μ sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu = a_n\\ \lambda^2+\mu^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2\end{array}\right.$ qui équivaut au système $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu = a_n\\ \lambda^2+\mu^2 = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2\end{array}\right.$ (S).
On a alors les situations suivantes :
• Si λ et μ sont distincts et non nuls, A est diagonalisable car l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.
• Si λ ou μ est nul, A n'est pas diagonalisable car l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différent de $n-2$, la dimension du noyau de A.
• Si $\lambda = \mu \neq 0$, A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(A-\lambda I) = n-2$ mais on peut noter que si λ n'est pas nul, on a toujours $\mathrm{rg}(A-\lambda I) = n-1$ en considérant la matrice extraite formée des n-1 premières lignes et colonnes.
En résumé, la matrice A est diagonalisable si et seulement si le système (S) admet deux solutions distinctes et non nulles.
Mais λ et μ sont solutions du système (S) si et seulement si λ et μ sont les racines de l'équation (E) : $X^2 - a_n X - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$. Par suite, A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$.

Correction de l'exercice 3205 ▲

3. $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3206 ▲

(a) 1 si $C \neq 0$, 0 si $C = 0$.
(b) $\dim(E_0) \geqslant n-1 \Rightarrow X^{n-1}$ divise $\chi_M \Rightarrow \chi_M = (-1)^n(X^n - (a_1^2 + \cdots + a_n^2)X^{n-1})$.
(c) Oui.

Correction de l'exercice 3207 ▲

$\mathrm{rg}A = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}A = n-1$ et 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-1$. La somme des valeurs propres est $\mathrm{tr}A = n$ donc la drenière valeur propre est n et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Donc A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3208 ▲

(a) La fonction $f_n : x \mapsto \frac{P_n(x)}{x^n}$ croît strictement de $-\infty$ à 1 quand x varie de 0 à $+\infty$.

(b) $\chi_A(x) = (-1)^n\left(x^n - \sum_{k=1}^n kx^{n-k}\right)$.

Correction de l'exercice 3209 ▲

Soit $M = (x_i y_j)$: M est de rang inférieur ou égal à 1, donc 0 est valeur propre de M d'ordre au moins $n-1$. Comme $\operatorname{tr}(M) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(x) = (-x)^{n-1}(x_1y_1 + \dots + x_ny_n - x)$, et le déterminant demandé est $\Delta_n = \chi_M(-1) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n + 1$.

Correction de l'exercice 3210 ▲

(a) $\det(M + (t))$ est une fonction affine de t.

(b) $|\lambda + a| = k|\lambda + b|$ et $\lambda = x + iy \Rightarrow (1-k^2)(x^2+y^2) + \dots = 0$, équation d'un cercle si $|a| \neq |b|$.

Correction de l'exercice 3211 ▲

(a) $a_1 \dots a_n + b_1a_2 \dots a_n + a_1b_2a_3 \dots a_n + \dots + a_1 \dots a_{n-1}b_n$.

(b)

(c) $\frac{\chi_A(t)}{\prod_{i=1}^n (a_i - t)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i - t}$ change de signe entre deux a_i successifs et dans l'un des intervalles $]-\infty, a_1[$ ou $]a_n, +\infty[$ donc χ_A admet n racines distinctes.

(d) Oui. Supposons par exemple $a_1 = \dots = a_p < a_{p+1} < \dots < a_n$: La question précédente met en évidence $n-p$ racines simples de χ_A entre les a_i et $\pm\infty$, et a_1 est aussi racine d'ordre $p-1$ de χ_A. Or les p premières lignes de $A - a_1I$ sont égales donc $\operatorname{rg}(A - a_1I) \leqslant n - p + 1$ et $\dim(\operatorname{Ker}(A - a_1I)) \geqslant p-1$ d'où la diagonalisabilité. Le cas où il y a plusieurs groupes de a_i égaux se traite de même.

Correction de l'exercice 3212 ▲

$\chi_B(X) = \frac{(-X)^n}{\det(A)}\chi_A(1/X), \quad \chi_C(X^2) = \chi_A(X)\chi_A(-X)$.

Correction de l'exercice 3215 ▲

$(a) \Leftrightarrow (b)$: thm du rang.

$(c) \Leftrightarrow (d)$: immédiat.

$(c) \Rightarrow (b)$: si $AX = XB$ alors pour tout polynôme P on a $P(A)X = XP(B)$.

$\overline{(c)} \Rightarrow \overline{(b)}$: prendre U vecteur propre de A, V vecteur propre de ${}^tB$ associés à la même valeur propre et $X = U^tV$.

Correction de l'exercice 3218 ▲

Somme des valeurs propres $= n$.

Correction de l'exercice 3220 ▲

Soit $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il faut en fait prouver que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ on a $\operatorname{tr}(A^p) = \operatorname{tr}(A)$. Remarquer qu'on n'a pas forcément $A^p = A$ dans $\mathscr{M}_n(K)$, c'est faux, entre autres, si A est nilpotente d'indice 2. Soit X une indéterminée sur K. On a dans l'anneau $\mathscr{M}_n(K[X])$: $(A - XI_n)^p = A^p - X^pI_n$, d'où, en prenant les déterminants : $\chi_{A^p}(X^p) = \chi_A(X)^p = \chi_A(X^p)$ et on égale les coefficients de $X^{(n-1)p}$.

Correction de l'exercice 3221 ▲

Si $p=q$, le résultat est connu : $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

Supposons par exemple $p<q$. On se ramène au cas de matrices carrées en complétant. Soient $A'=\begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q}\end{pmatrix}$ et $B'=\begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p}\end{pmatrix}$. A' et B' sont des matrices carrées de format q et $A'B'$ et $B'A'$ ont même polynôme caractéristique.

Un calcul par blocs donne $B'A'=BA$ et $A'B'=\begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & 0_{p,q-p} \\ 0_{q-p,p} & 0_{q-p,q-p}\end{pmatrix}$.

Donc $\chi_{BA}=(-X)^{q-p}\chi_{AB}$ ou encore, avec une écriture plus symétrique, $(-X)^p\chi_{BA}=(-X)^q\chi_{AB}$ ce qui vrai dans tous les cas.

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall B\in\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K}),\ (-X)^p\chi_{BA}=(-X)^q\chi_{AB}.}$$

Correction de l'exercice 3222 ▲

Si u est inversible,

$$\det(u+v)=\det u\Leftrightarrow \det u\times\det(Id+u^{-1}v)=\det u\Leftrightarrow\det(Id+u^{-1}v)=1.$$

u et v commutent et donc u^{-1} et v également car $uv=vu\Rightarrow u^{-1}uvu^{-1}=u^{-1}vuu^{-1}\Rightarrow vu^{-1}=u^{-1}v$. Mais alors, puisque v est nilpotent, l'endomorphisme $w=u^{-1}v$ l'est également car $(u^{-1}v)^p=u^{-p}v^p$).

Il reste donc à calculer $\det(Id+w)$ où w est un endomorphisme nilpotent. On remarque que $\det(Id+w)=\chi_w(-1)$. Il est connu que 0 est l'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent et donc $\chi_w=(-X)^n$ puis

$$\det(Id+w)=\chi_w(-1)=(-(-1))^n=1.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où u est inversible. Si u n'est pas inversible, $u+xId$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de x et commute toujours avec v. Donc, pour tout x sauf peut-être pour un nombre fini, $\det(u+xId+v)=\det(u+xId)$. Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ils prennent en particulier la même valeur en 0 ce qui refournit $\det(u+v)=\det u$.

Correction de l'exercice 3223 ▲

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA=-A$. Dans ce cas

$$\chi_A=\det(A-XI)=\det({}^t(A-XI))=\det(-A-XI)=(-1)^n\det(A+XI)=(-1)^n\chi_A(-X)$$

Ainsi, χ_A a la parité de n.

Correction de l'exercice 3224 ▲

Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ la famille des valeurs propres de A. On a donc $\chi_A=(\lambda_1-X)\dots(\lambda_n-X)$.

$$\begin{aligned}\chi_A(B)\text{ inversible}&\Leftrightarrow(B-\lambda_1I)...(B-\lambda_nI)\text{ inversible}\\&\Leftrightarrow\forall k\in[\![1,n]\!],\ B-\lambda_kI\text{ inversible (car }\det((B-\lambda_1I)...(B-\lambda_nI))=\det(B-\lambda_1I)\times...\times\det(B-\lambda_nI\\&\Leftrightarrow\forall k\in[\![1,n]\!],\ \lambda_k\text{ n'est pas valeur propre de }B\\&\Leftrightarrow\mathrm{Sp}A\cap\mathrm{Sp}B=\varnothing.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3225 ▲

Si P et χ_f sont premiers entre eux, d'après le théorème de BÉZOUT, il existe deux polynômes U et V tels que $UP+V\chi_f=1$. En prenant la valeur en f et puisque que $\chi_f(f)=0$, on obtient $P(f)\circ U(f)=U(f)\circ P(f)=Id$. $P(f)$ est donc un automorphisme de E.

Réciproquement, si P et χ_f ne sont pas premiers entre eux, P et χ_f ont une racine commune λ dans $\mathbb{C}$. Soit A est la matrice de f dans une base donnée (si $\mathbb{K}$ n'est pas $\mathbb{C}$ l'utilisation de la matrice est indispensable). On a $P(A)=(A-\lambda I)Q(A)$ pour un certain polynôme Q. La matrice $A-\lambda I$ n'est pas inversible car λ est valeur propre de A et donc $P(A)$ n'est pas inversible ($\det(P(A))=\det(A-\lambda I)\det Q(A)=0$).

Correction de l'exercice 3240 ▲

(a) Valeurs propres : $1,j,j^2$. sev stables : $\{\vec{0}\}$, $\text{vect}\{\vec{e}_3\}$, $\text{vect}\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ et $\mathbb{R}^3$.

(b) $\left.\begin{array}{l} AB=BA \quad \Rightarrow \phi_B(\vec{e}_3)=\lambda\vec{e}_3 \\ {}^tA{}^tB={}^tB{}^tA \Rightarrow \phi_{{}^tB}(\vec{e}_3)=\lambda\vec{e}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} a+\mu & a & 0 \\ -3a & -2a+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$

Correction de l'exercice 3242 ▲

Soit $\varphi(x,y,z)=x+2y+3z$. f conserve la surface de niveau $\varphi=1$ donc par linéarité $f\circ\varphi=\varphi$ et φ est vecteur propre de ${}^tf$.

Correction de l'exercice 3245 ▲

Si χ_u est irréductible, pour $x\neq 0$ le polynôme minimal de x en u est égal à χ_u donc le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E et il n'y a pas de sous-espace stable non trivial.

Si seuls $\{0\}$ et E sont stables, soit $x\neq 0$. Le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E donc l'annulateur minimal de u en x est égal à χ_u. Soit P un diviseur non trivial de χ_u et $y=P(u)(x)$: l'annulateur minimal de u en y est χ_u/P, absurde.

Correction de l'exercice 3246 ▲

Soit F un hyperplan de E, $<e>$ un supplémentaire stable et H un supplémentaire de $<e>$ stable. Si K est un sev de H, alors K admet un supplémentaire K' dans E stable et $H\cap K'$ est un sev de H stable, en somme directe avec K. $K'\not\subset H$ car $K\subset H$ et $K\oplus K'=E$ donc $K'+H=E$ et $\dim(H\cap K')=\dim(H)+\dim(K')-\dim(E)=\dim(H)-\dim(K)$ soit $K\oplus(H\cap K')=H$. $f_{|H}$ vérifie la même propriété que f et on obtient par récurrence que f est diagonalisable.

Réciproquement, soit f diagonalisable, F un sev de E et $(e_1,\dots,e_n)$ une base propre pour f. On montre que F admet un supplémentaire stable par récurrence sur $\text{codim}(F)$: si $F=E$ alors $\{0\}$ convient et si $F\neq E$ alors il existe i tel que $e_i\notin F$ d'où $F\oplus<e_i>$ est un sur-espace strict de F, admettant un supplémentaire G stable, d'où $G\oplus<e_i>$ est supplémentaire de F stable.

Correction de l'exercice 3247 ▲

$\text{Spec}(f)=\{0,1,2\}$ donc f est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1. Comme la restriction d'un diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable, les sous-espaces stables par f sont les huit sous-sommes de $E_0\oplus E_1\oplus E_2$.

Correction de l'exercice 3248 ▲

(a) $\chi_A=\begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}=(1-X)(X^2-2X)-(2-X)+(2-X)=-X(X-1)(X-2).$

On est dans le cas d'une matrice diagonalisable avec 3 valeurs propres simples.

Recherche des droites stables. Dans chacun des cas, les droites stables sont les droites engendrées par des vecteurs propres. On obtient immédiatement les 3 droites stables : $E_0 = \mathrm{Vect}(e1)$ où $e_1 = (1,-1,0)$, $E_1 = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (1,-1,-1)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0,1,1)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. La restriction de f à P est un endomorphisme de P et on sait de plus que le polynôme caractéristique de $f_{/P}$ divise celui de f. $f_{/P}$ est diagonalisable car f l'est car on dispose d'un polynôme scindé à racines simples annulant f et donc $f_{/P}$. On en déduit que P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de $f_{/P}$ qui sont encore vecteurs propres de f. On obtient trois plans stables : $P_1 = \mathrm{Vect}(e_2,e_3)$, $P_2 = \mathrm{Vect}(e_1,e_3)$ et $P_3 = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$.

(b) $\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 1 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-5X+4)-(-2X+2)+(X-1) = (1-X)((X-2)(X-4)-2-1) = (1-X)(X^2+6X-5) = -(X-1)^2(X-5)$. Puis E_1 est le plan d'équation $x+2y+z=0$ et $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

On est toujours dans le cas diagonalisable mais avec une valeur propre double.

Les droites stables sont $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et n'importe quelle droite contenue dans E_1. Une telle droite est engendrée par un vecteur de la forme $(x,y,-x-2y)$ avec $(x,y) \neq (0,0)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. f est diagonalisable et donc $f_{/P}$ est un endomorphisme diagonalisable de P. Par suite, P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de f. On retrouve le plan propre de f d'équation $x+2y+z=0$ et les plans engendrés par $(1,1,1)$ et un vecteur quelconque non nul du plan d'équation $x+2y+z=0$. L'équation générale d'un tel plan est $(-a-3b)x+(2a+2b)y+(b-a)z = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$.

(c) $\chi_A = \begin{vmatrix} 6-X & -6 & 5 \\ -4 & -1-X & 10 \\ 7 & -6 & 4-X \end{vmatrix} = (6-X)(X^2-3X+56)+4(6X+6)+7(5X-55) = -X^3+9X^2-15X-25 = -(X+1)(X^2-10X+25) = -(X+1)(X-5)^2$.

$E_{-1} = \mathrm{Vect}(10,15,4)$ et $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. On est dans le cas où A admet une valeur propre simple et une double mais n'est pas diagonalisable. Les droites stables par f sont les deux droites propres.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. Le polynôme caractéristique de $f_{/P}$ est unitaire et divise celui de f. Ce polynôme caractéristique est donc soit $(X-1)(X-5)$ soit $(X-5)^2$. Dans le premier cas, $f_{/P}$ est diagonalisable et P est nécessairement le plan $\mathrm{Vect}((10,15,4)) + \mathrm{Vect}((1,1,1))$ c'est-à-dire le plan d'équation $11x-6y-5z=0$.

Dans le deuxième cas, $\chi_{f_{/P}} = (X-5)^2$ et 5 est l'unique valeur propre de $f_{/P}$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que $(f_{/P}-5Id)^2 = 0$ et donc P est contenu dans $\mathrm{Ker}(f-5Id)^2$. $\mathrm{Ker}(f-5Id)^2$ est le plan d'équation $x = z$ qui est bien sûr stable par f car $(f-5Id)^2$ commute avec f.

Correction de l'exercice 3249 ▲

F est stable par f et donc $f_{/F}$ est un endomorphisme de F. f est diagonalisable et donc il existe un polynôme P, scindé à racines simples, tel que $P(f) = 0$. Mais alors $P(f_{/F}) = 0$ et on a trouvé un polynôme scindé à racines simples annulateur de $f_{/F}$. Donc $f_{/F}$ est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3256 ▲

(a) 1 est valeur propre double, $d_1 = 1$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix}1&0&6\\0&0&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(e) $X=\begin{pmatrix}(6\alpha t+\gamma)e^t+2\beta\\(6\alpha t+\gamma+3\alpha)e^t+\beta\\(6\alpha t+\gamma-\alpha)e^t+2\beta\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3259 ▲

0 est valeur propre, se placer dans un hyperplan stable et récurer.

Correction de l'exercice 3260 ▲

Non. Prendre $\mathrm{mat}(u_n)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1/n\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3261 ▲

Trigonaliser fortement M.

Correction de l'exercice 3262 ▲

Montrons le résultat par récurrence sur $n=\dim E\geqslant 1$.

• Si $n=1$, c'est clair.

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension n qui commutent soient simultanément trigonalisables.

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ tels que $fg=gf$.

f et g ont au moins un vecteur propre en commun. En effet, f admet au moins une valeur propre λ. Soit E_λ le sous-espace propre de f associé à λ. g commute avec f et donc laisse stable E_λ. La restriction de g à E_λ est un endomorphisme de E_λ qui est de dimension finie non nulle. Cette restriction admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à f et g.

Commençons à construire une base de trigonalisation simultanée de f et g. Soit x un vecteur propre commun à f et g. On complète la famille libre (x) en une base $\mathscr{B}=(x,\ldots)$ de E. Dans la base $\mathscr{B}$, les matrices M et N de f et g s'écrivent respectivement $M=\begin{pmatrix}\lambda&\times\\0&M_1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}\mu&\times\\0&N_1\end{pmatrix}$ où M_1 et N_1 sont de format n. Un calcul par blocs montre que M_1 et N_1 commutent ou encore si f_1 et g_1 sont les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ de matrices M_1 et N_1 dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, f_1 et g_1 commutent. Par hypothèse de récurrence, f_1 et g_1 sont simultanément trigonalisables. Donc il existe une matrice inversible de format n P_1 et deux matrices triangulaires supérieures de format n T_1 et T_1' telles que $P_1^{-1}M_1P_1=T_1$ et $P_1^{-1}N_1P_1=T_1'$.

Soit $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&P_1\end{pmatrix}$. P est inversible de format $n+1$ car $\det P=\det P_1\neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ sont triangulaires supérieures.

P est donc la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base de trigonalisation simultanée de f et g.

Correction de l'exercice 3270 ▲

On considère la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique de A.*

On a

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(X^2-2X)+(1-X) \\
&= (1-X)(X^2-2X+1) = (1-X)^3.
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de A admet une valeur propre triple $\lambda = 1$.

(b) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*

La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_1 = \ker(A-I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_1 \iff \begin{cases} x-y = x \\ x-z = y \\ -x+2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Le sous-espace E_1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,0,1)$.

Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = 1$, est le sous-espace $N_1 = \ker(A-I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A-I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_1 = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 + e_2$ et $Ae_3 = e_2 + e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A-I)$, et $\ker(A-I)$ est la droite d'équations :
$\{y = 0, x = z\}$. On détermine $e_2 = (x,y,z)$ tel que $Ae_2 = e_1 + e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-y = 1+x \\ x-z = y \\ -x+2z = 1+z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x-z = -1 \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (-1,-1,0)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 + e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-y = x-1 \\ x-z = y-1 \\ -x+2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = z \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0,1,0)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) *Décomposition de Dunford de B*

On a
$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à I. Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B=D+N$ et $DN=ND$. Or si
$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ \text{ et }\ N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
On a
$$N^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
et $N^3=0$. La décomposition $B=D+N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

Correction de l'exercice 3271 ▲

Soit A la matrice
$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&3&-1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique de A.* (1 point)

On a
$$\begin{aligned}P_A(X)&=\begin{vmatrix}3-X&2&4\\-1&3-X&-1\\-2&-1&-3-X\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}-1-X&2&4\\0&3-X&-1\\1+X&-1&-3-X\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}-1-X&2&4\\0&3-X&-1\\0&1&1-X\end{vmatrix}\\&=(-1-X)(X^2-4X+4)=-(X+1)(X-2)^2\end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1=-1$, valeur propre simple et $\lambda_2=2$, valeur propre double.

(b) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.* (2 points)

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est le sous-espace vectoriel E_{-1} défini par
$$E_{-1}=\{\vec{u}\in\mathbb{R}^3,\ A\vec{u}=-u\}.$$

Soit $\vec{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,
$$\vec{u}\in E_{-1}\iff\begin{cases}4x+2y+4z=0\\-x+4y-z=0\\-2x-y-2z=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x+y+2z=0\\x-4y+z=0\end{cases}$$

L'espace E_{-1} est une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné par
$$\vec{u}_1=(1,0,-1).$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le sous-espace vectoriel E_2 défini par

$$E_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = 2u\}.$$

Soit $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ -x+y-z=0 \\ -2x-y-5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

L'espace E_2 est une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné par

$$\vec{u}_2 = (2,1,-1).$$

Le sous-espace E_2 étant de dimension 1, la matrice A n'est pas diagonalisable.
Le sous-espace caractéristique N_{-1} associé à la valeur propre -1 est égal au sous-espace propre E_{-1}. Le sous-espace caractéristique N_2 associé à la valeur propre 2 est égal à

$$N_2 = \ker(A-2I)^2.$$

Déterminons-le

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

D'où $\ker(A-2I)^2 = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3,\ x+2z=0\}$, c'est le plan vectoriel d'équation $x+2z=0$.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est* (1 point)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, vecteurs propres associés aux valeurs propres -1 et 2 conviennent pour les deux premiers vecteurs de la base recherchée, on va alors chercher un vecteur $\vec{u}_3 \in \ker(A-2I)^2$ tel que $A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, notons $\vec{u}_3 = (-2z,y,z)$, on détermine y et z tels que

$$\begin{pmatrix} 2y-2z \\ 3y+z \\ -y+z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4z \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

on obtient $y+z=1$, le vecteur $\vec{u}_3 = (0,1,0)$ convient.
Trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. (1 point)
La matrice de passage P qui exprime la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ répond à la question,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.* (1 point)
On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N},$$

la matrice D est diagonale, la matrice N est nilpotente, $N^2 = 0$, et $ND = DN$, c'est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

(e) *Calculons* $\exp B$. (1 point)

Compte tenu de la question précédente, on a $B = N + D$, avec $DN = ND$, ainsi $\exp B = \exp D \exp N$, or

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \text{ et } \exp N = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp B = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3274 ▲

On se ramène à $\lambda = 0$ en remplaçant f par $f - \lambda \mathrm{id}$. $\mathrm{Im} f$ est de dimension 1 stable par f donc $f_{|\mathrm{Im} f}$ est une homothétie, c'est l'application nulle vu $\mathrm{Spec}(f)$. On en déduit $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$. Soit $e_2 \in \mathrm{Im} f \setminus \{0\}$, e_3 un antécédent de e_2 par f et $e_1 \in \mathrm{Ker} f$ indépendant de e_2. Alors $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ convient.

Correction de l'exercice 3275 ▲

Posons $\chi_f = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{\alpha_k}$ où λ_1,..., λ_p sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Soit $E'_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_k, $1 \leqslant k \leqslant p$.
D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E = E'_1 \oplus \ldots \oplus E'_p$. De plus, si f_k est la restriction de f à E'_k alors f_k est un endomorphisme de E'_k (car f et $(f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ commutent).
On note que $(f_k - \lambda_k)^{\alpha_k} = 0$ et donc λ_k est l'unique valeur propre de f_k car toute valeur propre de f_k est racine du polynôme annulateur $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.
Existence de d et n. On définit d par ses restrictions d_k aux E'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$: d_k est l'homothétie de rapport λ_k. Puis on définit n par $n = f - d$.
d est diagonalisable car toute base de E adaptée à la décomposition $E = E'_1 \oplus \ldots \oplus E'_p$ est une base de vecteurs propres de d. De plus, $f = d + n$.
Soit n_k la restriction de n à E'_k. On a $n_k = f_k - \lambda_k Id_{E'_k}$ et par définition de E'_k, $n_k^{\alpha_k} = 0$. Mais alors, si on pose $\alpha = \mathrm{Max}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, on a $n_k^{\alpha} = 0$ pour tout k de $\{1, \ldots, p\}$ et donc $n^{\alpha} = 0$. Ainsi, n est nilpotent.
Enfin, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, n_k commute avec d_k car d_k est une homothétie et donc $nd = dn$.
Unicité de d et n. Supposons que $f = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $nd = dn$.
d commute avec n et donc avec f car $df = d^2 + dn = d^2 + nd = fd$. Mais alors, $n = f - d$ commute également avec f. d et n laissent donc stables les sous-espaces caractéristiques E'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$ de f. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note d_k et n_k les restrictions de d et n à E'_k.
Soient $k \in [\![1, p]\!]$ puis μ une valeur propre de d_k. D'après l'exercice 3222,

$$\det(f_k - \mu Id) = \det(d_k - \mu Id + n) = \det(d_k - \mu Id) = 0,$$

car $d_k - \mu Id$ n'est pas inversible. On en déduit que $f_k - \mu Id$ n'est pas inversible et donc que μ est valeur propre de f_k. Puisque λ_k est l'unique valeur propre de f_k, on a donc $\mu = \lambda_k$. Ainsi, λ_k est l'unique valeur propre de d_k et puisque d_k est diagonalisable (voir l'exercice 3249), on a nécessairement $d_k = \lambda_k Id_{E'_k}$ puis $n_k = f_k - \lambda_k Id_{E'_k}$. Ceci montre l'unicité de d et n.

Correction de l'exercice 3283 ▲

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. $\chi_A = (2 - X)(\omega - X)(\bar{\omega} - X)$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$\ker(A - 2I) = \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \ker(A - \omega I) \Leftrightarrow \left\{\begin{smallmatrix} (1-\omega)x + y = 0 \\ (1-\omega)y + z = 0 \\ (1-\omega)z + x = 0 \end{smallmatrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{smallmatrix} y = (\omega - 1)x \\ z = (\omega - 1)^2 x \end{smallmatrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{smallmatrix} y = \omega^2 x \\ z = \omega^4 x \end{smallmatrix}\right.$ donc $\ker(A - \omega I) = \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{smallmatrix}\right)$

On en déduit que $\ker(A-\bar{\omega}I)=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\\bar{\omega}^2\\\bar{\omega}^4\end{pmatrix}$

Ainsi en posant $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\omega^2&\bar{\omega}^2\\1&\omega^4&\bar{\omega}^4\end{pmatrix}$ on obtient $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\bar{\omega}\end{pmatrix}$

On en déduit que les solutions sont les suites de la forme $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega^n&0\\0&0&\bar{\omega}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ soit : $\begin{cases}x_n= a+b\ \ \omega^n\ \ +c\ \ \bar{\omega}^n\\ y_n= a+b\ \ \omega^{n+2}\ \ +c\ \ \bar{\omega}^{n+2}\\ z_n= a+b\ \ \omega^{n+4}\ \ +c\ \ \bar{\omega}^{n+4}\end{cases}$

où a,b,c sont trois complexes.

En résolvant le système $\begin{cases}a+b+c&=2\\a+b\omega^2+c\bar{\omega}^2&=1\\a+b\omega^4+c\bar{\omega}^4&=1\end{cases}$ on obtient la solution particulière cherchée : c'est la solution associée à $a=4/3, b=c=1/3$.

$$\begin{cases}x_n= & 4/3 & + & 2/3\cos(n\pi/3)\\ y_n= & 4/3 & + & 2/3\cos((n+2)\pi/3)\\ z_n= & 4/3 & + & 2/3\cos((n+4)\pi/3)\end{cases}$$

Correction de l'exercice 3285 ▲

(a) $A^tA=(a^2+b^2+c^2+d^2)\mathrm{id}$. Ainsi $\det A*\det{}^tA=(\det A)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ et donc $\det A=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

(b) Dans l'expression $\det A=\sum_{\sigma\in S_4}\varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\dots\alpha_{4\sigma(4)}$ où les coefficients de A sont notés α_{ij}, le seul terme en a^4 est obtenu pour $\sigma=\mathrm{id}$, soit $\varepsilon(\sigma)=+1$. On en déduit que $\det A=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Pour obtenir le polynôme caractéristique de A, on remplace a par $a-X$ dans A, et on calcule le déterminant. On a donc $\chi_A=((a-X)^2+b^2+c^2+d^2)^2$

(c) $\forall\lambda\in\mathbb{R},\chi_A(\lambda)>0$ car $(b,c,d)\neq(0,0,0)$. Donc A n'a pas de valeur propre réelle, donc A n'est ni diagonalisable ni triangularisable sur $\mathbb{R}$.

(d) $A(i\sqrt{3},1,1,1)=(1-i\sqrt{3}(i\sqrt{3},1,1,1))$ et $A(-1,i\sqrt{3},-1,1)=(1-i\sqrt{3}(-1,i\sqrt{3},-1,1))$. Pour la seconde valeur propre, qui est le conjugué de $1-i\sqrt{3}$, on utilise les vecteurs conjugués. Ainsi, en posant $P=\begin{pmatrix}i\sqrt{3}&-1&-i\sqrt{3}&-1\\1&i\sqrt{3}&1&-i\sqrt{3}\\1&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2\bar{\omega}&0&0&0\\0&2\bar{\omega}&0&0\\0&0&2\omega&0\\0&0&0&2\omega\end{pmatrix}=D$.

(e) Soit $X_n=(u_n,v_n,w_n,h_n)$. On a $\forall n\in|||,X_{n+1}=AX_n$, d'où $\forall n\in|||,X_n=A^nX_0$. Or $A^nX_0=PD^nP^{-1}X_0$. On en déduit que $X_n=\begin{pmatrix}2^n\bar{\omega}^ni\sqrt{3}&-2^n\bar{\omega}^n&-2^n\omega^ni\sqrt{3}&-2^n\omega^n\\2^n\bar{\omega}^n&2^n\bar{\omega}^ni\sqrt{3}&2^n\omega^n&-2^n\omega^ni\sqrt{3}\\2^n\bar{\omega}^n&-2^n\bar{\omega}^n&2^n\omega^n&-2^n\omega^n\\2^n\bar{\omega}^n&2^n\bar{\omega}^n&2^n\omega^n&2^n\omega^n\end{pmatrix}$. Posons $Y_0=P^{-1}X_0$. En résolvant le système $PX_0=Y_0$, on obtient $Y_0=(1/2i\sqrt{3},0,-1/2i\sqrt{3},0)$, et finalement :

$$X_n=1/2i\sqrt{3}\begin{pmatrix}2^n(\bar{\omega}^n+\omega^n)i\sqrt{3}\\2^n(\bar{\omega}^n-\omega^n)\\2^n(\bar{\omega}^n-\omega^n)\\2^n(\bar{\omega}^n-\omega^n)\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3}\\-\sin\frac{n\pi}{3}\\-\sin\frac{n\pi}{3}\\-\sin\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 3302 ▲

La suite de Fibonacci $0,1,1,2,3,5,8,13,\dots$ *est la suite* $(F_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par la relation de récurrence* $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ *pour* $n\geqslant 1$*, avec* $F_0=0$ *et* $F_1=1$.

(a) *Déterminons une matrice* $A\in M_2(\mathbb{R})$ *telle que, pour tout* $n\geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix}.$$

On a $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$.

Notons, pour $n \geqslant 1$, X_n le vecteur $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous allons démontrer, par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 1$, on a $X_n = A^n X_0$, c'est clairement vrai pour $n = 1$, supposons que ce soit vrai pour un n arbitrairement fixé, on a alors

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0,$$

d'où le résultat.

(b) *Montrons que A admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.*

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - X - 1.$$

Le discriminant $\Delta = 5 > 0$, le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(c) *Trouvons des vecteurs propres ε_1 et ε_2 associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Posons $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et calculons α tel que $A\varepsilon_1 = \lambda_1 \varepsilon_1$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + 1 = \lambda_1 \alpha \\ \alpha = \lambda_1 \end{cases} \iff \alpha = \lambda_1$$

car $\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 = 0$, on a donc $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, de même, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) *Déterminons les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on les note x_1 et x_2.*

On cherche x_1 et x_2 tels que

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 = x_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

x_1 et x_2 sont donc solutions du système

$$\begin{cases} x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \\ x_2 = -\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

(e) *Montrons que $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2$.*

Les vecteurs ε_1 et ε_2 étant vecteurs propres de A, on a $A\varepsilon_1 = \lambda_1 \varepsilon_1$ et $A\varepsilon_2 = \lambda_2 \varepsilon_2$, ainsi par récurrence, on a, pour tout $n \geqslant 1$, $A^n \varepsilon_1 = \lambda_1^n \varepsilon_1$ et $A^n \varepsilon_2 = \lambda_2^n \varepsilon_2$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n (x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2) = x_1 A^n \varepsilon_1 + x_2 A^n \varepsilon_2 = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2.$$

On en déduit que

$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}\ .$$

On a montré que $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}$, on a donc,

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix} = \lambda_1^n\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2^n\left(\frac{-1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix},$$

d'où le résultat

$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}\ .$$

(f) *Donnons un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.*
On remarque que $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ ainsi, lorsque n tend vers l'infini, λ_1^n tend vers 0 et λ_2^n tend vers $+\infty$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda_2-\lambda_1)\frac{F_n}{\lambda_2^n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n}+1 = 1.$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\lambda_2^n}{\lambda_2-\lambda_1}$ est un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 3303 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

(a) *Factorisons le polynôme caractéristique de A.*
Le polynôme caractéristique de A est le polynôme

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1\\ -1 & 1-X & 1\\ 0 & -1 & -X\end{vmatrix} &= (2-X)\begin{vmatrix}1-X & 1\\ -1 & -X\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-1 & 1-X\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ &= (2-X)(X^2-X+1)-1\\ &= -X^3+3X^2-3X+1 = (1-X)^3\end{aligned}$$

(b) *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*
La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$, comme $A \neq I$, elle n'est pas diagonalisable. Son sous-espace caractéristique est égal à $\ker(A-I_3)^3 = \mathbb{R}^3$. En effet, d'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $P_A(A) = 0$, c'est-à-dire $(A-I_3)^3 = 0$. Son sous-espace propre est égal à $\ker(A-I_3)$.

$$\ker(A-I_3) = \{\vec{u}\in\mathbb{R}^3 /\ A\vec{u} = \vec{u}\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ x = z = -y\}.$$

C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}_1 = (1,-1,1)$.

(c) *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Le vecteur $\vec{u}_1$ vérifie $A\vec{u}_1 = u_1$, on cherche un vecteur $\vec{u}_2 = (x,y,z)$ tel que $A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

$$A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 2x-z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix}$$

On obtient donc $z-x = z+y = -1$, le vecteur $\vec{u}_2 = (1,-1,0)$ convient. On cherche alors un vecteur $\vec{u}_3 = (x,y,z)$ tel que $A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

$$A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \iff \begin{pmatrix} 2x-z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix}$$

on obtient alors $x+y = x-z = 1$. Le vecteur $\vec{u}_3 = (1,0,0)$ convient. Ainsi, dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la matrice de f est égale à B. La matrice P cherchée est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a bien $A = PBP^{-1}$ et $B = P^{-1}AP$.

(d) *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.*
On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + N$$

Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. La matrice I_3 est diagonale, la matrice N est nilpotente, les matrices I_3 et N commutent, c'est donc bien la décomposition de Dunford de B.

(e) *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$.
On a, pour $t \in \mathbb{R}$, $tB = tI_3 + tN$, ainsi $\exp tB = \exp(tI_3 + tN) = (\exp tI_3)(\exp tN)$ car les matrices tI_3 et tN commutent. Par ailleurs, $\exp tI_3 = e^t I_3$ et $\exp tN = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2$. On a donc

$$\exp tB = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) *Donnons les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.*
Intégrons le système $Y' = BY$, sa solution générale s'écrit

$$Y(t) = (\exp tB)Y_0,$$

où Y_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Intégrons alors le système $X' = AX$. Remarquons que si PY est solution de $X' = AX$, on a

$$(PY)' = A(PY) \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = BY$$

ainsi Y est solution de $Y' = BY$, la solution générale du système $X' = AX$ sécrit donc

$$X(t) = P(\exp tB)Y_0 = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0$$
$$= e^t \begin{pmatrix} 1 & t+1 & t^2/2+t+1 \\ -1 & -t-1 & -t^2/2-t \\ 1 & t & t^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où $Y_0 = (a,b,c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Ou encore

$$\begin{cases} x(t) = e^t(a + b(t+1) + c(t^2/2 + t + 1)) \\ y(t) = e^t(-a - b(t+1) - c(t^2/2 + t)) \\ z(t) = e^t(a + bt + ct^2/2) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ e^t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} e^t(t+1) \\ -e^t(t+1) \\ te^t \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} e^t(t^2/2 + t + 1) \\ -e^t(t^2/2 + t) \\ e^t t^2/2 \end{pmatrix}$$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3304 ▲

(a) On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donnons sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.
La matrice A est diagonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = 2\vec{e}_2$ et $A\vec{e}_3 = 3\vec{e}_3$. Les valeurs propres de A sont les réels 1, 2 et 3 et les sous-espaces propres associés sont les droites vectorielles engendrées respectivement par $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

(b) On cherche à déterminer, s'il en existe, les matrices B telles que $\exp B = A$.

i. *Montrons que si $A = \exp B$, alors $AB = BA$.*
On suppose qu'il existe B telle que $A = \exp B$. On a alors, par définition,

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k, \text{ d'où } AB = BA = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^{k+1}$$

ii. *On en déduit que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de vecteurs propres de B.*
On a $(BA)\vec{e}_1 = B(A\vec{e}_1) = B\vec{e}_1$, mais $BA = AB$, on a donc $B\vec{e}_1 = (AB)\vec{e}_1 = A(B\vec{e}_1)$. Ce qui prouve que $B\vec{e}_1$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, il est donc colinéaire à $\vec{e}_1$, ainsi, $\vec{e}_1$ est bien un vecteur propre de B. De même, $BA\vec{e}_2 = 2B\vec{e}_2 = AB\vec{e}_2$ donc $B\vec{e}_2$ est colinéaire à $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_2$ est un vecteur propre de B. Et aussi, $BA\vec{e}_3 = 3B\vec{e}_3 = AB\vec{e}_3$ d'où $B\vec{e}_3$ colinéaire à $\vec{e}_3$ et $\vec{e}_3$ vecteur propre de B.

iii. *Déterminons les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que* $\exp B = A$.
Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ étant vecteurs propres de B, la matrice B est diagonale dans la base canonique, il existe donc des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ ainsi } \exp B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ce qui implique $e^{\lambda_1} = 1$, $e^{\lambda_2} = 2$ et $e^{\lambda_3} = 3$ et donc $\lambda_1 = \ln 1 = 0$, $\lambda_2 = \ln 2$ et $\lambda_3 = \ln 3$ d'où l'existence d'une unique matrice B telle que $\exp B = A$, c'est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 3 \end{pmatrix}$$

(c) Soit la matrice C,
$$C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
Montrons qu'il n'existe pas de matrice $D\in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C=\exp D$.
Quelque soit la matrice D, la matrice $\exp D$ est inversible d'inverse $\exp(-D)$, or, il est clair que la matrice C n'est pas inversible, son déterminant est nul, ainsi, il n'existe pas de matrice D telle que $C=\exp D$.

(d) *Calculons le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C.*
Soit $P_C(X)$ le polynôme caractéristique de C, on a
$$P_C(X)=\begin{vmatrix}-X&1&0\\0&-X&1\\0&0&-X\end{vmatrix}=-X\begin{vmatrix}-X&1\\0&-X\end{vmatrix}=-X^3.$$
Le polynôme minimal Q_C de C est unitaire, divise son polynôme caractéristique P_C et s'annule en C, or $C^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$, mais $C^3=0$, d'où $Q_C(X)=X^3$.

(e) Supposons qu'il existe une matrice $E\in M_3(\mathbb{R})$ telle que $E^2=C$. Notons $Q_E(X)$ son polynôme minimal et $Q_C(X)$ le polynôme minimal de C.

i. *Montrons que $Q_E(X)$ divise $Q_C(X^2)$.*
On a $Q_C(C)=Q_C(E^2)=0$, ainsi le polynôme $S(X)=Q_C(X^2)$ s'annule en E, ce qui prouve que $Q_E(X)$, polynôme minimal de E, divise $Q_C(X^2)$.

ii. *On en déduit que $E^3=0$ et que $C^2=0$.*
Le polynôme minimal de E divise $Q_C(X^2)=-X^6$, or son degré est inférieur ou égal à 3, par ailleurs on suppose $E^2=C$ donc $E^2\neq 0$ ainsi, on a bien $Q_E(X)=X^3$ et $E^3=0$, or, $E^3=0$ implique $E^4=0$ et, comme $E^4=C^2$, on a $C^2=0$.

iii. *On déduit de ce qui précède qu'il n'existe pas de matrice E telle que $E^2=C$.*
Si une telle matrice existe, alors on a vu qu'elle vérifie $E^3=0$, ainsi on a $E^4=0$, or $E^4=C^2\neq 0$, d'où la conclusion.

(f) Soient F et G des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $F=\exp G$. *Démontrons que pour tout $n\in |||^*$, il existe une matrice H telle que $H^n=F$.*
Soit $F=\exp G$ et $n\in |||^*$, posons $H=\exp\frac{1}{n}G$, on a
$$H^n=\left(\exp\frac{1}{n}G\right)^n=\exp\frac{n}{n}G=\exp G=F.$$

Correction de l'exercice 3305 ▲

(a) $A^{2k}=I$, $A^{2k+1}=A$.

Correction de l'exercice 3306 ▲

3. $\alpha_n=-\frac{1}{3}+\frac{2^n}{4}+\frac{(-2)^n}{12}$, $\beta_n=\frac{2^n-(-2)^n}{4}$, $\gamma_n=\frac{4}{3}-\frac{2^n}{2}+\frac{(-2)^n}{6}$.

Correction de l'exercice 3307 ▲

2. $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$.

$2u_n = (6-6.2^n+2.3^n)u_0 + (-5+8.2^n-3.3^n)u_1 + (1-2.2^n+3^n)u_2$.

Correction de l'exercice 3308 ▲

(a) Le polynôme minimal de f est de degré supérieur ou égal à n et n'a pas de diviseurs non triviaux. Donc $\dim E = 1$ et f est une homothétie si $K = \mathbb{C}$. Si $K = \mathbb{R}$ on peut aussi avoir $\dim E = 2$ et f n'a pas de valeurs propres réelles.

Correction de l'exercice 3309 ▲

(a) Diagonaliser ${}^tM \Rightarrow y_n - \frac{3}{2}x_n = \text{cste}$.

(b) $y_n - x_n = 2^n(y_0 - x_0)$ donc si $y_0 \neq x_0$ alors $M_n \to \infty$ sinon la suite est constante.

(c) $\frac{3}{2}$ si $y_0 \neq x_0$.

Correction de l'exercice 3311 ▲

2. $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou l'inverse.

Correction de l'exercice 3312 ▲

$$M = \pm\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1/5 & \pm 2 & 0 \\ 7/30 & \pm 1/3 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ ou } M = \pm\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \mp 2 & 0 \\ 1/2 & \mp 1 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3313 ▲

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On prend $B = PMP^{-1}$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3314 ▲

3 valeurs propres distinctes, M est diagonalisable et son commutant est l'ensemble des polynômes en M : $aI + bM + cM^2$, $a, b, c \in K$.

Correction de l'exercice 3315 ▲

(a) Par similitude on se ramène aux cas : $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ ou $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = \mathbb{C}[A]$ ou $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = \mathbb{C}[A]$.

(b) Si A est diagonalisable de valeurs propres λ_i avec les multiplicités n_i alors $\dim(C(A)) = \sum n_i^2 \geqslant n$. Dans le cas général, soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables convergeant vers A et $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ une suite de n-uplets de matrices commutant avec A_k telles que $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ est une famille orthonormale pour un produit scalaire quelconque choisi sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Par compacité il existe une sous-suite convergente, donc n matrices C_∞^i formant une famille orthonormale et commutant avec A d'où $\dim(C(A)) \geqslant n$.

Correction de l'exercice 3316 ▲

Soit $d_n(i,j)$ le nombre de chemins de longueur n allant du sommet i au sommet j. j admet trois voisins k_1, k_2, k_3 et l'on a : $d_n(i,j) = d_{n-1}(i,k_1) + d_{n-1}(i,k_2) + d_{n-1}(i,k_3)$. On numérote les sommets de 0 à 7 de sorte que les voisins du sommet i sont les sommets $i+1 \mod 8$, $i+2 \mod 8$ et $i+4 \mod 8$. Le vecteur $d_n = (d_n(0,0), \dots, d_n(0,7))$ vérifie la relation de récurrence $d_n = Ad_{n-1}$ où A est la matrice suivante (. désigne 0) :

$$A = \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & . & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & I_4 \\ I_4 & B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} B+I_4 & 0 \\ 0 & B-I_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . \\ 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & . & 1 \\ . & 1 & 1 & . \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$B \pm I_4 = \begin{pmatrix} C \pm I_2 & I_2 \\ I_2 & C \pm I_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} C \pm I_2 + I_2 & 0 \\ 0 & C \pm I_2 - I_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

et enfin,

$$C \pm I_2 \pm I_2 = \begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 & I_1 \\ I_1 & \pm I_1 \pm I_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 + I_1 & 0 \\ 0 & \pm I_1 \pm I_1 - I_1 \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Donc A est diagonalisable de valeurs propres $-3, -1, 1, 3$ et on peut certainement terminer les calculs pour obtenir $d_n = A^n d_0$.

Correction de l'exercice 3317 ▲

1ère solution. $A = 2J - I_3$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = 3J$ et plus généralement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque les matrices $2J$ et $-I$ commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} A^n &= (2J-I)^n = (-I)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2J)^k (-I)^{n-k} = (-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) J = (-1)^n I + \frac{1}{3}((6-1)^n - (-1)^n) J \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

Soit de nouveau $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} &((-1)^n I + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)J) \times ((-1)^{-n} I + \frac{1}{3}(5^{-n} - (-1)^{-n})J) \\ &\qquad = I + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{1}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J^2 \\ &\qquad = I + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{3}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J = I, \end{aligned}$$

et donc

$$A^{-n}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^{-n}+2(-1)^{-n}&5^{-n}-(-1)^{-n}&5^{-n}-(-1)^{-n}\\5^{-n}-(-1)^{-n}&5^{-n}+2(-1)^{-n}&5^{-n}-(-1)^{-n}\\5^{-n}-(-1)^{-n}&5^{-n}-(-1)^{-n}&5^{-n}+2(-1)^{-n}\end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{Z},\ A^{n}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^{n}+2(-1)^{n}&5^{n}-(-1)^{n}&5^{n}-(-1)^{n}\\5^{n}-(-1)^{n}&5^{n}+2(-1)^{n}&5^{n}-(-1)^{n}\\5^{n}-(-1)^{n}&5^{n}-(-1)^{n}&5^{n}+2(-1)^{n}\end{pmatrix}}.$$

2ème solution. Puisque $\mathrm{rg}(A+I)=1$, $\dim(\mathrm{Ker}(A+I))=2$ et -1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace : $\lambda-1-1=3$ et donc $\lambda=5$. Par suite, $\chi_A=-(X+1)^2(X-5)$.

De plus, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}\Leftrightarrow x+y+z=0$ et donc $E_{-1}=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ où $e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

De même, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}\Leftrightarrow x=y=z$ et $E_5=\mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

On pose $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ et $D=\mathrm{diag}(-1,-1,5)$ et on a $A=PDP^{-1}$.

Calcul de P^{-1}. Soit (i,j,k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l}e_1=i-j\\e_2=i-k\\e_3=i+j+k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}j=i-e_1\\k=i-e_2\\e_3=i+i-e_1+i-e_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}i=\frac{1}{3}(e_1+e_2+e_3)\\j=\frac{1}{3}(-2e_1+e_2+e_3)\\k=\frac{1}{3}(e_1-2e_2+e_3)\end{array}\right.$$

et donc $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$. Soit alors $n\in\mathbb{Z}$.

$$A^n=PD^nP^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n&(-1)^n&5^n\\-(-1)^n&0&5^n\\0&-(-1)^n&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^{n}+2(-1)^{n}&5^{n}-(-1)^{n}&5^{n}-(-1)^{n}\\5^{n}-(-1)^{n}&5^{n}+2(-1)^{n}&5^{n}-(-1)^{n}\\5^{n}-(-1)^{n}&5^{n}-(-1)^{n}&5^{n}+2(-1)^{n}\end{pmatrix},$$

et on retrouve le résultat obtenu plus haut, le calcul ayant été mené directement avec n entier relatif.

3ème solution. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par χ_A fournit trois réels a_n, b_n et c_n et un polynôme Q tels que $X^n=\chi_AQ+a_nX^2+b_nX+c_n$. En prenant les valeurs des membres en 5, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs dérivées en -1 , on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}25a_n+5b_n+c_n=5^n\\a_n-b_n+c_n=(-1)^n\\-2a_n+b_n=n(-1)^{n-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b_n=2a_n-n(-1)^n\\35a_n+c_n=5n(-1)^n+5^n\\-a_n+c_n=-(n-1)(-1)^n\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}a_n=\frac{1}{36}(5^n+(6n-1)(-1)^n)\\c_n=\frac{1}{36}(5^n+(-30n+35)(-1)^n)\\b_n=\frac{1}{36}(2\times5^n+(-24n-2)(-1)^n)\end{array}\right..$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$A^n = \frac{1}{36}\left((5^n+(6n-1)(-1)^n)A^2+2(5^n-(12n+1)(-1)^n)A+(5^n+(-30n+35)(-1)^n)I\right)$$
$$= \frac{1}{36}\left((5^n+(6n-1)(-1)^n)\begin{pmatrix} 9&8&8\\ 8&9&8\\ 8&8&9\end{pmatrix}+2(5^n-(12n+1)(-1)^n)\begin{pmatrix} 1&2&2\\ 2&1&2\\ 2&2&1\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.+(5^n+(-30n+35)(-1)^n)\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 12\times 5^n+24(-1)^n & 12\times 5^n-12(-1)^n & 12\times 5^n-12(-1)^n\\ 12\times 5^n-12(-1)^n & 12\times 5^n+24(-1)^n & 12\times 5^n-12(-1)^n\\ 12\times 5^n-12(-1)^n & 12\times 5^n-12(-1)^n & 12\times 5^n+24(-1)^n\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n\\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n\\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n\end{pmatrix}.$$

On retrouve encore une fois le même résultat mais pour $n \in \mathbb{N}^*$ uniquement.

Correction de l'exercice 3318 ▲

Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $X^2 = A$ alors $AX = X^3 = XA$ et donc X et A commutent.

A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres de A sont des droites. X commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A.

Ainsi une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de X ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D_0 alors pour la même matrice P, $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale D. De plus

$$X^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

ce qui fournit huit solutions deux à opposées. On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 2&0&0\\ -16&1&0\\ 5&0&1\end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2&0&0\\ 8&1&0\\ -5/2&0&1\end{pmatrix}$. D'où les solutions

$$\begin{pmatrix} 2&0&0\\ -16&1&0\\ 5&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1&0&0\\ 0&2\varepsilon&0\\ 0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2&0&0\\ 8&1&0\\ -5/2&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1&0&0\\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1&2\varepsilon_2&0\\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2&0&0\\ 8&1&0\\ -5/2&0&1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1&0&0\\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1+16\varepsilon_2&2\varepsilon_2&0\\ 5(\sqrt{3}\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}.$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$.

Correction de l'exercice 3319 ▲

(a) $\chi_A = -(2+X)((3-X)(-1-X)+4) = -(X+2)(X^2-2X+1) = -(X+2)(X-1)^2$.
A diagonalisable $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A-I)) = 2 \Rightarrow \text{rg}(A-I) = 1$ ce qui n'est pas . Donc A n'est pas diagonalisable. De plus, $E_{-2} = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ et $E_1 = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ -4\end{pmatrix}$.

(b) $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & -36 & 9 \end{pmatrix}$ et donc $\text{Ker}(A-I)^2$ est le plan d'équation $4x+4y-z=0$.

(c) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON et le théorème de décomposition des noyaux permettent d'affirmer

$$\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A+2I) \oplus \text{Ker}(A-I)^2.$$

De plus, chacun des sous-espaces $\text{Ker}(A+2I)$ et $\text{Ker}(A-I)^2$ étant stables par f, la matrice de f dans toute base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs. Enfin, $\text{Ker}(A-I)$ est une droite vectorielle contenue dans le plan $\text{Ker}(A-I)^2$ et en choisissant une base de $\text{Ker}(A-I)^2$ dont l'un des deux vecteurs est dans $\text{Ker}(A-I)$, la matrice de f aura la forme voulue.

On a déjà choisi $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ puis on prend $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut déjà affirmer que $P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément

$$Ae_3 - e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = e_2$$

et donc $Ae_3 = e_2 + e_3$ puis

$$\boxed{A = PTP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $T = D+N$ où $D = \text{diag}(-2,1,1)$ et $N = E_{2,3}$. On a $ND = DN$ et $N^2 = 0$. Puisque les matrices D et N commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + nD^{n-1}N = \text{diag}((-2)^n,1,1) + n\text{diag}((-2)^{n-1},1,1)E_{2,3} = \text{diag}((-2)^n,1,1) + nE_{2,3} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} A^n = PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & -2 & -2n-1 \\ (-2)^n & -4 & -4n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n-8n+4 & -4(-2)^n-4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n-8n+4 & -4(-2)^n-4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 3320 ▲

$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & -X \end{vmatrix}$. Soit $f(x) = \begin{vmatrix} -X+x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & -X+x \end{vmatrix}$.

f est un polynôme en x. Par n linéarité du déterminant, $f(x)$ est somme de 2^n déterminants dont $2^n-(n+1)$ sont nuls car contiennent deux colonnes de x. Les déterminants restant contiennent au plus une colonne de x et sont donc de degré inférieur ou égal à 1 en x. f est donc une fonction affine. Il existe donc deux nombres A et B tels que $\forall x \in \mathbb{C}$, $f(x) = Ax+B$. Les égalités $f(-a) = (-X-a)^n$ et $f(-b) = (-X-b)^n$ fournissent $\left\{\begin{array}{l} -aA+B = (-X-a)^n \\ -bA+B = (-X-b)^n \end{array}\right.$ et comme $a \neq b$, les formules de CRAMER fournissent

$$\chi_A = f(0) = B = \frac{1}{b-a}(b(-X-a)^n - a(-X-b)^n).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Rightarrow \mathrm{ch}_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda+a}{\lambda+b}\right)^n = \frac{a}{b} \Rightarrow \left|\frac{\lambda+a}{\lambda+b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|^{1/n}.$$

Soient M le point du plan d'affixe λ, A le point du plan d'affixe $-a$ et B le point du plan d'affixe $-b$ puis $k = \left|\frac{a}{b}\right|^{1/n}$. k est un réel strictement positif et distinct de 1. On peut donc poser $I = \mathrm{bar}(A(1), B(-k))$ et $J = \mathrm{bar}(A(1), B(k))$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\Rightarrow MA = kMB \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \\ &\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MI}.(1+k)\overrightarrow{MJ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\Rightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [I,J] \text{ (cercles d'APPOLONIUS (de Perga))}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3321 ▲

(a) Les hypothèses fournissent $AU = U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc 1 est valeur propre de A.

(b) i. Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda||x_i| \leqslant \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}. \end{aligned}$$

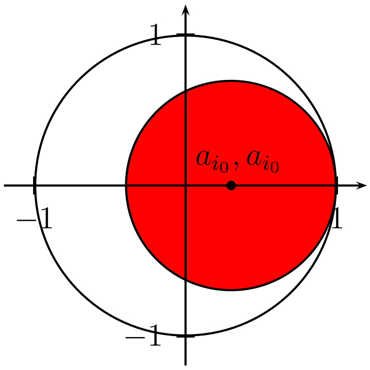
On choisit alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Puisque X est non nul, on a $|x_{i_0}| > 0$. On obtient

$$|\lambda||x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \text{ et donc } |\lambda| \leqslant 1 \text{ puisque } |x_{i_0}| > 0.$$

ii. Plus précisément,

$$|\lambda - a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| = \left|\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}|x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}\right)|x_{i_0}| = (1-a_{i_0,i_0})|x_{i_0}|$$

et donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}A$, $|\lambda - a_{i_0,i_0}| \leqslant 1 - a_{i_0,i_0}$ ce qui signifie que les valeurs propres de A appartiennent au disque de centre a_{i_0,i_0} et de rayon $1 - a_{i_0,i_0}$. Ce disque est tangent intérieurement au cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1 en le point $(1,0)$.



Correction de l'exercice 3322 ▲

(a) $J^n = I$. J annule le polynôme $X^n - 1$ qui est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Les valeurs propres de J sont à choisir parmi les racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Vérifions que $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J.

Soient $k \in [\![0,n-1]\!]$ et $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \\ x_1 = (\omega^k)^n x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \end{array}\right.$$

et donc

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(U_k) \text{ où } U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ (\omega^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J. Les valeurs propres de J sont les n racines n-èmes de 1. Ces valeurs propres sont toutes simples. Le sous espace propre associé à ω^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, est la droite vectorielle $D_k = \mathrm{Vect}(U_k)$.

Soit P la matrice de VANDERMONDE des racines n-èmes de l'unité c'est-à-dire $P = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{0\leqslant j,k\leqslant n-1}$ puis $D = \mathrm{diag}(1, \omega, ..., \omega^{n-1})$, alors on a déjà vu que $P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P}$ (exercice 3223) et on a

$$\boxed{J = PDP^{-1} \text{ avec } D = \mathrm{diag}(\omega^j)_{1\leqslant j\leqslant n},\ P = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P} \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}.}$$

Remarque. La seule connaissance de D suffit pour le 2).

(b) Soit A la matrice de l'énoncé.

$$A = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + ... + a_{n-1} J^{n-1} = Q(J) \text{ où } Q = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1}.$$

D'après 1), $A = P \times Q(D) \times P^{-1}$ et donc A est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(Q(1), Q(\omega), ..., Q(\omega^{n-1}))$. Par suite, A a même déterminant que la matrice $\mathrm{diag}(Q(1), Q(\omega), ..., Q(\omega^{n-1}))$. D'où la valeur du déterminant circulant de l'énoncé :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{2i(j-1)(k-1)\pi/n}a_j\right).$$

Correction de l'exercice 3323 ▲

(a) Soit $\sigma \in S_n$.

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma'\in S_n}\varepsilon(\sigma')p_{\sigma'(1),1}\dots p_{\sigma'(n),n} = \sum_{\sigma'\in S_n}\varepsilon(\sigma')\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)}\dots\delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma),$$

car $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)}\dots\delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} \neq 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sigma'(i) = \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma' = \sigma$.

$$\boxed{\forall \sigma \in S_n,\ \det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma).}$$

(b) i. Soit $(\sigma,\sigma') \in S_n^2$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)}.$$

Dans cette somme, si $k \neq \sigma'(j)$, le terme correspondant est nul et quand $k = \sigma'(j)$, le terme correspondant vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$. Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$ qui est encore le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_{\sigma\circ\sigma'}$.

$$\boxed{\forall (\sigma,\sigma') \in S_n^2,\ P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}.}$$

ii. Montrons que G est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$. G contient $I_n = P_{Id}$ et d'autre part, G est contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$ d'après 1).

$$\boxed{(G,\times) \text{ est un sous-groupe de } (GL_n(\mathbb{R}),\times).}$$

(c) Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AP_σ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Par suite, si $C_1,\dots,C_n$ désignent les colonnes de la matrice A, la matrice AP_σ est la matrice dont les colonnes sont $C_{\sigma(1)},\dots,C_{\sigma(n)}$.

$$\boxed{\text{Si } A = (C_1\dots C_n),\ AP_\sigma = (C_{\sigma(1)}\dots C_{\sigma(n)}).}$$

(d) Commençons par trouver le polynôme caractéristique d'un cycle c de longueur ℓ ($1 \leqslant \ell \leqslant n$). Soit f_c l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_c dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_c est $\begin{pmatrix} J_\ell & 0_{\ell,n-\ell} \\ 0_{n-\ell,\ell} & I_{n-\ell}\end{pmatrix}$ où la matrice J_ℓ est la matice de l'exercice 3322. Le polynôme caractéristique χ_{P_c} de P_c est donc $(-1)^n(X-1)^{n-\ell}(X^\ell-1)$ (voir exercice 3322).
Soit maintenant $\sigma \in S_n$. On note f_σ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. σ se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints, ces cycles commutant deux à deux.
Posons donc $\sigma = c_1\circ\dots\circ c_p$, $p \geqslant 1$, où les c_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont des cycles à supports disjoints, et notons ℓ_i la longueur du cycle c_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_σ est $\begin{pmatrix} J_{\ell_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & J_{\ell_p} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_k\end{pmatrix}$ où $k = n-\ell_1-\dots-\ell_p$ est le nombre de points fixes de σ.

Le polynôme caratéristique cherché est donc $\chi_{P_\sigma} = (-1)^n(X^{\ell_1}-1)\dots(X^{\ell_p}-1)(X-1)^{n-\ell_1-\dots-\ell_p}$. On en déduit immédiatement les valeurs propres de P_σ.

Correction de l'exercice 3324 ▲

On cherche une matrice A de format 4 dont le polynôme caractéristique est $X^4-3X^3+X^2-1$. La matrice compagnon $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ convient (voir l'exercice 2883) et le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que $A^4-3A^3+A^2-I_4 = 0$.

Correction de l'exercice 3325 ▲

Soit A la matrice de l'énoncé. $\det A$ est le produit des valeurs propres de A.

• Si $b = 0$, $\det A = a^n$.

• Si $b \neq 0$, $\mathrm{rg}(A-(a-b)I) = 1$ ou encore $\dim(\mathrm{Ker}(A-(a-b)I)) = n-1$. Par suite, $a-b$ est valeur propre d'ordre $n-1$ au moins. On obtient la valeur propre manquante λ par la trace de A : $(n-1)(a-b)+\lambda = na$ et donc $\lambda = a+(n-1)b$. Finalement $\det A = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$ ce qui reste vrai quand $b = 0$.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).}$$

Correction de l'exercice 3326 ▲

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = E_{1,3}$ et $N^3 = 0$. Si $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est une matrice carrée vérifiant $X^2 = N$, alors $X^6 = 0$. Donc X est nilpotente et, puisque X est de format 3, on sait que $X^3 = 0$. Mais alors $N^2 = X^4 = 0$ ce qui n'est pas . L'équation proposée n'a pas de solution.

Correction de l'exercice 3327 ▲

$\mathrm{rg}(M_{a,b}-I) = 1$, si $a = b = 0$, 2 si l'un des deux nombres a ou b est nul et l'autre pas et 3 si a et b ne sont pas nuls. Donc $M_{0,0}$ n'est semblable à aucune des trois autres matrices et de même pour $M_{1,1}$.

Il reste à savoir si les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ sont semblables.

$(M_{1,0}-I)^2 = (E_{1,2}+E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $(M_{0,1}-I)^2 = (E_{1,2}+E_{3,4})^2 = 0$. Donc les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ ne sont pas semblables.

Correction de l'exercice 3328 ▲

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. A est de rang 1 et donc admet deux valeurs propres égales à 0 . $\mathrm{Tr}A = 0$ et donc la troisième valeur propre est encore 0. Donc $\chi_A = -X^3$. A est nilpotente et le calcul donne $A^2 = 0$. Ainsi, si X est une matrice telle que $X^2 = A$ alors X est nilpotente et donc $X^3 = 0$.

Réduction de A. $A^2 = 0$. Donc $\mathrm{Im}A \subset \mathrm{Ker}A$. Soit e_3 un vecteur non dans $\mathrm{Ker}A$ puis $e_2 = Ae_3$. (e_2) est une base de $\mathrm{Im}A$ que l'on complète en (e_1,e_2) base de $\mathrm{Ker}A$.

(e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car si $ae_1+be_2+ce_3=0$ alors $A(ae_1+be_2+ce_3)=0$ c'est-à-dire $ce_2=0$ et donc $c=0$. Puis $a=b=0$ car la famille (e_1,e_2) est libre.

Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base (e_1,e_2,e_3) alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$. On voit peut prendre $P=\begin{pmatrix} 3&-7&0\\ -1&-14&0\\ 0&-7&1 \end{pmatrix}$.

Si $X^2=A$, X commute avec A et donc X laisse stable $\mathrm{Im}A$ et $\mathrm{Ker}A$. On en déduit que Xe_2 est colinéaire à e_2 et Xe_1 est dans $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Donc $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a&0&d\\ b&c&e\\ 0&0&f \end{pmatrix}$. De plus, X est nilpotente de polynôme caractéristique $(a-\lambda)(c-\lambda)(f-\lambda)$. On a donc nécessairement $a=c=f=0$. $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0&0&b\\ a&0&c\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$.

Enfin, $X^2=A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0&0&b\\ a&0&c\\ 0&0&0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab=1$.

Les matrices X solutions sont les matrices de la forme $P\begin{pmatrix} 0&0&\frac{1}{a}\\ a&0&b\\ 0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}$ où a est non nul et b quelconque.

On trouve $P^{-1}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 14&-7&0\\ -1&-3&0\\ -7&-21&49 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 3&-7&0\\ -1&-14&0\\ 0&-7&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&\frac{1}{a}\\ a&0&b\\ 0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14&-7&0\\ -1&-3&0\\ -7&-21&49 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -7a&0&\frac{3}{a}-7b\\ -14&0&-\frac{1}{a}-14b\\ -7a&0&-7b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14&-7&0\\ -1&-3&0\\ -7&-21&49 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -2a-\frac{3}{7a}+b & a-\frac{9}{7a}+3b & \frac{3}{a}-7b\\ -4a+\frac{1}{7a}+2b1 & 2a+\frac{3}{7a}+6b & -\frac{1}{a}-14b\\ -2a+b & a+3b & -7b \end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3329 ▲

Soit $A=\begin{pmatrix} 1&0&-1\\ 1&2&1\\ 2&2&3 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X&0&-1\\ 1&2-X&1\\ 2&2&3-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-5X+4)-(-2+2X) = (1-X)(X^2-5X+4+2) = -(X-1)(X-2)(X-3)$.

A est à valeurs propres réelles et simples. A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres sont des droites.

Si M est une matrice qui commute avec A, M laisse stable ces droites et donc si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale alors la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. Réciproquement une telle matrice commute avec A.

$$C(A)=\{P\mathrm{diag}(a,b,c)P^{-1},\ (a,b,c)\in\mathbb{C}^3\}.$$

On trouve $C(A)=\left\{\begin{pmatrix} 2b-c & -a+2b-c & \frac{a-c}{2} \\ -b+c & a-b+c & (-a+c)/2 \\ 2c-2b & -2b+c & c \end{pmatrix}, (a,b,c)\in\mathbb{C}^3\right\}$. On peut vérifier que $C(A)=\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$.

Correction de l'exercice 3335 ▲

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors le polynôme caractéristiaque de u est aussi un polynôme annulateur de u.

Preuve si χ_u est scindé à racines simples : u est alors diagonalisable et il existe donc une base B dans laquelle $Mat_B(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$. Alors $Mat_B(\chi_u(u))=\begin{pmatrix}\chi_u(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_u(\lambda_n)\end{pmatrix}$. Et comme $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ on a $\chi_u(\lambda_i)=0$, on en déduit que $\chi_u(u)=0$.

Correction de l'exercice 3353 ▲

Soit A la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

Calculons A^2 et vérifions que $A^2=A+2I_3$. On a

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=A+2I_3.$$

On a donc $A^2-A=2I_3$, c'est-à-dire $A(A-I_3)=2I_3$, ou encore $A.\frac{1}{2}(A-I_3)=I_3$. Ce qui prouve que A est in versible et que son inverse est $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I_3)$

Correction de l'exercice 3354 ▲

Soit N une matrice nilpotente, il existe $q\in |||$ tel que $N^q=0$. Montrons que la matrice $I-N$ est inversible et exprimons son inverse en fonction de N.

On remarque que $(I-N)(I+N+N^2+\dots+N^{q-1})=I-N^q=I$. Ainsi, la matrice $I-N$ est inversible, et son inverse est $(I-N)^{-1}=I+N+N^2+\dots+N^{q-1}$.

Correction de l'exercice 3355 ▲

(a) $(-1)^n(X^n-a_nX^{n-1}-\dots-a_1)$.

(b) Étude de $x\mapsto(x^n-a_nx^{n-1}-\dots-a_1)/x^n$.

(c) Inégalité triangulaire.

(d) Expression générale de A^k.

Correction de l'exercice 3356 ▲

$a=b$ ou a,b non nuls.

Correction de l'exercice 3359 ▲

(a)

(b) $(A-xI)({}^tA-xI)=(x^2-2x+4)I$, $\chi_A(x)=x^2-2x+4$.

(c) ${}^tA = 2I - A$ donc $(A - xI)((2-x)I - A) = (x^2 - 2x + 4)I$. En prenant pour x une des racines du polynôme $x^2 - 2x + 4$, on obtient un polynôme scindé à racines simples annulant A.

Correction de l'exercice 3361 ▲

A est diagonalisable car $A^2 = I$. $e^A = (\operatorname{ch} 1)I + (\operatorname{sh} 1)A$.

Correction de l'exercice 3362 ▲

Si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ alors $u^2 = 0$ donc 0 est l'unique valeur propre de u et $u \neq 0$ donc u n'est pas diagonalisable.

Si $\operatorname{Im} u \not\subset \operatorname{Ker} u$ alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$ et donc $\operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u = E$. Or $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces propres de u donc u est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3364 ▲

(a) Polynôme annulateur simple.

(b) Non, ctrex = B nilpotent.

Correction de l'exercice 3365 ▲

$\operatorname{spec}(p) \subset \{-1, 0, 1\}$. p est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples.

Correction de l'exercice 3366 ▲

A est $\mathbb{C}$-diagonalisable et les valeurs propres sont $\alpha > 0$ et $\beta, \overline{\beta}$ avec la même multiplicité.

Correction de l'exercice 3368 ▲

A est diagonalisable et a n valeurs propres distinctes, sinon il existerait un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à $n-1$. Ces racines sont les n racines n-èmes de 1 et leur somme est nulle.

Correction de l'exercice 3369 ▲

A est $\mathbb{C}$-diagonalisable (polynôme annulateur à racines simples) $\Rightarrow \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = n$. Les dimensions sont conservées sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3371 ▲

Soit P un polynôme tel que $P(\lambda) = 1$ et $P(\mu) = 0$ pour toutes les autres valeurs propres, μ, de f. Alors $p_\lambda = P(f)$.

Correction de l'exercice 3372 ▲

3. $\operatorname{Spec}(u_k) \subset \{i, -i\}$ d'après la relation $u_k^2 = -\mathrm{id}_E$. Si le spectre était réduit à un élément alors u_k serait scalaire car diagonalisable, mais ceci est incompatible avec la relation d'anticommutation entre u_k et u_ℓ. Donc $\operatorname{Spec}(u_k) = \{i, -i\}$.

4. u_ℓ avec $\ell \neq k$ échange les sous-espaces propres de u_k donc ils ont même dimension $n/2$.

Correction de l'exercice 3375 ▲

(a) Calcul Maple : $h = \begin{pmatrix} c+4 & b & a \\ 0 & c+2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $v = ku$.

(b) i.

ii.

iii. $u^k \circ h - h \circ u^k = -2ku^k$, $P(u) \circ h - h \circ P(u) = -2u \circ P'(u)$.

iv. Si $P(u) = 0$ alors $u \circ P'(u) = 0$ donc P (polynôme minimal) divise XP' ce qui implique $P(X) = X^k$ pour un certain k.

Correction de l'exercice 3378 ▲

Aucun polynôme constant ne convient. Si P est non constant et α est une racine de P alors en considérant $A = \alpha I_n$ on obtient une première condition nécessaire : $n\alpha \in \mathbb{Z}$. Si P a une autre racine β alors en prenant $A = \mathrm{diag}(\alpha, \ldots, \alpha, \beta)$ on obtient une deuxième condition nécessaire : $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$. Ainsi les polynômes P cherchés ont la propriété suivante : $\deg(P) \geqslant 1$ *et il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que toutes les racines de P sont congrues à u/n modulo* 1. Cette condition est clairement suffisante.

Correction de l'exercice 3379 ▲

On écrit $C = PJQ$ où P, Q sont inversibles et J est la matrice canonique de rang r. Alors $(P^{-1}AP)J = J(QBQ^{-1})$ donc $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} sont triangulaires par blocs avec le même bloc diagonal $r \times r$, ce qui prouve que χ_A et χ_B ont un facteur de degré r en commun.

Correction de l'exercice 3380 ▲

Le polynôme s'écrit $(X^2+1)(X^2+X+1)$. Il n'a donc pas de racine réelle. Or tout élément de $M_5(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre et cette valeur propre devrait être également racine du polynôme minimal. Par conséquent $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ ne peut pas être le polynôme minimal d'une matrice de $M_5(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 3381 ▲

(a) Que c'est un isomorphisme (et réciproquement).

(b) Soit $Q(X) = P(X)/X$. On a $u \circ Q(u) = 0$ et X, Q sont premiers entre eux, d'où $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u)$ et $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, Q(u)$. On conclut avec le théorème du rang.

(c) Même méthode.

Correction de l'exercice 3382 ▲

• Si A est nilpotente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A^k est nilpotente et donc 0 est l'unique valeur propre dans $\mathbb{C}$ de A^k. Par suite, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

• Réciproquement , supposons que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ et montrons alors que toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont nulles. Ceci montrera que le polynôme caractéristique de A est $(-X)^n$ et donc que A est nilpotente d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON.

Soient λ_1,..., λ_n les n valeurs propres (distinctes ou confondues) de A dans $\mathbb{C}$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k$. Il s'agit de montrer que : $(\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ S_k = 0) \Rightarrow (\forall j \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_j = 0)$.

1ère solution. Les S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont tous nuls et par combinaisons linéaires de ces égalités, on en déduit que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n et s'annulant en 0, on a $P(\lambda_k) = 0$ (1). Il s'agit alors de bien choisir le polynôme P.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soient μ_1,..., μ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de A $(1 \leqslant p \leqslant n)$. On prend $P = X \prod_{j \neq i}(X - \mu_j)$ si $p \geqslant 2$ et $P = X$ si $p = 1$. P est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n et s'annule en 0. L'égalité $P(\lambda_i) = 0$ fournit $\lambda_i = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

2ème solution. Pour ceux qui savent que les sommes de NEWTON S_k sont liées aux fonctions élémentaires en les λ_i σ_1,..., σ_n par les formules de NEWTON :

$$\forall k \leqslant n,\ S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

Par suite, si tous les S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont nuls alors immédiatement tous les σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont nuls et donc les λ_i sont nuls car tous racines de l'équation $x^n = 0$.

Correction de l'exercice 3383 ▲

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f^k g - f g^k &= f^k g - f^{k-1} g f + f^{k-1} g f - f^{k-2} g f^2 + f^{k-2} g f^2 - \ldots - f g f^{k-1} + f g f^{k-1} - g f^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (f^{k-i} g f^i - f^{k-i-1} g f^{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1}(fg - gf) f^i = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1} f f^i \\ &= k f^k. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{si } fg - gf = f, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N},\ f^k g - g f^k = k f^k \quad (*).}$$

1ère solution. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ h & \mapsto & hg - gh \end{array}$. φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(f^k) = k f^k$. Si, pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné, f^k n'est pas nul, f^k est valeur propre de φ associé à la valeur propre k. Par suite, si aucun des f^k n'est nul, φ admet une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est impossible car $\dim(\mathscr{L}(E)) < +\infty$. Donc, f est nilpotent.

2ème solution. Les égalités $(*)$ peuvent s'écrire $P(f)g - gP(f) = fP'(f)$, $(**)$, quand P est un polynôme de la forme X^k, $k \in \mathbb{N}$. Par linéarité, les égalités $(**)$ sont vraies pour tout polynôme P.

En particulier, l'égalité $(**)$ est vraie quand P est Q_f le polynôme minimal de f et donc

$$fQ_f'(f) = Q_f(f)g - gQ_f(f) = 0.$$

Le polynôme XQ_f' est donc un polynôme annulateur de f et on en déduit que le polynôme Q_f divise le polynôme XQ_f'. Plus précisément, si $p \in \mathbb{N}^*$ est le degré de Q_f, les polynômes pQ_f ayant mêmes degrés et mêmes coefficients dominants, on en déduit que $pQ_f = XQ_f'$ ou encore que

$$\frac{Q_f'}{Q_f} = \frac{p}{X}.$$

Par identification à la décomposition en éléments simples usuelles de $\frac{Q_f'}{Q_f}$, on en déduit que $Q_f = X^p$. En particulier, $f^p = 0$ et encore une fois f est nilpotent.

Correction de l'exercice 3387 ▲

(a) $u\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i u(u^i(x_0)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_{i+1}$. Donc $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.

(b) Si à un rang k, x_{k+1} est une combinaison linéaire des x_i pour $i \leqslant k$: $x_{k+1} = \sum_{i=0}^k a_i x_i$. On en déduit que $x_{k+2} = \sum_{i=0}^k a_i x_{i+1}$, et donc que $x_{k+2} \in Vect(x_1, \ldots, x_{k+1}) \subset Vect(x_0, \ldots, x_k)$, et par récurrence, on obtient finalement que $\forall p > k, x_p \in Vect(x_0, \ldots, x_k)$. On en déduit que le rang de la famille $\{x_0, \ldots, x_m\}$, est strictement croissant avec m puis éventuellement constant à partir d'un certain rang. Comme E est de dimension finie n, on en déduit que ce rang est constant à partir d'un rang $k \leqslant n$: la famille $(x_0, \ldots, x_k)$ est alors libre, et x_{k+1} est une combinaison linéaire de $(x_0, \ldots, x_k)$.

(c) $x_{k+1} - \sum_{i=0}^k a_i x_i = u^{k+1}(x_0) - \sum_{i=0}^k a_i u^i(x_0) = 0$ donc $P_0(u)(x_0) = 0$.

(d) Si $x \in F$ alors $x = \sum_{i=0}^N \alpha_i u^i(x_0)$. En posant $P = \sum_{i=0}^N \alpha_i X^i$, on a $x = P(u)(x_0)$.

(e) Soit $P = QP_0 + R$ la division euclidienne de P par P_0, alors $\deg(R) < \deg(P_0) = k+1$. Notons $R = \sum_{i=0}^k r_i X^i$. On a $x = P(u)(x_0) = Q(u)P_0(u)(x_0) + R(u)(x_0) = R(u)(x_0)$

(f) La famille $(x_0, \ldots, x_k)$ est donc libre et génératrice dans F : c'est une base.

(g) La matrice de $u_{|F}$ dans cette base est la matrice compagnon associée au polynôme P_0, et $\chi_{u_{|F}} = P_0$.

(h) On choisit un vecteur $y \in E \setminus F$, et on recommence le même travail avec ce vecteur, et on continue ainsi jusqu'à avoir obtenu une base de tout l'espace. La matrice de u dans la base finale est alors du type demandé.

Correction de l'exercice 3389 ▲

$\text{spec}(T) =]-1,1]$.

Correction de l'exercice 3390 ▲

2. $0 < \lambda \leqslant 1 : f(x) = Cx^{1/\lambda - 1}$.

Correction de l'exercice 3391 ▲

$1/k$, $k \geqslant 1$.

Correction de l'exercice 3392 ▲

$\lambda = \frac{1}{(\pi/2+k\pi)^2} : u(x) = C\sin(\pi/2 + k\pi)x$.

Correction de l'exercice 3394 ▲

(a) $A \sim \text{diag}(1, \alpha, \alpha^{-1})$ où α est une racine primitive $7^{\text{ème}}$ de 1,
$A \sim \text{diag}(\alpha, \alpha^{10}, \alpha^{-11})$ où α est une racine primitive $37^{\text{ème}}$ de 1.

(b) pas de solution.

(c) $\text{vp} = 0$ ou 1.

Correction de l'exercice 3395 ▲

Soit f un endomorphisme d'un ev E ayant A pour matrice. On doit trouver $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = 2g \circ f$. Construction de g par récurrence sur $n = \dim E$.

$n \leqslant 1$: on a $f = 0$ donc $g = \text{id}_E$ convient.

$0, \dots, n-1 \Rightarrow n$: f est non surjectif donc l'hypothèse de récurrence s'applique à $f_{|\text{Im}(f)}$. Soit $g_1 \in GL(\text{Im}(f))$ tel que $f(g_1(x)) = 2g_1(f(x))$ pour tout $x \in \text{Im}(f)$. Soit $E = H \oplus I \oplus K \oplus L$ avec $H = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$, $H \oplus I = \text{Im}(f)$ et $H \oplus K = \text{Ker}(f)$. La restriction de f à $I \oplus L$ induit un isomorphisme sur $\text{Im}(f)$, on note φ l'isomorphisme réciproque. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ définie par :

$$g(h+i+k+\ell) = g_1(h+i) + k + 2\varphi(g_1(f(\ell))).$$

On vérifie facilement que $f \circ g = 2g \circ f$ et il reste à prouver que g est injective. Si $x = h+i+k+\ell \in \text{Ker} g$ alors $g(f(x)) = g_1(f(i+\ell)) = 0$ donc $i + \ell \in \text{Ker} f = H \oplus K$ soit $i = \ell = 0$. Il reste $g_1(h) + k = 0$ ce qui implique $h = k = 0$ car $g_1(h) \in \text{Im} f = H \oplus I$.

Remarque : la démonstration passe à tout corps de caractéristique différente de 2.

Correction de l'exercice 3396 ▲

(a)

(b) Par récurrence pour $P = X^k$, puis par linéarité.

(c) $A = 0$.

Correction de l'exercice 3397 ▲

S'inspirer du cas $n=1$. Soit $P=\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$: $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, donc A aussi.

Correction de l'exercice 3398 ▲

$E_\lambda(M)=\left\{\begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix} \text{ tq } AY=\lambda^2 Y\right\}$.

Correction de l'exercice 3400 ▲

Calcul du polynôme caractéristique de B par opérations en blocs. On obtient

$$\chi_B(x)=\det(x^2I-2xA-A^2)=(-1)^n\chi_A\Big(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\Big)\chi_A\Big(\frac{x}{1-\sqrt{2}}\Big)$$

donc

$$\operatorname{Spec}(B)=\{(1+\sqrt{2})\lambda,\ \lambda\in\operatorname{Spec}(A)\}\cup\{(1-\sqrt{2})\lambda,\ \lambda\in\operatorname{Spec}(A)\}.$$

Correction de l'exercice 3401 ▲

En prenant $P=\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1}MP=\begin{pmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & 0 & 0 \\ ab-b^2 & a^2-ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+ab & b^2+ab \\ 0 & 0 & b^2+ab & a^2+ab \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$.
En prenant $P_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P_1^{-1}M_1P_1=\begin{pmatrix} (a-b)^2 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$ et $P_1^{-1}M_2P_1=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\operatorname{Spec}A=\{(a+b)^2,(a-b)^2,(a+b)(a-b)\}$, donc l'ensemble cherché est la boule unité ouverte pour $\|\ \|_1$.

Correction de l'exercice 3404 ▲

Si $P(0)\neq 0$ alors f est bijective. Si $P(0)=0$ alors $f^2\circ\text{qqch}=-P'(0)f\Rightarrow \operatorname{Ker}f^2=\operatorname{Ker}f$.

Correction de l'exercice 3406 ▲

Soit μ le polynôme minimal de u et $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs unitaires de μ. Pour $P\in K[X]$ et $d=P\wedge\mu$ on a facilement $\operatorname{Ker}(P(u))=\operatorname{Ker}(d(u))$ et $\operatorname{Im}(P(u))=\operatorname{Im}(d(u))$. Ceci montre déjà que $\mathscr{K}$ et $\mathscr{I}$ sont finis.

De plus, si $d\in\mathscr{D}$ alors l'annulateur minimal de $u_{|\operatorname{Im}(d(u))}$ est μ/d donc l'application $d\mapsto\operatorname{Im}(d(u))$ est injective sur $\mathscr{D}$ et $\operatorname{Card}(\mathscr{I})=\operatorname{Card}(\mathscr{D})$. De même, l'annulateur minimal de $u_{|\operatorname{Ker}(d(u))}$ est d car $\operatorname{Ker}(d(u))\supset\operatorname{Im}(\frac{\mu}{d}(u))$ et d est l'annulateur minimal de $u_{|\operatorname{Im}(\frac{\mu}{d}(u))}$ donc l'application $d\mapsto\operatorname{Ker}(d(u))$ est injective sur $\mathscr{D}$ et $\operatorname{Card}(\mathscr{K})=\operatorname{Card}(\mathscr{D})$.

Correction de l'exercice 3407 ▲

En appliquant le théorème du rang à $f_{|\operatorname{Ker}f^2}$, on a : $\dim(\operatorname{Ker}f^2)=\dim(\operatorname{Ker}f)+\dim(f(\operatorname{Ker}f^2))$, et $f(\operatorname{Ker}f^2)\subset\operatorname{Ker}f$, donc $f(\operatorname{Ker}f^2)=\operatorname{Ker}f$. Soit $G_i=\operatorname{Ker}g^i$. Montrons que $g(G_{i+1})=G_i$ pour tout $i\in[[0,k]]$: si $x\in G_{i+1}$ alors $g^i(g(x))=g^{i+1}(x)=0$ donc $g(x)\in G_i$. Réciproquement, si $y\in G_i$ alors $y\in G_k=f(G_{2k})$, donc y a un antécédant x par f, cet antécédant appartient à G_{i+k}, et $y=g(g^{k-1}(x))\in g(G_{i+1})$.

On en déduit, avec le théorème du rang appliqué à $g_{|G_{i+1}}$, que $\dim(G_{i+1}) = \dim(G_i) + \dim(\mathrm{Ker}g)$ pour tout $i \in [[0,k]]$, d'où $d = \dim(G_k) = \dim(G_0) + k\dim(\mathrm{Ker}g) = k\dim(\mathrm{Ker}g)$.

Correction de l'exercice 3408 ▲

(a) • E contient I_2 et est inclus dans $GL_2(\mathbb{R})$.

• Si A et B sont dans E alors AB est à coefficients entiers et $\det(AB) = \det A \det B = 1$. Donc AB est dans E.

• Si A est dans E, $\det(A^{-1}) = 1$ et en particulier $A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{com}(A)$ est à coefficients entiers. On en déduit que A^{-1} est dans E.

Finalement

$$\boxed{E \text{ est un sous-groupe de } GL_2(\mathbb{R}).}$$

(b) Soit A un élément de E tel qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = I_2$.

A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car annule le polynôme à racines simples $X^p - 1$.

A admet deux valeurs propres distinctes ou confondues qui sont des racines p-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$ et puisque A est réelle, on obtient les cas suivants :

1er cas. Si $\mathrm{Sp}A = (1,1)$, puisque A est diagonalisable, A est semblable à I_2 et par suite $A = I_2$. Dans ce cas, $A^{12} = I_2$.

2ème cas. Si $\mathrm{Sp}A = (-1,-1)$, $A = -I_2$ et $A^{12} = I_2$.

3ème cas. Si $\mathrm{Sp}A = (1,-1)$ alors A est semblable à $\mathrm{diag}(1,-1)$ et donc $A^2 = I_2$ puis encore une fois $A^{12} = I_2$.

4ème cas. Si $\mathrm{Sp}A = (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Dans ce cas $\mathrm{Tr}A = 2cos\theta$ est un entier ce qui impose $2\cos\theta \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Les cas $\cos\theta = 1$ et $\cos\theta = -1$ ont déjà été étudié.

• Si $\cos\theta = 0$, $\mathrm{Sp}A = (i,-i)$ et A est semblable à $\mathrm{diag}(i,-i)$. Donc $A^4 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.

• Si $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$, $\mathrm{Sp}A = (j, j^2)$ ou $\mathrm{Sp}A = (-j,-j^2)$. Dans le premier cas, $A^3 = I_2$ et dans le deuxième $A^6 = I_2$.

Dans tous les cas $A^{12} = I_2$.

Correction de l'exercice 3409 ▲

On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ le format de A.

• C'est clair pour $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute matrice de format n et de trace nulle soit semblable à une matrice de diagonale nulle.

Soient A une matrice carrée de format $n+1$ et de trace nulle puis f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ de matrice A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Si f est une homothétie de rapport noté k, alors $0 = \mathrm{Tr}(f) = k(n+1)$ et donc $k = 0$ puis $f = 0$ puis $A = 0$. Dans ce cas, A est effectivement semblable à une matrice de diagonale nulle.

Sinon f n'est pas une homothétie et on sait qu'il existe un vecteur u de E tel que la famille $(u, f(u))$ soit libre (voir exercice 1257). On complète la famille libre $(u, f(u))$ en une base de E. Le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice de f dans cette base est nul. Plus précisément, A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & & \dots & \times \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & A' & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$.

Puis $\mathrm{Tr}A' = \mathrm{Tr}A = 0$ et par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice A_1 de diagonale nulle ou encore il existe A_1 matrice carrée de format n et de diagonale nulle et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A'Q = A_1$.

Mais alors, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, P est inversible car $\det(P) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ puis que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ \times & & & & \\ \vdots & & & A_1 & \\ \vdots & & & & \\ \times & & & & \end{pmatrix}$ est de diagonale nulle.

Correction de l'exercice 3410 ▲

Soit B la matrice de l'énoncé. $\text{rg}B = 1$ et si A existe, nécessairement $\text{rg}A = n-1$ (exercice 3031).

Une matrice de rang 1 admet l'écriture générale U^tV où U et V sont des vecteurs colonnes non nuls. Ici $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si A existe, A doit déjà vérifier $A^t tB = {}^tBA = 0$ ou encore $AV^tU = 0$ (1) et $V^tUA = 0$ (2). En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par U à droite puis en simplifiant par le réel non nul ${}^tUU = \|U\|_2^2$, on obtient $AV = 0$. Ceci montre que la première colonne de A est nulle (les $n-1$ dernières devant alors former une famille libre).

De même, en multipliant les deux membres de l'égalité (2) par ${}^tV$ à gauche, on obtient ${}^tUA = 0$ et donc les colonnes de la matrice A sont orthogonales à U (pour le produit scalaire usuel) ce qui invite franchement à considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \dots & \dots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui convient.

Correction de l'exercice 3411 ▲

Soit $P = X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$. P est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de A. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont à choisir dans $\{0, j, j^2\}$. Le polynôme caractéristique de A est de la forme $(-1)^n X^\alpha (X-j)^\beta (X-j^2)^\gamma$ avec $\alpha + \beta + \gamma = n$. De plus, A est réelle et on sait que j et $j^2 = \overline{j}$ ont même ordre de multiplicité ou encore $\gamma = \beta$.

Puisque A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\text{Ker}A) = n - \alpha = 2\beta.$$

On a montré que $\text{rg}A$ est un entier pair.

Correction de l'exercice 3414 ▲

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on appelle *projecteur* un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Soit p un projecteur.

(a) *Montrons que* $\text{Id}_E - p$ *est un projecteur et calculons* $p \circ (\text{Id}_E - p)$ *et* $(\text{Id}_E - p) \circ p$.
On a $(\text{Id}_E - p) \circ (\text{Id}_E - p) = \text{Id}_E - p - p + p^2 = \text{Id}_E - p$, car $p^2 = p$, ce qui prouve que $\text{Id}_E - p$ est un projecteur.

Par ailleurs, on a

$$p\circ(\mathrm{Id}_E-p)=p-p^2=p-p=0=(\mathrm{Id}_E-p)\circ p$$

donc pour tout $\vec{x}\in E$, on a $p(\vec{x}-p(\vec{x}))=\vec{0}$.

(b) *Montrons que pour tout $\vec{x}\in\operatorname{Im}p$, on a $p(\vec{x})=\vec{x}$.*
Soit $\vec{x}\in\operatorname{Im}p$, il existe $\vec{y}\in E$ tel que $\vec{x}=p(\vec{y})$, on a donc $p(\vec{x})=p^2(\vec{y})=p(\vec{y})=\vec{x}$.

(c) *On en déduit que $\operatorname{Im}p$ et $\ker p$ sont supplémentaires.*
Soit $\vec{x}\in E$, on peut écrire $\vec{x}=p(\vec{x})+\vec{x}-p(\vec{x})$, considérons $\vec{x}-p(\vec{x})$, on a $p(\vec{x}-p(\vec{x}))=0$ ce qui prouve que $\vec{x}-p(\vec{x})\in\ker p$. Ainsi tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de $\operatorname{Im}p$, $p(\vec{x})$, et d'un élément de $\ker p$, $\vec{x}-p(\vec{x})$, il nous reste à démontrer que la somme est directe.
Soit $\vec{x}\in\operatorname{Im}p\cap\ker p$, on a, d'une part $p(\vec{x})=\vec{x}$ d'après la question 2) car $\vec{x}\in\operatorname{Im}p$ et, d'autre part $p(\vec{x})=\vec{0}$ car $\vec{x}\in\ker p$, d'où $\vec{x}=\vec{0}$. On a donc

$$E=\operatorname{Im}p\oplus\ker p.$$

(Sachant que $\dim E=\dim\ker p+\dim\operatorname{Im}p$, on pouvait se contenter de démontrer que $\operatorname{Im}p\cap\ker p=\vec{0}$, ici nous avons explicitement la décomposition.)

(d) *Montrons que le rang de p est égal à la trace de p.*
Notons n la dimension de E et considérons une base de E de la forme

$$(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_k},\vec{e_{k+1}},\cdots,\vec{e_n})$$

où $(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_k})$ est une base de $\operatorname{Im}p$ et $(\vec{e_{k+1}},\cdots,\vec{e_n})$ une base de $\ker p$. dans une telle base, la matrice de p s'écrit

$$M=\begin{pmatrix}I_k&0\\0&0\end{pmatrix}$$

où I_k désigne la matrice identité $k\times k$, et les 0 des blocs de zéros. Le rang de p est égal à la dimension de $\operatorname{Im}p$ c'est-à-dire ici à k et on a bien $k=\mathrm{Tr}M=\mathrm{Tr}p$.

Correction de l'exercice 3444 ▲

(a) $<u_k(x),a>=k<x,a><a,a>+<x,a>=(k+1)<x,a>$ donc $x=\frac{-k}{k+1}<u_k(x),a>a+u_k(x)$.
On en déduit que u_k est inversible, et que $u_k^{-1}=u_{\frac{-k}{k+1}}$.

(b) L'adjoint d'un endomorphisme u est l'unique endomorphisme v qui satisfait : $\forall(x,y)\in E^2,<u(x),y>=<x,u(y)>$. Or $<u_k(x),y>=k<x,a><y,a>+<x,y>=<x,u_k(y)>$. Donc u_k est égal à son adjoint.

(c) Si u_k est orthogonal, on doit avoir $\|u_k(a)\|=\|a\|=1$, soit $|k+1|=1$. Ainsi $k=0$ ou $k=-2$.
Pour $k=0$, $u_k=\mathrm{id}$ est bien orthogonal. Pour $k=-2$, $u_{-2}^{-1}=u_{\frac{-2}{-2+1}}=u_{-2}={}^tu_{-2}$. Donc u_{-2} est bien orthogonal. Il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\{a\}^\perp$

(d) Si $k=0$, 1 est la seule valeur propre et $E_1=E$
Si $k\neq1$, $\forall x\in\{a\}^\perp,u_k(x)=x$ donc 1 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. De plus $u_k(a)=(k+1)a$ donc $(k+1)$ est valeur propre. Finalement, 1 est valeur propre de multiplicité exactement $n-1$, avec pour espace propre $\{a\}^\perp$, et $k+1$ est valeur propre simple avec espace propre $\mathbb{R}a$.

Correction de l'exercice 3468 ▲

(a)

(b) i. Pour $p\in K[X]$ on a $P(\Phi_u)=v\mapsto v\circ P(u)$ donc u et Φ_u ont mêmes polynômes annulateurs.

ii. $(\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi_u)) \Leftrightarrow (\exists\ v \neq 0 \text{ tq } v \circ (u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0) \Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas surjectif$) \Leftrightarrow (\lambda \in \mathrm{Spec}(u))$. Ainsi Φ_u et u ont même spectre. Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ on a : $(\Phi_u(v) = \lambda v) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker} v)$ donc $\mathrm{Ker}(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{L}(E)})$ est isomorphe à $\mathscr{L}(H,E)$ où H est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$. On en déduit : $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{L}(E)})) = \dim(E) \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Correction de l'exercice 3470 ▲

$\lambda = 1$: $\mathrm{Dir}(p) \subset \mathrm{Ker} f$, $\quad \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Base}(p)$.
$\lambda = 0$: $f\big(\mathrm{Base}(p)\big) \subset \mathrm{Dir}(p)$.

Correction de l'exercice 3472 ▲

(a) Pour $P \in K[X]$ on a $P(u) \circ v - v \circ P(u) = P'(u)$.

Correction de l'exercice 3474 ▲

Supposons qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$. Alors il existe $\ell \in E^*$ et $a \in E$ tous deux non nuls tels que :

$$\forall\, x \in E,\ f(g(x)) - g(f(x)) = \ell(x)a.$$

D'où par récurrence sur k :

$$\forall\, x \in E,\ f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = \ell(x) f^{k-1}(a) + \ell(f(x)) f^{k-2}(a) + \cdots + \ell(f^{k-1}(x))a.$$

Comme χ_f est irréductible, le sous-espace f-monogène engendré par a est égal à E, soit : $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E avec $n = \dim E$ et $f^n(a) = \alpha_0 a + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$. Alors $\mu_f(f) = f^n - \alpha_{n-1} f^{n-1} - \cdots - \alpha_0 f^0 = 0$ et :

$$\forall\, x \in E,\ 0 = \mu_f(f)(g(x)) - g(\mu_f(f)(x)) = \ell(x) f^{n-1}(a) + \cdots + \ell(f^{n-1}(x) - \cdots - \alpha_1 x)a.$$

Ceci implique $\ell(x) = 0$ pour tout x, en contradiction avec l'hypothèse $\mathrm{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$.

Correction de l'exercice 3475 ▲

(a) Oui, les applications $u \mapsto p \circ u$ et $u \mapsto u \circ p$ le sont (ce sont des projecteurs) et elles commutent.

(b) Soit $\mathscr{B}$ une base de E obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker} p$ et d'une base de $\mathrm{Im}\, p$.
Si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi(u)) = \left(\begin{smallmatrix} A & B/2 \\ C/2 & D \end{smallmatrix}\right)$, d'où $\mathrm{Spec}(\varphi) \subset \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ et $d_0 = (n-r)^2$, $d_1 = r^2$ et $d_{1/2} = 2r(n-r)$.

Correction de l'exercice 3476 ▲

Si D est diagonalisable alors les applications $X \mapsto DX$ et $X \mapsto XD$ le sont (annulateur scindé à racines simples) et elles commutent, donc elles sont simmultanément diagonalisables et leur différence, ϕ_D, est aussi diagonalisable.
Pour la réciproque, on commence par constater que si P est un polynôme quelconque, alors :

$$\forall\, X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ P(\phi_D)(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k D^k X \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} X D^k.$$

(formule du binôme pour $P = X^m$ et linéarité de chaque membre par rapport à P pour P quelconque).

Supposons ϕ_D diagonalisable, prenons P annulateur scindé à racines simples de ϕ_D, $X = U^tV$ où U est un vecteur propre de D associé à une certaine valeur propre λ et V un vecteur arbitraire. Donc :

$$0 = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k U^t V \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^t V \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^t V P(D - \lambda I).$$

Comme $U \neq 0$, ceci implique ${}^t V P(D-\lambda I) = 0$ pour tout V, donc $P(D-\lambda I) = 0$. Ainsi $D - \lambda I$ est diagonalisable et D itou.

Correction de l'exercice 3478 ▲

(a)

(b) $((-2,0,1),\ (0,3,-2),\ (1,-2,1))$.

Correction de l'exercice 3479 ▲

Base ssi n est impair, $2\vec{e}_1 = (1,1,-1,1,-1,\dots,1,-1)$ et les autres vecteurs s'obtiennent par rotation : $2\vec{e}_2 = (-1,1,1,-1,1,-1,\dots,1)$.

Correction de l'exercice 3481 ▲

2. $\phi_i^* = (1-2d_i(X-x_i))P_i^2$, $\psi_i^* = (X-x_i)P_i^2$.

Correction de l'exercice 3482 ▲

2. $\frac{1}{8}(9-15X^2,\ 75X-105X^3,\ -15+45X^2,\ -105X+175X^3)$.

Correction de l'exercice 3483 ▲

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b-a \\ a & b & c & (b^2-a^2)/2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & (b^3-a^3)/3 \\ a^3 & b^3 & c^3 & (b^4-a^4)/4 \end{pmatrix}$ et $\det(M) = (b-a)^4(c-a)(c-b)\frac{2c-a-b}{12}$, donc la famille est libre si et seulement si $c \neq \frac{a+b}{2}$.

Correction de l'exercice 3484 ▲

2. terme dominant $\Rightarrow P_n^*(Q_i) = 1$, donc $P_n^* = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{Q_i(i)} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f_i}{i!\,(n-i)!}$.

3. $P_k^* = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i} f_i}{i!\,(k-i)!}$.

Correction de l'exercice 3485 ▲

2. $P_0^* = \frac{f_a}{(b-a)^2}$, $P_1^* = \frac{f_a+f_b-4f_c}{(b-a)^2}$, $P_2^* = \frac{f_b}{(b-a)^2}$.

Correction de l'exercice 3491 ▲

1. $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
3. $(\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'})$ où A', B', C' sont les milieux du triangle ABC.
5. $\int\int_T f(x,y)\,dxdy = \frac{f(A')+f(B')+f(C')}{6}$.

Correction de l'exercice 3492 ▲

3. Rmq : coefficients de Fourier : $\alpha_p = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\cos(pa_k)$ et $\beta_p = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\sin(pa_k)$.

Correction de l'exercice 3494 ▲

2. $\left(\frac{\varphi^{n-1}-\bar{\varphi}^{n-1}}{\varphi-\bar{\varphi}}, \frac{\varphi^{n}-\bar{\varphi}^{n}}{\varphi-\bar{\varphi}}\right)$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 3502 ▲

$\vec{e}_i \leftrightarrow \vec{e}_j$: $\quad e_i^* \leftrightarrow e_j^*$.
$\vec{e}_i \leftarrow \alpha\vec{e}_i$: $\quad e_i^* \leftarrow e_i^*/\alpha$.
$\vec{e}_i \leftarrow \vec{e}_i + \alpha\vec{e}_j$: $\quad e_j^* \leftarrow e_j^* - \alpha e_i^*$.

Correction de l'exercice 3512 ▲

(a) Oui.

(b) Non. Le seul élément qui peut être l'élément neutre est 1 qui n'appartient pas à l'ensemble.

(c) Non. 0 n'a pas d'inverse.

(d) Oui.

Correction de l'exercice 3515 ▲

Le premier ensemble n'est pas un groupe car, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne peut avoir pour inverse que $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ qui n'appartient pas à l'ensemble.

Notons $G = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\}$ et montrons que G est un sous-groupe de $Gl(2,\mathbb{R})$.
— la matrice identité appartient à G.
— si $A, B \in G$ alors $AB \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ et $\det AB = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$, et donc $AB \in G$.
— Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ alors $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ appartient à G et est l'inverse de A.

Correction de l'exercice 3523 ▲

(a) L'ensemble G des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ n'est pas un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. En effet les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ appartiennent à G et leur produit $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à G.

(b) L'ensemble H des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est un sous groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. En effet,
- I_2 élément neutre de $Gl_2(\mathbb{R})$ appartient à H.
- Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ deux éléments de H alors $MM' = \begin{pmatrix} ac & ad + bc^{-1} \\ 0 & (ac)^{-1} \end{pmatrix}$ donc le produit de deux éléments de H appartient à H.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Alors $M^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ appartient à H.

(c) Soit K_M l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a \leqslant M$. Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il n'existe pas de valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. Alors I_2 appartient à K_M donc $M \geqslant 1$. Ainsi, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in |||$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à K_n donc le produit $AA_n = \begin{pmatrix} 1+n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à K_n. En conséquence, pour tout $n \in |||$, on a : $1+n \leqslant M$, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 3524 ▲

- Si $H \subset K$ alors $H \cup K = K$, qui est un sous-groupe de H. Même chose si $K \subset H$.
- Réciproquement, supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G. Par l'absurde supposons que $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$. Alors il existe $x \in H \setminus K$ et $y \in K \setminus H$. Comme $x, y \in H \cup K$ et que $H \cup K$ est un groupe alors $x.y \in H \cup K$. Donc $x.y \in H$ ou $x.y \in K$. Par exemple supposons $x.y \in H$ alors comme $x \in H$, $x^{-1} \in H$ et donc comme H est un groupe $x^{-1}.x.y \in H$ et donc $y \in H$. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y \in K \setminus H$. En conclusion, parmi les sous-groupes H, K l'un est inclus dans l'autre.

Correction de l'exercice 3527 ▲

Soit $G = \langle a, b \rangle$, tout élément g de G S'écrit $g = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$ avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$. Si $h \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, alors en particulier $h \in \langle a \rangle$ et $h = a^{\mu}$ avec $\mu \in \mathbb{Z}$, donc h commute avec a^{α_i} pour tout α_i dans $\mathbb{Z}$ (en effet $a^{\alpha_i} a^{\mu} = a^{\alpha_i + \mu} = a^{\mu} a^{\alpha_i}$. De même $h \in \langle b \rangle$ donc h s'écrit également $h = b^{\nu}$ ($\nu \in \mathbb{Z}$) et h commute avec b^{β_i}. Donc $hg = (ha^{\alpha_1}) b^{\beta_1} \ldots = (a^{\alpha_1} h) b^{\beta_1} \ldots = a^{\alpha_1} (h b^{\beta_1}) \ldots = a^{\alpha_1} (b^{\beta_1} h) \ldots = \cdots$ Finalement $hg = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_n} b^{\beta_n} h = gh$. Ainsi h commute avec tout élément de G et appartient ainsi au centre de G.

Correction de l'exercice 3536 ▲

Soit $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un morphisme de groupe. Comme tout morphisme f vérifie $f(0) = 0$. Notons $a = f(1)$. Alors

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a = 2.a.$$

De même, pour $n \geqslant 0$:

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots + f(1) = n.f(1) = n.a.$$

Enfin comme

$$0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = a + f(-1),$$

alors $f(-1) = -a$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(n) = n.a.$$

Donc tous les morphisme sont de la forme $n \mapsto n.a$, avec $a \in \mathbb{Z}$.

Un morphisme $n \mapsto n.a$ est injectif si et seulement si $a \neq 0$, et surjectif si et seulement si $n = \pm 1$.

Correction de l'exercice 3538 ▲

$$f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$$
$$x \mapsto e^{ix}$$

Vérifions que f est un morphisme de groupe. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = f(x) \times f(y),$$

et

$$f(x^{-1}) = e^{i(-x)} = \frac{1}{e^{ix}} = f(x)^{-1}.$$

Donc f est un morphisme de groupe.

Montrons que f n'est pas injective en prouvant que le noyau n'est pas réduit à 0 :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) = 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } e^{ix} = 1\right\} = \{x = 0 + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Enfin

$$\operatorname{Im} f = \left\{y \in \mathbb{C}^*, y = e^{ix}\right\}$$

est l'ensemble des complexes de module 1, c'est-à-dire le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Correction de l'exercice 3547 ▲

Soit $\phi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ un morphisme entre les deux groupes multiplicatifs $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$. Notons $a = \phi(i) \in \mathbb{R}^*$. Alors $\phi(-1) = \phi(i^2) = \phi(i)^2 = a^2$, de même $1 = \phi(1) = \phi((-1)^2) = \phi(-1)^2 = a^4$; donc $a^4 = 1$ et nécessairement $a^2 = 1$. Le morphisme ϕ n'est pas injectif car $\phi(1) = \phi(-1) = 1$, *a fortiori* ϕ n'est pas un isomorphisme.

Correction de l'exercice 3549 ▲

Soit $x \neq e$ un élément de G, soit $H = \{e, x, x^2, \dots\}$ le sous-groupe engendré par x. H est un sous-groupe de G donc $\operatorname{Card} H$ divise $\operatorname{Card} G = p$ qui un nombre premier. En conséquent $\operatorname{Card} H = 1$ ou p mais $H \neq \{e\}$ donc $\operatorname{Card} H = p$ et $H = G$.

Nous venons de montrer que G est engendré par x donc G est cyclique, de plus le raisonnement est valide quelque soit $x \neq e$ alors tout élément de $G \setminus \{e\}$ est un générateur de G.

Correction de l'exercice 3550 ▲

(a) $H \cap H'$ est un sous-groupe de H donc $\operatorname{Card} H \cap H'$ divise $\operatorname{Card} H = p$. Or p est premier donc $\operatorname{Card} H \cap H' = 1$ ou p. Mais $H \cap H' \neq H$ donc $\operatorname{Card} H \cap H' \neq p$ et donc $H \cap H' = \{e\}$.

(b) Soit E l'ensemble des éléments d'ordre p que l'on suppose non vide. Notons que pour $x \in E$ le sous-groupe H_x engendré par x est d'ordre p et de plus tout $z \in H_x \setminus \{e\}$ est d'ordre p car H_x est cyclique et p est premier. Donc H_x contient $p-1$ élément d'ordre p.

Si E ne contient qu'un seule élément x alors $E = H_x \setminus \{e\}$ et donc E contienet $p-1$ éléments.

Sinon, soit $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Alors d'après la première question $H_x \cap H_y = \{e\}$. Donc E se décompose en une union disjointe de $H_x \setminus \{e\}$. Donc $\operatorname{Card} E$ est multiple de $p-1$.

Correction de l'exercice 3552 ▲

(a) Notons d'abord que pour $x \in G$ $x^2 = e$ et donc $x^{-1} = x$. Soit maintenant $x, y \in G$. Alors $xy \in G$ et $(xy)^2 = e$ donc $xy = (xy)^{-1}$ et par suite $xy = y^{-1}x^{-1} = yx$ car x et y sont d'ordre 2. Le produit de deux éléments quelconques de G commute donc G est commutatif.

(b) Notons E l'ensemble des éléments d'ordre 2.

$$E = \{x \in G \ / \ x^2 = e \text{ et } x \neq e\} = \{x \in G \ / \ x = x^{-1} \text{ et } x \neq e\}.$$

Par l'absurde supposons que H est l'ensemble vide. Alors quelque soit $x \neq e$ dans G $x \neq x^{-1}$. Donc nous pouvons décomposer $G \setminus \{e\}$ en deux ensembles disjoints $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F' = \{x_1{}^{-1}, \dots, x_n{}^{-1}\}$ qui sont de même cardinal n. Donc le cardinal de G est $2n+1$ (le $+1$ provient de l'élément neutre). Ce qui contredit l'hypothèse « G d'orde pair ».

Correction de l'exercice 3564 ▲

(a) Non, a n'est pas régulier.

(b) Oui, $G \approx \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(c) Non, il n'y a pas d'élément neutre.

Correction de l'exercice 3577 ▲

Notons G l'ensemble des éléments d'ordre fini de H. Montrons que G est un sous-groupe de H.

— $G \subset H$ et $0 \in G$.

— Si $x \in G$ alors $(-x)+(-x)+\cdots+(-x) = -(x+x+\cdots+x) = 0$. Donc $-x \in G$.

— Si $x,y \in G$ alors $(x+y)+\cdots+(x+y) = (x+\cdots+x)+(y+\cdots+y) = 0+0 = 0$. Donc $x+y \in G$.

Nous venons de montrer que G est un sous-groupe de H. De plus comme H est commutatif alors G l'est aussi !

Correction de l'exercice 3578 ▲

(a) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est d'ordre 2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas d'ordre fini puisque, pour tout $n \in |||$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Notons e_G et e_H les éléments neutres respectifs de G et de H. Soit g un élément de G d'ordre n.

- Alors $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e_G) = e_H$. Donc $\varphi(g)$ est d'ordre inférieur ou égal à n, ordre de g.

- Supposons φ injectif et $\varphi(g)$ d'ordre strictement inférieur à n, c'est à dire qu'il existe $p < n$ tel que : $\varphi(g)^p = e_H$. Alors $\varphi(g^p) = e_H$ donc, puisque φ est injectif et $\varphi(e_G) = e_H$, on a aussi : $g^p = e_G$, ce qui est impossible puisque l'ordre de g est n.

(c) Raisonnons par l'absurde : Soit G un groupe fini. Supposons qu'il existe dans G un élément g n'étant pas d'ordre fini. Comme G est un groupe, on peut considérer $X = \{g^k \ k \in |||\}$. Or, pour $i \neq j$: $g^i \neq g^j$. En effet, supposons $i < j$. Si $g^i = g^j$ alors $g^{j-i} = e_G$ et g est d'ordre inférieur ou égal à $j-i$, donc fini, ce qui est impossible. X est donc un ensemble infini. G contient un ensemble infini donc est infini, ce qui est absurde, donc g ne peut être que d'ordre fini.

Correction de l'exercice 3581 ▲

Rappelons d'abord que pour x un élément d'ordre n, alors

$$x^q = e \Longrightarrow n|q.$$

— Si n est pair alors $ord(x^2) = n/2$: en effet $(x^2)^{\frac{n}{2}} = x^n = e$ et pour $p \geqslant 1$ tel que $(x^2)^p = e$ alors $x^{2p} = e$ et $n|2p$ donc $p \geqslant \frac{n}{2}$. Donc $n/2$ est le plus petit des entiers q (non nul) tel que $x^q = e$ et par conséquent $n/2$ est l'ordre de x.

— Si n est impair alors $ord(x) = n$. Tout d'abord $(x^2)^n = (x^n)^2 = e$ et pour p tel que $(x^2)^p = e$ alors $n|2p$ mais 2 et n sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, $n|p$ et en particulier $p \geqslant n$.

Correction de l'exercice 3582 ▲

(a) Déjà $(xy)^{mn} = x^{mn}y^{mn} = (x^m)^n(y^n)^m = e.e = e$. Soit p tel que $(xy)^p = e$, alors $e = (xy)^{mp} = x^{mp}y^{mp} = y^{mp}$, et donc mp est divisible par l'ordre de y , c'est-à-dire n. Comme m et n sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Gauss n divise p. Un raisonnement semblable à partir de $(xy)^{np} = e$ conduit à : m divise p. Finalement $m|p$ et $n|p$ donc $mn|p$ car m et n sont premiers entre eux.

Voici un contre exemple dans le cas où m et n ne sont pas premiers entre eux : dans le groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: $\bar{2}$ est d'ordre 6, $\bar{4}$ est d'ordre 3, mais $\bar{2}+\bar{4} = \bar{6}$ est d'ordre $2 \neq 3 \times 6$.

(b) A est d'ordre 4, B est d'ordre 3, $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est jamais la matrice identité pout $n \geqslant 1$.

Correction de l'exercice 3583 ▲

Par l'absurde supposons que $(\mathbb{Q},+)$ est engendré par un seul élément $\frac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux) alors tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit $n\frac{p}{q}$ avec $n\in\mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $\frac{p}{2q}$ (qui appartient à $\mathbb{Q}$) doit s'écrire $n\frac{p}{q}$, mais alors $2n=1$ avec $n\in\mathbb{Z}$ ce qui est impossible. Conclusion $(\mathbb{Q},+)$ n'est pas monogène.

Correction de l'exercice 3591 ▲

(a) $x\mapsto ax$, $a\in\mathbb{Q}$.

(b) $x\mapsto 0$.

(c) $x\mapsto 1$.

Correction de l'exercice 3612 ▲

(a)

(b) A est intègre car $\{0\}$ est premier et si $a\in A\setminus\{0\}$ alors $a\times a\in(a^2)$ qui est premier donc a^2 divise a d'où a est inversible.

Correction de l'exercice 3615 ▲

(a)

(b) 1.

(c) $x+y=(x+y)^2=x^2+y^2+xy+yx=x+y+xy+yx\Rightarrow xy+yx=0$.
Pour $y=1$: $x+x=0\Rightarrow 1=-1$.
Pour y quelconque : $xy=-yx=yx$.

(d) Antisymétrie : si $x=ay$, alors $xy=ay^2=ay=x$.
Donc $(x\leqslant y)$ et $(y\leqslant x)\Rightarrow xy=x=y$.

Correction de l'exercice 3617 ▲

Si $(1-ab)c=1=c(1-ab)$ alors $abc=c-1=cab$ donc $babca=bca-ba=bcaba$ soit $ba(1+bca)=bca=(1+bca)ba$ donc $1+bca$ est inverse de $1-ba$.

Correction de l'exercice 3618 ▲

(a)

(b)

(c) Remarque : la réciproque fausse : $A=\mathbb{Z}[X]$, $I=(X)$, $J=(X+4)$.

(d) $114\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 3627 ▲

$f(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$.
f est multiplicative sur la base canonique $\Rightarrow a_ia_j=0$ pour $i\neq j$.
$f(1,\dots,1)=1\Rightarrow$ un des a_i vaut 1, et les autres 0.
conclusion : f = fct coordonnée.

Correction de l'exercice 3628 ▲

(a)

(b) idem 3627 : les projections + la valeur de stationnement.

(c)

Correction de l'exercice 3629 ▲

(a) $\pm 1, \pm i$.

(b) On a : $1+i = 0\times 2 + (1+i) = 1\times 2 + (i-1)$.

(c)

Correction de l'exercice 3646 ▲

$K = \{0,1,a,b\}$ et $\{1,a,b\}$ est un groupe multiplicatif $\Rightarrow b = a^2$, $a^3 = 1$.

$+$	0	1	a	a^2
0	0	1	a	a^2
1	1	0	a^2	a
a	a	a^2	0	1
a^2	a^2	a	1	0

$\times$	1	a	a^2
1	1	a	a^2
a	a	a^2	1
a^2	a^2	1	a

Correction de l'exercice 3664 ▲

(a) $|S_n| = n!$ donc $|S_3| = 3! = 6$. Montrons plus généralement qu'il n'existe pas d'élément d'ordre $n!$ dans S_n ($n \geqslant 3$). Par l'absurde soit α un tel élément. Alors par hypothèse S_n est engendré par α et donc S_n est un groupe commutatif. Mais $(1,2)(2,3) \neq (2,3)(1,2)$ ce qui est absurde. En conclusion il n'existe pas d'éléments d'ordre 6.

(b) Explicitons S_3 :

$$S_3 = \left\{id; \tau_1 = (1,2); \tau_2 = (2,3); \tau_3 = (1,3); \sigma_1 = (1,2,3); \sigma_2 = \sigma_1^{-1} = (3,2,1)\right\}.$$

Remarquons

Les sous-groupes d'ordre 2 sont de la forme $\{id;\tau\}$ avec $\tau^2 = id$. Les seuls éléments d'ordre 2 sont les transpositions et donc se sont les groupes $\{id;(1,2)\}$,{ id; (1,3) }, $\{id;(2,3)\}$.

Les sous-groupes d'ordre trois sont de la forme $\{id,\sigma,\sigma^2\}$ avec $\sigma^2 = \sigma^{-1}$. Et donc le seul sous-groupe d'ordre 3 est $\{id;(1,2,3);(3,2,1)\}$.

(c) Les sous-groupes de S_3 ont un ordre qui divise $|S_3| = 6$. Donc un sous-groupe peut-être d'ordre $1,2,3$ ou 6. L'unique sous-groupe d'ordre 1 est $\{id\}$, et l'unique sous-groupe d'ordre 6 est S_3. Les sous-groupes d'ordre 2 et 3 ont étés donnés à la question précédente.

Correction de l'exercice 3670 ▲

(a) $\sigma = (1,3)(2,7,9,5) = (2,7,9,5)(1,3)$ et $\sigma^k = (1,3)^k(2,7,9,5)^k$. Les transpositions sont d'ordre 2 donc $(1,3)^k = \text{id}$ si $k \equiv 0 \pmod 2$ et $(1,3)^k = (1,3)$ si $k \equiv 1 \pmod 2$. Le cycle $(2,7,9,5)$ est d'ordre 4, et $(2,7,9,5)^k$ est respectivement égale à $\text{id}, (2,7,9,5), (2,9)(7,5), (5,9,7,2)$ si k est respectivement congru à $0,1,2,3$ modulo 4. Le calcul de σ^k donne donc $\text{id}, (1,3)(2,7,9,5), (2,9)(7,5)$ ou $(1,3)(5,9,7,2)$ selon que k est congru à $0,1,2$ ou 3 modulo 4.

(b) L'écriture de $\varphi = (10,3,4,1)(8,7)(4,7)(5,6)(2,6)(2,9)$ est une décomposition en produit de cycles mais ils ne sont pas à supports disjoints. Écrivons φ sous la forme :

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ce qui se décompose $\varphi = (1,10,3,4,8,7)(2,9,5,6) = (2,9,5,6)(1,10,3,4,8,7)$. Le calcul de $\varphi^k = (1,10,3,4,8,7)^k(2,9,5,6)^k$ est similaire au calcul précédent (selon $k \pmod{12}$)

Correction de l'exercice 3678 ▲

(a) $\mathscr{S}_N$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,N\}$. Dans $\mathscr{S}_{n+2}$ notons τ la permutation $(n+1,n+2)$. Nous définissons une application $\phi : \mathscr{S}_n \longrightarrow \mathscr{S}_{n+2}$ par les relations

$$\phi(\sigma) = \sigma \text{ si } \varepsilon(\sigma) = +1 \quad ; \quad \phi(\sigma) = \sigma\circ\tau \text{ sinon};$$

où ε désigne la signature. Alors ϕ est un morphisme de groupe, de plus quelque soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$ alors $\varepsilon(\phi(\sigma)) = +1$ (si $\varepsilon(\sigma) = +1$ c'est clair, sinon $\varepsilon(\phi(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)\times\varepsilon(\tau) = (-1)\times(-1) = +1$). Donc $\phi(\mathscr{S}_n)$ est un sous-groupe de $\mathscr{A}_{n+2}$.

Enfin ϕ est injective : en effet soit σ tel que $\phi(\sigma) = \mathrm{id}$. Soit $\varepsilon(\sigma) = +1$ et alors $\phi(\sigma) = \sigma = \mathrm{id}$; soit $\varepsilon(\sigma) = -1$ et alors $\phi(\sigma) = \sigma\circ\tau$, pour $j \in \{1,2,\dots,n\}$ $j = \phi(\sigma)(j) = \sigma\circ\tau(j) = \sigma(j)$, et donc quelque soit $j \in \{1,2,\dots,n\}$ $\sigma(j) = j$ et donc $\sigma = \mathrm{id}$. On vient de démontrer que la composée de deux permutations à supports disjoint est l'identité si et seulement si les permutations sont déjà l'identité !

Notons encore $\phi : \mathscr{S}_n \longrightarrow \phi(\mathscr{S}_n)$ le morphisme induit par ϕ. Il est injectif et surjectif, donc $\mathscr{S}_n$ est isomorphe $\phi(\mathscr{S}_n)$ qui est un sous-groupe de $\mathscr{A}_{n+2}$.

(b) $\mathscr{A}_5$ est de cardinal $5!/2 = 60$, et comme $24 = \mathrm{Card}\mathscr{S}_4$ ne divise pas 60 alors $\mathscr{A}_5$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 24.

(c) C'est un peu plus délicat car $\mathrm{Card}\mathscr{S}_5 = 5! = 120$ divise $\mathrm{Card}\mathscr{A}_6 = 6!/2 = 360$ donc l'argument ci-dessus n'est pas valide. Cependant s'il existe un isomorphisme entre $\mathscr{S}_5$ et un sous-groupe de $\mathscr{A}_6$ alors un cycle d'ordre 5 de $\mathscr{S}_5$ est envoyé sur une permutation $\sigma \in \mathscr{A}_6$ d'ordre 5.

Décomposons σ en produit de cycles à supports disjoints, $\sigma = \sigma_1\circ\sigma_2\circ\cdots$. Comme les cycles σ_i sont à supports disjoints, il y a au plus trois cycles (de longueur $\geqslant 2$) dans la décomposition (car dans $\mathscr{A}_6$ on peut permuter au plus 6 éléments).

— Le cas $\sigma = \sigma_1$ n'est pas possible car alors σ_1 serait un cycle d'ordre 5 et donc de signature -1 dans $\mathscr{A}_6$.

— Si $\sigma = \sigma_1\circ\sigma_2$ alors les longueurs de σ_1 et σ_2 sont $(4,2)$ ou $(2,2)$, et l'ordre de leur composée $\sigma_1\circ\sigma_2$ est donc 4 ou 2 mais pas 5.

— Si $\sigma = \sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3$ alors les σ_i sont des transpositions, et la signature de σ est alors -1 ce qui contredit $\sigma \in \mathscr{A}_6$.

Correction de l'exercice 3682 ▲

(a) $(a\ b)\circ(c\ d)$.

(b)

Correction de l'exercice 3683 ▲

(a) $(1\ 2)\circ(i\ j)$.

(b)

Correction de l'exercice 3684 ▲

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n+c+f}$.

Correction de l'exercice 3688 ▲

Compter les inversions ou récurrence : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Correction de l'exercice 3690 ▲

Les puissances de σ.

Correction de l'exercice 3691 ▲

Conjugaison : $\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$,
ou $\tau = (1\ 6) \circ (2\ 7) \circ (3\ 8) \circ (4\ 9) \circ (5\ 10) \circ (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$.
$\Rightarrow$ 50 éléments.

Correction de l'exercice 3693 ▲

30.

Correction de l'exercice 3695 ▲

$$C_{26}^3 \times \frac{2C_{23}^3 \times 2C_{20}^3}{2!} \times 4!C_{17}^5 \times \frac{5!C_{12}^6 \times 5!C_6^6}{2!} = 10\,372\,722\,765\,601\,996\,800\,000.$$

Correction de l'exercice 3696 ▲

(a) Les inversions de σ sont : $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

$\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$, $\{2,7\}$, $\{2,8\}$, $\{2,10\}$, $\{2,11\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$, $\{3,7\}$, $\{3,8\}$, $\{6,7\}$, $\{6,8\}$, $\{9,10\}$, $\{9,11\}$, $\{9,12\}$.

Au total, il y a $2+8+5+2+3 = 20$ inversions. σ est donc une permutation paire (de signature 1).

(b) $\tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 11\ 8\ 9\ 12)$.
Puis, $\tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 8\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 8\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 5\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 5\ 4\ 1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{5,2} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{1,4} \circ \tau_{5,2} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) = \tau_{1,3}$.
Par suite,

$$\sigma = \tau_{11,12} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{5,2} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3}.$$

(c) $O(1) = \{1,3,4,7\} = O(3) = O(4) = O(7)$, puis $O(2) = \{2,5,8,10\}$ puis $O(6) = \{6\}$ et $O(9) = \{9,11,12\} = O(11) = O(12)$. σ a 4 orbites, deux de cardinal 4, une de cardinal 3 et un singleton (correspondant à un point fixe).

(d) σ est donc le produit commutatif des cycles $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ et $c_3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 12 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.
On a $c_1^4 = c_2^4 = Id$ et $c_3^3 = Id$. Or, $2005 = 4.1001 + 1$. Donc, $c_1^{2005} = c_1(c_1^4)^{1001} = c_1$, et de même $c_2^{2005} = c_2$. Puis, $c_3^{2005} = (c_3^3)^{668} c_3 = c_3$. Puisque c_1, c_2 et c_3 commutent,

$$\sigma^{2005} = c_1^{2005} c_2^{2005} c_3^{2005} = c_1 c_2 c_3 = \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11).$$

Correction de l'exercice 3697 ▲

$(S_n, \circ)$ est engendré par les transpositions. Il suffit donc de montrer que pour $2 \leqslant i < j \leqslant n$, la transposition $\tau_{i,j}$ est produit des $\tau_{1,k}$, $2 \leqslant k \leqslant n$.
Mais $\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i} = (i1j)(ji1)(i1j) = (1ij) = \tau_{i,j}$ ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 3698 ▲

Les éléments de A_n sont les produits pairs de transpositions. Il suffit donc de vérifier qu'un produit de deux transpositions est un produit de cycles de longueur 3.
Soient i, j et k trois éléments deux à deux distincts de $\{1,...,n\}$. $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j}$ est le 3-cycle : $i \to j$ $j \to k$ $k \to i$, ce qui montre qu'un 3-cycle est pair et que le produit de deux transpositions dont les supports ont en commun un singleton est un 3-cycle.
Le cas $\tau_{i,j} \circ \tau_{i,j} = Id = (231)(312)$ est immédiat. Il reste à étudier le produit de deux transpositions à supports disjoints.
Soient i, j, k et l quatre éléments de deux à deux distincts de $\{1,...,n\}$.

$$\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l} = (jikl)(ijlk) = (jilk) = (jkil)(ljik).$$

Donc, $\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l}$ est un bien un produit de 3-cycles ce qui achève la démonstration.

Correction de l'exercice 3699 ▲

D'après l'exercice 3697, il suffit de montrer que pour $2 \leqslant i \leqslant n$, $\tau_{1,i}$ peut s'écrire en utilisant uniquement $\tau = \tau_{1,2}$ et $c = (2\ 3\ ...\ n\ 1)$. On note que $c^n = Id$.
Tout d'abord, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, étudions $\sigma = c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1}$.
Soit $k \in \{1,...,n\}$.

$$\begin{aligned}\tau \circ c^{n-i+1}(k) \neq c^{n-i+1}(k) \leqslant c^{n-i+1}(k) \in \{1,2\} \Leftrightarrow k \in \{c^{-n+i-1}(1), c^{-n+i-1}(2)\} \Leftrightarrow k \in \{c^{i-1}(1), c^{i-1}(2)\} \\ \Leftrightarrow k \in \{i, i+1\}.\end{aligned}$$

Donc, si $k \notin \{i, i+1\}$,

$$\sigma(k) = c^{i-1}(k)(\tau \circ c^{n-i+1}(k)) = c^{i-1}(c^{n-i+1}(k)) = c^n(k) = k,$$

et la restriction de σ à $\{1,...,n\} \setminus \{i, i+1\}$ est l'identité de cet ensemble. Comme σ n'est pas l'identité puisque $\sigma(i) \neq i$, σ est donc nécessairement la transposition $\tau_{i,i+1}$.
On a montré que $\forall i \in \{1,...,n-1\}$, $c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1} = \tau_{i,i+1}$.
Vérifions maintenant que les $\tau_{1,i}$ s'écrivent à l'aide des $\tau_{j,j+1}$. D'après l'exercice 3697, $\tau_{i,j} = \tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$, et donc bien sûr, plus généralement, $\tau_{i,j} = \tau_{k,i} \circ \tau_{k,j} \circ \tau_{k,i}$.
Par suite, $\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}$ puis, $\tau_{2,i} = \tau_{2,3} \circ \tau_{3,i} \circ \tau_{2,3}$, puis, $\tau_{3,i} = \tau_{3,4} \circ \tau_{4,i} \circ \tau_{3,4}$ ... et $\tau_{i-2,i} = \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1}$. Finalement,

$$\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \ldots \circ \tau_{i-2,i-1} \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \ldots \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2},$$

ce qui achève la démonstration.

Correction de l'exercice 3700 ▲

Soit $(G, \times)$ un groupe. Pour x élément de G, on considère $f_x : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ y & \mapsto & xy \end{array}$. f_x est une application de G vers G et de plus, clairement $f_x \circ f_{x^{-1}} = f_{x^{-1}} \circ f_x = Id_G$. Donc, pour tout élément x de G, f_x est une permutation de G.

Soit alors $\varphi : \begin{array}{ccc} (G,\times) & \rightarrow & (S_G,\circ) \\ x & \mapsto & f_x \end{array}$. D'après ce qui précède, φ est une application. De plus, φ est de plus un morphisme de groupes. En effet, pour $(x,x',y) \in G^3$, on a :

$$\varphi((xx'))(y) = f_{xx'}(y) = xx'y = f_x(f'_x(y)) = f_x \circ f_{x'}(y) = (\varphi(x) \circ \varphi(x'))(y),$$

et donc $\forall (x,x') \in G^2,\ \varphi(xx') = \varphi(x) o \varphi(x')$.
Enfin, φ est injectif car, pour x élément de G :

$$\varphi(x) = Id \Rightarrow \forall y \in G,\ xy = y \Rightarrow xe = e \Rightarrow x = e.$$

Donc, $\mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$, et φ est injectif.
φ est ainsi un isomorphisme de groupes de $(G,\times)$ sur $(f(G),\circ)$ qui est un sous groupe de $(S_G,\circ)$. $(G,\times)$ est bien isomorphe à un sous groupe de $(S_G,\circ)$.

Correction de l'exercice 3701 ▲

Montrons d'abord par récurrence sur $l \geqslant 2$ que la signature d'un cycle de longueur l est $(-1)^{l-1}$.
C'est connu pour $l = 2$ (signature d'une transposition).
Soit $l \geqslant 2$. Supposons que tout cycle de longueur l ait pour signature $(-1)^{l-1}$. Soit c un cycle de longueur $l+1$.
On note $\{x_1, x_2, ..., x_{l+1}\}$ le support de c et on suppose que, pour $1 \leqslant i \leqslant l$, $c(x_i) = x_{i+1}$ et que $c(x_{l+1}) = x_1$.
Montrons alors que $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ est un cycle de longueur l. $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ fixe déjà x_{l+1} puis, si $1 \leqslant i \leqslant l-1$, $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c(x_i) = \tau_{x_1,x_{l+1}}(x_{i+1}) = x_{i+1}$ (car x_{i+1} n'est ni x_1, ni x_{l+1}), et enfin $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c(x_l) = \tau_{x_1,x_{l+1}}(x_{l+1}) = x_1$. $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ est donc bien un cycle de longueur l. Par hypothèse de récurrence, $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ a pour signature $(-1)^{l-1}$ et donc, c a pour signature $(-1)^{(l+1)-1}$.
Montrons maintenant que si σ est une permutation quelconque de $\{1,...,n\}$ ayant k orbites la signature de σ est $(-1)^{n-k}$.
Si σ est l'identité, σ a n orbites et le résultat est clair.
Si σ n'est pas l'identité, on décompose σ en produit de cycles à supports disjoints.
Posons $\sigma = c_1...c_p$ où p désigne le nombre d'orbites de σ non réduites à un singleton et donc $k-p$ est le nombre de points fixes de σ. Si l_i est la longueur de c_i, on a donc $n = l_1 + ... + l_p + (k-p)$ ou encore $n-k = l_1 + ... + l_p - p$.
Mais alors,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{p} \varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^{p} (-1)^{l_i - 1} = (-1)^{l_1+...+l_p-p} = (-1)^{n-k}.$$

Correction de l'exercice 3702 ▲

(a) i. Soient σ et σ' deux éléments de S_n. Soit $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$. Le coefficient ligne i, colonne j de $P_\sigma P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))},$$

et est donc aussi le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $P_{\sigma \circ \sigma'}$. Par suite,

$$\forall (\sigma,\sigma') \in (S_n)^2,\ P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}.$$

ii. Soit $\sigma \in S_n$. D'après a), $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = P_{Id} = I_n = P_{\sigma^{-1}}P_\sigma$. On en déduit que toute matrice P_σ est inversible, d'inverse $P_{\sigma^{-1}}$. Par suite, $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ (et clairement, $G \neq \emptyset$).
Soit alors $(\sigma,\sigma') \in (S_n)^2$.

$$P_\sigma P_{\sigma'}^{-1} = P_\sigma P_{\sigma'^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma'^{-1}} \in G.$$

On a montré que G est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} S_n & \to & G \\ \sigma & \mapsto & P_\sigma \end{array}$. D'après a), φ est un morphisme de groupes. φ est clairement surjectif.
Il reste à vérifier que φ est injectif.
Soit $\sigma \in S_n$.

$$\begin{aligned}\sigma \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow P_\sigma = I_n &\Rightarrow \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2,\ \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,j}\\ &\Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \delta_{i,\sigma(i)} = 1 \Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \sigma(i) = i\\ &\Rightarrow \sigma = Id.\end{aligned}$$

Puisque le noyau du morphisme φ est réduit à $\{Id\}$, φ est injectif.
Ainsi, φ est un isomorphisme du groupe $(S_n,\circ)$ sur le groupe $(G,\times)$ et on a montré que $(G,\times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$, isomorphe à $(S_n,\circ)$.

(b) Soit $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$. Le coefficient ligne i, colonne j de AP_σ vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Ainsi, l'élément ligne i, colonne j, de AP_σ est l'élément ligne i, colonne $\sigma(j)$, de A, ou encore, si j est un élément donné de $\{1,...,n\}$, la j-ème colonne de AP_σ est la $\sigma(j)$-ème colonne de A. Ainsi, si on note C_1,...,C_n les colonnes de A (et donc $A = (C_1,...,C_n)$), alors $AP_\sigma = (C_{\sigma(1)},...,C_{\sigma(n)})$. En clair, multiplier A par P_σ à droite a pour effet d'appliquer la permutation σ aux colonnes de A (puisque P_σ est inversible, on retrouve le fait que permuter les colonnes de A ne modifie pas le rang de A).
De même, le coefficient ligne i, colonne j, de $P_\sigma A$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma^{-1}(i),k}a_{k,j} = a_{\sigma^{-1}(i),j},$$

(on a utilisé $\sigma(k) = i \Leftrightarrow k = \sigma^{-1}(i)$) et multiplier A par P_σ à gauche a pour effet d'appliquer la permutation σ^{-1} aux lignes de A.

Correction de l'exercice 3703 ▲

$G = \{A_1,...,A_p\}$ est déjà une partie non vide de $GL_n(\mathbb{R})$, stable pour $\times$. Il reste à vérifier que G est stable pour le passage à l'inverse.
Soient $i \in \{1,...,n\}$, puis $\varphi_i : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ A & \mapsto & A_iA \end{array}$. Puisque G est stable pour le produit, φ_i est une application de G dans G.
Montrons que φ_i est injective. Soit $(A,B) \in G$.

$$\varphi_(A) = \varphi_i(B) \Rightarrow A_iA = A_iB \Rightarrow A_i^{-1}A_iA = A_i^{-1}A_iB \Rightarrow A = B.$$

Donc, φ_i est une application injective de l'ensemble **fini** G dans lui-même. On sait alors que φ_i est une permutation de G.
Par φ_i, A_i a un antécédent A dans G. $A_iA = A_i$ fournit $A_i^{-1}A_iA = A_i^{-1}A_i$ puis $A = I \in G$. Ainsi, G contient la matrice I. Ensuite, I a un antécédent par φ_i dans G. Donc, il existe $B \in G$ telle que $A_iB = I$. Mais alors $A_i^{-1} = B \in G$.

G est bien stable pour le passage à l'inverse et est donc un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Correction de l'exercice 3704 ▲

Pour $(x_1, ..., x_n) \in E$, on pose $\varphi((x_1, ..., x_n)) = x_1 + ... + x_n$. φ est une forme linéaire non nulle sur E et H est le noyau de φ. H est donc bien un hyperplan de E.

Il est clair que, pour $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$, $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$. $(\mathscr{L}(E), +, .)$ est un espace vectoriel et donc, p est bien un endomorphisme de E.

$$p^2 = \frac{1}{n!^2}\left(\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma\right)^2 = \sum_{(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2} f_\sigma \circ f_{\sigma'}.$$

Mais, $(S_n, \circ)$ est un groupe fini. Par suite, l'application $\begin{array}{ccc} S_n & \to & S_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma \circ \sigma' \end{array}$, injective (même démarche que dans l'exercice 3703), est une permutation de S_n. On en déduit que, pour σ' donnée, $\sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma \circ \sigma'} = \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$. Ainsi, en posant $q = n!p$.

$$p^2 = \frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma' \in S_n}(\sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma \circ \sigma'}) = \frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma' \in S_n} q = \frac{1}{n!^2}.n!q = \frac{1}{n!}q = p.$$

p est donc une projection. Déterminons alors l'image et le noyau de p. Soit $i \in \{1, ..., n\}$.

$$p(e_i) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma(e_i) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(i)}.$$

Maintenant, il y a (bien sûr) autant de permuations σ telles que $\sigma(i) = 1$, que de permutations σ telles que $\sigma(i) = 2$,... ou de permutations σ telles que $\sigma(i) = n$, à savoir $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Donc,

$$\forall i \in \{1, ..., n\},\ p(e_i) = \frac{1}{n!}\frac{n!}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k.$$

Posons $u = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k$. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{Im}p = \mathrm{Vect}(p(e_1), ..., p(e_n)) = \mathrm{Vect}(u).$$

Ensuite, si $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ est un élément de E,

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k p(e_k) = 0 \Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{n} x_k)u = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Leftrightarrow x \in H.$$

Ainsi, p est la projection sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à H.

Correction de l'exercice 3705 ▲

(a) Commutative, associative, 0 = élt neutre, tout élt $\neq 1$ est régulier, seul 0 est symétrisable.

(b) Tout élt est symétrisable et $x^{-1} = \frac{x}{x-1}$.

Correction de l'exercice 3706 ▲

$\exists\, b \in E$ tq $a * b * a = a$. Alors $b * a$ est neutre à droite et $a * b$ est neutre à gauche.

Correction de l'exercice 3707 ▲

(a) Associative, commutative, $\{e\}$ = élement neutre, A est symétrisable $\Longleftrightarrow$ $A = \{a\}$ avec a symétrisable.

(b) Oui.

Correction de l'exercice 3708 ▲

(a) Non commutative, associative, $(1,0)$ = élt neutre,
(a,b) est régulier $\iff a \neq 0$.
(a,b) est inversible $\iff a = \pm 1$.

(b)

(c)

(d)

Correction de l'exercice 3720 ▲

(a)

(b) Soit $x \in G$: $\exists\, u,v \in \mathbb{Z}$ tq $ua+vb=1 \Rightarrow x=(x^{ua})(x^{vb})$.

Correction de l'exercice 3727 ▲

Soir $\{e_1,\dots,e_p\}$ une partie génératrice de cardinal minimal. Alors les 2^p éléments $e_1^{\alpha_1}\dots e_p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_i \in \{0,1\}$ sont distincts (sinon un des e_i appartient au groupe engendré par les autres) donc $n \geqslant 2^p$.

Correction de l'exercice 3728 ▲

Si $a \in G$ est d'ordre infini alors il engendre un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, qui a une infinité de sous-groupes ; c'est exclu. Donc tous les sous-groupes monogènes de G sont finis, et G est la réunion de ces sous-groupes.

Correction de l'exercice 3758 ▲

(a) $a>0, b=c, d>0, ad-bc>0$.

(b) $a-b>0$ et $a+(n-1)b>0$.

(c)

Correction de l'exercice 3759 ▲

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, X\sqrt{\frac{3}{2}}, (3X^2-1)\sqrt{\frac{5}{8}} + (5X^3-3X)\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$.

Correction de l'exercice 3760 ▲

$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{X-2}{\sqrt{10}}, \frac{X^2-4X+2}{\sqrt{14}}$.

Correction de l'exercice 3761 ▲

(a)

(b) Élever au carré.

(c) i. $(\vec{x} \mid \vec{u}) = 1 \Leftrightarrow (i(\vec{x}) \mid \vec{u} - i(\vec{x})) = 0$: sphère passant par $\vec{0}$.

ii. Hyperplan ne passant pas par $\vec{0}$.

iii. $\|\vec{x}-\vec{a}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow \left\|\vec{x} - \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2-R^2}\right\|^2 = \frac{R^2}{(\|\vec{a}\|^2-R^2)^2}$: sphère ne passant pas par $\vec{0}$.

Correction de l'exercice 3762 ▲

(a) Élever au carré.

(b)

Correction de l'exercice 3763 ▲

(a)

(b) $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Correction de l'exercice 3764 ▲

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3)\right)$

(b) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $\sqrt{\frac{7}{10}}$.

Correction de l'exercice 3765 ▲

$\frac{1}{\Sigma a_i^2}\Big(I-(a_ia_j)\Big)$.

Correction de l'exercice 3769 ▲

Si $p\circ q = q\circ p$: Soient $x \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} p$ et $y \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} q$.
Alors $p\circ q(x) = q(x) \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, donc $(q(x) \mid y) = (x \mid y) = 0$. Si $A = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} p$ et $B = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} q$ sont orthogonaux : Alors $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} A$, $\operatorname{Im} q = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} B$, et $E = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} A \overset{\perp}{\oplus} B \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} p^{\perp} \cap \operatorname{Im} q^{\perp})$. Par décomposition, on obtient $p\circ q = q \circ p =$ la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Correction de l'exercice 3770 ▲

(a) $\sum_{i=1}^{n} (\vec{e}_j \mid \vec{e}_i)^2 = 1 \Rightarrow$ famille orthonormée et $\operatorname{vect}(\vec{e}_i)^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

(b)

Correction de l'exercice 3773 ▲

sphère de centre $-\frac{\gamma\vec{a}}{\beta\|\vec{a}\|^2}$.

Correction de l'exercice 3777 ▲

Soit X la matrice de $\vec{e}_n$ dans $\mathscr{B}$. On a $GX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et ${}^tXGX = \lambda x_p = 1$. On applique alors les formules de Cramer.

Correction de l'exercice 3779 ▲

Non, $\|\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3\|^2<0$.

Correction de l'exercice 3781 ▲

(a)

(b)

(c) $\int_{t=0}^{1} t^k t^x \, dt = \frac{1}{k+x+1}$.

(d) Φ a pour pôles au plus simples $-1,-2,\dots,-n-1$ et pour racines $0,1,\dots,n-1$. Comme $\Phi(x)\to 0$ lorsque $x\to\infty$, on a donc $\Phi(x)=\lambda\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(x+1)\dots(x+n+1)}$.

(e) $a_k=$ résidu de Φ en $-k-1=(-1)^{n+k}\lambda\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}$.

(f)

Correction de l'exercice 3782 ▲

$x^2+(x+y)^2+(x+2y)^2=(\sqrt{3}(x-y))^2+(\sqrt{2}y)^2$.

Correction de l'exercice 3785 ▲

$f\in F^\perp \Rightarrow xf\perp f$.

Correction de l'exercice 3786 ▲

(a)

(b) $30X^2-36X+9$.

Correction de l'exercice 3787 ▲

$P_a(t)=\frac{3}{8}(3-5t^2-5a^2+15a^2t^2)+\frac{5at}{8}(15-21t^2-21a^2+35a^2t^2)$,
$8\|P_a\|^2=9+45a^2-165a^4+175a^6$ est maximal pour $a=\pm 1\Rightarrow \|P_a\|=2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 3788 ▲

(a)

(b) $\pi(f)(t)=f(0)\frac{\mathrm{sh}(1-t)}{\mathrm{sh}(1)}+f(1)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(1)}$.

(c) L'inf est atteint pour la fonction $f\in W$ telle que $f(0)=\alpha$ et $f(1)=\beta$, soit $f(t)=\alpha\frac{\mathrm{sh}(1-t)}{\mathrm{sh}(1)}+\beta\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(1)}$ et $inf=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\mathrm{ch}(1)-2\alpha\beta}{\mathrm{sh}(1)}$.

Correction de l'exercice 3789 ▲

(a) Le sous-espace vectoriel engendré a un orthogonal nul.

(b) N'importe quelle famille génératrice convient (équivalence des normes).

(c) $1=\|y_i\|^2=\|y_i\|^4+\sum_{j\neq i}(y_i\mid y_j)^2\Rightarrow \forall\, j\neq i,\ (y_i\mid y_j)=0$.

(d) Par polarisation on a : $\forall\, x,y,\ \sum_{j\in I}(x\mid y_j)(y\mid y_j)=A(x\mid y)$ donc $\sum_{j\in I}(x\mid y_j)y_j-Ax\in E^\perp$.

Correction de l'exercice 3790 ▲

Soient $x \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ et $y = u(z)-z \in \mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$. On a $y = u(z+\lambda x)-(z+\lambda x)$ d'où :

$$\|z+\lambda x\|^2 \geqslant \|u(z+\lambda x)\|^2 = \|z+\lambda x\|^2 + 2\lambda(x \mid y) + 2(z \mid y) + \|y\|^2.$$

En faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on obtient $(x \mid y) = 0$ et on conclut avec le théorème du rang.

Correction de l'exercice 3791 ▲

f linéaire et $f = x \mapsto \|x\|^2$ conviennent et l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f vérifiant la propriété est stable par combinaison linéaire donc toute fonction de la forme $x \mapsto \ell(x) + a\|x\|^2$ avec $\ell \in E^*$ et $a \in \mathbb{R}$ convient. On montre que ce sont les seules : Soit $f \in \mathscr{E}$ l'on décompose en sa partie paire f_p et sa partie impaire f_i. Alors $f_p, f_i \in \mathscr{E}$.
Soient $x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$ et $x \perp y$. On a $f_i(x \pm y) = f_i(x) \pm f_i(y)$ et $f_i(2x) = f_i(x+y) + f_i(x-y) = 2f_i(x)$. Ensuite, $f_i(2x) + f_i(x) - f_i(y) = f_i(2x+y) + f_i(x-2y) = f_i(3x-y) = f_i(3x) - f_i(y)$ d'où $f_i(3x) = 3f_i(x)$ et de proche en proche $f_i(kx) = kf_i(x)$ pour $k \in |||$ puis pour $k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ successivement vu la continuité de f. En prenant une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale on a $f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n)$ pour tous $x_1, \dots, x_n$ réels donc f_i est linéaire.
Soient à présent $x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$ alors $f_p(x+y) + f_p(x-y) = f(2x)$ et $f_p(x+y) + f_p(y-x) = f_p(2y)$ d'où $f_p(2x) = f_p(2y)$. Ainsi f_p est constante sur les sphères de centre 0. On écrit $f_p(x) = \varphi(\|x\|^2)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ prolongée à $\mathbb{R}$ par imparité ($f_p(0) = 0$ de manière évidente) et on a $\varphi(a^2+b^2) = f_p(ae_1+be_2) = f_p(ae_1) + f_p(be_2) = \varphi(a^2) + \varphi(b^2)$ d'où l'on conclut que φ est linéaire.

Correction de l'exercice 3792 ▲

Posons $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. **1ère solution.** • φ est symétrique. En effet, pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \varphi(B,A).$$

• φ est bilinéaire par linéarité de la trace et de la transposition. • Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors

$$\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}a_{i,j}\right) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$$

car au moins un des réels de cette somme est strictement positif. φ est donc définie, positive.
2ème solution. Posons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On a

$$\mathrm{Tr}({}^tAB) = \textstyle\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}b_{i,j}\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

Ainsi, φ est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. N n'est autre que la norme associée au produit scalaire φ (et en particulier, N est une norme).
Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned}
N(AB)^2 &= \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2\right) \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= \sum_{i,j,k,l} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{i,k} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l,j} b_{l,j}^2\right) = N(A)^2N(B)^2,
\end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB) \leqslant N(A)N(B).}$$

Correction de l'exercice 3793 ▲

(a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(x+z,y)+f(x-z,y) &= \frac{1}{4}(||x+z+y||^2+||x-z+y||^2-||x+z-y||^2-||x-z-y||^2) \\ &= \frac{1}{4}\left(2(||x+y||^2+||z||^2)-2(||x-y||^2+||z||^2)\right) = 2f(x,y). \end{aligned}$$

(b) $2f(x,y) = f(x+x,y)+f(x-x,y) = f(2x,y)+f(0,y)$ mais $f(0,y) = (||y||^2-||-y||^2) = 0$ (définition d'une norme).

(c) • Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx,y) = nf(x,y)$. C'est clair pour $n=0$ et $n=1$. Soit $n \geqslant 0$. Si l'égalité est vraie pour n et $n+1$ alors d'après 1),

$$f((n+2)x,y)+f(nx,y) = f((n+1)x+x,y)+f((n+1)x-x,y) = 2f((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$f((n+2)x,y) = 2f((n+1)x,y)-f(nx,y) = 2(n+1)f(x,y)-nf(x,y) = (n+2)f(x,y).$$

Le résultat est démontré par récurrence. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x,y) = f\left(n\times\frac{1}{n}.x,y\right) = nf\left(\frac{1}{n}x,y\right)$ et donc $f\left(\frac{1}{n}x,y\right) = \frac{1}{n}f(x,y)$. • Soit alors $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $f(rx,y) = \frac{1}{q}f(px,y) = p\frac{1}{q}f(x,y) = rf(x,y)$ et donc, pour tout rationnel positif r, $f(rx,y) = rf(x,y)$. Enfin, si $r \leqslant 0$, $f(rx,y)+f(-rx,y) = 2f(0,y) = 0$ (d'après 1)) et donc= $f(-rx,y) = -f(-rx,y) = rf(x,y)$.

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(rx,y) = rf(x,y).$$

(d) On pose $x = \frac{1}{2}(u+v)$ et $y = \frac{1}{2}(u-v)$.

$$f(u,w)+f(v,w) = f(x+y,w)+f(x-y,w) = 2f(x,w) = 2f\left(\frac{1}{2}(u+v),w\right) = f(u+v,w).$$

(e) f est symétrique (définition d'une norme) et linéaire par rapport à sa première variable (d'après 3) et 4)). Donc f est bilinéaire.

(f) f est une forme bilinéaire symétrique. Pour $x \in E$, $f(x,x) = \frac{1}{4}(||x+x||^2+||x-x||^2) = \frac{1}{4}||2x||^2 = ||x||^2$ (définition d'une norme) ce qui montre tout à la fois que f est définie positive et donc un produit scalaire, et que $||\ ||$ est la norme associée. $||\ ||$ est donc une norme euclidienne.

Correction de l'exercice 3794 ▲

Soit A un éventuel polynôme solution c'est à dire tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 P(t)A(t)\,dt = P(0)$.
$P = 1$ fournit $\int_0^1 A(t)\,dt = 1$ et donc nécessairement $A \neq 0$. $P = XA$ fournit $\int_0^1 tA^2(t)\,dt = P(0) = 0$. Mais alors, $\forall t \in [0,1]$, $tA^2(t) = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) puis $A = 0$ (polynôme ayant une infinité de racines deux à deux distinctes). A n'existe pas.

Correction de l'exercice 3795 ▲

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (x|e_1,\dots,x|e_n) \end{array}$. φ est clairement linéaire et $\mathrm{Ker}\varphi$ est $(e_1,\dots,e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$.
Comme E et $\mathbb{R}^n$ ont mêmes dimensions finies, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, pour tout n-uplet $(a_1,\dots,a_n)$ de réels, il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x|e_i = a_i$.

Correction de l'exercice 3796 ▲

1ère solution. Montrons par récurrence que sur $n=\dim(E)$ que, si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est obtusangle, $p\leqslant n+1$. • Pour $n=1$, une famille obtusangle ne peut contenir au moins trois vecteurs car si elle contient les vecteurs x_1 et x_2 verifiant $x_1.x_2<0$, un vecteur x_3 quelconque est soit nul (auquel cas $x_3.x_1=0$), soit de même sens que x_1 (auquel cas $x_1.x_3>0$) soit de même sens que x_2 (auquel cas $x_2.x_3>0$). Donc $p\leqslant 2$. • Soit $n\geqslant 1$. Suppososons que toute famille obtusangle d'un espace de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille obtusangle d'un espace E de dimension $n+1$. Si $p=1$, il n'y a plus rien à dire. Supposons $p\geqslant 2$. x_p n'est pas nul et $H=x_p^{\perp}$ est un hyperplan de E et donc est de dimension n. Soit, pour $1\leqslant i\leqslant p-1$, $y_i=x_i-\frac{(x_i|x_p)}{||x_p||^2}x_p$ le projeté orthogonal de x_i sur H. Vérifions que la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle. Soit $(i,j)\in[\![1,p-1]\!]$ tel que $i\neq j$.

$$y_i.y_j=x_i.x_j-\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2}-\frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{||x_p||^2}+\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{||x_p||^4}=x_i|x_j-\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2}<0.$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence, $p-1\leqslant 1+\dim H=n+1$ et donc $p\leqslant n+2$. Le résultat est démontré par récurrence. **2ème solution.** Montrons que si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est obtusangle, la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est libre. Supposons par l'absurde, qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i=0$ $(*)$. Quite à multiplier les deux membres de $(*)$ par -1, on peut supposer qu'il existe au moins un réel $\lambda_i>0$. Soit I l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i>0$ et J l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i\leqslant 0$ (éventuellement J est vide). I et J sont disjoints. (*) s'écrit $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=-\sum_{i\in J}\lambda_i x_i$ (si J est vide, le second membre est nul). On a

$$0\leqslant\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right\|^2=\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right).\left(-\sum_{i\in J}\lambda_i x_i\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_i(-\lambda_j)x_i.x_j\leqslant 0.$$

Donc, $\|\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\|^2=0$ puis $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0$. Mais, en faisant le produit scalaire avec x_p, on obtient $\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right).x_p=\sum_{i\in I}\lambda_i(x_i.x_p)<0$ ce qui est une contradiction. La famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est donc libre. Mais alors son cardinal $p-1$ est inférieur ou égal à la dimension n et donc $p\leqslant n+1$.

Correction de l'exercice 3797 ▲

(a) Soit $a\in\mathbb{C}$. Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ et $(P,Q)\in E^2$.

$$\varphi_a(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)(a)=\lambda P(a)+\mu Q(a)=\lambda\varphi_a(P)+\mu\varphi_a(Q).$$

Donc, φ_a est une forme linéaire sur E.

(b) On a déjà $\operatorname{card}\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}=n+1=\dim(E)=\dim(E^*)<+\infty$. Il suffit donc de vérifier que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre.

Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on pose $P_k=\prod_{j\neq k}\frac{X-a_j}{a_k-a_j}$. Chaque P_k est un élément de E et de plus

$$\forall(j,k)\in[\![0,n]\!]^2,\ \varphi_{a_j}(P_k)=\delta_{j,k}=\left\{\begin{array}{l}1\text{ si }j\neq k\\0\text{ si }j=k\end{array}\right.\quad(*).$$

Soit alors $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j=0\Rightarrow\forall P\in E,\ \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j(P)=0\Rightarrow\forall k\in[\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j(P_k)=0\Rightarrow\forall k\in[\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\delta_{j,k}=0$$
$$\Rightarrow\forall k\in[\![0,n]\!],\ \lambda_k=0.$$

Ceci montre que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre et donc une base de E^*. Les égalités $(*)$ montrent alors que la préduale de la base $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de E^* est la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

(c) Pour $P\in E$, posons $\varphi(P)=\int_0^1 P(t)\,dt$. φ est une forme linéaire sur E et donc, puisque la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de E^*, il existe $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\varphi=\sum_{j=0}^n\lambda_j\varphi_{a_j}$ ou encore il existe $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout $P\in E$, $\int_0^1 P(t)\,dt=\lambda_0P(a_0)+\ldots+\lambda_nP(a_n)$ (les λ_j étant indépendants de P).

En appliquant cette dernière égalité au polynôme P_k, $0\leqslant k\leqslant n$, on obtient $\lambda_k=\int_0^1 P_k(t)\,dt=\int_0^1\prod_{j\neq k}\frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt$.

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt=\sum_{k=0}^n\lambda_kP(a_k)\text{ où }\forall k\in[\![0,n]\!],\ \lambda_k=\int_0^1\prod_{j\neq k}\frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt.}$$

Correction de l'exercice 3798 ▲

Les quatre applications φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 sont effectivement des formes linéaires sur E.

Cherchons tout d'abord la future base préduale de la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)$. On note (P_0,P_1,P_2,P_3) cette future base.

• On doit avoir $\varphi_1(P_2)=\varphi_2(P_2)=\psi_2(P_2)=0$ et $\psi_1(P_2)=1$. Ainsi, P_2 s'annule en 0 et en 1 et de plus $P_2'(1)=0$. Donc P_2 admet 0 pour racine d'ordre 1 au moins et 1 pour racine d'ordre 2 au moins. Puisque P_2 est de degré inférieur ou égal à 3, il existe une constante a telle que $P_2=aX(X-1)^2=aX^3-2aX^2+aX$ puis $P_2'(0)=1$ fournit $a=1$ puis $P_2=X(X-1)^2$.

• De même, il existe une constante a telle que $P_3=aX^2(X-1)=aX^3-aX^2$ et $1=P_3'(1)=3a-2a$ fournit $P_3=X^2(X-1)$.

• P_0 admet 1 pour racine double et donc il existe deux constantes a et b telles que $P_0=(aX+b)(X-1)^2$ puis les égalités $P_0(0)=1$ et $P_0'(0)=0$ fournissent $b=1$ et $a-2b=0$. Par suite, $P_0=(2X+1)(X-1)^2$.

• P_1 admet 0 pour racine double et il existe deux constantes a et b telles que $P_1=(aX+b)X^2$ puis les égalités $P_1(1)=1$ et $P_1'(1)=0$ fournissent $a+b=1$ et $3a+2b=0$ et donc $P_1=(-2X+3)X^2$.

$$\boxed{P_0=(2X+1)(X-1)^2,\ P_1=(-2X+3)X^2,\ P_2=X(X-1)^2\text{ et }P_3=X^2(X-1).}$$

Montrons alors que $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de E^*. Cette famille est libre car si $a\varphi_1+b\varphi_2+c\psi_1+d\psi_2=0$, on obtient en appliquant successivement à P_0, P_1, P_2 et P_3, $a=b=c=d=0$. Mais alors, la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)$ est une famille libre de E^* de cardinal 4et donc une base de E^*. Sa préduale est (P_0,P_1,P_2,P_3).

Correction de l'exercice 3799 ▲

1 ère solution. On utilise le fait qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux contient l'autre. Donc

$$\varphi\psi=0\Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E\Rightarrow \mathrm{Ker}\psi\subset\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E\text{ ou }\mathrm{Ker}\varphi\subset\mathrm{Ker}\psi=\mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E\Rightarrow\varphi=0\text{ ou }\psi=0.$$

2ème solution. Supposons que $\varphi\psi=0$ et qu'il existe x et y tels que $\varphi(x)\neq0$ (et donc $\psi(x)=0$) et $\psi(y)\neq0$ (et donc $\varphi(y)=0$). Alors $0=\varphi(x+y)\psi(x+y)=(\varphi(x)+\varphi(y))(\psi(x)+\psi(y))=\varphi(x)\psi(y)$ ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\forall(\varphi,\psi)\in(E^*)^2,\ (\forall x\in E,\ \varphi(x)\psi(x)=0)\Rightarrow\varphi=0\text{ ou }\psi=0.}$$

Correction de l'exercice 3800 ▲

(a) Soit $\varphi\in E^*$.

• $\Rightarrow$ / Supposons qu'il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi=\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_n\varphi_n$.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i$. Alors $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x) = 0 + \ldots + 0 = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}\varphi$. On a montré que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi$.

• $\Leftarrow$ / Supposons tout d'abord la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ libre. On complète éventuellement la famille libre $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ de E^* en une base $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\varphi_{n+1},\ldots,\varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1,\ldots,e_n,e_{n+1},\ldots,e_p)$ la préduale de la base $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$.
Soit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ un élément de E.

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(e_{n+1},\ldots,e_p)$$

(avec la convention usuelle $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0\}$ dans le cas $p = n$). Donc $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i = \mathrm{Vect}(e_{n+1},\ldots,e_p)$.

Soit alors $\varphi \in E^*$. Posons $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\varphi_i$.

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \mathrm{Vect}(e_{n+1},\ldots,e_p) \subset \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \forall j \in [\![n+1,p]\!],\ \varphi(e_j) = 0$$
$$\Rightarrow \forall j \in [\![n+1,p]\!],\ \lambda_j = 0 \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est libre.

Si tous les φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont nuls alors $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i = E$ puis $\mathrm{Ker}\varphi = E$ et donc $\varphi = 0$. Dans ce cas aussi, φ est combinaison linéaire des φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.
Si les φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls et si la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est liée, on extrait de la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ génératrice de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_m})$ de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$.

On a $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k}$ mais d'autre part, tout φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, étant combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant m$, chaque $\mathrm{Ker}\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, contient $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k}$ et donc $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i$. Finalement, $\bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}\varphi_{i_k} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi$. D'après l'étude du cas où la famille est libre, φ est combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant m$ et donc des φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. La réciproque est démontrée dans tous les cas.

(b) Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que $P = \mathrm{Ker}\varphi$ (en particulier φ n'est pas nulle). Soient φ_1 la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto x+y+z$ et φ_2 la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto 2x+3z$. Alors la famille (φ_1,φ_2) est une famille libre du dual de $\mathbb{R}^3$ et $D = \mathrm{Ker}\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2$. D'après 1)

$$D \subset P \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\ \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \text{ (théorie des faisceaux)},$$

puis

$$u \in P \Leftrightarrow a\varphi_1(u) + b\varphi_2(u) = 0 \Leftrightarrow 3a + 5b = 0.$$

Une équation de P est donc $5(x+y+z) - 3(2x+3z) = 0$ ou encore $-x+5y-4z = 0$.

Correction de l'exercice 3801 ▲

Soit $f: \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)) \end{array}$. Il s'agit de démontrer que la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est liée si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$.

• Si la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est libre, c'est une base de E^* (car $\dim(E^*)=n$). Notons $(u_1,\dots,u_n)$ sa préduale et notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $1\leqslant i\leqslant n$, on a $f(u_i)=e_i$. Ainsi, l'image par f d'une base de E est une base de $\mathbb{K}^n$ et on sait alors que f est un isomorphisme. En particulier, $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$.

• Si les φ_i sont tous nuls, tout vecteur non nul x annule chaque φ_i. Supposons alors que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est liée et que les φ_i ne sont pas tous nuls. On extrait de la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m})$ (avec $1\leqslant m<n$) de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$. On complète la famille libre $(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m})$ en une base $(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m},\psi_1,\dots,\psi_{n-m})$ de E^*. On note $(e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n)$ sa préduale. Les formes linéaires φ_{i_1},..., φ_{i_m} s'annulent toutes en e_n et donc chaque φ_i s'annule en e_n puisque chaque φ_i est combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1\leqslant i\leqslant m$. Le vecteur e_n est donc un vecteur non nul x tel que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x)=0$.

Correction de l'exercice 3802 ▲

La matrice de la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) dans la base canonique du dual de $\mathbb{R}^4$ est $A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&1&0&1\\-1&m&1&-3\\-2&1&m+4&-m\end{pmatrix}$.

La matrice A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&-2&1\\-1&m+1&2&-3\\-2&3&m+6&-m\end{pmatrix}$ (pour $2\leqslant j\leqslant 3, C_j\leftarrow C_j-C_1$)

puis que la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\-1&m+1&-2m&m-2\\-2&3&m&-m+3\end{pmatrix}$ $(C_3\leftarrow C_3-2C_2$ et $C_4\leftarrow C_4+C_2)$

• Si $m=0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-1&1&-2\\-2&3&3\end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{rg}(A)=3$.

• Si $m\neq 0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\-1&m+1&-2&m-2\\-2&3&1&-m+3\end{pmatrix}$ $(C_3\leftarrow \frac{1}{m}C_3)$ puis que la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\-1&m+1&-2&0\\-2&3&1&-m+4\end{pmatrix}$ $(C_4\leftarrow 2C_4+(m-2)C_3)$

Donc, si $m=4$, $\mathrm{rg}(A)=3$ et si m n'est ni 0 ni 4, $\mathrm{rg}(A)=4$.

$$\boxed{\text{Si } m\notin\{0,4\},\ \mathrm{rg}(f_1,f_2,f_3,f_4)=4 \text{ et si } m\in\{0,4\},\ \mathrm{rg}(f_1,f_2,f_3,f_4)=3.}$$

Correction de l'exercice 3803 ▲

(a) • Soient P et Q deux polynômes. La fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(P,Q)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de l'application φ sont claires. De plus, pour $P\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,dt=0\\ &\Rightarrow \forall t\in[0,+\infty[,\ P^2(t)e^{-t}=0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall t\in[0,+\infty[,\ P(t)=0\Rightarrow P=0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Ainsi, la forme φ est définie et finalement

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

(b) i. Soit $n\in\mathbb{N}$. La formule de LEIBNIZ permet d'écrire

$$(X^ne^{-X})^{(n)}e^X=\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(X^n)^{(n-k)}(e^{-X})^{(k)}\right)e^X=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}X^k.$$

En particulier, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(h_n)=n$ (et $\mathrm{dom}(h_n)=(-1)^n$) et on sait que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X].}$$

ii. Soient $P\in E$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $A>0$. Les deux fonctions $t\mapsto (t^ne^{-t})^{(n-1)}$ et P sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=\int_0^A P(t)(t^ne^{-t})^{(n)}\,dt=\left[P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\right]_0^A-\int_0^A P'(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\,dt$$

Maintenant, $(t^ne^{-t})^{(n-1)}$ peut s'écrire $Q(t)e^{-t}$ où Q est un polynôme et donc $P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, la formule de LEIBNIZ montre que le polynôme Q a une valuation au moins égale à 1. On en déduit que la fonction $t\mapsto P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}(t)$ s'annule en 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=-\int_0^{+\infty} P'(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\,dt.$$

De manière générale, pour $0\leqslant k\leqslant n$, les remarques précédentes s'appliquent à la fonction $t\mapsto P^{(k)}(t)(t^ne^{-t})^{(n-k)}$ et par récurrence on obtient

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=(-1)^k\int_0^{+\infty} P^{(k)}(t)(t^ne^{-t})^{(n-k)}\,dt.$$

En particulier, pour $k=n$ on obtient $\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=(-1)^n\int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,dt$. Cette égalité reste vraie quand $n=0$ et on a montré que

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(P,h_n)=\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=(-1)^n\int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,dt.$$

En particulier, si $n\in\mathbb{N}^*$ et $\deg(P)<n$, on a $P^{(n)}=0$ et donc $\varphi(P,h_n)=0$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $h_n\in(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Puisque $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(h_n)=n$, on en déduit en particulier que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\varphi(hn,h_k)=0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X],\varphi).}$$

iii. Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque $\deg(h_n)=n$ et $\mathrm{dom}(h_n)=(-1)^n$, on a $h_n^{(n)}=(-1)^nn!$. La question précédente fournit alors

$$\|h_n\|^2=(-1)^n\int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,dt=n!\int_0^{+\infty} t^ne^{-t}\,dt=n!\Gamma(n+1)=n!^2,$$

et donc $\|h_n\|=n!$. Par suite,

$$\boxed{\text{la famille } \left(\tfrac{1}{n!}h_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthonormale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X],\varphi).}$$

Correction de l'exercice 3804 ▲

(a) • Soit $(P,Q)\in E^2$. L'application $t\mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. Ensuite, l'application $t\mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}\times\frac{1}{\sqrt{1-t}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Puisque $\frac{1}{2}<1$, on en déduit que l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ et l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ et $\varphi(P,Q)$ existe.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $P\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0&\Rightarrow\int_{-1}^{1}\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=0\\&\Rightarrow\forall t\in]-1,1[,\ \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}=0\text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\&\Rightarrow\forall t\in]-1,1[,P(t)=0\Rightarrow P=0\text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'application φ est définie et finalement

$$\boxed{\text{l'application }\varphi\text{ est un produit scalaire sur }E.}$$

(b) i. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$. En posant $t=\cos\theta$, on obtient

$$\varphi(T_n,T_p)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_{\pi}^{0}\frac{T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\,(-\sin\theta d\theta)=\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta.$$

Si de plus, $n\neq p$,

$$\varphi(T_n,T_p)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos((n+p)\theta)+\cos((n-p)\theta))\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p}+\frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p}\right]_0^{\pi}=0.$$

Ainsi, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. De plus, on sait que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(T_n)=n$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{la famille }(T_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien }(E,\varphi).}$$

ii. Soit $n\in\mathbb{N}$. Quand $p=n$, la formule précédente fournit

$$\|T_n\|^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos(2n\theta))\,d\theta=\left\{\begin{array}{l}\pi\text{ si }n=0\\\frac{\pi}{2}\text{ si }n\geqslant 1\end{array}\right.,$$

et donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \|T_n\|=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\pi}\text{ si }n=0\\\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{ si }n\geqslant 1\end{array}\right..}$$

Correction de l'exercice 3805 ▲

(a) Montrons que E est un sous-espace de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.)$. La suite nulle est élément de E. Soient $(u,v)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$0\leqslant(\lambda u+\mu v)^2=\lambda^2u^2+2\lambda\mu uv+\mu^2v^2\leqslant\lambda^2u^2+\lambda\mu(u^2+v^2)+\mu^2v^2=(\lambda^2+\lambda\mu)u^2+(\lambda\mu+\mu^2)v^2.$$

Par hypothèse, la série de terme général $(\lambda^2+\lambda\mu)u_n^2+(\lambda\mu+\mu^2)v_n^2$ converge et on en déduit que la suite $\lambda u+\mu v$ est de carré sommable. On a montré que

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.).}$$

(b) • Soient u et v deux éléments de E. Pour tout entier naturel n,

$$|u_nv_n \leqslant \tfrac{1}{2}(u_n^2+v_n^2).$$

Ainsi, la série de terme général u_nv_n est absolument convergente et donc convergente. Ceci montre que $\varphi(u,v)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $u\in E$,

$$\varphi(u,u)=0\Rightarrow \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2=0\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2=0\Rightarrow u=0.$$

En résumé, l'application φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Correction de l'exercice 3806 ▲

Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\Phi(A,B)=\mathrm{Tr}({}^tA\times B)=\textstyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}b_{i,j}.$$

L'application Φ n'est autre que produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier est un produit scalaire. La base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (constituée des matrices élémentaires) est orthonormée pour ce produit scalaire.

L'application Φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Par exemple, si $A=iE_{1,1}\neq 0$ alors ${}^tAA=-E_{1,1}$ puis $\mathrm{Tr}({}^tAA)=-1<0$.

Correction de l'exercice 3807 ▲

Soit N une norme sur E vérifiant $\forall(x,y)\in E^2\ (N(x+y))^2+(N(x-y))^2=2((N(x))^2+(N(y))^2)$.

Il faut montrer que la norme N est associée à un produit scalaire B. Si B existe, B est nécessairement défini par

$$\forall(x,y)\in E^2,\ B(x,y)=\tfrac{1}{4}((N(x+y))^2-(N(x-y))^2).$$

Réciproquement,

• Pour tout $x\in E$, $B(x,x)=\frac{1}{4}((N(2x))^2-(N(0))^2)=\frac{1}{4}(4(N(x))^2-0)=(N(x))2$ et donc $\forall x\in E$, $B(x,x)\geqslant 0$ puis $B(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$. De plus, $\forall x\in E$, $N(x)=\sqrt{B(x,x)}$.

• $\forall(x,y)\in E^2$, $B(y,x)=\frac{1}{4}((N(y+x))^2-(N(y-x))^2)=\frac{1}{4}((N(x+y))^2-(N(x-y))^2)=B(x,y)$.

• Vérifions alors que l'application B est bilinéaire.

1) Montrons que $\forall(x,y,z)\in E^3$, $B(x+y,z)+B(x-y,z)=2B(x,z)$.

$$\begin{aligned}
B(x+y,z)+B(x-y,z)&=\frac{1}{4}((N(x+y+z))^2-(N(x+y-z))^2+(N(x-y+z))^2-(N(x-y-z))^2)\\
&=\frac{1}{4}((N(x+y+z))^2+(N(x-y+z))^2)-((N(x+y-z))^2+(N(x-y-z))^2)\\
&=\frac{1}{4}(2(N(x+z))^2+(N(y))^2)-2((N(x-z))^2+(N(y))^2)\text{ (par hypothèse sur } N)\\
&=\frac{2}{4}((N(x+z))^2-(N(x-z))^2)=2B(x,z).
\end{aligned}$$

2) Montrons que $\forall(x,z)\in E^2$, $B(2x,z)=2B(x,z)$. Tout d'abord, $B(0,z)=\frac{1}{4}((N(z))^2-(N(-z))^2)=0$ puis d'après 1)

$$B(2x,z) = B(x+x,z) + B(x-x,z) = 2B(x,z).$$

3) Montrons que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $B(x,z) + B(y,z) = B(x+y,z)$.

$$\begin{aligned} B(x,z)+B(y,z) &= B\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2},z\right)+B\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2},z\right) \\ &= 2B\left(\frac{x+y}{2},z\right) \text{ (d'après 1))} \\ &= B(x+y,z) \text{ (d'après 2)).} \end{aligned}$$

4) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$.
- C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$ et $B((n+1)x,y) = (n+1)B(x,y)$. Alors

$$B((n+2)x,y)+B(nx,y) = B((n+2)x+nx,y) = B(2(n+1)x,y) = 2B((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence, $B((n+2)x,y) = 2(n+1)B(x,y) - nB(x,y) = (n+2)B(x,y)$.
5) Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$. Le résultat est acquis pour $n \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B(nx,y)+B(-nx,y) = B(0,y) = 0 \text{ et donc } B(-nx,y) = -B(nx,y) = -nB(x,y),$$

6) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B\left(\frac{1}{n}x,y\right) = \frac{1}{n}B(x,y)$.

$$B(x,y) = B\left(\tfrac{1}{n}nx,y\right) = nB\left(\tfrac{1}{n}x,y\right) \text{ et donc } B\left(\tfrac{1}{n}x,y\right) = \tfrac{1}{n}B(x,y).$$

7) Montrons que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(rx,y) = rB(x,y)$. Soient $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ puis $r = \frac{p}{q}$.

$$B(rx,y) = B\left(\tfrac{p}{q}x,y\right) = pB\left(\tfrac{1}{q}x,y\right) = \tfrac{p}{q}B(x,y) = rB(x,y).$$

8) Montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(\lambda x,y) = \lambda B(x,y)$. Soit λ un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une
suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite λ.
Maintenant, l'application $N : \begin{array}{ccc} (E,N) & \rightarrow & (\mathbb{R},|\ |) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue sur E car 1-Lipschitzienne sur E.
Donc

$$B(\lambda x,y) = B(\lim_{n\to+\infty} r_n x,y) = \lim_{n\to+\infty} B(r_n x,y) = \lim_{n\to+\infty} r_n B(x,y) = \lambda B(x,y).$$

Finalement, l'application B est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire. Puisque $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$, N est la norme associée à ce produit scalaire. On a montré que

$$\boxed{\text{toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme hilbertienne.}}$$

Correction de l'exercice 3808 ▲

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j\geqslant 1}(e_i|e_j)^2 = 1 + \sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2$$

et donc $\sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2 = 0$.On en déduit que $\forall j \neq i$, $(e_i|e_j) = 0$. Ainsi, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $i \neq j$, on a $e_i|e_j = 0$. Par suite

la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille orthonormale.

Il reste à vérifier que si $F = \text{Vect}(e_1,...,e_n)$ alors $F = E$.
Soit x un vecteur de E. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On peut donc définir le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F. On sait que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i.$$

On en déduit que $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2 = \|x\|^2$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|2 - \|p_F(x)\|^2 = 0,$$

et donc $x = p_F(x)$ ce qui montre que $x \in F$. Donc $F = E$ et finalement

$$\boxed{\text{la famille } (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

Correction de l'exercice 3809 ▲

1 ère solution. Soit $p \geqslant 2$. Montrons que si la famille $(x_1,...,x_p)$ est obtusangle alors la famille $(x_1,...,x_{p-1})$ est libre.
Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille obtusangle. Supposons que la famille $(x_1,...,x_{p-1})$ soit liée.
Il existe donc $(\lambda_1,...,\lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{(0,\dots,0)\}$ tel que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0$.
Quite à multiplier les deux membres de l'égalité par -1, on peut supposer que l'un des λ_i au moins est strictement positif. On pose $I = \{k \in [\![1, p-1]\!] \,/\, \lambda_k > 0\}$ et $J = \{k \in [\![1, p-1]\!] \,/\, \lambda_k \leqslant 0\}$ (éventuellement J est vide).
Si J est vide, il reste $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ et si J est non vide,

$\|\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\|^2 = -\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{j\in J} \lambda_j x_j\right) = -\sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_i\lambda_j\,(x_i|x_j) \leqslant 0$ (car $\forall (i,j) \in I \times J$, $(x_i|x_j) < 0$ et $\lambda_i\lambda_j \leqslant 0$).

Ainsi, dans tous les cas, $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais ceci est impossible car $\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right)|x_p = \sum_{i\in I} \lambda_i\,(x_i|x_p) < 0$.
On a montré que la famille $(x_1,\dots,x_{p-1})$ est libre et on en déduit que $p-1 \leqslant n$ ou encore $p \leqslant n+1$.
2ème solution. Montrons par récurrence sur $n = \dim E_n \geqslant 1$ que tout famille obtusangle de E_n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$.
• Pour $n = 1$. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E_1. On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels x_1, x_2 ou x_3 ont même signe et on ne peut donc avoir $x_1x_2 < 0$ et $x_1x_3 < 0$ et $x_2x_3 < 0$.
Une famille obtusangle de E_1 a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille obtusangle de E_{n+1}.
Si $p = 1$ alors $p \leqslant n+2$. Supposons dorénavant $p \geqslant 2$.
On va construire à partir de cette famille une famille obtusangle de cardinal $p-1$ d'un espace euclidien de dimension n.
Soit $F = x_p^{\perp}$. Puisque la famille $(x_1,...,x_p)$ est obtusangle, le vecteur x_p n'est pas nul et F est un espace euclidien de dimension n.
On note y_1, y_2,..., y_{p-1} les projetés orthogonaux des vecteurs x_1, ... , x_{p-1} sur F. On sait que

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!],\ y_i = x_i - \frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2}x_p.$$

Soit $(i, j) \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $i \neq j$.

$$(y_i|y_j) = (x_i|x_j) - 2\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i|x_j) - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n et par hypothèse de récurrence $p-1 \leqslant n+1$ et donc $p \leqslant n+2$. Le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 3818 ▲

(a) Oui ssi $\lambda^2+\mu^2 \leqslant 1$.

(b) Non, disc $=-1$.

(c) Oui, $= \frac{5x^2}{12}+3\left(y+\frac{x}{3}\right)^2+4z^2+\left(t+\frac{x}{2}\right)^2$.

Correction de l'exercice 3819 ▲

Spec$(A)=\{6,3,3\} \Rightarrow$ oui.

Correction de l'exercice 3820 ▲

$(n-1,0)$.

Correction de l'exercice 3822 ▲

Récurrence, $q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i<k}\frac{i+1}{2i}y_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant k}x_i^2+\frac{1}{2k}\left(\sum_{i\geqslant k}x_i\right)^2$.

Correction de l'exercice 3825 ▲

(a)

(b)

(c) Si $a\in \mathrm{Ker} f$, Ker$\tilde{\varphi}=E$.
Si $a\notin \mathrm{Ker} f$ et $q(a)=0$, Ker$\tilde{\varphi}=a^{\perp}$.
Si $q(a)\neq 0$, Ker$\tilde{\varphi}=\mathrm{Ker}(f)\oplus \langle a\rangle$.

Correction de l'exercice 3828 ▲

(a)

(b) $(d-1,0)$ ou $(d,0)$.

Correction de l'exercice 3829 ▲

Récurrence sur n.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base dans laquelle A est la matrice de q. $\Delta_{n-1}(A)\neq 0$ donc il existe des coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ tels que $u_n=e_n-\sum_{i<n}\alpha_i e_i$ soit q-orthogonal à $e_1,\dots,e_{n-1}$. Alors A a mêmes mineurs principaux que la matrice de q dans la base $(e_1,\dots,e_{n-1},u_n)$.

Correction de l'exercice 3830 ▲

Pour A à diagonale fortement dominante, récurrence sur n.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base dans laquelle A est la matrice de q. $\Delta_{n-1}(A)\neq 0$ donc il existe des coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ tels que $u_n=e_n-\sum_{i<n}\alpha_i e_i$ soit q-orthogonal à $e_1,\dots,e_{n-1}$ et il faut montrer que $q(u_n)>0$ ce qui résulte de $|\alpha_i|\leqslant 1$ en considérant la i-ème ligne de A.

Correction de l'exercice 3831 ▲

(a)

(b)

(c) $GL_n^+(\mathbb{R})$ l'est.

Correction de l'exercice 3833 ▲

(a) Il n'y a pas de solution pour $n=2$ donc pas non plus pour $n>2$.

(b) Pour $n=3$ on trouve $A={}^tCC$ où C est une colonne sans zéros, pour $n\geqslant 3$ on obtient le même résultat en considérant les blocs 3×3 centrés sur la diagonale.

Correction de l'exercice 3834 ▲

Soit P orthogonale diagonalisant S : ${}^tPSP=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $Y={}^tPX$.

On a : $q(X)=\begin{vmatrix} 0 & y_1 & \dots & y_n \\ y_1 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_n & & & \lambda_n \end{vmatrix}=-\lambda_1\dots\lambda_n\left(\frac{y_1^2}{\lambda_1}+\dots+\frac{y_n^2}{\lambda_n}\right)$.

Correction de l'exercice 3835 ▲

Pour $a=0$, q est définie positive. Pour $a\neq 0$ prendre une base orthonormale commençant par a ; la matrice de q dans cette base est $\mathrm{Diag}(\alpha+\beta\|a\|^2,\alpha,\dots,\alpha)$.

Correction de l'exercice 3836 ▲

Soit (E_{ij}) la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$: $E_{12}^2=0$ donc $q(E_{12})=0$ et si A est une matrice quelconque de rang 1, A est équivalente à E_{12} d'où $q(A)=0$. Si $A=0$ on a aussi $q(A)=0$ et si A est inversible alors toute matrice est multiple de A donc $q(A)\neq 0$, en particulier $q(I)=1$ car $q^2(I)=q(I)$. On en déduit $q(A)=0\Leftrightarrow \det(A)=0$.

Pour A quelconque, les applications : $z\mapsto \det(A-zI)$ et $z\mapsto q(A-zI)$ sont polynomiales de degré 2, avec le même coefficient de z^2 et les mêmes racines, donc sont égales d'où $q=\det$.

Remarque : le même raisonnement est applicable sur un corps quelconque en se limitant aux matrices triangulaires, et toute matrice est produit de triangulaires (algorithme du pivot de Gauss).

Correction de l'exercice 3837 ▲

Quitte à remplacer E par $\mathrm{vect}(x_1,\dots,y_n)$, on peut supposer E de dimension finie p. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et X,Y et F les matrices de $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_n)$ et ϕ dans $\mathscr{B}$. On doit prouver $\det({}^tXFY)^2\leqslant \det({}^tXFX)\det({}^tYFY)$. Comme F est symétrique positive, elle est de la forme $F={}^tMM$ pour une certaine matrice carrée M, donc en remplaçant X et Y par MX et MY, il suffit de prouver $\det({}^tXY)^2\leqslant \det({}^tXX)\det({}^tYY)$ pour toutes matrices X,Y réelles rectangulaires de même taille.

En projetant chaque colonne de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de X, on peut décomposer $Y=XA+B$ où A est une matrice carrée et B une matrice rectangulaire de même taille que X telle que ${}^tXB=0$. Il reste à prouver : $\det({}^tXXA)^2\leqslant\det({}^tXX)\det({}^tA{}^tXXA+{}^tBB)$, soit : $\det({}^tA{}^tXXA)\leqslant\det({}^tA{}^tXXA+{}^tBB)$.

On pose $U={}^tA{}^tXXA$ et $V={}^tBB$: U et V sont des matrices réelles symétriques positives de même taille, à priori quelquonques. Si U est inversible, on écrit $U={}^tPP$ avec P inversible et on est rammené à prouver que $1\leqslant\det(I+{}^tP^{-1}VP^{-1})=\det(I+W)$, avec W symétrique positive, ce qui résulte du fait que toutes les valeurs propres de $I+W$ sont supérieures ou égales à 1. Si U n'est pas inversible, on remplace U par $U+\varepsilon I$ avec $\varepsilon>0$, puis on fait tendre ε vers 0^+.

Remarque : il y a peut-être plus simple ?

Correction de l'exercice 3838 ▲

(a) Si la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

$$Q(f) = \lambda(a^2 + 2bc + d^2) + \mu(ad - bc).$$

Q est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de f dans la base canonique de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ et donc Q est une forme quadratique sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

(b) • Si $\lambda = \mu = 0$, $r = 0$ et $s = (0,0)$. Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$,

$$Q(f) = \tfrac{\mu}{4}(a+d)^2 - \tfrac{\mu}{4}(a-d)^2 - \tfrac{mu}{4}(b+c)^2 + \tfrac{\mu}{4}(b-c)^2,$$

et donc $r = 4$ et $s = (2,2)$.

• Si $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} Q(f) &= \lambda a^2 + \mu ad + (2\lambda - \mu)bc + \lambda d^2 = \lambda\left(a + \frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2 + (2\lambda - \mu)bc + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2 \\ &= \lambda\left(a + \frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2 + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2 + \frac{2\lambda - \mu}{4}(b+c)^2 - \frac{2\lambda - \mu}{4}(b-c)^2. \end{aligned}$$

Maintenant, les quatre formes linéaires $(a,b,c,d) \mapsto a + \frac{\mu}{2\lambda}d$, $(a,b,c,d) \mapsto d$, $(a,b,c,d) \mapsto b+c$ et $(a,b,c,d) \mapsto b-c$ sont linéairement indépendantes. Donc
- si $\mu = 2\lambda$ $(\neq 0)$, $r = 1$,
- si $\mu = -2\lambda$ $(\neq 2\lambda)$, $r = 3$,
- si $|\mu| \neq 2|\lambda|$ $(\neq 0)$, $r = 4$.

En particulier, si $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, alors $r = 4$ et $s = (3,1)$ et si $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, $r = 4$ et $s = (2,2)$.

Correction de l'exercice 3839 ▲

Dans le cas où E est de dimension finie, la signature de Q permet de conclure immédiatement. Supposons donc que E n'est pas de dimension fine.

Par hypothèse, il existe un vecteur non nul x_0 tel que $Q(x_0) = 0$. Supposons Q de signe constant. Ouite à remplacer Q par $-Q$, on supposera que Q est positive. D ?après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (valable pour les formes quadratiques positives)

$$\forall y \in E,\ |\varphi(x_0,y)| \leqslant \sqrt{Q(x_0)}\sqrt{Q(y)} = 0.$$

Donc $\forall y \in E$, $\varphi(x_0,y) = 0$ et x_0 est dans le noyau de φ. Puisque $x_0 \neq 0$, on en déduit que φ est dégénérée. En résumé, si Q est de signe constant, φ est dégénérée ou encore si φ est non dégénérée, Q n'est pas de signe constant.

Correction de l'exercice 3840 ▲

(a) Pour tout $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(x_1,...,x_n) = \textstyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\int_a^b f_i(t)f_j(t)\,dt\right)x_ix_j = \int_a^b \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_jf_i(t)f_j(t)\right)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_if_i(t)\right)^2\,dt \geqslant 0.$$

Donc Q est une forme quadratique positive.

(b) De plus, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1,...,x_n)) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_if_i = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Donc

$$\begin{aligned} Q \text{ définie} &\Leftrightarrow \forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ [Q((x_1,...,x_n)) = 0 \Rightarrow (x_1,...,x_n) = 0] \\ &\Leftrightarrow \forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ [\sum_{i=1}^n x_if_i = 0 \Rightarrow (x_1,...,x_n) = 0] \end{aligned}$$

$(f_1,...,f_n)$ libre.

(c) Dans le cas particulier envisagé, la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la matrice de HILBERT $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Correction de l'exercice 3841 ▲

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs fournit $\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXS^{-1} \\ X & I_n \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXS^{-1} \\ X & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tXS^{-1}X & {}^tXS^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\det(A)\times\det(S^{-1})\times(-1) = {}^tXS^{-1}X$ puis que $Q(X) = -\det(A) = {}^tX((\det(S))S^{-1})X = {}^tXS'X$ où $S' = (\det(S))S^{-1}$.

Maintenant, la matrice S est définie positive et donc ses valeurs propres sont des réels strictement positifs. Les valeurs propres de la matrice S' sont les $\frac{\det(S)}{\lambda}$ où λ décrit le spectre de S et donc la matrice S' est aussi une matrice symétrique définie positive. Q est donc une forme quadratique définie positive.

Correction de l'exercice 3844 ▲

Le produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ (A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

(a) Déterminons l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $(A,B)\in\mathscr{S}_(\mathbb{R})\times\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = -\mathrm{Tr}({}^tBA) = -(B|A).$$

et donc $(A|B) = 0$. Donc $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})\subset(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R})) = \dim\left(((\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp\right)$, on a montré que

$$\boxed{(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp = \mathscr{S}_3(\mathbb{R}).}$$

(b) Ainsi, la projection orthogonale de M sur $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M - p_a(M) = p_s(M)$ avec

$$p_s(M) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d(M,\mathscr{A}_3(R)) = \|p_s(M)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 1.$$

Correction de l'exercice 3863 ▲

$\lambda = 0$, $f = \mathrm{id}_E$ et $\lambda = -\frac{2}{\|\vec{v}\|^2}$, $f =$ la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(\vec{v})$.

Correction de l'exercice 3868 ▲

$\varphi(A) = \mathrm{tr}(A\,{}^tA)$ donc pour toute matrice P telle que P^tP soit scalaire (non nulle) on a $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$. Ces matrices sont les matrices de la forme $P = \lambda M$ avec M orthogonale (matrices de similitude).

Réciproquement, soit P telle que $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$ et $Q = P^tP$.
On a par polarisation : $\forall\, A,B,\ \mathrm{tr}(AQ^tB^tQ^{-1}) = \mathrm{tr}(A^tB)$ donc pour $B = QC$: $\forall\, A,C\ \mathrm{tr}(AQ^tC) = \mathrm{tr}(A^tCQ)$ ce qui implique : $\forall\, C,\ Q^tC = {}^tCQ$ et donc que Q est scalaire.

Correction de l'exercice 3878 ▲

(a)

(b) On raisonne par récurrence sur $d = \dim(F) = \dim(G)$. Pour $d = 0$ il n'y a rien à prouver.
Pour $d \geqslant 1$ on considère $a \in F$ et $b \in G$ unitaires tels que $(a \mid b)$ soit maximal. Soient F_1 l'orthogonal de a dans F et G_1 l'orthogonal de b dans G (sous-espaces vectoriels de dimensions égales à $d-1$). Le choix de a,b fait que F_1 est orthogonal à b et G_1 est orthogonal à a, donc F_1 et G_1 sont tous deux inclus dans l'orthogonal de $\mathrm{vect}(a,b)$. On peut trouver un endomorphisme de cet orthogonal qui échange F_1 et G_1, que l'on complète par la symétrie orthogonale dans $\mathrm{vect}(a,b)$ qui échange a et b.

Correction de l'exercice 3879 ▲

(a)

(b)

(c) oui pour ϕ_P.
Pour $\psi_P : \forall\, A,B,\ \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(P^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}B)$.
Donc $P^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1} = A$, donc P^tP est scalaire, donc P est une matrice de similitude.

Correction de l'exercice 3880 ▲

$A = 0$ ou $A \in \mathscr{O}^+(n)$.

Correction de l'exercice 3881 ▲

(a) $A = P - I$, $P \in \mathscr{O}(n)$.

(b) Hadamard.

Correction de l'exercice 3883 ▲

(a)

(b) Tout $f \in G$ vérifie $\det(f) \in \{-1,1\}$. Réciproquement, soit $f \in U(E)$ tq $\det(f) \in \{-1,1\}$ et $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$. On montre que f est composée de réflexions par récurrence sur $p = \mathrm{codim} F$.
$p = 0 \Rightarrow f = \mathrm{id}$. $p = 1 \Rightarrow f$ est une réflexion car F est un hyperplan et $F^\perp$ est stable par f.
$0,\dots,p-1 \Rightarrow p$: soit $(e_1,\dots,e_n)$ une BON de E telle que $(e_{p+1},\dots,e_n)$ est une BON de F et e_1 est vecteur propre de f. Soit $e_1' = f(e_1) = \lambda e_1$, et σ,σ' deux réflexions telles que $\sigma(e_1) = e_2$ et $\sigma'(e_2) = e_1'$. Alors $g = \sigma \circ \sigma' \circ f \in U(E)$, $\det(g) = \det(f) \in \{-1,1\}$ et $\mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})) < p$ donc g est composée de réflexions et f aussi.

Correction de l'exercice 3887 ▲

$f = \mathrm{id} - r$ où $r(x_1,\dots,x_n) = (x_n,x_1,\dots,x_{n-1})$. Donc $f^* \circ f = 2\mathrm{id} - r - r^{-1}$ a pour valeurs propres les nombres $2 - 2\cos(2k\pi/n)$, $k \in [[0,2n-1]]$ et $\|f\| = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2\cos(\pi/2n) & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases}$

Correction de l'exercice 3888 ▲

Oui. Pour $n=1$ il y a égalité. Pour $n=2$ cela résulte de la densité de $\mathbb{U}\cap\mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{U}$ (démonstration ci-dessous). Pour n quelconque, il suffit de voir qu'une réflexion quelconque est limite de réflexions à coefficients rationnels (approcher un vecteur non nul normal à l'hyperplan de réflexion par une suite de vecteurs rationnels).

Densité de $\mathbb{U}\cap\mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{U}$: pour $p\in|||^*$ on considère $z_p=\frac{(p^2-1)+2ip}{p^2+1}$. On a $z_p\in\mathbb{U}\cap\mathbb{Q}[i]$ et $z_p\to 1$ lorsque $p\to\infty$. Si $z\in\mathbb{U}$ alors $d(z,\mathbb{U}\cap\mathbb{Q}[i])\leqslant d(z,\{z_p^k,\ k\in\mathbb{Z}\})\leqslant\frac{1}{2}|1-z_p|$.

Correction de l'exercice 3889 ▲

${}^tAA=I\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1$. Dans ce cas $\det(A)=\mathrm{tr}(A)=1$ donc f est un quart de tour. L'axe du quart de tour est engendré par $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3890 ▲

(a) Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$ (M est une matrice de format (p,n)). Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, le produit scalaire usuel des colonnes C_i et C_j est encore $x_i|x_j$. Donc, $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j=x_i|x_j$ ou encore

$$\boxed{G={}^tMM.}$$

Il s'agit alors de montrer que $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}({}^tMM)$. Ceci provient du fait que M et ${}^tMM$ ont même noyau. En effet, pour $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X\in\mathrm{Ker}M\Rightarrow MX=0\Rightarrow{}^tM\times MX=0\Rightarrow({}^tMM)X=0\Rightarrow X\in\mathrm{Ker}({}^tMM)$$

et

$$X\in\mathrm{Ker}({}^tMM)\Rightarrow{}^tMMX=0\Rightarrow{}^tX{}^tMMX=0\Rightarrow{}^t(MX)MX=0\Rightarrow||MX||^2=0\Rightarrow MX=0$$
$$\Rightarrow X\in\mathrm{Ker}M.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Ker}({}^tMM)=\mathrm{Ker}(G(x_1,\ldots,x_n))$. Mais alors, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_n)=\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(G(x_1,\ldots,x_n))$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(G(x_1,\ldots,x_n))=\mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_n).}$$

(b) Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, $\mathrm{rg}(G)=\mathrm{rg}(x_1,...,x_n)<n$, et donc, puisque G est une matrice carrée de format n, $\gamma(x_1,...,x_n)=\det(G)=0$. Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, $(x_1,...,x_n)$ engendre un espace F de dimension n. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de F et M la matrice de la famille $(x_1,...,x_n)$ dans $\mathscr{B}$. D'après 1), on a $G={}^tMM$ et d'autre part, M est une matrice carrée. Par suite,

$$\gamma(x_1,...,x_n)=\det({}^tMM)=\det({}^tM)\det(M)=(\det M)^2>0.$$

(c) On écrit $x=x-p_F(x)+p_F(x)$. La première colonne de $\gamma(x,x_1,...,x_n)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix}||x||^2\\x|x_1\\x|x_2\\\vdots\\x|x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}||x-p_F(x)+p_F(x)||^2\\x-p_F(x)+p_F(x)|x_1\\x-p_F(x)+p_F(x)|x_2\\\vdots\\x-p_F(x)+p_F(x)|x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}||x-p_F(x)||^2\\0|x_1\\0|x_2\\\vdots\\0|x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}||p_F(x)||^2\\p_F(x)|x_1\\p_F(x)|x_2\\\vdots\\p_F(x)|x_n\end{pmatrix}.$$

(en 1ère ligne, c'est le théorème de PYTHAGORE et dans les suivantes, $x-p_F(x)\in F^{\perp}$). Par linéarité par rapport à la première colonne, $\gamma(x,x_1,\dots,x_n)$ est somme de deux déterminants. Le deuxième est $\gamma(p_F(x),x_1,\dots,x_n)$ et est nul car la famille $(p_F(x),x_1,\dots,x_n)$ est liée. On développe le premier suivant sa première colonne et on obtient :

$$\gamma(x,x_1,\dots,x_n)=||x-p_F(x)||^2\gamma(x_1,\dots,x_n),$$

ce qui fournit la formule désirée.

$$\boxed{\forall x\in E,\ d(x,F)=\|x-p_F(x)\|=\sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,\dots,x_n)}{\gamma(x_1,\dots,x_n)}}.}$$

Correction de l'exercice 3891 ▲

Un vecteur engendrant D est $\overrightarrow{u}=(2,1,3)$. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$p((x,y,z))=\frac{(x,y,z)|(2,1,3)}{||(2,1,3)||^2}(2,1,3)=\frac{2x+y+3z}{14}(2,1,3).$$

On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}p=P=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&2&6\\2&1&3\\6&3&9\end{pmatrix}$, puis $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}s=2P-I=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3&2&6\\2&-6&3\\6&3&2\end{pmatrix}$. Plus généralement, la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire (a,b,c) dans la base canonique orthonormée est $P=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}$ et la matrice de la projection orthogonale sur le plan $ax+by+cz=0$ dans la base canonique orthonormée est $I-P=\begin{pmatrix}1-a^2&-ab&-ac\\-ab&1-b^2&-bc\\-ac&-bc&1-c^2\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3892 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned}\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx&=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}a^2+b^2-\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b+ab=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2-\frac{1}{12}(3b-1)^2+b^2-\frac{2}{5}b+\frac{1}{9}\\&=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{10}b+\frac{1}{36}=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{225}\geqslant\frac{4}{225}\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a+\frac{1}{2}(3b-1)=b+\frac{1}{5}=0$ ou encore $b=-\frac{1}{5}$ et $a=\frac{4}{5}$.

$$\boxed{\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx \text{ est minimum pour } a=\frac{4}{5} \text{ et } b=-\frac{1}{5} \text{ et ce minimum vaut } \frac{4}{225}.}$$

2ème solution. $(P,Q)\mapsto\int_0^1P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$ et $\int_0^1(x^4-ax-b)^2dx$ est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme X^4 au polynôme de degré inférieur ou égal à 1, $aX+b$. On doit calculer $\mathrm{Inf}\left\{\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ qui est le carré de la distance de X^4 à $F=\mathbb{R}_1[X]$. On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand $aX+b$ est la projection orthogonale de X^4 sur F. Trouvons une base orthonormale de F. L'orthonormalisée (P_0,P_1) de $(1,X)$ convient. $||1||^2=\int_0^1 1\,dt=1$ et $P_0=1$. Puis $X-(X|P_0)P_0=X-\int_0^1t\,dt=X-\frac{1}{2}$, et comme $||X-(X|P_0)P_0||^2=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\,dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $P_1=2\sqrt{3}\left(X-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}(2X-1)$. La projection orthogonale de X^4 sur F est alors $(X^4|P_0)P_0+(X^4|P_1)P_1$ avec $(X^4|P_0)=\int_0^1t^4\,dt=\frac{1}{5}$ et $(X^4|P_1)=\sqrt{3}\int_0^1t^4(2t-1)\,dt=\sqrt{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{2\sqrt{3}}{15}$. Donc, la projection orthogonale de X^4 sur F est $\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\sqrt{3}(2X-1)=\frac{1}{5}(4X-1)$. Le minimum cherché est alors $\int_0^1\left(t^4-\frac{1}{5}(4t-1)\right)^2\,dt=\dots=\frac{4}{225}$.

Correction de l'exercice 3893 ▲

Notons P le plan d'équation $x+y=0$ dans la base $\mathscr{B}=(i,j,k)$. P est le plan de vecteur normal $n=i+j$.

(a) Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P' d'équation $x-y+z=0$. $s(P)$ est le plan de vecteur normal $s(n)$. Or, le vecteur n est dans P' et donc $s(n)=n$ puis $s(P)=P$.

$$\boxed{s(P) \text{ est le plan } P.}$$

(b) Notons σ la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $u=(1,1,1)$. $\sigma(P)$ est le plan de vecteur normal

$$\sigma(n)=2\tfrac{n.u}{\|u\|^2}u-n=2\tfrac{2}{3}(1,1,1)-(1,1,0)=\tfrac{1}{3}(1,1,4).$$

$$\boxed{\sigma(P) \text{ est le plan d'équation } x+y+4z=0.}$$

(c) Notons r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur unitaire $u=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. $r(P)$ est le plan de vecteur normal

$$\begin{aligned}r(n)&=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)n+\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)(n.u)u+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)u\wedge n\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{2}{3}(1,1,1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0)\\&=\frac{1}{3\sqrt{2}}(3+2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{3},3+2(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3},2(\sqrt{2}-1))=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3},1+2\sqrt{2}+\sqrt{3},2(\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{r(P) \text{ est le plan d'équation } (1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})x+(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})y+2(\sqrt{2}-1)z=0.}$$

Correction de l'exercice 3894 ▲

Notons p la projection sur (P) parallèlement à (Δ). • Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\x-2y-z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y+z=-x+1\\2y+z=x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2x-1\\z=-3x+2\end{array}\right.$$

(D) est la droite de repère $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(1,2,-3)$. • (Δ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}(1,3,2)$. $\overrightarrow{u}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u'}$ et donc (D) n'est pas parallèle à (Δ). On en déduit que $p(D)$ est une droite. Plus précisément, $p(D)$ est la droite intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et parallèle à (Δ). Déterminons une équation de (P'). Un repère de (P') est $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'})$. Donc

$$M(x,y,z)\in(P')\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x&1&1\\y+1&2&3\\z-2&-3&2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 13x-5(y+1)+(z-2)=0\Leftrightarrow 13x-5y+z=7.$$

Finalement

$$\boxed{p(D) \text{ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est } \left\{\begin{array}{l}13x-5y+z=7\\x+3y+2z=6\end{array}\right.}$$

Correction de l'exercice 3895 ▲

Notons p la projection orthogonale sur (P). Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(1,2,-3)$. Un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{n}(1,3,2)$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires et donc $p(D)$ est une droite du plan (P). Plus précisément, $p(D)$ est l'intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et perpendiculaire à (P). Un repère de (P') est $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})$. Donc

$$M(x,y,z) \in (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x - 5(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow 13x - 5y + z = 7.$$

$$\boxed{\text{La projetée orthogonale de } (D) \text{ sur } (P) \text{ est la droite d'équations } \left\{ \begin{array}{l} 13x - 5y + z = 7 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{array} \right. .}$$

Correction de l'exercice 3912 ▲

La famille (V_1, V_2) est clairement libre et donc une base de F. Son orthonormalisée (e_1, e_2) est une base orthonormée de F. $||V_1|| = \sqrt{1+4+1+1} = \sqrt{7}$ et $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} V_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$. $(V_2|e_1) = \frac{1}{\sqrt{7}}(0 + 6 - 1 - 1) = \frac{4}{\sqrt{7}}$ puis $V_2 - (V_2|e_1)e_1 = (0,3,1,-1) - \frac{4}{7}(1,2,-1,1) = \frac{1}{7}(-4,13,11,-11)$ puis $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$. Une base orthonormée de F est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) \in F^\perp \Leftrightarrow (x,y,z,t) \in (V_1, V_2)^\perp \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z + t = 0 \\ 3y + z - t = 0 \end{array} \right. .$$

Correction de l'exercice 3913 ▲

(a) La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont claires. Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P|P = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t)\,dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).} \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Pour vérifier que la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E, nous allons vérifier que

i. $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(L_0, L_1, ..., L_p) = \mathrm{Vect}(1, X, ..., X^p)$,

ii. la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est orthonormale,

iii. $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $L_p | X^p > 0$.

Pour a), on note que L_p est un polynôme de degré p (et de coefficient dominant $\frac{(2p)!}{p!}$). Par suite, $(L_0, L_1, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, ou encore, $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(L_0, L_1, ..., L_p) = \mathrm{Vect}(1, X, ..., X^p)$. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à p. Si $p \geqslant 1$, une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} L_p|P &= \int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p)} P(t)\,dt = \left[((t^2-1)^p)^{(p-1)} P(t)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p-1)} P'(t)\,dt \\ &= -\int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p-1)} P'(t)\,dt. \end{aligned}$$

En effet, 1 et -1 sont racines d'ordre p de $(t^2-1)^p$ et donc d'ordre $p-k$ de $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$ et en particulier, racines de chaque $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$. En réitérant, on obtient pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $L_p|P = (-1)^k \int_{-1}^{1}((t^2-1)^p)^{(p-k)}P^{(k)}(t)\,dt$ et pour $k=p$, on obtient enfin $L_p|P = (-1)^p \int_{-1}^{1}(t^2-1)^p P^{(p)}(t)\,dt$, cette formule restant vraie pour $p=0$. Soient p et q deux entiers tels que $0 \leqslant q < p \leqslant n$. D'après ce qui précède, $L_p|L_q = (-1)^p \int_{-1}^{1}(t^2-1)^p L_q^{(p)}(t)\,dt = 0$ car $q = \deg(L_q) < q$. Ainsi, la famille $(L_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est donc une famille orthogonale de $n+1$ polynômes tous non nuls et est par suite est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. Enfin, $L_p|X^p = (-1)^p \int_{-1}^{1}(t^2-1)^p(t^p)^{(p)}\,dt = p!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^p\,dt > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la famille } \left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n} \text{ est l'orthonormalisée de la base canonique de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Calculons $\|L_p\|$. On note que $L_p \in (L_0,...,L_{p-1})^{\perp} = (\mathbb{R}_{p-1}[X])^{\perp}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
||L_p||^2 &= L_p|L_p = L_p|\text{dom}(L_p)X^p \text{ (car } L_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^{\perp})\\
&= \frac{(2p)!}{p!}L_p|X^p = \frac{(2p)!}{p!}p!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^p\,dt = 2(2p)!\int_{0}^{1}(1-t^2)^p\,dt\\
&= 2(2p)!\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 u)^p(-\sin u)\,du = 2(2p)!\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2p+1}u\,du\\
&= 2(2p)!W_{2p+1} \text{ (intégrales de WALLIS)}\\
&= 2(2p)!\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \text{ (à revoir)}\\
&= \frac{2}{2p+1}2^{2p}(p!)^2.
\end{aligned}$$

Donc, $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\|L_p\| = \sqrt{\frac{2}{2p+1}}2^p p!$. On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2p+1}{2}}\frac{1}{2^p p!}((X^2-1)^p)^{(p)}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire considéré).

Correction de l'exercice 3914 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\ell_n = (X^2-1)^n$ de sorte que $L_n = \ell_n^{(n)}$. L_n est un polynôme de degré n car ℓ_n est de degré $2n$.

(a) i. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E$. Une intégration par parties fournit

$$(L_n|P) = \int_{-1}^{1}L_n(x)P(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n)}(x)P(x)\,dx = \left[(\ell_n)^{(n-1)}(x)P(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Maintenant, -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme ℓ_n et donc, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, -1 et 1 sont racines d'ordre $n-k$ de $\ell_n^{(k)}$ et en particulier racines de $(\ell_n)^{(k}$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$. Donc

$$(L_n|P) = -\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Plus généralement, si pour un entier $k \in [\![0,n-1]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$ alors

$$\begin{aligned}
(L_n|P) &= (-1)^k\left(\left[(\ell_n^{n-k-1}(x)P^{(k)}(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx\right)\\
&= (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$. En particulier

$(L_n|P) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \ell_n(x)P^{(n)}(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n P^{(n)}(x)\,dx/\text{quad}(*).$

Cette dernière égalité reste vraie pour $n = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ (L_n|P) = \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n P^{(n)}(x)\,dx.}$$

Soient alors n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p < n$. Puisque $\deg(L_p) = p < n$, on a $(L_n|L_p) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{La famille } (L_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthogonale de l'espace } (\mathbb{R}[X], |\,).}$$

ii. On applique maintenant la formule $(*)$ dans le cas particulier $P = L_n$. On obtient

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 &= \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n L_n^{(n)}(x)\,dx = 2\times(2n)!\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = 2\times(2n)!\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 t)^n(-\sin t)\,dt\\ &= 2\times(2n)!\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt = 2\times(2n)!W_{2n+1} \text{ (intégrales de WALLIS).}\end{aligned}$$

On « sait »que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n-1} = \frac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times 3}W_1 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$. On obtient alors

$$\|L_n\|^2 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}\times 2\times(2n)! = \frac{2^{2n+1}n!^2}{2n+1},$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\frac{2^n n!}{2n+1}.}$$

On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $(\mathbb{R}[X], |\,)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

(b) La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de orthonormée de $\mathbb{R}[X]$. Chaque P_n, $n \in \mathbb{N}$, est de degré n et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Vect}(P_0,...,P_n) = \text{Vect}(1,X,...,X^n)$ et de plus, pour $n \in \mathbb{N}$

$$P_n|X^n = \frac{1}{\text{dom}}((P_n)|\text{dom}(P_n)X^n) = \frac{1}{\text{dom}(P_n)}(P_n|P_n)$$

car $P_n \in (P_0,\ldots,P_{n-1})^\perp = (1,X,\ldots,X^{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Ceci montre que $P_n|X^n > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'orthonormalisée de la base canonique de } \mathbb{R}[X] \text{ est la famille des polynômes de LENGENDRE}\\ \left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}.\end{array}}$$

Correction de l'exercice 3915 ▲

(a) L'existence, la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\Phi(P,P) = 0 &\Rightarrow \int_0^1 f(t)P^2(t)\,dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t)P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle).}\end{aligned}$$

Maintenant, la fonction f est continue, positive sur $[0,1]$ et n'est pas nulle. Donc la fonction f est strictement positive sur un intervalle ouvert non vide inclus dans le segment $[0,1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines et finalement $P = 0$.

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

(b) L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ répond à la question.

(c) Soit n un entier naturel non nul. Le polynôme $P_n \in (P_0,...,P_{n-1})^{\perp} = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. Soit p le nombre de racines réelles d'ordre impair du polynôme P_n. Soient a_1,..., a_p ces racines (deux à deux distinctes, réelles et d'ordre impair) dans le cas où $p \geqslant 1$. Si $p \geqslant 1$, on pose $Q = (X-a_1)...(X-a_p)$ et si $p = 0$, on pose $Q = 1$.

Si $p < n$, le polynôme Q est orthogonal à P_n car de degré strictement plus petit que le de gré de P_n. D'autre part , au vu de la définition de Q, la fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est continue sur $[0,1]$, de signe constant sur $[0,1]$, d(intégrale nulle sur $[0,1]$. La fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est donc nulle. On en déduit que le polynôme P_n est le polynôme nul ce qui n'est pas. Donc $p = n$ ce qui signifie que le polynôme P_n a n racines réelles simples.

Correction de l'exercice 3916 ▲

Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie.

Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, on peut considérer $B_0 = (e_1,...,e_n)$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille $(x_1,...,x_n)$. Les bases B_0 et B sont des bases orthonormées de E et donc

$$\begin{aligned}|\det_B(x_1,...,x_n)| = |\det_{B_0}(x_1,...,x_n)| &= \text{abs}\left(\begin{vmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n) \end{vmatrix}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} |(x_k|e_k)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|\|e_k\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,\ |\det_B(x_1,...,x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \text{ (inégalité de HADAMARD).}}$$

Ensuite,

- si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul

- si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|(x_k|e_k)| = \|x_k\|\|e_k\|$. Les cas d'égalité

de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ étant connus, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, x_k est colinéaire à e_k

ou encore si et seulement si la famille $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale.

En résumé, l'inégalité de HADAMARD est une égalité si et seulement si la famille $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale libre ou si l'un des vecteurs est nul.

Correction de l'exercice 3917 ▲

C'est l'exercice 3916.

Correction de l'exercice 3918 ▲

(a) **1ère solution.** La matrice de la forme quadratique Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2-X & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6-X \end{vmatrix} = (2-X)\left(X^2+8X-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}X-2\right) - 2\left(-2X+\frac{5}{4}\right)$$
$$= -X^3-6X^2+\frac{45}{2}X = -X\left(X^2+6X-\frac{45}{2}\right).$$

Puisque A est symétrique réelle, on sait que les valeurs propres de A sont réelles. χ_A admet pour racines 0 et deux réels non nuls de signes contraires (puisque leur produit vaut $-\frac{45}{2}$). Par suite, le rang et la signature de Q sont

$$\boxed{r = 2 \text{ et } s = (1,1).}$$

2ème solution. On effectue une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned} Q((x,y,z)) &= 2x^2-2y^2-6z^2+3xy-4xz+7yz = 2x^2+x(3y-4z)-2y^2+7yz-6z^2 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2 - 2\left(\frac{3}{4}y-z\right)^2 - 2y^2+7yz-6z^2 = 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2 - \frac{25}{8}y^2+10yz-8z^2 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y-\frac{8}{5}z\right)^2. \end{aligned}$$

Les formes linéaires $(x,y,z)\mapsto x+\frac{3}{4}y-z$ et $(x,y,z)\mapsto y-\frac{8}{5}z$ étant linéairement indépendantes, on retrouve le fait que Q est de rang $r=2$ et de signature $s=(1,1)$. La forme quadratique Q est dégénérée et n'est ni positive ni négative.

(b) La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Le nombre 4 est valeur propre de A et puisque A est diagonalisable, 4 est valeur propre d'ordre $\dim(\mathrm{Ker}(A-4I_3)) = 3-\mathrm{rg}(A-4I_3) = 2$. La dernière valeur propre λ est fournie par $4+4+\lambda = \mathrm{Tr}(A) = 9$ et $? = 1$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = (1,4,4)$.

Les trois valeurs propres de A sont strictement positives et donc la forme quadratique Q est de rang 3 et de signature $(3,0)$.

$$\boxed{Q \text{ est définie positive.}}$$

(c) Effectuons une réduction de GAUSS.

$$Q((x,y,z,t)) = xy+yz+zt+tx = (x+z)(y+t) = \tfrac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \tfrac{1}{4}(x-y+z-t)^2.$$

Puisque les deux formes linéaires $(x,y,z,t)\mapsto x+y+z+t$ et $(x,y,z,t)\mapsto x-y+z-t$ sont linéairement indépendantes, la forme quadratique Q est de rang $r=2$ et de signature $s=(1,1)$.

(d) Effectuons une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned} Q((x,y,z,t)) &= x^2+(4+\lambda)y^2+(1+4\lambda)z^2+\lambda t^2+4xy+2xz+4(1-\lambda)yz+2\lambda yt+(1-4\lambda)zt \\ &= (x+2y+z)^2+\lambda y^2+4\lambda z^2+\lambda t^2-4\lambda yz+2\lambda yt+(1-4\lambda)zt \\ &= (x+2y+z)^2+\lambda(y-2z+t)^2+zt = (x+2y+z)^2+\lambda(y-2z+t)^2+\frac{1}{4}(z+t)^2-\frac{1}{4}(z-t)^2. \end{aligned}$$

Si $\lambda<0$, la forme quadratique Q est de rang 4 et de signature $(2,2)$.
Si $\lambda=0$, la forme quadratique Q est de rang 3 et de signature $(2,1)$.
Si $\lambda>0$, la forme quadratique Q est de rang 4 et de signature $(3,1)$.

(e) **1ère solution.** La matrice de la forme quadratique Q dans la base canonique est $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont $-\frac{1}{2}$ qui est d'ordre 4 et 2 qui est valeur propre simple.Donc, la signature de la forme quadratique Q est

$$\boxed{s = (1,4).}$$

2ème solution. Effectuons une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned}
Q((x_1,\dots,x_5)) &= x_1x_2 + x_1(x_3+x_4+x_5) + x_2(x_3+x_4+x_5) + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 \\
&= (x_1+x_3+x_4+x_5)(x_2+x_3+x_4+x_5) - (x_3+x_4+x_5)^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 \\
&= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5 \\
&= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 - \frac{3}{4}x_4^2 - \frac{1}{2}x_4x_5 - \frac{3}{4}x_5^2 \\
&= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 - \frac{3}{4}\left(x_4 - \frac{1}{3}x_5\right)^2 - \frac{5}{6}x_5^2,
\end{aligned}$$

et on retrouve $s = (1,4)$.

(f) $Q(x_1,\dots,x_n) = (x_1+\dots+x_n)^2$ et donc

$$\boxed{r = 1 \text{ et } s = (1,0).}$$

(g) Pour $n \geqslant 2$, $Q((x_1,\dots,x_n)) = \left(\sum_{i=1}^n ix_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n (i+1)x_i\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n (i-1)x_i\right)^2$. Donc

$$\boxed{r = 2 \text{ et } s = (1,1)}$$

car les deux formes linéaires $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (i+1)x_i$ et $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (i-1)x_i$ sont indépendantes pour $n \geqslant 2$.

(h) Puisque la matrice de Q dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
Q((x1,\dots,xn)) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_ix_j + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} x_ix_j + \dots + \sum_{n-1 \leqslant i,j \leqslant n} x_ix_j + x_n^2 \\
&= (x_1+\dots+x_n)^2 + (x_2+\dots+x_n)^2 + \dots + (x_{n-1}+x_n)^2 + x_n^2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{Q \text{ est donc définie positive.}}$$

Correction de l'exercice 3919 ▲

(a) (Quand x^2 et y^2 ont les mêmes coefficients, penser à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$) En posant $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, on obtient

$$x^2+10xy+y^2=\frac{1}{2}(X+Y)^2+5(X+Y)(X-Y)+\frac{1}{2}(X-Y)^2=6X^2-4Y^2.$$

Ainsi, si on note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$ et $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, on a

$$x^2+10xy+y^2=Q(xi+yj)=Q(Xe_1+Ye_2)=6X^2-4Y^2.$$

(b) La matrice de Q dans la base canonique (i,j) de $\mathbb{R}^2$ est $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. Les deux nombres 5 et 10 ont une somme égale à $15=\mathrm{Tr}(A)$ et un produit égal à $50=\det(A)$ et sont donc les valeurs propres de A. On sait alors que dans une base orthonormée (e_1,e_2) de vecteurs propres de A associée à la famille de valeurs propres $(5,10)$, on a $Q(Xe_1+Ye_2)=5X^2+10Y^2$. Déterminons une telle base.
$(A-5I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow x+2y=0$ et donc $\mathrm{Ker}(A-5I_2)=\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ puis $\mathrm{Ker}(A-10I_2)=(\mathrm{Ker}(A-5I_2))^{\perp}=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.
Donc, si $e_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ et $u=xi+yj=Xe_1+Ye_2$, alors $q(u)=6x2+4xy+9y2=5X^2+10Y^2$. De plus, $x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y)$.

(c) La matrice de Q dans la base canonique est $A=\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A=\begin{vmatrix} 4-X & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9-X & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1-X \end{vmatrix}=(4-X)(X^2-8X-12)-\sqrt{6}(-\sqrt{6}X-6\sqrt{6})+5\sqrt{2}(5\sqrt{2}X-42\sqrt{2})$$
$$=-X^3+12X^2+36X-432=-(X-6)(X+6)(X-12).$$

Ensuite,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(A-6I_3)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} -2x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}z=0 \\ \sqrt{6}x+3y+\sqrt{3}z=0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-7z=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z=-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y \\ -2x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)=0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-7(-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z=-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y \\ -12x-4\sqrt{6}y=0 \\ 12\sqrt{2}x+8\sqrt{3}y=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z=-\sqrt{2}x-\sqrt{3}(-\sqrt{\frac{3}{2}}x) \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}x \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right.$$

et $\mathrm{Ker}(A-6I_3)=\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2},-\sqrt{3},1)$. De même,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(A+6I_3)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 10x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}z=0 \\ \sqrt{6}x+15y+\sqrt{3}z=0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+5z=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z=-\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y \\ 10x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y)=0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+5(-\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y)=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z=-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y \\ y=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=-\sqrt{2}x \end{array}\right.$$

et $\mathrm{Ker}(A+6I_3)=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-\sqrt{2})$.
Enfin $\mathrm{Ker}(A-12I_3)=\mathrm{Vect}(e_3)$ où

$$e_3=e_1\wedge e_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si on pose $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ alors $PA^tP=\mathrm{diag}(6,-6,12)$ ou encore

$$Q(Xe_1+Ye_2+Ze_3)=6X^2-6Y^2+12Z^2 \text{ où } \mathrm{Mat}_{(i,j,k)}(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3920 ▲

(a) Soit P un élément de E. D'après un théorème de croissances comparées, $P(k)P(-k)e^{-k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et donc $Q(P)$ existe.

Pour tout élément P de E, $Q(P)=B(P,P)$ où B est la forme bilinéaire symétrique définie sur E par

$$\forall (P_1,P_2)\in E^2,\ B(P_1,P_2)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(P_1(k)P_2(-k)+P_1(-k)P_2(k))e^{-k}\right)$$

et donc Q est une forme quadratique sur E.

(b) Soit F le sous-espace vectoriel de E dont les éléments sont les polynômes pairs et G le sous-espace vectoriel de E dont les éléments sont les polynômes impairs. F et G sont supplémentaires dans E.

Soit P est un polynôme pair et non nul. Tout d'abord , $Q(P)\sum_{k=0}^{+\infty}(P(k))^2e^{-k}\geqslant 0$. De plus, comme P ne peut admettre tout entier naturel pour racine, on a plus précisément $Q(P)>0$. De même, si P est impair et non nul, $Q(P)<0$.

Ainsi, la restriction de Q à F (resp. G) est définie positive (resp.négative). Enfin, si P_1 est pair et P_2 est impair, on a

$$B(P_1,P_2)=\sum_{k=0}^{+\infty}P_1(k)P_2(-k)e^{-k}=-\sum_{k=0}^{+\infty}P_1(k)P_2(k)e^{-k}=-\sum_{k=0}^{+\infty}P_1(-k)P_2(k)e^{-k}=-B(P_2,P_1)=-B(P_1,P_2),$$

et donc $B(P_1,P_2)=0$ (F et G sont orthogonaux pour B).

Il existe un base de F dans laquelle $Q_{/F}$ est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à $\dim(F)$ et de même il existe un base de G dans laquelle $Q_{/G}$ est combinaison linéaire à coefficients strictement négatifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à $\dim(G)$. Maintenant, si P est un polynôme quelconque de parties paire et impaire P_1 et P_2 respectivement,

$$Q(P)=Q(P_1+P_2)=Q(P_1)+2B(P_1,P_2)+Q(P_2)=Q_{/F}(P_1)+Q_{/G}(P_2).$$

Donc la réunion des deux bases ci-dessus est une base de E dans laquelle Q est combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes dans laquelle $\dim(F)=E\left(\frac{n}{2}\right)+1$ coefficients sont strictement positifs et $\dim(G)=E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ sont strictement négatifs. Finalement,

$$\boxed{Q \text{ est donc non dégénérée de signature } s=\left(E\left(\frac{n}{2}\right)+1, E\left(\frac{n+1}{2}\right)\right).}$$

Correction de l'exercice 3922 ▲

$\vec{x}=-\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}+\lambda\vec{a}$.

Correction de l'exercice 3923 ▲

$$p=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\wedge\vec{v}=p\vec{b}\\\vec{v}\wedge\vec{w}=p\vec{c}\\\vec{w}\wedge\vec{u}=p\vec{a}\end{cases}\quad\text{et } [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=p^2.$$

si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]<0$: pas de solutions.

si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ et $\mathrm{rg}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})>1$: pas de solutions.

si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ et $\mathrm{rg}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\leqslant 1$: une infinité de solutions.

si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]>0$: 2 solutions.

Correction de l'exercice 3924 ▲

3. $G = \mathrm{tr}(F)I - {}^tF$.

Correction de l'exercice 3926 ▲

$abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$
$= abc\sqrt{(\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta))(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma)}$.

Correction de l'exercice 3928 ▲

(a) $f(\vec{x}) = (\vec{x}|\vec{u})\vec{u} + \cos\alpha(\vec{u}\wedge\vec{x})\wedge\vec{u} + \sin\alpha(\vec{u}\wedge\vec{x})$.

(b) $M = (\cos\alpha)I + (1-\cos\alpha)\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} + \sin\alpha\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3930 ▲

Pour $f,g \in \mathscr{O}^+(\mathbb{R}^3)$, f et g ont la même matrice réduite dans une base orthonormée convenable, donc sont conjugués dans $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$. h n'est pas toujours positif car les bases peuvent ne pas avoir même orientation (ex : deux rotations inverses). Pour $f,g \in \mathscr{O}^-(\mathbb{R}^3)$, considérer $-f$, $-g$.

Correction de l'exercice 3931 ▲

3. $\pi/2, \pi/2, \pi$
$-\pi/2, \alpha, \pi/2$.

Correction de l'exercice 3933 ▲

(a)

(b) matrice dans une *bond*.

(c) $f = 2(h+\mathrm{id})^{-1} - \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 3934 ▲

(a) $f(\vec{x}) = \vec{u}\wedge\vec{x}$ avec $\vec{u} = (\alpha,\beta,\gamma)$.

(b) $\vec{y} = \frac{\vec{x}+(\vec{u}|\vec{x})\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{x}}{1+\|\vec{u}\|^2}$.

(c) axe dirigé par $\vec{u}$, $\cos\theta = \frac{1-\|\vec{u}\|^2}{1+\|\vec{u}\|^2}$, $\sin\theta = \frac{-2\|\vec{u}\|}{1+\|\vec{u}\|^2}$.

Correction de l'exercice 3935 ▲

(a)

(b) $g(\vec{x}) = (\cos\alpha)\vec{x} + (1-\cos\alpha)\frac{(\vec{a}|\vec{x})\vec{a}}{\alpha^2} + \frac{\sin\alpha(\vec{a}\wedge\vec{x})}{\alpha}$.

Correction de l'exercice 3936 ▲

(a) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) Rotation autour de $(1,1,1)$ d'angle $\arccos(\frac{11}{14})$.

Correction de l'exercice 3937 ▲

(a) On a
$$^tMM = I \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2 = 1 \text{ et } ab+bc+ca = 0),$$
et
$$\det(M) = 1 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc = 1.$$
En remarquant que
$$(a^3+b^3+b^3-3abc) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$
on en déduit (a)$\Leftrightarrow$ (b)$\Leftrightarrow$ $(a+b+c = 1$ et $ab+ac+bc = 0)$, d'où le polynôme P.
Or, P a trois racines réelles si et seulement si $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{4}{27}$(étude de la fonction associée), d'où l'équivalence avec la condition (c).

(b) On voit sur la matrice que $(1,1,1)$ est propre pour la valeur propre $a+b+c$. Si $M \in SO(3)$, c'est donc (l'identité ou) une matrice de rotation suivant l'axe $\mathbb{R}(1,1,1)$. L'angle θ de la rotation vérifie alors $\mathrm{Tr}(M) = 2\cos(\theta)+1$ d'où $|\theta| = \arccos\frac{3a-1}{2}$.

(c) L'ensemble est celui de toutes les rotations d'axe $(1,1,1)$. C'est un groupe isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 3938 ▲

(a) rotation autour de $(1,0,1)$ d'angle $-\arccos(1/3)$.

(b) rotation autour de $(-3,1,1)$ d'angle $-\arccos(7/18)$.

(c) demi-tour autour de $(-1,-2,1)$.

(d) rotation autour de $(0,1,1)$ d'angle $2\pi/3$.

(e) rotation autour de $(-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3})$ d'angle $\arccos(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}})$.

(f) symétrie par rapport à $x = y+z$.

(g) symétrie par rapport à $3x = 2y-z$.

(h) symétrie par rapport à $x+2y-z = 0$.

(i) symétrie-rotation autour de $(1,-3,1)$ d'angle $-\arccos(5/6)$.

(j) symétrie-rotation autour de $(1,-1,0)$ d'angle $\pi/3$.

(k) projection sur $2x+2y+z = 0$ puis rotation d'angle $\arccos(3/5)$.

Correction de l'exercice 3939 ▲

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 3940 ▲

$$\begin{aligned}[u\wedge v, v\wedge w, w\wedge u] &= ((u\wedge v)\wedge(v\wedge w))|(w\wedge u) = (((u\wedge v)|w)v - ((u\wedge v)|v)w)|(w\wedge u) \\ &= (((u\wedge v)|w)v)|(w\wedge u) = ((u\wedge v)w)\times(v|(w\wedge u)) = [u,v,w][w,u,v] \\ &= [u,v,w]^2.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3941 ▲

$(u\wedge v)|(w\wedge s)=[u,v,w\wedge s]=[w\wedge s,u,v]=((w\wedge s)\wedge u)|v=((u|w)s-(u|s)w)|v=(u|w)(v|s)-(u|s)(v|w)$.
De même, $(u\wedge v)\wedge(w\wedge s)=((u\wedge v)|s)w-((u\wedge v)|w)s=[u,v,s]w-[u,v,w]s$.

Correction de l'exercice 3942 ▲

Posons $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$. Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3\in E$. On sait que

$$r(u)=(\cos\theta)u+(1-\cos\theta)\,(u|k)\,k+(\sin\theta)k\wedge u=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}(u|(e_1+e_2))(e_1+e_2)+\frac{\sqrt{6}}{4}(e_1+e_2)\wedge u$$

$$\text{« = »}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix}z\\-z\\-x+y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{6}}{4}z\\ \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y-\frac{\sqrt{6}}{4}z\\ -\frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{\sqrt{6}}{4}y+\frac{1}{2}z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{\sqrt{6}}{4}\\ -\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

et la matrice cherchée est

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{\sqrt{6}}{4}\\ -\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 3943 ▲

Soit (i,j,k) une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté. Posons $u=f(i)$, $v=f(j)$ et $w=f(k)$. Nécessairement, $u\wedge v=f(i)\wedge f(j)=f(i\wedge j)=f(k)=w$ et de même $v\wedge w=u$ et $w\wedge u=v$.

1er cas. Si l'un des vecteurs u ou v ou w est nul alors $u=v=w=0$ et donc $f=0$. Réciproquement, l'application nulle convient.

2ème cas. • Si les trois vecteurs u, v et w sont non nuls alors $u\wedge v\neq 0$ et donc la famille (u,v) est libre. Mais alors la famille (u,v,w) est une base directe de $\mathbb{R}^3$.

Ensuite $w=u\wedge v$ est orthogonal à u et v et $v=w\wedge u$ est orthogonal à u. On en déduit que la famille (u,v,w) est une base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$.

Enfin, puisque u et v sont orthogonaux, $\|w\|=\|u\wedge v\|=\|u\|\|v\|$ et de même $\|u\|=\|v\|\|w\|$ et $\|v\|=\|u\|\|w\|$. Puis $\|u\|\|v\|\|w\|=(\|u\|\|v\|\|w\|)^2$ et donc, puisque les vecteurs u, v et w sont non nuls, $\|u\|\|v\|\|w\|=1$. Les égalités $\|u\|\|v\|\|w\|=1$ et $\|u\|=\|v\|\|w\|$ fournissent $\|u\|^2=1$ et de même $\|v\|^2=\|w\|^2=1$.

Finalement, la famille (u,v,w) est une base orthonormée directe.

En résumé, l'image par f d'une certaine base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et on sait que f est un automorphisme orthogonal positif de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire une rotation de $\mathbb{R}^3$.

• Réciproquement, si f est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire e_3. On considère e_1 et e_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que la famille (e_1,e_2,e_3) soit une base orthonormée directe.

Pour vérifier que f est solution, par linéarité, il suffit de vérifier les 9 égalités : $\forall(i,j)\in\{1,2,3\}^2$, $f(e_i\wedge e_j)=f(e_i)\wedge f(e_j)$. Pour vérifier ces 9 égalités, il suffit se réduisent en fin de compte d'en vérifier 2 :

$$f(e_1)\wedge f(e_2)=e_3=f(e_3)=f(e_1\wedge e_2) \text{ et } f(e3)\wedge f(e1)=e_3\wedge f(e_1)=f(e_2)=f(e_3\wedge e_1).$$

Les endomorphismes cherchés sont donc l'application nulle et les rotations de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3944 ▲

Si $a=0$, $f=0$ et il n'y a plus rien à dire.

Si $a\neq 0$, puisque $f(a)=0$, 0 est valeur propre de f et $\text{Vect}(a)\subset E_0(f)$. D'autre part, si x est orthogonal à a, d'après la formule du double produit vectoriel

$$f(x)=(a.x)a-\|a\|^2x=-\|a\|^2x.$$

Donc le réel non nul $-\|a\|^2$ est valeur propre de f et $a^\perp\subset E_{-\|a\|^2}$. Maintenant, $\dim\text{Vect}(a)+\dim a^\perp=3$ et donc $\text{Sp}(f)=(0,-\|a\|^2,-\|a\|^2)$ puis $E_0(f)=\text{Vect}(a)$ et $E_{-\|a\|^2}=a^\perp$. On en déduit aussi que f est diagonalisable. On peut noter que, puisque f est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont orthogonaux, f est un endomorphisme symétrique.

Correction de l'exercice 3945 ▲

Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc P est un plan. Une base de P est par exemple $(i,j)=((1,-1,0,0)(1,0,2,-3))$. On orthonormalise la base (i,j).

On prend $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ puis $e_2'=j-(j|e_1)e_1=(1,0,2,-3)-\frac{1}{2}(1,-1,0,0)=\frac{1}{2}(1,1,4,-6)$ puis $e_2=\frac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6)$.

Une base orthonormée de P est (e_1,e_2) où $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ et $e_2=\frac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6)$.

(a) Le projeté orthogonal de $u=(x,y,z,t)$ sur P est

$$\begin{aligned}p_P(u)&=(u|e_1)e_1+(u|e_2)e_2=\frac{1}{2}(x-y)(1,-1,0,0)+\frac{1}{54}(x+y+4z-6t)(1,1,4,-6)\\&=\frac{1}{27}(14x-13y+2z-3t,-13x+14y+2z-3t,2x+2y+8z-12t,-3x-3y-12z+18t).\end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P est

$$\boxed{M=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}14&-13&2&-3\\-13&14&2&-3\\2&2&8&-12\\-3&-3&-12&18\end{pmatrix}}.$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P est

$$\boxed{S=2M-I_4=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}1&-26&4&-6\\-26&1&4&-6\\4&4&-11&-24\\-6&-6&-24&9\end{pmatrix}}.$$

(b) La distance de u = (x,y,z,t) à P est

$$\begin{aligned}\|u-p_P(u)\|&=\frac{1}{27}\|(14x+13y-2z+3t,13x+14y-2z+3t,-2x-2y+19z+12t,3x+3y+12z+9t)\|\\&=\frac{1}{27}\sqrt{(14x+13y-2z+3t)^2+(13x+14y-2z+3t)^2+(-2x-2y+19z+12t)^2+(3x+3y+12z}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3950 ▲

(a) $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{Diag}(3\ 6\ 9)$.

(b) $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{Diag}(3\ 3\ 2)$.

Correction de l'exercice 3951 ▲

Si tous les a_i sont nuls, $M = 0$.
Sinon, $M = C^tC \Rightarrow E_0 = C^{\perp}$ et $E_\nu = \mathrm{vect}(C)$ avec $\nu = \|C\|^2$.

Correction de l'exercice 3952 ▲

$$M = 5\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3953 ▲

(a)

(b) u est autoadjoint pour $<,>$.

(c) $P_0 = 1$, $P_2 = x$, $P_6 = 3x^2 - 1$, $P_{12} = 5x^3 - 3x$.

Correction de l'exercice 3954 ▲

(a)

(b)

(c) $\lambda_k = k(k+1)$.

Correction de l'exercice 3957 ▲

(a)

(b)

(c) $(p \circ q)_{|\mathrm{Im}\,p} = (p \circ q \circ p)_{|\mathrm{Im}\,p}$ est diagonalisable et $(p \circ q)_{|\mathrm{Ker}q + (\mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Im}\,q)} = 0$ donc tout vecteur de E est somme de vecteurs propres pour $p \circ q$.

Correction de l'exercice 3962 ▲

(a)

(b) Récurrence : pour $n = 1$ c'est évident.

$n-1 \to n : A = \begin{pmatrix} A' & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix}$ avec $A' = {}^tB'B'$.

On cherche $B = \begin{pmatrix} B' & X' \\ 0 & x \end{pmatrix}$ d'où : $X' = {}^tB'^{-1}C'$ et $x^2 = \alpha - {}^tX'X' = \frac{\det A}{\det A'} > 0$.

Correction de l'exercice 3966 ▲

(a) Soit $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ une base propre pour u. On prend $\vec{x}=\vec{u}_1+\dots+\vec{u}_n$.

(b) On norme $\vec{x}$ et on le complète en une base orthonormée. La matrice de u dans cette base est symétrique, de trace nulle, et la diagonale commence par 0. On termine par récurrence.

Correction de l'exercice 3968 ▲

$ABX=\lambda X \Rightarrow {}^tX^tBABX=\lambda^tXBX$.

Correction de l'exercice 3969 ▲

Se ramener au cas où A est diagonale.

Correction de l'exercice 3970 ▲

Il existe P inversible telle que $A={}^tPP$ et $B={}^tPB'P$ avec B' symétrique définie positive.
Alors $A+B={}^tP(I+B')P$ et $\det(I+B')=\prod(1+\beta_i)\geqslant 1+\prod\beta_i \Rightarrow$ cqfd.

Correction de l'exercice 3971 ▲

Soit $\mathscr{B}$ une BON fixée, $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $\mathscr{B}'$ la BON cherchée et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On veut que ${}^tM'M'$ soit diagonale avec $M'={}^tPMP$, cad ${}^tP^tMMP$ diagonale.

Correction de l'exercice 3974 ▲

Soit $(\vec{h}_i)$ une base diagonale pour h, $H_i=\mathrm{vect}\{\vec{h}_1,\dots,\vec{h}_i\}$ et $(\vec{f}_i)$, F_i idem pour f.
Pour $\vec{x}\in F_k\cap H_{k-1}^{\perp}$, $\lambda_k\|\vec{x}\|^2+(\vec{x}\mid\vec{x}_0)^2\leqslant(h(\vec{x})\mid\vec{x})+(\vec{x}\mid\vec{x}_0)^2=(f(\vec{x})\mid\vec{x})\leqslant\mu_k\|\vec{x}\|^2$.
Pour $\vec{x}\in H_{k+1}\cap F_{k-1}^{\perp}\cap\vec{x}_0^{\perp}$, $\mu_k\|\vec{x}\|^2\leqslant(f(\vec{x})\mid\vec{x})=(h(\vec{x})\mid\vec{x})\leqslant\lambda_{k+1}\|\vec{x}\|^2$.

Correction de l'exercice 3975 ▲

(a) Si $f(x)+f^*(x)=0$ alors $f(x)\in\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,f^*=\mathrm{Im}\,f\cap(\mathrm{Ker}f)^{\perp}=\mathrm{Im}\,f\cap(\mathrm{Im}\,f)^{\perp}$ donc $f(x)=f^*(x)=0$ et $x\in\mathrm{Ker}f\cap\mathrm{Ker}f^*=\mathrm{Ker}f\cap(\mathrm{Ker}f)^{\perp}$.

(b) $f^2=0\Rightarrow\mathrm{Im}\,f\subset\mathrm{Ker}f$.
$f+f^*\in GL(E)\Rightarrow\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Im}\,f^*=\mathrm{Im}\,f+(\mathrm{Ker}f)^{\perp}=E\Rightarrow\dim\mathrm{Im}\,f\geqslant\dim\mathrm{Ker}f$.

Correction de l'exercice 3980 ▲

(a) $((u-u^*)(x)\mid x)=0$.

(b) Orthodiagonaliser et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction de l'exercice 3981 ▲

Soit $K=\sup\{\|u_0+\dots+u_n\|\}$ et $x\in H$. On note $v_{p,q}=\sum_{n=p}^{q}u_n$ pour $p\leqslant q$. La série $\sum(u_n(x)\mid x)$ est convergente (termes positifs, sommes partielles majorées) donc elle vérifie le critère de Cauchy : $(v_{p,q}(x)\mid x)\to 0$ lorsque $p,q\to\infty$.
Comme $v_{p,q}$ est positif, il vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(v_{p,q}(x)\mid y)|^2\leqslant(v_{p,q}(x)\mid x)(v_{p,q}(y)\mid y)\leqslant 2K\|y\|^2(v_{p,q}(x)\mid x).$$

En particulier pour $y = v_{p,q}(x)$ on obtient : $\|v_{p,q}(x)\|^2 \leqslant 2K(v_{p,q}(x) \mid x)$ donc la série $\sum u_n(x)$ est de Cauchy.

Remarque : exemple où $\sum u_n$ ne converge pas dans $\mathscr{L}_c(H)$: $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $u_n =$ projection orthogonale sur $<e_n>$ où $e_n(p) = \delta_{n,p}$. $\sum u_n$ converge simplement et non uniformément vers l'identité.

Correction de l'exercice 3982 ▲

${}^tAA$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable donc annule un polynôme P scindé à racines simples. A annule le polynôme $P(X^3)$, donc est $\mathbb{C}$-diagonalisable si 0 n'est pas racine de P ce que l'on peut imposer si A est inversible.

Si A n'est pas inversible, soit $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.

On a $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A^3) \oplus \mathrm{Ker}(Q(A^3))$ et $\mathrm{Ker}(A^3) = \mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ donc $AQ(A^3) = 0$ et A est encore $\mathbb{C}$-diagonalisable.

Contre-exemple pour la $\mathbb{R}$-diagonalisabilité : prendre une rotation d'angle $2\pi/3$ dans le plan.

Correction de l'exercice 3983 ▲

(a) On se place dans une base propre pour u, soient U,V,W les matrices correspondantes avec $U = \mathrm{diag}(\lambda_i)$. On doit donc résoudre $(\lambda_i + \lambda_j)W_{ij} = V_{ij}$ d'où l'existence, l'unicité et la symétrie de w.

(b)
```
> A := matrix([[4,1,1],[1,4,-1],[1,-1,4]]); B := matrix([[0,0,-1],[0,0,1],[-1,1,3]]);
> eigenvals(A); eigenvects(A);
> P := transpose(matrix([[1, 0, 1], [1, 1, 0],[-1, 1, 1]]));
> A1 := evalm(P^(-1)&*A&*P); B1 := evalm(P^(-1)&*B&*P);
> C1 := matrix(3,3);
> for i from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do C1[i,j] := B1[i,j]/(A1[i,i]+A1[j,j]) od od;
> C := evalm(P&*C1&*P^(-1)); evalm(A&*C+C&*A-B);
```

$\Rightarrow C = \frac{1}{140}\begin{pmatrix} 11 & -11 & -33 \\ -11 & 11 & 33 \\ -33 & 33 & 69 \end{pmatrix}$.

(c) Si v est défini positif : on a $(v(x) \mid x) = 2(u(x) \mid w(x))$ donc si λ est une valeur propre de w et x est un vecteur propre associé, on a $\lambda = \frac{(v(x)|x)}{2(u(x)|x)} > 0$ d'où w est défini positif.

Cas w défini positif et v non positif : $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4x+4 \end{pmatrix}$ avec $0 < x < \frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 3984 ▲

(a) c'est un endomorphisme autoadjoint positif de déterminant 1.

(b) $X^n \det\left(\frac{\mathrm{id}}{X} + s^* \circ s\right) = \det(\mathrm{id} + Xs^* \circ s) = \det(s^* \circ (\mathrm{id} + Xs^* \circ s) \circ s) = \det(s^* \circ s + X\mathrm{id})$.

(c) $s^* \circ s$ est diagonalisable avec des valeurs propres (λ_i) réelles positives deux à deux inverses pour la même multiplicité. $P^2(1) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n}(1+\lambda_i)\left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right)$ et $(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right) \geqslant 4$ pour tout $x > 0$ avec égalité ssi $x = 1$.

Si $P(1) = 2^n$ alors toutes les valeurs propres de $s^* \circ s$ valent 1 et $s^* \circ s$ est diagonalisable donc $s^* \circ s = \mathrm{id}$ et s est une symétrie orthogonale. La réciproque est immédiate.

(d) Se ramener au cas $A_4 = I$ puis calculer $\det A$ par pivotage.

Correction de l'exercice 3985 ▲

(a) Que c'est un espace préhilbertien.

(b) $g_x(t) = \min(t(1-x), x(1-t))$

(c) On note $g_i = g_{x_i}$: $(g_1, \dots, g_n)$ est libre par considération des points anguleux, donc engendre un espace vectoriel G de dimension n. Soit $f \in P$: $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in G$ et $f_1 \in G^\perp$. Alors $\varphi(f) = \varphi(f_0) + \|f_1\|^2$ donc φ est minimale en f ssi $\varphi_{|G}$ est minimale en f_0 et $f_1 = 0$. Désormais on suppose $f_1 = 0$ et $f \in G$.

L'application :

$$u : G \to \mathbb{R}^n, f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n)) = ((f \mid g_1), \dots, (f \mid g_n))$$

est un isomorphisme linéaire. Soit v l'endormophisme autoadjoint défini positif de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique) tel que : $\forall\, t \in \mathbb{R}^n, (t \mid v(t)) = \|u^{-1}(t)\|^2$.

On a donc en notant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\mathrm{id} + v)^{-1}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(u^{-1}(t)) &= (t \mid v(t)) + (t - \alpha \mid t - \alpha)\\ &= (t \mid (\mathrm{id} + v)(t)) - 2(t \mid \alpha) + (\alpha \mid \alpha)\\ &= (t - \beta \mid (\mathrm{id} + v)(t - \beta)) + (\alpha \mid \alpha - \beta).\end{aligned}$$

$\mathrm{id} + v$ est autoadjoint défini positif donc le minimum de φ est atteint pour $f = u^{-1}(\beta)$ (solution unique) et vaut $(\alpha \mid \alpha - \beta)$.

Correction de l'exercice 3986 ▲

(a) p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow$ p est un projecteur et $p = p^*$ $\Leftrightarrow$ p^* est un projecteur orthogonal.

(b) p et p^* commutent donc $\mathrm{Ker} p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont stables par p et par p^*, d'où $p^*_{|\mathrm{Ker} p} = (p_{|\mathrm{Ker} p})^* = 0_{\mathrm{Ker} p}$ et $p^*_{|\mathrm{Im}\, p} = (p_{|\mathrm{Im}\, p})^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\, p}$. Ainsi $p = p^*$ ce qui implique $\mathrm{Ker} p \perp \mathrm{Im}\, p$.

Correction de l'exercice 3987 ▲

(a)

(b) On a pour $f, g \in E$: $u \circ v(f) = g \Leftrightarrow g$ est $\mathscr{C}^2$, $g(0) = g'(1) = 0$ et $g'' = -f$. En particulier $u \circ v$ est injectif, 0 n'est pas valeur propre de $u \circ v$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in E$ on a $u \circ v(f) = \lambda f$ si et seulement si f est de la forme $x \mapsto ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ avec $\alpha^2 = -\frac{1}{\lambda}$ et $a + b = a\alpha e^{\alpha} - b\alpha e^{-\alpha} = 0$. On obtient $f \neq 0$ en prenant $a \neq 0$, $b = -a$ et $\alpha = i\pi(\frac{1}{2} + k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathrm{Spec}(u \circ v) = \left\{ \frac{1}{\pi^2(\frac{1}{2}+k)^2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Correction de l'exercice 3988 ▲

(a) $u_1 + \dots + u_p$ est l'endormophisme autoadjoint associé à $q_1 + \dots + q_p$.

(b) $\mathrm{Im}(u_1) + \dots + \mathrm{Im}(u_p) \supset \mathrm{Im}(u_1 + \dots + u_p) = E$ et la somme des dimensions est égale à $\dim E$ donc la somme des sous-espaces est directe.

(c) On a $\mathrm{Ker}(u_1) = \{x \in E \text{ tq } x = u_2(x) + \dots + u_p(x)\} \subset \mathrm{Im}(u_2 + \dots + u_p) = \mathrm{Im}(u_2) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(u_p)$ et les deux termes extrêmes ont même dimension, d'où $\mathrm{Ker}(u_1) = \mathrm{Im}(u_2) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(u_p)$. Comme u_1 est autoadjoint, $\mathrm{Im}(u_1) \perp \mathrm{Ker}(u_1)$ ce qui prouve l'orthogonalité de la somme. De plus $\mathrm{Im}(u_1) \subset \mathrm{Ker}(u_j)$ pour $j \geqslant 1$ donc $q_1(x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(u_1)$. En appliquant **1)** à $\mathrm{Im}(u_1)$ on obtient $u_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(u_1)$ ce qui prouve que u_1 est un projecteur, et c'est un projecteur orthogonal car autoadjoint.

Correction de l'exercice 3989 ▲

$A = P^{-1}DP \Rightarrow {}^tA = ({}^tPP)A(P^{-1}\,{}^tP^{-1})$.

S définie positive $\Rightarrow \exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $S = {}^tPP$, donc ${}^tA = SAS^{-1} \Rightarrow {}^tA = {}^tPM{}^tP^{-1}$ avec $M = PAP^{-1}$, d'où ${}^tM = M$ est diagonale.

Correction de l'exercice 3990 ▲

Pour A symétrique réelle on a $\max(\mathrm{Sp}(A)) = \sup\{(x \mid Ax)/\|x\|^2,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ donc f est la borne supérieure des fontions affines $t \mapsto ((x \mid Ax) + t(x \mid Bx))/\|x\|^2$ lorsque x décrit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En tant que sup de fonctions convexes, c'est une fonction convexe.

Correction de l'exercice 3993 ▲

(a) $(f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = -(f(\vec{y}) \mid \vec{x})$ et $(f(i\vec{x}) \mid \vec{y}) = -(f(\vec{y}) \mid i\vec{x})$.

(b)

(c)

Correction de l'exercice 3995 ▲

$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}$, $b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2}$, $m = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$.

Correction de l'exercice 3996 ▲

(a) $\frac{1}{16}$.

(b) $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 4000 ▲

(a)

(b)

(c)

(d)

(e) $\frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 4002 ▲

(a)

(b)

(c) $\alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{7}}}$, $\beta = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{7}}}$.

Correction de l'exercice 4003 ▲

(a)

(b) Soit $P_0 = Q_0'$. Par IPP on obtient Q_0 est orthogonal à la famille $(jX^{j-1} - X^j)_{j \geqslant 1}$ qui est une base de $\mathbb{R}[X]$ donc $Q_0 = 0 = P_0$ et $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^0 P_0(t)\, dt \neq \delta_{0,0}$.

Correction de l'exercice 4004 ▲

$f =$ cste.

Correction de l'exercice 4006 ▲

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $(\vec{e}_i)$.
Le premier membre vaut ${}^tXPG^{-1t}PX = {}^tXX$.

Correction de l'exercice 4008 ▲

(a)

(b)

(c) Soit $g \in H^\perp$ non nulle. Les formes linéaires : $f \mapsto \int_0^{1/2} f$ et $f \mapsto \int_0^1 fg$ sont nulles sur H, donc proportionnelles, ce qui est impossible pour g continue.

Correction de l'exercice 4009 ▲

(a) $u \geqslant 0$ et $u^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.

(b) Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha u \leqslant v \leqslant \beta u$.

Correction de l'exercice 4010 ▲

(a) (a_n) est partout dense.

(b)

(c)

(d) Si les a_n sont distincts, on choisit pour tout n une fonction f_n comprise entre 0 et 1 valant alternativement 1 et -1 en $a_0, \dots, a_n$. Alors la suite (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas car si $f_n \to f$ alors $f^2 \equiv 1$, absurde.

Correction de l'exercice 4011 ▲

$\sqrt{1-|(u \mid v)|^2} = d(v, \mathbb{C}u) \leqslant d(v, \mathbb{C}w) + |(v \mid w)| d(w, \mathbb{C}u)$.

Correction de l'exercice 4012 ▲

(a) $A = UT\,{}^tU \Rightarrow A\overline{A} = UT\overline{T}\,{}^t\overline{U}$ est semblable à $T\overline{T}$.

(b) $A\overline{A}$ est à valeurs propres positives distinctes. Soit U unitaire trigonalisant $A\overline{A}$ et $T = U^{-1}A\,{}^tU^{-1}$. Donc $T\overline{T}$ est triangulaire supérieure à valeurs propres réelles distinctes. On montre que ceci implique T triangulaire supérieure par récurrence sur n.
$T = \begin{pmatrix} t & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \Rightarrow T\overline{T} = \begin{pmatrix} |t|^2 + X\overline{Y} & t\overline{X} + X\overline{Z} \\ \bar{t}Y + Z\overline{Y} & Y\overline{X} + Z\overline{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{réel} & * \\ 0 & \text{tr.sup à vp réelles} \end{pmatrix}$.
Donc $X\overline{Y} = \overline{X}Y$ et $Z\overline{Y} = -\bar{t}Y$, d'où $(Y\overline{X} - X\overline{Y}I)Y = 0 = (Z\overline{Z} - |t|^2 I)Y$.
Par hypothèse $Y\overline{X} + Z\overline{Z} - (|t|^2 + X\overline{Y})I$ est inversible donc $Y = 0$ et on est ramené au cas $n-1$.

(c) $A\overline{A}$ est à valeurs propres positives : ? ? ?
Solution de Pierre Février (MP* Neuilly sur Seine) :
lemme : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A\overline{A})$ alors il existe $W \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $A\overline{W} = \alpha W$ et $\alpha^2 = \lambda$.
Soit $V \in E_\lambda(A\overline{A})$, $V \neq 0$. Si $A\overline{V} = -\sqrt{\lambda}\,V$ on a le résultat voulu, sinon on pose $W = A\overline{V} + \sqrt{\lambda}\,V$.
On a alors :

$$\overline{A}W = \overline{A}A\overline{V} + \sqrt{\lambda}\,\overline{A}V = \lambda\overline{V} + \sqrt{\lambda}\,\overline{A}V = \sqrt{\lambda}\,\overline{W}$$

On peut s'arranger pour que le vecteur précédent soit unitaire et construire U matrice unitaire de première colonne W.

On a alors ${}^t\overline{U}A\overline{U} = \begin{pmatrix} \alpha & x & x & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, puis ${}^t\overline{U}A\overline{A}U = \begin{pmatrix} \alpha^2 & y & y & y \\ 0 & & & \\ \vdots & & B\overline{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. On en déduit le résultat par récurrence.

Correction de l'exercice 4013 ▲

$M = X^tY - Y^tX$.

Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $(I + aM)Z = 0$. Donc $Z \in \text{vect}(X,Y) : Z = \lambda X + \mu Y$.

on remplace :

$$\begin{cases} (1 - a^tYX)\lambda & - & a^tYY\mu & = & 0 \\ a^tXX\lambda & + & (1 + a^tYX)\mu & = & 0 \end{cases}$$

CNS $\iff a^2({}^tXX\,{}^tYY - ({}^tXY)^2) + 1 \neq 0$.

Correction de l'exercice 4014 ▲

On a ${}^tAA - {}^tCC = I_n$.

Soit X tel que $AX = 0$. Donc ${}^tXX = -{}^t(CX)(CX)$, donc $X = 0$.

Correction de l'exercice 4015 ▲

$A^tA = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I$.

Correction de l'exercice 4016 ▲

trigonaliser A dans une base orthonormée.

Correction de l'exercice 4017 ▲

$h = f \circ f^* : h^2 = \text{id}$ et $h \geqslant 0 \Rightarrow h = \text{id}$.

Correction de l'exercice 4019 ▲

$a = b = \pm c$.

Correction de l'exercice 4020 ▲

Ils sont égaux (décomposer A en symétrique $+$ antisymétrique).

Correction de l'exercice 4021 ▲

(a) $\text{spec}(M) = \{j, j^2\} \Rightarrow$ on prend comme base orthonormale $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \frac{2}{\sqrt{3}}(f(a) + \frac{1}{2}a) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(b) M est une matrice de rotation ssi $\text{spec}(M) \subset \mathbb{U} \setminus \{\pm 1\}$ ou $M = \pm I$.

(c) M est la matrice d'une application orthogonale ssi $\text{spec}(M) \subset \mathbb{U}$ et M est $\mathbb{C}$-diagonalisable (alors M est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de rotation).

Correction de l'exercice 4023 ▲

(a) Inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Il existe P orthogonale de même taille que A telle que $D = {}^tPAP$ est diagonale positive. Alors $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ {}^tCP & B \end{pmatrix}$ est symétrique positive donc si $d_{ii} = 0$ alors la ligne i de ${}^tPC$ est nulle. Ainsi $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U' \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est, après renumérotation éventuelle des lignes et colonnes, de la forme $U'' = \begin{pmatrix} D' & C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où D' est diagonale inversible et U' est semblable à U''. Enfin U'' est diagonalisable : $\begin{pmatrix} I & D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} U'' \begin{pmatrix} I & -D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4024 ▲

(a) Si ${}^tUMV = D$ est diagonale alors ${}^tMM = VD^{2t}V$. Inversement, comme ${}^tMM$ est symétrique définie positive, il existe D diagonale inversible et V orthogonale telles que ${}^tMM = VD^{2t}V$. On pose $M = UD^tV$ ce qui définit U puisque D^tV est inversible et on a $VD^{2t}V = {}^tMM = VD^tUUD^tV$ d'où ${}^tUU = I$.

(b) M est limite de matrices M_k inversibles que l'on peut décomposer sous la forme $M_k = U_kD_k{}^tV_k$ avec U_k et V_k orthogonales et D_k diagonale. Comme $O(n)$ est compact on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, que les suites (U_k) et (V_k) convergent vers U, V orthogonales d'où ${}^tUMV = \lim_{k\to\infty} {}^tU_kM_kV_k = \lim_{k\to\infty} D_k = D$ diagonale.

(c) En diagonalisant ${}^tMM$ on trouve $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme D n'est pas inversible il faut ruser pour trouver U. On donne des coefficients indéterminés à U et on écrit que ${}^tUMV = D$ ce qui donne $U = \begin{pmatrix} a & b+\sqrt{2} & c \\ -a-\frac{3}{\sqrt{6}} & -b-\frac{1}{\sqrt{2}} & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On choisit alors a, b, c de sorte que $U \in O(3)$ d'où, par exemple, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4025 ▲

(a) $\det(A)^2 = (-1)^n$.

(b) A est $\mathbb{C}$-diagonalisable (annulateur simple) et ses valeurs propres sont $i, -i$ avec la même multiplicité (A est réelle). La matrice A' donnée a les mêmes propriétés donc A et A' sont $\mathbb{C}$-semblables à la même matrice diagonale, et donc $\mathbb{C}$-semblables l'une à l'autre. Comme la $\mathbb{C}$-similitude entre matrices réelles est équivalente à la $\mathbb{R}$-similitude (résultat bien connu), A et A' sont $\mathbb{R}$-semblables.

(c) Soit e_1 unitaire et $e_1' = Ae_1$. Alors e_1' est unitaire et $Ae_1' = -e_1$ d'où $(e_1 \mid e_1') = (Ae_1 \mid Ae_1') = -(e_1 \mid e_1') = 0$ donc (e_1, e_1') est une famille orthonormale. Si F_1 est le sous-espace vectoriel engendré par (e_1, e_1') alors $F_1^\perp$ est stable par A donc on peut construire par récurrence une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_{n/2}, e_1', \ldots, e_{n/2}')$ telle que $Ae_i = e_i'$ et $Ae_i' = -e_i$.

Correction de l'exercice 4026 ▲

On remplace A par $A + b_nI$ et B par $B - b_nI$ ce qui ne modifie pas C. Maintenant les valeurs propres de B sont positves donc pour tou $x \in \mathbb{C}^n$ on a $(Ax \mid x) \leqslant (Cx \mid x)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base orthonormale propre pour A et $(y_1,\dots,y_n)$ une base orthonormale propre pour C. Si $z\in\text{vect}(x_1,\dots x_i)$ alors $(Az\mid z)\geqslant a_i\|z\|^2$ et si $z\in\text{vect}(y_i,\dots y_n)$ alors $(Az\mid z)\leqslant(Cz\mid z)\leqslant c_i\|z\|^2$. Or $\text{vect}(x_1,\dots x_i)$ et $\text{vect}(y_i,\dots y_n)$ ont une intersection non triviale (la somme des dimensions est égale à $n+1$) donc il existe $z\neq 0$ tel que $a_i\|z\|^2\leqslant c_i\|z\|^2$ d'où $a_i\leqslant c_i$.

Correction de l'exercice 4027 ▲

(a) Prendre A supérieur ou égal à la plus petite des valeurs propres de $-M$.

(b) Surjectivité de ϕ : $\text{Im}\,\Phi$ est un sous-espace vectoriel de $S_n(\mathbb{R})$ contenant $S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc contenant $\text{vect}(S_n^{++}(\mathbb{R}))=S_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente. On en déduit que ϕ est un isomorphisme grâce au théorème du rang.

Si $M\in S_n^+(\mathbb{R})$ alors $M=\lim_{p\to\infty}(M+I_n/p)$ donc $M\in\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$. Réciproquement, si $M\in\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$ alors $M=\lim_{p\to\infty}(M_p)$ avec M_p définie positive, donc pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ on a ${}^txMx=\lim_{p\to\infty}({}^txM_px)\geqslant 0$, c'est-à-dire $M\in S_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi : $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}=S_n^+(\mathbb{R})$. Comme ϕ est continue (car linéaire en dimension finie) on en déduit $\phi(S_n^+(\mathbb{R}))\subset S_n^+(\mathbb{R})$. De plus, $\phi(S_n^{++}(\mathbb{R}))=S_n^{++}(\mathbb{R})\Rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})=\phi^{-1}(S_n^{++}(\mathbb{R}))$ donc par continuité de ϕ^{-1} : $\phi^{-1}(S_n^+(\mathbb{R}))\subset S_n^+(\mathbb{R})$, d'où $S_n^+(\mathbb{R})\subset\phi(S_n^+(\mathbb{R}))$.

(c) Soit $M\in S_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres a,b avec $a\leqslant b$, et soient $a'\leqslant b'$ les valeurs propres de $\phi(M)$. Pour tout $\lambda>b$ on a $M+\lambda I_2\in S_2^{++}(\mathbb{R})$ donc $\phi(M)+\lambda I_2\in S_2^{++}(\mathbb{R})$ c'est-à-dire $\lambda>b'$. Ceci prouve que $b'\leqslant b$ et on montre l'égalité en considérant ϕ^{-1}. De même, en considérant $-M$ on montre que $a'=a$. Finalement $\chi_M=(X-a)(X-b)=\chi_{\phi(M)}$. De plus, $\det(M)=ab=\det(\phi(M))$.

Remarque : soient $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $C=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, et $A'=\phi(A)$, $B'=\phi(B)$, $C'=\phi(C)$. On sait que A' est orthodiagonalisable avec pour valeurs propres 0 et 1, donc il existe $P\in O(2)$ telle que $A'={}^tPAP$. $A'+B'=\phi(I_2)=I_2$ d'où $B'=I_2-A'={}^tPBP$. Posons $C'={}^tP\left(\begin{smallmatrix}u&v\\v&w\end{smallmatrix}\right)P$. $0=\text{tr}(C)=\text{tr}(C')=u+w$ et $-1=\det(C)=\det(C')=uw-v^2$ donc $w=-u$ et $u^2+v^2=1$. De plus, $-1=\det(A+C)=-u-u^2-v^2$ d'où $u=0$ et $v=\pm1$.

Si $v=1$ alors $C'={}^tPCP$ et par linéarité, $\phi(M)={}^tPMP$ pour toute $M\in S_2(\mathbb{R})$. Si $v=-1$ on trouve de même $\phi(M)={}^tQMQ$ avec $Q=P\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)\in O(2)$. Réciproquement, toute aplication de la forme $M\mapsto{}^tPMP$ avec $P\in O(2)$ vérifie les hypothèses de la question. Les fonctions ϕ linéaires vérifiant la seule condition $\phi(S_2^{++}(\mathbb{R}))=S_2^{++}(\mathbb{R})$ sont les fonctions de la forme $M\mapsto{}^tPMP$ avec $P\in GL_2(\mathbb{R})$ (écrire $\phi(I_2)={}^tTT$ puis considérer $M\mapsto{}^tT^{-1}\phi(M)T^{-1}$).

Généralisation en dimension quelconque ?

Correction de l'exercice 4028 ▲

$M=({}^tMM)^{-2}$ est symétrique définie positive, donc diagonalisable en base orthonormale. En examinant la forme diagonale on trouve $M=I$.

Correction de l'exercice 4029 ▲

(a) $\|C_1\|=\|C_2\|=\frac{1}{3}\sqrt{4+4+1}=1$ et $C_1|C_2=\frac{1}{9}(-2+4-2)=0$. Enfin,

$$C_1\wedge C_2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-6\\-3\\-6\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=C_3.$$

Donc, $A\in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation (distincte de l'identité). **Axe de f.** Soit $X\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX=X\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-x-y-2z=0\\-2x-5y-z=0\\-x+2y-5z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=-2x-5y\\3x+9y=0\\9x+27y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-3y\\z=y\end{array}\right..$$

L'axe D de f est $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u}=(-3,1,1)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. **Angle de f.** Le vecteur $\overrightarrow{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à l'axe. Donc,

$$\cos\theta = \overrightarrow{v}.f(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{3}(-1,1,-4) = -\frac{1}{6}\times 5 = -\frac{5}{6},$$

et donc, $\theta = \pm\arccos(-\frac{5}{6})$ (2π). (Si on sait que $\mathrm{Tr}(A) = 2\cos\theta + 1$, c'est plus court : $2\cos\theta + 1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ fournit $\cos\theta = -\frac{5}{6}$). Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} < 0$. Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } -\arccos(-\tfrac{5}{6}) \text{ autour de } u = (-3,1,1).}$$

(b) $||C_1|| = ||C_2|| = \frac{1}{4}\sqrt{9+1+6} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{16}(3+3-6) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation. **Axe de f.** Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y+\sqrt{6}z = 0 \\ x-y-\sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x-y = \sqrt{6}z = \frac{2}{\sqrt{6}}z \Leftrightarrow x = y \text{ et } z = 0.$$

L'axe D de f est $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. **Angle de f.** $\overrightarrow{k} = [0,0,1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Par suite,

$$\cos\theta = \overrightarrow{k}.f(\overrightarrow{k}) = (0,0,1).\frac{1}{4}(\sqrt{6},-\sqrt{6},2) = \frac{1}{2},$$

et donc $\cos\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ (2π). Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $\left[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} > 0$. Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } \tfrac{\pi}{3} \text{ autour de } \overrightarrow{u} = (1,1,0).}$$

(c) $||C_1|| = ||C_2|| = \frac{1}{9}\sqrt{64+16+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \frac{1}{81}(8-16+8) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -36 \\ -63 \\ 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -C_3.$$

Donc, $A \in O_3^-(\mathbb{R})$. A n'est pas symétrique, et donc f n'est pas une réflexion. f est donc la composée commutative $s \circ r$ d'une rotation d'angle θ autour d'un certain vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et de la réflexion de plan $\overrightarrow{u}^\perp$ où $\overrightarrow{u}$ et θ sont à déterminer. **Axe de r.** L'axe de r est $Ker(f+Id_E)$ (car $f \neq -Id_E$).

$$AX = -X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 17x+y+4z = 0 \\ -4x+13y+7z = 0 \\ x+8y+5z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -17x-4z \\ -225x-45z = 0 \\ -135x-27z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -5x \\ y = 3x \end{array}\right.$$

$\mathrm{Ker}(f+Id_E) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = D$ où $u = (1,3,-5)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$. s est la réflexion par rapport au plan $P = u^\perp$ dont une équation est $x+3y-5z = 0$. On écrit alors la matrice S de s dans la base de départ. On calcule $S^{-1}A = SA$ qui est la matrice de r et on termine comme en 1) et 2).

Correction de l'exercice 4030 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

f est une rotation $\Leftrightarrow M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow ||C_1|| = ||C_2|| = ||C_3|| = 1$ et $C_1|C_2 = C_1|C_3 = C_2|C_3 = 0$ et $\det M = 1$
$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 1$ et $ab+bc+ca = 0$ et $a^3+b^3+c^3-3abc = 1$.

Posons $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$ et $\sigma_3 = abc$. On a $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc) = \sigma_1^2-2\sigma_2$. Ensuite,

$$\sigma_1^3 = (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ba^2+a^2c+ca^2+b^2c+c^2b)+6abc,$$

et

$$\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^3+b^3+c^3+(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b).$$

Donc,

$$\sigma_1^3-3\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2) = -2(a^3+b^3+c^3)+6\sigma_3$$

et finalement, $a^3+b^3+c^3 = \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.

$M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma_2 = 0$ et $\sigma_1^2-2\sigma_2 = 1$ et $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2 = 1$
$\Leftrightarrow \sigma_2 = 0$ et $\sigma_1 = 1$
$\Leftrightarrow a,\ b$ et c sont les solutions réelles d'une équation du type $x^3-x^2+k = 0$ (où $k = -\sigma_3$).

Posons $P(x) = x^3-x^2+k$ et donc $P'(x) = 3x^2-2x = x(2x-3)$. Sur $]-\infty,0]$, P est strictement croissante, strictement décroissante sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$. P admet donc au plus une racine dans chacun de ces trois intervalles. **1er cas.** Si $P(0) = k > 0$ et $P\left(\frac{2}{3}\right) = k-\frac{4}{27} < 0$ ou ce qui revient au même, $0 < k < \frac{4}{27}$, P admet trois racines réelles deux à deux distinctes (P étant d'autre part continue sur $\mathbb{R}$), nécessairement toutes simples. **2ème cas.** Si $k \in \left\{0,\frac{4}{27}\right\}$, P et P' ont une racine réelle commune (à savoir 0 ou $\frac{4}{27}$) et P admet une racine réelle d'ordre au moins 2. La troisième racine est alors nécessairement réelle. **3ème cas.** Si $k < 0$ ou $k > \frac{4}{27}$, P admet une racine réelle exactement. Celle-ci est nécessairement simple au vu du 2ème cas et donc P admet deux autres racines non réelles. En résumé, P a toutes ses racines réelles si et seulement si $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$ et donc, f est une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3-x^2+k = 0$ où $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$.

Correction de l'exercice 4031 ▲

(a) Soit $F = \text{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ et $m = \dim F$. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}$ .M est une matrice rectangulaire de format (m,n).
Soit $(i,j) \in [\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice ${}^tMM$ est

$$\textstyle\sum_{k=1}^m m_{k,i}m_{k,j} = (x_i|x_j),$$

et on a donc

$$G(x_1,x_2,\dots,x_n) = {}^tMM.$$

Puisque $\text{rg}(x_1,\dots,x_n) = \text{rg}M$, il s'agit de vérifier que $\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}M$. Pour cela, montrons que les matrices M et ${}^tMM$ ont même noyau.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$ et aussi

$$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}M.$$

Finalement, $\text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}M$ et donc, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1,...,x_n) = \text{rg}M = \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(G(x_1,x_2,...,x_n))$.

$$\boxed{\text{rg}(G(x_1,x_2,...,x_n)) = \text{rg}(x_1,\ldots,x_n).}$$

(b) D'après 1),

$$(x_1,...,x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \text{rg}(x_1,x_2,...,x_n) <\Leftrightarrow \text{rg}G(x_1,x_2,...,x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1,x_2,...,x_n) \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow \gamma(x_1,x_2,...,x_n) = 0.$$

De plus, quand la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ libre, avec les notations de la question 1), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1,x_2,...,x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(x_1,...,x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \gamma(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ (x_1,...,x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow \gamma(x_1,\ldots,x_n) > 0.\end{array}}$$

(c) **1ère solution.** Soit x un vecteur de E et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Dans la première colonne de $\gamma(x,x_1,\ldots,x_n)$, le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire (puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$)

$$\begin{pmatrix}(x|x)\\(x|x_1)\\\vdots\\(x|x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|x-p_F(x)+p_F(x)\|^2\\(x-p_F(x)+p_F(x)|x_1)\\\vdots\\(x-p_F(x)+p_F(x)|x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|x-p_F(x)\|^2+\|p_F(x)\|^2\\(p_F(x)|x_1)\\\vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\|x-p_F(x)\|^2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(p_F(x)|p_F(x))\\(p_F(x)|x_1)\\\vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n) = \gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n) + \gamma(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$$

Maintenant, $p_F(x)$ est dans F et donc la famille $(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$ est liée puis d'après la question 2) $\gamma(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n) = 0$. Il reste $\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n) = \gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$ et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x \in E,\ \gamma(x,x_1,\ldots,x_n) = \gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n) = \|x-p_F(x)\|^2\gamma(x_1,x_2,...,x_n).$$

Finalement

$$\boxed{\|x-p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)}{\gamma(x_1,x_2,...,x_n)}}.}$$

2ème solution. Posons $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ puis $d = \|x - p_F(x)\|$ de sorte que

$$d^2 = (x-p_F(x))|(x-p_F(x)) = (x-p_F(x))|x = \|x\|^2 - (x|p_F(x)).$$

D'autre part, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $x|x_i = (x-p_F(x)|x_I) + (p_F(x)|x_i) = (p_F(x)|x_i)$. Par suite, les $n+1$ réels d^2, λ_1,..., λ_n sont solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} d^2 + & \lambda_1(x|x_1) + \ldots + \lambda_n(x|x_n) = \|x\|^2 \\ & \lambda_1(x_1|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_1|x_n) = (x|x_1) \\ & \vdots \\ & \lambda_1(x_n|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_n|x_n) = (x|x_n) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut $\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ et le système est de CRAMER. Le déterminant associé à d^2 est $\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n)$ et les formules de CRAMER refournissent

$$d^2 = \frac{\gamma(x,x_1,...,x_n)}{\gamma(x_1,...,x_n)}.$$

Correction de l'exercice 4032 ▲

La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tXH_nX &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j t^{i+j-2} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt \geqslant 0. \end{aligned}$$

De plus, si $X \neq 0$, le polynôme $\sum_{i=1}^n x_i Y^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul et donc, puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0,1]$ et on en déduit que $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 dt > 0$. On a montré que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXH_nX > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la matrice } H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$$

Correction de l'exercice 4033 ▲

(a) ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA = S$. Donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|_2^2 \geqslant 0$. Donc $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

(b) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD^tP$.
Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et on peut poser $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D'^2 = D$. On peut alors écrire

$$S = PD^tP = PD'D'^tP = {}^t(D^tP)D'^tP,$$

et la matrice $A = D'tP$ convient.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) /\ S = {}^tAA.}$$

On a aussi ${}^t(-A)(-A) = S$ et comme en général $-A \neq A$, on n'a pas l'unicité de la matrice A.

(c)

$$\begin{aligned} S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \|AX\|_2^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AX \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}A = \{0\} \Leftrightarrow A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(d) Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker} A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker} S,$$

et

$$X \in \mathrm{Ker} S \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker} A.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A).}$$

(e) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0 D_0 {}^tP_0$. Posons $D_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et enfin $R = P_0 \Delta_0 {}^tP_0$. La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis

$$R^2 = P_0 \Delta_0^2 {}^tP_0 = P_0 D_0 {}^tP_0 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.
M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda)$. Mais si λ est une valeur propre de M, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}(M^2 - \lambda^2 I_n) = \mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.
Ceci montre que pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ et que les λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S.
Ainsi, nécessairement la matrice ${}^tP_0 M P_0$ est une matrice diagonale D. L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ R^2 = S.}$$

Correction de l'exercice 4034 ▲

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice orthogonale. On pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| &= \left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 1 \times a_{i,j} \times 1 \right| = \left| {}^tXAX \right| = |(AX|X)| \\ &\leqslant \|AX\| \|X\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \|X\|^2 \text{ (puisque la matrice } A \text{ est orthogonale)} \\ &= n. \end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si la famille (X, AX) est liée ce qui équivaut à X vecteur propre de A.
On sait que les valeurs propres (réelles) de A ne peuvent être que 1 ou -1. Donc,

$$\text{égalité} \Leftrightarrow AX = X \text{ ou } AX = -X \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| = 1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Puisque tous les $a_{i,j}$ sont éléments de $[0, 1]$,

$$1 = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \geqslant \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité $a_{i,j} \geqslant a_{i,j}^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est une égalité. Par suite, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$. Ceci montre que la matrice A est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

Correction de l'exercice 4035 ▲

La matrice A est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. De plus,

$$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = \chi_A(-1) = (1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_n).$$

L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1+\lambda_k)}.$$

Soit donc $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Si l'un des λ_k est nul, l'inégalité est immédiate.
Supposons dorénavant tous les λ_k strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n}(\ln(\lambda_1) + \ldots + \ln(\lambda_n))\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}(\ln(1+\exp(\ln(\lambda_1))) + \ldots + \ln(1+\exp(\ln(\lambda_n)))) \quad (*)$$

ou encore $f\left(\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)\right) \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n))$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \ln(\lambda_k)$.
L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1} \text{ puis } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'inégalité $(*)$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ 1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n + A)}.}$$

Correction de l'exercice 4036 ▲

Soit A une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de A sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls. A est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou -1. Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.

Il y a $n!$ matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation 2^n façons d'attribuer un signe $+$ ou $-$ à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\boxed{\operatorname{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})) = 2^n n!.}$$

Correction de l'exercice 4037 ▲

Puisque les matrices $S_1 = {}^tAA$ et $S_2 = A^tA$ sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si M et N sont deux matrices quelconques alors les matrices MN et NM ont même polynôme caractéristique.

Notons alors $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des valeurs propres des matrices S_1 et S_2 et posons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$. D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que $S_1 = P_1 D^t P_1$ et $S_2 = P_2 D^t P_2$. Mais alors

$$S_2 = P_2({}^tP_1 S_1 P_1)^t P_2 = (P_2{}^tP_1) S_1{}^t(P_2{}^tP_1).$$

Comme la matrice $P_2{}^tP_1$ est orthogonale, on a montré que les matrices S_1 et S_2 sont orthogonalement semblables.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ les matrices } {}^tAA \text{ et } A^tA \text{ sont orthogonalement semblables.}}$$

Correction de l'exercice 4038 ▲

Remarque. Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB^tA = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de AB soient toutes réelles .

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice 4033, il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = {}^tMM$ et $B = {}^tNN$. On a alors $AB = {}^tMM^tNN$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N({}^tMM^tN = {}^t(M^tN)M^tN$. D'après l'exercice 4033, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathrm{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+.}$$

Correction de l'exercice 4039 ▲

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.

1er cas. Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$.

D'autre part, la matrice $A+B$ est symétrique car $(\mathscr{S}_n(R), +, .)$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$.

La matrice $A+B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A+B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A+B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a $\det(A+B) \geqslant 0 = \det A + \det B$.

2ème cas. Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple A définie positive.

D'après l'exercice 4033, il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$. On peut alors écrire $A+B = {}^tMM + B = {}^tM(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1})M$ et donc

$$\det(A+B) = (\det M)^2 \det(I_n + {}^t(M^{-1})BM^{-1} = (\det M)^2 \det(I_n + C)$$

où $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne X,

$${}^tXCX = {}^tX^t(M^{-1})BM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geqslant 0$$

et ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1+\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et donc

$$\det(I_n + C) = (1+\lambda_1)\dots(1+\lambda_n) \geqslant 1 + \lambda_1 \dots \lambda_n = 1 + \det C.$$

Maintenant, $\det A = (\det M)^2$ puis $\det B = (\det M)^2 \det C$ et donc

$$\det A + \det B = (\det M)^2(1+\det C) \leqslant (\det M)^2 \det(I_n + C) = \det(A+B).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \det A + \det B \leqslant \det(A+B).}$$

Correction de l'exercice 4040 ▲

1ère solution. (n'utilisant pas les valeurs propres) Soient A la matrice de l'énoncé puis $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
{}^tXAX &= (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i\neq j} x_ix_j = \sum_{i\neq j}(x_i^2 - x_ix_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\neq j} x_i^2 - 2x_ix_j + x_j^2\right) \\
&= \sum_{i\neq j}(x_i - x_j)^2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

et donc la matrice A est positive. De plus, si $X = (1)_{1\leqslant i\leqslant n} \neq 0$, ${}^tXAX = 0$ et donc la matrice A n'est pas définie.

2ème solution. La matrice A est symétrique réelle. Donc ses valeurs propres sont réelles et A est diagonalisable. Par suite, la dimension de chacun de des sous-espaces propres de A est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

On note alors que $\mathrm{rg}(A - nI_n) = 1$ et donc n est valeur propre de A d'ordre $n-1$. Soit λ la valeur propre manquante.

$$(n-1)n + \lambda = \mathrm{Tr}A = n(n-1).$$

Donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et donc la matrice A est positive mais 0 est valeur propre de A et donc la matrice A n'est pas définie.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est positive et non définie.}}$$

Correction de l'exercice 4041 ▲

Pour la première question, une simple observation suffit : les matrices I et $-I$ sont dans $O_n(\mathbb{R})$, mais pas la matrice nulle qui est leur milieu.

Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel $\lambda \in]0,1[$, la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ n'est pas orthogonale.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note respectivement A_j, B_j et C_j la j-ème colonne de matrice A, de la matrice B et de la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$. Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$1 = \|C_j\| \leqslant (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1-\lambda) + \lambda = 1,$$

et donc $\|C_j\| = (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de MINKOWSKI. Puisque $\lambda \in]0,1[$, les colonnes $(-\lambda)A_j$ et λB_j ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels $1-\lambda$ et λ sont strictement positifs, il en est de même des colonnes A_j et B_j et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale, alors $A = B$. Ceci est une contradiction et on a montré que

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas convexe.}}$$

Correction de l'exercice 4042 ▲

A est la matrice d'un produit scalaire φ dans une certaine base $\mathscr{B}$ fixée de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{B}'$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base $\mathscr{B}$ pour le produit scalaire φ et T la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. La matrice T est triangulaire de même que la matrice ${}^tT$.

Puisque la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée pour le produit scalaire φ, la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$ est I_n. D'après les formules de changement de base, $A = {}^tT(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\varphi)T = {}^tTT$.

Correction de l'exercice 4043 ▲

Puisque la matrice A est définie positive, il existe d'après le l'exercice 4042 une matrice triangulaire supèrieure inversible T telle que $A = {}^tTT$. Posons alors $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$$\det(A) = (\det(T))^2 = t_{1,1}^2 \ldots t_{n,n}^2$$

Mais pour $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = \sum_{k=1}^n t_{k,i}^2 \geqslant t_{i,i}^2$ et donc $\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.
Remarque. On a montré au passage que les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ de A étaient des réels strictement positifs.

Correction de l'exercice 4044 ▲

Je vous laisse vérifier la linéarité. Si x est colinéaire à a, $f(x) = 0$ et les vecteurs de $\text{Vect}(a) \setminus \{0\}$ sont des vecteurs non nuls colinéaires à leur image. Si x n'est pas colinéaire à a, $a \wedge x$ est un vecteur non nul orthogonal à a et il en est de même de $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Donc, si x est colinéaire à $f(x)$, x est nécessairement orthogonal à a. Réciproquement, si x est un vecteur non nul orthogonal à a, $f(x) = (a.x)a - \|a\|^2 x = -||a||^2 x$ et x est colinéaire à $f(x)$. Les vecteurs non nuls colinéaires à leur image sont les vecteurs non nuls de $\text{Vect}(a)$ et de $a^\perp$.

Correction de l'exercice 4045 ▲

Si la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille liée, l'inégalité est claire et de plus, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nuls. Si la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre et donc une base de E, considérons $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$ son orthonormalisée de SCHMIDT. On a

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}| = \left|\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}|,$$

car $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'$ est le déterminant d'une d'une base orthonormée dans une autre et vaut donc 1 ou -1. Maintenant, la matrice de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit des coefficients diagonaux à savoir les nombres $x_i|e_i$ (puisque $\mathscr{B}'$ est orthonormée). Donc

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}| = \left|\prod_{i=1}^n (x_i|e_i)\right| \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\| \times \|e_i\| = \prod_{i=1}^n ||x_i||,$$

d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. De plus, on a l'égalité si et seulement si, pour tout i, $|x_i|e_i| = \|x_i\| \times \|e_i\|$ ou encore si et seulement si, pour tout i, x_i est colinéaire à e_i ou enfin si et seulement si la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale.

Correction de l'exercice 4046 ▲

L'application $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_3[X]$. Déterminons une base orthonormée de E. Pour cela, déterminons (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) l'orthonormalisée de la base canonique $(P_0,P_1,P_2,P_3) = (1,X,X^2,X^3)$. • $||P_0||^2 = \int_{-1}^1 1^2\,dt = 2$ et on prend $\boxed{Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$ • $P_1|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 t\,dt = 0$ puis $P_1 - (P_1|Q_0)Q_0 = X$ puis $||P_1 - (P_1|Q_0)Q_0||^2 = \int_{-1}^1 t^2\,dt = \frac{2}{3}$ et $\boxed{Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X.}$ • $P_2|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 t^2\,dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $P_2|Q_1 = 0$. Donc, $P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1 = X^2 - \frac{1}{3}$, puis $||P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1||^2 = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{45}$ et $\boxed{Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1).}$ • $P_3|Q_0 = P_3|Q_2 = 0$ et $P_3|Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^1 t^4\,dt = \frac{\sqrt{6}}{5}$ et $P_3 - (P_3|Q_0)Q_0 - (P_3|Q_1)Q_1 - (P_3|Q_2)Q_2 = X^3 - \frac{3}{5}X$, puis $\left\|X^3 - \frac{3}{5}X\right\|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 dt = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}\right) = 2\frac{25-21}{175} = \frac{8}{175}$, et $\boxed{Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X).}$ Une base orthonormée de E est (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) où $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$, $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1)$ et $Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X)$. Soit alors P un élément quelconque de $E = \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt = 1$. Posons $P = aQ_0 + bQ_1 + cQ_2 + dQ_3$. Puisque (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) est une base orthonormée de E, $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt = ||P||^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Maintenant, pour $x \in [-1,1]$, en posant $M_i = \text{Max}\{|Q_i(x)|,\ x \in [-1,1]\}$, on a :

$$\begin{aligned}|P(x)| &\leqslant |a|\times|Q_0(x)|+|b|\times|Q_1(x)|+|c|\times|Q_2(x)|+|d|\times|Q_3(x)| \leqslant |a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\ &\leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2} = \sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}.\end{aligned}$$

Une étude brève montre alors que chaque $|P_i|$ atteint son maximum sur $[-1,1]$ en 1 (et -1) et donc

$$\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, $\forall x\in[-1,1]$, $|P(x)|\leqslant 2\sqrt{2}$ et donc $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leqslant 2\sqrt{2}$. Etudions les cas d'égalité. Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$ un polynôme éventuel tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leqslant 2\sqrt{2}$. Soit $x_0\in[-1,1]$ tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\} = |P(x_0)|$. Alors :

$$\begin{aligned}2\sqrt{2} = |P(x_0)| &\leqslant |a|\times|Q_0(x_0)|+|b|\times|Q_1(x_0)|+|c|\times|Q_2(x_0)|+|d|\times|Q_3(x_0)| \leqslant |a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\ &\leqslant \sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2} = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Chacune de ces inégalités est donc une égalité. La dernière (CAUCHY-SCHWARZ) est une égalité si et seulement si $(|a|,|b|,|c|,|d|)$ est colinéaire à $(1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7})$ ou encore si et seulement si P est de la forme $\lambda(\pm Q_0\pm\sqrt{3}Q_1\pm\sqrt{5}Q_2\pm\sqrt{7}Q_3)$ où $\lambda^2(1+3+5+7)=1$ et donc $\lambda=\pm\frac{1}{4}$, ce qui ne laisse plus que 16 polynômes possibles. L'avant-dernière inégalité est une égalité si et seulement si $x_0\in\{-1,1\}$ (clair). La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$|aQ_0(1)+bQ_1(1)+cQ_2(1)+dQ_3(1)| = |a|Q_0(1)+|b|Q_1(1)+|c|Q_2(1)+|d|Q_3(1),$$

ce qui équivaut au fait que a, b, c et d aient même signe et P est l'un des deux polynômes

$$\begin{aligned}\pm\frac{1}{4}(Q_0+\sqrt{3}Q_1+\sqrt{5}Q_2+\sqrt{7}Q_3) &= \pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+3X+\frac{5}{2}(3X^2-1)+\frac{7}{2}(5X^3-3X)\right)\\ &= \pm\frac{1}{8\sqrt{2}}(35X^3+15X2-15X-3)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4047 ▲

Si x est colinéaire à k, $r(x)=x$, et si $x\in k^\perp$, $r(x)=(\cos\theta)x+(\sin\theta)k\wedge x$. Soit $x\in E$. On écrit $x=x_1+x_2$ où $x_1\in k^\perp$ et $x_2\in\text{Vect}(k)$. On a $x_2=(x.k)k$ (car k est unitaire) et $x_1=x-(x.k)k$. Par suite,

$$\begin{aligned}r(x) &= r(x_1)+r(x_2) = (\cos\theta)x_1+(\sin\theta)k\wedge x_1+x_2 = (\cos\theta)(x-(x.k)k)+(\sin\theta)k\wedge x+(x.k)k\\ &= (\cos\theta)x+(1-\cos\theta)(x.k)k+sin\theta(k\wedge x) = (\cos\theta)x+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x.k)k+sin\theta(k\wedge x)\end{aligned}$$

Application. Si $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$ et $\theta=\frac{\pi}{3}$, pour tout vecteur x, on a :

$$r(x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x.k)k+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\wedge x),$$

puis, $r(e_1)=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{4}(e_1+e_2)-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(3e_1+e_2-\sqrt{6}e_3)$

$r(e_2)=\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{4}(e_1+e_2)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(e_1+3e_2+\sqrt{6}e_3)$

$r(e_3)=\frac{1}{2}e_3+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(-e_2+e_1)=\frac{1}{4}(\sqrt{6}e_1-\sqrt{6}e_2+2e_3)$.

$$\boxed{\text{La matrice cherchée est } \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 4048 ▲

L'application $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned} I_nI_{n+2} &= \int_0^1 f^n(t)\,dt \int_0^1 f^{n+2}(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sqrt{(f(t))^n}\right)^2\,dt \int_0^1 \left(\sqrt{(f(t))^{n+2}}\right)^2\,dt \\ &\geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{(f(t))^n}\sqrt{(f(t))^{n+2}}\,dt\right)^2 = \left(\int_0^1 f^{n+1}(t)\,dt\right)^2 = I_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Maintenant, comme f est continue et strictement positive sur $[0,1]$, I_n est strictement positif pour tout naturel n. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est définie et croissante.}}$$

Correction de l'exercice 4049 ▲

(a) Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Pour tout nombre complexe z

$$\begin{aligned} f(z) &= f((\mathrm{Re}(z)).1 + (\mathrm{Im}(z)).i) = (\mathrm{Re}(z))f(1) + (\mathrm{Im}(z))f(i) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})f(1) + \frac{1}{2i}(z-\overline{z})f(i) \\ &= \frac{f(1)-if(i)}{2}z + \frac{f(1)+if(i)}{2}\overline{z}, \end{aligned}$$

et on peut prendre $a = \frac{f(1)-if(i)}{2}$ et $b = \frac{f(1)+if(i)}{2}$. (Réciproquement pour a et b complexes donnés, l'application f ainsi définie est $\mathbb{R}$-linéaire et on a donc l'écriture générale complexe d'un endomorphisme du plan).

(b) $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Re}(f(1)) + \mathrm{Im}(f(i)) = \mathrm{Re}(a+b) + \mathrm{Im}(i(a-b)) = \mathrm{Re}(a+b) + \mathrm{Re}(a-b) = 2\mathrm{Re}(a)$ et

$$\begin{aligned} \det(f) &= \mathrm{Re}(a+b)\mathrm{Im}(i(a-b)) - \mathrm{Im}(a+b)\mathrm{Re}(i(a-b)) = \mathrm{Re}(a+b)\mathrm{Re}(a-b) + \mathrm{Im}(a+b)\mathrm{Im}(a-b) \\ &= (\mathrm{Re}(a))^2 - (\mathrm{Re}(b))^2 + (\mathrm{Im}(a))^2 - (\mathrm{Im}(b))^2 = |a|^2 - |b|^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(f) = 2\mathrm{Re}(a) \text{ et } \det(f) = |a|^2 - |b|^2.}$$

(c) Soient z et z' deux nombres complexes. On rappelle que

$$z|z' = (\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}z') + (\mathrm{Im}z)(\mathrm{Im}z') = \tfrac{1}{4}(z+\overline{z})(z'+\overline{z'}) - \tfrac{1}{4}(z-\overline{z})(z'-\overline{z'}) = \tfrac{1}{2}(\overline{z}z' + z\overline{z'}) = \mathrm{Re}(\overline{z}z').$$

et au passage si on oriente le plan de sorte que la base orthonormée $(1,i)$ soit directe,

$$[z,z'] = (\mathrm{Re}z)(\mathrm{Im}z') + (\mathrm{Im}z)(\mathrm{Re}z') = \tfrac{1}{4i}(z+\overline{z})(z'-\overline{z'}) - \tfrac{1}{4i}(z-\overline{z})(z'+\overline{z'}) = \tfrac{1}{2i}(\overline{z}z' - z\overline{z'}) = \mathrm{Im}(\overline{z}z').$$

Notons M la matrice de f dans la base $(1,i)$. Puisque la base $(1,i)$ est orthonormée,

$$f = f^* \Leftrightarrow M = {}^tM \Leftrightarrow \mathrm{Im}(a+b) = \mathrm{Re}(i(a-b)) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(a+b) = -\mathrm{Im}(a-b) \Leftrightarrow 2\mathrm{Im}a = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{f = f^* \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 4050 ▲

Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve l'orthogonalité est une similitude.

On peut raisonner sur une base orthonormée de E que l'on note $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Par hypothèse, la famille $(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, $(e_i + e_j)|(e_i - e_j) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$ et donc $f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j) = 0$ ce qui fournit $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Soit k la valeur commune des normes des $f(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si $k = 0$, tous les $f(e_i)$ sont nuls et donc f est nulle.

Si $k \neq 0$, l'image par l'endomorphisme $\frac{1}{k} f$ de la base othonormée $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme $\frac{1}{k} f$ est un automorphisme orthogonal de E et donc l'endomorphisme $\frac{1}{k} f$ conserve la norme.

Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Correction de l'exercice 4051 ▲

a) Par récurrence et intégration par parties, on montre que $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$

b) En développant $(1-x)^n$ à l'aide de la formule du binôme, on obtient après intégration $I_{n,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1}$. D_n étant le ppmc des dénominateurs dans l'expression précédente, nous en déduisons que $I_{n,n} = \frac{a}{D_n}$ où a est un entier. Comme $I_{n,n} > 0$, $a \geqslant 1$ et donc $I_{n,n} \geqslant \frac{1}{D_n}$. En utilisant le résultat de la question a), nous en déduisons l'inégalité demandée.

c) Soit $D_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de D_n. Pour tout i compris entre 1 et k, $p_i^{\alpha_i}$ divise un des nombres $n+1$, $n+2, \dots,$ $2n+1$. Par conséquent, $p_i^{\alpha_i} \leqslant 2n+1$. De plus, les p_i étant deux à deux distincts et inférieurs ou égaux à $2n+1$, $k \leqslant \pi(2n+1)$. D'où la majoration demandée.

Correction de l'exercice 4052 ▲

Soit n un entier naturel.

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2,$$

avec $n^2 + 3n + 1$ entier naturel.

Correction de l'exercice 4053 ▲

(a) Soit n un entier relatif.

Si n est pair, n et $5n^3$ sont pairs de même que $5n^3 + n$ et 2 divise $5n^3 + n$.

Si n est impair, n et $5n^3$ sont impairs et de nouveau $5n^3 + n$ est pair. Finalement : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $2|(5n^3 + n)$.

Si n est multiple de 3, n et $5n^3$ sont multiples de 3 de même que $5n^3 + n$.

Si n est de la forme $3p+1$, alors

$$5n^2 + 1 = 5(3p+1)^2 + 1 = 45p^2 + 30p + 6 = 3(9p^2 + 10p + 2)$$

et $5n^2 + 1$ est divisible par 3. Il en est de même de $5n^3 + n = n(5n^2 + 1)$.

Si n est de la forme $3p+2$, $5n^2 + 1 = 5(3p+2)^2 + 1 = 45p^2 + 60p + 21 = 3(9p^2 + 20p + 7)$ et $5n^2 + 1$ est divisible par 3. Il en est de même de $5n^3 + n = n(5n^2 + 1)$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $3|(5n^3 + n)$.

Enfin, $5n^3 + n$ est divisible par 2 et 3 et donc par $2 \times 3 = 6$. On a montré que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $6|(5n^3 + n)$.

(Tout ceci s'exprime beaucoup mieux à l'aide de congruences. Par exemple : si $n \equiv 1$ (3), $5n^2 + 1 \equiv 5.1^2 + 1 = 6 \equiv 0$ (3))

(b) 4^{2^n} signifie $(...((4^2)^2)^2...)^2$. Etudions la suite de ces élévations au carré successives modulo 7. $4^{2^0} = 4$ est dans $4+7\mathbb{Z}$. $4^{2^1} = 16$ est dans $2+7\mathbb{Z}$. $4^{2^2} = 16^2 = (7k+2)^2 = 4+7k'$ est dans $4+7\mathbb{Z}$... Montrons par récurrence sur p entier naturel que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $4^{2^{2p}}$ est dans $4+7\mathbb{Z}$ et $4^{2^{2p+1}}$ est dans $2+7\mathbb{Z}$.

C'est vrai pour $p = 0$.

Soit $p \geqslant 0$. Si il existe deux entiers relatifs k_{2p} et k_{2p+1} tels que $4^{2^{2p}} = 4+7k_{2p}$ et $4^{2^{2p+1}} = 2+7k_{2p+1}$, alors :

$$4^{2^{2p+2}} = (4^{2^{2p+1}})^2 = (2+7k_{2p+1})^2 = 4+7(4k_{2p+1}+7k_{2p+1}^2) \in 4+7\mathbb{Z},$$

puis

$$4^{2^{2p+3}} = (4^{2^{2p+2}})^2 = (4+7k_{2p+2})^2 = 16+28k_{2p+2}+49k_{2p+2}^2 = 2+7(2+4k_{2p+2}+7k_{2p+2}^2) \in 2+7\mathbb{Z}.$$

On a montré par récurrence que si n est pair, 4^{2^n} est dans $4+7\mathbb{Z}$ et si n est impair, 4^{2^n} est dans $2+7\mathbb{Z}$.

Ensuite $2^{2^0} = 2$ est dans $2+7\mathbb{Z}$ puis, pour $n \geqslant 1$, $2^{2^n} = 2^{2.2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}}$ est dans $4+7\mathbb{Z}$ si $n-1$ est pair ou encore si n est impair et est dans $2+7\mathbb{Z}$ si n est pair. Ainsi, que n soit pair ou impair, $4^{2^n}+2^{2^n}+1$ est dans $(4+2)+1+7\mathbb{Z} = 7+7\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z}$ et on a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 7|4^{2^n}+2^{2^n}+1.$$

Correction de l'exercice 4054 ▲

Soient m, n et p trois entiers naturels et r_1, r_2 et r_3 les restes des divisions euclidiennes de m, n et p par 8. Alors,

$$m^2+n^2+p^2 = (8q_1+r_1)^2+(8q_2+r_2)^2+(8q_3+r_3)^2 \in r_1^2+r_2^2+r_3^2+8\mathbb{Z}.$$

Donc $m^2+n^2+p^2$ est dans $7+8\mathbb{Z}$ si et seulement si $r_1^2+r_2^2+r_3^2$ est dans $7+8\mathbb{Z}$.

Comme r_1, r_2 et r_3 sont des entiers entre 0 et 7, il suffit de vérifier que les sommes de trois carrés d'entiers compris au sens large entre 0 et 7 ne sont pas dans $7+8\mathbb{Z}$.

Or, $0^2 = 0 \in 8\mathbb{Z}$, $1^2 = 1 \in 1+8\mathbb{Z}$, $2^2 = 4 \in 4+8\mathbb{Z}$, $3^2 = 9 \in 1+8\mathbb{Z}$, $4^2 = 16 \in 8\mathbb{Z}$, $5^2 = 25 \in 1+8\mathbb{Z}$, $6^2 = 36 \in 4+8\mathbb{Z}$ et $7^2 = 49 \in 1+8\mathbb{Z}$. Donc, les carrés des entiers de 0 à 7 sont dans $8\mathbb{Z}$ ou $1+8\mathbb{Z}$ ou $4+8\mathbb{Z}$. Enfin,

$$\begin{array}{llll}
0+0+0=0\in 8\mathbb{Z}, & 0+0+1=1\in 1+8\mathbb{Z}, & 0+0+4=4\in 4+8\mathbb{Z}, & 0+1+1=2\in 2+8\mathbb{Z},\\
0+1+4=5\in 5+8\mathbb{Z} & 0+4+4=8\in 8\mathbb{Z}, & 1+1+1=3\in 3+8\mathbb{Z}, & 1+1+4=6\in 6+8\mathbb{Z},\\
1+4+4=9\in 1+8\mathbb{Z}, & 4+4+4=12\in 4+8\mathbb{Z}. & &
\end{array}$$

Aucune de ces sommes n'est dans $7+8\mathbb{Z}$ et on a montré qu'un entier de la forme $8n+7$ n'est pas la somme de trois carrés.

Correction de l'exercice 4055 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En développant $(1+\sqrt{2})^n$ par la formule du binôme de NEWTON et en séparant les termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant pair des termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant impair, on écrit $(1+\sqrt{2})^n$ sous la forme $a_n+b_n\sqrt{2}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels non nuls.

Mais alors $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ et donc

$$(-1)^n = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2}) = a_n^2-2b_n^2$$

ou finalement,

$$((-1)^n a_n)a_n + (2(-1)^{n+1}b_n)b_n = 1$$

où $(-1)^n a_n = u$ et $2(-1)^{n+1}b_n = v$ sont des entiers relatifs. Le théorème de BEZOUT permet d'affirmer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction de l'exercice 4056 ▲

Posons $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels. On a alors $(1-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ et donc

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} = 2a_{2n+1} \in \mathbb{N}.$$

Mais de plus, $-1 < 1-\sqrt{3} < 0$ et donc, puisque $2n+1$ est impair, $-1 < (1-\sqrt{3})^{2n+1} < 0$. Par suite,

$$2a_{2n+1} < (1+\sqrt{3})^{2n+1} < 2a_{2n+1} + 1,$$

ce qui montre que $E((1+\sqrt{3})^{2n+1}) = 2a_{2n+1} = (1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}$ et montre déjà que $E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$ est un entier pair. Mais on en veut plus :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} &= (1+\sqrt{3})((1+\sqrt{3})^2)^n + (1-\sqrt{3})((1-\sqrt{3})^2)^n \\ &= (1+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})^n \\ &= 2^n((1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n)\end{aligned}$$

Montrons enfin que $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n$ est un entier, pair. Mais, $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$ est de la forme $A+B\sqrt{3}$ où A et B sont des entiers naturels et donc, puisque $(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n = A - B\sqrt{3}$, on a finalement $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n = 2A$ où A est un entier.

Donc, $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair, ou encore $(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} = E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$ est un entier divisible par 2^{n+1}.

Correction de l'exercice 4057 ▲

Soit n un entier naturel non nul. On note $\sigma(n)$ la somme de ses chiffres en base 10 (voir l'exercice 4070). Si $n = a_0 + 10a_1 + ... + 10^k a_k$ où $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ pour $0 \leqslant i \leqslant k$ et $a_k \neq 0$, alors

$$\sigma(n) = a_0 + ... + a_k \leqslant 9(k+1) \leqslant 9(E(\log n)+1) \leqslant 9(\log n + 1).$$

Donc,

$$A = \sigma(4444^{4444}) \leqslant 9(\log(4444^{4444})+1) \leqslant 9(4444\log(10^5)+1) = 9(4444.5+1) = 9.22221 = 199989.$$

Puis, $B = \sigma(A) \leqslant 1 + 5.9 = 46$, puis $\sigma(B) \leqslant \sigma(39) = 12$. Donc, $1 \leqslant \sigma(B) \leqslant 12$.

D'autre part, on sait que modulo 9 : $\sigma(B) \equiv B \equiv A = 4444^{4444}$. Enfin, $4444^{4444} = (9.443+7)^{4444} \equiv 7^{4444}$ (9). De plus, $7 \equiv -2$ (9) puis $7^2 \equiv 4$ (9) puis $7^3 \equiv 28 \equiv 1$ (9) et donc $7^{4444} = (7^3)^{1481}.7 \equiv (1^3)^{1481}.7 \equiv 7$ (9). Finalement, $1 \leqslant \sigma(B) \leqslant 12$ et $C \equiv 7$ (9) ce qui impose $C = 7$.

Correction de l'exercice 4058 ▲

On a trois possibilités : $p \in 3\mathbb{Z}$, $p \in 3\mathbb{Z}+1$ ou $p \in 3\mathbb{Z}-1$.

Dans les deux derniers cas, $p^2 \in 1+3\mathbb{Z}$ et $8p^2+1 \in 9+3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$. Mais alors, $8p^2+1$ est premier et multiple de 3 ce qui impose $8p^2+1 = 3$. Cette dernière égalité est impossible.

Il ne reste donc que le cas où p est premier et multiple de 3, c'est-à-dire $p = 3$ (en résumé, p et $8p^2+1$ premiers impliquent $p = 3$). Dans ce cas, $8p^2+1 = 73$ et $8p^2-1 = 71$ sont effectivement premiers.

Correction de l'exercice 4059 ▲

(a) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Donc, si k et n sont premiers entre eux, puisque n divise kC_n^k, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que n divise C_n^k.

(b) De même, $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$ montre que $(n+1)$ divise nC_{2n}^n et, puisque n et $(n+1)$ sont premiers entre eux (d'après BEZOUT puisque $(n+1)-n = 1$), $(n+1)$ divise C_{2n}^n d'après le théorème de GAUSS.

Correction de l'exercice 4060 ▲

(a) Posons $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$. d divise $m = 105 = 3.5.7$ mais, puisque d divise x et y, d divise aussi $x+y = 56 = 2^3.7$. Donc, d divise $105 \wedge 56 = 7$ et nécessairement $d = 1$ ou $d = 7$.

1er cas. $d = 1$ fournit, puisque $m = 105$, $xy = md = 105$. x et y sont donc les solutions de l'équation $X^2 - 56X + 105 = 0$ qui n'admet pas de solutions entières.

2ème cas. $d = 7$ fournit $xy = 7.105 = 735$. x et y sont donc les solutions de l'équation $X^2 - 56X + 735 = 0$ qui admet les solutions 21 et 35.

Réciproquement, $21+35 = 56$ et $21 \vee 35 = 3.5.7 = 105$. $\mathscr{S} = \{(21,35),(35,21)\}$.

(b) On pose $x = dx'$ et $y = dy'$ avec x' et y' premiers entre eux et $d = x \wedge y$. Le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x'-y' = 1 \\ dx'y' = 72 \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x' = y'+1 \\ d(y'+1)y' = 72 \end{array}\right.$. En particulier, y' et $y'+1$ sont deux diviseurs consécutifs de 72. $72 = 2^3.3^2$ admet $4.3 = 12$ diviseurs à savoir 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72. Donc y' est élément de $\{1,2,3,8\}$.

1er cas. $y' = 1$ fournit $d = \frac{72}{1.2} = 36$ puis $y = 36.1 = 36$ et $x = y+d = 72$. Réciproquement, $72-36 = 36 = 36 \wedge 72$ et $36 \vee 72 = 72$.

2ème cas. $y' = 2$ fournit $d = 12$, $y = 24$, $x = 36$ qui réciproquement conviennent.

3ème cas. $y' = 3$ fournit $d = 6$, $y = 18$, $x = 24$ qui réciproquement conviennent.

4ème cas. $y' = 8$ fournit $d = 1$, $y = 8$, $x = 9$ qui réciproquement conviennent.

$$\mathscr{S} = \{(9,8),(24,18),(36,24),(72,36)\}.$$

(c) d divise m et donc d divise $243 = 3^5$ et $d \in \{1,3,9,27,81,243\}$. On pose alors $x = dx'$, $y = dy'$ avec x' et y' premiers entre eux.

1er cas. Si $d = 1$ on a $x'y' - 1 = 243$ ou encore $x'y' = 244$ ce qui fournit les possibilités (en n'oubliant pas que x' et y' sont premiers entre eux) :
$x' = 1$, $y' = 244$ puis $x = 1$ et $y = 244$,
$x' = 4$, $y' = 61$ puis $x = 4$ et $y = 61$,
$x' = 61$, $y' = 4$ puis $x = 61$ et $y = 4$,
$x' = 244$, $y' = 1$ puis $x = 244$ et $y = 1$ qui réciproquement conviennent.

2ème cas. Si $d = 3$, on a $x'y' = 81+1 = 82$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 82$ puis $x = 3$ et $y = 246$,
$x' = 2$, $y' = 41$ puis $x = 6$ et $y = 123$,
$x' = 41$, $y' = 2$ puis $x = 123$ et $y = 6$,
$x' = 82$, $y' = 1$ puis $x = 246$ et $y = 3$ qui réciproquement conviennent.

3ème cas. Si $d = 9$ on a $x'y' = 27+1 = 28$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 28$ puis $x = 9$ et $y = 252$,
$x' = 4$, $y' = 7$ puis $x = 36$ et $y = 63$,
$x' = 7$, $y' = 4$ puis $x = 63$ et $y = 36$,
$x' = 28$, $y' = 1$ puis $x = 252$ et $y = 9$ qui réciproquement conviennent.

4ème cas. Si $d = 27$ on a $x'y' = 9+1 = 10$ ce qui fournit les possibilités :

$x' = 1$, $y' = 10$ puis $x = 27$ et $y = 270$,

$x' = 2$, $y' = 5$ puis $x = 54$ et $y = 135$,

$x' = 5$, $y' = 2$ puis $x = 135$ et $y = 54$,

$x' = 10$, $y' = 1$ puis $x = 270$ et $y = 27$ qui réciproquement conviennent.

5ème cas. Si $d = 81$, on a $x'y' = 3+1 = 4$ ce qui fournit les possibilités :

$x' = 1$, $y' = 4$ puis $x = 81$ et $y = 324$,

$x' = 4$, $y' = 1$ puis $x = 324$ et $y = 81$ qui réciproquement conviennent.

6ème cas. Si $d = 243$, on a $x'y' = 1+1 = 2$ ce qui fournit les possibilités :

$x' = 1$, $y' = 2$ puis $x = 243$ et $y = 486$,

$x' = 2$, $y' = 1$ puis $x = 486$ et $y = 243$ qui réciproquement conviennent.

Correction de l'exercice 4061 ▲

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2+2).$$

$5(n^2+2)$ devant être un carré parfait, n^2+2 doit encore être divisible par 5 mais si n est dans $5\mathbb{Z}$, n^2+2 est dans $2+5\mathbb{Z}$, si n est dans $\pm1+5\mathbb{Z}$, n^2+2 est dans $3+5\mathbb{Z}$ et si n est dans $\pm2+5\mathbb{Z}$, n^2+2 est dans $1+5\mathbb{Z}$ et n^2+2 n'est jamais divisible par 5. Une somme de cinq carrés d'entiers consécutifs n'est donc pas un carré parfait.

Correction de l'exercice 4062 ▲

Soient n et m deux entiers naturels tels que $n < m$. Posons $m = n+k$ avec $k > 0$. On note que

$$F_m = 2^{2^{n+k}} + 1 = (2^{2^n})^{2^k} + 1 = (F_n - 1)^{2^k} + 1.$$

En développant l'expression précédente par la formule du binôme de NEWTON et en tenant compte du fait que 2^k est pair puisque k est strictement positif, on obtient une expression de la forme $q.F_n + 1 + 1 = q.F_n + 2$.

Le P.G.C.D. de F_n et F_m doit encore diviser $F_m - q.F_n = 2$ et vaut donc 1 ou 2. Enfin, puisque 2^n et 2^m sont strictement positifs, F_n et F_m sont impairs et leur P.G.C.D. vaut donc 1 (ce résultat redémontre l'existence d'une infinité de nombres premiers).

Correction de l'exercice 4063 ▲

(a) Soit, pour n entier naturel non nul donné, $v_n = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_n + u_{n+1})u_n - u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = -v_n.$$

La suite v est donc une suite géométrique de raison -1 et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (-1)^{n-1}v_1 = (-1)^n.$$

Cette égalité s'écrit encore $((-1)^n u_{n-1})u_{n+1} + ((-1)^{n+1}u_n)u_n = 1$ et le théorème de BEZOUT permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, les entiers u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux (il est clair par récurrence que la suite u est à valeurs entières).

(b) Pour $m = 1$ et n entier naturel quelconque :

$$u_{n+m} = u_{n+1} = u_{n+1}u_1 + u_nu_0 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n.$$

Pour $m = 2$ et n entier naturel quelconque :

$$u_{n+m} = u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = u_{n+1}u_2 + u_n u_1 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n.$$

Soit $m \geqslant 1$. Supposons que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+m} = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n$ et $u_{n+m+1} = u_{n+1}u_{m+1} + u_m u_n$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+m+2} &= u_{n+m+1} + u_{n+m} = u_{n+1}u_{m+1} + u_m u_n + u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{n+1}(u_{m+1} + u_m) + u_n(u_m + u_{m-1}) = u_{n+1}u_{m+2} + u_n u_{m+1}. \end{aligned}$$

ce qui démontre l'égalité proposée par récurrence.

Soient n et m deux entiers naturels tels que $n \geqslant m$. La division euclidienne de n par m s'écrit $n = mq + r$ avec q et r entiers tels que $0 \leqslant r \leqslant m-1$.

Or, $u_{m+r} = u_m u_{r+1} + u_{m-1}u_r$. Par suite, un diviseur commun à u_m et u_r divise encore u_m et u_{m+r} et réciproquement un diviseur commun à u_m et u_{m+r} divise $u_{m-1}u_r$. Mais, u_m et u_{m-1} sont premiers entre eux et, d'après le théorème de GAUSS, un diviseur commun à u_m et u_{m+r} divise u_r. Les diviseurs communs à u_m et u_r sont encore les diviseurs communs à u_m et u_{m+r} et donc :

$$u_m \wedge u_r = u_m \wedge u_{m+r}.$$

Puis, par récurrence

$$u_m \wedge u_r = u_m \wedge u_{m+r} = u_m \wedge u_{2m+r} = \ldots = u_m \wedge u_{qm+r} = u_m \wedge u_n.$$

Ainsi, les algorithmes d'EUCLIDE appliqués d'une part à u_m et u_n et d'autre part à m et n s'effectuent en parallèle et en particulier, $u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$.

Correction de l'exercice 4064 ▲

(a) Posons $d = x \wedge y \wedge z$ puis $x = dx'$, $y = dy'$ et $z = dz'$ où $x' \wedge y' \wedge z' = 1$.

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow d^2(x'^2 + d^2y'^2) = d^2z'2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = z'^2,$$

avec $x' \wedge y' \wedge z' = 1$, ce qui montre que l'on peut se ramener au cas où x, y et z sont premiers entre eux.

Supposons donc x, y et z premiers entre eux (dans leur ensemble). Soit p un nombre premier. Si p divise x et y alors p divise $x^2 + y^2 = z^2$ et donc p est également un facteur premier de z contredisant le fait que x, y et z sont premiers entre eux. Donc, x et y sont premiers entre eux.

Si p divise x et z alors p divise $z^2 - x^2 = y^2$ et donc p est également un facteur premier de y, contredisant le fait que x, y et z sont premiers entre eux. Donc, x et z sont premiers entre eux. De même, y et z sont premiers entre eux. Finalement, x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.

(b) Puisque x, y et z sont deux à deux premiers entre eux, parmi les nombres x, y et z, il y a au plus un nombre pair. Mais si ces trois nombres sont impairs, $x^2 + y^2 = z^2$ est pair en tant que somme de deux nombres impairs contredisant le fait que z est impair. Ainsi, parmi les nombres x, y et z, il y a exactement un nombre pair et deux nombres impairs.

Si x et y sont impairs, alors d'une part, z est pair et z^2 est dans $4\mathbb{Z}$ et d'autre part x^2 et y^2 sont dans $1 + 4\mathbb{Z}$. Mais alors, $x^2 + y^2$ est dans $2 + 4\mathbb{Z}$ excluant ainsi l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$. Donc, z est impair et l'un des deux nombres x ou y est pair. Supposons, quite à permuter les lettres x et y, que x est impair et y est pair.

Posons alors $y = 2y'$ puis $X = \frac{z+x}{2}$ et $Z = \frac{z-x}{2}$ (puisque x et z sont impairs, X et Z sont des entiers).

(c) On a

$$x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow 4y'^2=(z+x)(z-x) \Leftrightarrow y'^2=XZ.$$

Un diviseur commun à X et Z divise encore $z=Z+X$ et $x=Z-X$ et est donc égal à ± 1 puisque x et z sont premiers entre eux. X et Z sont des entiers premiers entre eux.

Le produit des deux entiers X et Z est un carré parfait et ces entiers sont premiers entre eux. Donc, un facteur premier de X n'apparaît pas dans Z et apparaît donc dans X à un exposant pair ce qui montre que X est un carré parfait. De même, Z est un carré parfait.

(d) Donc, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $X=u^2$ et $Z=v^2$. Mais alors, $z=Z+X=u^2+v^2$ et $x=Z-X=u^2-v^2$. Enfin, $y^2=z^2-x^2=(u^2+v^2)^2-(u^2-v^2)^2=4u^2v^2$ et donc, $y=2uv$ quite à remplacer u par $-u$.

En résumé, si $x^2+y^2=z^2$ alors il existe $(d,u,v)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que $x=d(u^2-v^2)$, $y=2duv$ et $z=d(u^2+v^2)$ ou bien $x=2duv$, $y=d(u^2-v^2)$ et $z=d(u^2+v^2)$.

Réciproquement,

$$(d(u^2-v^2))^2+(2duv)^2=d^2(u^4+2u^2v^2+v^4)=(d(u^2+v^2))^2,$$

et on a trouvé tous les triplets Pythagoriciens. Par exemple, $d=1$, $u=2$ et $v=1$ fournissent le triplet $(3,4,5)$. $d=2$, $u=2$ et $v=1$ fournissent le triplet $(6,8,10)$ et $d=1$, $u=3$ et $v=2$ fournissent le triplet $(5,12,13)$.

Correction de l'exercice 4065 ▲

Soient x et y deux entiers naturels tels que $3x^3+xy+4y^3=349$. On a $4y^3\leqslant 3x^3+xy+4y^3=349$ et donc

$$y\leqslant\sqrt[3]{\frac{349}{4}}=4,4...$$

Donc, $y\in\{0,1,2,3,4\}$. De même, $3x^3\leqslant 3x^3+xy+4y^3=349$ et donc

$$x\leqslant\sqrt[3]{\frac{349}{3}}=4,8...$$

Donc, $x\in\{0,1,2,3,4\}$ ce qui ne laisse plus que $5.5=25$ couples candidats. Ensuite,
$y=0$ donne $3x^3=349$ qui ne fournit pas de solutions.
$y=1$ donne $3x^3+x-345=0$, équation dont aucun des entiers de 0 à 4 n'est solution.
$y=2$ donne $3x^3+2x-317=0$, équation dont aucun des entiers de 0 à 4 n'est solution.
$y=3$ donne $3x^3+3x-241=0$, équation dont aucun des entiers de 0 à 4 n'est solution.
$y=4$ donne $3x^3+4x-93=0$ dont seul $x=3$ est solution.

$$\mathscr{S}=\{(3,4)\}.$$

Correction de l'exercice 4066 ▲

Si $x\geqslant 5$ et $5\leqslant k\leqslant x$, alors $k!$ est divisible par $2.5=10$. D'autre part, $1!+2!+3!+4!=33$ et le chiffre des unités de $\sum_{k=1}^{x}k!$ est 3. $\sum_{k=1}^{x}k!$ n'est donc pas un carré parfait car le chiffre des unités (en base 10) d'un carré parfait est à choisir parmi 0, 1, 4, 5, 6, 9. Donc, $x\leqslant 4$. Ensuite, $1!=1=1^2$ puis $1!+2!=1+2=3$ n'est pas un carré parfait, puis $1!+2!+3!=9=3^2$ puis $1!+2!+3!+4!=33$ n'est pas un carré parfait.

$$\mathscr{S}=\{(1,1),(3,3)\}.$$

Correction de l'exercice 4067 ▲

$$n = 9+8(10+10^2+...+10^{p-1})+4(10^p+...+10^{2p-1}) = 9+80\frac{10^{p-1}-1}{10-1}+4.10^p\frac{10^p-1}{10-1}$$
$$= \frac{1}{9}(81+80(10^{p-1}-1)+4.10^p(10^p-1)) = \frac{1}{9}(4.10^{2p}+4.10^p+1) = \left(\frac{2.10^p+1}{3}\right)^2,$$

(ce qui montre déjà que n est le carré d'un rationnel). Maintenant,

$$2.10^p+1 = 2(9+1)^p+1 = 2.\sum_{k=0}^{p} C_p^k 9^k + 1 = 3+2\sum_{k=1}^{p} C_p^k 3^{2k} = 3(1+2\sum_{k=1}^{p} C_p^k 3^{2k-1}),$$

et 2.10^p+1 est un entier divisible par 3. Finalement, $n = \left(\frac{2.10^p+1}{3}\right)^2$ est bien le carré d'un entier.

Correction de l'exercice 4068 ▲

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $a_k = 11...1$ ($k+1$ chiffres 1 en base 10).
Soit n un entier naturel quelconque.
La division euclidienne de a_k par n s'écrit : $a_k = n.q_k + r_k$ où q_k et r_k sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant r_k \leqslant n-1$.
Les $n+1$ entiers r_0,..., r_n sont à choisir parmi les n entiers 0, 1,..., $n-1$. Les $n+1$ restes considérés ne peuvent donc être deux à deux distincts. Par suite,

$$\exists (k,l) \in \mathbb{N}^2 / \ 0 \leqslant k < l \leqslant n \text{ et } r_k = r_l.$$

Mais alors, $a_l - a_k = (q_l - q_k)n$ est un multiple de n. Comme $a_l - a_k = 11...10...0$ ($l-k$ chiffres 1 et $k+1$ chiffres 0), on a montré que tout entier naturel admet un multiple de la forme $11...10...0 = 11...1.10^K$.
Si de plus n est impair, non divisible par 5, alors n est premier à 2 et à 5 et donc à 10^K. D'après le théorème de GAUSS, n divise $11...1$.

Correction de l'exercice 4069 ▲

(a) $u_n^2 = (2^{n+1}+1)^2 = 2^{2n+2}+2^{n+2}+1 = 10...010...01_2$ ($n-1$ puis $n+1$ chiffres 0)

(b)

$$u_n^3 = (2^{n+1}+1)^3 = 2^{3n+3}+3.2^{2n+2}+3.2^{n+1}+1 = 2^{3n+3}+(2+1).2^{2n+2}+(2+1).2^{n+1}+1$$
$$= 2^{3n+3}+2^{2n+3}+2^{2n+2}+2^{n+2}+2^{n+1}+1 = 10...0110...0110...01_2$$

($n-1$ puis $n-1$ puis n chiffres 0)

(c)

$$u_n^3 - u_n^2 + u_n = 2^{3n+3}+3.2^{2n+2}+3.2^{n+1}+1-2^{2n+2}-2^{n+2}-1+2^{n+1}+1 = 2^{3n+3}+2^{2n+3}+2^{n+2}+1$$
$$= 10...010...010...01$$

($n-1$ puis n puis $n+1$ chiffres 0)

Correction de l'exercice 4070 ▲

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$, où $p \in \mathbb{N}$, et $\forall k \in \{0,...,p\}$, $a_k \in \{0,...,9\}$, et $a_p \neq 0$. Le nombre de chiffres de n est alors $p+1$. L'entier p vérifie $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ ou encore $p \leqslant \log n < p+1$. Par suite, $p = E(\log n)$. Ainsi, le nombre de chiffres de n en base 10 est $E(\log n)+1$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}$

i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = a_p10^p + ... + 10a_1 + a_0 = \overline{a_p...a_1a_0}_{10}$. Si au moins un des chiffres de n n'est pas 9, on note k le plus petit indice tel que $a_k \neq 9$. Alors, $0 \leqslant k \leqslant p-1$ et $n = \overline{a_p...a_k9...9}_{10}$ et $n+1 = \overline{a_p...a_{k+1}(a_k+1)0...0}_{10}$. Dans ce cas, si $k = 0$,

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = \frac{\sigma(n)+1}{\sigma(n)} = 1 + \frac{1}{\sigma(n)} \leqslant 1+1 = 2.$$

Si $1 \leqslant k \leqslant p-1$,

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = \frac{a_p + ... + a_k + 1}{a_p + ... + a_k + 9k} \leqslant \frac{a_p + ... + a_k + 1}{a_p + ... + a_k + 1} = 1 \leqslant 2.$$

Sinon, tous les chiffres de n sont égaux à 9, et dans ce cas,

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = \frac{1}{9(p+1)} \leqslant 2.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n \leqslant 2$. La suite u est donc bornée.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{10^p-1} = \frac{\sigma(10^p)}{\sigma(10^p-1)} = \frac{1}{9p}$. La suite extraite $(u_{10^p-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{10^p} = \frac{\sigma(10^p+1)}{\sigma(10^p)} = \frac{2}{1} = 2$. La suite extraite $(u_{10^p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $2 \neq 0$.

On en déduit que la suite u diverge.

ii. Avec les notations du a), $1 \leqslant \sigma(n) \leqslant 9(p+1) = 9(E(\log n)+1) \leqslant 9(\log n + 1)$.

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $1 \leqslant \sqrt[n]{\sigma(n)} \leqslant \sqrt[n]{9(\log n + 1)} = \exp(\frac{1}{n}(\ln 9 + \ln(1 + \frac{\ln n}{\ln 10})$. Les deux membres de cet encadrement tendent vers 1 et donc la suite $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sigma(n)} = 1$.

Correction de l'exercice 4071 ▲

(a) (Formule de LEGENDRE) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si p est un nombre premier qui divise $n! = 1.2...n$, alors p est un facteur premier de l'un des entiers 2,..., n et en particulier, $p \leqslant n$. Réciproquement, il est clair que si p est un nombre premier tel que $p \leqslant n$, p divise $n!$. Les facteurs premiers de $n!$ sont donc les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Soit donc p un nombre premier tel que $p \leqslant n$. Pour trouver l'exposant de p dans la décomposition primaire de $n!$, on compte 1 pour chaque multiple de p inférieur ou égal à n, on rajoute 1 pour chaque multiple de p^2 inférieur ou égal à n, on rajoute encore 1 pour chaque multiple de p^3 inférieur ou égal à n... et on s'arrête quand l'exposant k vérifie $p^k > n$.

$$n \geqslant p^k \Leftrightarrow \ln n \geqslant k \ln p \Leftrightarrow k \leqslant \frac{\ln n}{\ln p},$$

(car $\ln p > 0$). Donc, si $k \geqslant E(\frac{\ln n}{\ln p}) + 1$, alors $p^k > n$.

Dit autrement, l'exposant de p est la somme du nombre de multiples de p inférieurs ou égaux à n, du nombre de multiples de p^2 inférieurs ou égaux à n, du nombre de multiple de p^3 inférieurs ou égaux à n... et du nombre de multiples de $p^{E(\ln n/\ln p)}$.

Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant E(\frac{\ln n}{\ln p})$ et K un entier naturel.

$$1 \leqslant K.p^k \leqslant n \Leftrightarrow \frac{1}{p^k} \leqslant K \leqslant \frac{n}{p^k} \Leftrightarrow 1 \leqslant K \leqslant E(\frac{n}{p^k}).$$

Il y a donc $E(\frac{n}{p^k})$ multiples de p^k compris au sens large entre 1 et n. On a montré que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est

$$E(\frac{n}{p}) + E(\frac{n}{p^2}) + E(\frac{n}{p^3}) + ...$$

(b) L'exposant de 5 dans la décomposition primaire de 1000! est

$$E(\frac{1000}{5})+E(\frac{1000}{5^2})+E(\frac{1000}{5^3})+E(\frac{1000}{5^4}) = 200+40+8+1 = 249.$$

L'exposant de 2 est évidemment supérieur (il y a déjà au moins 500 nombres pairs entre 1 et 1000). Donc, la plus grande puissance de 10 divisant 1000! est encore la plus grande puissance de 5 divisant 1000!, à savoir 249. L'écriture en base 10 de 1000! se termine par 249 zéros.

Correction de l'exercice 4072 ▲

(Petit théorème de FERMAT) Soit p un nombre premier.

(a) Soit p un nombre premier et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$. On a $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$. Donc, p divise kC_p^k. Mais, p est premier et donc p est premier à tous les entiers compris entre 1 et $p-1$ au sens large. D'après le théorème de GAUSS, p divise C_p^k.

(b) Soit p un nombre premier. Montrons par récurrence que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$.
C'est clair pour $a = 1$.
Soit $a \geqslant 1$. Supposons que $a^p \equiv a\ (p)$. On a alors

$$\begin{aligned}(a+1)^p &= \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^k = a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k \\ &\equiv a^p + 1\ (p) \quad \text{(d'après 1))} \\ &\equiv a+1\ (p) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$.

Correction de l'exercice 4073 ▲

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Supposons que $(p-1)! \equiv -1\ (p)$. Il existe donc un entier relatif a tel que $(p-1)! = -1 + ap$ $(*)$.
Soit $k \in \{1,...,p-1\}$. L'égalité $(*)$ s'écrit encore $k(-\prod_{j\neq k} j) + ap = 1$. Le théorème de BEZOUT permet alors d'affirmer que k et p sont premiers entre eux. Ainsi, p est premier avec tous les entiers naturels éléments de $\{1,...,p-1\}$ et donc, p est un nombre premier.

Correction de l'exercice 4083 ▲

(a) $x = \dot{\overline{25}}$, $y = \dot{\overline{32}}$.

(b) $x = \dot{\overline{15}}$ ou $\dot{\overline{16}}$.

Correction de l'exercice 4084 ▲

(a) $\dot{0}$, $\pm\dot{1}$, $\pm\dot{5}$.

(b)

(c)

Correction de l'exercice 4087 ▲

Étudier le même produit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 4089 ▲

(a)

(b) 3.

(c)

(d)

(e)

(f) $\dot{\overline{11}}, \dot{\overline{27}}$.

Correction de l'exercice 4092 ▲

Pour $1 \leqslant k < p : k!C^k_{p+k} = (p+1)\dots(p+k) \equiv k!(\operatorname{mod} p)$ donc $C^k_{p+k} \equiv 1(\operatorname{mod} p)$. De plus $C^k_p \equiv 0(\operatorname{mod} p)$ d'où $C^k_p C^k_{p+k} \equiv C^k_p(\operatorname{mod} p^2)$.

Ensuite $(p-1)!C^p_{2p} = 2(p+1)\dots(p+p-1) \equiv 2(p-1)! + 2p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i}(\operatorname{mod} p^2) \equiv 2(p-1)!\Big(1 + p\sum_{i=1}^{p-1} i'\Big)(\operatorname{mod} p^2)$ où i' désigne l'inverse de i modulo p. L'application $x \mapsto x^{-1}$ est une permutation de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ donc $\sum_{i=1}^{p-1} i' \equiv \frac{p(p-1)}{2}(\operatorname{mod} p) \equiv 0(\operatorname{mod} p)$, d'où $C^p_p C^p_{2p} \equiv 2(\operatorname{mod} p^2)$.

Enfin $\sum_{k=0}^{p} C^k_p C^k_{p+k} \equiv 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C^k_p + 2(\operatorname{mod} p^2) \equiv 2^p + 1(\operatorname{mod} p^2)$.

Correction de l'exercice 4093 ▲

L'équation caractéristique, $X^3 = 4(X^2 + X + 1)$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{Z}/11Z : 1, 6, 8$. Donc x_n est de la forme : $x_n = a + 6^n b + 8^n c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. On a $6^{10} \equiv 8^{10} \equiv 1(\operatorname{mod} 11)$, donc (x_n) est périodique de période divisant 10. La plus petite période est 1 si $b = c = 0$, 10 sinon car les suites (6^n) et (8^n) ont 10 comme plus petite période modulo 11 et l'on a : $8(x_{n+1} - x_n) - 5(x_{n+2} - x_{n+1}) = 7 \cdot 8^n c$ et $7(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = 7 \cdot 6^n b$.

Correction de l'exercice 4094 ▲

(a)

(b) i. Le nombre de solutions de l'équation $x^q = \dot{1}$ est inférieur ou égal à $q < p - 1$.

ii. $\dot{0} = a^{3q} - \dot{1} = (a^q - \dot{1})(a^{2q} + a^q + \dot{1})$ donc a^{2q} est racine de $x^2 + x + \dot{1} = \dot{0}$, de discriminant $-\dot{3}$.

(c) Il existe $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ solution de $x^2 + x + \dot{1} = \dot{0}$, et un tel x est d'ordre multiplicatif 3. Par le théorème de Lagrange, on en déduit $3 \mid p - 1$.

Correction de l'exercice 4095 ▲

Regrouper x et $n - x$.

Correction de l'exercice 4097 ▲

(a) $R = 1$.

(b) $R = 1$.

(c) $R = 1$.

(d) $R = \frac{1}{e}$.

(e) $R = \frac{1}{\sqrt{b}}$.

(f) $R = 1$.

(g) $R = 1$.

(h) $R = 1$.

(i) $R = \frac{1}{3}$.

(j) $R = 1$.

(k) $R = 1$.

(l) $R = \sqrt{2} - 1$.

(m) $R = \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$.

(n) $R = 0$.

(o) $R = \frac{1}{2}$, $2t \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$.

(p) $R = 1$, $a_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$.

(q) $R = 1$.

Correction de l'exercice 4099 ▲

La suite $\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5} + \alpha\right)\right)_{k \in |||}$ est périodique de période 5, donc prend au plus cinq valeurs distinctes. soit a celle de plus grande valeur absolue. Alors $R = \frac{1}{|a|}$.

Correction de l'exercice 4100 ▲

$\sum_{k=1}^n k^{-\alpha} \sim \begin{cases} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ \ln(n) & \text{si } \alpha = 1, \\ \zeta(\alpha) & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$ Dans les trois cas, on obtient $R = 1$.

Il y convergence en $x = 1$ si et seulement si $\alpha < 0$ et il y a divergence grossière en $x = -1$ lorsque $\alpha > 1$ vu les équivalents. Pour $\alpha \leqslant 1$ et $x = -1$ il y a convergence (CSA).

Correction de l'exercice 4101 ▲

(a) (a_n) est bornée et (na_n) ne l'est pas, donc $R_a = 1$. $|b_n| \sim |a_n|$ donc $R_b = 1$.

(b) Il y a doute seulement pour $x = \pm 1$. Le critère de convergence d'Abel (hors programme) s'applique, $\sum a_n x^n$ converge si $x = \pm 1$. $b_n = a_n - \frac{1}{6}a_n^3 + O(n^{-5/3})$ et le critère d'Abel s'applique aussi à $\sum a_n^3 x^n$ (linéariser le $\cos^3$), il y a aussi convergence pour $x = \pm 1$.
Résolution conforme au programme : regrouper par paquets de six termes.

Correction de l'exercice 4102 ▲

(a) $R' = R^2$.

(b) $R' = \infty$.

(c) $R' = eR$.

Correction de l'exercice 4103 ▲

$\min(\sqrt{R}, \sqrt{R'})$.

Correction de l'exercice 4104 ▲

(a) Série produit de $a(z)$ et $\frac{1}{z-\rho} \Rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}\rho^k$.

(b) Si $a(\rho) \neq 0$: $b(z)$ converge pour $|z| < \rho$ et tend vers l'infini pour $z \to \rho^- \Rightarrow R = \rho$.
Si $a(\rho) = 0$: $\forall\, r > \rho$, $|a_p| \leqslant \frac{M}{r^p} \Rightarrow |b_n| \leqslant \frac{M}{r^n(r-\rho)} \Rightarrow R = \infty$.

Correction de l'exercice 4105 ▲

(a) $]-1,2[$.

(b) Pour $0 \leqslant k \leqslant 4^n$, on a $|a_k| \leqslant C_{4^n}^{4^n/2} \Big/ 2^{4^n}$ (atteint pour $k = 4^n/2$).

Donc $a_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et si $x > 1$ alors $a_{3*4^n/2} x^{3*4^n/2} \to \emptyset$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4106 ▲

(a) Soit $z \neq 0$. Pour $n > e^{1/|z|}$, on a $|z| \ln n > 1$ et donc la suite $((\ln n)^n z^n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, pour tout nombre complexe non nul z, la série proposée diverge grossièrement.

$$\boxed{R = 0.}$$

(b) Soit $z \neq 0$. Pour $n > \frac{1}{|z|^2}$, on a $|z|\sqrt{n} > 1$ et donc la suite $((\sqrt{n})^n z^n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour tout nombre complexe non nul z, la série proposée diverge grossièrement.

$$\boxed{R = 0.}$$

(c) D'après la formule de STIRLING

$$(\ln(n!))^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right) = \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln(\sqrt{2\pi})\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \ln^2 n.$$

La série entière proposée a même rayon de convergence que la série entière associée à la suite $(n^2 \ln^2 n)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 \ln^2(n+1)}{n^2 \ln^2 n} = 1$, la règle de d'ALEMBERT permet d'affirmer que

$$\boxed{R = 1.}$$

(d) $n^4 \ln\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^4 \ln\left(1 + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{24} + o(1).$

Donc $\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{1/24}$ et

$$\boxed{R = 1.}$$

(e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)n^n}{(n+1)^2(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{4n+2}{n+1} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{ne}.$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. D'après la règle de d'ALEMBERT,

$$\boxed{R = +\infty.}$$

(f) On a vu que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$. Donc la série entière proposée a même rayon de convergence que la série entière associée à la suite $\left(\frac{(n\ln n)^a}{n!^b}\right)$. Puis

$$\frac{((n+1)\ln(n+1))^a/(n+1)!^b}{(n\ln n)^a/n!^b} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^b}$$

et donc, d'après la règle de d'ALEMBERT

$$\boxed{\text{si } b>0,\ R=+\infty, \text{ si } b=0,\ R=1 \text{ et si } b<0,\ R=0.}$$

(g) Si $a=0$, $R=+\infty$. On suppose $a\neq 0$.

- Si $b>1$, $\frac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ et donc $R=\frac{b}{a}$.
- Si $b=1$, $\frac{a^n}{1+b^n}=\frac{a^n}{2}$ et $R=a$.
- Si $0\leqslant b<1$, $\frac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$ et $R=a$.

Dans tous les cas

$$\boxed{R=\frac{\text{Max}(1,b)}{a} \text{ si } a>0 \text{ et } R=+\infty \text{ si } a=0.}$$

Correction de l'exercice 4107 ▲

(a) $-1+\sqrt{x}\,\text{argth}\sqrt{x}$ pour $0\leqslant x<1$ et $-1-\sqrt{-x}\arctan\sqrt{-x}$ pour $-1\leqslant x\leqslant 0$.

(b) $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

(c) $\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$.

(d) $\frac{2(1-x^2)\ln(1-x)+x^2+2x}{4x^3}$ (décomposer en éléments simples).

(e) $-\frac{1}{2}(x+(x^2+1)\arctan x)$ (décomposer en éléments simples).

(f) $-1+\frac{u}{4}\,\text{argth}\,u-\frac{u}{2}\arctan u$, $u=\sqrt[4]{x}$.

(g) $\frac{1}{2(1-x)}+\frac{5}{2\sqrt{x}}\,\text{argth}\sqrt{x}$ pour $0\leqslant x<1$ et $\frac{1}{2(1-x)}+\frac{5}{2\sqrt{-x}}\arctan\sqrt{-x}$ pour $-1<x\leqslant 0$.

(h) $-\frac{1}{2}\ln(1-2x\,\text{ch}\,a+x^2)$.

(i) $1-\frac{5\cos 2\theta-4}{(5-4\cos 2\theta)^2}$ (linéariser).

(j) $\frac{2x-1}{(1-x)^2}-\frac{2\ln(1-x)}{x}$.

(k) $\text{ch}\sqrt{x}$ pour $x\geqslant 0$ et $\cos\sqrt{-x}$ pour $x\leqslant 0$.

(l) $\frac{e^{x^2}}{2}-\frac{e^{x^2\cos 2\theta}}{2}\cos(x^2\sin 2\theta)$.

(m) $(x+15x^2+25x^3+10x^4+x^5)e^x$.

(n) $\frac{e^x+2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}$, $(f'''=f)$.

(o) $\frac{1-\sqrt{1-4x}-2x}{2x\sqrt{1-4x}}$.

(p) $\frac{x^2-1}{2}$.

(q) $-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Correction de l'exercice 4108 ▲

$R=\sqrt{2}-1$, $\Sigma=\frac{1-x}{1-2x-x^2}$.

Correction de l'exercice 4109 ▲

(a)

(b) S'il existe $\lambda\in\text{Sp}(A)$ tel que $|\lambda|\geqslant 1$ et si x est un vecteur propre associé alors $kA^kx=k\lambda^kx\not\to 0$ donc la série diverge.
Si toutes les valeurs propres de A sont de module <1, comme $kA^k=\sum_\lambda \lambda^k P_\lambda(k)$ où les P_λ sont des polynômes à coefficients matriciels, la série converge absolument.

(c) $S=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A^{k+1}=AS+\sum_{k=0}^{\infty}A^{k+1}=AS+A(I-A)^{-1}$ donc $S=A(I-A)^{-2}$ est inversible ssi A l'est.

Correction de l'exercice 4110 ▲

(a) $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1$. $\chi_A(-1) > 0$, $\chi_A(0) < 0$, $\chi_A(1) > 0$, $\chi_A(2) > 0$, $\chi_A(3) < 0$ donc χ_A admet une racine dans chacun des intervalles $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]2,3[$.

(b) Cayley-Hamilton : $t_n = 2t_{n-1} + t_{n-2} - t_{n-3}$.

(c) Soient $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1 < 2 < \gamma < 3$ les valeurs propres de A. On a $t_n z^n = (\alpha z)^n + (\beta z)^n + (\gamma z)^n$ donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ converge si et seulement si $|\gamma z| < 1$ et vaut :

$$\frac{1}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\beta z} + \frac{1}{1-\gamma z} = \frac{1}{z}\frac{\chi'}{\chi}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-z^2-4z+3}{z^3-z^2-2z+1}.$$

Correction de l'exercice 4111 ▲

$= -\int_{t=0}^{1} \frac{t^3}{1+t^3}\,dt = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - 1$.

Correction de l'exercice 4112 ▲

$R = 1$. On décompose P sous la forme : $P = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)(X+2) + \cdots + a_p(X+1)\dots(X+p)$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{(1-x)^2} + \cdots + \frac{p!a_p}{(1-x)^{p+1}}$.

Correction de l'exercice 4113 ▲

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{2^n} = \frac{2\sin\theta}{5-4\cos\theta}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n2^n} = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(5-4\cos\theta)$.

Correction de l'exercice 4114 ▲

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{e^{-t}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} t^n$ donc $u_n \to \frac{1}{e}$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4115 ▲

(a) La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon de convergence égal à 1.

1ère solution. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$. f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Puis, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = (1-x)\ln(1-x) + x$.

2ème solution. Pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) x^n = x\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x.}$$

(b) La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon égal à 1. Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n = 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = 3\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2}(x + \ln(1-x))\right)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n = \begin{cases} 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2}(x+\ln(1-x))\right) \text{ si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

(c) La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon égal à 1.

• Soit $x \in]0,1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x}))$$
$$= \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

• Soit $x \in]-1,0[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-x)^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \text{ si } x \in]0,1[\\ 1 \text{ si } x = 0 \\ \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} \text{ si } x \in]-1,0[\end{cases}.}$$

(d) La règle de d'ALEMBERT montre que la série proposée a un rayon égal à $+\infty$. Pour x réel,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1-1}{(2n+1)!} x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^n.$$

• Si $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh}(\sqrt{x})\right).$$

• Si $x < 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \left(\sqrt{-x}\right)^{2n} - \frac{1}{2\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x}) - \frac{1}{\sqrt{-x}} \sin(\sqrt{-x})\right).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh}(\sqrt{x})\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x}) - \frac{1}{\sqrt{-x}} \sin(\sqrt{-x})\right) \text{ si } x < 0 \end{cases}.}$$

(e) Immédiatement $R = +\infty$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x).}$$

(f) $\operatorname{ch} n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$ et donc $R = \frac{1}{e}$. Pour x dans $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (ex)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ex} + \frac{1}{1-\frac{x}{e}}\right) = \frac{1}{2} \frac{2-\left(e+\frac{1}{e}\right)x}{x^2 - \left(e+\frac{1}{e}\right)x + 1}$$
$$= \frac{1 - x\operatorname{ch} 1}{x^2 - 2x\operatorname{ch} 1 + 1}.$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n = \frac{1 - x\operatorname{ch} 1}{x^2 - 2x\operatorname{ch} 1 + 1}.}$$

(g) La série proposée est le produit de CAUCHY des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ qui sont toutes deux de rayon 1. Donc $R \geqslant 1$. Mais d'autre part, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$. De plus, pour x dans $]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{1-x} \times -\ln(1-x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

(h) La règle de d'ALEMBERT montre que le rayon de convergence est égal à $+\infty$.
Pour n entier naturel donné, $\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} = \frac{n^3+5n^2+3n-1}{(n+2)!}$ puis

$$\begin{aligned} n^3+5n^2+3n-1 &= (n+2)(n+1)n+2n^2+n-1 = (n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5n-5 \\ &= (n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5(n+2)+5 \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)n}{(n+2)!} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!} x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{(n+2)!} x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^n.$$

Ensuite $f(0) = -\frac{1}{2}$ et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^n \\ &= xe^x + 2e^x - 5\frac{e^x-1}{x} + 5\frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{e^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^n = \begin{cases} \frac{e^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

(i) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leqslant a_n = n^{(-1)^n} \leqslant n$ et donc $R = 1$. Pour x dans $]-1,1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k)x^k$.
Puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (2k)x^k = 2x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = 2x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)' = 2x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \operatorname{argth} x + \frac{2x}{(1-x)^2}.}$$

(j) $R = 1$. Pour x réel non nul dans $]-1,1[$, $f(x) = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^4)^n}{n} = -\frac{\ln(1+x^4)}{4x}$ et sinon $f(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n} = \begin{cases} -\frac{\ln(1+x^4)}{4x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

(k) La règle de d'ALEMBERT fournit $R = \frac{1}{2}$. Pour x dans $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)2^{n+1}x^n &= 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(2x)^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(2x)^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n\right) \\ &= 2\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n\right)'' - 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n\right)' + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n\right) = 2\left(2\frac{1}{1-2x} - 3\frac{2}{(1-2x)^2} + \frac{4}{(1-2x)^3}\right) \\ &= 2\frac{2(1-2x)^2-6(1-2x)+8}{(1-2x)^3} = 2\frac{8x^2+4x}{(1-2x)^3}. \end{aligned}$$

(l) Pour $x=1$, la suite $((-1)^{n+1}nx^{2n+1})$ n'est pas bornée et donc $R\geqslant 1$. Mais la série converge si $|x|<1$ et $R\leqslant 1$. Finalement $R=1$.

Pour x dans $]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(2n+2)x^{2n+1}-2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\right)'+2x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right)'+\frac{2x}{1+x^2}\right)$$
$$=-\frac{x(1+x^2)-x^3}{1+x^2)^2}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{x^3}{1+x^2)^2}.$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}=\frac{x^3}{1+x^2)^2}.}$$

(m) **1ère solution.** Les racines de l'équation caractéristique $z^2-z-1=0$ sont $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait qu'il existe deux nombres réels λ et μ tels que pour tout entier naturel n,

$$a_n=\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les égalités $n=0$ et $n=1$ fournissent

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=1\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=1\\ \lambda-\mu=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\ \mu=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \mu=-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Les séries entières respectivement associées aux suites $\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ et $\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ ont pour rayons respectifs $\left|\frac{1}{(1+\sqrt{5})/2}\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\left|\frac{1}{(1-\sqrt{5})/2}\right|=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ces rayons étant distincts, la série proposée a pour rayon

$$R=\mathrm{Min}\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Pour x dans $\left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha x)^n-\frac{\beta}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\beta x)^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x}-\frac{\beta}{1-\beta x}\right)=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}$$
$$=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

2ème solution. Supposons à priori le rayon R de la série proposée strictement positif. Pour x dans $]-R,R[$, on a

$$f(x)=1+x+\sum_{n=2}^{+\infty}a_nx^n=1+x+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+2}x^{n+2}=1+x+\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}+a_n)x^{n+2}$$
$$=1+x+x\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}+x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \text{ (les deux séries ont même rayon)}$$
$$=1+x+x(f(x)-1)+x^2f(x).$$

Donc, nécessairement $\forall x\in]-R,R[,\ f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$.

Réciproquement, la fraction rationnelle ci-dessus n'admet pas 0 pour pôle et est donc développable en série entière. Le rayon de convergence de la série obtenue est le minimum des modules des pôles de f à savoir $R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Notons $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ce développement. Pour tout x de $]-R,R[$, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)(1-x-x^2)=1$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n-\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+2}=1$ ce qui s'écrit encore $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n-\sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x_n-\sum_{n=2}^{+\infty} b_{n-2} x^n=1$. Finalement

$$\forall x\in]-R,R[,\ b_0+(b_1-b_0)x+\sum_{n=2}^{+\infty}(bn-b_{n-1}-b_{n-2})x^n=1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a alors $b_0=b_1=1$ et $\forall n\geqslant 2$, $b_n=b_{n-1}+bn-2$. On en déduit alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=a_n$.

$$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\frac{1}{1-x-x^2}.}$$

Remarque. En généralisant le travail précédent, on peut montrer que les suites associées aux développements en série entière des fractions rationnelles sont justement les suites vérifiant des relations de récurrence linéaire.

(n) Pour tout entier naturel n, $1\leqslant a_n\leqslant n+1$. Donc $R=1$.

On remarque que pour tout entier naturel n, $a_n=\sum_{k+5l=n} 1$. La série entière proposée est donc le produit de CAUCHY des séries $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ et $\sum_{l=0}^{+\infty} x^{5l}$. Pour x dans $]-1,1[$, on a donc

$$f(x)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} x^{5l}\right)=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{(1-x)^5}.$$

Remarque. De combien de façons peut -on payer 100 euros avec des pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 centimes d'euros, des pièces de 1 et 2 euros et des billets de 10 et 20 euros ? Soit N le nombre de solutions. N est le nombre de solutions en nombres entiers a,b,... de l'équation

$$a+2b+5c+10d+20e+50f+100g+200h+500k+1000i+2000j=10000$$

et est donc le coefficient de x^{10000} du développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})(1-x^{100})(1-x^{200})(1-x^{500})(1-x^{1000})(1-x^{2000})},$$

La remarque est néanmoins anecdotique et il semble bien préférable de dénombrer à la main le nombre de solutions. Les exercices 4121 et 4173 de cette planche font bien mieux comprendre à quel point les séries entières sont un outil intéressant pour les dénombrements.

Correction de l'exercice 4116 ▲

Pour tout entier naturel non nul, $|a_n|\leqslant\frac{1}{n}$ et donc $R\geqslant 1$. Mais si $x>1$, la suite $\left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n\right)_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée comme on le voit en considérant la suite extraite des termes d'indices multiples de 3 et donc $R=1$. Pour x dans $]-1,1[$, $f(x)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(jx)^n}{n}\right)$. Le problème est alors de ne pouvoir écrire $-\ln(1-jx)$. Il faut s'y prendre autrement.

f est donc dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1;1[$,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^{n-1}=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} j^n x^{n-1}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{j}{1-jx}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{j(1-j^2x)}{x^2+x+1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Par suite, pour $x\in]-1,1[$, $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1).}$$

Correction de l'exercice 4117 ▲

Le rayon de la série considérée est égal 1. Soit $x\in]-1,1[$.

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^n=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right).$$

• Si x est dans $]0,1[$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right).$$

• Si x est dans $]-1,0[$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\arctan(\sqrt{-x})\right).$$

• $f(0)=-1$.

Maintenant, la somme est en fait définie sur $[-1,1]$ car les séries numériques de termes généraux $\frac{1}{4n^2-1}$ et $\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ convergent. Vérifions que la somme est continue sur $[-1,1]$.

Pour x dans $[-1,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\frac{x^n}{4n^2-1}\right|\leqslant\frac{1}{4n^2-1}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. La série entière considérée converge donc normalement sur $[-1,1]$. On en déduit que cette somme est continue sur $[-1,1]$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=f(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x})\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$

Remarque. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=-\frac{1}{2}$ (série télescopique).

On a aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=f(-1)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\arctan(\sqrt{-x})\right)$$
$$=\frac{1}{2}(-1-2\arctan 1)=-\frac{\pi+2}{4}.$$

Correction de l'exercice 4118 ▲

Pour tout entier naturel n, $|a_n|\geqslant\frac{1}{2n+1}$ et donc la série proposée ne converge pas absolument.

Pour tout entier naturel n,

$$|u_n|-|u_{n+1}|=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{4k+1}=\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\times\frac{1}{4n+5}$$
$$=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)}\geqslant\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)}>0.$$

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. De plus, pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{4n+1}\frac{1}{k} \leqslant 1+\sum_{k=2}^{4n+1}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,dt = 1+\ln(4n+1)$$

et donc $|u_n| \leqslant \frac{1+\ln(4n+1)}{2n+1}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Finalement, la série proposée converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Considérons la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n+1}$. La série de terme général a_n converge et donc $R \geqslant 1$ mais puisque la série de terme général $|a_n|$ diverge et donc $R \leqslant 1$. Finalement, $R = 1$. Pour $x \in]-1,1[$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n+1}$. Pour x dans $]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right)(-x^2)^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{4n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\right) \text{ (produit de CAUCHY de deux séries numériques absolument convergentes)} \end{aligned}$$

Donc, pour x dans $]0,1[$, $f'(x) = g(x)h(x)$ où $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ puis

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}(\sqrt{x})^{4n+1}.$$

Maintenant, en posant $k(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n X^{4n+1}$ pour X dans $]-1,1[$, $k'(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n X^{4n} = \frac{1}{X^4+1}$.
Ensuite, en posant $\omega = e^{i\pi/4}$, par réalité et parité

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{a}{X-\omega} + \frac{\overline{a}}{X-\overline{\omega}} - \frac{a}{X+\omega} - \frac{\overline{a}}{X+\overline{\omega}}$$

où $a = \frac{1}{4\omega^3} = -\frac{\omega}{4}$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^4+1} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{X-\omega} + \frac{\overline{\omega}}{X-\overline{\omega}} - \frac{\omega}{X+\omega} - \frac{\overline{\omega}}{X+\overline{\omega}}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{X\sqrt{2}-2}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{X\sqrt{2}+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X+2\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} - \frac{2X-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(X+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

En tenant compte de $k(0) = 0$, on obtient donc pour $X \in]-1,1[$,

$$k(X) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln(X^2+X\sqrt{2}+1) - \ln(X^2-X\sqrt{2}+1)) + 2\left(\arctan(X\sqrt{2}+1) + \arctan(X\sqrt{2}-1)\right)\right).$$

Ensuite, pour tout réel $x \in]0,1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}k\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}k'\left(\sqrt{x}\right)k\left(\sqrt{x}\right)$ et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \left(k\left(\sqrt{x}\right)^2 - k(0)^2\right) = k\left(\sqrt{x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{32}\left(\ln(X^2+X\sqrt{2}+1) - \ln(X^2-X\sqrt{2}+1)) + 2\left(\arctan(X\sqrt{2}+1) + \arctan(X\sqrt{2}-1)\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Quand x tend vers 1, $f(x)$ tend vers

$$\frac{1}{32}\left(\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) + 2(\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1))\right)^2 = \frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2}) + \pi\right)^2.$$

(car $\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1) = \arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{\pi}{2}$).

Enfin, pour x dans $[0,1]$ et n dans $\mathbb{N}$, $|u_n|x^n - |u_{n+1}|x^{n+1} \geqslant (|u_n| - |u_{n+1}|)x^n \geqslant 0$ et la série numérique de terme général $u_n x^n$ est alternée. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une telle série, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1]$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k x^k\right| \leqslant \left|u_{n+1}x^{n+1}\right| \leqslant |u_{n+1}|,$$

et donc $\underset{x\in[0,1]}{\text{Sup}} |R_n(x)| \leqslant |a_{n+1}| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. La convergence est uniforme sur $[0,1]$ et on en déduit que la somme est continue sur $[0,1]$. En particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right) = \frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.}$$

Correction de l'exercice 4119 ▲

Pour tout entier naturel n, $a_{n+1}+b_{n+1} = 2(a_n+b_n)$ et $3a_{n+1}+2b_{n+1} = 3a_n+2b_n$ (rappel : ces combinaisons linéaires sont fournies par les vecteurs propres de ${}^tA$ si on ne les devine pas). On en déduit que pour tout entier naturel n, $a_n+b_n = 2^n(a_0+b_0) = 2^n$ et $3a_n+2b_n = 3a_0+2b_0 = 3$. Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = 3-2^{n+1} \text{ et } b_n = 3(2^n-1).$$

Les deux séries proposées sont alors clairement de rayons infini et pour tout réel x, $f(x) = 3e^x-2e^{2x}$ et $g(x) = 3(e^{2x}-e^x)$. (On peut avoir d'autres idées de résolution, plus astucieuses, mais au bout du compte moins performantes).

Correction de l'exercice 4120 ▲

Pour $n\geqslant 1$, posons $a_n = \frac{1}{nC_{2n}^n}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1}\times\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\times\frac{(n+1)!^2}{n!^2} = \frac{n}{2(2n+1)} \quad (*).$$

Par suite, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{4}$ et d'après la règle de d'ALEMBERT, le rayon de la série entière considérée est $R=4$.

Pour $x\in\,]-4,4[$, posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Les relations $(*)$ s'écrivent encore $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $4(n+1)a_{n+1}-2a_{n+1} = na_n$.

Soit $x\in]-4,4[$. On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par x^{n+1} et on somme sur n. On obtient

$$4x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1} = x^2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1},$$

ou encore $x^2f'(x) = 4x(f'(x)-a_1)-2(f(x)-a_1x)$ ou encore $x(x-4)f'(x)+2f(x) = -x \quad (E)$. Soit I l'un des deux intervalles $]-4,0[$ ou $]0,4[$.Sur I, l'équation (E) s'écrit :

$$f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)f(x) = -\frac{1}{x-4}.$$

Une primitive sur I de la fonction $a\ :\ x\mapsto\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)$ est la fonction $A\ :\ x\mapsto\frac{1}{2}(\ln|x-4|-\ln|x|) = \ln\sqrt{\frac{|x-4|}{|x|}}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)f(x) = -\frac{1}{x-4}\\
&\Leftrightarrow \forall x\in I,\ e^{A(x)}f'(x)+a(x)e^{A(x)}f(x) = \frac{1}{4-x}\sqrt{\frac{|x-4|}{|x|}}\\
&\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (e^Af)'(x) = \frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}} \quad (*).
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sur I.

• Si $I =]0,4[$, $\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}} = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} = \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$ et une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sur I est la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)$. Puis

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ e^{A(x)} f(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C\right). \end{aligned}$$

• Si $I =]-4,0[$, $\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}} = \frac{1}{\sqrt{x(x-4)}} = \frac{1}{\sqrt{(2-x)^2-4}}$ et une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sur I est la fonction $x \mapsto -\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)$. Puis

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \exists C' \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ e^{A(x)} f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C' \\ &\Leftrightarrow \exists C' \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-4}}\left(-\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C'\right). \end{aligned}$$

f doit être définie, continue et dérivable sur $]-4,4[$ et en particulier dérivable en 0. Ceci impose $\lim_{x\to 0^+} \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C = 0$ (car sinon $f(x) \underset{0^+}{\sim} C\sqrt{x}$) et donc $C = \frac{\pi}{2}$. Pour $x \in]0,4[$, on a alors $f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2-x}{2}\right)\right) = \sqrt{\frac{x}{4-x}} \arccos\left(\frac{2-x}{2}\right)$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité..

De même, $\lim_{x\to 0^-} -\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C' = 0$ et donc $C' = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in]-4,4[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nC_{2n}^n} x^n = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{4-x}} \arccos\left(\frac{2-x}{2}\right) \text{ si } x \in [0,4[\\ -\sqrt{\frac{x}{x-4}} \operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) \text{ si } x \in]-4,0] \end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 4121 ▲

On a $I_0 = 0$, $I_1 = 1$ et $I_2 = 2$ (l'identité et la transposition $\tau_{1,2}$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a I_{n+1} involutions σ de $[\![1,n+2]\!]$ vérifiant $\sigma(n+2) = n+2$ car la restriction d'une telle permutation à $[\![1,n+1]\!]$ est une involution de $[\![1,n+1]\!]$ et réciproquement.

Si $\sigma(n+2) = k \in [\![1,n+1]\!]$, nécessairement $\sigma(k) = n+2$ puis la restriction de σ à $[\![1,n+2]\!] \setminus \{k,n+2\}$ est une involution et réciproquement Il y a I_n involutions de $[\![1,n+2]\!] \setminus \{k,n+2\}$ et $n+1$ choix possibles de k et donc $(n+1)I_n$ involutions de $[\![1,n+2]\!]$ telles que $\sigma(n+2) \neq n+2$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n.$$

Le rayon R de la série entière associée à la suite $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est supérieur ou égal à 1 car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_n}{n!} \leqslant 1$.
Pour x dans $]-R,R[$, posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$. f est dérivable sur $]-R,R[$ et pour $x \in]-R,R[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!} x^{n-1} = 1 + 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+2}}{(n+1)!} x^{n+1} = 1 + 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1} + (n+1)I_n}{(n+1)!} x^{n+1} \\ &= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n \\ &= 1 + 2x + f(x) - x + xf(x) = 1 + x + (x+1)f(x). \end{aligned}$$

Donc, pour $x \in]-R,R[$, $f'(x) + (x+1)f(x) = x+1$ ou encore $e^{\frac{x^2}{2}+x} f'(x) + (x+1)e^{\frac{x^2}{2}+x} f(x) = (x+1)e^{\frac{x^2}{2}+x}$. Par suite, pour $x \in]-R,R[$,

$$e^{\frac{x^2}{2}+x}f(x)-f(0)=\int_0^x (t+1)e^{\frac{t^2}{2}+t}\,dt=e^{\frac{x^2}{2}+x}-1,$$

et puisque $f(0)=0$, $\forall x\in]-R,R[$, $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+x}-1$.
Réciproquement, la fonction précédente est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux ($=e^{\frac{x^2}{2}}\times e^x$) et les coefficients de ce développement vérifient les relations définissant $\frac{I_n}{n!}$ de manière unique. Donc, ces coefficients sont les $\frac{I_n}{n!}$ ce qui montre que $R=+\infty$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n=e^{\frac{x^2}{2}+x}-1.}$$

Correction de l'exercice 4122 ▲

(a) $=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1}+\frac{x^{3n+2}}{3n+2}-2\frac{x^{3n+3}}{3n+3}\right)$.

(b) Factoriser : $-\ln 6+\left(\frac{5}{6}+\ln 6\right)x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2^n}+\frac{2n+1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n(n-1)}$.

(c) Dériver le ln : $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/2}{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{2n+5+3(-1)^n}{4}x^n$.

(e) $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+2\sqrt{2}^n(2\cos(3n\pi/4)-\sin(3n\pi/4))\right)x^n$.

(f) Intégrer : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4\sqrt{2}}\left((-\sqrt{2}-1)^{n+2}-(\sqrt{2}-1)^{n+2}\right)x^n$.

(g) $=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n(x^{2n}-x^{2n+1})$.

(h) Dériver : $\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/4)}{n\sqrt{2}^n}(-1)^n x^n$.

(i) Dériver : $\frac{\pi}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(n\pi/6)}{n2^n}x^n$.

(j) Dériver, factoriser : $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2^n+2^{-n}}{n^2}x^n$.

(k) Linéariser : $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n}{(2n)!}\left(x^{2n-1}+\frac{(2n^2+3n-1)}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n}\right)$.

(l) Dériver : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)}{n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$.

(m) $y'=-4xy+1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{8^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

(n) $2x(1-x)y'+(1-2x)y=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)C_{2n}^n}x^n$.

(o) $(1-x^2)y''-xy'+\frac{y}{9}=0$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^nC_{3n}^n}{(2n+1)3^{3n+1}}x^{2n+1}$.

Correction de l'exercice 4123 ▲

$=\frac{1}{2}\ln(e^a-x)+\frac{1}{2}\ln(e^{-a}-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}(ka)}{k}x^k$.

Correction de l'exercice 4124 ▲

$\frac{e^{x^2}}{1-x}=(1+x)\frac{e^{x^2}}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)(x^{2n}+x^{2n+1})$.

Correction de l'exercice 4125 ▲

$f(\operatorname{sh}y)=e^{y/2}$ d'où l'équation différentielle : $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)=\frac{1}{4}f(x)$.
En posant $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ on obtient $4(k+1)(k+2)a_{k+2}=-(2k+1)(2k-1)a_k$ avec $a_0=f(0)=1$ et $a_1=f'(0)=\frac{1}{2}$, d'où $a_{2p}=\frac{(-1)^{p+1}C_{4p-2}^{2p-1}}{p2^{4p}}$ si $p\geqslant 1$ et $a_{2p+1}=\frac{(-1)^pC_{4p}^{2p}}{2^{4p+1}(2p+1)}$ si $p\geqslant 0$.
Le rayon de convergence de la série correspondante est 1, ce qui valide la méthode (avec le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz).

Correction de l'exercice 4126 ▲

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Correction de l'exercice 4127 ▲

Coefficient de x^n dans $(\sum x^k)(\sum(k+1)x^k)(\sum(k+1)^2x^k) = \frac{1+x}{(1-x)^6}$
$\Rightarrow c_n = \binom{n+5}{5} + \binom{n+4}{5} = \frac{(2n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{120}$.

Correction de l'exercice 4129 ▲

(a) Pour $|x| < \frac{1}{q}$: $\ln f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-q^n x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{kn}x^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k x^k}{k(1-q^k)}$,
$f = e^{\ln f}$ est DSE par composition.

(b) $a_n = \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q-1)\dots(q^n-1)}$, $R = \infty$.

Correction de l'exercice 4130 ▲

$|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}e^{-n} \geqslant k^{2k}e^{-k}$, donc $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geqslant k^k e^{-k} \Rightarrow R = 0$.

Correction de l'exercice 4131 ▲

Il y a dérivation terme à terme facilement et indéfiniment.

DSE au voisinage de 0 : on envisage de permuter les Σ dans : $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-n^\alpha}\frac{(inx)^p}{p!}$, ce qui est légitime si la série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha}e^{n|x|}$ converge. On en déduit qu'une condition suffisante pour que f soit DSE au voisinage de 0 est $\alpha \geqslant 1$ (avec convergence si $x \in]-1,1[$ pour $\alpha = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $\alpha > 1$).

Cas $\alpha < 1$: $|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha}n^k \geqslant e^{-N^\alpha}N^k$ avec $N = \lfloor k^{1/\alpha} \rfloor$ donc pour $r > 0$ fixé et k tendant vers l'infini on a $\ln\left(\left|\frac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}\right|\right) \sim \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)k\ln(k)$ et la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}$ diverge grossièrement.

DSE au voisinage de $a \neq 0$: même raisonnement en écrivant $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-n^\alpha}e^{ina}\frac{(in(x-a))^p}{p!}$. En conclusion, f est analytique sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.

Correction de l'exercice 4132 ▲

(a) Pour $x \neq 0$ la série comporte un nombre fini de termes non nuls au voisinage de x, donc est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de x. On a $|f^{(k)}(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda_n^{k-n}\varphi_n^{(k)}(\lambda_n x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\lambda_n^{k-n}M_n \leqslant \text{cste}(k) + \sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|M_n/\lambda_n$ en supposant $\lambda_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant k$, donc $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que f est $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et on a le développement limité : $f(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n + o(x^k)$ car $\phi \equiv 1$ au voisinage de 0 donc $f^{(k)}(0) = k!\,a_k$.

(b) $\psi(x) = \exp\left(\frac{1}{(1-x)(x-2)}\right)$ sur $]1,2[$, $\psi(x) = 0$ ailleurs.

Correction de l'exercice 4133 ▲

Dans chaque question, on note f la fonction considérée.

(a) f est développable en série entière à l'origine en tant que fraction rationelle n'admettant pas 0 pour pôle. Le rayon du développement est le minimum des modules des pôles de f à savoir 1. Pour x dans $]-1,1[$,

$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$

(b) f est développable en série entière à l'origine en tant que fraction rationelle n'admettant pas 0 pour pôle.

1er cas. Si $|t| < 1$, soit $\theta = \arccos t$. On a donc $\theta \in]0, \pi[$ et $t = \cos(\theta)$. Pour tout réel x, on a

$$x^2 - 2tx + 1 = x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}),$$

avec $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$. Les pôles sont de modules 1 et le rayon du développement est donc égal à 1. Pour x dans $] -1, 1[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} &= \frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(\frac{1}{x - e^{i\theta}} - \frac{1}{x - e^{-i\theta}}\right) = \frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(-\frac{e^{-i\theta}}{1 - xe^{-i\theta}} + \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\right)\\ &= \frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta}x^n - e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\theta}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}x^n.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[, \ \forall x \in]-1, 1[, \ \frac{1}{x^2-2xt+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}x^n \text{ où } \theta = \arccos t.}$$

2ème cas. Si $t > 1$, on peut poser $t = \mathrm{ch}(\theta)$ où θ est un certain réel positif ou nul. Plus précisément, $\theta = \mathrm{argch}\, t = \ln(t + \sqrt{t^2-1}) \in]0, +\infty[$. Pour tout réel x, on a

$$x^2 - 2tx + 1 = x^2 - 2x\,\mathrm{ch}(\theta) + 1 = (x - e^{\theta})(x - e^{-\theta}),$$

avec $e^{\theta} \neq e^{-\theta}$. Le minimum des modules des pôles de f est $e^{-\theta} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}} = t - \sqrt{t^2-1}$. Le rayon du développement est donc $R = t - \sqrt{t^2-1}$. Pour $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - 2x\,\mathrm{ch}(\theta) + 1} &= \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(\theta)}\left(\frac{1}{x - e^{\theta}} - \frac{1}{x - e^{-\theta}}\right) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(\theta)}\left(-\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{-\theta}} + \frac{e^{\theta}}{1 - xe^{\theta}}\right)\\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(\theta)}\left(e^{\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{n\theta}x^n - e^{-\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\theta}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}((n+1)\theta)}{\mathrm{sh}\,\theta}x^n.\end{aligned}$$

3ème cas. Si $t < -1$, on applique ce qui précède à $-t$ et $-x$.

4ème cas. Si $t = 1$, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{x^2-2xt+1} = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$$

Si $t = -1$, en remplaçant x par $-x$, on obtient pour $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

(c) Pour tout réel x, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ et donc si $x < 2$, $x^2 - 5x + 6 > 0$. Pour $x \in]-2, 2[$,

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x) = \ln(6) + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right),$$

et puisque pour x dans $]-2, 2[$, $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{3}$ sont dans $]-1, 1[$,

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n},$$

et en particulier la fonction f est développable en série entière et le rayon du développement est 2 clairement.

(d) Si $\cos a = 0$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ et si $\cos a \neq 0$, f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \left]-\infty, \frac{1}{\cos a}\right[\cup \left]\frac{1}{\cos a}, +\infty\right[$. Pour $x \in \mathscr{D}$,

$$f'(x) = \sin a \times \frac{1}{(1-x\cos a)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)^2} = \frac{\sin a}{x^2-2x\cos a+1}.$$

D'après 2), la fonction f' est dans tous les cas développable en série entière, le rayon du développement est 1 et pour x dans $]-1, 1[$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)a)}{\sin a} x^n.$$

On sait alors que la fonction f est développable en série entière, que le développement a même rayon de convergence et s'obtient en intégrant terme à terme. Donc pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)a)}{\sin a} x^{n+1}.$$

(e) La fonction f est développable en série entière en tant que fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle. Le rayon est le minimum des modules des pôles de f à savoir 1.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-p)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{x-k}$$

avec $\lambda_k = (-1)^{p-k} \frac{1}{(k-1)!(p-k)!} = (-1)^{p-k} \frac{k}{p!} C_p^k$. Par suite, pour x dans $]-1,1[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \frac{k}{p!} C_p^k \left(-\frac{1}{k}\right) \frac{1}{1-\frac{x}{k}} = \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} C_p^k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{k^n}\right) \\ &= \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \frac{C_p^k}{k^n}\right) x^n. \end{aligned}$$

(f) La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et pour x dans $]-1,1[$, $f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$ puis

$$f''(x) = 2x \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \arcsin x + \frac{2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} f'(x) + \frac{2}{1-x^2}.$$

Donc, pour x dans $]-1,1[$,

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2 \quad (1) \quad \text{et } f(0) = f'(0) = 0 \quad (2).$$

On admettra que ces égalités déterminent la fonction f de manière unique.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon R supposé à priori strictement positif. Pour $x \in]-R,R[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (1) \text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ (1-x^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n) x^n = 2 \\ &\Leftrightarrow a_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n \text{ (par unicité des coefficients d'u} \end{aligned}$$

En résumé, la fonction g est solution de (1) et (2) sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (3)$ puis

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \text{ et } a_0 = 0,\ a_2 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ a_{2n} = \frac{((2n-2) \times \dots \times 4 \times 2)^2}{(2n) \times (2n-1) \dots \times 4 \times 3} a_2 \\ &\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} = \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} \end{aligned}$$

En résumé, sous l'hypothèse $R > 0$, la fonction g est solution de (1) et (2) sur $]-R,R[$ si et seulement si $\forall x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2 C_{2n}^n} x^{2n}$.

Réciproquement, calculons le rayon de la série entière précédente. Pour x réel non nul,

$$\left|\frac{2^{2n+1}(n!)^2x^{2n+2}}{(2n+2)!}\times\frac{(2n)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2x^{2n}}\right|=\frac{4x^2n^2}{(2n+2)(2n+1}\underset{n\to+\infty}{\to}x^2.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série proposée converge absolument pour $|x|<1$ et diverge grossièrement pour $|x|>1$. Le rayon de la série proposée est donc $1>0$ ce qui valide les calculs précédents.

Par unicité de la solution de (1) et (2) sur $]-1,1[$, f est développable en série entière et

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \arcsin^2 x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}}{n^2C_{2n}^n}x^{2n}.}$$

(g) Pour tout réel x, $\cos(x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$ (le rayon est infini). On sait alors que la fonction f est développable en série entière, que le rayon du développement est encore infini et que l'on peut intégrer terme à terme pour obtenir (en tenant compte de $f(0)=0$)

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\times(2n)!}.}$$

(h) Les zéros du polynôme t^4+t^2+1 sont j, j^2, $-j$ et $-j^2$. Donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^4+t^2+1}$ est développable en série entière en tant que fraction rationnelle n'admettant pas zéro pour pôle et que le rayon de la série obtenue est 1. Puis pour t dans $]-1,1[$,

$$\frac{1}{t^4+t^2+1}=\frac{1-t^2}{1-t^6}=(1-t^2)\sum_{n=0}^{+\infty}t^{6n}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^{6n}-\sum_{n=0}^{+\infty}t^{6n+2}=1-t^2+t^6-t^8+t^{12}-t^{14}+\ldots.$$

La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^4+t^2+1}$ est continue sur $]-\infty,0]$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $-\infty$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^4+t^2+1}$ est donc intégrable sur $]-\infty,0]$.

Par intégration terme à terme licite, on obtient pour x dans $]-1,1[$,

$$f(x)=\int_{-\infty}^0\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt+\int_0^x\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt=\int_{-\infty}^0\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1}-\frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).$$

Calcul de $I=\int_{-\infty}^0\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt$. Par parité et réalité,

$$\frac{1}{t^4+t^2+1}=\frac{a}{t-j}+\frac{\overline{a}}{t-j^2}-\frac{a}{t+j}-\frac{\overline{a}}{t+j^2},$$

avec $a=\frac{1}{4j^3+2j}=\frac{1}{2(2+j)}=\frac{2+j^2}{2(2+j)(2+j^2)}=\frac{1-j}{6}$. Puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^4+t^2+1}&=\frac{1}{6}\left(\frac{1-j}{t-j}+\frac{1-j^2}{t-j^2}-\frac{1-j}{t+j}-\frac{1-j^2}{t+j^2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{3t+3}{t^2+t+1}+\frac{-3t+3}{t^2-t+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{t^2+t+1}-\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{1}{t^2-t+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^0\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt=\frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^0=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

En résumé,

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \int_{-\infty}^x\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1}-\frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).}$$

(i) f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Pour x réel,

$$\begin{aligned}\cos x\,\mathrm{ch}\,x &= \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(-1-i)x}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}((1+i)^n+(1-i)^n+(-1+i)^n+(-1-i)^n)\frac{x^n}{n!}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{3i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{-3i\pi/4})^n\right)\frac{x^n}{n!}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{2p}(-1)^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\frac{x^{2p}}{(2p)!}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{4k}(-1)^{2k}\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right)\frac{x^{4k}}{(4k)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2^{2k-2}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos x\,\mathrm{ch}\,x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2^{2k-2}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.}$$

Correction de l'exercice 4134 ▲

Pour x réel non nul, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ ce qui reste vrai pour $x=0$. La fonction f est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4135 ▲

Pour x réel, on sait que $F(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right)$.

La fonction F est impaire donc les coefficients d'indices pairs sont nuls. D'autre part, pour $n\in\mathbb{N}$, le coefficient de x^{2n+1} du produit de Cauchy des deux séries précédentes vaut

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(2k+1)}\times\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

La méthode choisie fournit classiquement une expression compliquée des coefficients.

On peut aussi obtenir F comme solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x)=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt+1=-2xF(x)+1$.

F est uniquement déterminée par les conditions $F'+2xF=1$ et $F(0)=0$ (*). F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ d'après le début de l'exercice et impaire. Pour x réel, posons donc $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}$.

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+2}=1\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}((2n+1)a_n+2a_{n-1})x^{2n}=1\\ &\Leftrightarrow a_0=1 \text{ et } \forall n\geqslant 1,\ (2n+1)a_n+2a_{n-1}=0\Leftrightarrow a_0=1 \text{ et } \forall n\geqslant 1,\ a_n=-\frac{2}{2n+1}a_{n-1}\\ & a_0=1 \text{ et } \forall n\geqslant 1,\ a_n=\frac{(-1)^n2^n}{(2n+1)(2n-1)\dots 1}a_0\\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ \frac{(-1)^n2^{2n}n!}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

On a montré que pour tout réel x, $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Par unicité des coefficients d'une série entière, $\forall n\in\mathbb{N}$, on obtient en particulier,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(2k+1)}\times\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(-1)^n2^{2n}n!}{(2n+1)!}.$$

Correction de l'exercice 4136 ▲

(a) La fonction f est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et de plus $f' = 1+f^2$.
Montrons par récurrence que pour tout naturel n, il existe un polynôme P_n à coefficients entiers naturels tel que $f^{(n)} = P_n \circ f$ (ou encore $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$).
• C'est vrai pour $n=0$ avec $P_0 = X$ et pour $n=1$ avec $P_1 = 1+X^2$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe un polynôme P_k à coefficients entiers naturels tel que $f^{(k)} = P_k \circ f$. D'après la formule de LEIBNIZ,

$$f^{(n+1)} = (1+f^2)^{(n)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k P_{n-k}\right) \circ f$$

et le polynôme $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k P_{n-k}$ est un polynôme à coefficients entiers naturels tel que $\tan^{(n+1)} = P_{n+1} \circ f$.
Remarque. On aurait pu aussi dériver l'égalité $f^{(n)} = P_n \circ f$ pour obtenir $f^{(n+1)} = f' \times P_n' \circ f = (P_1 \times P_n') \circ f$ mais on a déjà dans l'idée une relation de récurrence sur les coefficients du développement de tan qui n'est pas fournie par cette dernière égalité.

(b) Soient $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. La formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre n en 0 fournit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Le 1) montre que pour tout réel t de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et tout entier naturel k, $f^{(k)}(t) = P_k(\tan t) \geqslant 0$.
Donc, d'une part $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geqslant 0$ et d'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geqslant 0$ est majorée et donc la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge.
Ainsi, la série de TAYLOR de f à l'origine converge pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ (et donc la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge aussi pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right]$). Il n'y a par contre aucune raison pour le moment pour que sa somme soit f.

(c) Pour n entier naturel donné, posons $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ puis pour x dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, posons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$.
On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} P_k P_{n-k}$. On divise les deux membres de ces égalités par $n!$ et on prend la valeur en 0 ($= \tan 0$). On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1} = a_k a_{n-k} \text{ et aussi } a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 1.$$

Donc, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n = 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2 \\ &= 1 + g^2(x). \end{aligned}$$

De plus, $g(0) = a_0 = 0$.
Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, posons alors $h(x) = \arctan(g(x))$. La fonction h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} = 1 \text{ puis } h(x) = h(0) + (x-0) = x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x = f(x)$. Ceci montre déjà que f est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Mais quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $g(x) = f(x)$ tend vers $+\infty$ et donc $R \leqslant \frac{\pi}{2}$ puis $R = \frac{\pi}{2}$.
En résumé, la fonction tangente est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$ puisque la fonction tangente est impaire.

(d) $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$ puis $a_1 = 1$.
$3a_3 = a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0 = 1$ et donc $a_3 = \frac{1}{3}$.
$5a_5 = 2a_1a_3 = \frac{2}{3}$ et donc $a_5 = \frac{2}{15}$.
$7a_7 = 2a_1a_5 + a_3^2 = \frac{4}{15} + \frac{1}{9} = \frac{51}{135} = \frac{17}{45}$ et $a_7 = \frac{17}{315}$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan x = x + \frac{x^3}{2} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots}$$

(e) Pour tout réel x, $\text{th}(x) = \frac{1}{x}\tan(ix)$ et donc pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\text{th}(x) = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}(ix)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

Cette série entière a aussi pour rayon de convergence $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4137 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\sin(tx)$ est continue sur $[0, +\infty[$, négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$ et est donc intégrable sur $[0, +\infty[$. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t, posons $f(t) = e^{-t^2}\sin(tx)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-t^2}\sin(tx) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{2n+1}e^{-t^2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, posons $f_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{2n+1}e^{-t^2}$.
• Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue puis intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
• La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $[0, +\infty[$.
• Ensuite, $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty}t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^{+\infty}t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un réel strictement positif. Les deux fonctions $t \mapsto t^{2n}$ et $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^A t^{2n+1}e^{-t^2}\,dt &= \int_0^A t^{2n}\times te^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^{2n}e^{-t^2}\right]_0^A + n\int_0^A t^{2n-1}e^{-t^2}\,dt\\ &= -\frac{1}{2}A^{2n}e^{-A^2} + n\int_0^A t^{2n-1}e^{-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $I_n = nI_{n-1}$. En tenant compte, de $I_0 = \int_0^{+\infty}te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$ on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{2}$ puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. $\left|\frac{\frac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \frac{(n+1)x^2}{(2n+3)(2n+2)}$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = 0$. D'après la règle de d'ALEMBERT, la série numérique de terme général $\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge.
En résumé, pour tout réel x,
• Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue puis intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
• La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $[0, +\infty[$.
• $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt < +\infty$.
D'après un théorème d'intégration terme à terme, pour tout réel x,

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.}$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n}}{2(2n)!}=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!x^{2n-1}}{(2(2n-1)!}=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}F(x).$$

Par suite, pour tout réel x, $e^{x^2/4}F'(x)+\frac{x}{2}e^{x^2/4}F(x)=\frac{e^{x^2/4}}{2}$ et donc

$$F(x)=F(0)+\frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt=\frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt=\frac{e^{-x^2/4}}{2}\int_0^x e^{t^2/4}\,dt.}$$

Correction de l'exercice 4138 ▲

(a) $R=1$.

(b) $x=-1\Rightarrow$ cv (série alternée), $x=1\Rightarrow$ dv.

(c) f est croissante sur $[0,1[$ donc L existe dans $[0,+\infty]$.
$L=\sup_{[0,1[}f(x)\geqslant\sup_{[0,1[}\sum_{n=1}^N x^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sum_{n=1}^N\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\Rightarrow L=+\infty$.

Correction de l'exercice 4139 ▲

(a) Fonction croissante. $\lim_{x\to1^-}A(x)\geqslant\sum_{n=0}^N a_n$.

(b) Dém de type Césaro.

Correction de l'exercice 4140 ▲

Continuité radiale.

Correction de l'exercice 4141 ▲

$\frac{c_n}{b_n}=a_0+a_1\frac{b_{n-1}}{b_n}+\cdots+a_n\frac{b_0}{b_n}=\sum_{k=0}^{\infty}a_ku_{n,k}$ et le théorème de convergence dominée s'applique.

Correction de l'exercice 4142 ▲

$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-2}x^n}{\prod_{2\leqslant k\leqslant n}(3k+2)}$ $(R=\infty)$.
$N=8\Rightarrow 0.409954\leqslant y(1)\leqslant 0.409973$.

Correction de l'exercice 4143 ▲

(a) $\tan^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\tan^{(k)}\tan^{(n-1-k)}$.

(b) Pour $0\leqslant x<\pi/2$ la série est à termes positifs et les sommes partielles sont majorées par $\tan x$. Pour $-\pi/2<x\leqslant0$, il y a convergence absolue.

(c)

(d) Si $R>\pi/2$, f aurait une limite finie en $\pi/2$.

Correction de l'exercice 4144 ▲

(a) Produit de deux séries $\Rightarrow R \geqslant 1$. Lorsque $x \to 1^-$ $f(x) \to +\infty \Rightarrow R = 1$.

(b) $(1-x^2)y' = xy+1 \Rightarrow (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n \Rightarrow a_{2k} = a_0\frac{C_{2k}^k}{4^k}$, $a_{2k+1} = a_1\frac{4^k}{(2k+1)C_{2k}^k}$.

$a_0 = 0$, $a_1 = 1 \Rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k x^{2k+1}}{(2k+1)C_{2k}^k}$.

(c) $\arcsin^2 x = 2\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}x^{2k}}{k^2 C_{2k}^k}$.

Correction de l'exercice 4145 ▲

(a) $R = 4$.

(b) $y = 4\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} + c\right)$. $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x) \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 4146 ▲

(a) $R = \sqrt{2}$.

(b) Stirling $\Rightarrow a_n\sqrt{2}^{2n+1} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$ DV.

(c) $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2\arcsin(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2-x^2}}$.

Correction de l'exercice 4147 ▲

(a)

(b) $f'(x) = e^x f(x)$.

Correction de l'exercice 4148 ▲

(a) $a_n \leqslant n!$ par récurrence.

(b) $2f' = f^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x/2}$.

(c) $a_n = n!\,2^{-n}$.

Correction de l'exercice 4149 ▲

$Z(x) = \sum_{n,p\geqslant 1} \frac{x^n}{p^{2n}} = \sum_{p\geqslant 1} \frac{x}{p^2-x}$.

$Z'(x) = \sum_{p\geqslant 1} \frac{p^2}{(p^2-x)^2} = \sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p^2-x} + \sum_{p\geqslant 1} \frac{x}{(p^2-x)^2}$.

$Z^2(x) = \sum_{p,q\geqslant 1} \frac{x^2}{(p^2-x)(q^2-x)} = \sum_{p\neq q} \frac{x^2}{q^2-p^2}\left(\frac{1}{p^2-x} - \frac{1}{q^2-x}\right) + \sum_{p\geqslant 1} \frac{x^2}{(p^2-x)^2}$

$Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = 2\sum_{p\neq q} \frac{x^2}{(q^2-p^2)(p^2-x)}$.

A p fixé, $\sum_{q\neq p} \frac{1}{q^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{q\neq p}\left(\frac{1}{q-p} - \frac{1}{q+p}\right) = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p}\right) = \frac{3}{4p^2}$.

Donc $Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = \frac{3}{2}\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^2}{p^2(p^2-x)} = \frac{3}{2}(Z(x) - x\zeta(2))$.

Rmq : $2Z(x^2) = 1 - \pi x \mathrm{cotan}(\pi x)$ (Euler).

Correction de l'exercice 4150 ▲

$\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/2$.

Correction de l'exercice 4152 ▲

(a) $t^t = \exp(t\ln t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \ln^k t}{k!}$.

(b) 0.78343

Correction de l'exercice 4153 ▲

$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t=0}^{1} -\frac{t^n \ln t}{n}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 4154 ▲

Développer en série entière $\ln(1-t^2)$. $I = \frac{\pi^2}{2} - 4\ln 2$.

Correction de l'exercice 4158 ▲

On a déjà vu que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et la règle de d'ALEMBERT fournit $R=1$. Soit $x \in]-1,1[$.

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et tout entier naturel n, $|x^n \cos^n t| \leqslant |x|^n$. Comme la série numérique de terme général $|x|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général $t \mapsto x^n cos^n t$ est normalement et donc uniformément convergente sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^n t\right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos t}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-x\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} \text{ (en posant } u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)) \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x)u^2+(1-x)}\, du = 2 \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.}$$

Correction de l'exercice 4160 ▲

(a) Calcul.

(b) Soit $0 < r_0 < d$ et $R(\theta)$ le rayon de la série de Taylor de f en $r_0 e^{i\theta}$. Le cercle de centre 0 et de rayon r_0 est recouvert par les disques ouverts $D(r_0 e^{i\theta}, \frac{1}{2}R(\theta))$, θ variant de 0 à 2π, donc on peut en extraire un recouvrement fini ; soit ρ le rayon minimum des disques extraits. Alors pour $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ on a $R(\theta) \geqslant \rho$ (cf. analycité de la somme d'une série entière dans le disque ouvert de convergence). D'après la première question on a : $\left|\frac{f^{(n)}(r_0 e^{i\theta})}{n!}\right| \leqslant \frac{M}{\rho^n}$ où M majore $|f|$ sur $\overline{D}(0, r_0+\rho)$ d'où pour $|r - r_0| < \rho$:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(r_0 e^{i\theta})}{k!} (r-r_0)^k e^{i(k-n)\theta}\, d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} (r-r_0)^k \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f^{(k)}(r_0 e^{i\theta})}{k!} e^{i(k-n)\theta}\, d\theta.$$

ce qui démontre l'analycité de $\varphi = r \mapsto \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\, d\theta$ sur $]0,d[$.
Enfin, $\varphi(r) = a_n r^n$ au voisinage de 0 d'où $\varphi(r) = a_n r^n$ sur $[0,d[$ par prolongement analytique.

(c) $g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z}re^{i\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}f(re^{i\theta})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{r^ke^{ik\theta}}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^ke^{ik\theta}}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$.
Le rayon est au moins égal à r car f est bornée sur $\overline{D}(0,r)$.

(d) résulte de la question 3..

(e) D'après la question 1., $|a_n|\leqslant\|f\|_\infty/r^n$ pour tout $r>0$ donc $a_n=0$ si $n\geqslant 1$.

(f) $1/P$ est analytique bornée sur $\mathbb{C}$.

(g) On peut passer à la limite uniforme (ou dominée) dans la question 3..

(h) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\Rightarrow f\circ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ng^n(z)$ et il y a convergence localement uniforme.

Correction de l'exercice 4162 ▲

$2\Rightarrow 1$: évident.

$1\Rightarrow 2$: Soit $a>0$ et $M=\sup(|f(z)|e^{-a|z|})$.

$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{R^ne^{in\theta}}\,d\theta\Rightarrow|a_n|\leqslant M\frac{e^{aR}}{R^n}\leqslant M\inf_{R>0}\frac{e^{aR}}{R^n}=M\left(\frac{ea}{n}\right)^n$.

Donc $\sqrt[n]{n!\,\|a_n\|}\leqslant\sqrt[n]{n!}\frac{ea}{n}\to a$ lorsque $n\to\infty$. CQFD

Correction de l'exercice 4163 ▲

(a) $f(\overline{z})=\overline{f(z)}$.

(b) $\mathrm{Im}(f)$ est de signe constant sur le connexe $D\cap\Omega^+$ et $f(z)\sim z$ au voisinage de 0.

(c) Intégrer terme à terme.

(d) $\mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))\sin\theta\geqslant 0$ par la question 2..

Correction de l'exercice 4165 ▲

On pose, sous réserve de convergence, $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}z_nt^n$. Alors :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{p}z_nt^n+\sum_{j=1}^{p}e^{i\omega}p_j\sum_{n=p+1}^{\infty}z_{n-j}t^n=\sum_{n=1}^{p}z_nt^n+\sum_{j=1}^{p}e^{i\omega}p_jt^j\Big(f(t)-\sum_{n=1}^{p-j}z_nt^n\Big)$$

soit :

$$\Big(1-\sum_{j=1}^{p}e^{i\omega}p_jt^j\Big)f(t)=P(t)f(t)=\sum_{n=1}^{p}z_nt^n-\sum_{j=1}^{p}e^{i\omega}p_jt^j\sum_{n=1}^{p-j}z_nt^n=Q(t),$$

donc $f(t)=Q(t)/P(t)$. Réciproquement, soit $Q(t)/P(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$: en remontant les calculs précédents on voit que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (z_n) avec les mêmes premiers termes d'où $z_n=a_n$ pour tout n.

Si $|t|<1$ alors $\left|\sum_{j=1}^{p}e^{i\omega}p_jt^j\right|<1$ donc P n'a pas de racine dans le disque unité ouvert. Si P n'a pas non plus de racine sur le cercle unité alors le développement en série entière de $Q(t)/P(t)$ a un rayon >1 et $z_n\to 0$ lorsque $n\to\infty$. Si P admet des racines dans $\mathbb{U}$ on peut déja dire que la suite (z_n) est bornée par $\max(|z_1|,\dots,|z_p|)$ puis. . . ?

Correction de l'exercice 4166 ▲

(a)

(b) Complétude : soit (f_k) une suite d'éléments de E de Cauchy, $f_k(z)=\sum_{n\in|||}a_{n,k}z^n$. On a, à k et n fixés, par convergence dominée :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}f_k(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta=\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi r^n}\int_{\theta=0}^{2\pi}f_k(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta=a_{n,k}.$$

La suite (f_k) converge uniformément sur $\overline{D}$ vers une fonction $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue. On note :

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}.$$

La suite (a_n) est bornée, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\in|||} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Pour $z \in D$ fixé on a alors lorsque $k \to \infty$:

$$\begin{aligned} f_k(z) = \sum_{n\in|||} a_{n,k}z^n &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\Big(\sum_{n\in|||} f_k(e^{i\theta})e^{-in\theta}z^n\Big)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f_k(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}}\,d\theta \\ &\to \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\Big(\sum_{n\in|||}\varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}z^n\Big)\,d\theta = \sum_{n\in|||} a_n z^n \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\varphi \in E$. Enfin on a $\|f_k - \varphi\| \to 0$ lorsque $k \to \infty$ par convergence uniforme, d'où $\varphi = \lim_{k\to\infty} f_k$ dans E.

(c) Soit $f \in E$ et $f_n(z) = f\left(\frac{nz}{n+1}\right)$. Comme f est uniformément continue, f_n converge uniformément vers f sur $\overline{D}$. Soit $\varepsilon > 0$ et n tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Comme f_n est développable en série entière avec un rayon au moins égal à $1 + \frac{1}{n}$, son développement converge uniformément vers f_n sur $\overline{D}$ donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|f_n - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Correction de l'exercice 4167 ▲

(a) $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ $(R = 1)$.

Pour $z,t \in \mathring{D}(0,1)$ on a $\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{(z-t)(1-zt)}{(1-z)^2(1-t)^2}$, quantité nulle si et seulement si $z = t$, d'où l'injectivité de $z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$.

(b) i. $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} = f(\overline{z}) \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Par injectivité, on en déduit que $\mathrm{Im}(f(z))$ garde un signe constant sur chaque demi-disque limité par $]-1,1[$, et comme $f(z) = z + o_{z\to 0}(z)$, ce signe est celui de $\mathrm{Im}\, z$.

ii. $\int_{t=0}^{\pi} \mathrm{Im}(f(re^{it}))\sin nt\,dt = \frac{\pi a_n r^n}{2}$.

On a $|\sin(nt)| \leqslant n\sin(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$ par récurrence, donc $\frac{\pi|a_n|r^n}{2} \leqslant n\int_{t=0}^{\pi}\mathrm{Im}(f(re^{it}))\sin t\,dt = \frac{n\pi a_1 r}{2}$. On en déduit $|a_n|r^n \leqslant n|a_1|r$ et on conclut $|a_n| \leqslant n$ en faisant tendre r vers 1.

Correction de l'exercice 4168 ▲

Soit $R > 0$. Notons D_R le disque fermé de centre 0 et de rayon R. Soient $z \in D_R$ et n un entier naturel.

$$|P_n(z)| = |e^z - (e^z - P_n(z))| \geqslant |e^z| - |e^z - P_n(z)| \geqslant e^{-R} - |e^z - P_n(z)|.$$

On sait que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur D_R.Donc il existe un entier n_0 tel que pour tout $z \in D_R$ et tout entier $n \geqslant n_0$, $|e^z - P_n(z)| \leqslant \frac{1}{2}e^{-R}$. Pour $n \geqslant n_0$ et $z \in D_R$, $|P_n(z)| \geqslant \frac{1}{2}e^{-R} > 0$ et P_n ne s'annule pas dans D_R.

Correction de l'exercice 4169 ▲

On cherche une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ de rayon R strictement positif telle que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^x n\right) = 1$ pour x élément d'un certain intervalle ouvert non vide de centre 0.

Cette égalité impose à la suite (b_n) de vérifier le système d'équations $\left\{\begin{array}{l} a_0b_0 = 1 \\ a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = 1 \\ \qquad\qquad\vdots \end{array}\right.$

(a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, b_n existe et est unique.

• Puisque $a_0=1$, $a_0b_0=1\Leftrightarrow b_0=1$. Ceci montre l'existence et l'unicité de b_0.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons avoir démontré l'existence et l'unicité de b_0, b_1, $\dots$, b_n.

Alors $a_0b_{n+1}+a_1b_n+\dots+a_nb_1+a_{n+1}b_0=0\Leftrightarrow b_{n+1}=-a_1b_n-\dots-a_nb_1-a_{n+1}b_0$. Ceci montre l'existence

et l'unicité de b_{n+1}.

On a montré par récurrence que la suite (b_n) existe et est unique.

(b) Il faut alors vérifier que la série entière associée à la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence strictement positif .

Soit $R>0$ le rayon de la série associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit r un réel tel que $0<r<R$.

On sait que la suite $(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et il existe $M>0$ tel que pour tout entier naturel n, $|a_n|\leqslant\frac{M}{r^n}$.

$b_0=1$ puis $|b_1|=|-a_1b_0|\leqslant\frac{M}{r}$ puis $|b_2|=|-a_2b_0-a_1b_1|\leqslant\frac{M}{r^2}+\frac{M}{r}\times\frac{M}{r}=\frac{M(M+1)}{r^2}$ puis

$$|b_3|=|-a_3b_0-a_2b_1-a_1b_2|\leqslant\frac{M}{r^3}+\frac{M}{r^2}\times+\frac{M}{r}+\frac{M}{r}\times\frac{M(M+1)}{r^2}=\frac{M(M^2+2M+1)}{r^3}=\frac{M(M+1)^2}{r^3}.$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n|\leqslant\frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.

• C'est vrai pour $n=1$.

• Soit $n\geqslant 1$, supposons que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $|b_k|\leqslant\frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$. Alors

$$\begin{aligned}|b_{n+1}|&\leqslant|-a_{n+1}b_0|+|-a_nb_1|+...+|-a_1b_n|\leqslant\frac{M}{r^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}\times\frac{M}{r^{n+1-k}}\\&=\frac{M}{r^{n+1}}\left(1+M\sum_{k=1}^{n}(M+1)^{k-1}\right)=\frac{M}{r^{n+1}}\left(1+M\frac{(M+1)^n-1}{(M+1)-1}\right)=\frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $|b_n|\leqslant\frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}$. En particulier , le rayon R' de la série entière associée à la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $R'\geqslant\frac{r}{M+1}>0$. Ceci valide les calculs initiaux sur $]-\rho,\rho[$ où $\rho=\mathrm{Min}(R,R')>0$ et donc l'inverse d'une fonction f développable en série entière à l'origine et telle que $f(0)\neq 0$ est développable en série entière à l'origine.

Correction de l'exercice 4170 ▲

Posons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}A=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$. On sait que pour tout entier naturel n, $\mathrm{Tr}(A^n)=\lambda_1^n+...+\lambda_p^n$.

Soit λ un nombre complexe.

• Si $\lambda=0$, la série entière associée à la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de rayon infini et pour tout nombre complexe z, $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^nz^n=1=\frac{1}{1-\lambda z}$.

• Si $\lambda\neq 0$, la série entière associée à la suite (λ^n) est de rayon $\frac{1}{|\lambda|}$ et pour $|z|<\frac{1}{|\lambda|}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^nz^n=\frac{1}{1-\lambda z}$.

Soit $\rho=\mathrm{Max}\left(|\lambda_1|,\dots,|\lambda_p|\right)$ (ρ est le rayon spectral de la matrice A) et $R=\frac{1}{\rho}$ si $\rho\neq 0$ et $R=+\infty$ si $\rho=0$.

Pour $|z|<R$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Tr}(A^n)z^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}(\lambda_kz)^n\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_kz)^n\right)\text{ (somme de p séries convergentes)}\\&=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{1-\lambda_kz}.\end{aligned}$$

Il est alors clair que R est le rayon de convergence de la série entière proposée (développement en série entière d'une fraction rationnelle).

Si de plus, $0<|z|<R$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Tr}(A^n)z^n=\frac{1}{z}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\frac{1}{z}-\lambda_k}\right)=\frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}$ (décomposition usuelle de $\frac{P'}{P}$).

Correction de l'exercice 4171 ▲

(a) Soient A et B les sommes des séries entières associées aux suites a et b sur $]-1,1[$. La fonction B est strictement positive sur $]0,1[$ et en particulier ne s'annule pas sur $]0,1[$.

• La suite a est positive donc la fonction A est croissante sur $[0,1[$ et admet ainsi une limite réelle ou infinie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. De plus, pour N entier naturel donné et $x\in[0,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\geqslant\sum_{n=0}^{N}a_nx^n$ et donc

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to1,\,x<1}A(x)\geqslant\lim_{x\to1,\,x<1}\sum_{n=0}^{N}a_nx^n=\sum_{n=0}^{N}a_n.$$

Puisque la série de terme général positif a_n diverge, quand N tend tend vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to1,\,x<1}A(x)\geqslant+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to1,\,x<1}A(x)=+\infty$. Il en est de même pour B car la série de terme général b_n diverge quelque soit la valeur de k.

• On veut alors montrer que $A-kB\underset{x\to1^-}{=}o(B)$.

Soit $\varepsilon>0$. Par hypothèse, $a_n-kb_n\underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ et donc il existe un entier naturel N tel que pour $n\geqslant N$, $|a_n-kb_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}b_n$.

Soit $x\in[0,1[$.

$|A(x)-kB(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n-kb_n|x^n\leqslant\sum_{n=0}^{N}|a_n-kb_n|x^n+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}b_nx^n\leqslant\sum_{n=0}^{N}|a_n-kb_n|+\frac{\varepsilon}{2}B(x)$.

Maintenant, $B(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Donc il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que pour $x\in]1-\alpha,1[$, $B(x)>\frac{2}{\varepsilon}\sum_{n=0}^{N}|a_n-kb_n|$. Pour $x\in]1-\alpha,1[$, on a alors $|A(x)-kB(x)|<\frac{\varepsilon}{2}B(x)+\frac{\varepsilon}{2}B(x)=\varepsilon B(x)$.

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha\in]0,1[/\ \forall x\in]1-\alpha,1[,\ |A(x)-kB(x)|<\varepsilon B(x)$ et donc $\lim_{x\to1^-}\frac{A(x)}{B(x)}=k$.

(b) i. La série entière proposée « vérifie »les hypothèses du 1) et de plus , $\ln n\underset{n\to+\infty}{\sim}1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Donc

$$f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)=\frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n\underset{x\to1^-}{\sim}\frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

ii. Soit $p\geqslant2$. $n^{p-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)$. Comme les deux suites (n^{p-1}) et $((n+1)(n+2)\ldots(n+p-1))$ vérifient les hypothèses du 1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n^{p-1}x^n\underset{x\to1^-}{\sim}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+p-1)\ldots(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^{(p-1)}=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p-1)}=\frac{(p-1)!}{(1-x)^p}.$$

Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to1^-}(1-x)^p\sum_{n=1}^{+\infty}n^{p-1}x^n=(p-1)!.}$$

Correction de l'exercice 4172 ▲

Supposons qu'il existe un entier naturel p tel que $a_p=a_{p+1}$. Le développement limité à l'ordre 1 de $f^{(p)}$ en 0 s'écrit $f^{(p)}(x)\underset{x\to0}{=}f^{(p)}(0)+xf^{(p+1)}(0)+o(x)=a_p(1+x)+o(x)$ et on en déduit

$$\begin{aligned}|f^{(p)}(x)|&\geqslant|a_p(1+x)|-|o(x)|=1+x-|o(x)|\geqslant1+x-\frac{x}{2}\text{ (sur un voisinage pointé de 0 à droite)}\\&=1+\frac{x}{2}>1\text{ (sur un voisinage pointé de 0 à droite).}\end{aligned}$$

Donc si deux termes consécutifs sont égaux, f nne vérifie pas les conditions de l'énoncé ou encore si f vérifie les conditions de l'énoncé, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{p+1} = -a_p$ puis $a_p = (-1)^p a_0$. Mais alors, nécessairement pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}$ ou pour tout réel x, $f(x) = -e^{-x}$.

Réciproquement, ces deux fonctions sont clairement solutions du problème posé.

Correction de l'exercice 4173 ▲

(a) Soient $n \geqslant 2$ puis $k \in [\![1, n-1]\!]$. On met une parenthèse autour de $X_1 \dots X_k$ et une autour de $X_{k+1} \dots X_n$. Ensuite, pour chacun des a_k parenthésages de $X1 \dots X_k$, il y a a_{n-k} parenthésages possibles de $X_{k+1} \dots X_n$. Finalement, en faisant varier k de 1 à $n-1$, on a montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.}$$

(b) On suppose momentanément le rayon R de la série entière associé à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ strictement positif. On pose conventionnellement $a_0 = 0$. Pour $x \in]-R, R[$,

$$f^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = f(x) - x,$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in]-R, R[,\ f^2(x) = f(x) - x.}$$

(c) Nécessairement, pour tout x de $]-R, R[$, $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4x})$ (I) ou $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$ (II). Ainsi, pour chaque $x \in]-R, R[$, on doit choisir l'une de ces deux expressions. Puisque $f(0) = 0$, il faut choisir l'expression (II) quand $x = 0$.

Pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, posons $g(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$. g est développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ en vertu de théorèmes généraux. Notons $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement. Puisque $g(0) = 0$, on a $b_0 = 0 = a_0$ et puisque $g'(0) = 1$, on a $b_1 = 1 = a_1$. Enfin, la fonction g vérifie $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $g^2(x) = g(x) - x$ et donc $\forall n \geqslant 2$, $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$. On en déduit par récurrence que pour tout entier naturel n, $b_n = a_n$ et donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $f(x) = g(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right[,\ f(x) = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}).}$$

(d) Pour connaitre les a_n, il reste à développer la fonction g en série entière. Pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$,

$$g(x) = \frac{1}{2}(1 - (1-4x)^{1/2}) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/2}^n (-4x)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} C_{1/2}^n 2^{2n-1} x^n.$$

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1} C_{1/2}^n 2^{2n-1} &= (-1)^{n-1} \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right)}{n!} 2^{2n-1} = \frac{2^{n-1}}{n!} \times 1 \times 3 \times \dots . \times (2n-3) \\ &= \frac{2^{n-1}}{n!} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots . \times (2n-3) \times (2n-2)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n-2)} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}.}$$

Correction de l'exercice 4174 ▲

(a) $a_0 = \pi$ et pour $n \neq 0$, $a_n = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$ (nul quand n est pair), $b_n = 0$.

(b) Par la formule de Parseval

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2\,dx = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$$

donc $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^4}{96}$.

(c) Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

il vient $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{15}{16}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$.

(d) C'est le théorème de Dirichlet. Appliqué en $x=0$, cela implique que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 4177 ▲

(a) $a_0 = \pi$, $a_{2p} = 0$, $a_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)^2}$, $b_n = 0$.

(b) $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{n}$.

(c) $a_0 = \frac{8\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4}{n^2}$, $b_n = -\frac{4\pi}{n}$.

(d) $a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_{2p} = \frac{-2}{\pi(4p^2-1)}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_p = 0$.

(e) $a_{2p} = \frac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_p = 0$.

Correction de l'exercice 4178 ▲

$I_{n+1} - I_{n-1} = \int_{t=0}^{\pi/2} 2\cos(nt)\,dt = \frac{2}{n}\sin(n\pi/2)$.

Donc $I_{2p} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\right)$, $I_{2p+1} = \frac{\pi}{2}$.

$b_n = 0$ (parité), $a_{2p} = 0$ (symétrie par rapport à $(\pi/2,0)$), $a_{2p+1} = -\frac{4}{(2p+1)\pi}I_{2p+1} = -\frac{2}{2p+1}$.

Correction de l'exercice 4179 ▲

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a_k & = & (a_{k-1}+a_{k+1})\cos\alpha \\ a_0 & = & a_1\cos\alpha + 2 \end{array}\right. \Rightarrow a_k = A\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})^k + B\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})^k.$$

Comme $a_k \to 0$ (lorsque $k\to\infty$) on a $B=0$ d'où $A = \frac{2}{\sin\alpha}$. Finalement, $f(t) = \frac{2}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^k\cos(kt)\right)$.

Correction de l'exercice 4180 ▲

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos nx = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{ix})^n\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ae^{ix}}\right) = g(x)$.

(b) Il y a convergence normale.

(c)

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{t=0}^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(nx-nt) f(t)\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t=0}^{2\pi} a^n \cos(nx-nt) f(t)\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos(nx) \int_{t=0}^{2\pi} a^n \cos(nt) f(t)\,dt + \sin(nx) \int_{t=0}^{2\pi} a^n \sin(nt) f(t)\,dt\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\pi a^n a_n(f)\cos(nx) + \pi a^n b_n(f)\sin(nx)).
\end{aligned}$$

Il y a convergence normale car $|a| < 1$ et les coefficients de Fourier de f sont bornés. On en déduit que h est continue, puis que les coefficients de Fourier de h sont $a^n a_n(f)$ et $a^n b_n(f)$.

(d) Les coefficients de Fourier des deux membres doivent être égaux, ce qui donne : $a_n(f) = \frac{1}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ et $b_n(f) = 0$ si pour tout $n \in |||^*$ on a $\pi\lambda a^n \neq 1$ (sinon il n'y a pas de solution), et $a_0(f) = 0$ si $2\pi\lambda \neq 1$, $a_0(f)$ quelconque sinon. Réciproquement, en posant $f(x) = [a_0/2] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ on définit f, 2π-périodique continue (la série converge normalement), solution de l'équation par égalité des coefficients de Fourier de chaque membre.

Correction de l'exercice 4181 ▲

(a) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} = \frac{3}{2(5-4\cos x)}$.

(b) $\frac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 4182 ▲

(a)

(b) $g(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(e^a f(e^{ix}) - e^{-ix} f(e^{-ix})\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-ka} \cos kx\right)$.

Correction de l'exercice 4184 ▲

(a) $c_k(h) = c_k(f) c_k(g)$.

(b)

Correction de l'exercice 4185 ▲

$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2 - ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-(x-2n\pi)^2 - ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - ikx}\,dx = \frac{e^{-k^2/4}}{2\sqrt{\pi}}$ $\left(\text{calculer } \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - i\xi x}\,dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4} \text{ par équation différentielle}\right)$.

Correction de l'exercice 4186 ▲

(a) $a_0 = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}$, $a_n = \frac{2(-1)^n \operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}$, $b_n = -na_n$.

(b) $S = \frac{\pi - \operatorname{th}\pi}{2\operatorname{th}\pi}$, $S' = \frac{\pi - \operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}$.

Correction de l'exercice 4187 ▲

(a) Si $a \neq 0$: $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi(a-in)} e^{inx} = \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi(a^2+n^2)}(a\cos(nx) - n\sin(nx))$.

(b) On peut supposer $a > 0$ car $I(-a) = -I(a)$ et $I(0) = 0$. On envisage d'intégrer terme à terme la relation :

$$\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} \sin(au) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} \sin(au).$$

On coupe l'intégrale $\int_0^{+\infty}$ en $\int_0^{\pi/a} + \int_{\pi/a}^{+\infty}$: sur $[0, \pi/a]$ le sinus est positif et le théorème de convergence monotone s'applique. Sur $[\pi/a, +\infty[$ le théorème d'intégration terme à terme s'applique (série des normes 1 convergente) car $\int_{\pi/a}^{+\infty} |e^{-nu} \sin(au)|\, du \leqslant \int_{\pi/a}^{+\infty} e^{-nu}\, du = e^{-n\pi/a}/n$. Ainsi,

$$I(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{u=0}^{+\infty} e^{-nu} \sin(au)\, du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2+a^2}.$$

(c) Déjà fait, $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} \sin(au)\, du = \frac{a}{a^2+1}$. Il doit y avoir une autre méthode pour la question précédente ? !

(d) En comparant avec **1)** pour $x = 0$ on obtient : $I(a) = \frac{\pi}{2} \frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}$ pour $a > 0$.

Correction de l'exercice 4188 ▲

(a) $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi(a-in)} e^{inx}$.

(b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(e^{2\pi a}-1)^2}{4\pi^2(a^2+n^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{e^{4a\pi}-1}{4a\pi}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}$.

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{\mathrm{th}(a\pi)} - \frac{1}{a}\right) \to \frac{\pi^2}{6}$ lorsque $a \to 0$ et il y a convergence dominée.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4189 ▲

(a) $a_n = -\frac{4}{4n^2-1}$, $b_n = -\frac{32n}{\pi(4n^2-1)^2}$.

(b)

(c) $\frac{\pi-2}{4}$.

Correction de l'exercice 4190 ▲

(a) $\cos ax = \frac{\sin \pi a}{\pi a} + \frac{2a \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{a^2-n^2}$.

(b) $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2-n^2} = \frac{\pi \cos \pi t}{\sin \pi t} - \frac{1}{t} \Rightarrow g(t) = \ln\left(\lambda \frac{\sin \pi t}{t}\right)$ et $g(0) = 0 \Rightarrow g(t) = \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)$.

Correction de l'exercice 4191 ▲

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

(b)

(c) Le premier membre vaut $f(1) = \frac{\pi-1}{2}$ et le second $\frac{1}{4\pi} \int_{t=0}^{2\pi} (f(t+1) - f(t-1))^2\, dt = \frac{\pi-1}{2}$.

Correction de l'exercice 4192 ▲

(a) $a_{2p+1} = b_{2p+1} = 0$.

(b) $a_{2p} = b_{2p} = 0$.

Correction de l'exercice 4194 ▲

$a'_k = kb_k$, $b'_k = -ka_k$ + inégalité de Bessel.

Correction de l'exercice 4195 ▲

(a)

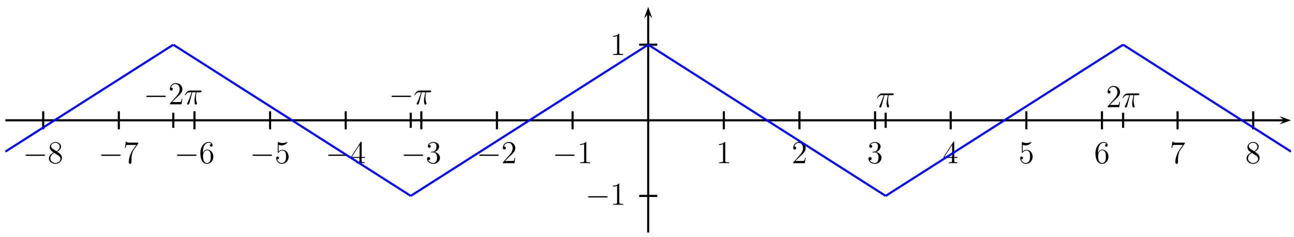
(b) $S'_g(x) = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n - \frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi}\right)\cos nx - na_n \sin nx$.

Correction de l'exercice 4197 ▲

$$\begin{aligned}
\pi a_k &= \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t=0}^{2\pi/k} f(t+2i\pi/k)\cos(kt)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t=0}^{\pi/2k}\Big(f(t+2i\pi/k) - f(t+2i\pi/k+\pi/k) - f(t+2(i+1)\pi/k-\pi/k) + f(t+2(i+1)\pi/k)\Big)\cos(kt)\,dt.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4198 ▲

(a) La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



Puisque f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\cos(nx)\,dx$.
Par suite, $a_0(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) = \frac{4}{n\pi^2}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.}$$

L'égalité $f(0)=1$ fournit $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. Ensuite, si $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, on a

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{S}{4},$$

et donc $S=\frac{4}{3}\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$.
D'autre part, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la formule de PARSEVAL fournit $\frac{(a_0(f))^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2+(b_n(f))^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^2\,dx=\left[-\frac{1}{3}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^3\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}$$

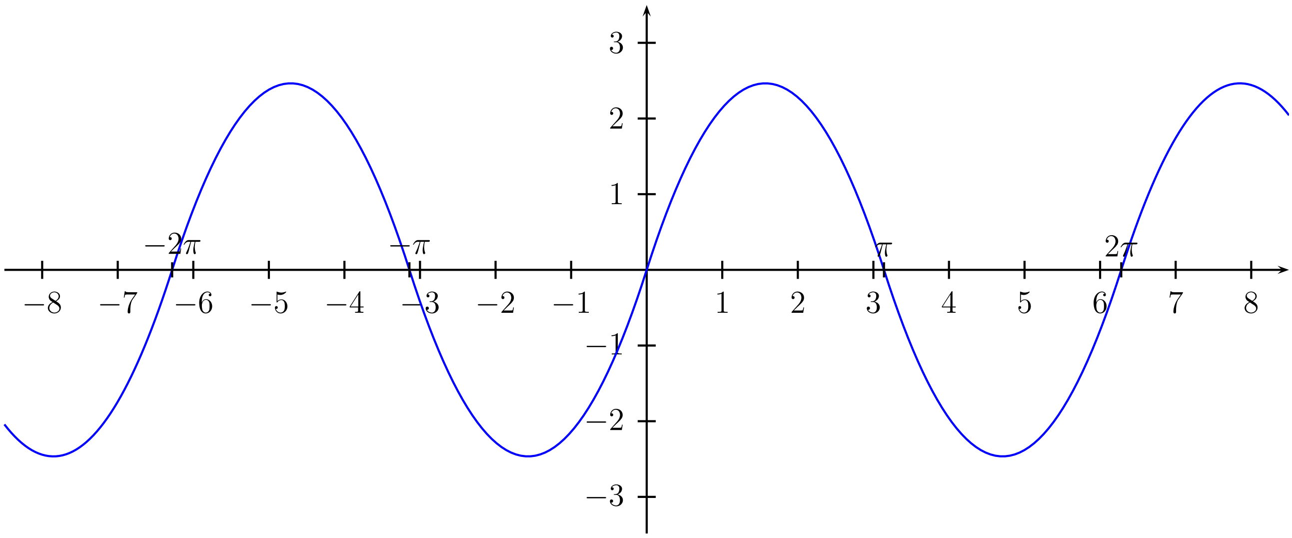
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi^4}{64}=\frac{\pi^4}{96}$. Enfin, si on pose $S=\frac{1}{n^4}$,

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{S}{16},$$

et donc $S=\frac{16}{15}\times\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.}$$

(b) La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



Puisque f est impaire, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=0$ puis pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}b_n(f)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\left[x(\pi-x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos(nx)\,dx\right)\\&=\frac{2}{n\pi}\left(\left[(\pi-2x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right)=\frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}.\end{aligned}$$

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x,

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx))=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(nx)=\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)^3}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.}$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ fournit $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$. Ensuite, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la formule de PARSEVAL fournit $\frac{(a_0(f))^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2+(b_n(f))^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2(\pi-x)^2\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\pi^2\frac{x^3}{3}-2\pi\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi}=2\pi^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi^4}{15}$$

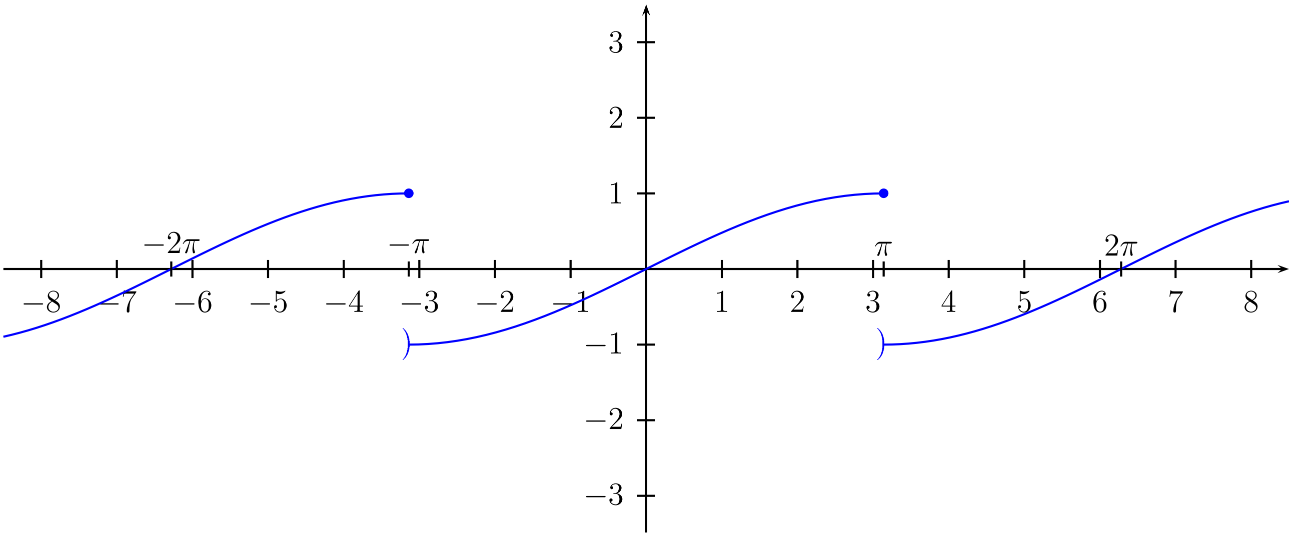
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}=\frac{\pi^2}{64}\times\frac{\pi^4}{15}=\frac{\pi^6}{960}$. Enfin, si on pose $S=\frac{1}{n^6}$,

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^6}=\frac{\pi^6}{960}+\frac{S}{64},$$

et donc $S=\frac{64}{63}\times\frac{\pi^6}{960}=\frac{\pi^6}{945}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}.}$$

(c) La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



La fonction f a mêmes coefficients de FOURIER que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique telle que $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=0$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=0$ puis pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}b_n(f)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)}{n-\frac{1}{2}}-\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}}-\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}\right)\\&=-\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2n}{n^2-\frac{1}{4}}=-\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{8n}{4n^2-1}.\end{aligned}$$

La fonction f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge en tout réel x et a pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)$. En particulier,

$$\boxed{\forall x\in]-\pi,\pi[,\ \sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{4n^2-1}\sin(nx).}$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ fournit

$\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{4n^2-1}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2p+1}{4(2p+1)^2-1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{2p+1}{16p^2+1p+3}$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{16n^2+16n+3} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.}$$

(d) f est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et paire. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx$.

1ère solution. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\text{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\text{ch}(\lambda x)e^{inx}\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\text{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\lambda+in)x}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}e^{(-\lambda+in)x}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\text{Re}\left(\frac{e^{(\lambda+in)\pi}-e^{-(\lambda+in)\pi}}{\lambda+in} + \frac{e^{(-\lambda+in)\pi}-e^{-(-\lambda+in)\pi}}{-\lambda+in}\right) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\text{Re}\left(\frac{2\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\lambda+in} + \frac{-2\,\text{sh}(\lambda\pi)}{-\lambda+in}\right)\\
&= \frac{(-1)^n\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\text{Re}\left(\frac{\lambda-in}{\lambda^2+n^2} + \frac{\lambda+in}{\lambda^2+n^2}\right) = \frac{2\lambda\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}
\end{aligned}$$

2ème solution. Une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\text{sh}(\lambda x)}{\lambda}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sh}(\lambda x)\sin(nx)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sh}(\lambda x)\sin(nx)\,dx\right.\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\left(\left[\frac{\text{ch}(\lambda x)}{\lambda}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\text{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx\right)\right)\\
&= \frac{2(-1)^n\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} - \frac{n^2}{\lambda^2}a_n(f),
\end{aligned}$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2(-1)^n\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\times\frac{\lambda^2}{n^2+\lambda^2} = \frac{2\lambda\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$.

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\text{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}\cos(nx).}$$

L'égalité $f(0) = 1$ fournit $1 = \frac{\text{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\,\text{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\,\text{sh}(\lambda\pi)}\left(1-\frac{\text{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right) = \frac{\pi(\text{sh}(\lambda\pi)-\pi\lambda)}{2\lambda^2\pi\,\text{sh}(\lambda\pi)}$$

et l'égalité $f(\pi) = \text{ch}(\lambda\pi)$ fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\,\text{sh}(\lambda\pi)}\left(\text{ch}(\lambda\pi)-\frac{\text{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right) = \frac{\lambda\pi\,\text{ch}(\lambda\pi)-\text{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\,\text{sh}(\lambda\pi)}$$

$$\boxed{\forall\lambda > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\,\text{sh}(\lambda\pi)}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2} = \frac{\lambda\pi\,\text{ch}(\lambda\pi)-\text{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\,\text{sh}(\lambda\pi)}.}$$

La fonction f est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. L'égalité de PARSEVAL s'écrit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2+(b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ avec

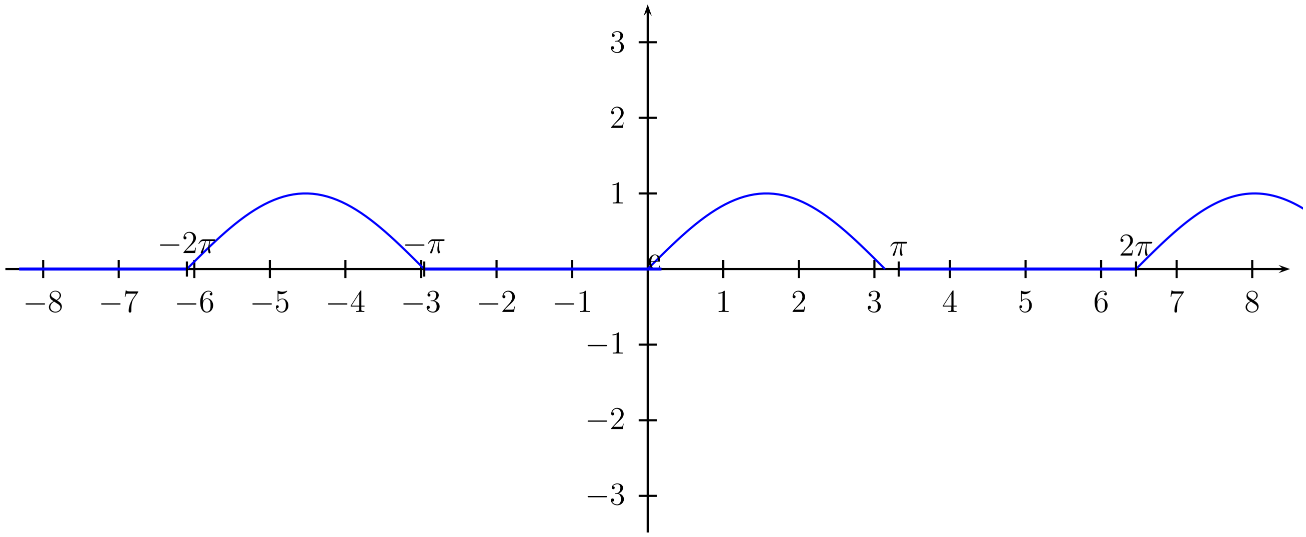
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{ch}^2(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{ch}(2\lambda x)+1}{2}\,dx = 1+\frac{\text{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi},$$

et donc $1+\frac{\text{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi} = \frac{2\,\text{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2} + \frac{4\lambda^2\,\text{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\lambda^2\,\text{sh}^2(\lambda\pi)}\left(1+\frac{\text{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi}-\frac{2\,\text{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2}\right) = \frac{2\pi^2\lambda^2+\pi\lambda\,\text{sh}(2\lambda\pi)-4\lambda^2\,\text{sh}^2(\lambda\pi)}{8\lambda^4\,\text{sh}^2(\lambda\pi)}.$$

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2\lambda^2+\pi\lambda\operatorname{ch}(\lambda\pi)\operatorname{sh}(\lambda\pi)-2\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{4\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}.}$$

(e) La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sup(\sin x, 0)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((n+1)x)-\sin((n-1)x)\,dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx \text{ si } n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}+\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} \text{ si } n\neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} \text{ si } n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right) \text{ si } n\neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } n=1 \\ -\frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{n^2-1} \text{ si } n\neq 1 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos((n-1)x)-\cos((n+1)x))\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } n=1 \\ 0 \text{ si } n\neq 1 \end{cases}$$

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x

$$\sup(\sin x, 0) = \frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos(nx) = \frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}\cos(2px).$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sup(\sin x,0) = \frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx).}$$

L'égalité $f(0)=0$ fournit $\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=0$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}.}$$

Remarque. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right)=\frac{1}{2}$

Correction de l'exercice 4199 ▲

(a) i. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Pour tout réel t, $a - \cos t \neq 0$ et

$$\frac{1}{a-\cos t} = \frac{2}{2a-e^{it}-e^{-it}} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it})^2-2ae^{it}+1}.$$

L'équation $z^2 - 2az + 1 = 0$ admet deux solutions non nulles inverses l'une de l'autre. On note b la solution de plus petit module de sorte que $|b| \leqslant 1$.

On ne peut avoir $|b| = 1$ car alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $b = e^{i\theta}$. On en déduit que $2a = b + \frac{1}{b} = 2\cos\theta \in [-2,2]$ puis que $a \in [-1,1]$ ce qui n'est pas. Donc $|b| \neq 1$. Plus précisément, puisque $|b| \leqslant \left|\frac{1}{b}\right|$, on a $|b| < 1$ et $\left|\frac{1}{b}\right|$. En particulier, $b \neq \frac{1}{b}$.

Ensuite, pour $|t| < |b|$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-\cos t} &= \frac{-2e^{it}}{(e^{it}-b)\left(e^{it}-\frac{1}{b}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{b}-b}\left(\frac{b}{e^{it}-b} - \frac{1/b}{e^{it}-\frac{1}{b}}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(\frac{be^{-it}}{1-be^{-it}} + \frac{1}{1-be^{it}}\right) \\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(be^{-it}\sum_{n=0}^{+\infty} b^n e^{-int} + \sum_{n=0}^{+\infty} b^n e^{int}\right) \text{ (car } |be^{it}| = |be^{-it}| = |b| < 1) \\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^{n+1}e^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty} b^n e^{int}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n e^{-int}\right) \\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(nt)\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{a-\cos t} = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(nt)\right).}$$

ii. Pour tout réel $t \in [-\pi,\pi]$ et tout entier naturel non nul n, on a $|b^n \cos(nt)| \leqslant |b|^n$. Comme la série numérique de terme général $|b|^n$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto b^n \cos(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$.

On sait alors que la série obtenue est la série de FOURIER de f.

(b) Puisque la fonction f est paire, pour tout entier naturel n, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt$. Donc, pour tout entier naturel n (y compris pour $n = 0$),

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{\pi a_n(f)}{2} = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}.}$$

Correction de l'exercice 4200 ▲

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc la série de FOURIER de f converge vers f sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de DIRICHLET.

Puisque f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos((n+\alpha)x) + \cos((n-\alpha)x))\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)x)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)x)}{\alpha-n}\right]_0^{\pi} \text{ (car } \alpha \notin \mathbb{Z}) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right) = (-1)^n \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \forall x \in [-\pi, \pi],\ \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos(nx).}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

On prend $\alpha = z$ et $x = 0$ dans la formule précédente et on obtient $1 = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$ $(*)$. Maintenant,

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) = 0 \Leftrightarrow e^{i\pi z} = e^{-i\pi z} \Leftrightarrow e^{2i\pi z} = 1 \Leftrightarrow 2i\pi z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}.$$

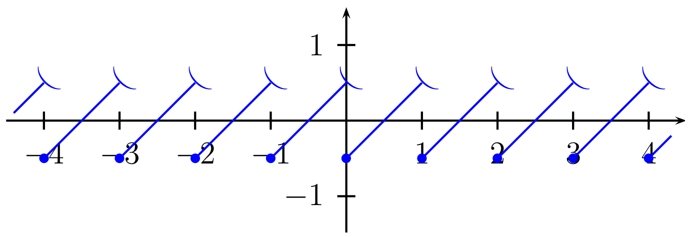
Puisque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\sin(\pi z) \neq 0$ et l'égalité $(*)$ peut s'écrire $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$.

De même, en prenant $\alpha = z$ et $x = \pi$, on obtient $\cos(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ et donc $\pi\operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$.

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ et } \pi\operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.}$$

Correction de l'exercice 4201 ▲

La fonction f est 1-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



La fonction f a mêmes coefficients de FOURIER que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ qui est impaire. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{1} \int_0^1 f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{1}\right) dt = \int_0^1 (2t-1)\sin(2n\pi t)\, dt \\ &= \left[-\frac{(2t-1)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\, dt = \left(-\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi}\right) + 0 \\ &= -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

La fonction f est de plus de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de DIRICHLET, en tout réel x, la série de FOURIER de f converge et a pour pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ f(x) = x - E(x) - \frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}.}$$

10. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f_p) &= 2\int_0^1 f(pt)\sin(2n\pi t)\, dt = 2\int_0^p f(u) \sin\left(2n\pi \frac{u}{p}\right) \frac{du}{p} \\ &= \left[-\frac{(2t-1)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\, dt = \left(-\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi}\right) + 0 \\ &= -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

Remarque. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1] \setminus \left\{\frac{k}{p},\ k \in [\![0,p]\!]\right\}$. Alors $px \notin \mathbb{Z}$ et donc

$$f_p(x) = f(px) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2np\pi x)}{n\pi} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,p} \sin(2k\pi x)$$

où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $b_{k,p} = \begin{cases} 0 \text{ si } k \notin p\mathbb{Z} \\ -\frac{1}{\frac{k}{p}\pi} \text{ si } k \in p\mathbb{Z} \end{cases}$ mais malheureusement, on ne peut pas récupérer ces coefficients car la série obtenue ne converge pas normalement.

$$\boxed{\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \int_0^1 f_q(x) f_q(x)\, dx = \frac{(\mathrm{PGCD}(p,q))^2}{12pq}.}$$

Correction de l'exercice 4202 ▲

(a) $\frac{\pi}{n+1}$.

(b) Somme de Riemman : $\ell = \int_{t=0}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Correction de l'exercice 4203 ▲

$\sup\limits_{[\alpha,\beta]} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geqslant \frac{\beta - \alpha}{2\pi}$.

Correction de l'exercice 4204 ▲

S'il y a convergence uniforme : $\|a_n \sin nx + \cdots + a_p \sin px\|_\infty \to 0$ lorsque $n, p \to \infty$.
On prend $x = \frac{\pi}{2p}$: $0 \leqslant \frac{a_p}{p}(n + \cdots + p) \leqslant \frac{1}{p}(na_n + \cdots + pa_p) \to 0$ lorsque $n, p \to \infty$. $n = [p/2] \Rightarrow$ cqfd.
Si $na_n \to 0$: Soit $x \in]0, \pi]$ et n tel que $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n-1}$.
Transformation d'Abel : $|a_n \sin nx + \cdots + a_p \sin px| \leqslant \frac{2a_n}{\sin x/2} \leqslant \frac{2na_n}{\pi}$,
et $|a_k \sin kx + \cdots + a_{n-1} \sin(n-1)x| \leqslant (ka_k + \cdots + (n-1)a_{n-1})x \leqslant \frac{n-k}{n-1} a_k \leqslant 2a_k$.

Correction de l'exercice 4206 ▲

(a) $R(n) = \frac{a}{n} + S(n)$ avec $\deg S \leqslant -2$. Donc $f(x) = R(0) + 2ia\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(S(n)e^{inx} + S(-n)e^{-inx})$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) $R(n) = \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k} + S(n)$ avec $\deg S \leqslant -k-1 \Rightarrow f(x) = R(0) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_k f_k(x) + g(x)$ avec $f_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx} + (-1)^p e^{-inx}}{n^p}$ et g de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. $f_p' = if_{p-1}$ et f_1 est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ donc f_p aussi.

Correction de l'exercice 4207 ▲

(a) $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

(b) Soit $P(n) = an^2 + bn + c$. Alors $f(x) - 4ag(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn+c}{an^4 + bn^3 + cn^2} \cos nx$.

Correction de l'exercice 4208 ▲

(a) $k_n(x) = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1 - \cos x)} = \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{(n+1)\sin^2(x/2)}$.

(b)

Correction de l'exercice 4211 ▲

(a) Immédiat. La fonction prolongée est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^2$ par morceaux.

(b) On décompose f en série de Fourier : $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)$ avec $c_n = 2\int_{u=0}^{1} f''(u)\sin(n\pi u)\,du$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient : $\|f\|_\infty^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\pi^4}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\right) = \frac{2\zeta(4)}{\pi^4}\|f''\|_2^2 = \frac{\|f''\|_2^2}{45}$.

Autre démonstration sans utiliser les séries de Fourier : pour $x \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{t=0}^{x} f'(t)\,dt = xf'(x) - \int_{t=0}^{x} tf'(t)\,dt\\
f(x) &= \int_{t=1}^{x} f'(t)\,dt = (x-1)f'(x) - \int_{t=1}^{x} (t-1)f'(t)\,dt\\
f(x) &= (1-x)f(x) + xf(x) = \int_{t=0}^{x} t(x-1)f''(t)\,dt + \int_{t=x}^{1} x(t-1)f''(t)\,dt\\
&= \int_{t=0}^{1} \varphi(x,t)f''(t)\,dt. \text{ avec } \varphi(x,t) = xt - \min(x,t).
\end{aligned}$$

On en déduit $|f(x)|^2 \leqslant \|f''\|_2^2 \int_{t=0}^{1}\varphi(x,t)^2\,dt = \frac{x^2(x-1)^2}{3}\|f''\|_2^2 \leqslant \frac{\|f''\|_2^2}{48}$.

Correction de l'exercice 4212 ▲

Parseval pour f et f'. Égalité ssi $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Correction de l'exercice 4213 ▲

(a) Développer f, f' et g' en séries de Fourier et appliquer l'inégalité $2|\overline{a}b| \leqslant |a|^2 + |b|^2$. Il y a égalité si et seulement si f' et g' sont CL de cos et sin.

(b) On paramètre par une abscisse curviligne : $x = f(t)$, $y = g(t) \Rightarrow \mathscr{A} = \int_0^{2\pi} fg' \leqslant \int_0^{2\pi}\frac{f'^2+g'^2}{2} = \pi$.

Correction de l'exercice 4217 ▲

On pose $g(t) = f(a|t|/\pi)$ pour $t \in [-\pi,\pi]$, prolongée par 2π-périodicité. Alors g est paire, continue, et tous ses coefficients de Fourier sont nuls donc $g = 0$.

Correction de l'exercice 4221 ▲

(a) $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

(b)

Correction de l'exercice 4222 ▲

$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}$.

Cette série converge et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ solution de l'équation.

Unicité : les solutions de l'équation homogène sont combinaison de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} et e^{-j^2x} donc non π-périodiques.

Correction de l'exercice 4223 ▲

$k \notin \mathbb{Z}$: $y = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)} + a\cos kx + b\sin kx$.

$k \in \mathbb{Z}$: remplacer $\frac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)}$ par $\frac{x\cos kx}{2k^3}$.

Correction de l'exercice 4224 ▲

(a) Développer f en série de Fourier.

(b) Densité des polynômes trigonométriques dans $\mathscr{C}^0$.

(c) $f(t) = \sin^2(\pi t)$, $\alpha = \frac{1}{\pi}$, $x = 0$: $S_n = \sin^2 1 + \dots + \sin^2 n \sim \frac{n}{2}$.
Transformation d'Abel : $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 n}{n} = -\sin^2 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{S_k}{k(k-1)} + \frac{S_N}{N} \to +\infty$ lorsque $N \to \infty$. Remarque : on a un raisonnement plus simple en écrivant $2\sin^2(n) = 1 - \cos(2n)$.

Correction de l'exercice 4225 ▲

Intégration à $x' - x$ constant : $a_k = \int_{y=-1}^{1} e^{-|y|^\beta}(1-|y|)e^{-2ik\pi y}\,dy$ est le $2k$-ème coefficient de Fourier de la fonction f, 2-périodique, telle que $f(y) = e^{-|y|^\beta}(1-|y|)$ si $-1 \leqslant y \leqslant 1$ donc le k-ème coefficient de Fourier de g, 1-périodique, telle que $g(y) = \frac{1}{2}(f(y) + f(y+1))$. Soit g_n la n-ème somme partielle de la série de Fourier de g, $g_n(y) = \sum_{|k| \leqslant n} a_k e^{2ik\pi y}$.
On a par convergence normale de la série de Fourier de g : $\sum_{|k|>n \text{ ou } |\ell|>n} a_k a_\ell = g^2(0) - g_n^2(0)$.

$$\begin{aligned}
g(0) - g_n(0) &= \int_{y=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{g(0)-g(y)}{\sin \pi y} \sin((2n+1)\pi y)\,dy \\
&= 2\int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \frac{g(0)-g(y)}{\sin \pi y} \sin((2n+1)\pi y)\,dy \\
&= 2\Big[-\frac{g(0)-g(y)}{\sin \pi y}\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\Big]_{y=0}^{\frac{1}{2}} + 2\int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dy}\Big(\frac{g(0)-g(y)}{\sin \pi y}\Big)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,dy \\
&= \frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2} + \int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \mathrm{fctcontinue}(y)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,dy \\
&\sim \frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}.
\end{aligned}$$

$g(0) + g_n(0) \to 2g(0) = 1$ (lorsque $n \to \infty$) d'où $\sum_{|k|>n \text{ ou } |\ell|>n} a_k a_\ell \sim \frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}$.

Correction de l'exercice 4226 ▲

(a) Si $f = 0$ alors $c_n = 0$ pour tout n par intégration terme à terme. Donc une fonction $f \in E$ possède un unique développement trigonométrique et $\|f\|$ est bien défini. Alors E est isomorphe à $\ell^1(\mathbb{Z})$ qui est un espace vectoriel normé complet.

(b) Produit de convolution de deux $\mathbb{Z}$-suites sommables.

(c) i. $z_0 = \varphi(x \mapsto e^{2i\pi x})$. On a $|z_0| = 1$ car la suite $(\varphi(x \mapsto e^{2in\pi x})_{n\in\mathbb{Z}})$ est bornée.
ii.

Correction de l'exercice 4227 ▲

$u_0 + \dots + u_n = 1 + (-1)^n \int_{t=0}^{1} \frac{\cos((n+1)t^2)}{\cos(t^2)}\,dt = 1 + (-1)^n \int_{u=0}^{1} \frac{\cos((n+1)u)}{2\cos(u)\sqrt{u}}\,du \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4228 ▲

(a) Si f est $\mathscr{C}^1$ 2π-périodique alors f' est continue, 2π-périodique de moyenne nulle donc $D(E_0^1) \subset E_0$.
Réciproquement, si $g \in E_0$ alors toutes les primitives de g sont 2π-périodiques de classe $\mathscr{C}^1$ et il y en a exactement une qui a une valeur moyenne nulle (une seule possibilité de régler la constante).

(b) Non (et ceci quelle que soit la norme) car le spectre de D n'est par borné.

(c) $\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k(f)|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |ikc_k(f)|^2 = \|f'\|^2$.

(d) Idem, $|||D^{-1}_{|E_n}||| = \frac{1}{n+1}$.

Correction de l'exercice 4229 ▲

On a $c_0(g) = c_1(g) = c_{-1}(g) = 0$, donc g est orthogonale à tout polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à 1. Si g est de signe constant sur $]0,2\pi[$, on contredit $c_0(g) = 0$. Donc g a au moins une racine $a \in]0,2\pi[$. Si g n'a pas d'autre racine dans $]0,2\pi[$ alors g est de signes constants opposés sur $]0,a[$ et $]a,2\pi[$. Mais alors $g(t)(\cos(t-a/2)-\cos(a/2))$ est de signe constant sur la réunion de ces intervalles, c'est absurde. Donc g a une deuxième racine dans $]0,2\pi[$, par exemple $b \in]a,2\pi[$. Si g n'a pas d'autre racine sur $]0,2\pi[$ alors g est de signes constants sur $]0,a[$, $]a,b[$ et $]b,2\pi[$ et les signes alternent. On obtient une nouvelle contradiction car alors $g(t)(\cos(t-(a+b)/2)-\cos((b-a)/2))$ est de signe constant sur la réunion de ces intervalles. Ainsi g admet une troisième racine, par exemple $c \in]b,2\pi[$. Enfin, si l'on suppose que g n'a pas d'autre racine sur $]0,2\pi[$ alors on a $g(t) > 0$ sur $]0,a[$ et $]b,c[$ et $g(t) < 0$ sur $]a,b[$ et $]c,2\pi[$ ou l'inverse. Dans les deux cas, on en déduit que $g(0) = g(2\pi) = 0$.

Correction de l'exercice 4230 ▲

(a) • Puisque f est impaire, $f(0) = 0$. Puisque f est impaire et 2π-périodique, $-f(\pi) = f(-\pi) = f(\pi)$ et donc $f(\pi) = 0$. Puisque f est 2π-périodique, pour $k \in \mathbb{Z}$, $f(2k\pi) = f(0) = 0$ et $f((2k+1)\pi) = f(\pi) = 0$. Finalement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k\pi) = 0$.

Soit $x \in]-\pi,0[$. Puisque f est impaire, $f(x) = -f(-x) = -\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et donc $\forall x \in]-\pi,\pi[$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi < x-2k\pi < \pi$ et puisque f est 2π-périodique, $f(x) = f(x-2k\pi) = \sin\left(\frac{x-2k\pi}{2}\right) = (-1)^k \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. De plus, $-\pi < x-2k\pi < \pi \Rightarrow k < \frac{x+\pi}{2\pi} < k+1$ et $k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ (-1)^k \sin\left(\frac{x}{2}\right) \text{ où } k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right) \text{ si } x \notin \pi\mathbb{Z} \end{cases}.}$$

(b) • Soit $x \in [-\pi,0]$. Puisque f est paire, $f(x) = f(-x) = \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)$ et donc $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $f(x) = \sin\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi < x-2k\pi \leqslant \pi$ et puisque f est 2π-périodique, $f(x) = f(x-2k\pi) = \sin\left(\left|\frac{x-2k\pi}{2}\right|\right)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left(\left|\frac{x}{2}-k\pi\right|\right) \text{ où } k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right).}$$

Correction de l'exercice 4231 ▲

A 1.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a)) \\
&= \sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\Big[\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a)) \\
&\qquad\qquad + \phi^{(n-m)}(t)(z-a)f^{(m+1)}(a+t(z-a))\Big] \\
&= \sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a)) \\
&\qquad\qquad + \sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^{m+1}\phi^{(n-m)}(t)f^{(m+1)}(a+t(z-a))
\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice de sommation $m = m' + 1$ dans la deuxième somme ; tous les termes s'éliminent deux à deux, à l'exception du premier terme de la première somme et du dernier terme de la deuxième somme, d'où le résultat demandé.

2.a. Plus généralement, on a le résultat suivant : si une fonction f est nulle en zéro et de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant zéro, $g(t) = f(t)/t$ est prolongeable par continuité en zéro et son prolongement est de classe C^n. Gardons nous de déduire fallacieusement ce résultat de l'existence d'un développement limité d'ordre n de g. On montre à l'aide d'un développement limité d'ordre 1 de f que g est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{g}(0) = f'(0)$. Par ailleurs, g est de classe C^{n+1} sur $I\backslash\{0\}$. Faisons l'hypothèse de récurrence $g^{(k-1)}(t) = \frac{f^{(k)}(0)}{k} + \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}\frac{t}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!} + o(t^{n-k+1})$ $(1 \leqslant k \leqslant n,\ t \neq 0)$. En dérivant k fois l'identité $f(t) = tg(t)$, on obtient que $\forall t \neq 0\ \ g^{(k)}(t) = \frac{f^{(k)}(t) - kg^{(k-1)}(t)}{t}$. Or $f^{(k)}(t) = f^{(k)}(0) + f^{(k+1)}(0)\frac{t}{1!} + \cdots + f^{(n+1)}(0)\frac{t^{n+1-k}}{(n-k)!} + o(t^{n+1-k})$. En substituant ces développements limités dans l'identité précédente, on montre que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang suivant, donc pour tout entier k de 1 à $n+1$. Faisons l'hypothèse de récurrence que $g^{(k)}(0)$ existe et est égale à $f^{(k+1)}(0)/(k+1)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Du développement limité de $g^{(k)}$ (tronqué à l'ordre 1) et de l'hypothèse de récurrence, il résulte que $g^{(k)}$ est continue et dérivable en zéro et que, si $k < n$, $g^{(k+1)}(0) = f^{(k+2)}(0)/(k+2)$, ce qui prouve par récurrence que g est n fois continument dérivable sur I.

Par conséquent, $t \mapsto \frac{e^t-1}{t}$ est prolongeable par continuité en une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Cette fonction ne s'annulant jamais, son inverse est également définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}$ est paire car

$$\begin{aligned}\frac{-t}{e^{-t}-1} + \frac{-t}{2} &= \frac{-te^t}{1-e^t} - \frac{t}{2}\\ &= \frac{te^t - t + t}{e^t - 1} - \frac{t}{2}\\ &= \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Donc le développement limité de $\frac{t}{e^t-1}$, dont l'existence est garantie par le fait que la fonction est indéfiniment dérivable, est de la forme demandée par l'énoncé.

Par conséquent

$$\frac{t}{e^t-1}(e^{zt}-1) = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{b_1t^2}{2!} + \frac{b_2t^4}{4!} + \cdots + \frac{b_Nt^{2N}}{(2N)!} + o(t^n)\right) \times\left(zt + \frac{z^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{z^nt^n}{n!} + o(t^n)\right)$$

et $\phi_n(z)/n!$ est le coefficient de t^n dans ce développement :

$$\phi_n(z)/n! = \frac{z^n}{n!} - \frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{b_1}{2!}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{b_2}{4!}\frac{z^{n-4}}{(n-4)!} + \cdots + \frac{b_N}{(2N)!}\frac{z^{n-2N}}{(n-2N)!},$$

d'où l'expression de ϕ_n demandée.

2.b.

$$\begin{aligned}\phi_n(z+1) - \phi_n(z) &= \frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\left(t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1} - t\frac{e^{(z+1)t}-1}{e^t-1}\right)\\ &= \frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\left(te^{zt}\right)\end{aligned}$$

Comme $t \mapsto te^{zt}$ est de classe C^∞ et que son développement limité d'ordre n en $t = 0$ est $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{k!}t^{k+1} + o(t^n)$, il vient $\phi_n(z+1) - \phi_n(z) = nz^{n-1}$.

3. (i) est obtenue en dérivant autant de fois que nécessaire l'identité précédente et en donnant à z la valeur zéro. (ii), (iii), (iv), (v) et (vi) sont des conséquences immédiates de 2.a.

4.a. On applique la question 1 au polynôme ϕ_{2n} de degré 2n et on intègre entre 0 et 1. Il vient

$$\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m(z-a)^m\Big[\phi_{2n}^{(2n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\phi_{2n}^{(2n-m)}(0)f^{(m)}(a)\Big]$$

$$=-(2n)!\big(f(z)-f(a)\big)+(z-a)^{2n+1}\int_0^1\phi_{2n}(t)f\Big(a+(z-a)t\Big)dt$$

en tenant compte du fait que $\phi_{2n}^{(2n)}=(2n)!$

On obtient l'égalité demandée en substituant aux dérivées itérées de ϕ_{2n} les expressions déterminées dans la question 3.

4.b. Appliquons la question précédente en remplaçant f par une primitive de F et z par ω. Il vient

$$\begin{aligned}0 \quad = \quad & \int_a^{a+\omega}F(t)dt-\frac{\omega}{2}(F(a+\omega)+F(a))+\sum_{m=1}^{n-1}b_m\frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\Big[F^{(2m-1)}(a+\omega)-F^{(2m-1)}(a)\Big]\\ & -\frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\phi_{2n}(t)F^{(2n)}\Big(a+(z-a)t\Big)dt\end{aligned}$$

Lorsqu'on somme les égalités obtenues en remplaçant a successivement par lui-même, $a+\omega$, …, $a+(r-1)\omega$, on obtient le résultat demandé, certains termes se simplifiant deux à deux.

B 1. On a pour tout $x>0$ fixé

$$u_k(x)=\ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big)+x\ln\Big(1-\frac{k}{k+1}\Big)=\frac{x}{k}-\frac{x}{k+1}+O(\frac{1}{k^2})=O(\frac{1}{k^2})$$

Donc la série $\sum_{k\geqslant 1}u_k(x)$ converge.

2.

$$\begin{aligned}&\ln(x+1)+\sum_{k=1}^{n}u_k(x+1)\\ &\qquad=\ln(x+1)+\sum_{k=2}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}\Big[-\ln(k)+(x+1)\big(\ln(k)-\ln(k+1)\big)\Big]\\ &\qquad=\sum_{k=1}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}x(\ln(k)-\ln(k+1))-\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)\\ &\qquad=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)+\ln(x+n+1)-\ln(n+1)\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln(x+n+1)-\ln(n+1)=\ln\left(\frac{x+n+1}{n+1}\right)$ tend vers zéro ; on obtient donc par passage à la limite l'égalité souhaitée.

3. Pour tout $k\geqslant 1$ entier, $u_k(1)=0$, donc $G(1)=0$ et on prouve aisément par récurrence à l'aide de la question précédente que pour tout entier strictement positif n, $G(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$, égalité de laquelle on déduit immédiatement le résultat demandé.

4. immédiat

5. C'est une application directe de la question A.4.b.
$T_{p,n}(x,y)=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^1\phi_{2p}(t)\sum_{m=0}^{n-1}f^{(2p)}(m+t)dt=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^n\phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$

6. L'intégrande dans l'expression de $T_{p,n}(x,y)$ est majorée en valeur absolue par le produit de la borne supérieure de la fonction continue ϕ_{2p} sur le segment $[0,1]$ et de la valeur absolue de $f^{(2p)}$.

On prouve aisément par récurrence que $f^{(m)}(t)=(-1)^{m-1}\left(\frac{1}{(y+t)^m}-\frac{1}{(x+t)^m}\right)=O\left(\frac{1}{t^{m+1}}\right)$ (quand $t\to+\infty$). Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$ est absolument convergente, ce qui prouve que $T_{p,n}(x,y)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

7. D'après les questions 4 et 5,

$$\begin{aligned}
G(y)-G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\Big[\ln(y+k)-\ln(x+k)+(y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\Big]+\ln y-\ln x \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}[\ln(y+k)-\ln(x+k)]+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\Bigg\{(y+n)\ln(y+n)-(y+n)-y\ln y+y-(x+n)\ln(x+n) \\
&\quad +(x+n)+x\ln x-x+\frac{1}{2}\big(\ln y-\ln x+\ln(y+n)-\ln(x+n)\big) \\
&\quad +\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n)-\frac{1}{y^{2h-1}}+\frac{1}{x^{2h-1}}\big)+T_{p,n}(x,y)+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\Bigg\}
\end{aligned}$$

Or $(y+n)\ln(y+n)-(x+n)\ln(x+n)=(y-x)\ln n+y-x+o(1)$ quand $n\to+\infty$. On obtient donc après simplifications $G(y)-G(x)=g(x)-g(y)+R_n(x,y)$, ce qu'il fallait démontrer.

8. D'après la question 5 et l'expression des dérivées successives de f donnée dans la question 6, $T_{p,n}(x,y)$ est majoré en valeur absolue par le produit d'une constante et de l'intégrale $\int_0^n\left|\frac{1}{(y+t)^{2p}}-\frac{1}{(x+t)^{2p}}\right|dt$. $|R_p(x,y)|$ est majoré de la même façon en remplaçant la borne finale d'intégration n par $+\infty$. L'argument de la valeur absolue gardant un signe constant, l'intégrale majorante est égale à $\frac{1}{2p-1}\left[\left|\frac{1}{(y+t)^{2p-1}}-\frac{1}{(x+t)^{2p-1}}\right|\right]_0^{+\infty}$ et on obtient ainsi l'estimée souhaitée.

9. On a $g(m)=m\ln m-m-\frac{1}{2}\ln m+o(1)$ et $G(m)=-\ln(m-1)!=-\ln m!+\ln m$ pour m entier, donc le résultat demandé découle immédiatement de la formule de Stirling $m!\sim\sqrt{2\pi}m^{m+\frac{1}{2}}e^{-m}$.

10. Le résultat demandé est obtenu à partir de l'égalité de la question 7 par passage à la limite. On fait tendre x vers $+\infty$ par valeurs entières et on tient compte de l'estimée obtenue dans la question 8.

11. En calculant les premiers termes du développement limité de la question A.2.a, on trouve $b_1=1/6$, $b_2=-1/30$, $b_3=1/42$. Des questions 3 et 10, il résulte que

$$\begin{aligned}
\ln(m!) &= -G(m)+\ln m \\
&= m\ln m-m+\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{12}\frac{1}{m}-\frac{1}{360}\frac{1}{m^3}+\frac{1}{1260}\frac{1}{m^5}+O(\frac{1}{m^7})
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4232 ▲

(a)

(b) $\|f_n\|_\infty=f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)\sim en^{\alpha-1}$.

Correction de l'exercice 4235 ▲

(a)

(b) Intégrale constante = 1.

Correction de l'exercice 4236 ▲

(a) e^{-x}.

(b)

(c)

(d)

Correction de l'exercice 4237 ▲

CVU sur tout compact par encadrement du logarithme.

Correction de l'exercice 4240 ▲

(a) $y_n = (n+1)\left(e^x - e^{nx/(n+1)}\right)$.

(b) $y = xe^x$.

(c)

Correction de l'exercice 4241 ▲

$\left(|f_n(x)|\right)$ décroît donc tend vers L. On extrait une sous suite $(f_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\ell \Rightarrow |\ell| = L$. La sous-suite $(f_{\varphi(n)+1})$ converge vers $f(\ell) \Rightarrow |f(\ell)| = L \Rightarrow L = 0$.

Correction de l'exercice 4242 ▲

(a) $\ell(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t = 0 \\ \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} \text{ si } t > 0. \end{cases}$

(b)

(c) Accroissements finis.

(d)

Correction de l'exercice 4244 ▲

$f_n(t) \to \sqrt{t}$ par valeurs croisantes, il y a convergence uniforme.

Correction de l'exercice 4245 ▲

$P_n\left(t+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{t}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{t^2}{4}-1\right)^k$.

Correction de l'exercice 4246 ▲

(a) Polynôme de Lagrange.

(b)

Correction de l'exercice 4247 ▲

(a) Il y a convergence simple vers la fonction nulle en 0 et 1 et égale à $1/2$ ailleurs. La convergence est uniforme sur tout $[a,b] \subset]0,1[$.

(b) La question précédente donne le résultat pour $1/2$, il suffit alors d'utiliser le théorème de Weierstrass et les nombres dyadiques.

Correction de l'exercice 4250 ▲

(a) Pour tout entier naturel n, f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

Convergence simple sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x = 0$, pour tout entier naturel n, $f_n(x) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

• Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx}$ et de nouveau $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction nulle.}}$$

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. On peut noter tout de suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ et donc $\|f_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}$. On en déduit que $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction nulle.}}$$

Si on n'a pas remarqué ce qui précède, on étudie la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ (f_n étant impaire) dans le but de déterminer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif x, $f_n'(x) = n\frac{(1+n^2x^2)-x(n^2x)}{(1+n^2x)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x)^2}$. Par suite, la fonction f_n est croissante sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

Puisque la fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}^+$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

Convergence uniforme et localement uniforme sur $]0, +\infty[$**.** La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge toujours pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$ car pour $n \geqslant 1$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{2}$.

Soit a un réel strictement positif fixé. Soit $n > \frac{1}{a}$. On a $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. Par suite, pour tout réel x de $[a, +\infty[$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$.

Donc $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0| = fn(a)$ pour $n > \frac{1}{a}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0| = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 0$ et en particulier converge localement uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$ mais ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.

(b) **Convergence simple sur $\mathbb{R}$.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante $f : x \mapsto 1$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$. $\lim_{x\to-\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Par suite, pour tout entier naturel n, la fonction $|f_n - f|$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 1$ et donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Convergence localement uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n = f_n - f$. La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$g_n'(x) = e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) = -\frac{e^{-x}x^n}{n!}.$$

Si n est pair, la fonction g_n est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

Si n est impair, la fonction g_n est croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0.

Dans les deux cas, si $x \in [a, b]$, $|g_n(x)| \leqslant \mathrm{Max}\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\}$ avec égalité effectivement obtenue pour $x = a$ ou $x = b$. Donc

$$\sup_{x\in[a,b]} |gn(x)| = \mathrm{Max}\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\} = \frac{g_n(a)+g_n(b)+|g_n(a)-g_n(b)|}{2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b]$ contenu dans $\mathbb{R}$ ou encore la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers la fonction $f : x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Pour x réel et n entier naturel, on pose $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
Convergence simple. Soit x réel fixé. $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow x \in 2\mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Si $x \notin 2\mathbb{Z}$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(n(1-x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow |1-x| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

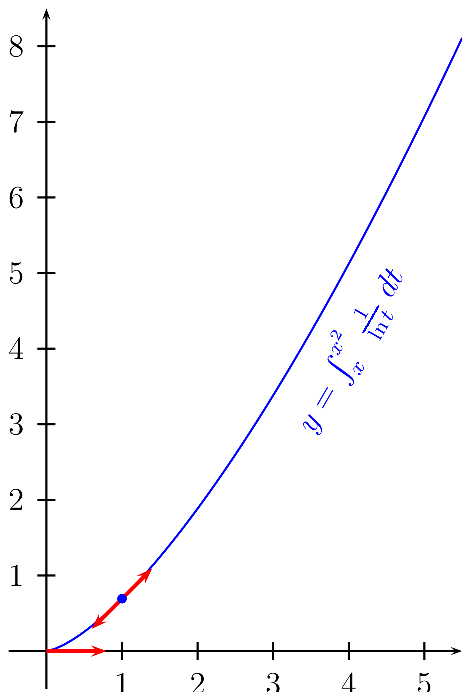
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,2]\cup 2\mathbb{Z}$.

Convergence uniforme sur $[0,2]$**.** Soit n un entier naturel non nul fixé.

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| \geqslant \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Cette dernière expression est équivalente à $\frac{\pi}{2e}$ en $+\infty$ et en particulier ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,2]$.



La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,2]$.

Correction de l'exercice 4251 ▲

Convergence simple sur $\mathbb{R}^+$**.** Soit x un réel positif fixé. Pour $n > x$, $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ et donc

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-x+o(1)).$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.
Convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$**.** Pour x réel positif et n entier naturel non nul, posons $g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n] \\ e^{-x} \text{ si } x > n \end{cases}$. Déterminons la borne supérieure de la fonction $|g_n|$ sur $[0,+\infty[$.
La fonction g_n est définie et continue sur R^+. Pour $x \geqslant n$, $0 < g_n(x) \leqslant e^{-n} = g_n(n)$.

Etudions la fonction g_n sur $[0,n]$. Pour $x \in [0,n]$, $g_n'(x) = -e^{-x} + \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}$.($g_n'(n)$ est la dérivée à gauche de la fonction g_n en n, mais on peut montrer qu'en fait la fonction g_n est dérivable en n pour $n > 1$).

La fonction g_n est continue sur le segment $[0,n]$ et admet donc sur $[0,n]$ un minimum et un maximum.

• La fonction g_n a un minimum égal à 0 atteint en 0. En effet, on sait que pour tout réel u, $e^u \geqslant 1+u$ (inégalité de convexité) et donc pour tout réel x de $[0,n]$, $e^{-x/n} \geqslant 1-\frac{x}{n} \geqslant 0$. Après élévation des deux membres de cette inégalité, par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $e^{-x} \geqslant \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ ou encore $g_n(x) \geqslant 0 = g_n(0)$.

• Pour $0 < x \leqslant n$, les inégalités précédentes sont strictes et la fonction $g_{n/[0,n]}$ admet son maximum dans $]0,n]$. De plus, $g_n'(n) = -e^{-n} < 0$ et puisque la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0,n]$, sa dérivée g_n' est strictement négative sur un voisinage à gauche de n. La fonction g_n est alors strictement décroissante sur ce voisinage et la fonction g_n admet nécessairement son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en un certain point x_n de $]0,n[$. En un tel point, puisque l'intervalle $]0,n[$ est ouvert, on sait que la dérivée de la fonction g_n s'annule. L'égalité $g_n'(x_n) = 0$ fournit $\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-x_n}$ et donc

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1-\left(1-\frac{x_n}{n}\right)\right)e^{-x_n} = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$

En résumé, pour tout réel positif x, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{x_n e^{-x_n}}{n}$ où x_n est un certain réel de $]0,n[$.

Pour u réel positif, posons $h(u) = ue^{-u}$. La fonction h est dérivable sur $/mbr^+$ et pour $u \geqslant 0$, $h'(u) = (1-u)e^{-u}$. Par suite, la fonction h admet un maximum en 1 égal à $\frac{1}{e}$. On a montré que

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1}{ne}$$

ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\{|g_n(x)|,\ x \geqslant 0\} \leqslant \frac{1}{ne}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \sup\{|g_n(x)|,\ x \geqslant 0\} = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers la fonction } x \mapsto e^{-x}.}$$

11. **Existence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.** La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Donc la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Par suite, I existe dans $\mathbb{R}$.

On est alors en droit d'espérer que $I = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x^2)\,dx$.

La fonction $x \mapsto f_n(x^2)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et nulle sur $[\sqrt{n},+\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto f_n(x^2)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx$.

Montrons que I_n tend vers I quand n tend vers $+\infty$.

$$|I-I_n| \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} |f(x^2)-f_n(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leqslant \sqrt{n}\times\frac{1}{ne} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{e\sqrt{n}} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = I$.

Calcul de la limite de I_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les changements de variables $x = u\sqrt{n}$ puis $u = \cos v$ fournissent

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx = \sqrt{n}\int_0^1 (1-u^2)^n\,du = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} v\,dv = \sqrt{n}W_{2n+1}$$

où W_n est la n-ème intégrale de WALLIS. On a déjà vu (exercice classique, voir fiches de Maths Sup) que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\times\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement, I_n tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Vous pouvez voir différents calculs de l'intégrale de GAUSS dans « Grands classiques de concours : intégration ».

Correction de l'exercice 4252 ▲

Posons $f = \lim_{n\to+\infty} P_n$.
Le critère de CAUCHY de convergence uniforme (appliqué à $\varepsilon = 1$) permet d'écrire

$$\exists N \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant N,\ \forall m \geqslant N,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_m(x)| \leqslant 1.$$

Pour $n \geqslant N$, les polynômes $P_N - P_n$ sont bornés sur $\mathbb{R}$ et donc constants. Par suite, pour chaque $n \geqslant N$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_N - P_n = a_n \quad (*)$. Puisque la suite (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$, La suite $(a_n) = (P_N(0) - P_n(0))$ converge vers un réel que l'on note a. On fait alors tendre n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$ et on obtient

$$f = P_N - a$$

On a montré que f est un polynôme.

Correction de l'exercice 4253 ▲

(a) **Convergence simple.** Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $x < 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.
- Si $x = 0$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = f_n(0) = 0$, la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.
- Si $x > 0$, $n^2 f_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}+3\ln n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas aussi, la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+.}$$

Convergence normale. La fonction f_0 est la fonction nulle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif x,

$$f_n'(x) = n(2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

La fonction f_n est positive sur $[0,+\infty[$, croissante sur $\left[0, \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$. On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(t)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^{-2}.$$

Par suite, la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement et donc

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}^+.}$$

Soit $a > 0$. Pour $n \geqslant \frac{4}{a^2}$, on a $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant a$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a,+\infty[$. Soit donc n un entier supérieur ou égal à $\frac{4}{a^2}$. Pour tout réel t supérieur ou égal à a, on a $|f_n(t)| = f_n(t) \leqslant f_n(a)$ et donc $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(t)| = f_n(a)$.
Comme la série numérique de terme général $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } a > 0, \text{ la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge normalement et uniformément sur } [a}$$

Convergence uniforme sur $[0,+\infty[$**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|R_n(t)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \geqslant f_{n+1}(t),$$

et donc $\sup_{t\in[0,+\infty[} |R_n(t)| \geqslant \sup_{t\in[0,+\infty[} |f_{n+1}(t)|4e^{-2}$. Par suite, $\sup_{t\in[0,+\infty[} |R_n(t)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n\in\mathbb{N}, \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}^+.}$$

(b) **Convergence simple.** Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est définie sur $]0,+\infty[$. Soit $x\in]0,+\infty[$. Puisque $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2} > 0$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge. Donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n\in\mathbb{N}^*, \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$$

Convergence normale. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction f_n est décroissante et positive sur $]0,+\infty[$. Donc $\sup_{x\in]0,+\infty} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n}$.Puisque la série numérique de terme général $\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, diverge

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n\in\mathbb{N}^*, \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}^+.}$$

Soit $a>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante et positive sur $5a,+\infty[$ et donc $\sup_{x\in[a,+\infty} |f_n(x)| = f_n(a)$.

Comme la série numérique de terme général $f_n(a)$, $n\in\mathbb{N}^*$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } a>0, \text{ la série de fonctions de terme général } f_n,\ n\in\mathbb{N}^*, \text{ converge normalement et uniformément sur}}$$

(c) **Convergence simple.** Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. Soit $x\in\mathbb{R}^+$.

• Si $x=0$, pour tout entier naturel n, $f_n(x) = f_n(0) = 0$. Dans ce cas, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.

• Si $x>0$, la suite $\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier $x>0$ et de raison $\frac{1}{x^2+1}\in]0,1[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante de limite nulle. Par suite, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

• Si $x<0$, puisque pour tout entier naturel n, $f_n(x) = -f_n(-x)$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.

Finalement

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n\in\mathbb{N}, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

Convergence normale. La fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ et donc la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Analysons la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 1$, sur $\mathbb{R}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $g_n = (-1)^n f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g_n'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} + x\times\frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

La fonction g_n est positive sur $\mathbb{R}^+$, croissante sur $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}},+\infty\right[$. Puisque la fonction g_n est impaire, on en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\times\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}.$$

Mais $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} = \exp\left(-(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$ et donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e\sqrt{2}\times\sqrt{n}} > 0.$$

Par suite, la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge et donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}.}$$

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, puisque la suite $\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante et de limite nulle, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x}{(1+x^2)^k}\right| \leqslant \left|(-1)^{n+1}\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\right| = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} = g_{n+1}(x) \leqslant g_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right),$$

cette inégalité restant valable pour $x<0$ par parité. Donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|R_n(x)| \leqslant g_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$. D'après ci-dessus,

$g_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et il en est de même de $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|R_n(x)|$. On a montré que

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 4254 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+ka} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{ka}\,dt = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right)dt = \int_0^1\frac{1}{1+t^a}\,dt + (-1)^n\int_0^1\frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,dt,$$

avec $\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{(n+1)a}\,dt = \frac{1}{1+(n+1)a}$. Par suite, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,dt = 0$. On en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{1+ka}$, $k \geqslant 0$, converge et que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+ka} = \int_0^1\frac{1}{1+t^a}\,dt.}$$

Correction de l'exercice 4256 ▲

(a)

(b) oui, par convolution.

Correction de l'exercice 4259 ▲

$|g_n(f_n(x)) - g(f(x))| \leqslant |g_n(f_n(x)) - g(f_n(x))| + |g(f_n(x)) - g(f(x))|$ et g est uniformément continue.

Correction de l'exercice 4261 ▲

Prendre une subdivision régulière de $[a,b]$ et encadrer f_n par les cordes associées.

Correction de l'exercice 4262 ▲

(a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1$,

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = (X+(1-X))^n = 1.$$

• Si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x$,

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} X^k(1-X)^{n-k} = X\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} X^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)}$$
$$= X\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} X^k(1-X)^{n-1-k} = X.$$

• Si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x(x-1)$, alors $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)X^k(1-X)^{n-k}$ et donc $B_1(f) = 0$. Pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$\tfrac{k}{n}\left(\tfrac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k} = -\tfrac{1}{n^2}k(n-k)\tfrac{n!}{k!(n-k)!} = -\tfrac{n-1}{n}\tfrac{(n-2)!}{(k-1)(n-k-1)!} = -\tfrac{n-1}{n}\binom{n-2}{k-1}.$$

Par suite,

$$B_n(f) = -\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1} X^k(1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=1}^{n-1} X^{k-1}(1-X)^{(n-2)-(k-1)}$$
$$= -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} X^k(1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X).$$

ce qui reste vrai pour n = 1.

ii. D'après la question précédente

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nX)^2X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2X^k(1-X)^{n-k} - 2nX\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kX^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-n)X^k(1-X)^{n-k} - n(2X-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kX^k(1-X)^{n-k}$$
$$+ n^2X^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$
$$= n^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} - n^2(2X-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k}$$
$$= -n(n-1)X(1-X) - n^2(2X-1)X + n^2X^2 = -nX^2 + nX = nX(1-X).$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Soient n un entier naturel non nul et α un réel strictement positif donné. Soit x un réel de $[0,1]$.
Notons A (resp. B) l'ensemble des entiers $k \in [\![0,n]\!]$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha$ (resp. $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha$). (Si A ou B sont vides, les sommes ci-dessous correspondantes sont nulles).

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|$$
$$\leqslant \sum_{k\in A}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}$$

f est continue sur le segment $[0,1]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Par suite, il existe $\alpha > 0$ tel que si x et y sont deux réels de $[0,1]$ tels que $|x-y| < \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. α est ainsi dorénavant fixé. Pour ce choix de α,

$$\sum_{k\in A}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0,1]$.

$$\sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}\leqslant 2M\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Mais si $k\in B$, l'inégalité $\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\alpha$ fournit $1\leqslant\frac{1}{\alpha^2n^2}(k-nx)^2$ et donc

$$\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant 1\leqslant\frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k\in B}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2n^2}\times nx(1-x)=\frac{1}{\alpha^2n}\left(\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)\leqslant\frac{1}{4\alpha^2n}.$$

En résumé, pour tout réel $x\in[0,1]$

$$|f(x)-B_n(f)(x)|\leqslant\tfrac{\varepsilon}{2}+2M\times\tfrac{1}{4\alpha^2n}=\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{M}{2\alpha^2n}.$$

Maintenant, puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{2\alpha^2n}=0$, il existe un entier naturel non nul N tel que pour $n\geqslant N$, $\frac{M}{2\alpha^2n}<\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geqslant N$, on a $|f(x)-B_n(f)(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. On a montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\ (n\geqslant N\Rightarrow|f(x)-(B_n(f))(x)|<\varepsilon,$$

et donc que

$$\boxed{\text{la suite de polynômes } (B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } f.}$$

(c) La question 2) montre le théorème de WEIERSTRASS dans le cas du segment $[0,1]$.
Soient $[a,b]$ un segment quelconque et f un application continue sur $[a,b]$.
Pour $x\in[0,1]$, posons $g(x)=f(a+(b-a)x)$. La fonction g est continue sur $[0,1]$ et donc il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers g sur $[0,1]$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $Q_n=P_n\left(\frac{X-a}{b-a}\right)$.
Soit $\varepsilon>0$. $\exists N\geqslant 1$ tel que $\forall n\geqslant N$, $\forall y\in[0,1]$, $|g(y)-P_n(y)|<\varepsilon$.
Soient $x\in[a,b]$ et $n\geqslant N$. Le réel $y=\frac{x-a}{b-a}$ est dans $[0,1]$ et

$$|f(x)-Q_n(x)|=|f(a+(b-a)y)-Q_n(a+(b-a)y)|=|g(y)-P_n(y)|<\varepsilon.$$

Ceci démontre que la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 4263 ▲

(a) Pour $x\in]-1,1[$ et n entier naturel non nul, posons $f_n(x)=\frac{x^n\sin(nx)}{n}$.
Soit $x\in]-1,1[$. Pour n entier naturel non nul, $|f_n(x)|\leqslant|x|^n$. Or, la série géométrique de terme général $|x|^n$, $n\geqslant 1$, est convergente et donc la série numérique de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente et en particulier convergente. On en déduit que $f(x)$ existe.

$$\boxed{f \text{ est définie sur }]-1,1[.}$$

Soit $a\in]0,1[$. Chaque f_n, $n\geqslant 1$, est de classe C^1 sur $[-a,a]$ et pour $x\in[-a,a]$,

$$f_n'(x)=x^{n-1}\sin(nx)+x^n\cos(nx).$$

Pour $x\in[-a,a]$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|f_n'(x)|\leqslant a^{n-1}+a^n\leqslant 2a^{n-1}.$$

Puisque la série numérique de terme général $2a^{n-1}$, $n \geqslant 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n', $n \geqslant 1$, est normalement et donc uniformément sur $[-a,a]$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers f sur $[-a,a]$,
- chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est de classe C^1 sur $[-a,a]$,
- la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $[-a,a]$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[-a,a]$ pour tout réel a de $]0,1[$ et donc sur $]-1,1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ et } \forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)).}$$

(b) Ainsi, pour $x \in]-1,1[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}e^{inx}\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-xe^{ix}}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}(1-xe^{-ix})}{x^2-2x\cos x+1}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{xe^{ix}(1-xe^{-ix})}{x^2-2x\cos x+1}\right)\\
&= \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2-2x\cos x+1}.
\end{aligned}$$

Mais, pour $x \in]-1,1[$,

$$\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)' = \frac{(\sin x + x\cos x)(1-x\cos x) - x\sin x(-\cos x + x\sin x)}{(1-x\cos x)^2} = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{(1-x\cos x)^2}.$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left(\arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)\right)' &= \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{(1-x\cos x)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)^2} = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{(1-x\cos x)^2 + x^2\sin^2 x}\\
&= \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2-2x\cos x+1} = f'(x).
\end{aligned}$$

Finalement, pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = 0 + \arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right) - \arctan(0) = \arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right).$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\sin(nx)}{n} = \arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right).}$$

Correction de l'exercice 4264 ▲

(a) Pour n entier naturel non nul, on note f_n la fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$. Pour tout réel x, $f(x)$ existe si et seulement si chaque $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, existe et la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $x \neq \frac{1}{n}$.

Soit donc $x \in D =]0,+\infty[\setminus \left\{\frac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Pour $n > \frac{1}{x}$, on a $\ln(nx) > 0$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{\ln(nx)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante à partir d'un certain et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et donc $f(x)$ existe.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est } D =]0,+\infty[\setminus \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.}$$

(b) **Limite de f en $+\infty$.** Soit $x>1$. Donc $f(x)$ existe. Pour tout entier naturel non nul n, $\ln(nx)>0$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{\ln(nx)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. On sait alors que la valeur absolue de $f(x)$ est majorée par la valeur absolue du premier terme de la série. Ainsi

$$\forall x>1,\ |f(x)|\leqslant\left|\frac{(-1)^0}{\ln(x)}\right|=\frac{1}{\ln x},$$

et en particulier

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.}$$

On peut noter de plus que pour $x>1$, $f(x)$ est du signe du premier terme de la série à savoir $\frac{1}{\ln(x)}$ et donc $\forall x\in]1,+\infty[$, $f(x)>0$.

Convergence uniforme sur $]1,+\infty[$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n alternée d'une série alternée, pour $x>1$ et n naturel non nul,

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\ln(kx)}\right|\leqslant\left|\frac{(-1)^n}{\ln((n+1)x)}\right|=\frac{1}{\ln((n+1)x}\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

Donc, pour tout entier naturel non nul, $\sup\limits_{x\in]1,+\infty[}|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{\ln(n+1)}$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in]1,+\infty[}|R_n(x)|=0$.

La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers sa somme sur $]1,+\infty[$.

Continuité sur $]1,+\infty[$. Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$ est continue sur $]1,+\infty[$ et donc f est donc continue sur $]1,+\infty[$ en tant que limite uniforme sur $]1,+\infty[$ d'une suite de fonctions continues sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]1,+\infty[.}$$

Limite en 1 à droite. Soit $n\geqslant 2$. Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $f_n(x)$ tend vers $\ell_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$. Puisque la série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 2$, converge uniformément vers sa somme sur $]1,+\infty[$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que la série numérique de terme général ℓ_n, $n\geqslant 2$ converge et que la fonction $x\mapsto f(x)-\frac{1}{\ln(x)}=\sum_{n=2}^{+\infty}f_n(x)$ tend vers le réel $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures ou encore

$$\boxed{f(x)\underset{x\to1^+}{=}\frac{1}{\ln x}+O(1)\text{ et en particulier, }\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=+\infty.}$$

(c) La série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 1$, converge simplement vers la fonction f sur $]1,+\infty[$. De plus chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>1$,

$$f_n'(x)=\frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}.$$

Il reste à vérifier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n' sur $]1,+\infty[$.
Soit $x>1$. La série de terme général $f_n'(x)$ est alternée car son terme général est alterné en signe et sa valeur absolue à savoir $\frac{1}{x\ln^2(nx)}$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$ en décroissant. Donc, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x\ln^2(kx)}\right|\leqslant\left|\frac{(-1)^{n+1}}{x\ln^2((n+1)x)}\right|=\frac{1}{x\ln^2((n+1)x)}\leqslant\frac{1}{\ln^2(n+1)}.$$

Par suite, $\sup\limits_{x\in]1,+\infty[}|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{\ln^2(n+1)}$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in]1,+\infty[}|R_n(x)|=0$. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n', $n\geqslant 1$, converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 1$, converge simplement vers f sur $]1,+\infty[$,
- chaque fonction f_n, $n\geqslant 1$, est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]1,+\infty[\text{ et } \forall x>1,\ f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}.}$$

Pour $x>1$, puisque la série de somme $f'(x)$ est alternée, $f'(x)$ est du signe du premier terme de la somme à savoir $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. Par suite, $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) \leqslant 0$ et f est donc strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur }]1,+\infty[.}$$

Correction de l'exercice 4265 ▲

(a) **Convergence simple.** Soit $t\in\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, $1+\frac{t^2}{n(1+t^2)} \geqslant 1>0$ et donc $f_n(t)$ existe. Ensuite, $\ln\left(1+\frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)>0$ et donc la suite numérique $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée en signe. De plus, $|f_n(t)|=\ln\left(1+\frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$ et la suite $(|f_n(t)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant.

On en déduit que la série de terme général $f_n(t)$, $n\geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n\geqslant 1, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

On pose alors $f=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Convergence uniforme. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour tout réel t on a

$$|R_n(t)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leqslant |f_{n+1}(t)| = \ln\left(1+\frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)}\right)=\ln\left(1+\frac{t^2+1-1}{(n+1)(1+t^2)}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n$$

$$\leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right),$$

et donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|R_n(t)|\leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=0$, on a encore $\lim_{n\to+\infty}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|R_n(t)|=$ 0 et on a montré que

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n\geqslant 1, \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Continuité. Puisque chaque fonction f_n, $n\geqslant 1$, est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

(b) D'après le théorème d'interversion des limites, f a une limite réelle en $+\infty$ et

$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty} f_n(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ (voir l'exercice 1942, 5)).

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f_n(t)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Correction de l'exercice 4266 ▲

Domaine de définition. Soit $t\in\mathbb{R}$. Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(t)$ existe et de plus $f_n(t)=\frac{\arctan(nt)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série numérique de terme général $f_n(t)$, $n\geqslant 1$, converge absolument et en particulier converge. On a montré que

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Parité. Pour tout réel t,

$$f(-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(-nt)}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{n^2} = -f(t).$$

$$\boxed{f \text{ est impaire.}}$$

Convergence normale. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, $|f_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ et donc pour tout entier naturel non nul n,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}.$$

Comme la série numérique de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$, $n \geqslant 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Limite de f en $+\infty$. Puisque la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et que chaque fonction f_n a une limite réelle quand t tend vers $+\infty$ à savoir $\ell_n = \frac{\pi}{2n^2}$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que f a une limite réelle en $+\infty$ et que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi^3}{12} \text{ et } \lim_{t\to-\infty} f(t) = -\frac{\pi^3}{12}.}$$

Continuité. Puisque chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $\mathbb{R}$ et que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Dérivation. Soit $a > 0$. Chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant a$,

$$f_n'(t) = \frac{n}{n^2(1+n^2t^2)} = \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $\sup\limits_{t\in[a,+\infty[} |f_n'(t)| = f_n'(a) = \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$. Puisque $\frac{1}{n(1+n^2a^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2n^3} > 0$, la série de terme général $\frac{1}{n(1+n^2a^2)}$ converge et par suite, la série de fonctions de terme général f_n', $n \geqslant 1$, converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers f sur $[a, +\infty[$,
- chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et puisque f est impaire

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^*,\ f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.}$$

Dérivabilité en 0. La fonction f' est décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc la fonction f' admet une limite en 0^+ élément de $]-\infty, +\infty]$. Pour $t > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a $f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}$ et quand t tend vers 0, on obtient

$$\lim_{\substack{t\to0\\t>0}} f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

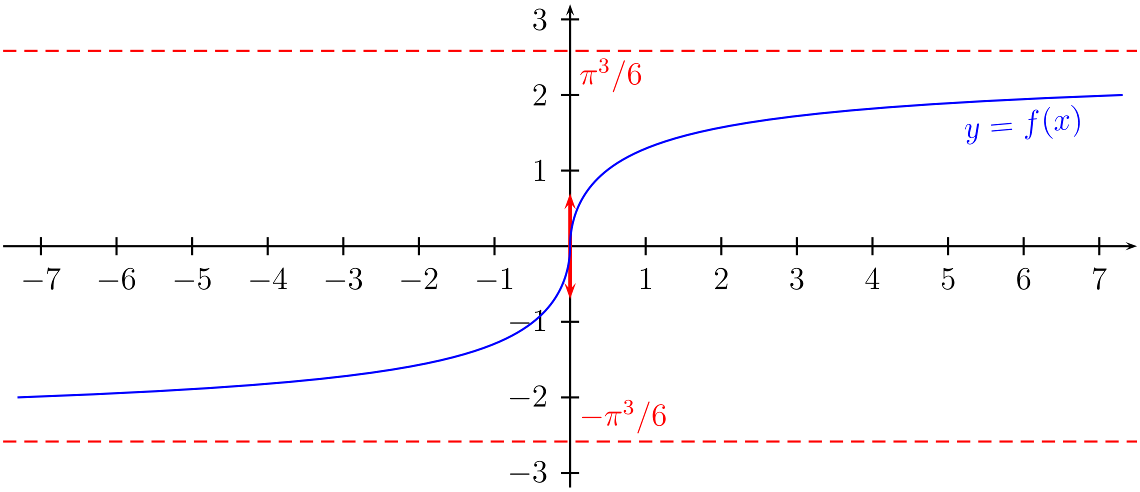
Cette inégalité étant vraie pour tout entier naturel non nul N, quand N tend vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

On a montré que $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) = +\infty$.

En résumé, f est de classe C^0 sur $[0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $f'(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. D'après un corollaire du théorème des accroissements finis, on sait que f n'est pas dérivable en 0 à droite et que sa courbe représentative admet $[Oy)$ pour demi-tangente en $(0,0)$. Puisque f est impaire, f n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet (Oy) pour tangente en $(0,0)$.

Allure du graphe.



Correction de l'exercice 4267 ▲

(a) Soit $x \in [0,+\infty[$. Pour $n > x^2$, $f_n(x) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right)$ et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-x^2+o(1))$.

Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x^2}$.

(b) Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et nulle au voisinage de $+\infty$. Donc chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est intégrable sur $[0,+\infty[$.

La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. Donc la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par convexité de la fonction exponentielle, $\forall u\in\mathbb{R}$, $1+u\leqslant e^u$. Par suite, $\forall x\in[0,\sqrt{n}]$, $0\leqslant 1-\frac{x^2}{n}\leqslant e^{-x^2/n}$ puis par croissance de la fonction $t\mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, $0\leqslant f_n(x) = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} = f(x)$. D'autre part, pour $x>\sqrt{n}$, $f_n(x) = 0\leqslant f(x)$. Finalement

$$.\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,+\infty[,\ |f_n(x)|\leqslant f(x).$$

En résumé,

• chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$,

• la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$ et la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.

• $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n|\leqslant f$, la fonction f étant intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En posant $t=\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ et donc $\frac{x^2}{n}=\cos^2 t$ et $dx = -\sqrt{n}\sin t\,dt$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx=\int_{\pi/2}^0(1-\cos^2 t)^n\times(-\sqrt{n}\sin t)\,dt=\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt=\sqrt{n}W_{2n+1},$$

où W_n est la n-ème intégrale de WALLIS. Classiquement, $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (voir Exercices Maths Sup) et donc

$$\frac{W_{2n+1}}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4268 ▲

Pour $x\in]0,1]$, $x^{-x}=e^{-x\ln(x)}$ et donc $\lim_{x\to 0^+}x^{-x}=1$. Donc si on pose $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=\begin{cases}x^{-x}\text{ si }x\in]0,1]\\ 1\text{ si }x=0\end{cases}$, f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

Pour $x\in]0,1]$, $x^{-x}=e^{-x\ln(x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$. Posons alors $\forall x\in[0,1]$, $f_0(x)=1$ puis $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)=\begin{cases}\frac{(-x\ln(x))^n}{n!}\text{ si }x\in]0,1]\\ 0\text{ si }x=0\end{cases}$. La fonction f_0 est continue sur $[0,1]$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, puisque $-x\ln(x)\underset{x\to 0^+}{\to}0$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$. En résumé, chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$, est continue sur $[0,1]$. De plus,

$$\forall x\in[0,1],\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x).$$

Vérifions alors que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0,1]$. Pour $x\in[0,1]$, posons $g(x)=\begin{cases}-x\ln x\text{ si }x\in]0,1]\\ 0\text{ si }x=0\end{cases}$. La fonction g est continue sur le segment $[0,1]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Pour $x\in[0,1]$, on a $0\leqslant g(x)\leqslant M$ (on peut montrer que $M=g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$). Mais alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in]0,1]$, $|f_n(x)|=\frac{(g(x))^n}{n!}\leqslant\frac{M^n}{n!}$ ce qui reste vrai pour $x=0$. Comme la série numérique de terme général $\frac{M^n}{n!}$ converge, on a montré que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, la série numérique de terme général $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, converge et

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx\quad(*).$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Soit $n\in\mathbb{N}$. En posant $u=-\ln(x)$ puis $v=(n+1)u$, on obtient

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{n!}\int_0^1(-x\ln x)^n\,dx=\frac{1}{n!}\int_{+\infty}^0(ue^{-u})^n\times(-e^{-u}\,du)=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}u^ne^{-(n+1)u}\,du\\&=\frac{1}{n!(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty}v^ne^{-v}\,dv=\frac{\Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ s'écrit alors $\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

Remarque. Pour calculer $I_n=\int_0^1\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,dx$, on peut aussi s'intéresser plus généralement à $J_{n,p}=\int_0^1\frac{x^n(-\ln x)^p}{n!}\,dx$ que l'on calcule par récurrence grâce à une intégration par parties.

Le travail qui précède permet encore d'écrire

$$\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(x\ln x)^n}{n!}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$

$$\boxed{\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}\text{ et }\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

Correction de l'exercice 4269 ▲

Pour $x>0$, posons $f(x)=\frac{x^2}{e^x-1}$. f est continue sur $]0,+\infty[$.
Ensuite, pour tout réel strictement positif x, on a $0<e^{-x}<1$ et donc

$$\frac{x^2}{e^x-1}=\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}=x^2e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^2e^{-(n+1)x}=\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, posons $f_n(x)=x^2e^{-nx}$. Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. En particulier, chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est intégrable sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-nx}\,dx=\frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty}u^2e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(3)}{n^3}=\frac{2}{n^3},$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente.
En résumé,
• chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$,
• la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0,+\infty[$ et la fonction f
est continue sur $]0,+\infty[$.
• $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx<+\infty$.
D'après un théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, la série numérique de terme général $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$, converge et

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.}$$

Correction de l'exercice 4270 ▲

C'est presque le même exercice que l'exercice 4269. Pour tout réel $x>0$,

$$\frac{x}{\operatorname{sh}x}=\frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}=2xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-2nx}=\sum_{n=0}^{+\infty}2xe^{-(2n+1)x},$$

puis avec la même démarche que dans l'exercice précédent

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}2xe^{-(2n+1)x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^{+\infty}ue^{-u}\,du=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\Gamma(2)}{(2n+1)^2}$$
$$=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right)=2\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}x}\,dx=\frac{\pi^2}{4}.}$$

Correction de l'exercice 4271 ▲

Ici, le plus simple est peut-être de ne pas utiliser de théorème d'intégration terme à terme. La fonction $f\,:\,x\mapsto\frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur $]0,1]$. De plus, quand x tend vers 0, $f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\ln x\underset{x\to0^+}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. On en déduit que f est intégrable sur $]0,1]$.
Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{\ln x}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}\ln x + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}.$$

Maintenant, chacune des fonctions $f_k : x \mapsto (-1)^k x^{2k}\ln x$, $0 \leqslant k \leqslant n$, est intégrable sur $]0,1]$ car continue sur $]0,1]$ et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers 0. On en déduit encore que la fonction $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $g_n = f - \sum_{k=0}^{n} f_k$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^{2k}\ln x\, dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\, dx.$$

La fonction $h : x \mapsto \frac{x\ln x}{1+x^2}\, dx$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que la fonction h est bornée sur $]0,1]$. Soit M un majorant de la fonction $|h|$ sur $]0,1]$. Pour tout entier naturel n, on a alors

$$\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\, dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{2n}\left|\frac{x\ln x}{1+x^2}\right|\, dx \leqslant M\int_0^1 x^{2n}\, dx = \frac{M}{2n+1}.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\, dx = 0$. Ceci montre que la série numérique de terme général $(-1)^k \int_0^1 x^{2k}\ln x\, dx$, $k \in \mathbb{N}$, converge et que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^1 x^{2k}\ln x\, dx.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0,1[$. Les deux fonctions $x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $x \mapsto \ln x$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_\varepsilon^1 x^{2n}\ln x\, dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2n+1}\int_\varepsilon^1 x^{2n}\, dx = -\frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}\ln\varepsilon - \frac{1}{(2n+1)^2}(1-\varepsilon^{2n+1}).$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\int_0^1 x^{2n}\ln x\, dx = -\frac{1}{(2n+1)^2}$. Par suite,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Vérifions maintenant l'intégrabilité de la fonction f sur $]0,+\infty[$. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et on sait déjà que f est intégrable sur $]0,1]$. De plus, $x^{3/2}f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$. Ceci montre que la fonction f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et finalement sur $]0,+\infty[$.
Pour calculer $I = \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$, la méthode précédente ne marche plus du tout car pour $x > 1$, x^n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. C'est une toute autre idée qui permet d'aller au bout. On pose $u = \frac{1}{x}$ et on obtient

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}} \times \frac{-du}{u^2} = -\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\, du = -I,$$

et donc $I = 0$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = -\frac{\pi}{4} \text{ et } \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = 0.}$$

Correction de l'exercice 4272 ▲

(a) Soit $x \in [0,1[$. Pour tout réel t de $[0,x]$, on a $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$. Maintenant, pour tout réel $t \in [0,x]$ et tout entier naturel n, on a $|t|^n \leqslant x^n$. Puisque la série numérique de terme général x^n converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0,x]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut affirmer que

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$$

$$\boxed{\forall t \in [0,1[,\ -\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}.}$$

(b) Par suite, pour $t \in]0,1[$,

$$\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}\ln t}{n}.$$

Pour $t \in]0,1[$, posons $f(t) = \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ puis pour $t \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(t) = -\frac{t^{n-1}\ln t}{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $]0,1]$ et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0. La fonction f_n est donc intégrable sur $]0,1]$. En particulier, la fonction f_n est donc intégrable sur $]0,1[$. Calculons alors $\int_0^1 f_n(t)\,dt$.
Soit $a \in]0,1[$. Les deux fonctions $t \mapsto \frac{t^n}{n}$ et $t \mapsto -\ln t$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1}(-\ln t)\,dt = \left[-\frac{t^n\ln t}{n}\right]_a^1 + \frac{1}{n}\int_a^1 t^{n-1}\,dt = \frac{a^n\ln a}{n} + \frac{1}{n^2}(1-a^n).$$

Quand a tend vers 0, on obtient $\int_0^1 -t^{n-1}\ln t\,dt = \frac{1}{n^2}$ et donc $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{n^3}$. Puisque la fonction f_n est positive sur $]0,1[$, on a encore $\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{n^3}$. On en déduit que la série numérique de terme général $\int_0^1 |f_n(t)|\,dt$ converge.
En résumé,
• chaque fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$,
• la séries de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et la fonction f
est continue sur $]0,1[$,
• $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 |f_n(t)|\,dt < +\infty$.
D'après un théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{-t^{n-1}\ln t}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.}$$

Correction de l'exercice 4273 ▲

Existence de l'intégrale. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f\ :\ t \mapsto \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel positif t, $|f(t)| \leqslant \frac{1}{\operatorname{ch} t}$ et donc $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{e^t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Pour tout réel x, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt$ existe.

Convergence de la série. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(x) = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n(x) - u_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2} - \frac{2n+3}{(2n+3)^2+x^2} = \frac{(2n+1)((2n+3)^2+x^2)-(2n+3)((2n+1)^2+x^2)}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)} \\ &= \frac{2(2n+1)(2n+3)-2x^2}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)}. \end{aligned}$$

Puisque le numérateur de cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, cette expression est positive pour n grand. On en déduit que la suite $(u_n(x))$ décroît à partir d'un certain rang. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.
On en déduit que la série de terme général $(-1)^n u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Pour tout réel x, la série de terme général $(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$ converge.

Egalité de l'intégrale et de la somme de la série. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in]0,+\infty[$, on a $e^{-t} \in]0,1[$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} &= \frac{2\cos(xt)e^{-t}}{1+e^{-2t}} = 2\cos(xt)e^{-t}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-2kt} + (-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\\ &= 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(xt)e^{-(2k+1)t} + (-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}.\end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque $k\in\mathbb{N}$, la fonction $t\mapsto\cos(xt)e^{-(2k+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit encore que la fonction $t\mapsto(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2k+1)t}\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt.$$

Ensuite, $\left|\int_0^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-(2n+3)t}\,dt=\frac{1}{2n+3}$, et donc $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt=0$ puis

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2n+1)t}\,dt.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2n+1)t}\,dt &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{ixt}e^{-(2n+1)t}\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-(2n+1)+ix)t}\,dt\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-(2n+1)+ix)t}}{-(2n+1)+ix}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\left(1-\lim_{t\to+\infty}e^{(-(2n+1)+ix)t}\right)\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\right)\ \left(\text{car } \left|e^{(-(2n+1)+ix)t}\right| = e^{-(2n+1)t}\underset{n\to+\infty}{\to}0\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{2n+1+ix}{(2n+1)^2+x^2}\right) = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.\end{aligned}$$

On a enfin montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.}$$

Correction de l'exercice 4274 ▲

Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $A_n=\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n}&1\end{pmatrix}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On peut écrire $A_n=\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}&-\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\\ \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}&\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\end{pmatrix}$. Les sommes des carrés des deux nombres $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ et $\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ est égale à 1. Donc il existe un réel $\theta_n\in]-\pi,\pi]$ tel que $\cos(\theta_n)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ et $\sin(\theta_n)=\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$. De plus, $\cos(\theta_n)>0$ et $\sin(\theta_n)>0$ et donc on peut prendre

$$\theta_n=\arctan\left(\frac{a}{n}\right)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a alors

$$A_n^n=\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\right)^n\begin{pmatrix}\cos(\theta_n)&-\sin(\theta_n)\\ \sin(\theta_n)&\cos(\theta_n)\end{pmatrix}^n=\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}\begin{pmatrix}\cos(n\theta_n)&-\sin(n\theta_n)\\ \sin(n\theta_n)&\cos(n\theta_n)\end{pmatrix}.$$

Maintenant, $\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}=\exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}1+o(1)$.
D'autre part, $n\theta_n=n\arctan\left(\frac{a}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}n\times\frac{a}{n}=a$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}A_n^n=1.\begin{pmatrix}\cos(a)&-\sin(a)\\\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(a)&-\sin(a)\\\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall a>0,\ \lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{n}\\\frac{a}{n}&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos(a)&-\sin(a)\\\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 4275 ▲

Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.
(3) ⇒ (2). On sait que si la série de terme général A^n, $n\in\mathbb{N}$, converge, alors $\lim_{n\to+\infty}A^n=0$.
(2) ⇒ (1). Supposons $\lim_{n\to+\infty}A^n=0$. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ un vecteur propre associé. Pour tout entier naturel n, $A^nX=\lambda^nX$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}A^n=0$, on a encore $\lim_{n\to+\infty}A^nX=0$ puis $\lim_{n\to+\infty}\lambda^nX=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\lambda^n=0$.
Ainsi, si $\lim_{n\to+\infty}A^n=0$ alors $\mathrm{Sp}(A)\subset B_o(0,1)$.
(1) ⇒ (3). Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}(A)\subset B_o(0,1)$. On sait (voir exercice 3275 : décomposition de DUNFORD) qu'il existe deux matrices D et N telles que
1) $A=D+N$
2) D diagonalisable
3) N nilpotente
4) $DN=ND$.
De plus, les valeurs propres de D sont les valeurs propres de A.
On note k l'indice de nilpotence de N. Puisque les matrices D et N convergent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire pour $n\geqslant k$

$$A^n=(D+N)^n=\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}D^{n-j}N^j=\sum_{j=0}^k\binom{n}{j}D^{n-j}N^j.$$

Il existe une matrice $P\in\mathscr{GL}_p(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ tel que $D=P\Delta P^{-1}$. Mais alors, $\forall j\in[\![0,k]\!]$, $\forall n\geqslant j$, $\binom{n}{j}D^{n-j}N^j=P\times\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\times PN^j$.

Soit $j\in[\![0,k]\!]$. Vérifions tout d'abord que la série de terme général $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$, $n\geqslant j$ converge. Posons $\Delta=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$. Alors $\forall n\geqslant j$, $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}=\mathrm{diag}\left(\binom{n}{j}\lambda_1^{n-j},\dots,\binom{n}{j}\lambda_p^{n-j}\right)$. Maintenant, si λ est une valeur propre de Δ (et donc de A), $\binom{n}{j}\lambda^{n-j}=\frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!}\lambda^{n-j}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^j\lambda^{n-j}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $|\lambda|<1$ et donc la série de terme général $\binom{n}{j}\lambda^{n-j}$, $n\geqslant j$, converge.

Ainsi, la série de terme général $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$ converge. D'autre part, l'application $M\mapsto P\times M\times PN^j$ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que la série de terme général $P\times\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\times PN^j$ converge.

Finalement, pour chaque $j\in[\![0,k]\!]$, la série de terme général $P\times\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\times PN^j$ converge et donc la série de terme général A^n converge car est somme de $j+1$ séries convergentes.

Correction de l'exercice 4276 ▲

$\chi_A = \begin{vmatrix} 4/3-X & -5/6 \\ 5/3 & -7/6-X \end{vmatrix} = X^2-\frac{1}{6}X-\frac{1}{6} = \left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{1}{3}\right)$. Par suite, $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = P\left(\sum_{k=0}^{n} D^k\right)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)P^{-1}.$$

Puisque $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ sont dans $]-1,1[$, les séries numériques de termes généraux respectifs $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ convergent. Il en est de même de la série de terme général D^k. Maintenant, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, converge est continue car linéaire sur un espace de dimension finie et on en déduit que la série de terme général A^k converge. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n\right)P^{-1} \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto PMP^{-1}) \\
&= P\,\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Remarque. D'après l'exercice suivant, la matrice obtenue est $(I-A)^{-1}$.

Correction de l'exercice 4277 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < 1$. Pour tout entier naturel n, on a $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$. Puisque $\|A\| < 1$, la série numérique de terme général $\|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Il en est de même de la série de terme général $\|A^n\|$ et donc la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. Puisque $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est complet en tant que $\mathbb{C}$ espace de dimension finie, on en déduit que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge. De plus,

$$\begin{aligned}
(I-A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= (I-A)\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k\right) \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto (I-A)M) \\
&= \lim_{n\to+\infty}(I-A^{n+1}) = I \text{ (}\lim_{n\to+\infty} A^{n+1} = 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N},\ \|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1}).
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $I-A$ est inversible à droite et donc inversible et de plus, $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$. On en déduit encore

$$\|(I-A)^{-1}-(I+A)\| = \left\|\sum_{n=2}^{+\infty} A^n\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\|A\|^n = \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}.$$

Correction de l'exercice 4278 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que d'une part $\det(\exp(A)) \neq 0$ et d'autre part $\exp(A) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right)$. Par continuité du déterminant, on a donc $\lim_{p\to+\infty}\det\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right) = \det(\exp(A)) \neq 0$. Par suite, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\det\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right) \neq 0$ et donc tel que $\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 4279 ▲

(a) $\chi_A=\begin{vmatrix} 3-X & 2 & 2\\ 1 & -X & 1\\ -1 & 1 & -X\end{vmatrix}=(3-X)(X^2-1)-(-2X-2)-(2X+2)=-(X+1)(X-1)(X-3).$

Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n=Q_n\times\chi_A+a_nX^2+b_nX+c_n$ où $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ et $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$. En évaluant les deux membres de cette égalité en -1, 1 et 3, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} a_n-b_n+c_n=(-1)^n\\ a_n+b_n+c_n=1\\ 9a_n+3b_n+c_n=3^n\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} b_n=\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\\ a_n+c_n=\frac{1}{2}(1+(-1)^n)\\ 8a_n+\frac{3}{2}(1-(-1)^n)+\frac{1}{2}(1+(-1)^n)=3^n\end{array}\right.\Rightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} a_n=\frac{1}{8}(3^n-2+(-1)^n)\\ b_n=\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\\ c_n=\frac{1}{8}(-3^n+6+3(-1)^n)\end{array}\right..$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\tfrac{1}{8}((3^n-2+(-1)^n)A^2+4(1-(-1)^n)A+(-3^n+6+3(-1)^n)I_3).$$

Maintenant,

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8\\ 2 & 3 & 2\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

et donc, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}\exp(tA)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}A^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}.\frac{1}{8}((3^n-2+(-1)^n)A^2+4(1-(-1)^n)A+(-3^n+6+3(-1)^n)I_3)\\
&=\frac{e^{3t}-2e^t+e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8\\ 2 & 3 & 2\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}+\frac{4(e^t-e^{-t})}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}+\frac{-e^{3t}+6e^t+3e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8e^{3t} & 8e^{3t}-8e^t & 8e^{3t}-8e^t\\ 2e^{3t}-2e^{-t} & 2e^{3t}+6e^{-t} & 2e^{3t}-2e^{-t}\\ -2e^{3t}+2e^{-t} & -2e^{3t}+8e^t-6e^{-t} & 2e^{3t}+8e^t+2e^{-t}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t}-4e^t & 4e^{3t}-4e^t\\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+3e^{-t} & e^{3t}-e^{-t}\\ -e^{3t}+e^{-t} & -e^{3t}+4e^t-3e^{-t} & e^{3t}+4e^t+e^{-t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t}-4e^t & 4e^{3t}-4e^t\\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+3e^{-t} & e^{3t}-e^{-t}\\ -e^{3t}+e^{-t} & -e^{3t}+4e^t-3e^{-t} & e^{3t}+4e^t+e^{-t}\end{pmatrix}}.$$

(b) $\chi_A=\begin{vmatrix} 4-X & 1 & 1\\ 6 & 4-X & 2\\ -10 & -4 & -2-X\end{vmatrix}=(4-X)(X^2-2X)-6(-X+2)-10(X-2)=(X-2)[-X(X-4)+6-10]=-(X-2)(X^2-4X+4)=-(X-2)^3$. On est dans la situation où A a une unique valeur propre. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $(A-2I_3)^3=0$ et donc pour tout réel t,

$$\exp(tA)=\exp(t(A-2I_3)+2tI_3)=\exp(t(A-2I_3))\times\exp(2tI_3)\text{ (car les matrices }t(A-2I_3)\text{ et }2tI_3\text{ commutent)}$$

$$=\left(I_3+t(A-2I_3)+\frac{t^2}{2}(A-2I_3)^2\right)\times e^{2t}I_3$$

$$=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}+\frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}$$

$$=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}+\frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\4&2&2\\-4&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA)=\begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 4280 ▲

$$\chi_A=\begin{vmatrix}-X&1/2&-2\\1/2&-X&0\\0&0&-1/2-X\end{vmatrix}=-X\left(X^2+\tfrac12X\right)-\tfrac12\left(-\tfrac12X-\tfrac14\right)=-X^2\left(X+\tfrac12\right)+\tfrac14\left(X+\tfrac12\right)=-\left(X+\tfrac12\right)^2\left(X-\tfrac12\right)$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n=Q_n\chi_A+a_nX^2+b_nX+c_n$ où $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ et $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$.

On évalue les deux membres de cette égalité en $\frac12$ et $-\frac12$ et on obtient $\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n=\left(\frac12\right)^n$ et $\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n=\left(-\frac12\right)^n$.

Puis en dérivant les deux membres de l'égalité et en évaluant en $-\frac12$, on obtient $-a_n+b_n=n\left(-\frac12\right)^{n-1}=-2n\left(-\frac12\right)^n$. Maintenant,

$$\begin{cases}\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n=\left(\frac12\right)^n\\\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n=\left(-\frac12\right)^n\\-a_n+b_n=-2n\left(-\frac12\right)^n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_n=\left(\frac12\right)^n-\left(-\frac12\right)^n\\\frac{a_n}{2}+2c_n=\left(\frac12\right)^n+\left(-\frac12\right)^n\\-a_n+\left(\frac12\right)^n-\left(-\frac12\right)^n=-2n\left(-\frac12\right)^n\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_n=\left(\frac12\right)^n+(2n-1)\left(-\frac12\right)^n\\b_n=\left(\frac12\right)^n-\left(-\frac12\right)^n\\c_n=\frac14\left(\frac12\right)^n-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac12\right)^n\end{cases}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\left(\left(\frac12\right)^n+(2n-1)\left(-\frac12\right)^n\right)A^2+\left(\left(\frac12\right)^n-\left(-\frac12\right)^n\right)A+\left(\frac14\left(\frac12\right)^n-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac12\right)^n\right)I_3$ avec $A^2=\begin{pmatrix}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4&0&1\\0&1/4&-1\\0&0&1/4\end{pmatrix}$. On en déduit que pour $|t|<2$,

$$\begin{aligned}\ln(I_3+tA) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}A^n\\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+(2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A^2+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A\\
&+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3.\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\ln(I_3+tA) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n}-2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A^2\\
&+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A\\
&+\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n}+2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n+3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)I_3\\
&= \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)-2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}}-1\right)-\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A^2+\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A\\
&+\frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)+2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}}-1\right)+3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)I_3\\
&= \left(\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)-\frac{2t}{2-t}\right)\begin{pmatrix}1/4&0&1\\0&1/4&-1\\0&0&1/4\end{pmatrix}+\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\begin{pmatrix}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}\\
&+\frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)+\frac{2t}{2-t}+3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right)&\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)&-\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)-\frac{2t}{2-t}\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)&\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right)&-\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)+\frac{2t}{2-t}\\0&0&\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in]-2,2[,\ \ln(I_3+tA)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right)&\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)&-\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)-\frac{2t}{2-t}\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)&\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right)&-\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)+\frac{2t}{2-t}\\0&0&\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 4281 ▲

(a) i. Soit $\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3$. $f_{\overrightarrow{\omega}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par bilinéarité du produit vectoriel. De plus, pour $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in(\mathbb{R}^3)^2$,

$$f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{x}).\overrightarrow{y}=(\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{x}).\overrightarrow{y}=[\overrightarrow{\omega},\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}]=-[\overrightarrow{\omega},\overrightarrow{y},\overrightarrow{x}]=-(\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{y}).\overrightarrow{x}=-\overrightarrow{x}.f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{y}).$$

Donc,

$$\boxed{\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3,\ f_{\overrightarrow{\omega}}\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^3).}$$

ii. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathscr{A}(\mathbb{R}^3) \\ \overrightarrow{\omega} & \mapsto & f_{\overrightarrow{\omega}} \end{array}$.

• Vérifions que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\overrightarrow{\omega}_1, \overrightarrow{\omega}_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\left(\varphi(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1+\lambda_2\overrightarrow{\omega}_2)\right)(\overrightarrow{x}) &= f_{\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1+\lambda_2\overrightarrow{\omega}_2}(\overrightarrow{x}) = \left(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1+\lambda_2\overrightarrow{\omega}_2\right)\wedge = \lambda_1\left(\overrightarrow{\omega}_1\wedge\overrightarrow{x}\right)+\lambda_2\left(\overrightarrow{\omega}_2\wedge\overrightarrow{x}\right)\\ &= \lambda_1 f_{\overrightarrow{\omega}_1}(\overrightarrow{x})+\lambda_2 f_{\overrightarrow{\omega}_2}(\overrightarrow{x}) = \left((\lambda_1\varphi(\overrightarrow{\omega}_1)+\lambda_2\varphi(\overrightarrow{\omega}_2)\right)(\overrightarrow{x})\end{aligned}$$

et donc $\varphi(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1+\lambda_2\overrightarrow{\omega}_2) = \lambda_1\varphi(\overrightarrow{\omega}_1)+\lambda_2\varphi(\overrightarrow{\omega}_2)$. On a montré que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$.

• Vérifions que φ est injective. Soit $\omega \in \mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{\omega} \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow f_{\overrightarrow{\omega}} = 0 \Rightarrow \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

On applique alors ce dernier résultat à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On obtient $\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. On a montré que φ est injective.

• Enfin, $\dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = \frac{3\times(3-1)}{2} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) < +\infty$. On en déduit que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. En particulier,

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3),\ \exists \overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3/\ f = f_{\overrightarrow{\omega}}.}$$

(b) Soit $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Si $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$, alors $f_{\overrightarrow{\omega}} = 0$ et donc $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}}) = Id_{\mathbb{R}^3}$.

On suppose dorénavant $\overrightarrow{\omega} \neq \overrightarrow{0}$. On pose $\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\omega}\|}\overrightarrow{\omega}$ puis on complète la famille orthonormale $(\overrightarrow{e_3})$ en une base orthonormale directe $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ (en particulier $\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$).

• Puisque $\overrightarrow{e_3}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\omega}$, $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{0}$. On en déduit que

$$\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})(\overrightarrow{e_3}) = Id(\overrightarrow{e_3}) + f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) + \frac{1}{2}f^2_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) + \frac{1}{6}f^3_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) + \ldots = \overrightarrow{e_3}.$$

• D'autre part, $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{e_1} = \|\overrightarrow{\omega}\|\,\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1} = \|\overrightarrow{\omega}\|\,\overrightarrow{e_2}$ et de même $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_2}) = -\|\overrightarrow{\omega}\|\,\overrightarrow{e_1}$.
On en déduit que $f^2_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) = -\|\overrightarrow{\omega}\|^2\,\overrightarrow{e_1}$ et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{2n}_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) = (-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}\,\overrightarrow{e_1} \quad \text{puis} \quad f^{2n+1}_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) = (-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}\,\overrightarrow{e_2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})(\overrightarrow{e_1}) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f^n_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1})\\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}}{(2n)!}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\overrightarrow{e_2} \text{ (somme de deux séries convergentes)}\\ &= \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|)\,\overrightarrow{e_1} + \sin(\|\overrightarrow{\omega}\|)\,\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{2n}_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_2}) = (-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}\,\overrightarrow{e_2} \quad \text{puis} \quad f^{2n+1}_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_2}) = -(-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}\,\overrightarrow{e_1}.$$

et donc

$$\begin{aligned}\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})(\overrightarrow{e_2}) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f^n_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_2}) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}}{(2n)!}\right)\overrightarrow{e_2} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\overrightarrow{e_1}\\ &= -\sin(\|\overrightarrow{\omega}\|)\,\overrightarrow{e_1} + \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|)\,\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est $\begin{pmatrix} \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|) & -\sin(\|\overrightarrow{\omega}\|) & 0 \\ \sin(\|\overrightarrow{\omega}\|) & \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
et $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ est la rotation d'angle $\|\overrightarrow{\omega}\|$ autour de $\overrightarrow{\omega}$.

Correction de l'exercice 4282 ▲

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\left\|\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{p}\right)^p\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k}\right) A^k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \left|\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k}\right| \|A\|^k.$$

Maintenant, $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{\overbrace{p \times (p-1) \times \ldots \times (p-k+1)}^{k}}{\underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{k}}\right) \geqslant 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{p} \left|\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k}\right| \|A\|^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{\|A\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|A\|^p}{p}\right)^p \underset{n \to +\infty}{\to} e^{\|A\|} - e^{\|A\|} = 0.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{p}\right)^p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ et puisque $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$ tend vers $\exp(A)$ quand p tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(I + \frac{A}{p}\right)^p$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) = \lim_{p \to +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p.}$$

Correction de l'exercice 4283 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque χ_A est de degré n, la division euclidienne de X^k par χ_A s'écrit

$$X^k = Q_k \times \chi_A + a_{n-1}^{(k)} X^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)} X + a_0^{(k)} \text{ où } Q_k \in \mathbb{R}[\mathbb{C}] \text{ et } (a_0^{(k)}, \ldots, a_{n-1}^{(k)}) \in \mathbb{C}^n.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton montre alors que $A^k = a_{n-1}^{(k)} A^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)} A + a_0^{(k)} I_n$.
Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathrm{Vect}(A^{n-1}, \ldots, A, I_n)$ puis $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \mathrm{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$. Enfin, puisque
$\mathrm{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, $\exp(A) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \mathrm{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$.
On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A].}$$

Correction de l'exercice 4284 ▲

(a)
(b) $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi \operatorname{sh} 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e - \cos 1)$.

Correction de l'exercice 4285 ▲

(a) $\mathbb{R}^*$.
(b) CSI : $\frac{\sqrt{\pi}}{2a} = \int_{x=0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\, dx \leqslant f(a) \leqslant \int_{x=0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\, dx + 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} + 1$. Donc $af(a) \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ lorsque $a \to 0^+$.
(c) TCM : $f(a) \to 1$ lorsque $a \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4288 ▲

(a)
(b) $f(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$.

Correction de l'exercice 4290 ▲

(a)

(b) $xg(x)-g(x+1)=\frac{1}{e}$.

(c) CSA $\Rightarrow g'<0$. $g(x)\to+\infty$ lorsque $x\to 0^+$, $g(x)\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

(d) $g(x)\sim\frac{1}{x}$ en 0^+ et $g(x)\sim\frac{1}{ex}$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 4292 ▲

(a)

(b) CSA $\Rightarrow |R_n(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)|\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$.

(c) Non, $\|u_n\|_\infty=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 4293 ▲

(a)

(b) $f(x+1)=xf(x)-1$.

(c)

Correction de l'exercice 4294 ▲

(a) CVU sur tout $[a,b]$.

(b)

(c) $f(x+1)=f(x)+\frac{\pi}{2}-\arctan x$.

(d) $f(x+1)-f(x)\sim\frac{1}{x}$ donc la suite $(f(n))$ diverge et f est croissante $\Rightarrow\lim=+\infty$.

Correction de l'exercice 4295 ▲

$\frac{1}{t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$.

Correction de l'exercice 4296 ▲

(a) $\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}=1-\frac{x(x+1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum\ln f_n(x)$ est convergente pour tout $x\notin-|||^*$.

(b)

(c) $\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\to-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(k+x)}$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l'exercice 4297 ▲

Poser $t=xu$ puis intégrer deux fois par parties : $f_n(x)=1-\int_{u=0}^{1}(1-u)^{n+1}x\sin(xu)\,du$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction constante 1, et la convergence est uniforme sur tout intervalle borné.

Correction de l'exercice 4299 ▲

(a) cva si $|\cos x|<1$, scv si $\cos x=1$, dv si $\cos x=-1$.

(b) TCM en regroupant les termes deux par deux.

(c) $\int_{x=0}^{\pi/2} -\ln(1-\cos x)\,dx$.

Correction de l'exercice 4300 ▲

(a) $F_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X+n(1-e^{2ik\pi/n})}$.

(b) $F_n(2x) - F_n(-2x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4xe^{2ik\pi/n}}{4x^2-n^2(1-e^{2ik\pi/n})^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n}+n^2\sin(k\pi/n)^2}$.

Supposons n impair, et regroupons les termes conjugués obtenus pour k et $n-k$:

$F_n(2x) - F_n(-2x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \Big(\underbrace{\frac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n}+n^2\sin(k\pi/n)^2} + \frac{x}{x^2e^{2ik\pi/n}+n^2\sin(k\pi/n)^2}}_{=u(k,n,x)}\Big)$.

On transforme la somme en série de $k=1$ à $k=\infty$ en posant $u(k,n,x)=0$ si $k>(n-1)/2$, puis on passe à la limite, sous réserve de justification, dans cette série pour $n\to\infty$, ce qui donne la formule demandée.

Justification de l'interversion limite-série : en utilisant $\sin(t) \geqslant \frac{2t}{\pi}$ pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ on a $|u(k,n,x)| \leqslant \frac{2|x|}{4k^2-x^2}$ pour tout $k \geqslant |x/2|$, donc il y a convergence normale par rapport à n, à x fixé.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{x^2+k^2\pi^2} = \frac{\coth(x)}{x} - \frac{1}{x^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite pour $x\to 0$.

Correction de l'exercice 4301 ▲

(a) Transformation d'Abel.

(b) $f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$.

(c) $\frac{\pi-1}{2}$.

Correction de l'exercice 4302 ▲

(a)

(b) $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t^x}\right)$.

A n fixé, $\frac{1}{n^x} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t^x} \to \frac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t}$ lorsque $x\to 1^+$ et la convergence est monotone donc lorsque $x\to 1^+$

$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \to \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t}\right) = \gamma$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ln n}{n} = \eta'(1) = \gamma\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(2)^2$.

Correction de l'exercice 4304 ▲

Pour k fixé et $x\in[0,1[$ on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \text{polynôme}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} x^k = \text{polynôme}(x) + \frac{1}{1-x^k}$ et $\frac{1}{1-x^k} \sim \frac{1}{k(1-x)}$ au voisinage de 1 donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{k(1-x)}$ pour x suffisament proche de 1.

Correction de l'exercice 4305 ▲

(a)

(b) soit $y\in[c,d]$ et $x_n = f_n^{-1}(y)$. La suite (x_n) admet au plus une valeur d'adhérence, $x = f^{-1}(y)$.

(c)

Correction de l'exercice 4306 ▲

Oui : $|\sup f_n - \sup f| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$.

Correction de l'exercice 4307 ▲

(a) Il y a convergence normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Il n'y a pas convergence normale au voisinage de 0 car $\sup\left\{\frac{xe^{-nx}}{\ln n},\ x \geqslant 0\right\} = \frac{1}{en\ln n}$ atteint pour $x = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge (série de Bertrand). Par contre il y a convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ car

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \leqslant \frac{1}{\ln n}\sum_{k=n}^{\infty} xe^{-kx} = \frac{xe^{-nx}}{\ln n(1-e^{-x})} \leqslant \frac{\sup\{t/(1-e^{-t}),\ t \geqslant 0\}}{\ln n}.$$

(b)

(c) Lorsque $x \to 0^+$, $\frac{S(x)-S(0)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln n} \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = +\infty$ par convergence monotone.

(d)

Correction de l'exercice 4308 ▲

Comparaison série-intégrale, $f(x) \to \ln(2)$ lorsque $x \to 1^-$.

Correction de l'exercice 4309 ▲

(a) $-1 < t < 1$.

(b) Pour $0 \leqslant t < 1$ et $n \geqslant 2$ on a :

$$\begin{aligned}(1-t)\frac{t^n}{1-t^n} &= \frac{t^n}{1+t+\cdots+t^{n-1}} \\ &= \frac{t^n}{n} + \frac{t^n((1-t)+(1-t^2)+\cdots+(1-t^{n-1}))}{n(1+t+\cdots+t^{n-1})} \\ &= \frac{t^n}{n} + \frac{(t^n-t^{n+1})((n-1)+(n-2)t+\cdots+t^{n-2})}{n(1+t+\cdots+t^{n-1})}\end{aligned}$$

d'où $0 \leqslant (1-t)\frac{t^n}{1-t^n} - \frac{t^n}{n} \leqslant \frac{n-1}{n}(t^n - t^{n+1}) \leqslant t^n - t^{n+1}$ (vrai aussi si $n = 1$) et en sommant :

$$0 \leqslant (1-t)S(t) + \ln(1-t) \leqslant 1.$$

Correction de l'exercice 4310 ▲

(a) La série converge normalement et ϕ est continue.

(b) ϕ est 1-lipschitzienne, mais on ne peut rien en déduire pour f :

pour N fixé et $0 < h \leqslant \frac{1}{2.4^N}$, on a $|f(h) - f(0)| = f(h) \geqslant \sum_{n=1}^{N} 3^n h = \frac{3^{N+1}-3}{2}h$ donc f n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.

(c) D'après ce qui précède, le taux d'accroissement de f en 0 est arbitrairement grand, donc f n'est pas dérivable en 0. On montre de même que f n'est pas dérivable en $x \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4311 ▲

On suppose h réel. La série converge localement normalement sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$. Continuité en 0 : on pose $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $\varphi(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ si $t \neq 0$, $\varphi(0) = 1$ (φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon infini). Pour $h \neq 0$ on a :

$$f(h) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1})\varphi(nh) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\varphi(nh) - \varphi((n-1)h)) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \int_{t=(n-1)h}^{nh} \varphi'(t)\,dt.$$

Cette dernière série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ car $A_n \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) et $\int_{t=0}^{+\infty} |\varphi'(t)|\,dt$ est convergente.

Correction de l'exercice 4312 ▲

(a) Soit $k = \lfloor n/2\pi \rfloor$. On a $F_n(x) = \frac{2k\pi}{n}\int_{t=0}^{2\pi} f(x+t)f(t)\,dt + \frac{1}{n}\int_{t=2k\pi}^{n} f(x+t)f(t)\,dt \to \int_{t=0}^{2\pi} f(x+t)f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.

(b) Uniforme.

(c) Cauchy-Schwarz.

Correction de l'exercice 4313 ▲

$g = x \mapsto f(\tan(x/2))$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Correction de l'exercice 4314 ▲

(a) CSA : $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

(b) $xf(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(2p+1)^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(2p+2)^2+x^2}}$
$= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{t=2p+1}^{2p+2} \frac{xt}{(t^2+x^2)^{3/2}}\,dt$
$= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du.$
On a $\int_{u=0}^{\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du = 1 = a+b$ avec :
$a = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p)/x}^{(2p+1)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du$ et $b = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du = xf(x).$
$h : u \mapsto \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}$ est croissante sur $[0, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$ donc $|a-b| \leqslant \frac{3\|h\|_\infty}{x}$, et $xf(x) \to \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4315 ▲

On a $\int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} \leqslant xS_1(x) \leqslant \frac{x}{\operatorname{sh} x} + \int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t}$ et $\frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{t} + O(t)$ donc $\int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = -\ln(x) + O(1)$. On en déduit $S_1(x) \sim -\frac{\ln x}{x}$.
La même méthode ne marche pas pour S_2 car le terme résiduel, $\frac{x}{\operatorname{sh}^2(x)}$ n'est pas négligeable devant $\int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}^2(t)}$. Par contre, on peut remarquer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, d'où $S_2(x) \sim \frac{\zeta(2)}{x^2}$.

Correction de l'exercice 4316 ▲

(a) Lorsque $n \to \infty$, $S_n(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix} - t^n e^{i(n+1)x}}{1-te^{ix}}\right) \to \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right) = \frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}$ pour $-1 < t < 1$.

(b) $\int_{t=0}^{1} S_n(t)\,dt = \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}$.
$\int_{t=0}^{1} S(t)\,dt = (t - \cos x = u\sin x) = \int_{u=-\cot x}^{\tan x/2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi - x}{2}.$

(c) TCD : $|S_n(t)| \leqslant \frac{2}{\sin x}$ intégrable par rapport à t sur $[0,1]$. On en déduit $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{\pi - x}{2}$.

Correction de l'exercice 4317 ▲

(a) R est trivialement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le théorème de décomposition en éléments simples donne une base de R en se limitant aux éléments simples n'ayant pas de pôle dans $[0,1]$.

$R_{m,n}$ n'est pas un espace vectoriel. Par exemple $\frac{1}{X+1}$ et $\frac{1}{X+2}$ appartiennent à $R_{0,1}$ mais pas leur somme.

(b) Soit (f_k) une suite d'éléments de $R_{m,n}$ telle que $\|g - f_k\| \to d$ quand $k \to \infty$. On note $f_k = P_k/Q_k$ avec $P_k \in \mathbb{R}_m[X]$, $Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\|Q_k\| = 1$. On a $\|P_k\| \leqslant \|g - f_k\| + \|g\|$ donc les suites (P_k) et (Q_k) sont bornées dans $\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$. Quitte à prendre une sous-suite, on se ramène au cas $P_k \to P \in \mathbb{R}_m[X]$ et $Q_k \to Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (quand $k \to \infty$) avec de plus $\|Q\| = 1$.

Si Q n'a pas de racine dans $[0,1]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|Q(x)| \geqslant \alpha$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $|Q_k(x)| \geqslant \frac{1}{2}\alpha$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout k assez grand. On en déduit que la suite (P_k/Q_k) converge uniformément vers P/Q sur $[0,1]$ et que $r_0 = P/Q$ convient.

Si Q admet dans $[0,1]$ des racines $a_1, \dots, a_p$ de multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, on note $Q^0 = \prod_i (X - a_i)^{\alpha_i}$ et $Q^1 = Q/Q^0$. Soit $M = \max\{\|g - f_k\|,\ k \in |||\}$. Pour tous $x \in [0,1]$ et $k \in |||$ on a $|g(x)Q_k(x) - P_k(x)| \leqslant M|Q_k(x)|$ donc à la limite, $|g(x)Q(x) - P(x)| \leqslant M|Q(x)|$ pour tout $x \in [0,1]$. Ceci implique que Q^0 divise P, on note $P^1 = P/Q^0$. Alors pour tout $x \in [0,1]$ et $k \in |||$ on a $|g(x)Q^0(x) - P_k(x)Q^0(x)/Q_k(x)| \leqslant \|g - f_k\| |Q^0(x)|$, d'où $|g(x)Q^0(x) - P^1(x)Q^0(x)/Q^1(x)| \leqslant d|Q^0(x)|$ et finalement $r_0 = P^1/Q^1$ convient.

Correction de l'exercice 4318 ▲

(a)

(b) Soit P_n le polynôme de Lagrange défini par $P_n(x_i) = f_n(x_i)$ et $\deg P_n < p$. Les coordonnées de P_n dans la base de Lagrange forment des suites convergentes donc la suite (P_n) est uniformément convergente sur $[a,b]$. Quant à la suite $(P_n^{(p)})$, c'est la suite nulle. Donc on peut remplacer f_n par $f_n - P_n$ dans l'énoncé, ce qui revient à supposer que $f_n(x_i) = 0$ pour tous n et i. Soit f la fonction définie par $f(x_i) = 0$ et $f^{(p)} = g$: f existe (prendre une primitive p-ème arbitraire de g et lui soustraire un polynôme de Lagrange approprié) et est unique (la différence entre deux solutions est polynomiale de degré $< p$ et s'annule en p points distincts). On remplace maintenant f_n par $f_n - f$, et on est rammené à montrer que : si $f_n(x_i) = 0$ pour tous n et i et si $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers la fonction nulle, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Ceci résulte du lemme suivant :

Il existe une fonction φ_p bornée sur $[a,b]^2$, indépendante de n, telle que $f_n(x) = \int_{t=a}^{b} \varphi_p(x,t) f_n^{(p)}(t)\,dt$.

Démonstration. On écrit la formule de Taylor-intégrale pour f_n entre x et y :

$$f_n(y) = f_n(x) + (y-x)f_n'(x) + \dots + \frac{(y-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) + \int_{t=x}^{y} \frac{(y-t)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p)}(t)\,dt.$$

L'intégrale peut être étendue à l'intervalle $[a,b]$ sous la forme $\int_{t=a}^{b} u_p(x,y,t) f_n^{(p)}(t)\,dt$ en posant

$$u_p(x,y,t) = \begin{cases} (y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } x < t < y\,; \\ -(y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } y < t < x\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En prenant successivement $y = x_1, \dots, y = x_n$, on obtient un système linéaire en $f_n(x), \dots, f_n^{(p-1)}(x)$ de la forme :

$$\begin{cases} f_n(x) + (x_1 - x)f_n'(x) + \dots + \frac{(x_1-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) &= -\int_{t=a}^{b} u_p(x,x_1,t) f_n^{(p)}(t)\,dt \\ \vdots & \\ f_n(x) + (x_p - x)f_n'(x) + \dots + \frac{(x_p-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) &= -\int_{t=a}^{b} u_p(x,x_p,t) f_n^{(p)}(t)\,dt \end{cases}$$

La matrice M de ce système est la matrice de Vandermonde de $x_1 - x, \dots, x_p - x$, inversible. On en déduit, avec les formules de Cramer, une expression de $f_n(x)$ à l'aide des intégrales du second membre, de la forme voulue. Le facteur φ_p est borné car le dénominateur est $\det(M) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$, indépendant de x.

Correction de l'exercice 4319 ▲

Développer en séries sous l'intégrale, multiplier, permuter avec l'intégrale puis simplifier.

Correction de l'exercice 4320 ▲

Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n}+2\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc que la série de terme général $e^{-x\sqrt{n}}$ converge. Ainsi, f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant e^{-x\sqrt{k}}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $e^{-x\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \quad (*).$$

Soit $x \in]0,+\infty[$. En posant $u = x\sqrt{t}$ et donc $t = \frac{u^2}{x^2}$ puis $dt = \frac{2u}{x^2}\,du$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du = \frac{2}{x^2} \times \Gamma(2) = \frac{2}{x^2}.$$

L'encadrement $(*)$ s'écrit alors

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{x^2} = +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} \frac{2}{x^2}.}$$

Correction de l'exercice 4321 ▲

Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|x^{n^2}\right| = |x|^{n^2} \leqslant |x|^n$. Puisque la série numérique de terme général $|x|^n$ converge, on en déduit que la série de terme général x^{n^2} est absolument convergente et en particulier convergente. Donc, f est bien définie sur $]-1,1[$.

Soit $x \in]0,1[$. La fonction $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} x^{t^2}\,dt \leqslant x^{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} x^{t^2}\,dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x \in]0,1[,\ \int_1^{+\infty} x^{t^2}\,dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2}\,dt \quad (*).$$

Soit $x \in]0,1[$. En posant $u = t\sqrt{-\ln x}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln x}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(t\sqrt{-\ln x})^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

L'encadrement $(*)$ s'écrit alors

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} - \int_0^1 x^{t^2}\,dt \leqslant f(x) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x\to 1,\, x<1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.}$$

Correction de l'exercice 4322 ▲

(a) Avec $f(x)=x^4$, d'où $y=x^4-x$, on obtient $\frac{x^2y}{x+y}=x^2-\frac{1}{x}$ d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}}\frac{x^2y}{x+y}$$

n'existe pas.

(b) $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x=y=z\neq 0}}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}=\frac{2}{3}$ et $\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq 0, y=z=0}}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}=0$. Il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$$

n'existe pas.

(c) Sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la fonction f définie par $f(x)=\frac{|x|}{x^2}=\frac{1}{|x|}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$$

n'existe pas en tant que limite finie.

(d) D'une part, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0, y=0}}\frac{x^4y}{x^2-y^2}=0$. D'autre part, vue l'indication, avec $x^2-y^2=h(y)$, un calcul immédiat donne

$$\frac{x^4y}{x^2-y^2}=\frac{y^5+2y^3h(y)+(h(y))^2y}{h(y)}=\frac{y^5}{h(y)}+2y^3+h(y)y.$$

Avec $h(y)=y^6$, l'expression $\frac{x^4y}{x^2-y^2}$ tend donc vers $+\infty$ quand y tend vers zero d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}}\frac{x^4y}{x^2-y^2}$$

n'existe pas.

(e) Le long de la demi-droite $x>0, y=0, z=0$, la limite existe et vaut zéro et le long de la demi-droite $x=y=z>0$ la limite existe et vaut $1/3$ d'où

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}}\frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$$

n'existe pas.

Correction de l'exercice 4323 ▲

$$\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2}=\frac{\lim_{y\to 0}y^2}{\lim_{y\to 0}y^2+(1-y/x)^2}=\frac{0}{1}=0$$

De même $\lim_{x\to 0}f(x,y)=0$ d'où (3). D'autre part, $f(x,x)=\frac{x^4}{x^4}=1$ d'où $\lim_{x\to 0}f(x,x)=1$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ ne peut pas exister.

Correction de l'exercice 4325 ▲

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0),y=0}\frac{x}{x^2+y^2}$ n'existe pas d'où $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

(b) $\frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = r(\cos\varphi + 2\sin\varphi)^3$ d'où $\left|\frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant 27r$ et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = 0$$

car $\lim_{(x,y)\to(0,0)} r = 0$.

(c) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \neq 0$ et $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \log(x+e^y) = \log 2$ d'où

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \log 2.$$

(d) $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2}} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2} = 1$ tandis que $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2} = 0$ d'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$$

n'existe pas.

Correction de l'exercice 4326 ▲

(a) Supposons $x+y+z \neq 0$. Alors

$$\frac{xyz}{x+y+z} = \frac{xy(h(x,y)-x-y)}{h(x,y)} = xy - \frac{xy(x+y)}{h(x,y)}$$

d'où, avec

$$h(x,y) = (x+y)^4,$$

nous obtenons

$$\frac{xyz}{x+y+z} = xy - \frac{xy}{(x+y)^3}.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+y+z=(x+y)^4\\ x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0}} \frac{xyz}{x+y+z}$$

n'existe pas, au moins non pas en tant que limite finie. D'autre part,

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+z\neq 0, y=0}} \frac{xyz}{x+y+z} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+y+z\neq 0}} \frac{xyz}{x+y+z}$$

ne peut pas exister.

(b) La limite

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq\pm y, z=0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{1}{x-y}$$

n'existe pas car $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x-x^2}} \frac{1}{x-y}$ n'existe pas. Par conséquent,

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x^2-y^2+z^2\neq 0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x^2-y^2+z^2\neq 0}} \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$$

ne peut pas exister.

Correction de l'exercice 4331 ▲

Des calculs élémentaires donnent

(a) $u_1 = (\frac{1}{2}, \cos 1)$, $u_2 = (\frac{16}{15}, \cos\frac{1}{2})$, $\dots$, $u_{10} = (\frac{400}{143}, \cos\frac{1}{10})$, $\dots$

(b) $u_1 = (\frac{1}{2}\arctan 1, \sin(\frac{\pi}{4e}))$, $u_2 = (\frac{4}{5}\arctan 2, \sin(\frac{\pi}{4e^{1/2}}))$,
$u_3 = (\frac{9}{10}\arctan 3, \sin(\frac{\pi}{4e^{1/3}}))$, $\dots$, $u_{10} = (\frac{100}{101}\arctan(10), \sin(\frac{\pi}{4e^{1/10}}))$, $\dots$

(c) $u_1 = (\sinh 1, 0)$, $u_2 = (\sinh 2, \frac{\ln 2}{2})$, $u_3 = (\sinh 3, \frac{\ln 3}{3})$, $\dots$,
$u_{10} = (\sinh 10, \frac{\ln 10}{10})$, $\dots$

(d) $u_1 = a^n(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, $u_2 = a^2(\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))$,
$u_3 = a^3(\cos(3\alpha), \sin(3\alpha))$, $\dots$, $u_{10} = a^{10}(\cos(10\alpha), \sin(10\alpha))$, $\dots$

Les limites pouvu qu'elles existent se calculent ainsi :

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2+4n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} = 4$, $\lim_{n\to\infty}\cos(1/n) = \cos(0) = 1$ d'où

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{n^2+4n+3}, \cos\frac{1}{n}\right) = (4,0).$$

(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n^2} = 1$, $\lim_{n\to\infty}\arctan n = \pi/2$,
$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\arctan n}{n^2+1} = \pi/2$ mais $\lim_{n\to\infty}\sin(\frac{\pi}{4}\exp(-\frac{1}{n}))$ n'existe pas d'où

$$\lim_{n\to\infty} u_n$$

n'existe pas.

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ tandis que $\lim_{n\to\infty}\sinh n$ n'existe pas en tant que limite finie car

$$\lim_{x\to+\infty}\sinh x = +\infty$$

d'où

$$\lim u_n = \lim\left(\sinh n, \frac{\ln n}{n}\right)$$

n'existe pas.

(d) $\lim_{n\to\infty}(\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))$ n'existe pas tandis que pour que $\lim_{n\to\infty} a^n$ existe il faut et il suffit que $a \leqslant 1$ et, s'il en est ainsi, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ si $a < 1$ et $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$ si $a = 1$. Par conséquent : Pour que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a^n(\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))$$

existe il faut et il suffit que $a < 1$, et la limite vaut alors zéro.

Correction de l'exercice 4333 ▲

On note f la fonction considérée.

(a) Pour $x \neq 0$, $f(x, -x+x^3) = \frac{x(-x+x^3)}{x-x+x^3} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0, $-x+x^3$ tend vers 0 puis $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>0,\ y=-x+x^3}} f(x,y) = -\infty$. f n'a de limite réelle en $(0,0)$.

(b) Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = \frac{x\times 0}{x^2+0^2} = 0$ puis $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0$. Mais aussi, pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{x\times x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ puis $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \frac{1}{2}$. Donc si f a une limite réelle, cette limite doit être égale à 0 et à $\frac{1}{2}$ ce qui est impossible. f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(c) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 - 2|xy| + y^2 = (|x| - |y|)^2 \geqslant 0$ et donc $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Par suite, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)} = \frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{4}(x^2+y^2) = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{y} = 1$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2) = 1$. Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

(e) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^3+y^3| = |x+y|(x^2+xy+y^2) \leqslant \frac{3}{2}|x+y|(x^2+y^2)$ et donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{3}{2}|x+y|.$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}|x+y| = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(f) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^4+y^4| = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \leqslant (x^2+y^2)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2 = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2$ et donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{|x^4+y^4|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{3}{2}(x^2+y^2).$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}(x^2+y^2) = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Correction de l'exercice 4334 ▲

(a) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Quand x tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si f a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.
Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{1}{2}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\frac{1}{2} \neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(b) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \times |xy| \leqslant \frac{1}{2}|xy|$. Comme $\frac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de f. $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

(c) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $y \neq 0$, $f(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$. Quand y tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(d) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2|x|}}$.Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(e) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \frac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

(f) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$.
$\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \frac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \frac{|x|}{2}$ et donc f tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

(g) f est définie sur $\mathbb{R}^3$ privé du cône de révolution d'équation $x^2-y^2+z^2 = 0$.
$f(x,0,0) = \frac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.

(h) $f(2+h,-2+k,l) = \frac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand h tend vers 0 et $g(0,0,l)$ tend vers $0 \neq \frac{1}{4}$ quand l tend vers 0. Donc, f n'a pas de limite réelle quand (x,y,z) tend vers $(2,-2,0)$.

Correction de l'exercice 4341 ▲

Déterminons tout d'abord $F(x,y)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. • Pour $y\in\mathbb{R}$, $F(x,y)=\text{Max}\left\{f_{0,y}(-1),f_{0,y}(1)\right\}=\text{Max}\left\{y,-y\right\}=|y|$. • Si $x\neq 0$, $F(x,y)=\text{Max}\left\{f_{x,y}(-1),f_{x,y}\left(-\frac{y}{2x}\right),f_{x,y}(1)\right\}=\text{Max}\left\{x+y,x-y,-\frac{y^2}{4x}\right\}=\text{Max}\left\{x+|y|,-\frac{y^2}{4x}\right\}$. Plus précisément, si $x>0$, on a $x+|y|>0$ et $-\frac{y^2}{4x}\leqslant 0$. Donc $F(x,y)=x+|y|$ ce qui reste vrai quand $x=0$. Si $x<0$, $x+|y|-\left(-\frac{y^2}{4x}\right)=\frac{4x^2+4x|y|+y^2}{4x}=\frac{(2x+|y|)^2}{4x}<0$ et donc $F(x,y)=-\frac{y^2}{4x}$.

$$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ F(x,y)=\left\{\begin{array}{l}x+|y| \text{ si } x\geqslant 0\\ -\frac{y^2}{4x} \text{ si } x<0\end{array}\right..}$$

En vertu de théorèmes généraux, F est continue sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<0\}$. Soit $y_0\neq 0$. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x<0,\ y=y_0}}F(x,y)=+\infty\neq|y_0|=F(0,y_0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,y_0)$. Enfin, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<0,\ y=\sqrt{-x}}}F(x,y)=\dfrac{1}{4}\neq 0=F(0,0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,0)$.

$$\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}\} \text{ et est discontinue en tout } (0,y),\ y\in\mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 4342 ▲

• Pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|=\frac{\|x\|}{1+\|x\|}<\frac{\|x\|+1}{\|x\|+1}=1$. Donc f est bien une application de E dans B.

• Si $y=0$, pour $x\in E$, $f(x)=y\Leftrightarrow\frac{1}{1+\|x\|}x=0\Leftrightarrow x=0$.

Soit alors $y\in B\setminus\{0\}$. Pour $x\in E$,

$$f(x)=y\Rightarrow x=(1+\|x\|)y\Rightarrow\exists\lambda\in\mathbb{K}/\ x=\lambda y.$$

Donc un éventuel antécédent de y est nécessairement de la forme λy, $\lambda\in\mathbb{R}$. Réciproquement, pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda y)=\frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}y$ et donc

$$\begin{aligned}f(\lambda y)=y&\Leftrightarrow\frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}=1\Leftrightarrow\lambda=1+|\lambda|\|y\|\\&\Leftrightarrow(\lambda\geqslant 0 \text{ et } (1-\|y\|)\lambda=1) \text{ ou } (\lambda<0 \text{ et } (1+\|y\|)\lambda=1)\\&\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{1-\|y\|}\ (\text{car } \|y\|<1).\end{aligned}$$

Dans tous les cas, y admet un antécédent par f et un seul à savoir $x=\frac{1}{1-\|y\|}y$. Ainsi,

$$f \text{ est bijective et } \forall x\in B,\ f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\|x\|}x.$$

• On sait que l'application $x\mapsto\|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc l'application $x\mapsto\frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$. L'application $x\mapsto\frac{1}{1-\|x\|}$ est continue sur B pour les mêmes raisons. Donc les applications f et f^{-1} sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et B respectivement et on a montré que

$$\boxed{\text{l'application } f:\begin{array}{rcl}E&\to&B\\x&\mapsto&\frac{x}{1+\|x\|}\end{array} \text{ est un homéomorphisme.}}$$

Correction de l'exercice 4343 ▲

1ère solution. Pour $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et tout $i\in[\![1,n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}=\frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et pour $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et $h\in\mathbb{R}^n$

$$df_x(h)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i=\frac{1}{\|x\|_2}\sum_{i=1}^n x_ih_i=\frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \forall h\in\mathbb{R}^n,\ df_x(h)=\frac{x|h}{\|x\|_2}.}$$

2 ème solution. Soit $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Pour $h\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2=\frac{(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(\|x+h\|_2+\|x\|_2)}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2},$$

puis

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x\mapsto\|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que $\frac{1}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{\sim}\frac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x+h\|_2-\|x\|_2$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ensuite, puisque $|(x|h)|\leqslant\|x\|_2\|h\|_2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz), on a $x|h\underset{h\to0}{=}O(\|h\|_2)$ puis $(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$.

Finalement, $\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x+h\|_2\underset{h\to0}{=}\|x\|_2+\frac{x|h}{\|x\|_2}+o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h\mapsto\frac{x|h}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que f est différentiable en tout x de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et que $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\forall h\in\mathbb{R}^n$, $df_x(h)=\frac{x|h}{\|x\|_2}$.

Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2}(\|0+h\|_2-\|0\|_2-L(h))=1-L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand h tend vers 0. Pour u vecteur non nul donné et t réel non nul, l'expression $1-L\left(\frac{tu}{\|tu\|_2}\right)=1-\frac{t}{|t|}L\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers 0 quand t tend vers 0. Mais si t tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $L(u)=\|u\|_2$ et si t tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient $L(u)=-\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u\neq0$. Donc f n'est pas différentiable en 0.

Correction de l'exercice 4346 ▲

Puisque $\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|$ reste borné,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy=0$$

d'où f est continue en $(0,0)$. De même,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}y=0$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x=0$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. En plus, en dehors de l'origine,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x,y)}{x} + xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x,y)}{y} + xy\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Puisque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0,\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0,\ \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0,$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

Correction de l'exercice 4347 ▲

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f'(x+y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(x+y)$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2yf'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = yf'(xy)$$
$$\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = xf'(xy)$$

Correction de l'exercice 4349 ▲

Il est évident que, en tout point tel que $|x| < |y|$ ou $|x| > |y|$, la fonction est continue et les dérivées partielles existent.

Soit $x \neq 0$. Alors f n'est ni continue en (x,x) ni en $(x,-x)$. Car

$$\lim_{\substack{(u,v)\to(x,x)\\|u|>|v|}} f(u,v) = \lim_{u\to x} u = x \neq 0,$$
$$\lim_{(u,u)\to(x,x)} f(u,u) = 0,$$
$$\lim_{\substack{(u,v)\to(x,-x)\\|u|>|v|}} f(u,v) = \lim_{u\to x} u = x \neq 0,$$
$$\lim_{(u,-u)\to(x,-x)} f(u,u) = 0.$$

Par contre, f est continue en $(0,0)$. Car

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} f(u,v) = 0$$

puisque

$$\begin{array}{lll} f(u,v) = u & \text{si} & |u| > |v|, \\ f(u,v) = v & \text{si} & |u| < |v|, \\ f(u,v) = 0 & \text{si} & |u| = |v|, \end{array}$$

et puisque alors $\lim_{u\to 0} u = 0$ et $\lim_{v\to 0} v = 0$.
Soit (x,y) un point où $|x| = |y|$. Il reste à étudier les dérivées partielles en un tel point (x,y). Soit $x \neq 0$. Alors la fonction h de la variable t définie par

$$h(t) = f(x+t,y) = \begin{cases} x+t, & |x+t| > |y| \\ y, & |x+t| < |y| \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas. De même, la fonction k de la variable t définie par

$$k(t) = f(x,y+t) = \begin{cases} x, & |x| > |y+t|, \\ y+t, & |x| < |y+t|, \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'existe pas. Enfin soit $x = 0$. Alors la fonction h de la variable t définie par

$$h(t) = f(t,0) = t$$

est dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe. De même, la fonction k de la variable t définie par

$$k(t) = f(0,t) = t$$

est dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe.

Correction de **l'exercice 4369 ▲**

(a) Le plan tangent à la surface d'équation $z^2 = 19 - x^2 - y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$2z_0(z - z_0) = -2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0)$$

d'où, au point $(1,3,3)$, cette équation s'écrit

$$6(z-3) = -2(x-1) - 6(y-3)$$

ou

$$x + 3y + 3z = 19$$

(b) Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y \cos(\pi xy)\exp(2x^2y-1) + 4xy\sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \pi x \cos(\pi xy)\exp(2x^2y-1) + 2x^2\sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1/2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1/2) = 2.$$

Le plan tangent à la surface d'équation $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$ au point (x_0,y_0,z_0) est donné par l'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

d'où, au point $(1,1/2,1)$, cette équation s'écrit

$$z - 1 = 2(x-1) + 2(y-1/2)$$

ou

$$2x + 2y - z = 2.$$

Correction de l'exercice 4370 ▲

(a) L'équation d'un plan tangent doit être une équation linéaire !

(b) La confusion est exactement celle à éviter suivant les indications données.

(c) D'après (19), le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y) = x^4 - y^2$ au point $(x_0,y_0,z_0) = (2,3,7)$ est donné par l'équation

$$z - 7 = \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)(y-3)$$

c.a.d.

$$z - 7 = 32(x-2) - 6(y-3).$$

Correction de l'exercice 4371 ▲

Suivant l'indication, le plan tangent à la surface d'équation $z = 4x^2 + y^2$ au point (x_0,y_0,z_0) est donné par l'équation

$$\begin{aligned} z &= z_0 + 8x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) \\ &= 8x_0x + 2y_0y + z_0 - 8x_0^2 - 2y_0^2 = 8x_0x + 2y_0y - z_0 \end{aligned}$$

d'où par

$$z - 8x_0x - 2y_0y = z_0. \tag{38}$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan d'équation $x+2y+z=6$ il faut et il suffit que $(1,2) = (-8x_0, -2y_0)$ d'où que $x_0 = -1/8$ et $y_0 = -1$. Par conséquent, le point cherché sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ est le point $(-1/8, -1, 17/16)$. De même, pour que le plan (38) soit parallèle au plan d'équation $3x + 5y - 2z = 3$ il faut et il suffit que $(3/2, 5/2) = (8x_0, 2y_0)$ d'où que $x_0 = 3/16$ et $y_0 = 5/4$, et le point cherché sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ est alors le point $(3/16, 5/4, 9/64 + 25/16)$ =$(3/16, 5/4, 109/64)$.

Correction de l'exercice 4372 ▲

(a) Le vecteur normal du cône C au point (x_0,y_0,z_0) de C est le vecteur $(x_0,y_0,-z_0)$ et le plan tangent au cône C en ce point est donné par l'équation

$$x_0x + y_0y - z_0z = 0$$

car l'origine appartient à ce plan.

(b) L'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ est constituée des points $x(1, a, \pm\sqrt{1+a^2})$ où $x \in \mathbb{R}$, c.a.d. des deux droites

$$\mathscr{D}_1 = \{x(1,a,\sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathscr{D}_2 = \{x(1,a,-\sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}\}.$$

L'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est donc constituée des deux demi-droites

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1^+ &= \{x(1,a,\sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\} \\ \mathscr{D}_2^+ &= \{x(-1,-a,\sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

(c) Le vecteur normal en un point quelconque $x(1,a,\sqrt{1+a^2})$ de $\mathscr{D}_1$ respectivement $x(1,a,-\sqrt{1+a^2})$ de $\mathscr{D}_2$ est le vecteur $x(1,a,-\sqrt{1+a^2})$ respectivement $x(1,a,\sqrt{1+a^2})$ d'où la direction et donc le plan tangent au cône C sont le même en tout point de $\mathscr{D}_1 \setminus \{(0,0,0)\}$ respectivement $\mathscr{D}_2 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Correction de l'exercice 4373 ▲

(a) La forme (20) de l'équation du plan tangent au graphe $z = x^2 - 2y^3$ de la fonction f au point (x_0, y_0, z_0) nous donne l'équation

$$z - z_0 = 2x_0(x - x_0) - 6y_0^2(y - y_0) = 2x_0x - 6y_0^2y - 2x_0^2 + 6y_0^3$$

(b) Au point $(2, 1, 2)$, ce plan tangent est ainsi donné par l'équation

$$4x - 6y - z = 0.$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) distinct de (x_0, y_0, z_0) il faut et il suffit que $(4, 6, -1) = (2x_1, 6y_1^2, -1)$ et $y_1 \neq 1$, c.a.d. que $(x_1, y_1, z_1) = (2, -1, 6)$.

Correction de l'exercice 4374 ▲

(a) $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r\cos\varphi\sin^2\varphi$ existe et vaut zéro puisque $\cos\varphi\sin^2\varphi$ est borné. Par conséquent f est continue à l'origine et donc partout. Il est évident que la fonction f est différentiable en chaque point distinct de l'origine. Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Alors

$$D_v f(0,0) = \frac{d}{dt}\left(t\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)\Big|_{t=0} = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

existe d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; puisqu'il existe une dérivée directionnelle non nulle, la fonction f ne peut pas être différentiable en $(0,0)$.

(b) L'association $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto D_v f(0,0)$ n'est évidemment pas linéaire et les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$ ne forment pas un plan.

(c) Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = 2\sin\varphi\cos^3\varphi$$

d'où, en coordonnées polaires,

$$D_v f(x,y) = D_v f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = a(\sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi) + 2b\sin\varphi\cos^3\varphi$$

et, φ étant fixé,

$$\lim_{r\to 0} D_v f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = a(\sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi) + 2b\sin\varphi\cos^3\varphi.$$

Par conséquent, $D_v f(x,y)$ n'est pas continu en (x,y) sauf peut-être si $a = 0$. Par exemple, avec $\sin\varphi = 1$, on trouve

$$\lim_{r\to 0} D_v f(0,r) = a$$

et $a \neq \frac{ab^2}{a^2+b^2}$ sauf si $a = 0$. Si $a = 0$, la dérivée directionnelle D_v est la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ et, φ étant fixé,

$$\lim_{r\to 0} D_v f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 2b\sin\varphi\cos^3\varphi$$

ce qui n'est pas nul si $\sin\varphi\cos\varphi$ ne l'est pas. Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est continue en $(0,0)$ non plus.

Correction de l'exercice 4375 ▲

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos x \cos y \exp[-\sin x \cos y]$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \sin y \exp[-\sin x \cos y]$$

etc. d'où, avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \ldots = 1 - x + \ldots$$

Avec $x = 0,0184$ on trouve, pour $\exp[\sin(3.16)\cos(0.02))]$, la valeur approchée $1 - 0,0184 = 0,9816$.
N.B. On peut faire mieux si nécessaire : Avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\sin x \cos y + \cos^2 x \cos^2 y)\exp[-\sin x \cos y]$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (\cos x \sin y + \cos x \cos y \sin x \sin y)\exp[-\sin x \cos y]$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\sin x \cos y + \sin^2 x \sin^2 y)\exp[-\sin x \cos y]$$

on trouve

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \ldots = 1 - x + +\tfrac{1}{2}x^2 + \ldots$$

etc.
De même,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2(1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2)\sqrt{4+x}}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{2\exp(y)}{1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2}$$

etc. d'où, avec $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{4}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = -2$,

$$h(x,y) = h(0,0) + \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)y + \ldots = \tfrac{1}{4}x - 2y + \ldots.$$

Avec $x = 0,03$ et $y = 0,01$ on trouve, pour $\arctan[\sqrt{4.03} - 2\exp(0.01)]$, la valeur approchée $0,0075 - 0,02 = -0,00125$.

Correction de l'exercice 4378 ▲

• Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ et donc f est définie sur $\mathbb{R}^2$. • f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leqslant \frac{|xy|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |xy|$. Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Ainsi, f est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. • **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.**
Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{x\times 0\times(x^2-0^2)}{x\times(x^2+0^2)} = 0,$$

et donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$. Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. • Pour $(x,y)\neq(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-y^2x)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$.
Finalement, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\\ \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}.$$

• Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(y,x)=-f(x,y)$. Par suite, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$. En effet, pour (x_0,y_0) donné dans $\mathbb{R}^2$

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\frac{-f(y,x_0)+f(y_0,x_0)}{y-y_0}=-\frac{f(y,x_0)-f(y_0,x_0)}{y-y_0}\underset{y\to y_0}{\to}-\frac{\partial f}{\partial x}(y_0,x_0).$$

Donc, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=\begin{cases}0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\\ \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}.$$

• **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.** Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\frac{|y(x^4+4x^2y^2-y^4)|}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{|y|(x^4+4x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}=2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. On en déduit que l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, puisque $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. f est donc au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. • Pour $x\neq0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\frac{x^4}{x^4}=1$ et donc $\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$. Pour $y\neq0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=-\frac{y^4}{y^4}=-1$ et donc $\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=-1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et donc f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ exactement sur } \mathbb{R}^2.}$$

Correction de l'exercice 4379 ▲

• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
• f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
• **Continuité en $(0,0)$.** Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|xy||x^2-y^2|}{x^2+y^2}\leqslant|xy|\times\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=|xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}}f(x,y)=f(0,0)$. On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ est de classe } C^0 \text{ au moins sur } \mathbb{R}^2.$$

• **Dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.** f est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x,y)\neq(0,0)$ $f(x,y)=-f(y,x)$. Donc pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0,$$

et donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

• **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en** $(0,0)$**.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|y||x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on en déduit que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

$$\boxed{f \text{ est au moins de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Correction de l'exercice 4380 ▲

(a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f.

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6xy-15=0 \\ 3x^2-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Réciproquement, $r = 6x+6y$, $t = 0$ et $s = 6x$ puis $rt-s^2 = -36x^2$. Ainsi, $(rt-s^2)\left(2,\frac{1}{4}\right) = (rt-s^2)\left(-2,-\frac{1}{4}\right) = -144 < 0$ et f n'admet pas d'extremum local en $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ ou $\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$.

$$\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local sur } \mathbb{R}^2.}$$

(b) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(x-y)+4x^3=0 \\ 4(x-y)+4y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=0 \\ -4(x-y)+4x^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^3-2x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \left\{(0,0), \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Réciproquement, f est plus précisément de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$r(x,y)t(x,y)-s^2(x,y) = (-4+12x^2)(-4+12y^2)-(4)^2 = -48x^2-48y^2+144x^2y^2 = 48(3x^2y^2-x^2-y^2)$$

• $(rt-s^2)\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 48(12-2-2) > 0$. Donc f admet un extremum local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Plus précisément, puisque $r\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 2\times 12-4 = 20 > 0$, f admet un minimum local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. De plus, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x,y)-f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) &= -2(x-y)^2+x^4+y^4-8 = x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy+8 \\ &\geqslant x^4+y^4-2x^2-2y^2-2(x^2+y^2)+8 = (x^4-4x^2+4)+(y^4-4y^2+4) = (x^2-2)^2+(y^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

et $f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ est un minimum global.

• Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$ et donc f admet aussi un minimum global en $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ égal à 8.

• $f(0,0) = 0$. Pour $x\neq 0$, $f(x,x) = 2x^4 > 0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Pour $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\setminus\{0\}$, $f(x,0) = x^4-2x^2 = x^2(x^2-2) < 0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

$$\boxed{f \text{ admet un minimum global égal à 8, atteint en } \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right).}$$

Correction de l'exercice 4381 ▲

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A+H\in GL_n(\mathbb{R})$. Pour un tel H

$$(A+H)^{-1}-A^{-1} = (A+H)^{-1}(I_n-(A+H)A^{-1}) = -(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned} (A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1} &= -(A+H)^{-1}HA^{-1}+A^{-1}HA^{-1} = (A+H)^{-1}(-HA^{-1}+(A+H)A^{-1}HA^{-1}) \\ &= (A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}. \end{aligned}$$

Par suite, $\left\|f(A+H)-f(A)+A^{-1}HA^{-1}\right\| = \left\|(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}\right\| \leqslant \left\|(A+H)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|^2\|H\|^2$. Maintenant, la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t(\mathrm{com}(M))$, valable pour tout $M\in GL_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M\mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\left\|(A+H)^{-1}\right\|$ tend vers $\left\|A^{-1}\right\|$ quand H tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H\to 0}\left\|(A+H)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|^2\|H\| = 0 \text{ et donc } \lim_{H\to 0}\frac{1}{\|H\|}\left\|(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}\right\| = 0.$$

Comme l'application $H\mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de f en A.

$$\boxed{\forall A\in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.}$$

Correction de l'exercice 4382 ▲

Pour tout complexe z tel que $|z|\leqslant 1$,

$$|\sin(z)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{sh}(|z|) \leqslant \mathrm{sh}\,1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z=i$ car $|\sin(i)|=\left|\frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i}\right|=\frac{e-e^{-1}}{2}=\text{sh}(1)$.

$$\boxed{\text{Max}\{|\sin z|,\ z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1\}=\text{sh}(1).}$$

Correction de l'exercice 4383 ▲

On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $\|(x,y)\|=\text{Max}\{\|h\|_2,\|k\|_2\}$.

• Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a,b)+(h,h))=(a+h).(b+k)=a.b+a.h+b.k+h.k,$$

et donc $f((a,b)+(h,h))-f((a,b))=(a.h+b.k)+h.k$. Maintenant l'application $L\ :\ (h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire et de plus, pour $(h,k)\neq(0,0)$,

$$|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|=|h.k|\leqslant\|h\|_2\|k\|_2\leqslant\|(h,k)\|^2,$$

et donc $\frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|\leqslant\|(h,k)\|$ puis

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|=0.$$

Puisque l'application $(h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire, on en déduit que f est différentiable en (a,b) et que $\forall(h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $df_{(a,b)}(h,k)=a.h+b.k$.

La démarche est analogue pour le produit vectoriel :

$$\frac{1}{\|(h,k)\|}\|(a+h)\wedge(b+k)-a\wedge b-a\wedge h-b\wedge k\|_2=\frac{\|h\wedge k\|_2}{\|(h,k)\|}\leqslant\frac{\|h\|_2\|k\|_2}{\|(h,k)\|}\leqslant\|(h,k)\|.$$

Puisque l'application $(h,k)\mapsto a\wedge h+b\wedge k$ est linéaire, on en déduit que g est différentiable en (a,b) et que $\forall(h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $dg_{(a,b)}(h,k)=a\wedge h+b\wedge k$.

Correction de l'exercice 4384 ▲

(a) $D_f=\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\exp(xy)+x^2y\exp(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^3\exp(xy)$$

(b) $D_f=\{(x,y);x>0 \text{ ou } y\neq 0\}\subseteq\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$$

(c) $D_f=\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\sin x\cos x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2\sin y\cos y$$

(d) $D_f=\{(x,y,z);z\neq 0\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^2\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}}$$

Correction de l'exercice 4385 ▲

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y \exp x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + \exp x$.

(b) $D_v f(0,0) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos\theta + \sin\theta$. Cette dérivée directionnelle de f est maximale quand $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, et minimale quand $\sin\theta = \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \frac{5}{4}\pi$.

Signification géométrique : Le plan engendré par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et l'axe des z rencontre le graphe $z = f(x,y)$ en une courbe. Cette courbe est de pente maximale en valeur absolue pour $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\theta = \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (même plan). Les deux signes s'expliquent par les deux orientations possibles de cette courbe (sens du paramétrage).

Correction de l'exercice 4386 ▲

(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)^x = \mathrm{e}^{x\log(x^2+y^2)} = \mathrm{e}^{2r\cos\varphi\log r}$. Puisque $\cos\varphi$ est borné, $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r = 0$ d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \mathrm{e}^{\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

car la fonction exponentielle est continue.

(b) Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les dérivées partielles par rapport aux variables x et y se calculent ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$

(c) Pour que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x,0)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{(x^2)^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^{2x\log x} - 1}{x}$$

existe. Si $x > 0$,

$$\frac{\mathrm{e}^{2x\log x} - 1}{x} = 2\log x + \varepsilon(x)$$

où $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varepsilon(x) = 0$. Par conséquent, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas. D'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{f(0,y)-1}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{(y^2)^0 - 1}{y} = 0$$

existe.

Correction de l'exercice 4387 ▲

(a) Puisque $f(x,y) = \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} = r(\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\sin^3\varphi)$, il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0$$

car $\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\sin^3\varphi$ reste borné. Par conséquent la fonction f est continue en $(0,0)$.

(b) Les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{0}{x^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{f(0,y)}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{3y^3}{y^2} = 3$$

existent.

(c) Puisque $f(x,x) = \frac{4x^3}{2x^2} = 2x$, la dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ suivant le vecteur $v = (1,1)$ est non nulle. Par conséquent, la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

(d)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} = \frac{2xy(x^2+y^2)-2x(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = -4\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+8x^2y^2+3y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

(e) D'après (22), cette équation s'écrit

$$z-2 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 1-x+3(y-1)$$

d'où $z = 3y - x$.

(f) La fonction $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s'écrit $F(x,y) = \left(\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}, \frac{y^2x+3x^3}{x^2+y^2}\right)$ et sa matrice jacobienne

$$\mathrm{J}_F(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

au point $(1,1)$ est inversible. Par conséquent, la fonction F admet une réciproque locale au voisinage du point $(1,1)$. Au point $(2,2)$,

$$\mathrm{J}_F(2,2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où la fonction F admet également une réciproque locale au voisinage du point $(2,2)$.

Correction de l'exercice 4388 ▲

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

d'où (4).

Correction de l'exercice 4389 ▲

(a) $g(f(x,y)) = xy^2\sin^2(xy)\cos x \exp(y^2)$

(b)

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} = y^2\sin(xy)\exp(y^2)(2xy\cos x\cos(xy) - x\sin x\sin(xy) + \cos x\sin(xy))$$
$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} = 2xy\cos x\sin(xy)\exp(y^2)(xy\cos(xy) + (1+y^2)\sin(xy))$$

(c) Calculons d'abord

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= y\sin(xy)\exp(y^2) + xy^2\cos(xy)\exp(y^2) \\
&= y\exp(y^2)(\sin(xy) + xy\cos(xy)) \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= x\sin(xy)\exp(y^2) + x^2y\cos(xy)\exp(y^2) + 2xy^2\sin(xy)\exp(y^2) \\
&= x\exp(y^2)(\sin(xy) + xy\cos(xy) + 2y^2\sin(xy)) \\
&= x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy) + xy\cos(xy)).
\end{aligned}$$

Ainsi la matrice jacobienne J_f de f s'écrit

$$\begin{aligned}
J_f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ -y\sin x & \cos x \\ y\exp(y^2)(\sin(xy)+xy\cos(xy)) & x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy)+xy\cos(xy)) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De même, la matrice jacobienne J_g de g est :

$$\begin{aligned}
J_g &= \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right] = [vw, uw, uv] \\
&= \left[xy^2\sin(xy)\cos x\exp(y^2), xy\sin^2(xy)\exp(y^2), y\sin(xy)\cos x\right]
\end{aligned}$$

(d) La matrice jacobienne $J_{g\circ f}$ de la fonction composée $g \circ f$ s'écrit comme produit matricielle

$$J_{g\circ f} = J_g \circ J_f = \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} &= (xy^2\sin(xy)\cos x\exp(y^2))y\cos(xy) \\
&\quad - (xy\sin^2(xy)\exp(y^2))y\sin x \\
&\quad + (y\sin(xy)\cos x)y\exp(y^2)(\sin(xy) + xy\cos(xy)) \\
&= xy^3\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2)) - xy^2\sin x\sin^2(xy)\exp(y^2) \\
&\quad + y^2\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) + xy^3\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) \\
&= y^2\sin(xy)\exp(y^2)(2xy\cos x\cos(xy) - x\sin x\sin(xy) + \cos x\sin(xy)) \\
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} &= (xy^2\sin(xy)\cos x\exp(y^2))x\cos(xy) \\
&\quad + (xy\sin^2(xy)\exp(y^2))\cos x \\
&\quad + (y\sin(xy)\cos x)x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy) + xy\cos(xy)) \\
&= x^2y^2\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) + xy\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) \\
&\quad + xy(1+2y^2)\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) + x^2y^2\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) \\
&= 2x^2y^2\cos x\sin(xy)\cos(xy)\exp(y^2) + 2xy(1+y^2)\cos x\sin^2(xy)\exp(y^2) \\
&= 2xy\cos x\sin(xy)\exp(y^2)(xy\cos(xy) + (1+y^2)\sin(xy)).
\end{aligned}$$

Correction de **l'exercice 4391 ▲**

$\lim = 3$.

Correction de **l'exercice 4392 ▲**

(a)

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\pm 1}{1+x^2}$, $+$ si $y > x$, $-$ si $y < x$.
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pm 1}{1+y^2}$, $-$ si $y > x$, $+$ si $y < x$.

(c) Pour $y \geqslant x$, $f(x,y) = \frac{\pi}{2} + g(x,y)$, pour $y \leqslant x$, $f(x,y) = \frac{\pi}{2} - g(x,y)$.

Correction de **l'exercice 4395 ▲**

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$.

Correction de **l'exercice 4397 ▲**

(a)

(b) $\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

Correction de **l'exercice 4399 ▲**

$\Delta F = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r)$.

Correction de **l'exercice 4400 ▲**

$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -yf'(\pi/2)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = xf'(0)$.

Correction de **l'exercice 4401 ▲**

(a) f est homogène de degré 2, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré 1, donc ces trois fonctions tendent vers 0 en $(0,0)$. Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$.

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

Correction de **l'exercice 4405 ▲**

$\frac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{n-i-j} g}{\partial x^{k-i} \partial y^{n-k-j}}$.

Correction de **l'exercice 4406 ▲**

(a) pas de solution.

(b) $f(x,y) = \frac{y-1}{x+y+1} +$ cste.

(c) $f(x,y) = \frac{xy}{x+y} +$ cste.

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{x}{y} +$ cste.

Correction de **l'exercice 4407 ▲**

$f(y) = \lambda e^{-y}$, $F(x,y) = \lambda\left(\frac{x^2}{2} - (y+1)e^{-y}\right)$.

Correction de l'exercice 4408 ▲

$f(x,y) = g(x^2+y^2)$.

Correction de l'exercice 4409 ▲

$f(y) = \frac{y}{k}$, $g(z) = kz+\ell$, $F(x,y) = \left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)z + \frac{\ell y^2}{2k} + C$.

Correction de l'exercice 4410 ▲

(a) $f(x,y) = -\frac{\ln x}{xy} - \frac{1}{x}$.

(b) $y = \frac{\ln x}{\lambda x - 1}$.

Correction de l'exercice 4414 ▲

$\det(J_f) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

Correction de l'exercice 4416 ▲

$f(\mathbb{R}^3) = \{(u,v,w) \text{ tq } u+v>0,\ ue^{2w}-v>0\}$.

Correction de l'exercice 4418 ▲

$y = -\frac{x}{2} + \frac{9x^2}{16} + o(x^2) \Rightarrow$ tangente de pente $-\frac{1}{2}$, au dessus.

Correction de l'exercice 4419 ▲

(a)

(b) $\varphi(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Correction de l'exercice 4420 ▲

$\varphi'(1) = -\frac{1}{3}$, $\varphi''(1) = -\frac{8}{27}$.

Correction de l'exercice 4423 ▲

$x = 1 - \frac{\lambda+\mu}{5} + \frac{\lambda^2+\lambda\mu}{25} + o(\lambda^2+\mu^2)$.

Correction de l'exercice 4424 ▲

$x = \mathrm{sh}(a)$, $y = \mathrm{sh}(b) \Rightarrow u = \mathrm{sh}(a+b)$, $v = \mathrm{sh}(a+b)+\mathrm{ch}(a+b)$. donc $f(\mathbb{R}^2)$ est inclus dans l'hyperbole d'équation $v^2 - 2uv = 1$ et on doit avoir $v \geqslant u$ ce qui donne la branche supérieure.

Correction de l'exercice 4427 ▲

(a) $f(x,y) = \int_{t=0}^{1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right)dt$.

(b)

(c)

Correction de l'exercice 4428 ▲

(a) i. thm des trois cordes pour $u \mapsto f(x+uh)$ sur $[-1,1]$.

ii. Soit $\overline{B}_\infty(x,r) \subset U$ et y tel que $0 < \|x-y\|_\infty \leqslant r$. On note $t = \|x-y\|_\infty / r$ et $h = (y-x)/t$. Alors $y = x+th$ et $\|x \pm h\| = r$ donc :

$$|f(x)-f(y)| \leqslant t \max(|f(x+h)-f(x)|, |f(x-h)-f(x)|) \leqslant Mt$$

car la restriction de f aux côtés de $\overline{B}_\infty(x,r)$ est bornée (fonction convexe en dimension 1).

(b) La surface représentative de f est au dessus de ses plans tangents.

(c)

Correction de l'exercice 4430 ▲

(a) $df_M(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(M^{k-1}H + \dots + HM^{k-1})$.

(b)

(c) les matrices $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$ sont toutes semblables à M_∞ et ont même exponentielle I.

(d) $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi + 1/k \\ -4\pi^2/(2\pi+1/k) & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4435 ▲

(a) $xy/(x^2+y^2)$.

(b) f est lipschitzienne pour $\| \ \|_\infty$.

Correction de l'exercice 4436 ▲

(a) $2x^4y^2 \leqslant (x^4+y^2)^2$.

(b) $g_\theta(r) \sim r^2$.

(c) $f(x,x^2) = -x^4$. Donc $(0,0)$ n'est pas minimum local de f.

Correction de l'exercice 4438 ▲

(a)

(b) $\|f(x)\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ donc $x \mapsto \|f(x)-a\|^2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En ce point on a pour tout $h \in \mathbb{R}^n$: $(f(x)-a \mid df_x(h)) = 0$ et df_x est surjective (linéaire injective en dimension finie) donc $f(x) = a$.

Correction de l'exercice 4439 ▲

(a) Si u atteint son maximum en $(x,y) \in \Omega$ alors $d^2u(x,y)$ est négative, contradiction avec $\Delta u(x,y) > 0$.

(b) Soit $u_p(x,y) = u(x,y) + (x^2+y^2)/p$: $\Delta u_p = \Delta u + 2/p > 0$ donc u_p relève du cas précédent.
On a $\max\limits_{\Omega} u + \frac{M}{p} \geqslant \max\limits_{\Omega} u_p = \max\limits_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u_p \geqslant \max\limits_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u$ et on passe à la limite.

(c) Soit $u_1(x,y) = u(x,y) + \alpha\ln(x^2+y^2)$ où α est tel que $M_1(r_1) = M_1(r_2)$, avec $M_1(r) = \max_{x^2+y^2=r^2}(u(x,y))$. On a $\Delta u_1 \geqslant 0$ d'où $M_1(r) \leqslant M_1(r_1) = M_1(r_2)$ c'est-à-dire :

$$M(r) \leqslant M(r_1) + \alpha\ln(r_1/r) = M(r_2) - \alpha\ln(r/r_2) = \frac{M(r_1)\ln(r_2/r) + M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Correction de l'exercice 4440 ▲

(a) On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $h(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$ et l'on a $0 = \Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$ d'où :

$$0 = h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)\right]_{\theta=0}^{2\pi}$$

Le crochet est nul par 2π-périodicité de g donc $h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) = 0$ soit $h'(r) = \frac{K}{r}$ et $K = 0$ par continuité de h' en 0.

(b) $\pi r^2 f(0,0)$.

Correction de l'exercice 4441 ▲

(a) $\det(J_\varphi(x,y)) = f'(x)f'(y) - g'(x)g'(y) > 0$ donc le théorème d'inversion locale s'applique, il suffit de vérifier l'injectivité de φ. Si $\varphi(x,y) = \varphi(u,v)$ alors :

$$|x-u| \leqslant |f(x) - f(u)| = |g(v) - g(y)| \leqslant |v-y|$$
$$|v-y| \leqslant |f(v) - f(y)| = |g(x) - g(u)| \leqslant |x-u|$$

d'où $|x-u| \leqslant |x-u|$ et il y a inégalité stricte si $v \neq y$ ce qui est absurde donc $v = y$ et de même $u = x$.

(b) On a $\varphi(x,y) = (u,v)$ si et seulement si $x = f^{-1}(u - g(y))$ et $y = f^{-1}(v - g(f^{-1}(u - g(y)))) = h(y)$. h est k^2-lipschitzienne donc le théorème du point fixe s'applique.

Correction de l'exercice 4442 ▲

Sinon il existe $a \in \mathbb{R}^2$ telle que $g : x \mapsto f(x) - (a \mid x)$ n'a pas de point critique, donc pas de minimum ni de maximum. On a aussi $|g(x)|/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ d'où $\sup(g) = +\infty$ et $\inf(g) = -\infty$. Considérons pour $r > 0$ $E_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|x\| \geqslant r\}$: $g(E_r)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle, et $\sup(g(E_r)) = \sup(g) = +\infty$, $\inf(g(E_r)) = \inf(g) = -\infty$, d'où $g(E_r) = \mathbb{R}$. Ainsi il existe des x de normes arbitrairement grandes tels que $g(x) = 0$ en contradiction avec la propriété $|g(x)|/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$.

Remarque : l'hypothèse f de classe $\mathscr{C}^2$ est surabondante, la classe $\mathscr{C}^1$ suffit à conclure.

Correction de l'exercice 4443 ▲

Remarques :

– la transformation $f \mapsto g$ est appelée *transformation de Legendre*. On notera $g = f^*$ ci-dessous.

– l'hypothèse « H_f est définie positive en tout point » implique que f est convexe.

Étude d'un cas particulier : $f(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x \mid a) + \gamma$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

Alors $(x \mid y) - f(x) = -\alpha\left\|x - \frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2 + \alpha\left\|\frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2 - \gamma$ d'où $f^*(y) = \alpha\left\|\frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2 - \gamma = \alpha^*\|y\|^2 + \beta^*(y \mid a) + \gamma^*$ avec $\alpha^* = 1/4\alpha$, $\beta^* = -\beta/2\alpha$ et $\gamma^* = \beta^2\|a\|^2/4\alpha - \gamma$. Ainsi, f^* a la même forme que f, et on vérifie immédiatement que $f^{**} = f$.

Cas général : on montre que f^* est bien définie, vérifie les mêmes hypothèses que f et que l'on a $f^{**} = f$.

1. Bonne définition de f^* : à y fixé on a $(x \mid y) - f(x) \to -\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ donc le sup existe et est un max, atteint en un point x tel que $\nabla f(x) = y$. Ce point x est unique : en effet, si $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto (h \mid \nabla f(x+th))$ est strictement croissante (définie-positivité de H_f) ce qui implique $\nabla f(x+h) \neq \nabla f(x)$. Ainsi,

$$f^*(y) = (y \mid y^*) - f(y^*) \text{ avec } \nabla f(y^*) = y.$$

2. f^* est $\mathscr{C}^2$ et H_{f^*} est définie-positive : d'après ce qui précède, la fonction ∇f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$; sa différentielle est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice H_f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc f^* est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $y, h \in \mathbb{R}^n$:

$$d(f^*)_y(h) = (\nabla f^*(y) \mid h) = (h \mid y^*) + (y \mid dy^*(h)) - (\nabla f(y^*) \mid dy^*(h)) = (h \mid y^*)$$

puisque $\nabla f(y^*) = y$. On en déduit : $\nabla f^*(y) = y^*$, puis $H_{f^*}(y) = (H_f(y^*))^{-1}$, matrice symétrique définie positive.

3. $f^*(y)/\|y\| \to +\infty$ lorsque $\|y\| \to \infty$: soit $a > 1$ et $M_a = \sup\{f(x),\ \|x\| \leqslant a\}$. Pour $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $x = ay/\|y\|$ on a $f^*(y) \geqslant (x \mid y) - f(x) \geqslant a\|y\| - M_a \geqslant (a-1)\|y\|$ si $\|y\|$ est assez grand.

4. $f^{**} = f$: car pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f^{**}(x) = (x \mid y) - f^*(y)$ où y est défini par $\nabla f^*(y) = x$, c'est-à-dire $y^* = x$ et donc $f^{**}(x) = (y^* \mid y) - f^*(y) = f(y^*) = f(x)$.

Correction de l'exercice 4444 ▲

(a) ???

(b) On a pour $a, b \in \mathbb{R}$: $|\varphi(a+b) - \varphi(a) - b\varphi'(a)| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty b^2$.
Donc pour $f, h \in E$: $|T(f+h) - T(f) - (h \mid \varphi' \circ f)| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty \|h\|^2$, ce qui prouve que T est différentiable en f de différentielle $h \mapsto (h \mid \varphi' \circ f)$. On en déduit alors que T est continue en f.

Correction de l'exercice 4445 ▲

(a) Posons $\Delta = \{(x,y)/\ y \neq 0\}$. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en vertu de théorèmes généraux. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$|f(x,y) - f(x_0,0)| = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } y = 0 \\ y^2 \left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \end{array} \right. \leqslant y^2.$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} |f(x,y) - f(x_0,0)| = 0$ et donc f est continue en $(x_0,0)$. Finalement,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

(b) • f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. En particulier, d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur Δ. pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right),$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right),$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\sin\left(\frac{x}{y}\right) - 2\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right).$$

• **Existence de** $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$**.** Pour $x\neq x_0$, $\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0}=0$ et donc $\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0}\underset{x\to x_0}{\to}0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}0 \text{ si } y=0\\ y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0\end{cases}.}$$

• **Existence de** $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$**.** Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Pour $y\neq 0$,

$$\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right|=\begin{cases}0 \text{ si } y=0\\ y\left|\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right| \text{ si } y\neq 0\end{cases}\leqslant |y|.$$

et donc $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\underset{y\to 0}{\to}0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}0 \text{ si } y=0\\ 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0\end{cases}.}$$

• **Existence de** $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$**.** Pour $x\neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=0$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0.}$$

• **Existence de** $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$**.** Pour $y\neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y}=1$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1.}$$

Correction de l'exercice 4446 ▲

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\in[-1,1]$. Plus précisément, quand x décrit $\mathbb{R}$, $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2\times 0)}$ décrit $[-1,1]$ et donc quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}$ décrit $[-1,1]$. On suppose déjà que f est de classe C^2 sur $[-1,1]$. L'application g est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-\frac{2\sin(2x)}{\text{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\text{ch}\,2y}\right) \text{ puis } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=-\frac{4\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\text{ch}\,2y}\right)+\frac{4\sin^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\text{ch}\,2y}\right).$$

Ensuite,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-\frac{2\cos(2x)\,\text{sh}(2y)}{\text{ch}^2(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\text{ch}\,2y}\right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{4\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\text{ch}\,2y}\right)-2\cos(2x)\,\text{sh}(2y)\frac{-4\,\text{sh}(2y)}{\text{ch}^3(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\text{ch}\,2y}\right)+\frac{4\cos^2(2x)\,\text{sh}^2(2y)}{\text{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\text{ch}\,2y}\right).$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\Delta g(x,y) &= \frac{-8\cos(2x)\,\mathrm{ch}^2(2y)+8\cos(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^3(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\frac{4\sin^2(2x)\,\mathrm{ch}^2(2y)+4\cos^2(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\\
&= \frac{-8\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\frac{4(1-\cos^2(2x))\,\mathrm{ch}^2(2y)+4\cos^2(2x)(\mathrm{ch}^2(2y)-1)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\\
&= \frac{-8\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\frac{4\,\mathrm{ch}^2(2y)-4\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\\
&= \frac{4}{\mathrm{ch}^2(2y)}\left(-2\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\left(1-\frac{\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\right)f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\Delta g=0 &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ -2\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)+\left(1-\frac{\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\right)f''\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{ch}\,2y}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \forall t\in[-1,1],\ -2tf'(t)+(1-t^2)f''(t)=0 \Leftrightarrow \forall t\in[-1,1], ((1-t^2)f')'(t)=0\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall t\in[-1,1],\ (1-t^2)f'(t)=\lambda.
\end{aligned}$$

Le choix $\lambda\neq 0$ ne fournit pas de solution sur $[-1,1]$. Donc $\lambda=0$ puis $f'=0$ puis f constante ce qui est exclu. Donc, on ne peut pas poursuivre sur $[-1,1]$. On cherche dorénavant f de classe C^2 sur $]-1,1[$ de sorte que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(\frac{k\pi}{2},0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \forall t\in]-1,1[,\ (1-t^2)f'(t)=\lambda \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ \forall t\in]-1,1[,\ f'(t)=\frac{\lambda}{1-t^2}\\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}/\ \forall t\in]-1,1[,\ f(t)=\lambda\,\mathrm{argth}\,t+\mu.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4447 ▲

On dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x)=\lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda>0,\ \sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x)=r\lambda^{r-1}f(x),$$

et pour $\lambda=1$, on obtient

$$\forall x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=rf(x).$$

Correction de l'exercice 4448 ▲

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\ln(xy)) &= \frac{\mathrm{d}(xy)}{xy}=\frac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{xy}=\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}x}{x};\\
\mathrm{d}(xyz(1+\sinh(yz))) &= (1+\sinh(yz))\mathrm{d}(xyz)+xyz\mathrm{d}(\sinh(yz))\\
&= yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x+xz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}y+xy(1+\sinh(yz))\mathrm{d}z\\
&\quad +xyz\cosh(yz)\mathrm{d}(yz)\\
&= yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x+xz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}y+xy(1+\sinh(yz))\mathrm{d}z\\
&\quad +xyz^2\cosh(yz)\mathrm{d}y+xy^2z\cosh(yz)\mathrm{d}z\\
&= yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x\\
&\quad +xz(1+\sinh(yz)+yz\cosh(yz))\mathrm{d}y\\
&\quad +xy(1+\sinh(yz)+yz\cosh(yz))\mathrm{d}z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right) &= \left(\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right)\mathrm{d}(x^2y)+\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}(x-y)\\
&= x^2\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y+2xy\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x\\
&\quad+\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x-\sin(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y\\
&= \left(x^2\cos(x^2y)x-\sin(x^2y)\right)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y\\
&\quad+\left(2xy\cos(x^2y)+\sin(x^2y)\right)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4449 ▲

(a) La forme différentielle $x^2y^2\mathrm{d}x+x^3y\mathrm{d}y$ de degré 1 n'est pas fermée car la forme différentielle de degré 2

$$d(x^2y^2\mathrm{d}x+x^3y\mathrm{d}y)=2x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}x+3x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

est non nulle. Par conséquent, une fonction $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ du type cherché ne peut pas exister.

(b) Une fonction b du type cherché doit satisfaire à l'équation différentielle partielle

$$2x^2y-\frac{\partial b}{\partial x}=0$$

d'où $b(x,y)=\frac{2}{3}x^3y+k(y)$ où k est une fonction de la variable y. Une fonction g correspondante doit alors satisfaire aux équations différentielles partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}=x^2y^2,\ \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{2}{3}x^3y+k(y).$$

Il s'ensuit que g est de la forme $g(x,y)=\frac{1}{3}x^3y^2+K(y)$ où K est une fonction de la varriable y.

Correction de l'exercice 4450 ▲

(a) Un calcul immédiat donne $\mathrm{d}u+\mathrm{d}v=\mathrm{d}g$.

(b) Par conséquent, $g=u+v+c$ où la constante c est déterminée par la condition

$$3=g(1,1)=u(1,1)+v(1,1)+c=1+1+c$$

d'où $c=1$.

(c) Un calcul direct montre que l'application réciproque

$$k\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}$$

de h est donnée par la formule

$$k(u,v)=(x(u,v),y(u,v))=\left(\left(\frac{u^2}{v}\right)^{1/3},\left(\frac{v^2}{u}\right)^{1/3}\right).$$

(d) $\mathrm{d}(g\circ k)=\mathrm{d}(u\circ k)+\mathrm{d}(v\circ k)=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$ car $u(k(u,v))=u$ et $v(k(u,v))=v$.

(e) Un calcul immédiat donne

$$J_h=\begin{bmatrix}2xy & x^2\\ y^2 & 2xy\end{bmatrix},\quad J_k=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}(uv)^{-1/3} & -\frac{u^{2/3}}{3v^{4/3}}\\ -\frac{v^{2/3}}{3u^{4/3}} & \frac{2}{3}(uv)^{-1/3}\end{bmatrix}$$

d'où $J_h(x,y)J_k(h(x,y))=I_2$.

Correction de l'exercice 4451 ▲

$$\mathrm{d}\sin(xyz) = yz\cos(xyz)\mathrm{d}x + zx\cos(xyz)\mathrm{d}y + xy\cos(xyz)\mathrm{d}z$$

d'où la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} -y^2z^2\sin(xyz) & z\cos(xyz)-xyz^2\sin(xyz) & y\cos(xyz)-xy^2z\sin(xyz) \\ z\cos(xyz)-xyz^2\sin(xyz) & -x^2z^2\sin(xyz) & x\cos(xyz)-x^2yz\sin(xyz) \\ y\cos(xyz)-xy^2z\sin(xyz) & y\cos(xyz)-x^2yz\sin(xyz) & -x^2y^2\sin(xyz) \end{bmatrix}.$$

De même

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\sin^2(y/x)) &= -2yx^{-2}\sin(y/x)\cos(y/x)\mathrm{d}x + 2x^{-1}\sin(y/x)\cos(y/x)\mathrm{d}y \\ &= \sin(2y/x)\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) \end{aligned}$$

d'où la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} 2yx^{-3}\sin(2y/x) + 2y^2x^{-4}\cos(2y/x) & -x^{-2}\sin(2y/x) - 2yx^{-3}\cos(2y/x) \\ -x^{-2}\sin(2y/x) - 2yx^{-3}\cos(2y/x) & 2x^{-2}\cos(2y/x) \end{bmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4452 ▲

(a) $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{\partial F}{\partial r} + r\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$

(b) $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{r}$

(c) $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$

(d) En prenant la somme des trois équations suivantes

$$\begin{aligned} r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ r\frac{\partial F}{\partial r} &= x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

on trouve le résultat cherché.

Correction de l'exercice 4453 ▲

(a) Avec $\frac{\partial}{\partial u} = 1/2(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$ et $\frac{\partial}{\partial v} = 1/2(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$ nous obtenons les identités

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{aligned}$$

d'où pour que f satisfasse à l'équation (7) il faut et il suffit que F satisfasse à l'équation (23).

(b) Supposons que F satisfasse à l'équation (23). Alors la fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$ est une fonction disons h_1 seulement de la variable u et la fonction $\frac{\partial F}{\partial v}$ est une fonction disons h_2 seulement de la variable v. Par conséquent, $F(u,v) = g_1(u) + g_2(v)$ où $g_1' = h_1$ et $g_2' = h_2$.

(c) La solution générale de (7) s'écrit alors

$$f(x,t) = g_1(u) + g_2(v) = g_1(x+t) + g_2(t-x).$$

La fonction g_1 décrit une onde qui se déplace vers la droite et la fonction g_1 décrit une onde qui se déplace vers la gauche.
Enfin, pour trouver la solution unique satisfaisant aux condition initiales (8) nous constatons que les conditions initiales entraînent les identités

$$f(x,0) = g_1(x) + g_2(-x) = \sin x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = g_1'(x) - g_2'(-x) = \cos x$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_1'(x) + g_2'(-x) = -\cos x$$

d'où $g_1' = 0$ et $g_2'(-x) = -\cos x$, c.a.d. $g_2(x) = \sin(-x)$. Par conséquent, la solution unique cherchée f s'écrit

$$f(x,t) = \sin(x-t).$$

Correction de l'exercice 4454 ▲

On pose $D = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ puis $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$.
• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
• f est de classe C^1 sur Ω en vertu de théorèmes généraux et pour $(x,y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

• Etudions la continuité de f en $(0,0)$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \begin{cases} y^2\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant \begin{cases} y^2 \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant y^2.$$

Comme y^2 tend vers 0 quand (x,y) tend vers 0, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$ et donc f est continue en $(0,0)$ puis

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = \frac{0-0}{x-x_0} = 0.$$

Donc $\frac{f(x,x_0)-f(x_0,0)}{x-x_0}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$.
Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} = \frac{y^2\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{y} = y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right| \leqslant |y|$ puis que $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}$ tend vers 0 quand y tend vers 0. Par suite, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right| = \begin{cases} |y|\left|\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant |y|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ quand (x,y) tend vers $(x_0,0)$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0,0)$ et finalement

la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Supposons tout d'abord $x_0 = 0$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \begin{cases} \left|2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant 2|y| + |x|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|x| + 2|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Supposons maintenant $x_0 \neq 0$. Pour $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = 2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$. Quand y tend vers 0, $2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)$ tend vers 0 car $\left|2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right|$ et $x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0 \neq 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0 et la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0,0)$ si $x_0 \neq 0$. On a montré que

f est de classe C^1 sur $\Omega \cup \{(0,0)\}$.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

On a montré que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont différents. D'après le théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\Omega \cup \{(0,0)\}$.

Correction de l'exercice 4455 ▲

Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2\frac{\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= -4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\sin^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) \\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) + 4\frac{1-\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2\frac{\cos(2x)\,\mathrm{sh}(2y)}{\mathrm{ch}^2(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -2\cos(2x)\frac{2\,\mathrm{ch}^3(2y)-4\,\mathrm{sh}^2(2y)\,\mathrm{ch}(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)+4\frac{\cos^2(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)\\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)}(-\mathrm{ch}^2(2y)+2)f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)+4\frac{\cos^2(2x)(\mathrm{ch}^2(2y)-1)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\mathrm{ch}^2(2y)}{4}\Delta g(x,y) = -2\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)+\left(1-\frac{\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right).$$

Maintenant, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $-1\leqslant\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\leqslant 1$ et d'autre part, l'expression $\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2\times)}=\cos(2x)$ décrit $[-1,1]$ quand x décrit $\mathbb{R}$. Donc $\left\{\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2\times)},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=[-1,1]$. Par suite,

$$\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2,\ \Delta g(x,y)=0\Leftrightarrow\forall t\in[-1,1],\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0.$$

On cherche une application f de classe C^2 sur $]-1,1[$. Or $\left|\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right|=1\Leftrightarrow|\cos(2x)|=\mathrm{ch}(2y)\Leftrightarrow$ $|\cos(2x)|=\mathrm{ch}(2y)=1\Leftrightarrow y=0$ et $x\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(\frac{k\pi}{2},0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \Delta g(x,y)=0 &\Leftrightarrow\forall t\in]-1,1[,\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0\\ &\Leftrightarrow\forall t\in]-1,1[,\ ((1-t^2)f')'(t)=0\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in]-1,1[,\ f'(t)=\\ &\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in]-1,1[,\ f(t)=\lambda\,\mathrm{argth}\,t+\mu.\end{aligned}$$

De plus, f n'est pas constante si et seulement si $\mu=0$.

$$\boxed{\text{L'application } t\mapsto\mathrm{argth}\,t \text{ convient.}}$$

Correction de l'exercice 4456 ▲

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de f en (x,y) s'écrit $\begin{pmatrix} c(x,y) & -s(x,y)\\ s(x,y) & c(x,y)\end{pmatrix}$ où c et s sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $c^2+s^2=1$ $(*)$. Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Ceci s'écrit encore $\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} c\\ s\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} -s\\ c\end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial s}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial c}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}\ (**).$$

En dérivant $(*)$ par rapport à x ou à y, on obtient les égalités $c\frac{\partial c}{\partial x}+s\frac{\partial s}{\partial x}=0$ et $c\frac{\partial c}{\partial y}+s\frac{\partial s}{\partial y}=0$. Ceci montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial x}\\ \frac{\partial s}{\partial x}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}\\ \frac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix} c\\ s\end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires. Mais l'égalité $(**)$ montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre. Finalement, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$ et donc, il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f en (x,y) est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Soit g la rotation d'angle θ prenant la même valeur que f en $(0,0)$. f et g ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f = g$ et f est une rotation affine.

> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation.
> Alors f est une rotation affine.

Correction de l'exercice 4457 ▲

(a) $df = (2x-y)\mathrm{d}x + (2y-x)\mathrm{d}y$ et $\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ d'où

$$\begin{aligned}(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u,v)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= u(2u-v)+v(2v-u) = 2(u^2-uv+v^2) \\ &= 2\left(\left(u-\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}v^2\right).\end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0,0)$ est positive et ce point présente donc un minimum local.

(b) $f(x,y) = x^2+2xy+y^2+6 = (x+y)^2+6$ d'où le point $(0,0)$ présente un minimum local.

(c) $df = (3x^2+2x+2y^2+3y)\mathrm{d}x + (4xy-4y^3+3x+2y)\mathrm{d}y$ et

$$\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} 6x+2 & 4y+3 \\ 4y+3 & -12y^2+4x+2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u,v)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= (2u+3v)u+(3u+2v)v = 2(u^2+3uv+v^2) \\ &= 2\left(\left(u+\frac{3v}{2}\right)^2-\frac{5}{4}v^2\right).\end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0,0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.

Correction de l'exercice 4458 ▲

Puisque $df = \cos x\,\mathrm{d}x + (2y-2)\mathrm{d}y$, les points critiques sont les points $((k+1/2)\pi, 1)$ $(k \in \mathbb{Z})$. En plus, $\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et

$$-\sin((k+1/2)\pi) = (-1)^{k+1}$$

d'où $\mathrm{Hess}_f((k+1/2)\pi,1) = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Par conséquent, si k est impaire, le point $((k+1/2)\pi,1)$ présente un minimum local et, si k est paire, le point $((k+1/2)\pi,1)$ présente un point selle.

Correction de l'exercice 4459 ▲

(a) $dF = f(y)f'(x)\mathrm{d}x + f(x)f'(y)\mathrm{d}y$ et

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{bmatrix} f(y)f''(x) & f'(x)f'(y) \\ f'(x)f'(y) & f(x)f''(y) \end{bmatrix} \tag{39}$$

d'où $\mathrm{Hess}_f(0,0) = (f'(0))^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et

$$(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (f'(0))^2(u,v)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 2(f'(0))^2 uv$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0,0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point ne peut pas présenter un extremum relatif. En effet, le point $(0,0)$ est critique mais un point selle.

(b) D'après la partie (1.) et la périodicité, les points de la forme

$$(x,y) = (k,l) \in \mathbb{R}^2,\ k,l \in \mathbb{Z}, \tag{40}$$

présentent des points selle. Également d'après la partie (1.),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(y)f'(x) = 2\pi\sin(2\pi y)\cos(2\pi x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f(x)f'(y) = 2\pi\sin(2\pi x)\cos(2\pi y).$$

Par conséquent, pour que le point (x,y) soit critique il faut et il suffit qu'il soit de la forme

$$(k,l),\ (k+\tfrac{1}{2},l),\ (k,l+\tfrac{1}{2}),\ (k+\tfrac{1}{2},l+\tfrac{1}{2}),\ k,l \in \mathbb{Z},$$

ou

$$(k+\tfrac{1}{4},l+\tfrac{1}{4}),\ (k+\tfrac{1}{4},l+\tfrac{3}{4}),\ (k+\tfrac{3}{4},l+\tfrac{1}{4}),\ (k+\tfrac{3}{4},l+\tfrac{3}{4}),\ k,l \in \mathbb{Z}.$$

D'après la périodicité, il suffit d'examiner les huit points

$$(0,0),\ (\tfrac{1}{2},0),\ (0,\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4})$$

et, d'après (1.), l'origine présente un point selle. D'après (39),

$$\mathrm{Hess}_f(0,\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(0) & f'(0)f'(\frac{1}{2}) \\ f'(0)f'(\frac{1}{2}) & f(0)f''(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = 16\pi^2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{Hess}_f(\tfrac{1}{2},0) = \begin{bmatrix} f(0)f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(0) \\ f'(\frac{1}{2})f'(0) & f(\frac{1}{2})f''(0) \end{bmatrix} = 16\pi^2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{Hess}_f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) \\ f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) & f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = 16\pi^2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où les points $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ présentent des points selle. Il est géométriquement évident que le comportement de la fonction sin entraîne que les points $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ et $(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ présentent des maxima et que les points $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ et $(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ présentent des minima.

Correction de l'exercice 4460 ▲

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \sin(\pi xy) + \sin(\pi yz) - 1.$$

Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y \cos(\pi xy), \ \frac{\partial f}{\partial y} = \pi(x\cos(\pi xy) + z\cos(\pi yz)), \ \frac{\partial f}{\partial y} = \pi y \cos(\pi yz)$$

et, après simplification, au point $(1, \frac{1}{6}, 1)$, l'équation (24) du plan tangent à la surface de niveau en discussion devient

$$(x-1) + 12(y-1/6) + (z-1) = 0.$$

Ainsi, en ce point, le vecteur $(1, 12, 1)$ est perpendiculaire à la surface.

Correction de l'exercice 4461 ▲

(a) Puisque $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + 2e^y \cos(2x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + e^y \sin(2x)$ il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Par conséquent, il existe une fonction h de la variable x définie au voisinage de 0 telle que $h(0) = 0$ et telle que, pour qu'au voisinage de $(0,0)$ les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $ye^x + e^y \sin(2x) = 0$ il faut et il suffit que $y = h(x)$; de même il existe une fonction k de la variable y définie au voisinage de 0 telle que $h(0) = 0$ et telle que, pour qu'au voisinage de $(0,0)$ les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $ye^x + e^y \sin(2x) = 0$ il faut et il suffit que $x = k(y)$. En plus,

$$h'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -2, \ k'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = -\tfrac{1}{2}.$$

(b) Puisque le point $(0,0)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$, en 0, les fonctions h et k prennent les valeurs $h(0) = 0$ et $k(0) = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq 0 \\ ye^x + e^y \sin(2x) = 0}} y/x = h'(0) = -2.$$

Correction de l'exercice 4462 ▲

(a) Puisque $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)^2 + 2x(x+1) = (x+1)(3x+1) = 3x^2 + 4x + 1,$$

les points stationnaires de f sont les points $(-1,0)$ et $(-1/3,0)$. En plus,

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

d'où $\mathrm{Hess}_f(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{Hess}_f(-1/3,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Par conséquent la forme hessienne au point $(-1,0)$ est définie négative et ce point présente un maximum local ; de même, la forme hessienne au point $(-1/3,0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.

(b) La courbe $y = \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geqslant 0$ passe par les points $(0,0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$, $(1,2)$, et $(2, 3\sqrt{2})$; elle a une tangente verticale à l'origine, le point $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ est un point d'inflexion, la pente en ce point vaut $\sqrt{3}$, et c'est la pente minimale de la courbe. Ces faits se déduisent des expressions $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1}$ et $y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. La courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geqslant 0$ s'obtient par réflexion de la courbe $y = \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geqslant 0$ par rapport à l'axe des x.

(c) Dans la boule ouverte
$$\{(x,y,z);(x+1)^2+y^2+x^2<1\}\subseteq\mathbb{R}^3,$$
le graphe $z=f(x,y)$ de la fonction f ne rencontre le plan des x et y qu'au point $(-1,0)$. Par conséquent, l'intersection $D\cap\mathscr{C}$ du disque
$$D=\{(x,y);(x+1)^2+y^2<1\}$$
avec $\mathscr{C}$ ne consiste qu'au point $(-1,0)$.

(d) Voir l'indication de l'exercice précédent.

(e) Quel que soit le point (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ distinct de $(-1,0)$, d'après (1.),
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\neq(0,0).$$
L'assertion est donc une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites.

Correction de l'exercice 4464 ▲

(a) $(0,0)$: non extrémal
$(1,1)$: maximum local

(b) $(0,0)$: non extrémal
$\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$: minimum absolu

(c) $(-2/15,-1/5)$: maximum local
$(x,0)$: max. local pour $x<-1/3$, min. local pour $x>-1/3$
$(0,y)$: max. local pour $y<-1/2$, min. local pour $y>-1/2$

(d) $(2^{-1/3},4^{-1/3})$: maximum absolu

(e) prendre le log. $(1,1)$: maximum absolu

(f) $(-1,-1)$: non extrémal

(g) $(1,0)$: minimum absolu
$(e^{-2},0)$: non extrémal

(h) $=MA+MB\Rightarrow$ minimum absolu sur $[A,B]$

(i) $M\in\text{med}(A,B)$, $\overline{(\vec{MA},\vec{MB})}=\pm\frac{2\pi}{3}$
$M=A,B$: minimum absolu
$M=O$

Correction de l'exercice 4465 ▲

(a)

(b) i. isobarycentre de ABC.
ii. Point de Fermat ou A,B,C.
iii. A,B,C.

Correction de l'exercice 4466 ▲

(a) $4S=\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$.

(b) max = $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 4467 ▲

Existence d'un maximum par compacité. Soient x, y les coordonnées d'un point M dans un repère orthonormé du plan et (u, v, w) les coordonnées barycentriques de M par rapport à A, B, C (avec $u+v+w=1$). u, v, w sont des fonctions affines de x, y, z et (AB) a pour équation barycentrique $w=0$ d'où $d(M, AB) = \alpha|w|$ pour un certain réel $\alpha > 0$. De même pour $d(M, AC)$ et $d(M, BC)$ et $f(M) = \alpha\beta\gamma|u||v||w|$. Lorsque M varie dans le triangle, (u, v, w) décrit tous les triplets de réels positifs de somme 1 et on cherche le maximum du produit uvw, il est atteint quand u, v, w sont égaux, c'est-à-dire au centre de gravité du triangle.

Correction de l'exercice 4469 ▲

Il existe une base orthonormale de E et un réel λ tels que $f(x) = \lambda x_1$ et $g(x) = \lambda x_1 e^{-x_1^2} e^{-x_2^2 - \cdots - x_n^2}$. Donc g est maximale/minimale pour $x_1 = \pm 1/\sqrt{2}$, $x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Correction de l'exercice 4470 ▲

Le minimum demandé existe car $\varphi(M, N, P) \to +\infty$ quand l'un au moins des points M, N, P tend vers l'infini sur sa droite personnelle. Soient $D_1 \cap D_2 = \{A\}$, $D_2 \cap D_3 = \{B\}$, $D_3 \cap D_1 = \{C\}$ et A', B', C' les milieux de $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. Déjà on a $\varphi(B', C', A') = \frac{3}{2}a$ et $\varphi(A, N, P) \geqslant 2AP \geqslant a\sqrt{3}$ donc le minimum n'est pas atteint lorsque l'un des points M, N, P est confondu avec l'un des points A, B, C, ni non plus si l'un des points M, N, P est hors du triangle ABC. Pour N, P fixés hors de D_1, on fait varier M sur D_1 : $M = A + t\vec{AB}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et on considère $f(t) = \varphi(M, N, P)$. Alors $f'(t) = \left(\vec{AB} \mid \frac{\vec{MN}}{MN} + \frac{\vec{MP}}{MP}\right)$ donc $f(t)$ est minimal lorsque D_1 est la bissectrice extérieure des demi-droites $[MN)$ et $[MP)$.

Soit (M, N, P) un triplet réalisant le minimum de φ et α, β, γ les angles du triangle MNP en P, M et N. Les angles du triangle AMN sont $\pi/3$, $(\pi - \beta)/2$ et $(\pi - \gamma)/2$ d'où $2\pi/3 = \beta + \gamma = \pi - \alpha$ et donc $\alpha = \pi/3 = \beta = \gamma$. On en déduit que (MP) est paralèle à (AB), (MN) à (BC) et (NP) à (AC) puis que $(M, N, P) = (B', C', A')$.

Correction de l'exercice 4471 ▲

(a) On fixe $A_i \in D_i$ et $\vec{u}_i$ un vecteur directeur de D_i. Soit $M_i = A_i + x_i\vec{u}_i$. Alors

$$\begin{aligned}
f(M_1, M_2, M_3) = f(A_1, A_2, A_3) \\
&+ 2\Big((\vec{A_1A_2} \mid x_2\vec{u}_2 - x_1\vec{u}_1) + (\vec{A_2A_3} \mid x_3\vec{u}_3 - x_2\vec{u}_2) + (\vec{A_3A_1} \mid x_1\vec{u}_1 - x_3\vec{u}_3)\Big) \\
&+ \Big(\|x_2\vec{u}_2 - x_1\vec{u}_1\|^2 + \|x_3\vec{u}_3 - x_2\vec{u}_2\|^2 + \|x_1\vec{u}_1 - x_3\vec{u}_3\|^2\Big) \\
&= a + b(x_1, x_2, x_3) + c(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}$$

b est une forme linéaire et c est une forme quadratique positive, et même définie positive car $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont deux à deux non colinéaires. Il en résulte que $f(M_1, M_2, M_3) \to +\infty$ lorsque $|x_1| + |x_2| + |x_3| \to \infty$, donc par continuité, f admet un minimum.

Choisissons alors A_1, A_2, A_3 de sorte que $f(A_1, A_2, A_3)$ soit égal à ce minimum. On a alors $b = 0$ car (A_1, A_2, A_3) est point critique de f, d'où $f(M_1, M_2, M_3) > f(A_1, A_2, A_3)$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ vu la définie-positivité de c. Ceci prouve l'unicité du triplet où f atteint son minimum.

(b) On soupçonne fortement le triplet constitué des milieux des côtés. En notant A_1, A_2, A_3 ces milieux, il suffit de vérifier que la forme linéaire b de la réponse précédente est nulle, et c'est clairement le cas après regroupement autour de x_1, x_2, x_3.

Correction de l'exercice 4472 ▲

On paramètre le chemin en coordonnéees sphériques par $t \mapsto (\theta(t), \phi(t))$.

La longueur du chemin est $\int_{t=0}^{1} \sqrt{\phi'^2(t) + \sin^2(\phi(t))\theta'^2(t)dt} \geqslant \left|\int_{t=0}^{1} \phi'(t)dt\right|$ avec égalité si et seulement si $\theta' = 0$ et ϕ' est de signe constant. On trouve donc les méridiens.

Correction de l'exercice 4473 ▲

Soit $y \in B$ orthogonal à x. La fonction $g : \theta \mapsto f(x\cos\theta + y\sin\theta)$ admet un extrémum en 0, donc $g'(0) = 0$, soit $\nabla f(x) \perp y$. Si $x = 0$ on a donc $\nabla f(0) = 0$. Sinon, $\nabla f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et en faisant un développement limité de $f(x - tx)$ on voit que $\lambda \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 4474 ▲

(a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f. Or, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{array}\right. .$$

Donc si f admet un extremum local, c'est nécessairement en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ avec $f\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y &= \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{y}{2} + 1\right)^2 + y^2 + 3y = \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2y - 1 \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} \geqslant -\frac{7}{3} = f\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Donc f admet un minimum local en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ égal à $-\frac{7}{3}$ et ce minimum local est un minimum global. D'autre part, f n'admet pas de maximum local.

(b) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f. Or, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (1,1), (-1,-1).$$

Les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. Maintenant, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$. Ceci permet de restreindre l'étude aux deux points $(0,0)$ et $(1,1)$. • Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = x^4 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(x,x) = -4x^2 + 2x^4 = 2x^2(-2 + x^2) < 0$ sur $]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$. Donc f change de signe dans tous voisinage de $(0,0)$ et puisque $f(0,0) = 0$, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. • Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+k) - f(1,1) &= (1+h)^4 + (1+k)^4 - 4(1+h)(1+k) + 2 = 6h^2 + 6k^2 - 4hk + 4h^3 + 4k^3 + h^4 + k^4 \\ &\geqslant 6h^2 + 6k^2 - 2(h^2 + k^2) + 4h^3 + 4k^3 + h^4 + k^4 = 4h^2 + 4h^3 + h^4 + 4k^2 + 4k^3 + k^4 \\ &= h^2(2h^2 + 1)^2 + k^2(2k^2 + 1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

f admet donc un minimum global en $(1,1)$ (et en $(-1,-1)$) égal à -2.

Correction de l'exercice 4475 ▲

Soit M un point intérieur au triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On note x, y, z et $\mathscr{A}$ les aires respectives des triangles MBC, MCA, MAB et ABC. On a

$$d(M,(BC))d(M,(CA))d(M(AB)) = \frac{2\text{aire}(MBC)}{a}\frac{2\text{aire}(MCA)}{b}\frac{2\text{aire}(MAB)}{c} = \frac{8xyz}{abc} = \frac{8}{abc}xy(\mathscr{A}-x-y).$$

On doit donc déterminer le maximum de la fonction $f(x,y) = xy(\mathscr{A}-x-y)$ quand (x,y) décrit le triangle ouvert $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x>0,\ y>0,\ x+y<\mathscr{A}\}$. On admet que f admet un maximum global sur le triangle fermé $T' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant \mathscr{A}\}$ (cela résulte d'un théorème de math Spé : « une fonction numérique continue sur un compact admet un minimum et un maximum »). Ce maximum est atteint dans l'intérieur T de T' car f est nulle au bord de T' et strictement positive à l'intérieur de T'.

Puisque f est de classe C^1 sur T qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f atteint son maximum sur T en un point critique de f. Or, pour $(x,y) \in T^2$,

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y(\mathscr{A}-x-y)-xy=0\\ y(\mathscr{A}-x-y)-xy=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y(\mathscr{A}-2x-y)=0\\ x(\mathscr{A}-x-2y)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x+y=\mathscr{A}\\ x+2y=\mathscr{A}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=\frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Le maximum cherché est donc égal à $\frac{8}{abc} \times \frac{\mathscr{A}}{3} \times \frac{\mathscr{A}}{3} \times \left(\mathscr{A} - \frac{\mathscr{A}}{3} - \frac{\mathscr{A}}{3}\right) = \frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$. (On peut montrer que ce maximum est obtenu quand M est le centre de gravité du triangle ABC).

Correction de l'exercice 4476 ▲

Soient $\mathscr{R}$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique puis M, A et B les points de coordonnées respectives (x,y), $(0,a)$ et $(a,0)$ dans $\mathscr{R}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = MA+MB \geqslant AB = a\sqrt{2}$ avec égalité si et seulement si $M \in [AB]$. Donc

$$\boxed{\text{Le minimum de } f \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ existe et vaut } a\sqrt{2}.}$$

Correction de l'exercice 4477 ▲

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC. Soit M un point intérieur au triangle ABC. On note I, J et K les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On pose $u =$ aire de MBC, $v =$ aire de MCA et $w =$ aire de MAB. On a

$$d(M,(BC)) \times d(M,(CA)) \times d(M,(AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc}uv(\mathscr{A}-u-v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f\ :\ (u,v) \mapsto uv(\mathscr{A}-u-v)$ sur le domaine

$$T = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0 \text{ et } u+v \leqslant \mathscr{A}\right\}.$$

T est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet :

- $\forall (u,v) \in T^2$, $\|(u,v)\|_1 = u+v \leqslant \mathscr{A}$ et donc T est bornée.

- Les applications $\varphi_1\ :\ (u,v) \mapsto u$, $\varphi_2\ :\ (u,v) \mapsto v$ et $\varphi_3\ :\ (u,v) \mapsto u+v$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que formes

linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u \geqslant 0\} = \varphi_1^{-1}([0,+\infty[)$, $P_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ v \geqslant 0\} = \varphi_2^{-1}([0,+\infty[)$ et $P_3 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u+v \leqslant 0\} = \varphi_3^{-1}(]-\infty,0])$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$

en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est un

fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$.

Puisque T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, T est un compact de $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

f est continue sur le compact T à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que polynôme à plusieurs variables et donc f admet un maximum sur T.

Pour tout (u,v) appartenant à la frontière de T, on a $f(u,v)=0$. Comme f est strictement positive sur $\overset{\circ}{T}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u>0,\ v>0 \text{ et } u+v<0\}$, f admet son maximum dans $\overset{\circ}{T}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{T}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet un maximum en $(u_0,v_0)\in\overset{\circ}{T}$, (u_0,v_0) est nécessairement un point critique de f. Soit $(u,v)\in\overset{\circ}{T}$.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=0\\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}v(\mathscr{A}-2u-v)=0\\ u(\mathscr{A}-u-2v)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2u+v=\mathscr{A}\\ u+2v=\mathscr{A}\end{array}\right.\Leftrightarrow u=v=\frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Puisque f admet un point critique et un seul à savoir $(u_0,v_0)=\left(\frac{\mathscr{A}}{3},\frac{\mathscr{A}}{3}\right)$, f admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0,v_0)=\frac{\mathscr{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur au triangle ABC aux cotés de ce triangle est donc $\frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$.

Remarque. On peut démontrer que pour tout point M intérieur au triangle ABC, on a $M=\text{bar}((A,\text{aire de }MBC),(B,\text{ai}$
Si maintenant M est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en G l'isobarycentre du triangle ABC.

Correction de l'exercice 4478 ▲

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(0,a)$ et $(a,0)$ dans un certain repère $\mathscr{R}$ orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|_2+\left\|\overrightarrow{MB}\right\|_2=MA+MB\geqslant AB \text{ avec égalité si et seulement si } M\in[AB].$$

Donc f admet un minimum global égal à $AB=a\sqrt{2}$ atteint en tout couple (x,y) de la forme $(\lambda a,(1-\lambda)a)$, $\lambda\in[0,1]$.

Correction de l'exercice 4480 ▲

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\varphi(x,y)=(z,t)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x-e^y=z\\ x+y=t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\ e^x-e^{t-x}=z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\ (e^x)^2-ze^x-e^t=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\ e^x=z-\sqrt{z^2+4e^t}\text{ ou } e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t}\\ y=t-x\end{array}\right.\quad(\text{car } z-\sqrt{z^2+4e^t}<z-\sqrt{z^2}=z-|z|\leqslant 0)$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t})\\ y=t-\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t})\end{array}\right.\quad(\text{car } z+\sqrt{z^2+4e^t}>z+\sqrt{z^2}=z+|z|\geqslant 0).$$

Ainsi, tout élément $(z,t)\in\mathbb{R}^2$ a un antécédent et un seul dans $\mathbb{R}^2$ par φ et donc φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de jacobien $J_\varphi(x,y)=\left|\begin{array}{cc}e^x & -e^y\\ 1 & 1\end{array}\right|=e^x+e^y$. Le jacobien de φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. En résumé, φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et le jacobien de φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. On sait alors que

$$\boxed{\varphi \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ sur lui-même.}}$$

Correction de l'exercice 4481 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x: y\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty} f_x(y), \lim_{y\to+\infty} f_x(y)[= \mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y) = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.

La fonction $f : (x,y) \mapsto y^{2n+1} + y - x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2n+1)y^{2n} + 1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x,y) = 0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(x))^{2n+1} + \varphi(x) - x = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $(2n+1)\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n} + \varphi'(x) - 1 = 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \frac{1}{(2n+1)(\varphi(x))^{2n}+1}.$$

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- C'est vrai pour $p = 1$.

- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que la fonction φ soit p fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\varphi' = \frac{1}{(2n+1)\varphi^{2n}+1}$ est

p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit

que la fonction φ est $p+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Calculons maintenant $I = \int_0^2 \varphi(t)\,dt$. On note tout d'abord que, puisque $0^{2n+1} + 0 - 0 = 0$, on a $\varphi(0) = 0$ et puisque $1^{2n+1} + 1 - 2 = 0$, on a $\varphi(2) = 1$.

Maintenant, pour tout réel x de $[0,2]$, on a $\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} + \varphi'(x)\varphi(x) - x\varphi'(x) = 0$ (en multipliant par $\varphi'(x)$ les deux membres de l'égalité définissant $\varphi(x)$) et en intégrant sur le segment $[0,2]$, on obtient

$$\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx + \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx - \int_0^2 x\varphi'(x)\,dx = 0\ (*).$$

Or, $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx = \left[\frac{(\varphi(x))^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^2 = \frac{1}{2n+2}$. De même, $\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx = \left[\frac{(\varphi(x))^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}$ et donc $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx + \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2n+2}$. D'autre part, puisque les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \varphi(x)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,2]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$-\int_0^2 x\varphi'(x)\,dx = [-x\varphi(x)]_0^2 + \int_0^2 \varphi(x)\,dx = -2 + I.$$

L'égalité $(*)$ s'écrit donc $\frac{n+2}{2n+2} - 2 + I = 0$ et on obtient $I = \frac{3n+2}{2n+2}$.

$$\boxed{\int_0^2 \varphi(x)\,dx = \frac{3n+2}{2n+2}.}$$

Correction de l'exercice 4482 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : y \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty} f_x(y), \lim_{y\to+\infty} f_x(y)[= \mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y) = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.

La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y} + 1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x,y) = 0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} + \varphi'(x) = 0$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{e^{x+\varphi(x)}}{e^{x+\varphi(x)}+1}\ (*).$$

On en déduit par récurrence que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet en 0 un développement limité d'ordre 3. Déterminons ce développement limité.

1ère solution. Puisque $e^{0+0}+0-1=0$, on a $\varphi(0)=0$. L'égalité $(*)$ fournit alors $\varphi'(0)=-\frac{1}{2}$ et on peut poser $\varphi(x)\underset{x\to 0}{=}-\frac{1}{2}x+ax^2+bx^3+o(x^3)$. On obtient

$$\begin{aligned}
e^{x+\varphi(x)} &\underset{x\to 0}{=} e^{\frac{x}{2}+ax^2+bx^3+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(\frac{x}{2}+ax^2+bx^3\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+ax^2\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\left(a+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(b+\frac{a}{2}+\frac{1}{48}\right)x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

L'égalité $e^{x+\varphi(x)}+\varphi(x)-1=0$ fournit alors $a+\frac{1}{8}+a=0$ et $b+\frac{a}{2}+\frac{1}{48}+b=0$ ou encore $a=-\frac{1}{16}$ et $b=\frac{1}{192}$.

2ème solution. On a déjà $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0)=0$. En dérivant l'égalité $(*)$, on obtient

$$\varphi''(x)=-\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)}+1)-(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)})}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}=-\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2},$$

et donc $\frac{\varphi''(0)}{2}=-\frac{\frac{1}{2}}{2\times 2^2}=-\frac{1}{16}$. De même,

$$\varphi^{(3)}(x)=-\varphi''(x)\frac{e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}-(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{(1+\varphi'(x))}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}+(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{2(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^3},$$

et donc $\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1/2}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{192}$. La formule de TAYLOR-YOUNG refournit alors

$$\boxed{\varphi(x)\underset{x\to 0}{=}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{384}+o(x^3).}$$

Correction de l'exercice 4490 ▲

Soit φ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puis f l'application définie sur U par $\forall (x,y)\in U$, $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\\
&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right).
\end{aligned}$$

Puis, quand (x,y) décrit U, $\frac{y}{x}$ décrit $\mathbb{R}$ (car $\frac{y}{1}$ décrit déjà $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\forall (x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3}&\Leftrightarrow \forall (x,y)\in U,\ \frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}\\
&\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ 2t\varphi'(t)+(t^2-1)\varphi''(t)=t\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2}{2}+\lambda\quad (*)
\end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{t^2}{2}+\lambda$ ne s'annule pas en ± 1, l'égalité $(*)$ fournit une fonction φ telle que φ' n'a pas une limite réelle en ± 1. Une telle solution n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Donc nécessairement $\lambda=-\frac{1}{2}$ puis

$$\forall (x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3}\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}\ \text{(par continuité de } \varphi' \text{ en } \pm 1)$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \varphi(t)=\frac{t}{2}+\lambda.$$

Correction de l'exercice 4491 ▲

(a) $\left\{\begin{array}{l} u=x+y \\ v=x+2y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2u-v \\ y=-u+v\end{array}\right.$. L'application $(x,y)\mapsto(u,v)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même. Pour $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, posons alors $g(u,v)=f(2u-v,u+v)=f(x,y)$ de sorte que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=g(x+y,x+2y)=g(u,v)$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\frac{\partial}{\partial x}(g(x+y,x+2y))-\frac{\partial}{\partial y}(g(x+y,x+2y))$$
$$=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\times\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial y}\times\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$
$$=2\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)-\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v).$$

Par suite,

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Leftrightarrow \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=0$$
$$\Leftrightarrow \exists F\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=F(v)$$
$$\Leftrightarrow \exists F\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=F(x+2y).$$

(b) On pose $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ de sorte que $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. On pose $f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=g(r,\theta)$. On sait que $\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta$, $\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)+r\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)=r\frac{\partial g}{\partial r},$$

puis

$$\forall (x,y)\in D,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow \forall r>0,\ r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=r\Leftrightarrow \forall r>0,\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=1$$
$$\Leftrightarrow \exists\varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[/\ \forall (r,\theta)\in]0,+\infty[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ g(r,\theta)=r+\varphi(\theta)$$
$$\Leftrightarrow \exists\varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[/\ \forall (x,y)\in D,\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\varphi\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists\psi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in D,\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Correction de l'exercice 4515 ▲

(a) $\frac{1}{30}$.

(b) 0.

(c) $\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$.

(d) $\frac{96}{35}$.

(e) $\frac{\pi}{2}$.

(f) $\pi(1-\ln 2)$.

(g) $\frac{5}{6}$.

(h) $2(\ln 2-1)$.

(i) $\frac{3\pi}{2}$.

(j) $\frac{65\pi}{48}$.

(k) $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

(l) $\frac{7}{45}$.

(m) $\pi(1-\frac{1}{e})$.

(n) $\frac{(e^{2p}-1)^2}{3} \quad (x=u^2v, y=uv^2)$.

Correction de l'exercice 4516 ▲

Poser $u=x, v=x+y$. On obtient $I=\frac{2}{1701}$.

Correction de l'exercice 4517 ▲

symétrie + passage en polaires. $I=\frac{3}{4}\pi-\frac{11}{6}$.

Correction de l'exercice 4518 ▲

(a) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{32}{27}\right)$.

(b) $2\pi a^2 \arcsin\frac{R}{a}-2\pi R\sqrt{a^2-R^2}$.

(c) $\frac{1}{720}$.

(d) $\frac{3}{4}-\ln 2$.

(e) $\frac{\pi R^2a^2}{4}(a^2+3R^2)$.

(f) $\frac{\pi}{2}(1-\ln 2)$.

(g) $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2)$.

Correction de l'exercice 4519 ▲

(a) Intégrer en z d'abord : $\frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}=\frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2z^2}-\frac{y^2}{1+y^2z^2}\right)$. On obtient $I=\pi\ln 2$.

(b) Intégrer I en x et y d'abord. On obtient $I=\int_{z=0}^{+\infty}\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2dz$.

Correction de l'exercice 4520 ▲

$I=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

Correction de l'exercice 4521 ▲

$\frac{1}{2}\pi^2 Rr^2(4R^2+3r^2)$.

Correction de l'exercice 4522 ▲

$2\pi b\left(a^2-\frac{b^2}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 4523 ▲

(a)

(b)

(c) Fubini $\Rightarrow I=\frac{\pi^2}{8}$.

Correction de l'exercice 4525 ▲

(a) $2A=\left(\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{1+t^2}\right)^2 \Rightarrow A=\frac{\pi^2}{32}$.

(b)

(c)

(d) $B+C=\frac{D}{2}, B-C=-D$.

(e) $C=-\frac{3\pi^2}{32}, D=-\frac{\pi^2}{8}$.

Correction de l'exercice 4526 ▲

(a) $A=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\ln 3$.

(b) $4ab\arctan\frac{b}{a}$.

Correction de l'exercice 4527 ▲

Formule de Green : $\mathscr{A}=\frac{3\pi a^2}{8}$.

Correction de l'exercice 4528 ▲

Formule de Green. $A=\frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1)$.

Correction de l'exercice 4529 ▲

Formule de Green. $A=\pi a^2$.

Correction de l'exercice 4530 ▲

(a) $V=\frac{4\pi}{3}(1-\sqrt{1-a^2}^3)$.

(b) $V=\frac{2\pi}{3}(2-\sqrt{2})$.

(c) $V=2\pi^2 Rr^2$.

Correction de l'exercice 4531 ▲

$V=\frac{4\pi p^3}{3\lambda^4}$.

Correction de l'exercice 4532 ▲

$\frac{\pi a^3}{12\sqrt{2}}(3\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 4533 ▲

hauteur $=\alpha R$ avec $\alpha^3-3\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha \approx 0.347$.

Correction de l'exercice 4536 ▲

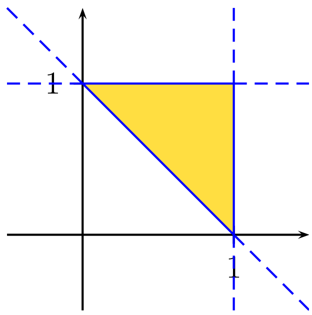
C'est manifestement vrai pour $\psi \equiv 1$ et aussi pour $\psi(t)=t$. De manière générale, si $\psi(t)=t^k$ avec $k \in |||$ alors pour $n \geqslant k$, $(x_1+\cdots+x_n)^k$ est une somme de n^k monômes parmi lesquels il y a $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ monômes où chaque variable apparaît avec l'exposant 0 ou 1. On a alors :

$$\Lambda_n(\psi)=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\Big(\int_{x=0}^1 xf(x)\,dx\Big)^k\Big(\int_{x=0}^1 f(x)\,dx\Big)^{n-k}+\Big(1-\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\Big)O(1),$$

ce qui prouve que $\Lambda_n(\psi)\to\psi\Big(\int_{x=0}^1 xf(x)\,dx\Big)$ (lorsque $n\to\infty$) lorsque $\psi(t)=t^k$. Par linéarité, cette relation est encore vraie pour tout ψ polynôme. On conclut pour ψ continue quelconque avec le théorème de Stone-Weierstrass.

Correction de l'exercice 4537 ▲

(a) Représentons le domaine $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\leqslant 1,\ y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 1\}$.



$$\begin{aligned}I&=\iint_D (x+y)\,dxdy=\int_0^1\Big(\int_{1-x}^1 (x+y)dy\Big)\,dx \text{ (ou aussi } \int_0^1\Big(\int_0^{1-y}(x+y)dx\Big)\,dy)\\&=\int_0^1\Big[xy+\frac{y^2}{2}\Big]_{y=1-x}^{y=1}\,dx=\int_0^1\Big(x+\frac{1}{2}-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\Big)\,dx\\&=\int_0^1\Big(\frac{x^2}{2}+x\Big)\,dx=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

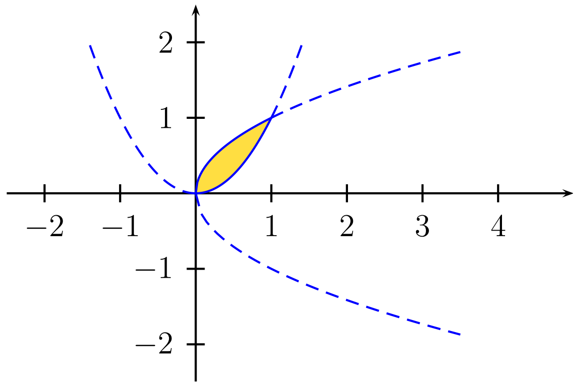
$$\boxed{\iint_D (x+y)\,dxdy=\frac{2}{3}.}$$

(b) Si on pose pour $(x,y)\in /mbr^2$, $f(x,y)=|x+y|$ alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y)=f(x,y)$ ou encore f prend les mêmes valeurs en deux points symétriques par rapport à O. Puisque le point O est centre de symétrie de $[-1,1]^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}I &= \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\,x+y\geqslant 0} f(x,y)\,dxdy + \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\,x+y\leqslant 0} f(x,y)\,dxdy\\
&= 2\iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\,x+y\geqslant 0}(x+y)\,dxdy = 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-x}^{1}(x+y)\,dy\right)dx\\
&= 2\int_{-1}^{1}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=1}dx = 2\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{2}+x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx\\
&= 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 2\right) = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{[-1,1]^2}|x+y|\,dxdy = \frac{8}{3}.}$$

(c) Représentons le domaine $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$.



$$I = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right)x\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{12}.$$

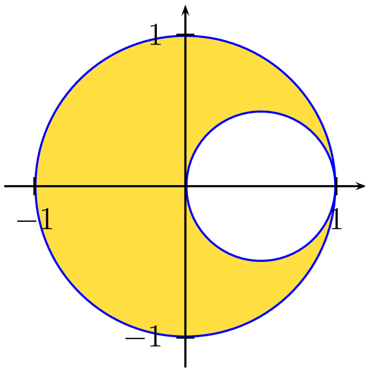
(d) En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}I &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{0\leqslant r\leqslant 1,\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\frac{1}{1+r^2}\,rdrd\theta\\
&= \left(\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\,dr\right)\times\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\ \text{(intégrales indépendantes)}\\
&= 2\pi\times\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \pi\ln 2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \pi\ln 2.}$$

(e) Posons $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$. Puisque $x\leqslant x^2+y^2\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\frac{1}{4}$, D est l'intersection de l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1, bord compris, et de l'extérieur du disque de centre $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, bord compris. Soit M un point du plan. On note (r,θ) un couple de coordonnées polaires de M tel que $r\geqslant 0$ et $\theta\in[0,2\pi]$.

$$M\in D\Leftrightarrow r\cos\theta\leqslant r^2\leqslant 1\Leftrightarrow r=0 \text{ ou } (0<r\leqslant 1 \text{ et } r\geqslant\cos\theta.$$



En passant en polaires, on obtient

$$I=2\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy=2\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_{\cos\theta}^1\frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^1\frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta\right)$$
$$=2\left(\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_{\cos\theta}^1 d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_0^1 d\theta\right)$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\tan^2\theta}d(\tan\theta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}\,dt=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$\boxed{\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$$

(f)

$$I=\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1}xyzdxdydz=\int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_y^1 zdz\right)ydy\right)xdx=\int_0^1\left(\int_x^1\frac{1}{2}(1-y^2)ydy\right)xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_x^1(y-y^3)dy\right)xdx=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_x^1 xdx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)xdx$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^1(x^5-2x^3+x)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{48}.$$

$$\boxed{\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1}xyzdxdydz=\frac{1}{48}.}$$

(g) En sommant par tranches, on obtient

$$I=\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1}zdxdydz=\int_0^1\left(\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1-\sqrt{z}}dxdy\right)zdz$$
$$=\int_0^1\left(\iint_{\sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1}(1-\sqrt{z})^4dudv\right)zdz\text{ (en posant }x=(1-\sqrt{z})^2u\text{ et }y=(1-\sqrt{z})^2v)$$
$$=\mathscr{A}(D)\times\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4dz\text{ où }D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ \sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1\}.$$

Maintenant,

$$\mathscr{A}(D)=\int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{u})^2}dv\right)du=\int_0^1(1-2\sqrt{u}+u)du=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

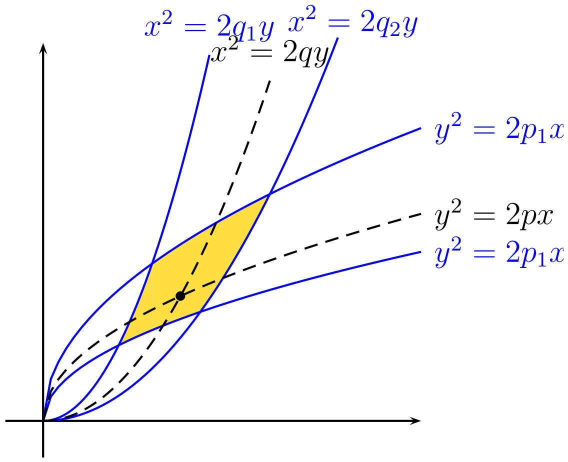
et

$$\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4 dz = \int_0^1 (z - 4z^{3/2} + 6z^2 - 4z^{5/2} + z^3)\, dz = \frac{1}{2} - \frac{8}{5} + 2 - \frac{8}{7} + \frac{1}{4} = \frac{1}{140}.$$

Finalement

$$\boxed{\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} z\,dxdydz = \frac{1}{840}.}$$

Correction de l'exercice 4538 ▲



L'aire du domaine considéré $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2x\}$ est

$$\mathscr{A} = \iint_D dxdy.$$

Pour $(x,y) \in D^2$, posons $p = \frac{y^2}{2x}$ et $q = \frac{x^2}{2y}$ ou encore considérons l'application $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & [p_1,p_2]\times[q_1,q_2] \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{y^2}{2x}, \frac{x^2}{2y}\right) \end{array}$

et vérifions que φ est un C^1-difféomorphisme.

• Pour chaque $(x,y) \in D^2$, on $2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x$ et $2q_1y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2y$ ou encore $p_1 \leqslant \frac{y^2}{2x} \leqslant p_2$ et $q_1 \leqslant \frac{x^2}{2y} \leqslant q_2$. Donc φ est bien une application.

• Soit $(p,q) \in [p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$. Pour $(x,y) \in (]0,+\infty[)^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{y^2}{2x} = p \\ \frac{x^2}{2y} = q \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2q} \\ \frac{(x^2/2q)^2}{2x} = p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{8pq^2} \\ y = \sqrt[3]{8p^2q} \end{array}\right.$$

Donc, l'équation $\varphi(x,y) = (p,q)$ a exactement une solution (x_0,y_0) dans $]0,+\infty[^2$. De plus, puisque $\frac{y_0^2}{2x_0} = p \in [p_1,p_2]$ et $\frac{x_0^2}{2y_0} = q \in [q_1,q_2]$, on a $2p_1x_0 \leqslant y_0^2 \leqslant 2p_2x_0$ et $2q_1y_0 \leqslant x_0^2 \leqslant 2q_2y_0$ et donc $(x_0,y_0) \in D^2$. Donc φ est une bijection.

• φ est de classe C^1 sur D et pour $(x,y) \in D^2$,

$$\frac{D(p,q)}{D(x,y)} = J(\varphi)(x,y) = \left|\begin{array}{cc} -\frac{y^2}{2x^2} & \frac{y}{x} \\ \frac{x}{y} & -\frac{x^2}{2y^2} \end{array}\right| = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \neq 0.$$

Ainsi, φ est une bijection de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$, de classe C^1 sur D et son jacobien ne s'annule pas sur D. On sait alors que φ est un C^1-difféomorphisme de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$.

Posons alors $(p,q) = \varphi(x,y)$ dans $\iint_D dxdy$. On obtient

$$\mathscr{A} = \iint_D dxdy = \iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]} \left|\frac{D(x,y)}{D(p,q)}\right| dpdq = \frac{4}{3}\iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]} dpdq = \frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).$$

$$\boxed{\mathscr{A}=\frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).}$$

Correction de l'exercice 4539 ▲

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $R\geqslant 0$, posons $B_n(R)=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2\}$ et notons $V_n(R)$ le volume de $B_n(R)$. Par définition,

$$V_n(R)=\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\ldots dx_n.$$

En posant $x_1=Ry_1,\ldots,x_n=Ry_n$, on a $\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}=R^n$ (quand $R>0$) puis

$$V_n(R)=\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\ldots dx_n=R^n\int\ldots\iint_{y_1^2+\ldots+y_n^2\leqslant 1}dy_1\ldots dy_n=R^nV_n(1).$$

ce qui reste vrai quand $R=0$. Pour $n\geqslant 2$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}V_n(1)&=\int_{-1}^{1}\left(\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant 1-x_n^2}dx_1\ldots dx_{n-1}\right)dx_n=\int_{-1}^{1}V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)\,dx_n\\&=\int_{-1}^{1}(1-x_n^2)^{(n-1)/2}V_{n-1}(1)\,dx_n=I_nV_{n-1}(1)\end{aligned}$$

où $I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx$. Pour calculer I_n, on pose $x=\cos\theta$. On obtient

$I_n=\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2\theta)^{(n-1)/2}(-\sin\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin^n\theta\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta=2W_n$ (intégrales de WALLIS).

Finalement,

$$V_1(1)=2\text{ et }\forall n\geqslant 2,\ V_n(1)=2W_nV_{n-1}(1).$$

On en déduit que pour $n\geqslant 2$,

$$V_n(1)=(2W_n)(2W_{n-1})\ldots(2W_2)V_1(1)=2^n\prod_{k=2}^{n}W_k=2^n\prod_{k=1}^{n}W_k,$$

ce qui reste vrai pour $n=1$. Maintenant, il est bien connu que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et plus précisément que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n=W_1W_0=\frac{\pi}{2}$. Donc, pour $p\in\mathbb{N}^*$,

$$V_{2p}(1)=2^{2p}\prod_{k=1}^{2p}W_k=2^{2p}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k-1}W_{2k})=2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k)}=\frac{\pi^p}{p!},$$

et de même

$$\begin{aligned}V_{2p+1}(1)&=2^{2p+1}\prod_{k=2}^{2p+1}W_k=2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k}W_{2k+1})=2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k+1)}\\&=\frac{\pi^p2^{p+1}}{3\times 5\times\ldots\times(2p+1)}=\frac{\pi^p2^{p+1}(2p)\times(2p-2)\times\ldots\times 2}{(2p+1)!}=\frac{\pi^p2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall R>0,\ V_{2p}(R)=\frac{\pi^pR^{2p}}{p!}\text{ et }V_{2p-1}(R)=\frac{\pi^p2^{2p+1}p!R^{2p+1}}{(2p+1)!}.}$$

En particulier, $V_1(R)=2R$, $V_2(R)=\pi R^2$ et $V_3(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Correction de l'exercice 4540 ▲

1ère solution. $V=\iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1}dxdydz$. Or $x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}$. On pose donc $u=x+\frac{z}{2}$, $v=\frac{y}{\sqrt{2}}$ et $w=\frac{z}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 2$ puis que

$$V = \iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1} dxdydz = \iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw = 2\times\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

2ème solution. Supposons savoir que le volume délimité par l'ellipsoïde d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ est $\frac{4}{3}\pi abc$. La matrice de la forme quadratique $(x,y,z)\mapsto x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. On sait que cette matrice a 3 valeurs propres strictement positives $\lambda = \frac{1}{a^2}$, $\mu = \frac{1}{b^2}$ et $\nu = \frac{1}{c^2}$ puis qu'il existe une base orthonormée dans laquelle l'ellipsoïde a pour équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$. Le volume de l'ellipsoïde est alors

$$V = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu\nu}} = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{8\pi}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{8\pi}{3}.}$$

Correction de l'exercice 4541 ▲

On pose déjà $x = ua$ et $y = vb$ de sorte que $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = ab$. On obtient

$$I = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (x^2-y^2)\,dxdy = ab\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (a^2u^2-b^2v^2)\,dudv.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} u^2\,dudv = \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} v^2\,dudv = \frac{1}{2}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}(u^2+v^2)\,dudv = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{r=1}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\times rdrd\theta \\ = \frac{1}{2}\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2\pi = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{I = \frac{\pi ab(a^2-b^2)}{4}.}$$

Correction de l'exercice 4542 ▲

$= \int_{t=x}^{2x}\left(\frac{1}{t}-\frac{5t}{6}+o(t)\right)dt \to \ln 2.$

Correction de l'exercice 4543 ▲

Correction de l'exercice 4544 ▲

Formule de la moyenne sur $[3,x]$ et $[x,x+x^2] \Rightarrow \lim = 0$.

Correction de l'exercice 4545 ▲

$\ln 2$.

Correction de l'exercice 4546 ▲

$\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^3)^n} = \int_0^{+\infty}\left(1-\frac{(-1)^N}{(1+t^3)^N}\right)\frac{dt}{2+t^3} \to \int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^3} = \frac{\pi 2^{5/3}}{3\sqrt{3}}$ lorsque $N\to\infty$.

Correction de l'exercice 4547 ▲

(a)

(b) $I(x) = \int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\,dt = \cos x\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt - \sin x\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt \to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

Correction de l'exercice 4548 ▲

$\frac{\pi}{2}f(0)$.

Correction de l'exercice 4549 ▲

$t = ux$ puis intégration par parties $\Rightarrow \sim \frac{1}{x^2}$.

Correction de l'exercice 4550 ▲

$f'(x) = \frac{2\ln x}{a(1+x^2)} \Rightarrow f(1+h) = \frac{1}{2a}(h^2-h^3)+o(h^3)$.

Correction de l'exercice 4551 ▲

(a)

(b) Soit $\varepsilon>0$: Pour x assez petit, $\left|f(t)^x - 1 - x\ln(f(t))\right| \leqslant \varepsilon x$ car $\ln f$ est borné sur $[a,b]$.
Donc $\left|\int_{t=a}^{b}f(t)^x dt - 1 - x\int_{t=a}^{b}\ln(f(t))\,dt\right| \leqslant \varepsilon x$, et $\left|\ln\left(\int_{t=a}^{b}f(t)^x dt\right) - x\int_{t=a}^{b}\ln(f(t))\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon x$.

Correction de l'exercice 4554 ▲

(a) Couper en $\int_{t=0}^{1-\varepsilon} + \int_{t=1-\varepsilon}^{1}$

(b) $= \left[\frac{t\ln(1+t^n)}{n}\right]_{t=0}^{1} - \frac{1}{n}\int_{t=0}^{1}\ln(1+t^n)\,dt \sim \frac{\ln 2}{n}$.

(c) $\frac{1}{n}\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t}+1} = \frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n}$.

Correction de l'exercice 4555 ▲

$1-\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 4556 ▲

$1+\frac{1}{n}\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t}+1}+o\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 4557 ▲

$u = t^n \Rightarrow \sim \frac{1}{n}\int_{u=1}^{e}\frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$.

Correction de l'exercice 4559 ▲

$f(0)$.

Correction de l'exercice 4560 ▲

Soit $f_n(x) = (1-x/n)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$. Alors $f_n(x)$ converge simplement vers e^{-x} et il y a convergence dominée.

Correction de l'exercice 4561 ▲

$f(x) = \cos x$.

Correction de l'exercice 4562 ▲

(a) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

(b) $I_{2k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-3} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{1} + (-1)^k \frac{\pi}{4}$,

$I_{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{2} - (-1)^k \ln\sqrt{2}$.

(c) $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$.

Correction de l'exercice 4563 ▲

$\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \to \ln 2$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4564 ▲

(a)

(b) $g(c)$.

Correction de l'exercice 4565 ▲

$\Phi(x) = \int_{t=0}^{x} f^2(t)\,dt \Rightarrow \Phi'\Phi^2 \to \ell^2 \Rightarrow \Phi^3 \sim 3\ell^2 x \Rightarrow f = \sqrt{\Phi'} \sim \sqrt[3]{\frac{\ell}{3x}}$.

Correction de l'exercice 4567 ▲

(a)

(b)

(c)

(d) Pour $\alpha = 0$ on a $h(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$, quantité bornée car l'intégrale converge en $+\infty$.

Pour $\alpha = 1$ on a $h(x) = \cos x \int_{t=0}^{x} \frac{\cos t \sin t}{t}\,dt + \sin x \int_{t=0}^{x} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$, quantité non bornée car la deuxième intégrale diverge en $+\infty$.

Pour $0 < \alpha < 1$, développer le $\cos(x-t)$ puis linéariser les produits obtenus. On obtient quatre intégrales convergentes, donc h est bornée.

Correction de l'exercice 4568 ▲

(a) $\frac{\ln(1+a)}{a}$.

(b) $= -\varphi'(a) = \frac{\ln(1+a)}{a^2} - \frac{1}{a(1+a)}$.

Correction de **l'exercice 4571 ▲**

$f'(x) = \frac{\pi}{x+1}$, $f(x) = \pi \ln(x+1)$.

Correction de **l'exercice 4572 ▲**

(a)

(b) $I'(x) = \frac{\pi}{x+1}$, $I(x) = \pi \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Correction de **l'exercice 4573 ▲**

(a) $g'(x) = \int_{t=0}^{1} (-2x) e^{-x^2(1+t^2)}\, dt = -2e^{-x^2}\sqrt{f(x)} = -f'(x)$.

(b)

(c)

Correction de **l'exercice 4574 ▲**

$u = \frac{a}{t} \Rightarrow I = -\frac{1}{2}\frac{dI}{da} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

Correction de **l'exercice 4575 ▲**

(a)

(b) $I'(x) = -2xI(x)$.

(c) $I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

Correction de **l'exercice 4579 ▲**

(a) $g(x,y) = \int_{u=1}^{y} f(ux)\, du$.

(b) $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x}\left(yf(xy) - f(x) - \int_{u=1}^{y} f(ux)\, du\right) \to \frac{y^2-1}{2} f'(0)$ lorsque $x \to 0$.

Correction de **l'exercice 4580 ▲**

(a) -2 de $-\infty$ à $-\frac{\pi}{2}$, $\quad 2\sin x$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, $\quad 2$ de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$.

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Correction de **l'exercice 4581 ▲**

$2.40 < x < 2.41$.

Correction de **l'exercice 4582 ▲**

(a)

(b) $a=\alpha, b=\alpha^2$.

(c) comparaison série-intégrale $\Rightarrow I(\alpha)\to\frac{\pi}{2}$ lorsque $\alpha\to+\infty$.

Correction de l'exercice 4583 ▲

$\ln\Gamma$ est convexe, encadrer $\ln\Gamma(x)$ par les cordes passant par $(\lfloor x\rfloor, \ln\Gamma(\lfloor x\rfloor))$.

Correction de l'exercice 4585 ▲

(a) $f'(a)=-\frac{a}{2}f(a)\Rightarrow f(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-a^2/4)$.

(b) $g'(a)=f(a)\Rightarrow g(a)\to\frac{\pi}{2}$ lorsque $a\to+\infty$.

Correction de l'exercice 4587 ▲

(a) IPP.

(b) Soit $F(x)=\int_{t=x}^{+\infty}f(t)\,dt$. On a $\varphi(a)=F(0)-a\int_{t=0}^{+\infty}e^{-at}F(t)\,dt$.
Soit $\varepsilon>0$ et A tel que $x>A\Rightarrow|F(x)|\leqslant\varepsilon$. On a :

$$\left|a\int_{t=0}^{+\infty}e^{-at}F(t)\,dt\right|\leqslant a\sup|F(t)|,t\in[0,A]+\varepsilon e^{-aA}\leqslant 2\varepsilon$$

pour a suffisament petit.

Correction de l'exercice 4588 ▲

$v_n\to1$ (lorsque $n\to\infty$) par convergence dominée. $v_n-1=\int_{x=0}^{1}\frac{x^n}{1+x^n}\,dx=\frac{1}{n}\int_{u=0}^{1}\frac{u^{-1/n}}{1+u}\,du\sim\frac{\ln2}{n}$ donc la série diverge.

Correction de l'exercice 4589 ▲

$u_n\to1$ (lorsque $n\to\infty$) par convergence dominée.
$u_n-1=\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}-1\right)dx=\frac{1}{n}\int_{u=0}^{1}\frac{u^{1-1/n}}{1+u}(u^{-2/n}-1)\,du$.
On a $0\leqslant u^{-2/n}-1=\exp\left(-\frac{2\ln(u)}{n}\right)-1\leqslant-\frac{2\ln(u)}{n}\exp\left(-\frac{2\ln(u)}{n}\right)$
d'où $0\leqslant u_n\leqslant\frac{2}{n^2}\int_{u=0}^{1}\frac{u^{1-3/n}(-\ln u)}{1+u}\,du=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Correction de l'exercice 4590 ▲

$I(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha>1$. $I(2)=(x=e^u)=\int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{ue^{2u}}{(1+e^{2u})^2}\,du=\int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{u}{(e^u+e^{-u})^2}\,du=0$ (parité).
$I(3)=\int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{ue^{-u}}{(e^u+e^{-u})^3}\,du=\int_{u=0}^{+\infty}\frac{-u(e^u-e^{-u})}{(e^u+e^{-u})^3}\,du=\left[\frac{u}{2(e^u+e^{-u})^2}\right]_{u=0}^{+\infty}-\int_{u=0}^{+\infty}\frac{du}{2(e^u+e^{-u})^2}=-\int_{u=0}^{+\infty}\frac{e^{2u}\,du}{2(1+e^{2u})^2}=\left[\frac{1}{4(1+e^{2u})}\right]_{u=0}^{+\infty}=-\frac{1}{8}$. $I(\alpha)\to0$ (lorsque $\alpha\to+\infty$) par convergence dominée.

Correction de l'exercice 4591 ▲

(a) $D_f=]0,1[$. f est convexe sur $]0,1[$ par intégration de l'inégalité de convexité pour $x\mapsto t^{-x}$ et $f(x)\to+\infty$ (lorsque $x\to0$ ou $x\to1$) par convergence monotone donc f décroît puis recroît.

(b)

(c) En 0 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{1}{t^{x+1}(1+t)}$ donc $f(x) = \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{t^x(1+t)} + \frac{1}{x} - \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(1+t)} \sim \frac{1}{x}$.

En 1 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^x} - \frac{t^{1-x}}{1+t}$ donc $f(x) = \frac{1}{1-x} - \int_{t=0}^{1} \frac{t^{1-x}}{1+t}\,dt + \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \sim \frac{1}{1-x}$.

(d) $f(1/n) =_{(t=u^n)} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{nu^{n-1}\,du}{u(1+u^n)} =_{(v=1/u)} \int_{v=0}^{+\infty} \frac{n\,dv}{1+v^n} = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)}$ (formule bien connue...)

Correction de l'exercice 4592 ▲

Si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $u_n = 0$ pour tout n.

Sinon, $u_n = \operatorname{Im}\left(\int_{t=0}^{1} \sum_{k=1}^{n} t^{n+k-1} e^{ik\alpha}\,dt\right) = \operatorname{Im}\left(\int_{t=0}^{1} \frac{t^n e^{i\alpha} - t^{2n} e^{i(n+1)\alpha}}{1-te^{i\alpha}}\,dt\right) \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) par convergence dominée.

Correction de l'exercice 4593 ▲

$I_a = \int_{x=-a}^{a} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{x=-a}^{a} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dt\,dx = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-a}^{a} \frac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dx\,dt$. On a $\int_{x=-a}^{a} e^{-|x+t|}\,dx = \begin{cases} 2-2e^{-a}\operatorname{ch} t & \text{si } |t| < a \\ 2e^{-|t|}\operatorname{sh} a & \text{si } |t| \geqslant a, \end{cases}$ donc $I_a \leqslant \int_{t=0}^{a} \frac{2\,dt}{(1+t)\sqrt{t}} + \int_{t=a}^{+\infty} \frac{4e^{-t}\operatorname{sh} a}{(1+a)\sqrt{a}}\,dt = 4\arctan(\sqrt{a}) + \frac{4e^{-a}\operatorname{sh} a}{(1+a)\sqrt{a}} \leqslant$ cste.

Correction de l'exercice 4594 ▲

(a) $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t) e^{-kxt}\,dt$.

On a $|\sin(t)e^{-kxt}| \leqslant te^{-kxt}$ et $\int_{t=0}^{+\infty} te^{-kxt}\,dt = \frac{1}{k^2}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} |\sin(t)e^{-kxt}|\,dt$ converge ce qui légitime l'interversion intégrale-série. D'où $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-kxt}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2x^2+1}$.

(b) Sachant (?) que $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
xs(x) - \frac{\pi}{2} &= \int_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{x\sin t}{e^{xt}-1} - \frac{\sin t}{t}\right) dt \\
&= \int_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right) \sin\left(\frac{u}{x}\right) du \\
&= -x\Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)}_{\to\frac{1}{2} \text{ si } u\to 0^+} \cos\left(\frac{u}{x}\right)\Bigg]_{u=0}^{+\infty} + x\int_{u=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{-e^u}{(e^u-1)^2} + \frac{1}{u^2}\right)}_{\to\frac{1}{12} \text{ si } u\to 0^+} \cos\left(\frac{u}{x}\right) du \\
&= x(\text{quantité bornée}) \to 0 \text{ si } u \to 0^+.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4595 ▲

Fonction de x de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, décroissante de limite $\pi/2$ en 0^+ et 0 en $+\infty$. Demi-tangente verticale en 0^+, Équivalente à $1/x$ en $+\infty$ (par IPP). Équation différentielle : $f(x) + f''(x) = 1/x$.

Correction de l'exercice 4596 ▲

(a) $[0,+\infty[$.

(b)

(c) $f(x) - f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2x}\,dt = (u = t\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

(d) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^2e^{-u^2}}{x+u^2}\,du = \frac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^2e^{-u^2}}{1+u^2/x}\,du \sim \frac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} u^2e^{-u^2}\,du = \frac{-\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}$.

(e)

(f)

Correction de l'exercice 4597 ▲

(a)

(b) Théorème de Fubini : $\int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{x=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(e^{(-\alpha+i\sin\theta)x})\,dx\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\alpha\,d\theta}{\alpha^2+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ (couper en $\theta = \pi/2$ et poser $u = \tan\theta$).

Correction de l'exercice 4598 ▲

$I'(x) = \int_{t=0}^{+\infty}(\cos t - e^{-t})e^{-xt}\,dt = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x+1}$ donc $I(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\right) + \text{cste}$ et $I(x) \to 0$ (pour $x \to +\infty$) d'où cste $= 0$. Alors $I(x) \to 0$ pour $x \to 0^+$.

Correction de l'exercice 4600 ▲

$D_f =]0,+\infty[$. Il y a domination locale, donc f est continue.

De même, pour $x > 0$ on a $f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{-\ln(t)t^{x+1}}{(t^{x+1}+t+1)^2}\,dt$. En coupant l'intégrale en 1 et en posant $u = 1/t$ dans l'intégrale sur $[1,+\infty[$ il vient : $f'(x) = \int_{t=0}^{1} \ln(t)t^{x+1}\left(\frac{1}{(t+t^{x+1}+t^{x+2})^2} - \frac{1}{(t^{x+1}+t+1)^2}\right)dt < 0$ car $\ln(t) < 0$ et $t^{x+2} < 1$ si $t \in]0,1[$. Donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

$\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}+t} = \int_{t=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{t^{(k+1)x+1}}\,dt =$ (domination du reste avec le CSA) $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)x} = \frac{\ln 2}{x}$.

$\left|f(x) - \int_{t=1}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}+t}\right| = \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{t^{x+1}+t+1} + \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{(t^{x+1}+t)(t^{x+1}+t+1)} \leqslant \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{t+1} + \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} = 2\ln 2$ donc $f(x) = \frac{\ln 2}{x} + O_{x\to 0^+}(1)$.

Pour $x \to +\infty$, on a avec le TCM séparément sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$: lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \to \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{t+1} = \ln 2$.

Correction de l'exercice 4601 ▲

Pour $\lambda \neq 0$: $I_n = \left[\frac{\exp(\lambda n \sin^2(x))}{2\lambda n\cos(x)}\right]_{x=0}^{\alpha} - \int_{x=0}^{\alpha} \frac{\sin(x)}{2\lambda n\cos^2(x)} \exp(\lambda n\sin^2(x))\,dx = \frac{\exp(\lambda n\sin^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)} - \frac{1}{2\lambda n} - \frac{J_n}{2\lambda n}$ avec $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{I_n}{\cos^2(\alpha)}$. Donc $I_n \sim \frac{\exp(\lambda n\sin^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)}$ si $\lambda > 0$ et $I_n \sim -\frac{1}{2\lambda n}$ si $\lambda < 0$.

Correction de l'exercice 4602 ▲

(a) Pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ on a $t(1-t)(n-1)! \leqslant t(1-t)\dots(n-t) \leqslant n!$ d'où $\frac{1}{6n} \leqslant |a_n| \leqslant 1$ et $R = 1$.

(b) $(-1)^n a_n = \int_{t=0}^{1} t(1-t)(1-t/2)\dots(1-t/n)\,dt$. Pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ on a $x \leqslant -\ln(1-x) \leqslant x+x^2$ (étude de fonction) donc pour $k \geqslant 2$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$: $e^{-t/k-t^2/k^2} \leqslant 1-t/k \leqslant e^{-t/k}$ d'où :

$$b_n = \int_{t=0}^{1} t(1-t)e^{-t(H_n-1)-t^2K_n}\,dt \leqslant (-1)^n a_n \leqslant \int_{t=0}^{1} te^{-tH_n}\,dt = c_n$$

avec $H_n = 1+1/2+\dots+1/n$ et $K_n = 1/2^2+\dots+1/n^2$.

Équivalent du majorant :

$$c_n = \frac{1-(1+H_n)e^{-H_n}}{H_n^2} \sim \frac{1}{H_n^2}.$$

Équivalent du minorant :

$$
\begin{aligned}
b_n &\geqslant \int_{t=0}^{1} t(1-t)(1-t^2K_n)e^{-t(H_n-1)}\,dt \\
&= \int_{t=0}^{1} te^{-t(H_n-1)}\,dt - \int_{t=0}^{1} t^2(1+t(1-t)K_n)e^{-t(H_n-1)}\,dt \\
&\geqslant \int_{t=0}^{1} te^{-t(H_n-1)}\,dt - (1+\tfrac{1}{4}K_n)\int_{t=0}^{1} t^2e^{-t(H_n-1)}\,dt \\
&\geqslant \frac{1-H_ne^{1-H_n}}{(H_n-1)^2} - (1+\tfrac{1}{4}K_n)\frac{2-(H_n^2+1)e^{1-H_n}}{(H_n-1)^3} \\
&\sim \frac{1}{H_n^2}.
\end{aligned}
$$

Finalement, $a_n \sim \frac{(-1)^n}{H_n^2} \sim \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$.

Correction de l’exercice 4603 ▲

(a) $\sum u_n(t)$ converge pour $|t|<1$.

(b) $P_n(t) = t^{n+1}\sin(nx) - t^n\sin((n+1)x) + \sin(x)$, $Q(t) = t^2 - 2t\cos(x) + 1 = (t-\cos x)^2 + \sin^2 x \geqslant \sin^2 x$.

(c) Pour $|t|<1$ on a $S_n(t) \to \frac{\sin t}{Q(t)}$ lorsque $n\to\infty$ et il y a convergence dominée vu la minoration de Q donc l’intégrale suit : $\int_{t=0}^{1} S_n(t)\,dt \to \int_{t=0}^{1} \frac{\sin x\,dt}{t^2-2t\cos x+1} = (t-\cos x = u\sin x) = \int_{u=-\cot x}^{\tan(x/2)} \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi-x}{2}$.

(d) $\frac{\sin(nx)}{n} = \int_{t=0}^{1} u_n(t)\,dt$ d’où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}$.

Correction de l’exercice 4604 ▲

(a)

(b) $\sin^2(nt) = \frac{1-\cos(2nt)}{2}$, donc il suffit d’étudier $I_n = \int_{t=0}^{n\pi} \cos(2nt)f(t)\,dt$.

Posons $I_{n,p} = \int_{t=0}^{\min(n,p)\pi} \cos(2nt)f(t)\,dt$: on a $|I_n - I_{n,p}| \leqslant \int_{t=p\pi}^{+\infty} |f(t)|\,dt$, quantité indépendante de n et tendant vers 0 quand $p\to\infty$ donc le théorème d’interversion des limites s’applique : $\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} I_{n,p} = \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} I_{n,p} = 0$. On en déduit $u_n \to \frac{1}{2}\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l’exercice 4605 ▲

(a) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$ et $f_n(1) = 1$ donc lorsque $n\to\infty$ $f_n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x=1. \end{cases}$

(b) i. Non, la continuité n’est pas conservée.

ii. Oui, il y a décroissance évidente.

(c) Changement de variable $u = \left(\frac{1+x^{n-1}}{2}\right)^n$: $J_n = \frac{2}{n(n-1)}\int_{u=1/2^n}^{1} (2u^{1/n}-1)^{2/(n-1)}u^{1/n}\,du$ et l’intégrale tend vers 1 quand $n\to\infty$ par convergence dominée.

Correction de l’exercice 4606 ▲

Il y a convergence si et seulement si $x>-1$. $f'(x) = \int_{t=0}^{1}(1-t)t^x\,dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, donc $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + C$ et $f(x)\to 0$ (lorsque $x\to+\infty$) d’où $C=0$.

Correction de l'exercice 4607 ▲

(a) $]1,+\infty[$.

(b)

(c) $I'(a) = -\int_{x=0}^{+\infty} \operatorname{sh} x e^{-ax}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right)$. D'où $I(a) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) +$ cste et $I(a) \to 0$ lorsque $a \to +\infty$ donc la constante est nulle.

Correction de l'exercice 4608 ▲

(a) Intégrer par parties.

(b) Intégrer deux fois par parties.

(c) Pour $0 < u < v$: $\int_{t=u}^{v} e^{-it^2/2}\, dt = \left[\frac{e^{-it^2/2}}{-it}\right]_{t=u}^{v} - \int_{t=u}^{v} \frac{e^{-it^2/2}}{it^2}\, dt \to \frac{e^{-iu^2/2}}{iu} - \int_{t=u}^{+\infty} \frac{e^{-it^2/2}}{it^2}\, dt$ lorsque $v \to +\infty$. Ainsi $\int_{t=u}^{+\infty} e^{-it^2/2}\, dt$ converge et de même pour $\int_{t=-\infty}^{-u} e^{-it^2/2}\, dt$.

(d) On pose $f(t) = f(0) + t\varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Il vient :

$$\begin{aligned} g(x)\sqrt{x} &= f(0)\int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2}\, du - \frac{1}{i\sqrt{x}}\left[e^{-iu^2/2}\varphi(u/\sqrt{x})\right]_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} + \frac{1}{ix}\int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2}\varphi'(u/\sqrt{x})\, du \\ &\to f(0).I \end{aligned}$$

lorsque $x \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4610 ▲

Pour x réel donné, la fonction $t \mapsto |t-x|f(t)$ est continue sur $[a,b]$ et donc $F(x)$ existe. Pour $x \leqslant a$, $F(x) = \int_a^b (t-x)f(t)\, dt = -x\int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b tf(t)\, dt$. F est donc de classe C^1 sur $]-\infty, a]$ en tant que fonction affine et, pour $x < a$, $F'(x) = -\int_a^b f(t)\, dt$ (en particulier $F'_g(a) = -\int_a^b f(t)\, dt$)..
De même, pour $x \geqslant b$, $F(x) = x\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)\, dt$. F est donc de classe C^1 sur $[b,+\infty[$ en tant que fonction affine et, pour $x \geqslant b$, $F'(x) = \int_a^b f(t)\, dt$ (en particulier $F'_d(b) = \int_a^b f(t)\, dt$).
Enfin, si $a \leqslant x \leqslant b$,

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\, dt + \int_x^b (t-x)f(t)\, dt = x(\int_a^x f(t)\, dt - \int_x^b f(t)\, dt) - \int_a^x tf(t)\, dt + \int_x^b tf(t)\, dt.$$

F est donc de classe C^1 sur $[a,b]$ et, pour $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^x f(t)\, dt - \int_x^b f(t)\, dt + x(f(x) - (-f(x))) - xf(x) - xf(x) \\ &= \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)\, dt. \end{aligned}$$

(et en particulier, $F'_d(a) = -\int_a^b f(t)\, dt = F'_g(a)$ et $F'_g(b) = \int_a^b f(t)\, dt = F'_d(b)$).
F est continue $]-\infty,a]$, $[a,b]$ et $[b,+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$. F est de classe C^1 sur $]-\infty,a]$, $[a,b]$ et $[b,+\infty[$. De plus, $F'_g(a) = F'_d(a)$ et $F'_g(b) = F'_d(b)$. F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4611 ▲

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. g est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Définition, dérivabilté, dérivée.

Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, F est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F(x) = G(2x) - G(x)$. G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4-4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

Parité.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $t = -u$ et donc $dt = -du$, on obtient, en notant que g est paire

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\,dt = \int_{x}^{2x} g(-u).-du = -\int_{x}^{2x} g(u)\,du = -F(x).$$

F est donc impaire.

Variations.

Pour x réel,

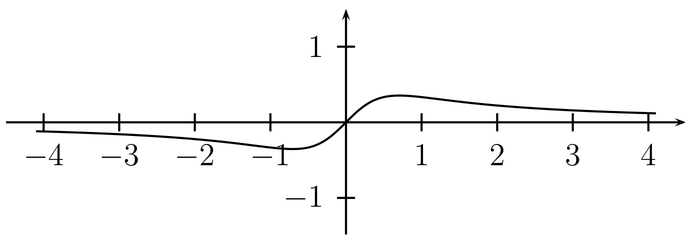
$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(F'(x)) &= \mathrm{sgn}\left(\frac{2}{\sqrt{16x^4-4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\right) = \mathrm{sgn}(2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4-4x^2+1}) \\
&= \mathrm{sgn}(4(x^4+x^2+1) - (16x^4+4x^2+1)) \text{ (par croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\
&= \mathrm{sgn}(-12x^4+3) = \mathrm{sgn}(1-4x^4) = \mathrm{sgn}(1-2x^2).
\end{aligned}$$

F est donc strictement croissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.

Etude en $+\infty$.

Pour $x > 0$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{x^4}}\,dt = \frac{2x-x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Graphe.



Correction de l'exercice 4612 ▲

(a) Si $x > 1$, $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1, +\infty[$. Par suite, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ existe. De plus,

$$x\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_x^{x^2} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_x^{x^2} t\frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant x^2\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt.$$

Mais,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln(x)| = \ln\left|\frac{2\ln x}{\ln x}\right| = \ln 2.$$

Donc, $\forall x > 1$, $x\ln 2 \leqslant F(x) \leqslant x^2 \ln 2$. On en déduit que $\lim_{x\to 1,\, x>1} F(x) = \ln 2$.

Si $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$ puis $[x^2, x] \subset]0,1[$. Donc, $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2, x]$ et $F(x) = -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt$ existe.

Pour $t \in [x^2, x]$, on a $t\ln t < 0$ et $x^2 \leqslant t \leqslant x$. Par suite,

$$x\frac{1}{t\ln t} \leqslant t\frac{1}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \leqslant x^2\frac{1}{t\ln t},$$

puis, $\int_{x^2}^{x} x\frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant \int_{x^2}^{x} x^2\frac{1}{t\ln t}\,dt$, et finalement,

$$x^2\ln 2 = \int_{x}^{x^2} x^2\frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant F(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant \int_{x}^{x^2} x\frac{1}{t\ln t}\,dt = x\ln 2.$$

On obtient alors $\lim_{x\to 1,\, x<1} F(x) = \ln 2$ et finalement, $\lim_{x\to 1} F(x) = \ln 2$. On en déduit que F se prolonge par continuité en 1 en posant $F(1) = \ln 2$ (on note encore F le prolongement obtenu).

(b) On a déjà vu que F est définie (au moins) sur $]0,+\infty[$ (F désignant le prolongement). Il ne parait pas encore possible de donner un sens à $F(0)$ et encore moins à $F(x)$ quand $x < 0$, car alors $[x,0]$ est un intervalle de longueur non nulle contenu dans $[x,x^2]$, sur lequel la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ n'est même pas définie.

$$D_F =]0,+\infty[.$$

Pour $t \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, posons $g(t) = \frac{1}{\ln t}$ et notons G une primitive de g sur cet ensemble. Alors, pour x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $F(x) = G(x^2) - G(x)$. On en déduit que F est dérivable (et même de classe C^1) sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et que pour x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$F'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Maintenant, quand x tend vers 1, $\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers 1. Ainsi, F est continue sur $]0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et F' a une limite réelle en 1. Un théorème classique d'analyse permet d'affirmer que F est de classe C^1 sur D_F et en particulier, dérivable en 1 avec $F'(1) = 1$.

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases}.$$

Si $x > 1$, $x-1 > 0$ et $\ln x > 0$ et si $0 < x < 1$, $x-1 < 0$ et $\ln x < 0$. Dans tous les cas ($0 < x < 1$, $x = 1$, $x > 1$) $F'(x) > 0$. F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

On a vu que $\forall x > 1,\ F(x) > x\ln 2$ et donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Plus précisément, pour $x > 1$,

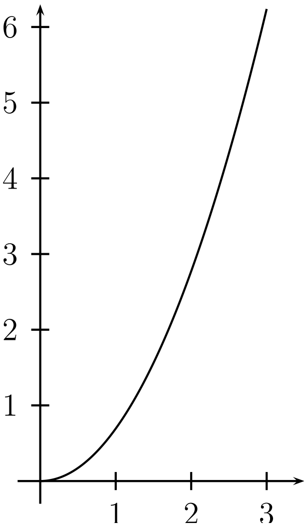
$$\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \geqslant \frac{x^2 - x}{x\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Comme $\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{F(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc que la courbe représentative de F admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

Pour $x \in]0,1[$ et $t \in [x^2,x]$, on a $2\ln x = \ln(x^2) \leqslant \ln t \leqslant \ln x < 0$ et donc $\frac{1}{\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{2\ln x}$, puis $(x-x^2)\frac{1}{\ln x} \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant (x-x^2)\frac{1}{2\ln x}$ et finalement,

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{x-x^2}{-2\ln x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x-x^2}{-\ln x}.$$

On obtient déjà $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$. On peut prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$. Ensuite, $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)}{x}$ est compris entre $\frac{1-x}{-2\ln x}$ et $\frac{1-x}{-\ln x}$. Comme ces deux expressions tendent vers 0 quand x tend vers 0, on en déduit que $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. F est donc dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.



Correction de l'exercice 4613 ▲

Notons D le domaine de définition de f.

Si $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$. f est donc impaire.

Si $x \in D$, $x+2\pi \in D$ et $f(x+2\pi) = f(x)$. f est donc 2π-périodique.

On étudiera donc f sur $[0,\pi]$.

Soient $x \in [0,\pi]$ et $t \in [-1,1]$. $t^2 - 2t\cos x + 1 = (t-\cos x)^2 + \sin^x \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $\sin x = 0$ et $t - \cos x = 0$.

Ainsi, si $x \in]0,\pi[$, $\forall t \in]-1,1[$, $t^2 - 2t\cos x + 1 \neq 0$. On en déduit que la fraction rationnelle $t \mapsto \frac{\sin t}{1-2t\cos x+t^2}$ est continue sur $[-1,1]$, et donc que $f(x)$ existe.

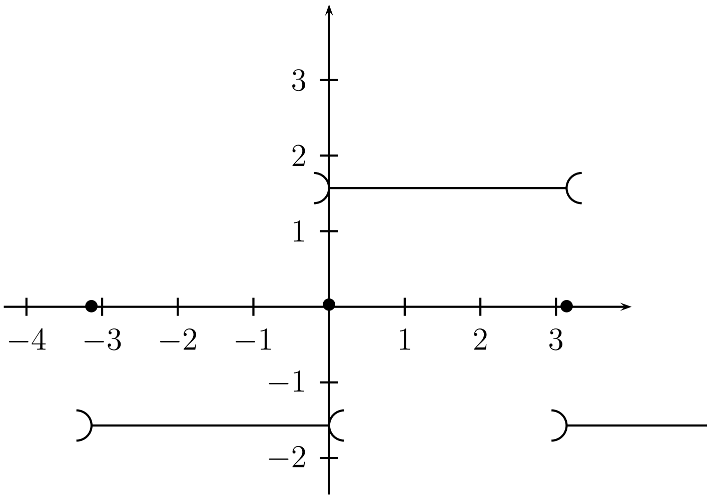
Si $x = 0$, $\forall t \in [-1,1[$, $\frac{\sin x}{t^2-2t\cos x+1} = \frac{0}{(t-1)^2} = 0$. On prut prolonger cette fonction par continuité en 1 et consisérer que $f(0) = \int_{-1}^{1} 0\, dt = 0$. De même, on peut considérer que $f(\pi) = 0$.

Ainsi, f est définie sur $[0,\pi]$ et donc, par parité et 2π-périodicité, sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in]0,\pi[$.Calculons $f(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{(t-\cos x)^2 + \sin^2 x}\, dt = \left[\arctan \frac{t-\cos x}{\sin x}\right]_{-1}^{1} = \arctan \frac{1-\cos x}{\sin x} + \arctan \frac{1+\cos x}{\sin x} \\
&= \arctan \frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} + \arctan \frac{2\cos^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \arctan(\tan(x/2)) + \arctan(\frac{1}{\tan(x/2)}) \\
&= \frac{\pi}{2} \text{ (car } \tan(x/2) > 0 \text{ pour } x \in]0,\pi[).
\end{aligned}$$

Ce calcul achève l'étude de f. En voici le graphe :



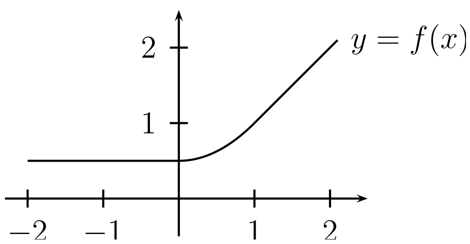
Correction de l'exercice 4614 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{Max}(x,t) = \frac{1}{2}(x+t+|x-t|)$ est continue sur $[0,1]$ en vertu de théorèmes généraux. Par suite, $\int_0^1 \mathrm{Max}(x,t)\,dt$ existe.
Si $x \leqslant 0$, alors $\forall t \in [0,1]$, $x \leqslant t$ et donc $\mathrm{Max}(x,t) = t$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$.
Si $x \geqslant 1$, alors $\forall t \in [0,1]$, $t \leqslant x$ et donc $\mathrm{Max}(x,t) = x$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 x\,dt = x$.
Si $0 < x < 1$,

$$f(x) = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt = x^2 + \frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{1}{2}(1+x^2).$$

En résumé, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}(1+x^2) \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

f est déjà continue sur $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ et $]0,1[$. De plus, $f(0^+) = \frac{1}{2} = f(0)$ et $f(1^-) = 1 = f(1)$. f est ainsi continue à droite en 0 et continue à gauche en 1 et donc sur $\mathbb{R}$.
f est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ et $]0,1[$. De plus, $\lim_{x\to 0,\, x>0} f'(x) = \lim_{x\to 0,\, x>0} x = 0$. f est donc continue sur $[0,1[$ de classe C^1 sur $]0,1[$ et f' a une limite réelle quand x tend vers 0. D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et en particulier, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. Comme d'autre part, f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
L'étude en 1 montre que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 1$. Le graphe de f est le suivant :



Correction de l'exercice 4615 ▲

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. On considère $F_n : \begin{array}{ccc} [a,A]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{1}{(t^2+x^2)^n} \end{array}$.

• Pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto F_n(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $F_n(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} > 0$ avec $2n > 1$.

• La fonction F_n est admet sur $[a,A]\times[0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x,t)\in[a,A]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)=\frac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}.$$

De plus,
- pour chaque $x\in[a,A]$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,

-pour chaque $t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,
-pour chaque $(x,t)\in[a,A]\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}\leqslant\frac{2nA}{(t^2+a^2)^{n+1}}=\varphi(t),$$

où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction I_n est de classe C^1 sur $[a,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0<a<A$, on a montré que la fonction I_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall x>0,\ I_n'(x)=-2nx\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,dt=-2nxI_{n+1}(x).$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n'(x)=-2nxI_{n+1}(x).}$$

(b) Pour $x>0$, on a $I_1(x)=\left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2x}$. Ensuite, $I_2(x)=-\frac{1}{2x}I_1'(x)=\frac{\pi}{4x^3}$ puis $I_3(x)=-\frac{1}{4x}I_2'(x)=\frac{3\pi}{16x^5}$ et donc $I_3(1)=\frac{3\pi}{16}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt=\frac{3\pi}{16}.}$$

Correction de l'exercice 4616 ▲

(a) i. **Parité de F.** Soit x un réel du domaine de définition de F. En posant $t=\theta+\pi$, on obtient

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\ln(x^2+2x\cos t+1)\,dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2+2x\cos t+1)\,dt\ \text{(par 2π-périodicité)}\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln((-x)^2-2(-x)\cos t+1)\,dt=F(-x).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $F(x)$ existe si et seulement si $F(-x)$ existe et de plus $F(x)=F(-x)$.

$$\boxed{F\text{ est paire.}}$$

Définition de F. Soit $x\in[0,+\infty[$. Pour tout réel $\theta\in[-\pi,\pi]$,

$$x^2-2x\cos\theta+1=(x-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=\left|x-e^{i\theta}\right|^2\geqslant 0.$$

De plus, $\left|x-e^{i\theta}\right|=0\Leftrightarrow e^{i\theta}=x\Leftrightarrow x=1$ et $\theta=0$. Par suite,
• si $x\neq1$, la fonction $\theta\mapsto x^2-2x\cos\theta+1$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
• si $x=1$, pour tout réel $\theta\in[-\pi,\pi]$ on a $x^2-2x\cos\theta+1=2-2\cos\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2}$. La fonction $\theta\mapsto\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$
est continue sur $[-\pi,0[\cup]0,\pi]$ et quand θ tend vers 0

$$\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2\ln 2 + 2\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \sim 2\ln\left|\frac{\theta}{2}\right| \sim 2\ln|\theta| = o\left(\frac{1}{\sqrt{|\theta|}}\right).$$

On en déduit que la fonction $\theta \mapsto \ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$ et donc que $F(1)$ existe. Finalement, F est définie sur $[0,+\infty[$ et par parité

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque. Par parité de la fonction $\theta \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$, pour tout réel x, on a encore $F(x) = 2\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\, d\theta$.

Continuité de F. Soit $A > 1$. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} [0,A]\times]0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x,\theta) & \mapsto & \ln(x^2-2x\cos\theta+1) \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [0,A]$, la fonction $\theta \mapsto \Phi(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi]$.

• Pour chaque $\theta \in]0,\pi]$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $[0,A]$.

• Pour chaque $(x,\theta) \in \mathbb{R}^+\times]0,\pi]$, puisque $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$,

$$\begin{aligned}|\Phi(x,\theta)| &\leqslant \text{Max}\{\left|\ln(0^2 - 0\cos\theta + 1)\right|, \left|\ln(\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos\theta + 1)\right|, \left|\ln(A^2 - 2A\cos\theta + 1)\right|\} \\ &= \text{Max}\{2\left|\ln(|\sin\theta|)\right|, \left|\ln(A^2 - 2A\cos\theta + 1)\right|\} = \varphi(\theta).\end{aligned}$$

On a vu que la fonction $f_1 : \theta \mapsto 2\left|\ln(|\sin\theta|)\right|$ est intégrable sur $]0,\pi]$ et d'autre part, la fonction $f_2 : \theta \left|\ln(A^2 - 2A\cos\theta + 1)\right|$ est intégrable sur $[0,\pi]$ et donc sur $]0,\pi]$ car continue sur $[0,\pi]$. Puisque $\varphi = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$, on en déduit que la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,\pi]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est continue sur $[0,A]$ et ceci pour tout $A > 1$. Par suite, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^+$ puis par parité,

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Dérivabilité de F. Soient $A \in]0,1[$ puis $\Phi : \begin{array}{ccc} [-A,A]\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x,\theta) & \mapsto & \ln(x^2-2x\cos\theta+1) \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $\theta \mapsto \Phi(x,\theta)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.

• La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,\pi]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

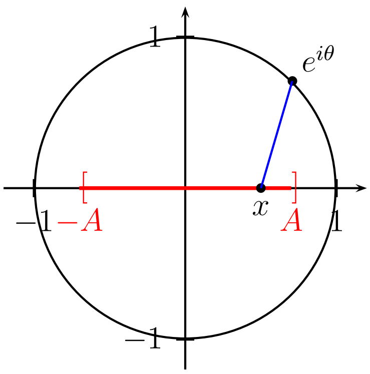
$$\forall (x,\theta) \in [-A,A]\times[0,\pi],\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta) = \frac{2x-2\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}.$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $\theta \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$,
- pour chaque $\theta \in [0,\pi]$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)$ est continue sur $[-A,A]$,
- pour chaque $(x,\theta) \in [-A,A]\times[0,\pi]$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)\right| = \frac{2|x-\cos\theta|}{|x-e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{4}{|A-1|^2} = \varphi(\theta).$$

La dernière inégalité écrite est claire géométriquement :



La plus courte distance d'un point du segment $[-A,A]$ au cercle trigonométrique est la distance de A à 1.

De plus, la fonction constante φ est intégrable sur le segment $[0,\pi]$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction F est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A\in]0,1[$, F est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et $\forall x\in]-1,1[$, $F'(x)=4\int_0^{\pi}\frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta$. La démarche est analogue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ et finalement F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ F'(x)=4\int_0^{\pi}\frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta.}$$

ii. **Calcul de $F'(x)$.** Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. On pose $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On a donc $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $d\theta=\frac{2dt}{1+t^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
F'(x)&=4\int_0^{\pi}\frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta=8\int_0^{+\infty}\frac{x-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{x^2-2x\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{dt}{1+t^2}\\
&=8\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)x-(1-t^2)}{((1+t^2)x^2-2x(1-t^2)+(1+t^2))(1+t^2)}\,dt\\
&=8\int_0^{+\infty}\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}\,dt
\end{aligned}$$

Pour tout réel t,

$$\left(t^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)(t^2+1)=\left(t-i\frac{x-1}{x+1}\right)\left(t+i\frac{x-1}{x+1}\right)(t-i)(t+i).$$

De plus, $\pm\frac{x-1}{x+1}=\pm1\Leftrightarrow\frac{x-1}{x+1}=-1\Leftrightarrow x=0$.
• $F'(0)=4\int_0^{\pi}(-\cos\theta)\,d\theta=0$.
• Si $x\neq0$, les pôles de la fraction rationnelle $\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}$ sont simples et par parité, la décomposition en éléments simples de cette fraction s'écrit

$$\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}=\frac{a}{t-i\frac{x-1}{x+1}}-\frac{a}{t+i\frac{x-1}{x+1}}+\frac{b}{t-i}-\frac{b}{t+i},$$

avec

$$\begin{aligned}
a&=\frac{-(x+1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+(x-1)}{(x+1)^2\left(2i\frac{x-1}{x+1}\right)\left(1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)}=\frac{-(x+1)(x-1)^2+(x-1)(x+1)^2}{2i(x+1)(x-1)((x+1)^2-(x-1)^2)}\\
&=\frac{2(x^2-1)}{2i(x^2-1)(4x)}=\frac{1}{4ix},
\end{aligned}$$

et

$$b=\frac{-(x+1)+(x-1)}{2i(-(x+1)^2+(x-1)^2)}=\frac{1}{4ix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
8\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}&=\frac{2}{ix}\left(\frac{1}{t-i\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{t+i\frac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{t-i}-\frac{1}{t+i}\right)\\
&=\frac{2}{ix}\left(\frac{2i\frac{x-1}{x+1}}{t^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}+\frac{2i}{t^2+1}\right)=\frac{4}{x}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)
\end{aligned}$$

Ensuite, en notant ε le signe de $\frac{x-1}{x+1}$

$$F'(x) = \frac{4}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)\,dt$$
$$= \frac{4}{x}\left[\frac{x^2-1}{(x+1)^2}\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\arctan\left(\frac{t}{\frac{x-1}{x+1}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{4}{x}(\varepsilon+1)\frac{\pi}{2}$$

Par suite, si $x\in]-1,1[$, $F'(x)=0$ et si $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $F'(x)=\frac{4\pi}{x}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ F'(x)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x\in]-1,1[\\ \frac{4\pi}{x} \text{ si } x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{array}\right.}.$$

iii. Soit $x>1$.

$$F(x)-4\pi\ln(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta-\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-\frac{2}{x}\cos\theta+\frac{1}{x^2}\right)\,d\theta=F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par suite, $\lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln(x))=\lim_{x\to+\infty}F\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}F(y)=F(0)=0$ par continuité de F en 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln(x))=0.}$$

iv. • F est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée nulle sur $]-1,1[$. Donc la fonction F est constante sur l'intervalle $[-1,1]$. Par suite, pour tout réel $x\in[-1,1]$, $F(x)=F(0)=0$.
• F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x>1$, $F'(x)=\frac{4\pi}{x}$. Donc il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x>1$, $F(x)=4\pi\ln x+C$ avec $C=\lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln x)=0$. Donc $\forall x>1$, $F(x)=4\pi\ln x$.
• Si $x<-1$, $F(x)=F(-x)=4\pi\ln(-x)=4\pi\ln|x|$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x\in[-1,1]\\ 4\pi\ln(|x|) \text{ si } x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{array}\right.}.$$

(b) i. Soit $x\in]-1,1[$. Pour $\theta\in[-\pi,\pi]$, on pose $f(\theta)=\ln(x^2-2x\cos\theta+1)$. Puisque $\forall\theta\in[-\pi,\pi]$, $x^2-2x\cos\theta+1>0$ (voir 1)), f est dérivable sur $[-\pi,\pi]$ et pour $\theta\in[-\pi,\pi]$,

$$f'(\theta)=\frac{2x\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}=\frac{1}{i}\left(\frac{e^{i\theta}}{x-e^{i\theta}}-\frac{e^{-i\theta}}{x-e^{-i\theta}}\right)=\frac{1}{i}\left(-\frac{1}{1-xe^{-i\theta}}+\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)$$
$$=\frac{1}{i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{in\theta}-\sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{-in\theta}\right)\ (\text{car } |xe^{i\theta}|=|xe^{-i\theta}|=|x|<1)$$
$$=2\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\theta)x^n.$$

Soit $\theta\in[-\pi,\pi]$. I désigne l'intervalle $[0,\theta]$ ou $[\theta,0]$ suivant que θ soit positif ou négatif.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in I$, posons $g_n(t)=2\sin(nt)x^n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in I$, on a $|f_n(t)|\leqslant|x|^n$. Comme $|x|^n$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur le segment I. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut écrire

$$f(\theta)=f(0)+\int_0^{\theta}f'(t)\,dt=2\ln(1-x)+\sum_{n=1}^{+\infty}2x^n\int_0^{\theta}\sin(nt)\,dt$$
$$=2\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n.$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \forall\theta\in[-\pi,\pi],\ \ln(x^2-2x\cos\theta+1)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n.}$$

Soit $x\in]-1,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in[-\pi,\pi]$, $\left|\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n\right|\leqslant|x|^n$. Comme précédemment, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$F(x)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta)\,d\theta=0.$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta=0.}$$

ii. Soit $x\in\mathbb{R}^*$.

$$F\left(\frac{1}{x}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-\frac{2}{x}\cos\theta+\frac{1}{x^2}\right)\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}(\ln(1-2x\cos\theta+x^2)-\ln(x^2))\,d\theta=-4\pi\ln|x|+F(x).$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ F\left(\frac{1}{x}\right)=-4\pi\ln|x|+F(x).}$$

Soit $x>1$. Puisque $\frac{1}{x}\in]0,1[$, $F(x)=4\pi\ln x+F\left(\frac{1}{x}\right)=4\pi\ln x$. On retrouve alors les résultats du 1).

Correction de l'exercice 4617 ▲

(a) Soit $A>0$. Soit $\Phi:\begin{array}{ccc}[-A,A]\times[0,1]&\to&\mathbb{R}\\(x,t)&\mapsto&\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\end{array}$.

• Pour chaque x de $[-A,A]$, la fonction $t\mapsto F(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ et donc intégrable sur ce segment.

• La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,1]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall(x,t)\in[-A,A]\times[0,1],\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)=-2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

De plus,

- pour chaque $x\in[-A,A]$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$,

- pour chaque $t\in[0,1]$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,

- pour chaque $(x,t)\in[-A,A]\times[0,1]$, $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant 2A=\varphi(t)$, la fonction φ étant continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction F est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A>0$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F'(x)=-2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt.}$$

(b) La fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction G et pour tout réel x,

$$\boxed{G'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.}$$

(c) Soit $x\in\mathbb{R}^*$. En posant $u=xt$, on obtient

$$F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,xdt = -e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = -G'(x),$$

cette égalité restant vraie quand $x=0$ par continuité des fonctions F' et G' sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $F'+G'=0$ et donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)+G(x)=F(0)+G(0)=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)+G(x)=\frac{\pi}{4}.}$$

(d) Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$|F(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leqslant e^{-x^2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4e^{x^2}},$$

et puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4e^{x^2}}=0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=0.}$$

(e) Pour $x>0$, on a $\int_0^x e^{-t^2}\,dt\geqslant 0$ et donc d'après la question 3),

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{G(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}-F(x)}.$$

La question 4) permet alors d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty}G(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4618 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx) = \frac{1}{2}(e^{-t^2+tx}+e^{-t^2-tx}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction $t\mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on peut poser $f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt$.
Calcul de $f(x)$. Soit $A>0$. On pose $\Phi:\begin{array}{ccc}[-A,A]\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\end{array}$.

• Pour chaque $x\in[-A,A]$, la fonction $t\mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
• La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall(x,t)\in[-A,A]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)=te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx).$$

De plus,
- pour chaque $x\in[-A,A]$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
-pour chaque $t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[-A,A]$,
- pour chaque $(x,t)\in[-A,A]\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-t^2}|\operatorname{sh}(tx)|\leqslant te^{-t^2}\operatorname{sh}(t|A|)=\varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction f est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $A>0$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On effectue maintenant une intégration par parties. Soit $A>0$. Les deux fonctions $t\mapsto te^{-t^2}$ et $t\mapsto\operatorname{sh}(tx)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$\int_0^A te^{-t^2}\,\mathrm{sh}(tx)\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\,\mathrm{sh}(tx)\right]_0^A + \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(tx)\,dt = -\frac{1}{2}e^{-A^2}\,\mathrm{sh}(tA) + \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(tx)\,dt.$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{sh}(tx)\,dt = \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(tx)\,dt = \frac{x}{2}f(x)$.
Ensuite, pour tout réel x, $e^{-x^2/4}f'(x) - \frac{x}{2}e^{-x^2/4}f(x) = 0$ ou encore $(e^{-x^2/4}f)'(x) = 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2/4}f(x) = e^0 f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(tx)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}.}$$

Correction de l'exercice 4619 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est continue sur $]0,1[$.
Etude en 1. $\frac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 1}{\sim} 1 \times 1 = 1$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ se prolonge par continuité en 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.
Etude en 0. $\frac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t} > 0$.
-si $x > -1$, $-\frac{t^x}{\ln t} \underset{t\to 0}{=} o(t^x)$ et puisque $x > -1$, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
- si $x \leqslant -1$, la fonction $t \mapsto -\frac{t^x}{\ln t}$ domine la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t\ln t}$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. Puisque la fonction $-\frac{1}{t\ln t}$ est positive et que $\int_x^{1/2} -\frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln|\ln(x)| - \ln|\ln(1/2)| \underset{x\to 0}{\to} +\infty$, la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t\ln t}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de 0. Il en est de même de la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$.
Finalement, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $x > -1$. Pour $x > -1$, on peut poser $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,dt$.
Calcul de $f(x)$. Soit $a > -1$. On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{t-1}{\ln t}t^x \end{array}$.

- Pour chaque $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.
- La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times]0,1[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x.$$

De plus,
- pour chaque $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$,
-pour chaque $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$,
- pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = (1-t)t^a = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0,1[$ et intégrable sur $]0,1[$ car $a > -1$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > -1$, la fonction f est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x > -1,\ f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\,dt = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > -1$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C \quad (*)$. Pour déterminer la constante C, on peut utiliser le résultat de l'exercice 2738 : $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2$. On peut aussi obtenir directement la constante C sans aucun calcul d'intégrale. Pour cela, déterminons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
La fonction $g : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur le segment $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et en 1 en posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. On en déduit que cette fonction est bornée sur l'intervalle $]0,1[$ (car son prolongement est une fonction continue sur un segment).
Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0,1[$. Pour $x > -1$, on a

$$|g(x)| \leqslant M\int_0^1 t^x\,dt = \frac{M}{x+1}.$$

Ceci montre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient $C = 0$. On a donc montré que

$$\boxed{\forall x > -1,\ \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\,dt = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).}$$

On retrouve en particulier $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2$.

Correction de l'exercice 4620 ▲

Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Soit $x \geqslant 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ existe pour tout réel positif x et on pose $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

Continuité de f sur $[0,+\infty[$**.** Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
• Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
• Pour chaque $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$|\Phi(x,t)| = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi_0(t).$$

De plus, la fonction φ_0 est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car équivalente à $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, f est continue sur $[0,+\infty[$.

Dérivée seconde de f. Soit $a > 0$. On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[a,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.

En plus de ce qui précède, Φ admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 définies par

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}.$$

• Pour chaque $x \in [a,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
• Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[a,+\infty[$.
• Pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{te^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \frac{te^{-at}}{1+t^2} = \varphi_1(t) \text{ et } \left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2} = \varphi_2(t).$$

De plus, les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$ car négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ et ses dérivées premières et secondes s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt \text{ et } f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.}$$

Equation différentielle vérifiée par f. Pour $x > 0$,

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f(x) + f''(x) = \frac{1}{x}.}$$

Existence de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,dt$. Si $x=0$, l'exercice 2734, 1) montre que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est une intégrale convergente.
Si $x>0$, une intégration par parties fournit pour $A>0$

$$\int_0^A\frac{\sin t}{t+x}\,dt=-\frac{\cos A}{A+x}+\frac{1}{x}-\int_0^A\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt.$$

La fonction $t\mapsto\frac{\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction $A\mapsto\int_0^A\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$ a une limite réelle quand A tend vers $+\infty$ et il en est de même de la fonction $A\mapsto\int_0^A\frac{\sin t}{t+x}\,dt$. Ainsi, pour chaque $x\in[0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$ est une intégrale convergente. Pour $x\geqslant 0$, on peut donc poser $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$.
Equation différentielle vérifiée par g. Pour $x>0$, on pose $u=x+t$. on obtient

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}\,du=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du.$$

(car toutes les intégrales considérées sont convergentes). Maintenant, les fonctions $c\ :\ u\mapsto\frac{\cos u}{u}$ et $s\ :\ u\mapsto\frac{\sin u}{u}$ sont continues sur $]0,+\infty[$ et admettent donc des primitives sur $]0,+\infty[$. On note C (respectivement S) une primitive de la fonction c (respectivement s) sur $]0,+\infty[$). Pour tout réel $x>0$, $\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=\lim_{t\to+\infty}C(t)-C(x)$. On en déduit que la fonction $x\mapsto\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de dérivée $-c$. De même, la fonction $x\mapsto\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de dérivée $-s$. Mais alors la fonction g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\frac{\sin x\cos x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos x\sin x}{x}\\&=-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du.\end{aligned}$$

La fonction g' est encore de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos^2 x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du+\frac{\sin^2 x}{x}\\&=\frac{1}{x}-g(x).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ g''(x)+g(x)=\frac{1}{x}.}$$

Egalité de f et g sur $]0,+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, $(f-g)''(x)+(f-g)(x)=0$. Donc il existe deux réels λ et μ tels que $\forall x>0$, $(f-g)(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x=A\cos(x+\varphi)$ pour $A=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ et pour un certain φ.
Maintenant, pour $x>0$, $|f(x)|=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\frac{1}{x}$ et on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.
Ensuite, $|g(x)\leqslant\left|\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du\right|+\left|\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\right|$. Puisque les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ sont des intégrales convergentes, on a $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=0$ et donc aussi $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$.
Finalement, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$ ce qui impose $A=0$ et donc $\forall x>0$, $f(x)=g(x)$.

$$\boxed{\forall x>0,\ \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt.}$$

Continuité de g en 0 et valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$. Pour $x>0$,

$$\begin{aligned}g(x)&=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\\&=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\sin x\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\sin x\int_x^{1}\frac{1-\cos u}{u}\,du-\sin x\ln x.\end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, $\sin x \ln x \sim x \ln x$ et donc $\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = 0$. Ensuite, la fonction $u \mapsto \frac{1-\cos u}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$ car continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que $\lim_{x\to 0} \sin x \int_x^1 \frac{1-\cos u}{u}\, du = 0 \times \int_0^1 \frac{1-\cos u}{u}\, du = 0$. Il reste

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = g(0).$$

La fonction g est donc continue en 0. Puisque la fonction f est également continue en 0, on en déduit que

$$g(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt \text{ et en particulier, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4621 ▲

(a) • Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur le segment $[0,T]$ et donc intégrable sur ce segment. Par suite, $f*g(x)$ existe.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $f*g(x+T) = \int_0^T f(x+T-t)g(t)\, dt = \int_0^T f(x-t)g(t)\, dt = f*g(x)$. Donc la fonction $f*g$ est T-périodique.

• Les fonction f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Ces fonctions sont en particulier bornées sur $\mathbb{R}$. On note M_1 et M_2 des majorants sur $\mathbb{R}$ des fonctions $|f|$ et $|g|$ respectivement.

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,T] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(x-t)g(t) \end{array}$.

- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,T]$.

- Pour chaque $t \in [0,T]$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour chaque $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$, $|\Phi(x,t)| \leqslant M_1M_2 = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue et donc intégrable sur le segment $[0,T]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Soient f et g deux éléments de E. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = x-t$, on obtient

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int_0^T f(x-t)g(t)\, dt = \int_x^{x-T} f(u)g(u-t)\,(-du) = \int_{x-T}^x g(u-t)f(u)\, du \\ &= \int_0^T g(u-t)f(u)\, du \text{ (car la fonction } u \mapsto g(u-t)f(u) \text{ est } T\text{-périodique)} \\ &= g*f(x). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4624 ▲

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2. \qquad \text{(E)}$$

(a) Trouvons $a \in]0,\infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière. Puisque

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$

y_0 est solution si et seulement si $a = \pm 3$. On choisit $a = 3$.

(b) Si z est une fonction $\mathscr{C}^1$ ne s'annulant pas, on pose $y(x) = 3x - 1/z(x)$. Alors y est solution si et seulement si

$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$

En multipliant par $z(x)^2$, on obtient que y est solution de (E) ssi z vérifie

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \tag{E$_1$}$$

(c) On résout (E_1) sur $]0,\infty[$. Une primitive de $x \mapsto 6x + 1/x$ est $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto A\exp(-3x^2 - \ln(x))$. On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $z_p(x) = \alpha(x)\exp(-3x^2 - \ln(x))$; alors z_p est solution si $\alpha'(x)\exp(-3x^2 - \ln(x)) = 1$, c'est-à-dire si $\alpha'(x) = x\exp(3x^2)$, par exemple si $\alpha(x) = \exp(3x^2)/6$. Les solutions de (E_1) sont donc les

$$z(x) = \frac{1 + A\exp(-3x^2)}{6x}, \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

(d) On va maintenant en déduire les solutions de (E) définies sur $]0,\infty[$.

Soit y une solution $\mathscr{C}^1$ définie sur $]0,\infty[$. On suppose dans un premier temps que $y(x) > 3x$ sur l'intervalle ouvert $I \subset]0,\infty[$, pris aussi grand que possible. Alors $y(x) = 3x - 1/z_I(x)$ pour une certaine fonction $z_I < 0$ qui est $\mathscr{C}^1$ sur I. D'après la question précédente, on a nécessairement $z_I(x) = [1 + A_I\exp(-3x^2)]/6x$ pour une certaine constante $A_I \in \mathbb{R}$. Puisque $z_I < 0$, cela impose $A_I < 0$, mais du coup $I \neq]0,+\infty[$ car $1 > A_I\exp(-3x^2)$ si x est assez grand.

Dans tous les cas, il existe donc un intervalle ouvert J tel que $y(x) < 3x$ sur J. On suppose encore que J est aussi grand que possible. Sur J, $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ pour une certaine fonction $z_J > 0$ qui est $\mathscr{C}^1$ sur J. Encore d'après la question précédente, $z_J(x) = [1 + A_J\exp(-3x^2)]/6x$ pour une certaine constante A_J. Puisque l'intervalle ouvert $J =]a,b[$ a été supposé maximal, et puisque y est supposée définie sur $]0,+\infty[$, si $a > 0$ on a $y(a) = 3a$ et de même si $b < \infty$, $y(b) = 3b$, car sinon par continuité de y on aurait encore $y(x) < 3x$ sur $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$ pour un petit $\varepsilon > 0$. Cela n'est possible respectivement que si $z_J(x) \to +\infty$ lorsque $x \to a$ ou $z_J(x) \to +\infty$ lorsque $x \to b$. Or on a dit que $z_J = [1 + A_J\exp(-3x^2)]/6x$, cela n'est donc pas possible du tout (sauf précisément si respectivement $a = 0$ et $b = 0$).

Donc soit $y(x) = 3x$ sur $]0,+\infty[$, soit $y(x) < 3x$ sur $]0,+\infty[$. Dans ce dernier cas, $z(x) = 1/(3x - y(x))$ est définie sur $]0,+\infty[$ et s'écrit $z(x) = [1 + A\exp(-3x^2)]/6x$. Puisque $z > 0$, nécessairement $A \geqslant -1$. Donc si y est solution, alors

$$y(x) = 3x \qquad \text{ou} \qquad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + A\exp(-3x^2)} \quad \text{avec } A \geqslant -1.$$

Réciproquement, si y est ainsi définie, alors y est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$, et on peut vérifier que c'est bien une solution.

Correction de l'exercice 4628 ▲

Les primitives de la fonction $a(x) = 2x$ sont les fonctions $A(x) = x^2/2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante réelle quelconque. Donc les solutions de l'équation homogène associée à E sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ du type : $y(x) = ce^{-x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. On cherche maintenant une solution particulière de E sous la forme $y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$ (méthode de la variation de la constante). On a :
$y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}$. Donc y_p est solution de E si et seulement si : $c'(x) = xe^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On choisit la fonction c parmi les primitives de la fonction xe^{x^2}, par exemple : $c(x) = 1/2e^{x^2}$. Donc la fonction y_p telle que $y_p(x) = 1/2e^{x^2}e^{-x^2} = 1/2$ est solution de E.
Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}\ c \in \mathbb{R}.$$

Pour y solution de E_1, la condition $y(0)=1$ équivaut à : $c=1/2$.

Correction de l'exercice 4630 ▲

Si $z=x+\lambda y$, alors $\dot z=x(1+3\lambda)+y(1-\lambda)$. Pour que $\dot z$ soit proportionnel à z, il suffit que $\lambda(1+3\lambda)=1-\lambda$, autrement dit $3\lambda^2+2\lambda-1=0$. Il y a deux solutions : $a=-1$ et $b=1/3$. On pose $u=x-y$ et $v=x+\frac{1}{3}y$. On a alors : $\dot u=-2u$ et $\dot v=2v$. On en déduit que les solutions u et v sont de la forme $u(t)=C_1e^{-2t}$ et $v(t)=C_2e^{2t}$, avec $C_1,C_2\in\mathbb{R}$. De plus,

$$\left\{\begin{array}{lcl} u &=& x-y\\ v &=& x+\frac{1}{3}y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{1}{4}(u+3v)\\ y &=& \frac{3}{4}(v-u)\end{array}\right.$$

Donc les solutions du système différentiel sont les couples de fonctions (x,y) de la forme

$$x(t)=D_1e^{-2t}+3D_2e^{2t},\ y(t)=-3D_1e^{-2t}+3D_2e^{2t},\ D_1,D_2\in\mathbb{R}.$$

On veut $x(0)=2$ et $y(0)=-2$. Ceci est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} D_1 &+& 3D_2 &=& 2\\ -3D_1 &+& 3D_2 &=& -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} D_1 &=& 1\\ D_2 &=& 1/3\end{array}\right.$$

Conclusion : il y a une unique solution, donnée par

$$x(t)=e^{-2t}+e^{2t},\ y(t)=-3e^{-2t}+e^{2t}.$$

Correction de l'exercice 4636 ▲

Les équations différentielles à résoudre dans cet exercice sont toutes linéaires du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

(a) Les fonctions $x\mapsto\frac{1}{x\ln x}$ et $x\mapsto\frac{1}{\ln x}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ x\ln x f'(x)+f(x)=x \Leftrightarrow \forall x\in I,\ \ln x f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=1\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (\ln x.f)'(x)=1 \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\frac{x+\lambda}{\ln x}\end{aligned}$$

(b) Les fonctions $x\mapsto\frac{1}{x}$ et $x\mapsto 1+\frac{1}{x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ x(xf'(x)+f(x)-x)=1 \Leftrightarrow \forall x\in I,\ (xf)'(x)=x+\frac{1}{x}\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ xf(x)=\frac{x^2}{2}+\ln(-x)+\lambda \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln(-x)+\lambda}{x}\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{x}{2}+\frac{\ln(-x)+\lambda}{x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

(c) Les fonctions $x\mapsto\frac{1}{2x}$ et $x\mapsto\frac{x^3}{2}$ sont continues sur $I=]-\infty,0[$ et on saitque les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=\frac{x^3}{2}$$
$$\forall x \in I,\ e^{\ln|x|/2}f'(x)+\frac{1}{2x}e^{\ln|x|/2}f(x)=\frac{x^3}{2}e^{\ln|x|/2} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{-x}f)'(x)=-\frac{1}{2}(-x)^{7/2}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ \sqrt{-x}f(x)=\frac{1}{9}(-x)^{9/2}+\lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x)=\frac{1}{9}x^4+\frac{\lambda}{\sqrt{-x}}$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^4}{9}+\frac{\lambda}{\sqrt{-x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Les fonctions $x \mapsto 2$ et $x \mapsto x^2-3x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)+2f(x)=x^2-3x$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}f'(x)+2e^{2x}f(x)=(x^2-3x)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{2x}f)'(x)=(x^2-3x)e^{2x}$$

Recherche d'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x^2-3x)e^{2x}$.
1ère méthode. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned}\int (x^2-3x)e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}(x^2-3x)e^{2x}-\frac{1}{2}\int (2x-3)e^{2x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2-3x)e^{2x}-\frac{1}{4}(2x-3)e^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx \\ &= \frac{1}{4}(2x^2-8x+3)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{2}(x^2-4x+2)e^{2x}+C\end{aligned}$$

2ème méthode. Cherchons les primitives de $x \mapsto (x^2-3x)e^{2x}$ sous la forme $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$.

$$((ax^2+bx+c)e^{2x})'=(2(ax^2+bx+c)+(2ax+b))e^{2x}=(2ax^2+2(a+b)x+b+2c)e^{2x}.$$

Donc,

$$((ax^2+bx+c)e^{2x})'=(x^2-3x)e^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 2(a+b)=-3 \\ b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}.$$

Résolution de (E).

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{2x}f)'(x)=(x^2-3x)e^{2x} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}f(x)=(\frac{x^2}{2}-2x+1)e^{2x}+\lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{2}-2x+1+\lambda e^{-2x}.$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme$x \mapsto \frac{x^2}{2}-2x+1+\lambda e^{-2x}$,$\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{1}{1+2e^x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+2e^x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^x f'(x) + e^x f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (\frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + \lambda)e^{-x} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + \lambda)e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

(f) Les fonctions $x \mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}$ et $x \mapsto -\frac{1}{\sin x}$ sont continues sur $I =]0,\pi[$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Mais $x \mapsto \sin x$ est une solution non nulle de (E_H) sur I et $x \mapsto \cos x$ est une solution de (E) sur $]0,\pi[$.

Les solutions de (E) sur $]0,\pi[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \sin x + \cos x,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4637 ▲

L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

Soit I l'un des deux intervalles $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$. Les fonctions $x \mapsto \frac{-2x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{1-x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Résolution de (E) sur I. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (1-x^2)f'(x) - 2xf(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ ((1-x^2)f)'(x) = x^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (1-x^2)f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x^3+\lambda}{3(1-x^2)}, \end{aligned}$$

(en renommant λ la constante 3λ).

Si $I =]-1,+\infty[$.

Soit f une éventuelle solution de (E) sur I. Les restrictions de f à $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ sont encore solution de (E) et donc de la forme précédente. Par suite, nécessairement, il existe deux constantes λ_1 etλ_2 telles que, pour $-1 < x < 1$, $f(x) = \frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}$ et pour $x > 1$, $f(x) = \frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)}$. Enfin, l'équation impose $f(1) = -\frac{1}{2}$.

En résumé, une éventuelle solution de (E) sur I est nécessairement de la forme :

$$\forall x > -1,\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)} \text{ si } -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \\ \frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)} \text{ si } x > 1 \end{cases}.$$

Réciproquement, f ainsi définie, est dérivable sur $]-1,1[$ et solution de (E) sur $]-1,1[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et solution de (E) sur $]1,+\infty[$ et, si f est dérivable en 1, f vérifie encore (E) pour $x = 1$. Donc, f est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si f est dérivable en 1.

Pour $-1 < x < 1$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}+\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{2x^3+2\lambda_1+3(1-x^2)}{6(1-x^2)(x-1)}$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, le dénominateur de la fraction tend vers 0 et le numérateur tend vers $2(1+\lambda_1)$. Donc, si $\lambda_1 \neq -1$, f n'est pas dérivable à gauche en 1. De même, si λ_2 n'est pas -1, f n'est pas dérivable à droite en -1. Ainsi, si f est solution de (E) sur I, nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Dans ce cas, pour $x \in]-1,+\infty[\setminus\{1\}$,

$$f(x) = \frac{x^3-1}{3(1-x^2)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(1-x)(1+x)} = -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)},$$

ce qui reste vrai pour $x=1$. Ainsi, si f est une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$, nécessairement pour $x>-1$, $f(x) = -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$. Réciproquement, f ainsi définie est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en 1. f est donc solution de (E) sur $]-1,+\infty[$.

Sur $]-1,+\infty[$, (E) admet une et une seule solution à savoir la fonction $x \mapsto -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$.

Si $I=\mathbb{R}$, soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de f à $]-1,+\infty[$ est nécessairement la fonction précédente. Mais cette fonction tend vers $-\infty$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures. Donc f ne peut être continue sur $\mathbb{R}$ et (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4638 ▲

Résolution de (E) sur $]0,+\infty[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ |x|f'(x)+(x-1)f(x) = x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ xf'(x)+(x-1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x)+(1-\frac{1}{x})f(x) = x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln x}f'(x)+(1-\frac{1}{x})e^{x-\ln x}f(x) = e^{x-\ln x}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ (\frac{e^x}{x}f)'(x) = xe^x = ((x-1)e^x)'\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = xe^{-x}((x-1)e^x+\lambda) = x^2-x+\lambda xe^{-x}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2-x+\lambda xe^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résolution de (E) sur $]-\infty,0[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ -xf'(x)+(x-1)f(x) = x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ f'(x)+(-1+\frac{1}{x})f(x) = -x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ e^{-x+\ln|x|}f'(x)+(-1+\frac{1}{x})e^{-x+\ln|x|}f(x) = -e^{-x+\ln|x|}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ (-xe^{-x}y)' = x^3e^{-x}\ (*)
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x \mapsto -x^3e^{-x}$ de la forme $(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$.

$$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})' = (-(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c))e^{-x} = (-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d)e$$

et

$$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})' = x^3e^{-x} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a=-1\\ 3a-b=0\\ 2b-c=0\\ c-d=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=3\\ c=6=d\end{array}\right. .$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x) = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x) = x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}.\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]-\infty,0[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
On peut montrer que l'équation admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ en « recollant » les expressions précédentes, mais en ce début d'année, on manque encore d'outils.

Correction de l'exercice 4639 ▲

On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme :

$$g\ :\ x\mapsto \lambda e^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Dans ce cas, pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x+T) = \lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\,dt$. Or,

$$\begin{aligned}\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\,dt &= \int_0^x e^{at}f(t)\,dt+\int_x^{x+T}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^x e^{at}f(t)\,dt+\int_0^T e^{a(u+T)}f(u+T)\,du\\ &= \int_0^x e^{at}f(t)\,dt+e^{aT}\int_0^T e^{au}f(u)du.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}g(x+T) &= \lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt+e^{-ax}\int_0^T e^{au}f(u)\,du\\ &= \lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt+g(x)-\lambda e^{-ax}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}g \text{ est } T\text{-périodique} &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt-\lambda e^{-ax}=0\\ &\Leftrightarrow \lambda(1-e^{-aT}) = e^{-aT}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt \Leftrightarrow \lambda = \frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\end{aligned}$$

($e^{-aT}\neq 1$ car $a\neq 0$ et $T\neq 0$). D'où l'existence et l'unicité d'une solution T-périodique :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x) = \frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\,dte^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt.$$

Correction de l'exercice 4640 ▲

(a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

On commence par résoudre l'équation homogène associée $y'+2y=0$: les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_1). Le second membre étant polynomial de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme :
$y_0(x) = ax^2+bx+c$ est solution de (E_1)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x)+2y_0(x) = x^2$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2+(2a+2b)x+b+2c = x^2$
Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ convient.
Les solutions de (E_1) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

(b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

Les solutions de l'équation homogène associée $y'+y=0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_2). Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin :
$y_0(x) = a\cos x + b\sin x$ est solution de (E_2)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x)+y_0(x) = 2\sin x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (a+b)\cos x + (-a+b)\sin x = 2\sin x$
Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = -\cos x + \sin x$ convient.
Les solutions de (E_2) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

(c) Les solutions de l'équation homogène associée $y'-y=0$ sont les $y(x) = \lambda e^{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré $d=1$: or la fonction exponentielle du second membre est la même (e^x) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de e^x par une fonction polynomiale de degré $d+1=2$:
$y_0(x) = (ax^2+bx+c)e^x$ est solution de (E_3)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x)-y_0(x) = (x+1)e^x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2ax+b)e^x = (x+1)e^x$
Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2+x)e^x$ convient.
Les solutions de (E_3) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^{x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

(d) Les solutions de l'équation homogène associée $y'+y=0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1, d'une fonction exponentielle (différente de e^{-x}) et d'une fonction trigonométrique. D'après le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme :

$y_0(x) = ax + b + \mu e^x + \alpha \cos x + \beta \sin x$ est solution de (E_4)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + y_0(x) = x - e^x + \cos x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax + a + b + 2\mu e^x + (\alpha + \beta)\cos x + (-\alpha + \beta)\sin x = x - e^x + \cos x$
Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que

$$y_0(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

convient.
Les solutions de (E_4) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Correction de l'exercice 4641 ▲

Une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ convient si et seulement si
— f est dérivable
— f est solution de $y' + y = c$
— f vérifie $f(0) + f(1) = c$ (où c est un réel quelconque)
Or les solutions de l'équation différentielle $y' + y = c$ sont exactement les $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + c$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à c est une solution particulière de $y' + y = c$). Évidemment ces fonctions sont dérivables, et $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1}) + 2c$, donc la troisième condition est satisfaite si et seulement si $-\lambda(1 + e^{-1}) = c$.
Ainsi les solutions du problème sont exactement les

$$f(x) = \lambda(e^{-x} - 1 - e^{-1})$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4642 ▲

(a) Comme le coefficient de y' ne s'annule pas, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{3x^2+1}{x^2+1}$$

i. Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ où $u(x) = x^2 + 1$. Les solutions sont donc les $y(x) = \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \dfrac{\lambda}{x^2+1}$.

ii. Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre : on remarque que $y_0(x) = x$ convient.

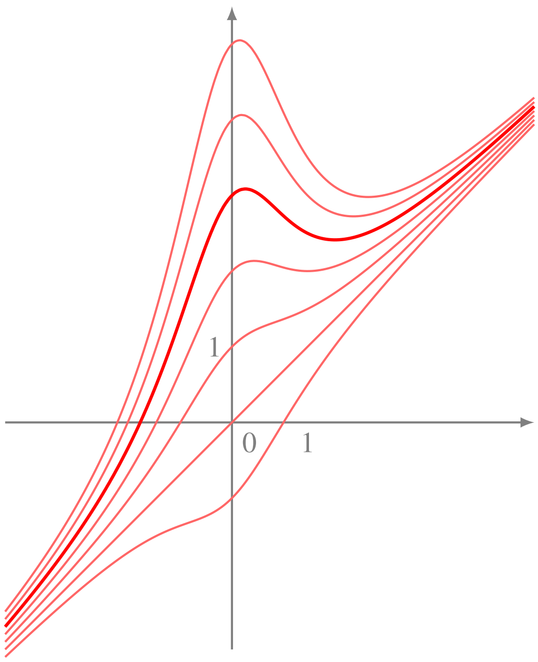
iii. Les solutions sont obtenues en faisant la somme :

$$y(x) = x + \frac{\lambda}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

iv. $y(0) = 3$ si et seulement si $\lambda = 3$. La solution cherchée est donc $y(x) = x + \frac{3}{x^2+1}$.

Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -1, 0, \ldots, 5$.



(b) On commence par remarquer que $y_0(x) = \cos x$ est une solution particulière. Pour l'équation homogène : sur l'intervalle considéré, le coefficient de y' ne s'annule pas, et l'équation se réécrit

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$$

Les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de $a(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $A(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \sin x$. Les solutions de l'équation sont donc les $y(x) = \lambda e^{\ln(\sin x)} = \lambda \sin x$.

Finalement, les solutions de l'équation sont les

$$y(x) = \cos x + \lambda \sin x$$

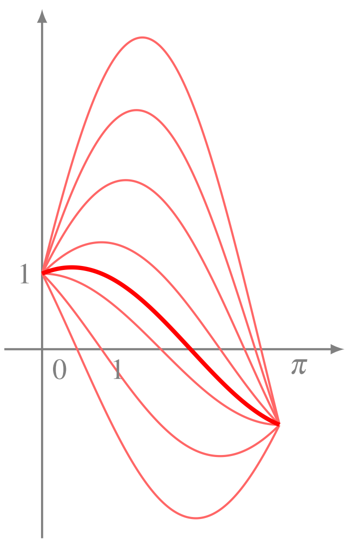
où λ est un paramètre réel.

(c) On a

$$y(\frac{\pi}{4}) = 1 \iff \cos\frac{\pi}{4} + \lambda \sin\frac{\pi}{4} = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\lambda) = 1 \iff \lambda = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

La solution cherchée est $y(x) = \cos x + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) \sin x$

Voici les courbes intégrales pour $\lambda = -2, -1, 0, \ldots, 4$ et $\frac{2}{\sqrt{2}} - 1$ (en gras).



Correction de l'exercice 4643 ▲

(a) $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0;+\infty[$

i. **Résolution de l'équation homogène $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$.**
Une primitive de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ est $A(x) = x^2 - \ln x$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln x) = \lambda \frac{1}{x}\exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.

ii. **Recherche d'une solution particulière.**
Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$. On cherche une telle solution sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.
On calcule d'abord

$$y_0'(x) = \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2)$$

Maintenant :

$$\begin{aligned}
& y_0 \quad \text{est solution de } y' - (2x + \frac{1}{x})y = 1 \\
\iff & y_0' - (2x - \frac{1}{x})y_0 = 1 \\
\iff & \lambda'(x)x\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2) - (2x - \frac{1}{x})\lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \\
\iff & \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \qquad \text{cela doit se simplifier !} \\
\iff & \lambda'(x) = x\exp(-x^2)
\end{aligned}$$

Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\exp(x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :

$$y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2x}$$

Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

iii. **Solution générale.**
L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène. Autrement dit, les solutions sont les :

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda\frac{1}{x}\exp(x^2) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

(b) $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$

i. **Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0$.**
Les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda \exp(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. **Recherche d'une solution particulière.**
On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.
Comme $y_0'(x) = \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x)$ alors

$$\begin{aligned}
& y_0 \quad \text{est solution de } y' - y = x^k\exp(x) \\
\iff & \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x) - \lambda(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\
\iff & \lambda'(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\
\iff & \lambda'(x) = x^k
\end{aligned}$$

On fixe $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$$

iii. **Solution générale.**
L'ensemble des solutions est formé des

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x) + \lambda\exp(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

(c) $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0;+\infty[$
Le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

i. Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1+\ln^2(x)$. Les solutions de l'équation sont les $y(x) = \lambda e^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \dfrac{\lambda}{1+\ln^2(x)}$.

ii. Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1+\ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable. Or $z(x) = \frac{1}{1+\ln^2(x)}$ est solution de l'équation homogène et $y_0(x) = \lambda(x)z(x)$:

$$\begin{aligned}
& y_0 \quad \text{est solution} \\
\iff & y_0' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y_0 = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x)z(x) + \lambda(x)\underbrace{\left[z'(x) + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}z(x)\right]}_{=0} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \frac{\lambda'(x)}{1+\ln^2(x)} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x) = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln x$, ce qui donne la solution particulière $y_0(x) = \frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$.

iii. Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1+\ln^2(x)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Remarque : le choix d'une primitive de λ' se fait à constante additive près. Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln x + 1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les

$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + \lambda}{1+\ln^2(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Quitte à poser $\lambda_0' = 1 + \lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment !

Correction de l'exercice 4644 ▲

(a) L'équation différentielle $y' - e^x e^y = 0$ est à variables séparées : en effet, en divisant par e^y, on obtient $-y'e^{-y} = -e^x$. Le terme de gauche est la dérivée de e^{-y} (y est une fonction de x), celui de droite est la dérivée de $x \mapsto -e^x$:

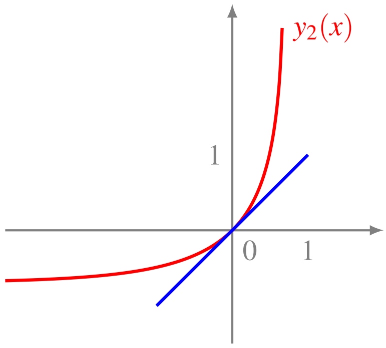
$$\frac{e^{-y}}{x} = \frac{(-e^x)}{x}$$

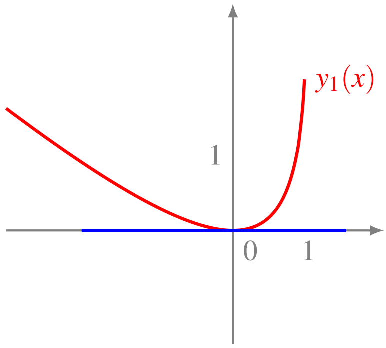
Les dérivées étant égales, cela implique que les deux fonctions sont égales à une constante additive près : ainsi y est solution sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $e^{-y} = -e^x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $-e^x + c > 0$, c'est-à-dire si $c > 0$ et $x < \ln c$. On obtient ainsi les solutions :

$$y_c(x) = -\ln(c - e^x) \quad (\text{pour } x \in I_c =]-\infty; \ln c[)$$

où c est un paramètre réel strictement positif.

Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c > 0$ tel que $0 \in I_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 1$ et $c - 1 = 1$. Il s'agit donc de $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $I_2 =]-\infty; \ln 2[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$, c'est la première bissectrice. Comme par construction y_2' est à valeurs strictement positives, la fonction y_2 est strictement croissante.





(b) Posons $z(x) = x + y(x)$: z a le même domaine de définition que y et est dérivable si et seulement si y l'est. En remplaçant $y(x)$ par $z(x) - x$ dans l'équation différentielle $y' - e^x e^y = -1$, on obtient $z' - e^z = 0$, c'est-à-dire $z'e^{-z} = 1$. Il s'agit de nouveau d'une équation à variables séparées : en intégrant cette égalité, on obtient que z est solution sur J si et seulement si elle est dérivable sur J et $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in J$, $e^{-z} = -x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $c > x$. On obtient ainsi les solutions :

$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x) \quad (\text{pour } x \in J_c =]-\infty; c[)$$

où c est un paramètre réel.

Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in J_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 0$ et $c = 1$. Il s'agit donc de $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $J_1 =]-\infty; 1[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$: elle est horizontale.

Correction de l'exercice 4645 ▲

(a) $x^2 y' - y = 0$ (E_1)

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.

i. **Résolution sur** $]-\infty; 0[$ **ou** $]0; +\infty[$.

Sur chacun de ces intervalles, l'équation différentielle se réécrit

$$y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants. Ses solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{-1/x}$ (en effet, sur $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$, une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $\frac{-1}{x}$).

ii. **Recollement en** 0.

Une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, il existe donc $\lambda_+,\ \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ \lambda_- e^{-1/x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$: autrement dit, pour quels choix de $\lambda_+,\ \lambda_-$ la fonction y se prolonge-t-elle en 0 en une fonction dérivable vérifiant (E_1) ?

— $e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$ et $e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, donc y est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\boxed{\lambda_- = 0}$. On peut alors poser $\boxed{y(0) = 0}$, quel que soit le choix de λ_+.

— Pour voir si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on étudie son taux d'accroissement :

$$\begin{cases} \text{pour } x > 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\lambda_+ e^{-1/x}}{x} = -\lambda_+(\frac{-1}{x})e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \\ \\ \text{pour } x < 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0 \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 \end{cases}$$

Ainsi la fonction y est dérivable en 0 et $\boxed{y'(0) = 0}$.

— Par construction, l'équation différentielle (E_1) est satisfaite sur $\mathbb{R}^*$. Vérifions qu'elle est également satisfaite au point $x = 0$: $0^2 \cdot y'(0) - y(0) = -y(0) = 0$.

iii. **Conclusion.**

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions suivantes :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(b) $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Pour se ramener à l'étude d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on résout d'abord sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas : on se place donc sur $I =]-\infty;0[$ ou $I =]0;+\infty[$.

i. **Résolution sur** I.

Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

— Pour l'équation homogène $y' + \frac{1}{x}y = 0$ une primitive de $-\frac{1}{x}$ sur I, est $-\ln|x|$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $\lambda e^{-\ln|x|} = \lambda\frac{1}{|x|}$. Quitte à changer λ en $-\lambda$ si $I =]-\infty;0[$, on peut écrire les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(x) = \lambda\frac{1}{x}$.

— Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant $y(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}$: en remplaçant, on voit que y est solution sur I si et seulement si $\lambda'(x) = 1$. En intégrant, on obtient $\lambda(x) = x$. Une solution particulière en donc $y_0(x) = 1$.

— Sur I les solutions de (E_2) sont les $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$ où λ est un paramètre réel.

ii. **Recollement en** 0.

Une solution y de (E_2) sur $\mathbb{R}$ doit être solution sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, il existe donc $\lambda_+,\ \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x)=\begin{cases} 1+\frac{\lambda_+}{x} & \text{si } x>0 \\ 1+\frac{\lambda_-}{x} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Il reste à voir si l'on peut recoller les deux expressions pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$. On voit tout de suite que y a une limite (finie) en 0 si et seulement si $\boxed{\lambda_+=\lambda_-=0}$. Dans ce cas, on peut alors poser $\boxed{y(0)=1}$ et y est la fonction constante égale à 1, qui est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, (E_2) est bien satisfaite au point $x=0$.

iii. **Conclusion.**

Finalement, (E_2) admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution, qui est la fonction constante égale à 1.

Correction de l'exercice 4646 ▲

(a) **Équation de Bernoulli**

i. On suppose qu'une solution y ne s'annule pas. On divise l'équation $y'+a(x)y+b(x)y^n=0$ par y^n, ce qui donne

$$\frac{y'}{y^n}+a(x)\frac{1}{y^{n-1}}+b(x)=0.$$

On pose $z(x)=\frac{1}{y^{n-1}}$ et donc $z'(x)=(1-n)\frac{y'}{y^n}$. L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :

$$\tfrac{1}{1-n}z'+a(x)z+b(x)=0$$

ii. Équation $xy'+y-xy^3=0$.

Cherchons les solutions y qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par y^3 pour obtenir :

$$x\frac{y'}{y^3}+\frac{1}{y^2}-x=0$$

On pose $z(x)=\frac{1}{y^2(x)}$, et donc $z'(x)=-2\frac{y'(x)}{y(x)^3}$. L'équation différentielle s'exprime alors $\frac{-1}{2}xz'+z-x=0$, c'est-à-dire :

$$xz'-2z=-2x.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette dernière équation sont les

$$z(x)=\begin{cases}\lambda_+x^2+2x \text{ si } x\geqslant 0\\ \lambda_-x^2+2x \text{ si } x<0\end{cases}\quad,\quad \lambda_+,\lambda_-\in\mathbb{R}$$

Comme on a posé $z(x)=\frac{1}{y^2(x)}$, on se retreint à un intervalle I sur lequel $z(x)>0$: nécessairement $0\notin I$, donc on considère $z(x)=\lambda x^2+2x$, qui est strictement positif sur I_λ où

$$I_\lambda=\begin{cases}]0;+\infty[& \text{si } \lambda=0\\ ]0;-\frac{2}{\lambda}[& \text{si } \lambda<0\\ ]-\infty;-\frac{2}{\lambda}[\text{ ou }]0;+\infty[& \text{si } \lambda>0\end{cases}$$

On a $(y(x))^2=\frac{1}{z(x)}$ pour tout $x\in I_\lambda$ et donc $y(x)=\varepsilon(x)\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$, où $\varepsilon(x)=\pm1$. Or y est continue sur l'intervalle I_λ, et ne s'annule pas par hypothèse : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc $\varepsilon(x)$ est soit constant égal à 1, soit constant égal à -1. Ainsi les solutions cherchées sont les :

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}} \text{ ou } y(x)=\frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}} \quad \text{sur } I_\lambda \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

Noter que la solution nulle est aussi solution.

(b) **Équation de Riccati**

i. Soit y_0 une solution de $y'+a(x)y+b(x)y^2=c(x)$. Posons $u(x)=y(x)-y_0(x)$, donc $y=u+y_0$. L'équation devient :

$$u'+y_0'+a(x)(u+y_0)+b(x)(u^2+2uy_0+y_0^2)=c(x)$$

Comme y_0 est une solution particulière alors

$$y_0'+a(x)y_0+b(x)y_0^2=c(x)$$

Et donc l'équation se simplifie en :

$$u'+\big(a(x)+2y_0(x)b(x)\big)u+b(x)u^2=0$$

qui est une équation du type Bernoulli.

ii. Équation $x^2(y'+y^2)=xy-1$.

— Après division par x^2 c'est bien une équation de Riccati sur $I=]-\infty;0[$ ou $I=]0;+\infty[$.

— $y_0=\frac{1}{x}$ est bien une solution particulière.

— On a $u(x)=y(x)-y_0(x)$ et donc $y=u+\frac{1}{x}$. L'équation $x^2(y'+y^2)=xy-1$ devient

$$x^2\left(u'-\frac{1}{x^2}+u^2+2\frac{u}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x\left(u+\frac{1}{x}\right)-1$$

qui se simplifie en

$$x^2\left(u'+u^2+2\frac{u}{x}\right)=xu$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u'+\frac{1}{x}u+u^2=0.$$

— Si u ne s'annule pas, en divisant par u^2, cette équation devient $\frac{u'}{u^2}+\frac{1}{x}\frac{1}{u}+1=0$. On pose $z(x)=\frac{1}{u}$, l'équation devient $-z'+\frac{1}{x}z+1=0$. Ses solutions sur I sont les $z(x)=\lambda x+x\ln|x|$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Ainsi $u(x)=\frac{1}{z(x)}=\frac{1}{\lambda x+x\ln|x|}$ mais il y a aussi la solution nulle $u(x)=0$.

— Conclusion. Comme $y=u+\frac{1}{x}$, on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$:

$$y(x)=\frac{1}{x}\qquad\text{ou}\qquad y(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\lambda x+x\ln|x|}\qquad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

Correction de l'exercice 4647 ▲

(a) Notons $A(x)=\int_0^x e^{t^2}\,t$, une primitive de e^{x^2}. On ne sait pas expliciter cette primitive. Les solutions de $y'+e^{x^2}y=0$ s'écrivent $f(x)=\lambda e^{-A(x)}$.

Si $x\geqslant 1$, on a par positivité de l'intégrale $A(x)=\int_0^x e^{t^2}\,t\geqslant 0$ et comme $e^{t^2}\geqslant 1$ alors

$$A(x)=\int_0^x e^{t^2}\,t\geqslant\int_0^x 1\,t=x$$

En conséquence :

$$0\leqslant e^{-A(x)}\leqslant e^{-x}$$

Ainsi,

$$0\leqslant|f(x)|\leqslant|\lambda|e^{-x}$$

et $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

(b) Supposons que y vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation, et posons $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2} y'(x)^2$. La fonction u est à valeurs positives, dérivable, et

$$u'(x) = 2y'(x)y(x) + e^{-x^2} 2y''(x)y'(x) - 2xe^{-x^2} y'(x)^2$$

en utilisant que $e^{-x^2} y''(x) = -y(x)$ (car y est solution de l'équation différentielle) on obtient :

$$u'(x) = -2xe^{-x^2} y'^2.$$

Ainsi la fonction u est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant u(x) \leqslant u(0)$. Or $y^2(x) \leqslant u(x)$ par construction, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |y(x)| \leqslant \sqrt{u(0)} = \sqrt{y(0)^2 + y'(0)^2}$$

Correction de l'exercice 4652 ▲

$y'' - 3y' + 2y = e^x$. Le polynôme caractéristique est $f(r) = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^x$, on est dans la situation (u) la condition $(*)$ sur P est : $P'' - P' = 1$, et $P(x) = -x$ convient. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4653 ▲

$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$. Ici $f(r) = (r-1)(r+1)$ et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction $3\cos x$ vérifie l'équation : $y'' - y = -6\cos x$, il nous reste donc à chercher une solution y_1 de l'équation $y'' - y = 2x\sin x$, car $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ sera une solution de l'équation considérée. Pour cela, on remarque que $2x\sin x = \operatorname{Im}(2xe^{ix})$ et on utilise la méthode décrite plus haut pour trouver une solution z_1 de l'équation : $y'' - y = 2xe^{ix}$. On cherche z_1 sous la forme $P(x)e^{ix}$ où P est un polynôme de degré 1 car $f(i) = -2 \neq 0$. On a $f'(i) = 2i$, la condition $(*)$ sur P est donc : $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ ce qui donne après identification $P(x) = -x - i$. Alors $y_1(x) = \operatorname{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x$. Les solutions sont par conséquent les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Autre méthode pour trouver une solution de $y'' - y = 2x\sin x$: On la cherche de la forme $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ où A, B sont des polynômes de degré 1 car i n'est pas racine de l'équation caractéristique (*danger* : pour un second membre du type $Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ la discussion porte sur $\alpha + i\beta$ et non sur α ou β...). On calcule y_1', y_1'' et on applique l'équation étudiée à y_1 ... on obtient la condition :

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

qui sera réalisée si : $\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{cases}$.

On écrit : $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$, après identification on obtient : $a = d = -1$, $b = c = 0$, ce qui détermine y_1.

Correction de l'exercice 4654 ▲

La solution générale est de la forme

$$y(x) = K_1\cos(x)e^{-x/2} + K_2\sin(x)e^{-x/2} - \frac{1}{8}xe^{-x/2}\cos(x)$$

(K_1 et K_2 constantes réelles) et les conditions initiales donnent $K_1 = 0$, $K_2 = 1/8$.

Correction de l'exercice 4655 ▲

(a) Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2+2x+4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1+i\sqrt{3}$ et $-1-i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a,b décrivent $\mathbb{R}$.

(b) Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$. On pose donc $R(x) = ax+b$. On a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax+7b+4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7ax+7a+4b = x$. On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(x) = \frac{1}{7}(x-\frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x-\frac{4}{7})e^x\ ;\ a,b\in\mathbb{R}.$$

(c) Soit h une solution de E. Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées ssi

$$a = \frac{53}{49} \qquad \text{et} \qquad b = -\frac{53\cos\sqrt{3}+3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$

(d) i. On a : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x}f''(e^x)$ d'où pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x}f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x\log e^x = xe^x$$

donc g est solution de E.

ii. Réciproquement pour $f(t) = g(\log t)$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a\cos(\sqrt{3}\log t) + b\sin(\sqrt{3}\log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7})\ ;\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4661 ▲

(a) L'équation caractéristique $r^2-4r+4 = 0$ a une racine (double) $r = 2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y(x) = (c_1x+c_2)e^{2x} \text{ où } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(b) Pour $d(x)=e^{-2x}$ on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_1(x)=ae^{-2x}$ car -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $y_1'(x)=-2e^{-2x}$ et $y_1''(x)=4ae^{-2x}$. Par conséquent y_1 est solution si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (4a-4(-2a)+4a)e^{-2x}=e^{-2x}$$

donc si et seulement si $a=\frac{1}{16}$.
Pour $d(x)=e^{2x}$ on cherche une solution de la forme $y_2(x)=ax^2e^{2x}$, car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a $y_2'(x)=(2ax+2ax^2)e^{2x}$ et $y_2''(x)=(2a+4ax+4ax+4ax^2)e^{2x}=(4ax^2+8ax+2a)e^{2x}$. Alors y_2 est solution si et seulement si

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (4ax^2+8ax+2a-4(2ax+2ax^2)+4ax^2)e^{2x}=e^{2x}$$

donc si et seulement si $a=\frac{1}{2}$.

(c) On déduit du principe de superposition que la fonction

$$y_p(x)=\frac{1}{4}(y_1(x)+y_2(x))=\frac{1}{64}e^{-2x}+\frac{1}{8}x^2e^{2x}$$

est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors :

$$y(x)=(c_1x+c_2)e^{2x}+\frac{1}{64}e^{-2x}+\frac{1}{8}x^2e^{2x}\text{ où }c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4669 ▲

Réponse : $(\lambda x+\mu)e^{-x}+\frac{e^x}{25}[(3x-4)\cos x-(4x-2)\sin x]+(\sin x-x\cos x)e^{-x}$.

Correction de l'exercice 4670 ▲

Réponse : $\frac{1}{2}(-x\cos x+\sin x)+\lambda\cos x+\mu\sinh x$.

Correction de l'exercice 4673 ▲

Réponse : $x\to\frac{\lambda x+\mu}{\sqrt{1+x^2}},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4674 ▲

Réponse : $x\to\lambda x\sinh x+\mu x\cosh x,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4675 ▲

(a) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2y'+2y=0$ est $r^2-2r+2=0$ dont les racines sont $1-i$ et $1+i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^x(\lambda\cos x+\mu\sin x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. L'équation avec second membre s'écrit

$$y''-2y'+2y=\frac{x}{4}(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1-i)x}).$$

On applique alors le principe de superposition des solutions.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$.
$1+i$ est racine simple de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax^2+bx)e^{(1+i)x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f&=(((1+i)^2(ax^2+bx)+2(1+i)(2ax+b)+2a)\\&\quad-2((1+i)(ax^2+bx)+(2ax+b))+2(ax^2+bx))e^{(1+i)x}\\&=(2(1+i)(2ax+b)+2a-2((2ax+b)))e^{(1+i)x}=(2i(2ax+b)+2a)e^{(1+i)x}\\&=(4iax+2a+2ib)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

puis,

$$f''-2f'+2f=xe^{(1+i)x}\Leftrightarrow 4ia=1 \text{ et } 2ib+2a=0\Leftrightarrow a=-\frac{i}{4} \text{ et } b=\frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1-i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{4}(ix^2+x)e^{(1-i)x}$.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(-1+i)x}$.
$-1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax+b)e^{(-1+i)x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f&=(((-1+i)^2(ax+b)+2(-1+i)a)-2((-1+i)(ax+b)+a)+2(ax+b))e^{(-1+i)x}\\&=((ax+b)(-2i-2(-1+i)+2)+2(-1+i)a-2a)e^{(-1+i)x}\\&=(4(1-i)(ax+b)-2(2-i)a)e^{(1+i)x}=(4(1-i)ax-2(2-i)a+4(1-i)b)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f=xe^{(-1+i)x}&\Leftrightarrow 4(1-i)a=1 \text{ et } 4(1-i)b-2(2-i)a=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{1+i}{8} \text{ et } b=\frac{(2-i)(1+i)}{16(1-i)}=\frac{(3+i)(1+i)}{32}=\frac{1+2i}{16}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(-1+i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{16}(2(1+i)x+1+2i)e^{(-1+i)x}$.
Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(-1-i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{16}(2(1-i)x+1-2i)e^{(-1-i)x}$.
Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=x\cos x\operatorname{ch}x$ est donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(2\mathrm{Re}(\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}+\frac{1}{16}(2(1+i)x+1+2i)e^{(-1+i)x})\\&=\frac{1}{32}\mathrm{Re}(4(-ix^2+x)(\cos x+i\sin x)e^x+(2x+1+2(x+1)i)(\cos x+i\sin x)e^{-x}\\&=\frac{1}{32}(4(x\cos x+x^2\sin x)e^x+((2x+1)\cos x-2(x+1)\sin x)e^{-x})\end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\frac{1}{8}(x\cos x+x^2\sin x)+\lambda\cos x+\mu\sin x)e^x+((2x+1)\cos x-2(x+1)\sin x)e^{-x})$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

(b) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''+6y'+9y=0$ est $r^2+6r+9=0$ qui admet la racine double $r=-3$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^{-3x}(\lambda x+\mu)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
2 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{2x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f''+6f'+9f&=((4(ax^2+bx+c)+4(2ax+b)+2a)+6(2(ax^2+bx+c)+(2ax+b))+9(ax^2+bx+c))e^{2x}\\&=(25(ax^2+bx+c)+10(2ax+b)+2a)e^{2x}=(25ax^2+(20a+25b)x+2a+10b+25c)e^{2x}\end{aligned}$$

puis,

$$f''+6f'+9f=x^2e^{2x}\Leftrightarrow 25a=1 \text{ et } 20a+25b=0 \text{ et } 2a+10b+25c=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{25} \text{ et } b=-\frac{4}{125} \text{ et } c=\frac{6}{625}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''+6y'+9y=x^2e^{2x}$ est $x\mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{-3x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

(c) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2y'+y=0$ est $r^2-2r+1=0$ qui admet la racine double $r=1$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^x(\lambda x+\mu)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Le second membre s'écrit $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. Appliquons le principe de superposition des solutions.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^x$.
1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto ax^2e^x$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$f''-2f'+f=((ax^2+2(2ax)+2a)-2(ax^2+(2ax))+ax^2)e^{2x}=2ae^x$$

puis,

$$f''-2f'+f=e^x\Leftrightarrow 2a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^x$ est $x\mapsto \frac{1}{2}x^2e^x$.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^{-x}$.
-1 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto ae^{-x}$.

$$f''-2f'+f=(a+2a+a)e^{-x}=4ae^{-x}$$

puis,

$$f''-2f'+f=e^{-x}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^{-x}$ est $x\mapsto \frac{1}{4}e^{-x}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto (\frac{x^2}{4}+\lambda x+\mu)e^x+\frac{1}{8}e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

(d) Soit $k\in\mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2ky'+(1+k^2)y=0$ est $r^2-2kr+1+k^2=0$ dont le discriminant réduit vaut $-1=i^2$. Cette équation admet donc pour racines $k+i$ et $k-i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^{kx}(\lambda\cos x+\mu\sin x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Le second membre s'écrit $\text{Im}(e^{(1+i)x})$. Résolvons donc l'équation $y''-2y'+y=e^{(1+i)x}$.
Si $k\neq 1$, $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto ae^{(1+i)x}$. Or,

$$f''-2kf'+(1+k^2)f=a((1+i)^2-2k(1+i)+1+k^2)e^{(1+i)x}=((k-1)^2-2(k-1)i)ae^{(1+i)x}$$

et donc,

$$f''-2kf'+(1+k^2)f=e^{(1+i)x}\Leftrightarrow a=\frac{1}{k-1}\frac{1}{k-1-2i}=\frac{k-1+2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^{(1+i)x}$ est $x\mapsto \frac{k-1-2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}e^{(1+i)x}$ et une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^x\sin x$ est

$$\frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}\text{Im}((k-1-2i)(\cos x+i\sin x)e^x=\frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}(-2\cos x+(k-1)\sin x)e^x.$$

Si $k\neq 1$, les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$x\mapsto \frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}(-2\cos x+(k-1)\sin x)e^x+(\lambda\cos x+\mu\sin x)e^{kx},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4676 ▲

(a) Supposons y deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction $t\mapsto e^t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $x\mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc, puisque pour tout réel t, $z(t)=y(e^t)$, la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions deux fois dérivables. Réciproquement, supposons que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto\ln x$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $t\mapsto z(t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, puisque pour tout réel strictement positif x, $y(x)=z(\ln x)$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

(b) Pour t réel, posons donc $x=e^t$ puis, $z(t)=y(x)=y(e^t)$. Alors, $z'(t)=e^ty'(e^t)=xy'(x)$ puis $z''(t)=e^ty'(e^t)+(e^t)^2y''(e^t)=xy'(x)+x^2y''(x)$. Donc, $xy'(x)=z'(t)$ et $x^2y''(x)=z''(t)-xy'(x)=z''(t)-z'(t)$.
Par suite,

$$ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=a(z''(t)-z'(t))+bz'(t)+cz(t)=az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t).$$

Donc,

$$\forall x>0,\ ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=0\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t)=0.$$

(c) On applique le 2) avec $a=1$, $b=-1$ et $c=1$. L'équation à résoudre sur $\mathbb{R}$ est alors $z''-2z'+z=0$. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto(\lambda t+\mu)e^t$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda x\ln x+\mu x$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4677 ▲

(a) Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est $r^2-3r+2=0$, qui admet deux solutions : $r=2$ et $r=1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=\lambda e^{2x}+\mu e^x$ ($\lambda,\mu\in\mathbb{R}$).

(b) L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+2=0$, qui admet deux solutions : $r=-1+i$ et $r=-1-i$. On sait alors que les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ ($A,B\in\mathbb{R}$). Remarquons que, en utilisant l'expression des fonctions cos et sin à l'aide d'exponentielles, ces solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme $\lambda e^{(-1+i)x}+\mu e^{(-1-i)x}$ ($\lambda,\mu\in\mathbb{R}$).

(c) L'équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$, dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $(\lambda x+\mu)e^x$.

(d) Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\cos x+\mu\sin x$. Le second membre peut en fait se réécrire $\cos^2 x=1+\cos(2x)$: d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $a+b\cos(2x)+c\sin(2x)$. En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a=1$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=0$. Les solutions générales sont donc les $\lambda\cos x+\mu\sin x-\frac{1}{3}\cos(2x)+1$.

Correction de l'exercice 4678 ▲

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2-4r+4=0$, pour laquelle $r=2$ est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les $(\lambda x+\mu)e^{2x}$.
Lorsque $d(x)=e^{-2x}$, on cherche une solution particulière sous la forme ae^{-2x}, qui convient si $a=\frac{1}{16}$.
Lorsque $d(x)=e^{2x}$, comme 2 est la racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution comme le produit de e^{2x} par un polynôme de degré 2. Comme on sait déjà que $(\lambda x+\mu)e^{2x}$ est solution de l'équation homogène, il est inutile de faire intervenir des termes de degré 1 et 0 : on cherche donc une solution de la forme ax^2e^{2x}, qui convient si et seulement si $a=\frac{1}{2}$.
Puisque $\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x})$, les solutions générales sont obtenues sous la forme $y(x)=\frac{1}{64}e^{-2x}+\frac{1}{8}x^2e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{2x}$.

Correction de l'exercice 4679 ▲

Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\cos x+\mu\sin x$. En posant $y_1(x)=\cos x$ et $y_2(x)=\sin x$, on va chercher les solutions sous la forme $\lambda y_1+\mu y_2$, vérifiant

$$\begin{cases}\lambda' y_1+\mu' y_2=0\\ \lambda' y_1'+\mu' y_2'=\operatorname{cotan} x\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda'\cos x+\mu'\sin x=0\\ \lambda'(-\sin x)+\mu'\cos x=\operatorname{cotan} x\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\lambda'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \operatorname{cotan} x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}\\[2em] \mu'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \operatorname{cotan} x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}\end{cases}$$

d'après les formules de Cramer, où $\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$. On obtient donc

$$\begin{cases}\lambda'(x)=-\cos x\\ \mu'(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x}\end{cases}$$

ce qui donne une primitive $\lambda(x)=-\sin x$.
Pour μ, on cherche à primitiver $\frac{\cos^2 x}{\sin x}$ à l'aide du changement de variable $t=\cos x$ (et donc $t=-\sin t x$), on calcule une primitive

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}x &= -\int\frac{t^2}{1-t^2}t=t-\int\frac{1}{1-t^2}t\\ &= t+\frac{1}{2}\ln(1-t)-\frac{1}{2}\ln(1-t)=\cos x+\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)\end{aligned}$$

En remplaçant, les solutions générales sont les

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+(-\sin x)\cos x+\left(\cos x+\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)\right)\sin x$$

qui se simplifie $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}\sin x\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4680 ▲

(a) Puisqu'on cherche y fonction de $x \in]0;+\infty[$, et que l'application $t \mapsto e^t$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$. On a alors $t = \ln x$ et $y(x) = z(\ln x)$. Ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & z(\ln x) = z(t) \\ y'(x) & = & \dfrac{1}{x} z'(\ln x) = e^{-t} z'(t) \\ y''(x) & = & -\dfrac{1}{x^2} z'(\ln x) + \dfrac{1}{x^2} z''(\ln x) = -e^{-2t} z'(t) + e^{-2t} z''(t) \end{array}$$

En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ x^2 y'' + xy' + y = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + z(t) = 0$$

autrement dit, $z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) L'application $t \mapsto \tan t$ étant bijective de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x = \tan t$ et $z(t) = y(\tan t)$. On a alors $t = \arctan x$ et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & z(\arctan x) = z(t) \\ y'(x) & = & \dfrac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) & = & \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \big(z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x) \big) \end{array}$$

En remplaçant, on obtient que z est solution de l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas :

— $m < 0$: alors $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m}\arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m}\arctan x},$$

— $m = 0$: $z'' = 0$ et donc $z(t) = \lambda t + \mu$ et $y(x) = \lambda \arctan x + \mu$,

— $m > 0$: alors $z(t) = \lambda \cos(\sqrt{m}t) + \mu \sin(\sqrt{m}t)$ et donc

$$y(x) = \lambda \cos(\sqrt{m}\arctan x) + \mu \sin(\sqrt{m}\arctan x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4681 ▲

(a) En faisant le changement de variable $x = e^t$ (donc $t = \ln x$) et en posant $z(t) = y(e^t)$ (donc $y(x) = z(\ln x)$, l'équation $x^2 y'' + y = 0$ devient $z'' - z' + z = 0$, dont les solutions sont les $z(t) = e^{t/2} \cdot \left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$y(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) \right)$$

(b) Supposons que f convienne : par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et par conséquent f' aussi. Ainsi f est nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ (en fait, en itérant le raisonnement, on montrerait facilement que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$).
En dérivant l'équation $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

et en réutilisant l'équation :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

Ainsi on obtient que f est solution de $x^2 y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Nécessairement, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0,\ f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right)$$

Par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en particulier elle se prolonge en 0 de façon $\mathscr{C}^1$. Cherchons à quelle condition sur λ, μ cela est possible. Déjà, $f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ pour tous λ, μ ; donc $f(0) = 0$. Mais

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\right)$$

n'a pas de limite en 0 si $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$. En effet, pour $x_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi)}$, on a $x_n \to 0$ mais $\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_n}}$ qui admet une limite finie seulement si $\lambda = 0$. De même avec $x_n' = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi + \frac{\pi}{2})}$ qui donne $\frac{f(x_n') - f(0)}{x_n' - 0} = \frac{\mu}{\sqrt{x_n'}}$ et implique donc $\mu = 0$.

Par conséquent, la seule possibilité est $\lambda = \mu = 0$. Ainsi f est la fonction nulle, sur $[0, +\infty[$. Le même raisonnement s'applique sur $]-\infty, 0]$. La fonction est donc nécessairement nulle sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, la fonction constante nulle est bien solution du problème initial.

Correction de l'exercice 4682 ▲

(a) $y = 2 + \frac{\lambda}{x+2}$.

(b) $y = \frac{C + \sin x}{x}$.

(c) $y = -\cos x + \frac{\sin x + \lambda}{1+x}$.

(d) $y = \lambda x - \frac{1}{3x^2}$.

(e) $y = \lambda x^{4/3} - x$.

(f) $y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{3 \sin 2x - 6 \cos 2x}{5} + \lambda e^{-x}$.

(g) $y = \frac{\operatorname{argch}(1-2x) + \lambda}{2\sqrt{x^2 - x}}$ pour $x < 0$

$y = \frac{\arcsin(2x-1) + \mu}{2\sqrt{x - x^2}}$ pour $0 < x < 1$

$y = \frac{-\operatorname{argch}(2x-1) + \nu}{2\sqrt{x^2 - x}}$ pour $1 < x$.

(h) $y = \frac{x-1}{2x} \arctan x + \frac{x+1}{2x}\left(\ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \lambda\right)$.

(i) $y = \frac{x}{1-x^2}\Big((1+x)\ln x + 1 + \lambda x\Big)$.

Correction de l'exercice 4683 ▲

(a) $y = (x + a\cos x + b \sin x)e^x$.

(b) $y = (ax + b)e^{2x} + 2xe^x$.

(c) $y = e^{2x}(a \cos 3x + b \sin 3x) + 2\cos 2x + \sin 2x$.

(d) $y = \sin x \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + \lambda \cos x + \mu \sin x$ (variation de la constante avec sin).

(e) $y = (\lambda + \ln|x|)e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

(f) $y = \lambda\cos x + \mu\sin x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P^{(2n)}(x)$.

(g) $y = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2+b^2=1$ ou $y=\pm 1$.

Correction de l'exercice 4684 ▲

(a) $y = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}$.

(b) $y = \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \frac{2x^2+3}{16}$.

(c) $y = \lambda x^2 + \mu\ln x$.

(d) $y = ax + bx^2 + 1 - 2x\sin x$.

(e) $y = x^2\ln|x+1| + \lambda\left(x^2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + x - \frac{1}{2}\right) + \mu x^2$.

(f) $y = \frac{-1+a\,\mathrm{ch}\,x+b\,\mathrm{sh}\,x}{x^2}$.

(g) $y = \lambda\sqrt{x^2+3} + \mu x - 1$.

(h) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \Rightarrow y = a(\mathrm{ch}\,x - x\,\mathrm{sh}\,x) + b(x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x)$.

Correction de l'exercice 4685 ▲

(a) $2n(2n-3)a_n = -9a_{n-3} \Rightarrow y = \begin{cases} a_0\cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ a_0\,\mathrm{ch}(|x|^{3/2}) & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$

Solution générale : $y = \begin{cases} a\cos u + b\sin u & \text{si } x \geqslant 0 \\ a\,\mathrm{ch}\,u + b\,\mathrm{sh}\,u & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$ avec $u = |x|^{3/2}$.

(b) $n(n+1)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = a_0\frac{\mathrm{sh}\,x}{x}$.
Solution générale : $y = \frac{a\,\mathrm{ch}\,x+b\,\mathrm{sh}\,x}{x}$.

(c) $(2n+1)(2n+2)a_{n+1} = a_n \Rightarrow y = a_0\,\mathrm{ch}(\sqrt{x})$.
Solution générale sur $\mathbb{R}^+$: $u = a\,\mathrm{ch}(\sqrt{x}) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{x})$.

(d) $n(n-1)a_n + (n+1)a_{n-2} = 0 \Rightarrow y = a_0(1-x^2)e^{-x^2/2} + a_1 z$.
Solution générale : $y = (1-x^2)e^{-x^2/2}(a+bF(x)) + bx$ avec $F(x) = \int_{t=0}^{x} e^{t^2/2}\,dt$.

(e) $(n+2)(n+3)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = \frac{x-\mathrm{sh}\,x}{x^3}$.
Solution générale : $y = \frac{a\,\mathrm{ch}\,x+b\,\mathrm{sh}\,x+x}{x^3}$.

(f) $na_{n+1} = (n+1)a_n \Rightarrow y = \frac{\lambda x}{(1-x)^2}$.
Solution générale : $y = \frac{ax+b(1+x\ln|x|)}{(1-x)^2}$.

Correction de l'exercice 4686 ▲

$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}$.
Cette série converge et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ solution de l'équation.
Unicité : les solutions de l'équation homogène sont combinaison de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} et e^{-j^2x} donc non π-périodiques.

Correction de l'exercice 4687 ▲

$k \notin \mathbb{Z}$: $y = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)} + a\cos kx + b\sin kx$.

$k \in \mathbb{Z}$: remplacer $\frac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)}$ par $\frac{x\sin kx}{2k^3}$.

Correction de l'exercice 4688 ▲

$y=x+1+\lambda e^x$ ou $y=x-1+\lambda e^{-x}$.

Correction de l'exercice 4689 ▲

$$y=\begin{cases} e^x-1 & \text{si } x<0\\ 1-\cos x+\sin x & \text{si } 0\leqslant x<\frac{3\pi}{2}\\ e^{3\pi/2-x}-1 & \text{si } x\geqslant\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

Correction de l'exercice 4690 ▲

$4xz''+2z'+z=\frac{-1}{y^2}\left(4xy''+2y'-y-\frac{8xy'^2}{y}\right)=\frac{2}{y^3}(y^2+4xy'^2)$ donc $\frac{y'}{y}=\pm\frac{1}{\sqrt{-4x}}$ et $y=\lambda\exp(\pm\sqrt{-x})$ pour $x<0$.

Résolution sans indication : on pose $x=\varepsilon t^2$ et $y(x)=z(t)$ d'où $\frac{d^2z}{dt^2}+\varepsilon z=0$.

Correction de l'exercice 4691 ▲

(a) $g(x)=be^{-ax}+\int_{t=0}^{x}e^{a(t-x)}f(t)\,dt$.

(b) $\int_{x=0}^{X}g(x)\,dx=\frac{b}{a}(1-e^{-aX})+\int_{t=0}^{X}\int_{x=t}^{X}e^{a(t-x)}f(t)\,dx\,dt=\frac{b}{a}(1-e^{-aX})+\int_{t=0}^{X}\frac{1-e^{a(t-X)}}{a}f(t)\,dt$

$\to\frac{b}{a}+\frac{1}{a}\int_{t=0}^{+\infty}f(t)\,dt$ lorsque $X\to+\infty$.

Donc l'intégrale de g converge. On montre la convergence absolue par majoration élémentaire.

Correction de l'exercice 4692 ▲

(a) $x=2\alpha e^t+(2\gamma t+2\beta-\gamma)e^{2t}$, $\quad y=(\gamma t+\beta)e^{2t}$, $\quad z=\alpha e^t+(\gamma t+\beta)e^{2t}$.

(b) $y=-1+\lambda e^{\alpha t}+\mu e^{\beta t}$, $\quad z=-1+\lambda(1+\alpha)e^{\alpha t}+\mu(1+\beta)e^{\beta t}$, $\quad \alpha=\frac{-3+\sqrt5}{2}$, $\beta=\frac{-3-\sqrt5}{2}$.

(c) $y=\frac{-3\cos t-13\sin t}{25}+(at+b)e^{2t}$, $\quad z=\frac{-4\cos t-3\sin t}{25}+(at+a+b)e^{2t}$.

(d) $x=(a+bt+ct^2)e^t$, $\quad y=\left(a+\frac{b-c}{2}+(b+c)t+ct^2\right)e^t$, $\quad z=\left(a-\frac{b+c}{2}+(b-c)t+ct^2\right)e^t$.

(e) $x=-(b+c)e^t+(a+b+c)e^{2t}$,
$y=\frac12(-a+5b+3c)-2(b+c)e^t+\frac12(a+b+c)e^{2t}$,
$z=\frac12(a-5b-3c)+3(b+c)e^t-\frac12(a+b+c)e^{2t}$.

(f) $x=(at^2+(a+b+\frac12)t+a+b+c)e^t$,
$y=(at^2+(b-a+\frac12)t+a+c)e^t-\frac12e^{-t}$,
$z=(-at^2+(a-b-\frac12)t-c)e^t+\frac12e^{-t}$.

Correction de l'exercice 4693 ▲

$y=(t^2+1)x'-tx-2t^2+1\Rightarrow(t^2+1)x''+2tx'-2x=6t$.

Résolution par DSE $\Rightarrow x=a(1+t\arctan t)+bt+t\ln(1+t^2)$, $y=a\arctan t+b+1+\ln(1+t^2)$.

Correction de l'exercice 4696 ▲

Dériver deux fois. $f(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{2}+\lambda\,\mathrm{sh}\,x+\mu\cos x$.

Correction de l'exercice 4697 ▲

(a) $z' + \frac{z}{\operatorname{th} x} = 0$.

(b) $y = \frac{ax+b}{\operatorname{sh} x}$.

(c)

(d)

(e)

Correction de l'exercice 4698 ▲

(a) spectre $= \mathbb{C}$, $f_\lambda(t) = e^{-t^2/2} e^{\lambda t}$.

(b) Pour $\lambda \neq 0$, $\Phi^2(f) = \lambda^2 f \Leftrightarrow f = af_\lambda + bf_{-\lambda}$.
Pour $\lambda = 0$, $\Phi^2(f) = 0 \Leftrightarrow f(t) = (at+b)e^{-t^2/2}$.

(c) $\Phi^2(y) = -2y \Leftrightarrow y = e^{-t^2/2}\left(a\cos(t\sqrt{2}) + b\sin(t\sqrt{2})\right)$.

Correction de l'exercice 4699 ▲

(a) $\lambda = n^2 : P(X) = aX^n$.

(b) $\lambda > 0 : f(x) = \alpha x^{\sqrt{\lambda}} + \beta x^{-\sqrt{\lambda}}$.
$\lambda = 0 : f(x) = \alpha + \beta \ln x$.
$\lambda < 0 : f(x) = \alpha \cos\left(\sqrt{-\lambda} \ln x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{-\lambda} \ln x\right)$.

(c) $\lambda \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha \exp \lambda \left(\arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right)$.

Correction de l'exercice 4700 ▲

(a) $\lambda = 2k$, $P = \alpha(X-1)^{n-k}(X+1)^{n+k}$ pour $-n \leqslant k \leqslant n$.

(b) $\lambda = 0$, $P = \alpha X^{2n}$.

(c) $\lambda = 0$, $P = \alpha(X^2+1)^n$.

Correction de l'exercice 4701 ▲

$y = \int_{t=0}^{x} g(t)\,dt \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{x} \Rightarrow g(x) = \alpha x^{1\pm\sqrt{2}}$. Continuité en 0 $\Rightarrow g(x) = \alpha x^{1+\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 4702 ▲

Étudier $e^{-A}(y-z)$, $A' = a$.

Correction de l'exercice 4703 ▲

Point de concours : $\left(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, -\frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$.

Correction de l'exercice 4705 ▲

(a)

(b) Soient y_0 une solution particulière et y_1 une solution non nulle de l'équation homogène : $y_1(x) = e^{-A(x)}$ avec $A' = a$. Alors $y_0(x+T) = y_0(x) + \alpha y_1(x)$, et pour une solution y quelconque, $y = y_0 + \lambda y_1$: $y(x+T) - y(x) = (\alpha + \lambda(e^{-I} - 1))y_1(x)$ où $I = \int_{t=0}^{T} a(t)\,dt$.

Correction de l'exercice 4706 ▲

$\lambda \neq 0: \quad f(x) = a\sin(\alpha x), \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{4} (\operatorname{mod} \pi)$
$\lambda = 0: \quad f = 0.$

Correction de l'exercice 4707 ▲

$f(1) = e^{-k} \int_{t=0}^{1} g(t)e^{kt}\,dt.$
Avec Cauchy-Schwarz on obtient $\int_{t=0}^{1}(f'(t)+kf(t))^2\,dt \geqslant \frac{2k}{1-e^{-2k}} f(1)^2 = 9\frac{2k}{1-e^{-2k}}.$
Il y a égalité pour $f(t) = 3\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{e^k-e^{-k}}.$

Correction de l'exercice 4708 ▲

(a) $u_n - u(t_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{x=t_n}^{t} u'(x)\,dx\,dt$ et on majore l'intégrale interne par Cauchy-Schwarz.

(b) $w + w'' = u'$ donc $w(t) = \int_{x=t_n}^{t} \sin(t-x)u'(x)\,dx + \alpha\cos t + \beta\sin t$ puis

$$\begin{aligned}
\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,dt &= \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{x=t_n}^{t} \sin(t-x)u'(x)\,dx\,dt \\
&= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{t=x}^{t_n+2\pi} \sin(t-x)u'(x)\,dt\,dx \\
&= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi} u'(x)(\cos(t_n-t)-1)\,dx \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

lorsque $n\to\infty$

et $\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,dt = w(t_n) - w(t_n+2\pi) = -\int_{x=t_n}^{t_n+2\pi} \sin(t-x)u'(x)\,dx.$

Correction de l'exercice 4709 ▲

(a) Formule de Duhamel : $y(t) = -\int_{x=0}^{t} e^{t-x}f(x)\,dx + \lambda e^t.$
Par convergence dominée, l'intégrale tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$ donc toutes les solutions de (E) sont bornées au voisinage de $-\infty$.
Pour $t \geqslant 0$ on a $y(t) = e^t\left(\lambda - \int_{x=0}^{t} e^{-x}f(x)\,dx\right)$ donc il y a au plus une valeur de λ telle que y soit éventuellement bornée au voisinage de $+\infty$, c'est $\lambda = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}f(x)\,dx$.
Pour ce choix on a : $|y(t)| = \left|\int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x}f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{x=t}^{+\infty} |f(x)|\,dx \to 0$ lorsque $t\to+\infty$.

(b)

$$\begin{aligned}
\int_{t=a}^{b} |F(t)|\,dt &\leqslant \int_{t=a}^{b}\int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x}|f(x)|\,dxdt \\
&\leqslant \int_{x=a}^{b}\int_{t=a}^{x} e^{t-x}|f(x)|\,dtdx + \int_{x=b}^{+\infty}\int_{t=a}^{b} e^{t-x}|f(x)|\,dtdx \\
&\leqslant \int_{x=a}^{b} (1-e^{a-x})|f(x)|\,dx + \int_{x=b}^{+\infty} (e^{b-x}-e^{a-x})|f(x)|\,dtdx \\
&\leqslant \int_{x=-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx
\end{aligned}$$

donc F est intégrable. $F' = F - f$ est aussi intégrable et $\int_{t=-\infty}^{+\infty} F'(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{t=-\infty}^{+\infty} = 0$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} F = \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Correction de l'exercice 4710 ▲

Poser $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_{t=0}^{x} g(t)\,dt$ puis résoudre :

$$\begin{cases} F(x) &= x-1+G'(x) \\ G(x) &= x-1+F'(x) \\ F(0) &= G(0)=0. \end{cases}$$

On trouve $f(x) = g(x) = 1$.

Correction de l'exercice 4711 ▲

y' étant bornée, y admet une limite finie en tout point fini donc la solution non prolongeable est définie sur $\mathbb{R}$.

Une solution y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ vu l'équation et $y'' = (1+\sin(x+y))\cos(x+y)$ est du signe de $\cos(x+y)$. En un point (x_0,y_0) tel que $x_0+y_0 \equiv \frac{\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi)$ on a $y''=0$ et $\frac{d}{dx}(x+y) \neq 0$ donc y'' change de signe et il y a inflexion. En un point (x_0,y_0) tel que $x_0+y_0 \equiv \frac{3\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi)$ on a $x+y =$cste (car $y = \text{cste} - x$ est solution et il y a unicité) donc il n'y a pas inflexion.

Correction de l'exercice 4712 ▲

(a) thm de Cauchy-Lipschitz linéaire.

(b) $x \mapsto A(-x)$ et $x \mapsto -B(-x)$ sont solutions de (E) et vérifient les bonnes conditions initiales.

(c) Résoudre $u''(x) + ku(x) = 2d\cos(x)u(x)$ par la formule de Duhamel.

Correction de l'exercice 4713 ▲

(a)

(b) Oui, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.

(c) Oui : si $g \in E$ alors $f = t \mapsto \int_{s=-\infty}^{t} e^{s-t} g(s)\,ds$ appartient à E et $f + f' = g$.

Correction de l'exercice 4714 ▲

(a)

(b) $u_p(x) = -\int_{t=0}^{x} pf(t)\operatorname{sh}\Big(\frac{x-t}{p}\Big)\,dt + \frac{\operatorname{sh}(x/p)}{\operatorname{sh}(1/p)} \int_{t=0}^{1} pf(t)\operatorname{sh}\Big(\frac{1-t}{p}\Big)\,dt$.

(c) TCD : lorsque $p \to \infty$ $u_p(x) \to -\int_{t=0}^{x}(x-t)f(t)\,dt + x\int_{t=0}^{1}(1-t)f(t)\,dt = \int_{t=0}^{x} t(1-x)f(t)\,dt + \int_{t=x}^{1} x(1-t)f(t)\,dt$ (primitive deuxième de $-f$ s'annulant en 0 et 1).

Correction de l'exercice 4715 ▲

(a) Il suffit de démontrer que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont développables en série entière. La méthode des coefficients indéterminés donne $n(n-1)a_n = (\lambda-1)a_{n-4}$ si $n \geqslant 4$ et $a_2 = a_3 = 0$ d'où $a_{4k} = \frac{(\lambda-1)^k a_0}{\prod_{i=1}^{k} 4i(4i-1)}$, $a_{4k+1} = \frac{(\lambda-1)^k a_1}{\prod_{i=1}^{k} 4i(4i+1)}$, $a_{4k+2} = a_{4k+3} = 0$. On obtient une série de rayon infini pour tout choix de a_0, a_1 donc les solutions DSE forment un espace vectoriel de dimension 2 et on a ainsi trouvé toutes les solutions.

(b) On doit avoir $H''(x)-2xH'(x)+((2-\lambda)x^2-1)H(x)=0$. Si H est une fonction polynomiale non nulle, en examinant les termes de plus haut degré on obtient une contradiction. Donc il n'existe pas de telle solution.

Correction de l'exercice 4716 ▲

Considérer $h(t)=a+\int_{u=0}^{t} f(u)g(u)\,du$ et résoudre l'inéquation différentielle $h'(t)\leqslant g(t)h(t)$ par la formule de Duhamel.

Correction de l'exercice 4717 ▲

$f(x)=\int_{t=0}^{x} g(t)\sin(x-t)\,dt+\lambda\cos x+\mu\sin x$ avec $g=f+f''$.

Correction de l'exercice 4718 ▲

On pose $\varphi(t)=f''(t)+f'(t)+f(t)$.
$f(t)=e^{-t/2}\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{u=0}^{t}\varphi(u)e^{u/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}(u-t)}{2}\right),du+A\cos\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right)\right]$.

Correction de l'exercice 4720 ▲

(a) $y=\int_{t=\alpha}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt+y(\alpha)e^{-A(x)}$ avec $A'=a$ et $A(\alpha)=0$.
Comme $a\geqslant 1$, on a $A(x)\geqslant x-\alpha$ et $A(t)-A(x)\leqslant t-x$ pour $t\leqslant x$.
Donc $|y|\leqslant\int_{t=\alpha}^{z}|b(t)|e^{t-x}\,dt+\int_{t=z}^{x}|b(t)|e^{t-x}\,dt+|y(\alpha)|e^{\alpha-x}\leqslant\|b\|_\infty e^{z-x}+\sup_{[z,+\infty[}|b|+|y(\alpha)|e^{\alpha-x}$.
On choisit z tel que $z\to+\infty$ et $x-z\to+\infty\Rightarrow$ cqfd.

(b) Comme $A(t)-A(x)\leqslant t-x$ pour $t\leqslant x$, l'intégrale $\int_{t=-\infty}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt$ converge et fournit une solution nulle en $-\infty$. Comme $e^{-A(x)}\to+\infty$ lorsque $x\to-\infty$, c'est la seule.

Correction de l'exercice 4721 ▲

(a) Sinon, la convexité de y est incorrecte.

(b) S'il existe x tel que $z(x)=z'(x)=0$, alors $z=0$ ce qui est absurde.
S'il existe x tel que $z(x)=0\neq z'(x)$, alors par convexité, z ne peut s'annuler ailleurs.

Correction de l'exercice 4723 ▲

Si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées alors y_1'' et y_2'' sont intégrables donc $y_i'(t)\to 0$ lorsque $t\to+\infty$ et $W_{y_1,y_2}(t)=0$ pour tout t.

Correction de l'exercice 4724 ▲

(a) On suppose $y\neq 0$ sinon y n'a pas de zéros consécutifs. Comme $y(x_0)=0$, on a $y'(x_0)\neq 0$ sinon $y=0$. Ceci implique que chaque zéro de y est isolé, donc la notion de zéros consécutifs est pertinente. Enfin, $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ sont de signes opposés sinon il existe un autre zéro dans $]x_0,x_1[$.

(b) $W'=(q-r)yz$. $W(x_1)-W(x_0)=y'(x_0)z(x_0)-y'(x_1)z(x_1)$ (non simplifiable).

(c) Si z ne s'annule pas dans $]x_0,x_1[$ alors W' est de signe constant sur cet intervalle. L'examen des différents cas possibles de signe apporte une contradiction entre les signes de W' et de $W(x_1)-W(x_0)$ si $z(x_0)\neq 0$ ou $z(x_1)\neq 0$.

(d) On prend $r=q$, $z=u$. Si $u(x_0)\neq 0$ alors u admet un zéro dans $]x_0,x_1[$ et en permutant les rôles de u et y, le prochain zéro éventuel de u vient après y_1. Sinon, $u=\frac{u'(x_0)}{y'(x_0)}y$.

Correction de l'exercice 4725 ▲

(a)

(b) i. Wronskien.

ii. $\left(\frac{z}{y}\right)' = \frac{z'y-zy'}{y^2}$ est de signe constant $\Rightarrow \frac{z}{y}$ est monotone.

$\frac{z}{y}$ admet des limites infinies en u et v. TVI

Correction de l'exercice 4726 ▲

$z' = -\frac{\lambda}{t^2}\sin(t-a)y(t)$ donc si y ne s'annule pas sur $]a,a+\pi[$, alors z est strictement monotone sur $[a,a+\pi]$. Mais $z(a+\pi)-z(a) = y(a+\pi)+y(a) \Rightarrow$ contradiction de signe.

Correction de l'exercice 4727 ▲

(a) L'ensemble des zéros est localement fini d'après Cauchy-Lipchitz.

Si y ne s'annule pas sur $[a,+\infty[$, par exemple $y>0$, alors y est concave positive donc minorée, donc $y'' \to -\infty$ ce qui implique $y', y \to -\infty$, contradiction.

(b)

(c) Soit $b_n = \frac{\pi}{e^{a_n/2}}$. Alors $b_{n+1} \leqslant 2\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \leqslant b_n$ et $b_n \to 0$ donc $b_n \sim b_{n+1} \sim 2\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)$.

Alors $\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{2}$, $b_n \sim \frac{1}{2n}$ et $a_n \sim 2\ln n$.

Correction de l'exercice 4728 ▲

Les formes linéaires $y \mapsto y(a)$ et $y \mapsto y(b)$ sont linéairement indépendantes sur l'espace des solutions de l'équation homogène.

Correction de l'exercice 4729 ▲

On se ramène au cas $z=0$. Soit x tel que $y(x)<0$ et $y'(x)=0$. Alors $y''(x)<0$, donc y n'est pas minimale en x. Donc y n'a pas de minimum local sur $]a,+\infty[$.

Correction de l'exercice 4730 ▲

Si $x_i(0)>0$ pour tout i on obtient une contradiction en considérant le plus petit t tel qu'il existe i avec $x_i(t)<0$.

Cas général : dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales...

Correction de l'exercice 4731 ▲

$f'(x) = \frac{x+i}{2(x^2+1)}f(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{\pi}(x^2+1)^{-1/4}\exp\left(\frac{i}{2}\arctan x\right)$.

Correction de l'exercice 4732 ▲

(a) Soit f non identiquement nulle vérifiant $f'' = \lambda\Delta f$ avec $\lambda>0$: sur tout intervalle où f est strictement positive, f est strictement convexe donc ne peut pas s'annuler aux deux bords ; idem quand f est strictement négative, il y a contradiction. Le cas $\lambda=0$ est trivial.

(b) $(f \mid g) = \int_{t=a}^{b} f'(t)g'(t)\,dt = -\int_{t=a}^{b} f''(t)g(t)\,dt = -\int_{t=a}^{b} f(t)g''(t)\,dt$.

(c) i.

ii. Si f_λ a un nombre fini de zéros, soit x_n le dernier et $A = \max(x_n, 2)$. Sur $[A, +\infty[$, f est de signe constant, ε, et on a $f_\lambda'' - \lambda f_\lambda = \lambda(\Delta - 1)f_\lambda = \varphi$ d'où $f_\lambda(x) = \int_{t=A}^{x} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t)\,dt + \alpha\cos(x\sqrt{-\lambda}) + \beta\sin(x\sqrt{-\lambda})$. En particulier $f_\lambda(A) + f_\lambda\left(A + \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda}}\right) = \int_{t=A}^{A+\pi/\sqrt{-\lambda}} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t)\,dt$ est du signe de $-\varepsilon$, absurde.

Si l'ensemble des zéros de f admet un point d'accumulation x on a $f_\lambda(x) = f_\lambda'(x) = 0$ d'où $f_\lambda = 0$, absurde.

Correction de l'exercice 4733 ▲

(a) Après le prolongement indiqué on peut appliquer le relation de Parseval à f et f' sachant que $c_0(f) = 0$ par imparité et $|c_n(f)| = |c_n(f')|/n \leqslant |c_n(f')|$ pour $n \neq 0$.

(b) $x''(t) + q(t)x(t) = 0 \Rightarrow \int_0^\pi x'^2 = \Big[xx'\Big]_0^\pi - \int_0^\pi xx'' = \int_0^\pi qx^2 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Rmq : il n'est pas nécessaire d'avoir q de classe $\mathscr{C}^1$.

(c) Il existe x_0 de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant l'équation différentielle. Par différence avec x_0 on se ramène au cas $f = 0$ et il faut montrer que l'application $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x(0), x(\pi))$ est bijective, en notant $\mathscr{S}$ l'espace des solutions de l'équation homogène $x'' + qx = 0$. Or φ est linéaire et est injective d'après la question précédente, c'est donc une bijection car $\dim \mathscr{S} = 2$.

Remarque : l'hypothèse f de classe $\mathscr{C}^1$ est inutile, continue suffit.

Correction de l'exercice 4734 ▲

---

x et $1/x$ sont solution $\Rightarrow x'^2 + qx^2 = 0$ donc une condition nécessaire est : $q(t) \leqslant 0$ et $q = -x'^2/x^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Réciproquement, supposons q négative de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $r(t) = \sqrt{-q(t)}$. Si x est solution de $x' = r(t)x$ alors sur tout intervalle I où q ne s'annule pas on a $x'' = r(t)x' + r'(t)x$ donc

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = (r(t) + p(t))x' + (r'(t) + q(t))x = (r(t)p(t) + r'(t))x$$

donc une deuxième condition nécessaire est : $p(t)q(t) = -\frac{1}{2}q'(t)$. Ces deux conditions sont suffisantes si q est strictement négative.

Correction de l'exercice 4735 ▲

La suite (X_k) de fonctions définie par $X_k(t) = X_0$, $X_{k+1}(t) = X_0 + \int_{u=0}^{t} A(u)X_k(u)\,du$ converge localement uniformément vers X et $X_k(t)$ est clairement à composantes positives pour $t \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 4736 ▲

Pour $n = 1$ et $A(t) = a > 0$ on trouve après les incantations usuelles (équation homogène, variation de la constante et mise en forme de l'intégrale) que $X \ : \ t \mapsto \int_{u=0}^{1} F(tu)u^{a-1}\,du$ est l'unique solution prolongeable en 0 et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $n = 1$ et A non constante, on trouve de même :

$$X(t) = \int_{u=0}^{1} F(tu)u^{A(0)-1}\exp\Big(\int_{v=t}^{tu} \frac{A(v) - A(0)}{v}\,dv\Big)\,du$$

et l'on voit que X est $\mathscr{C}^\infty$ en écrivant $\frac{A(v)-A(0)}{v} = \int_{w=0}^{1} A'(vw)\,dw$.

Pour n quelconque et A constante : alors la fonction $X \ : \ t \mapsto \int_{u=0}^{1} u^{A(0)-I}F(tu)\,du$ est l'unique solution prolongeable en 0, en convenant que $u^{A(0)-I} = \exp((A(0) - I)\ln(u))$ (l'intégrale converge en 0 car $u^{A(0)-I} = O(u^{\alpha-1}\ln(u)^n)$ pour tout $\alpha > 0$ minorant les parties réelles des valeurs propres de $A(0)$).

Pour A non constante, on met l'équation sous forme intégrale :

$$tX'(t) + A(t)X(t) = F(t) \Leftrightarrow X(t) = \int_{u=0}^{1} u^{A(0)-I}\{F(tu) - (A(tu) - A(0))X(tu)\}\,du.$$

Soit $a>0$ à choisir. Posons $E=\mathscr{C}([-a,a],\mathbb{C}^n)$ et pour $X\in E$:

$$\Phi(X)=t\mapsto\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}\{F(tu)-(A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du.$$

On a facilement : $\Phi(X)\in E$ si $X\in E$ et Φ est contractante sur E pour $\|\ \|_\infty$ si a est choisi suffisament petit. Donc l'équation $tX'(t)+A(t)X(t)=F(t)$ admet une solution (unique) définie au voisinage de 0, et cette solution est prolongeable en une solution sur $\mathbb{R}$ car le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en dehors de 0. Par ailleurs, on a :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ X(t)=\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}\{F(tu)-(A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du,$$

ce qui montre par récurrence sur $k\in |||$ que X est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4737 ▲

(a) Poser $F(t)=\int_{u=t_0}^{t}f(u)\,du$ et résoudre l'inéquation différentielle $F'(t)\leqslant g(t)+kF(t)$ par la formule de Duhamel.

(b)

$$\begin{aligned}
M'=AM &\Rightarrow |||M'(t)|||\leqslant K|||M(t)|||\\
&\Rightarrow |||M(t)-I|||\leqslant K\int_{u=t0}^{t}|||M(u)|||\,du\\
&\Rightarrow |||M(t)|||\leqslant 1+K\int_{u=t0}^{t}|||M(u)|||\,du\\
&\Rightarrow |||M(t)|||\leqslant 1+K\int_{u=t0}^{t}e^{K(t-u)}\,du=e^{K(t-t_0)}.\\
(M-N)'=(A-B)M+B(M-N)&\\
&\Rightarrow |||(M-N)'(t)|||\leqslant \eta e^{K(t-t_0)}+(K+\eta)|||(M-N)(t)|||\\
&\Rightarrow |||(M-N)(t)|||\leqslant \frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1)+(K+\eta)\int_{u=t_0}^{t}|||(M-N)(u)|||\,du\\
&\Rightarrow |||(M-N)(t)|||\leqslant \underbrace{\frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1)+\frac{(K+\eta)\eta}{K}\int_{u=t_0}^{t}e^{(K+\eta)(t-u)}(e^{K(u-t_0)}-1)\,du}_{=e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)}
\end{aligned}$$

(c) $X_0(t)=M_0(t)\alpha$ et $Y_0(t)=N_0(t)\alpha$, d'où $\|X_0(t)-Y_0(t)\|\leqslant e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)\|\alpha\|$.

Correction de l'exercice 4738 ▲

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation différentielle considérée et (E_H) l'équation homogène associée.

(a) Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ forment un $\mathbb{R}$-espace affine de direction l'espace des solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1. La fonction $x\mapsto 1$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x\mapsto e^{-x}$ est une solution non nulle de (E_H) sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\{x\mapsto 1+\lambda e^{-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\}.}$$

(b) Les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda e^{x/2}$. Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

1ère solution. Il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto a\cos x+b\sin x$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Soit f une telle fonction. Alors, pour tout réel x,

$$2f'(x) - f(x) = 2(-a\sin x + b\cos x) - (a\cos x + b\sin x) = (-a+2b)\cos x + (-2a-b)\sin x.$$

Par suite,

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2f'(x) - f(x) = \cos x \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} -a+2b = 1 \\ -2a-b = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftarrow a = -\frac{1}{5} \text{ et } b = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \tfrac{1}{5}(-\cos x + 2\sin x) + \lambda e^{x/2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2ème solution. Par la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{x/2}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit f une telle fonction.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur} \mathbb{R} \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2\left(\lambda'(x)e^{x/2} + \frac{1}{2}\lambda(x)e^{x/2}\right) - 2\lambda(x)e^{x/2} = \cos(x)$$
$$\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x.$$

Or,

$$\int \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x\, dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int e^{(-\frac{1}{2}+i)x}\, dx\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(-\frac{1}{2}+i)x}}{-\frac{1}{2}+i}\right) + C = \frac{1}{5}e^{-x/2}\mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)(-1-2i)\right) + C$$
$$= \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\sin x) + C.$$

Par suite, on peut prendre $\lambda(x) = \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\sin x)$ ce qui fournit la solution particulière $f_0(x) = \frac{1}{5}(-\cos x + 2\sin x)$.

(c) Puisque les fonctions $x \mapsto -2$ et $x \mapsto xe^{2x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{-2x}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right)e^{2x}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\tfrac{x^2}{2} + \lambda\right)e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

(d) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $z^2 - 4z + 4 = 0$ et admet $z_0 = 2$ pour racine double. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Puisque 2 est racine double de l'équation caractéristique, l'équation $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ admet une solution particulière f_0 de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = ax^2e^{2x}$, $a \in \mathbb{R}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x,

$$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 4f_0(x) = a(4x^2 + 8x + 2)e^{2x} - 4a(2x^2 + 2x)e^{2x} + 4ax^2e^{2x} = 2ae^{2x},$$

et f_0 est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\tfrac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

(e) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y''+4y=0$ est $z^2+4=0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1=2i$ et $z_2=\overline{z_1}=-2i$. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto \lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Une solution réelle de l'équation $y''+4y=\cos(2x)$ est la partie réelle d'une solution de l'équation $y''+4y=e^{2ix}$. Puisque le nombre $2i$ est racine simple de (E_c), cette dernière équation admet une solution de la forme $f_1 : x\mapsto axe^{2ix}$, $a\in\mathbb{C}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x,

$$f_1''(x)+4f_1(x)=a((-4x+4i)e^{2ix}+4xe^{2ix})=4iae^{2ix}.$$

et f_1 est solution de $y''+4y=e^{2ix}$ si et seulement si $a=\frac{1}{4i}$. On obtient $f_1(x)=\frac{1}{4i}xe^{2ix}=\frac{1}{4}x(-i\cos(2x)+\sin(2x))$ ce qui fournit une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_0(x)=\frac{1}{4}x\sin(2x)$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto \tfrac{1}{4}x\sin(2x)+\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

(f) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation (E_H) est $z^2+2z+2=0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1=-1+i$ et $z_2=\overline{z_1}=-1-i$. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Pour tout réel x, $\cos(x)\operatorname{ch}(x)=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\operatorname{ch}(x)\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}\right)$. Notons (E_1) l'équation $y''+2y'+2y=e^{(1+i)x}$ et (E_2) l'équation $y''+2y'+2y=e^{(-1+i)x}$. Si f_1 est une solution de (E_1) et f_2 est une solution de (E_2) alors $f_0=\frac{1}{2}\operatorname{Re}(f_1+f_2)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ d'après le principe de superposition des solutions.

• (E_1) admet une solution particulière de la forme $f_1 : x\mapsto ae^{(1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. Pour tout réel x,

$$f_1''(x)+2f_1'(x)+2f_1(x)=a((1+i)^2+2(1+i)+2)e^{(1+i)x}=a(4+4i)e^{(1+i)x}$$

et f_1 est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=\frac{1}{4+4i}=\frac{1-i}{8}$. On obtient $f_1(x)=\frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}$.

• (E_2) admet une solution particulière de la forme $f_2 : x\mapsto axe^{(-1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x,

$$f_2''(x)+2f_2'(x)+2f_2(x)=a(((-1+i)^2x+2(-1+i))+2((-1+i)x+1)+2x)e^{(-1+i)x}=2iae^{(-1+i)x}$$

et f_2 est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$. On obtient $f_2(x)=-\frac{i}{2}e^{(-1+i)x}$.

• Une solution particulière f_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc définie pour tout réel x par

$$\begin{aligned}f_0(x)&=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}-\frac{i}{2}e^{(-1+i)x}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{8}(1-i)(\cos(x)+i\sin(x))e^x-\frac{i}{2}(\cos(x)+i\sin(x))e^{-x}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}(\cos(x)+\sin(x))e^x+\frac{1}{2}\sin(x)e^{-x}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto \tfrac{1}{16}(\cos(x)+\sin(x))e^x+\tfrac{1}{4}\sin(x)e^{-x}+(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))e^{-x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Correction de l'exercice 4739 ▲

(a) Posons $g=f'+\alpha f$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+\alpha y=g$. De plus, $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\ell$. Ensuite,

$$\begin{aligned}f'+\alpha f=g&\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ e^{\alpha x}f'(x)+\alpha e^{\alpha x}f(x)=e^{\alpha x}g(x)\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ (e^{\alpha x}f)'(x)=e^{\alpha x}g(x)\\&\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ e^{\alpha x}f(x)=f(0)+\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(0)e^{-\alpha x}+e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt.\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{Re}(\alpha)>0$ et que $|e^{-\alpha x}|=e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}$, $\lim_{x\to+\infty}f(0)e^{-\alpha x}=0$. Vérifions alors que $\lim_{x\to+\infty}e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,d$ $\frac{\ell}{\alpha}$ sachant que $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\ell$.

On suppose tout d'abord $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A_1 > 0$ tel que $\forall t \geqslant A_1$, $|g(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $x \geqslant A_1$,

$$\begin{aligned}
\left|e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| &\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}|g(t)|\,dt\\
&\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}\times\frac{\varepsilon}{2}\,dt\\
&= e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left(1-e^{-\mathrm{Re}(\alpha)(x-A_1)}\right)\\
&\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Maintenant $\lim_{x\to+\infty} e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| = 0$ et donc il existe $A \geqslant A_1$ tel que $\forall x > A$, $e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| <$ $\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $x > A$, on a $|e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a ainsi montré que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \frac{\ell}{\alpha}$.
On revient maintenant au cas général ℓ quelconque.

$$\begin{aligned}
f'+\alpha f \underset{x\to+\infty}{\to} \ell &\Rightarrow f'+\alpha f-\ell \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \left(f-\frac{\ell}{\alpha}\right)'+\alpha\left(f-\frac{\ell}{\alpha}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0\\
&\Rightarrow f-\frac{\ell}{\alpha} \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\ell}{\alpha}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \lim_{x\to+\infty}(f'(x)+\alpha f(x)) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ell}{\alpha}.}$$

(b) $f''+f'+f = (f'-jf)'-j^2(f'-jf)$. D'après 1), comme $\mathrm{Re}(-j^2) = \mathrm{Re}(-j) = \frac{1}{2} > 0$,

$$f''+f'+f \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow (f'-jf)'-j^2(f'-jf) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f'-jf \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

$$\boxed{\forall f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \lim_{x\to+\infty}(f''(x)+f'(x)+f(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

(c) Montrons le résultat par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, c'est le 1) dans le cas particulier $\ell = 0$ (si $P = X-\alpha$, $P(D)(f) = f'-\alpha f$ avec $\mathrm{Re}(-\alpha) > 0$).

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat acquis pour n. Soit P un polynôme de degré $n+1$ dont les racines ont des parties réelles strictement négatives et tel que $\lim_{x\to+\infty}(P(D))(f)(x) = 0$. Soit α une racine de P. P s'écrit $P = (X-\alpha)Q$ où Q est un polynôme dont les racines ont toutes une partie réelle strictement négative. Puisque

$$P(D)(f) = ((D-\alpha Id)\circ(Q(D))(f) = (Q(D)(f))'-\alpha(Q(D)(f)) \underset{+\infty}{\to} 0,$$

on en déduit que $Q(D)(f) \underset{+\infty}{\to} 0$ d'après le cas $n = 1$ puis que $f \underset{+\infty}{\to} 0$ par hypothèse de récurrence.

Le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 4740 ▲

On pose $g = f+f''$. Par hypothèse, la fonction g est une application continue et positive sur $\mathbb{R}$ et de plus, la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y = g$ sur $\mathbb{R}$. Résolvons cette équation différentielle, notée (E), sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos x+\mu\sin x$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. D'après la méthode de variation des constantes, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_0 : x \mapsto \lambda(x)\cos(x)+\mu(x)\sin(x)$ où de plus les fonctions λ et μ sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda' \cos(x)+\mu' \sin(x)=0\\ -\lambda' \sin(x)+\mu' \cos(x)=g\end{array}\right. .$$

Les formules de CRAMER fournissent $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda'(x)=-g(x)\sin(x)$ et $\mu'(x)=g(x)\cos(x)$. On peut alors prendre $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda(x)=-\int_0^x g(t)\sin(t)\,dt$ et $\mu(x)=\int_0^x g(t)\cos(t)\,dt$ puis

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_0(x)=-\cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\,dt+\sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\,dt=\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt.$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)+\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. La fonction f est l'une de ces solutions. Par suite, il existe $(\lambda_0,\mu_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda_0\cos(x)+\mu_0\sin(x)+\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$ et donc pour tout réel x,

$$\begin{aligned}f(x)+f(x+\pi)&=\int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t)\,dt+\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt=-\int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x-t)\,dt+\int_0^x g(t)\sin(x-t)\\ &=\int_x^{x+\pi} g(t)\sin(t-x)\,dt=\int_0^{\pi} g(u+x)\sin(u)\,du\geqslant 0.\end{aligned}$$

On a montré que si $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f''(x)\geqslant 0$, alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f(x+\pi)\geqslant 0$.

Correction de l'exercice 4741 ▲

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

(a) On note J l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. Sur J, l'équation (E) s'écrit encore $y'-\frac{2}{x}y=0$. Comme la fonction $x\mapsto-\frac{2}{x}$ est continue sur J, les solutions de (E) sur J constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. Enfin, la fonction $x\mapsto x^2$ est une solution non nulle de (E) sur J et donc $\mathscr{S}_J=\left\{x\mapsto\lambda x^2,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x^2 \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\\ \lambda_2x^2 \text{ si } x<0\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x^2 \text{ si } x\geqslant 0\\ \lambda_2x^2 \text{ si } x<0\end{array}\right.$.

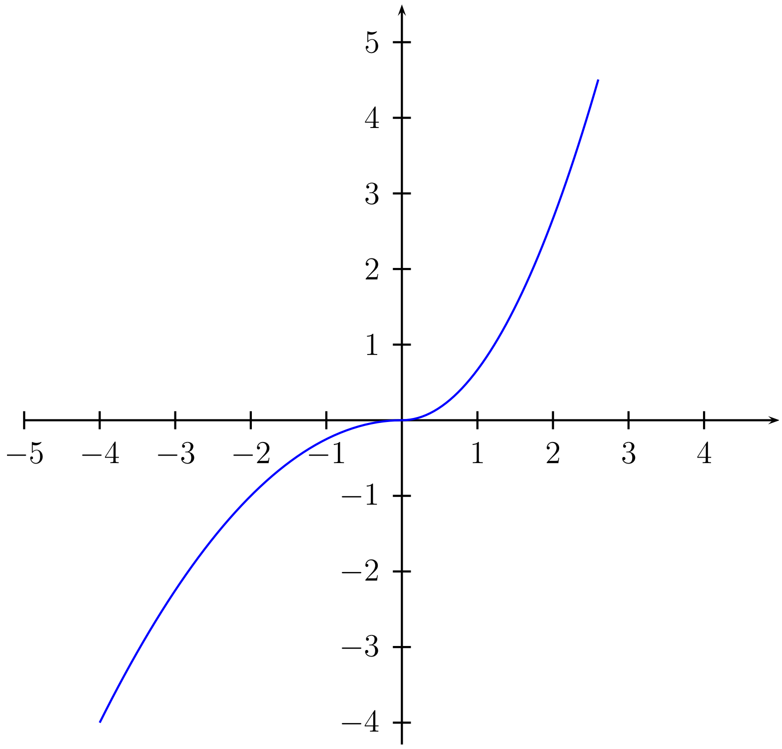
Réciproquement, une telle fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie encore l'équation (E) en 0 si de plus elle est dérivable en 0. Donc, une telle fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 pour tout choix de λ_1 et λ_2 et donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ pour tout choix de λ_1 et λ_2.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x^2 \text{ si } x\geqslant 0\\ \lambda_2x^2 \text{ si } x<0\end{array}\right.,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

On note que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. En effet, pour toute solution f de (E) sur $\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda_1\left\{\begin{array}{l}x^2 \text{ si } x\geqslant 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{array}\right.+\lambda_2\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x\geqslant 0\\ x^2 \text{ si } x<0\end{array}\right.=\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)$. Donc $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ avec (f_1,f_2) clairement libre.

Un exemple de graphe de solution est donné à la page suivante.



(b) L'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ est $\{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 x \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$.

Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$ et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

Dans ce cas, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

(c) L'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ est $\{x \mapsto \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \lambda_2 x \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$.

Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{0\}.}$$

Dans ce cas, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 0.

(d) Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } J \Leftrightarrow \forall x \in J,\ xf'(x) - 2f(x) = x^3 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ \frac{1}{x^2}f'(x) - \frac{2}{x^3}f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in J,\ \left(\frac{1}{x^2}f\right)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in J,\ \frac{f(x)}{x^2} = x + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in J,\ \frac{f(x)}{x^2} =$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in J,\ f(x) = x^3 + \lambda x^2.$$

$$\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \{x \mapsto x^3 + \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(e) Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2y' + 2xy = 1$ alors $0^2 \times f'(0) + 0 \times f(0) = 1$ ce qui est impossible. Donc

$$\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \varnothing.$$

(f) • **Résolution sur** $]-\infty, 0[$**,** $]0,1[$ **et** $]1,+\infty[$**.** Soit I l'un des trois intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Sur I, l'équation (E) s'écrit encore $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1-x)}$. Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2x(1-x)}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I. Pour $x \in I$, on note ε le signe de x sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{1}{2x}f(x) = \frac{1}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}f'(x) + \frac{1}{2x}e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}}{2x(1-x)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\, f)'(x) = \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\, f)'(x) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}.
\end{aligned}$$

Déterminons alors les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}$ sur I. En posant $u = \sqrt{\varepsilon x}$ et donc $x = \varepsilon u^2$ puis $du = 2\varepsilon u du$.

$$\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\, dx = \int \frac{\varepsilon}{2u(1-\varepsilon u^2)} 2\varepsilon u\, du = \int \frac{1}{1-\varepsilon u^2}\, du.$$

-*Résolution sur* $]-\infty, 0[$.
Dans ce cas, $\varepsilon = -1$ puis $\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\, dx = \int \frac{1}{1+u^2}\, du = \arctan(u) + \lambda = \arctan(\sqrt{-x}) + \lambda$. Par suite,

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall x \in]-\infty,0[,\ \sqrt{-x}f(x) = \arctan(\sqrt{-x}) + \lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{-x}) + \lambda}{\sqrt{-x}}.
\end{aligned}$$

$$\mathscr{S}_{]-\infty,0[} = \left\{x \mapsto \frac{\arctan(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

-*Résolution sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

Dans ce cas, $\varepsilon = 1$ puis $\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\, dx = \int \frac{1}{1-u^2}\, du = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) \text{ si } x > 1 \\ \operatorname{argth}(\sqrt{x}) \text{ si } x \in]0,1[\end{array}\right. + \lambda$. Par suite,

-*Résolution sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

$$\mathscr{S}_{]0,1[} = \left\{x \mapsto \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})+\lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } \mathscr{S}_{]1,+\infty[} = \left\{x \mapsto \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+\lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

-*Résolution sur* $]0,+\infty[$ *et sur* $\mathbb{R}$. Si f est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$, alors $0 \times f'(1) + 0 \times f(1) = 1$ ce qui
est impossible. Donc

$$\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \varnothing \text{ et } \mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \varnothing.$$

-*Résolution sur* $]-\infty, 1[$. Si f est une solution de (E) sur $]-\infty,1[$, alors il existe nécessairement $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$\forall x \in]-\infty,1[,\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \frac{\arctan(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}} \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x=0 \\ \frac{\text{argth}(\sqrt{x})+\lambda}{\sqrt{x}} \text{ si } 0<x<1 \end{array}\right.$. Réciproquement une telle fonction est solution si et seulement
si elle est dérivable en 0.
Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\left(\lambda_1 + \sqrt{-x} - \frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{3} + o\left((\sqrt{-x})^3\right)\right) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}} + 1 + \frac{x}{3} + o(x) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}} + f(0) + \frac{x}{3} + o(x).$$

et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda_2 + \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^3}{3} + o\left((\sqrt{x})^3\right)\right) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{x}} + 1 + \frac{x}{3} + o(x) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{x}} + f(0) + \frac{x}{3} + o(x).$$

Par suite, f est dérivable à droite et à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et dans ce cas, quand x tend vers 0,
$f(x) = f(0) + \frac{x}{3} + o(x)$ ce qui montre que f est dérivable en 0. En résumé, f est solution de (E) sur $]-\infty,1[$ si et
seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,1[} = \left\{x \mapsto \left\{\begin{array}{l} \frac{\arctan\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}} \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x=0 \\ \frac{\text{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \text{ si } 0<x<1 \end{array}\right.\right\}.}$$

(g) **Résolution de (E) sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.** Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. On note ε le signe de x sur I. Sur I, (E) s'écrit encore $y' + \varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)y = \varepsilon x^2$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto \varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto \varepsilon x^2$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)f(x) = \varepsilon x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{\varepsilon x - \varepsilon\ln(\varepsilon x)}f'(x) + \varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\varepsilon x - \varepsilon\ln(\varepsilon x)}f(x) = \varepsilon x^2 e^{\varepsilon x - \varepsilon\ln(\varepsilon x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left((\varepsilon x)^{-\varepsilon}e^{\varepsilon x}f\right)'(x) = x^{-\varepsilon}x^2e^{\varepsilon x} \end{aligned}$$

• Si $I =]0,+\infty[$, $\varepsilon = 1$ et

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(\frac{e^x}{x}f\right)'(x) = xe^x \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{e^x}{x}f(x) = (x-1)e^x + \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x^2 - x + \lambda xe^{-x}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto x^2 - x + \lambda xe^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

• Si $I =]-\infty,0[$, $\varepsilon = -1$ et

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(-xe^{-x}f\right)'(x) = x^3e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(xe^{-x}f\right)'(x) = -x^3e^{-x}.$$

Or, $\int -x^3e^{-x}\,dx = x^3e^{-x} - 3\int x^2e^{-x}\,dx = (x^3+3x^2)e^{-x} - 6\int xe^{-x}\,dx = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x} + \lambda$ et donc

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x) = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6+\lambda e^x}{x}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto x^2+3x+6+\frac{6+\lambda e^x}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Résolution de (E) **sur** $\mathbb{R}$**.** Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, nécessairement il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2-x+\lambda_1 xe^{-x} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x=0 \\ x^2+3x+6+\frac{6+\lambda_2 e^x}{x} \text{ si } x<0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x^2-x+\lambda_1 xe^{-x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^2+3x+6+\frac{6+\lambda_2 e^x}{x} \text{ si } x<0 \end{array}\right.$. Réciproquement, une telle fonction est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = -x+o(x)+\lambda_1 x(1+o(1)) = (\lambda_1-1)x+o(x)$. Par suite, f est dérivable à droite en 0 pour tout choix de λ_1 et $f'_d(0) = \lambda_1-1$.

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x) = 6+3x+o(x)+\frac{6+\lambda_2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x} = \frac{6+\lambda_2}{x}+6+\lambda_2+\left(3+\frac{\lambda_2}{2}\right)x+o(x)$$

Par suite, f est dérivable à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_2 = -6$. Dans ce cas, quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $f(x) = o(x)$ et $f'_g(0) = 0$. Maintenant, f est dérivable en 0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = f'_g(0)$. Ceci équivaut à $\lambda_2 = -6$ et $\lambda_1 = 1$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left\{\begin{array}{l} x^2-x+xe^{-x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^2+3x+6+\frac{6(1-e^x)}{x} \text{ si } x<0 \end{array}\right.\right\}.}$$

Correction de l'exercice 4742 ▲

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = (-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} \times \frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{2(2n-1)}{n+1}.$$

Par suite, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 4$ et d'après la règle de d'ALEMBERT, $R_a = \frac{1}{4}$. Pour x tel que la série converge, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$.

• Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)a_{n+1}+4na_n = 2a_n$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on multiplie les deux membres de cette égalité par x^n puis on somme sur n. On obtient $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+4x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ ou encore $(1+4x)f'(x) = 2f(x)$. De plus $f(0) = a_0 = 1$. Mais alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ (1+4x)f'(x) = 2f(x) &\Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ e^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)}f'(x)-\frac{2}{1+4x}e^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)}f(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ \left(\frac{f}{\sqrt{1+4x}}\right)'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ \frac{f(x)}{\sqrt{1+4x}} = \frac{f(0}{\sqrt{1+}} \\ &\Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ f(x) = \sqrt{1+4x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n = \sqrt{1+4x}.}$$

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$. La suite u est strictement positive à partir du rang 1 et pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n-1)}{4(n+1)} = \frac{2n-1}{2n+2} < 1.$$

Ainsi, la suite u est décroissante à partir du rang 1. De plus, d'après la formule de STIRLING,

$$u_n=\frac{(2n)!}{n!^2(2n-1)4^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}(2\pi n)(2n)4^n}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}.$$

Par suite, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. En résumé, la suite u est positive et décroissante à partir du rang 1 et $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. On en déduit que la série numérique de terme général $(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}=(-1)^{n-1}u_n$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées (théorème de LEIBNIZ).

• La fonction f est donc définie en $\frac{1}{4}$. Vérifions que f est continue en $\frac{1}{4}$.

Pour $x\in\left]0,\frac{1}{4}\right]$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $f_n(x)=a_nx_n=(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$. Pour chaque x de $\left]0,\frac{1}{4}\right]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et la suite $((-1)^{n-1}f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir du rang 1. Ensuite, pour $n\geqslant 1$ et $x\in\left]0,\frac{1}{4}\right]$,

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|x=\frac{2(2n-1)}{n+1}x\leqslant\frac{2(2n-1)}{n+1}\times\frac{1}{4}=\frac{4n-2}{4n+4}<1$$

On en déduit que pour chaque x de $\left]0,\frac{1}{4}\right]$, la suite numérique $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît à partir du rang 1. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n\geqslant 1$ et $x\in\left]0,\frac{1}{4}\right]$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)\right|\leqslant|f_{n+1}(x)|=|a_{n+1}|x^{n+1}\leqslant\frac{|a_{n+1}|}{4^{n+1}}=u_{n+1},$$

et donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\text{Sup}\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)\right|,\ x\in\left]0,\frac{1}{4}\right]\right\}\leqslant u_{n+1}$. Puisque la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a montré que la série de fonction de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $\left]0,\frac{1}{4}\right]$. Puisque chaque fonction f_n est continue sur $\left]0,\frac{1}{4}\right]$, f est continue sur $\left]0,\frac{1}{4}\right]$ et en particulier en $\frac{1}{4}$.

Mais alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}=f\left(\frac{1}{4}\right)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ x<\frac{1}{4}}}f(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ x<\frac{1}{4}}}\sqrt{1+4x}=\sqrt{1+4\times\frac{1}{4}}=\sqrt{2}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}=\sqrt{2}.}$$

Correction de l'exercice 4743 ▲

(a) Posons $A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$.

$\chi_A=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$ puis $A=PDP^{-1}$ où $D=\text{diag}(2,3)$ et $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

Posons $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ puis $X_1=P^{-1}X=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{l}x'=4x-2y\\y'=x+y\end{array}\right.\Leftrightarrow X'=AX\Leftrightarrow X'=PDP^{-1}X\Leftrightarrow P^{-1}X'=DP^{-1}X\Leftrightarrow(P^{-1}X)'=D(P^{-1}X)\Leftrightarrow X_1'=DX_1$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1'=2x_1\\y_1'=3y_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l}x_1(t)=ae^{2t}\\y_1(t)=be^{3t}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ae^{2t}\\be^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae^{2t}+2be^{3t}\\ae^{2t}+be^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{t\mapsto\begin{pmatrix}ae^{2t}+2be^{3t}\\ ae^{2t}+be^{3t}\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

(b) Puisque la fonction $t\mapsto\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos t}\\ 0\end{pmatrix}$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, les solutions réelles sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ du système proposé constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Posons $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}$. $\chi_A=\lambda^2+1=(\lambda-i)(\lambda+i)$ et en particulier A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Un vecteur propre de A associé à la valeur propre i est $\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}$ et un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-i$ est $\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}$. On sait alors que les solutions complexes sur $\mathbb{R}$ du système homogène associé sont les fonctions de la forme $X\ :\ t\mapsto ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}+be^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}$, $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

Déterminons alors les solutions réelles du système homogène.

$$\begin{aligned}X\text{ réelle}&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}+be^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}=\overline{a}e^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}+\overline{b}e^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow b=\overline{a}\ \text{(car la famille de fonctions }(e^{it},e^{-it})\text{ est libre.)}\end{aligned}$$

Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ du système homogène sont les fonctions de la forme $X\ :\ t\mapsto ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}+\overline{a}e^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}=2\mathrm{Re}\left(ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}\right)$, $a\in\mathbb{C}$. En posant $a=\lambda+i\mu$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,

$$2\mathrm{Re}\left(ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}\right)=2\mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix}(\lambda+i\mu)(\cos t+i\sin t)\\(\lambda+i\mu)(1-i)(\cos t+i\sin t)\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}\lambda\cos t-\mu\sin t\\ \lambda(\cos t+\sin t)+\mu(\cos t-\sin t)\end{pmatrix}.$$

Maintenant, le couple (λ,μ) décrit $\mathbb{R}^2$ si et seulement si le couple $(2\lambda,2\mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$ et en renommant les constantes λ et μ, on obtient les solutions réelles du système homogène : $t\mapsto\lambda\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Résolution du système. D'après la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière du système de la forme $t\mapsto\lambda(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}+\mu(t)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ telles que pour tout réel t de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\lambda'(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}+\mu'(t)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos t}\\ 0\end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t)=\frac{1}{\cos t}(\cos t-\sin t)=1-\frac{\sin t}{\cos t}$ et $\mu'(t)=-\frac{1}{\cos t}(\cos t+\sin t)=-1-\frac{\sin t}{\cos t}$. On peut prendre $\lambda(t)=t+\ln(\cos t)$ et $\mu(t)=-t+\ln(\cos t)$ et on obtient la solution particulière

$$X(t)=(t+\ln(\cos t))\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}+(-t+\ln(\cos t))\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t(\cos t+\sin t)+\ln(\cos t)(\cos t-\sin t)\\ 2t\sin t+2\cos t\ln(\cos t)\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}=\left\{t\mapsto\begin{pmatrix}t(\cos t+\sin t)+\ln(\cos t)(\cos t-\sin t)+\lambda\cos t-\mu\sin t\\ 2t\sin t+2\cos t\ln(\cos t)+\lambda(\cos t+\sin t)+\mu(\cos t-\sin t)\end{pmatrix},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

(c) Puisque la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2 - 11\lambda + 28 = (\lambda-4)(\lambda-7)$. Un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 4 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 7 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs fournissent des combinaisons linéaires intéressantes des équations :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+y)' = 4(x+y) + e^t + t \\ (x-2y)' = 7(x-2y) + e^t - 2t \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x(t) + y(t) = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + \lambda e^{4t} \\ x(t) - 2y(t) = -\frac{e^t}{6} + \frac{2t}{7} + \frac{2}{49} + \mu e^{7t} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x(t) = -\frac{5e^t}{6} - \frac{3t}{14} - \frac{33}{392} + +2\lambda e^{4t} + \mu e^{4t} \\ y(t) = -\frac{e^t}{6}\frac{15t}{28} - \frac{81}{784} + \lambda e^{4t} - \mu e^{7t} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

(d) Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) - 2(-\lambda) + (-\lambda + 2) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 26\lambda + 12$$
$$= -(\lambda-6)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = -(\lambda-6)(\lambda - 2 + \sqrt{2})(\lambda - 2 - \sqrt{2}),$$

et en particulier A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(A - 6I) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z = 0 \text{ et } x = y.$$

$\mathrm{Ker}(A - 6I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(A - (2+\sqrt{2})I) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (3-\sqrt{2})x + y - z = 0 \\ 2x + (2-\sqrt{2})y - 2z = 0 \\ x - y - (1+\sqrt{2})z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = (3-\sqrt{2})x + y \\ 2x + (2-\sqrt{2})y - 2((3-\sqrt{2})x + y) = 0 \\ x - y - (1+\sqrt{2})((3-\sqrt{2})x + y) = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = (3-\sqrt{2})x + y \\ (-4+2\sqrt{2})x - \sqrt{2}y = 0 \\ -2\sqrt{2}x - (2+\sqrt{2})y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = (3-\sqrt{2})x + y \\ y = (-2\sqrt{2}+2)x \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = (-2\sqrt{2}+2)x \\ z = (5-3\sqrt{2})x \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

$\mathrm{Ker}(A - (2+\sqrt{2})I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2-2\sqrt{2}, 5-3\sqrt{2})$. Un calcul conjugué montre alors que $\mathrm{Ker}(A - (2-\sqrt{2})I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2+2\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$.

On sait alors que les solutions du système homogène $t \mapsto ae^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + be^{(2+\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-2\sqrt{2} \\ 5-3\sqrt{2}) \end{pmatrix} + ce^{(2-\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2+2\sqrt{2} \\ 5+3\sqrt{2}) \end{pmatrix}$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(e) Posons $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. $\chi_A=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\-1&-\lambda&0\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=(1-\lambda)^3$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON permet alors d'affirmer que $(A-I)^3=0$.

On sait que les solutions du système $X'=AX$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto e^{tA}X_0$ où $X_0\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Or, pour $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}e^{tA}&=e^{t(A-I)}\times e^{tI}\text{ (car les matrices }t(A-I)\text{ et }tI\text{ commutent)}\\&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right)\times e^tI=e^t\left(\sum_{n=0}^{2}\frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right)\\&=e^t\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\right)\\&=e^t\begin{pmatrix}1+t&t&0\\-t&1-t&0\\t&t&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les solutions du système sont les fonctions de la forme $t\mapsto e^{tA}X_0=e^t\begin{pmatrix}1+t&t&0\\-t&1-t&0\\t&t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a+(a+b)t)e^t\\(b-(a+b)t)e^t\\((a+b)t+c)e^t\end{pmatrix}$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Maintenant,

$$\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=1\\c=-1\end{array}\right..$$

La solution cherchée est $t\mapsto\begin{pmatrix}te^t\\(1-t)e^t\\(t-1)e^t\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4744 ▲

Soit $A\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $t\in\mathbb{R}$, posons $g(t)=\|X(t)\|_2^2=(X(t)|X(t))$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$g'(t)=2\left(X(t)|X'(t)\right)=2\left(X(t)|AX(t)\right)=2^tX(t)AX(t)\geqslant 0.$$

Ainsi, la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de la fonction $\sqrt{g}\ :\ t\mapsto\|X(t)\|_2$.

Correction de l'exercice 4745 ▲

(a) Puisque les fonctions $t\mapsto\begin{pmatrix}-\frac{1}{2t}&\frac{1}{2t^2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2t}\end{pmatrix}$ et $t\mapsto\begin{pmatrix}2t\\t^2\end{pmatrix}$ sont continues sur $]0,+\infty[$, l'ensemble des solutions sur $]0,+\infty[$ du système proposé est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Le couple de fonctions $(x,y)=(1,t)$ est solution du système homogène associé sur $]0,+\infty[$. Pour chaque réel strictement positif t, les deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ constituent une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ car $\begin{vmatrix}1&0\\t&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Cherchons alors les solutions du système homogène sous la forme $t\mapsto\alpha(t)\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}+\beta(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(t)\\t\alpha(t)+\beta(t)\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t^2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2t}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = -\frac{1}{2t}\alpha + \frac{1}{2t^2}(t\alpha+\beta) \\ t\alpha'+\alpha+\beta' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2t}(t\alpha+\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \\ t\alpha'+\beta' = \frac{\beta}{2t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \\ \frac{\beta}{2t}+\beta' = \frac{\beta}{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta' = 0 \\ \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall t \in]0,+\infty[, \begin{cases} \beta(t) = \lambda \\ \alpha'(t) = \frac{\lambda}{2t^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall t \in]0,+\infty[, \begin{cases} \beta(t) = \lambda \\ \alpha(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall t \in]0,+\infty[, \begin{cases} x(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu \\ y(t) = \frac{\lambda}{2} + \mu t \end{cases}$$

Maintenant, pour tout réel strictement positif t, $w(t) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2t} & 1 \\ \frac{1}{2} & t \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ et donc les deux fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ sont deux solutions indépendantes du système homogène sur $]0,+\infty[$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ du système homogène sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.

Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variations des constantes. Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que pour tout réel strictement positif t, $\lambda'(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2t & 1 \\ t^2 & t \end{vmatrix} = -t^2$ et $\mu'(t) = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2t} & 2t \\ \frac{1}{2} & t^2 \end{vmatrix} = \frac{3t}{2}$. On peut prendre $\lambda(t) = -\frac{t^3}{3}$ et $\mu(t) = \frac{3t^2}{4}$ et on obtient la solution particulière $X(t) = -\frac{t^3}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{3t^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11t^2/12 \\ 7t^3/12 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{11t^2}{12} - \frac{\lambda}{2t} + \mu \\ \frac{7t^3}{12} + \frac{\lambda}{2} + \mu t \end{pmatrix}, \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

(b) Puisque les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Les couples de fonctions $X_1 = (x,y) = (t,-1)$ et $(x,y) = (1,t)$ sont solutions du système homogène associé sur $\mathbb{R}$. De plus, pour chaque réel t, $w(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2+1 \neq 0$. Le couple de fonctions (X_1, X_2) est donc un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ du système homogène $X' = AX$. Les fonctions solutions du système homogène $X' = AX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variation de la constante.

Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t)\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel t, $\lambda'(t)\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{t^2+1}\begin{vmatrix} (2t^2-1)/(t^2+1) & 1 \\ 3t/(t^2+1) & t \end{vmatrix} = \frac{2t^3+2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2t}{t^2+1}$ et $\mu'(t) = \frac{1}{t^2+1}\begin{vmatrix} t & (2t^2-1)/(t^2+1) \\ -1 & 3t/(t^2+1) \end{vmatrix} = \frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2}$. On peut déjà prendre $\lambda(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$. Ensuite, $\int \frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2}\,dt = 5\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 6\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$ puis

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{t}{t^2+1} - \int t \times \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

et donc $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \arctan t\right) + C$. On peut prendre $\mu(t) = \frac{2t}{t^2+1} - 3\arctan t$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{2t}{t^2+1} - 3\arctan t + \lambda t + \mu \\ -\frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{2t^2}{t^2+1} - 3t\arctan t - \lambda + \mu t \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

(c) Si de plus $y = \frac{1}{x}$, le système s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} \text{sh}(2t)x' = \text{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ -\text{sh}(2t)\frac{x'}{x^2} = -x + \text{ch}(2t)\frac{1}{x} \end{array} \right.$ ou encore $\left\{ \begin{array}{l} \text{sh}(2t)x' = \text{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ \text{sh}(2t)x' = x^3 - \text{ch}(2t)x \end{array} \right.$.
On obtient $x^3 - \text{ch}(2t)x = \text{ch}(2t)x - \frac{1}{x}$ ou encore $x^4 - 2\,\text{ch}(2t)x^2 + 1 = 0$. Ensuite,

$$x^4 - 2\,\text{ch}(2t)x^2 + 1 = (x^2 - \text{ch}(2t))^2 - \text{sh}^2(2t) = (x^2 - e^{2t})(x^2 - e^{-2t}) = (x - e^t)(x + e^t)(x - e^{-t})(x + e^{-t}).$$

Ainsi, nécessairement $(x,y) \in \{(e^t, e^{-t}), (e^{-t}, e^t), (-e^t, -e^{-t}), (-e^{-t}, e^t)\}$. Réciproquement, si $(x,y) = (e^t, e^{-t})$,

$$\text{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) - e^{-t} = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^t = \text{sh}(2t)e^t = \text{sh}(2t)x'$$

et

$$-x + \text{ch}(2t)y = -e^t + \frac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) = \frac{1}{2}(-e^t + e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^{-t} = -\text{sh}(2t)e^{-t} = \text{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_1 = (x,y) = (e^t, e^{-t})$ est une solution non nulle du système. De même, si $(x,y) = (e^{-t}, e^t)$,

$$\text{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) - e^t = \frac{1}{2}(-e^t - e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^{-t} = -\text{sh}(2t)e^{-t} = \text{sh}(2t)x'$$

et

$$-x + \text{ch}(2t)y = -e^{-t} + \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^t = \text{sh}(2t)e^t = \text{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_2 = (x,y) = (e^{-t}, e^t)$ est une solution non nulle du système. Enfin, $w(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-t} & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} - e^{-2t} = 2\,\text{sh}(2t) \neq 0$ et le couple (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^t + \mu e^{-t} \\ \lambda e^{-t} + \mu e^t \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Correction de l'exercice 4746 ▲

(a) Sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, (E) s'écrit $y'' + \frac{4x-2}{2x+1}y' - \frac{8}{2x+1}y = 0$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto \frac{4x-2}{2x+1}$ et $x \mapsto -\frac{8}{2x+1}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I forment un$\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
Recherche d'une solution polynomiale non nulle de (E). Soit P un éventuel polynôme non nul solution de (E). On note n son degré. Le polynôme $Q = (2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P$ est de degré au plus n. De plus, le coefficient de X^n dans Q est $(4n-8)\text{dom}(P)$. Si P est solution de (E), on a nécessairement $(4n-8)\text{dom}(P) = 0$ et donc $n = 2$.
Posons alors $P = aX^2 + bX + c$.

$$(2X+1)P''+(4X-2)P'-8P=(2X+1)(2a)+(4X-2)(2aX+b)-8(aX^2+bX+c)=\\ -4bX+2a-2b-8c$$

Par suite, P est solution de (E) sur I si et seulement si $-4b=2a-2b-8c=0$ ce qui équivaut à $b=0$ et $a=4c$. La fonction $f_1\ :\ x\mapsto 4x^2+1$ est donc une solution non nulle de (E) sur I.

Recherche d'une solution particulière de la forme $f_\alpha\ :\ x\mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha\in\mathbb{C}$.

$$(2x+1)(e^{\alpha x})''+(4x-2)(e^{\alpha x})'-8e^{\alpha x}=\left(\alpha^2(2x+1)+\alpha(4x-2)-8\right)e^{\alpha x}=\\ \left(2\alpha(\alpha+2)x+\alpha^2-2\alpha-8\right)e^{\alpha x}$$

Par suite, f_α est solution de (E) sur I si et seulement si $2\alpha(\alpha+2)=\alpha^2-2\alpha-8=0$ ce qui équivaut à $\alpha=-2$. Ainsi, la fonction $f_2\ :\ x\mapsto e^{-2x}$ est solution de (E) sur I.

Résolution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. Vérifions que le couple (f_1,f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. Pour $x>-\frac{1}{2}$,

$$w(x)=\begin{vmatrix} 4x^2+1 & e^{-2x}\\ 8x & -2e^{-2x}\end{vmatrix}=(-8x^2-8x-2)e^{-2x}=-2(2x+1)^2e^{-2x}\neq 0.$$

Donc le couple (f_1,f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et

$$\boxed{\mathscr{S}_{\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[}=\left\{x\mapsto\lambda(4x^2+1)+\mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$. On a aussi $\mathscr{S}_{\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[}=\left\{x\mapsto\lambda(4x^2+1)+\mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\lambda_1(4x^2+1)+\mu_1e^{-2x}\text{ si }x\leqslant-\frac{1}{2}\\ \lambda_2(4x^2+1)+\mu_2e^{-2x}\text{ si }x>-\frac{1}{2}\end{cases}$ (par continuité à gauche en $-\frac{1}{2}$).

f ainsi définie est deux fois dérivables sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, solution de (E) sur chacun de ces deux intervalles et vérifie encore (E) en $x=-\frac{1}{2}$ si de plus f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$. En résumé, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est deux fois dérivables en $-\frac{1}{2}$.

f est déjà deux fois dérivable à droite et à gauche en $-\frac{1}{2}$. De plus, en posant $h=x+\frac{1}{2}$ ou encore $x=-\frac{1}{2}+h$, on obtient quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures

$$f(x)=\lambda_1(2-4h+4h^2)+\mu_1ee^{-2h}=(2\lambda_1+e\mu_1)+(-4\lambda_1-2e\mu_1)h+(4\lambda_1+2e\mu_1)h^2+o(h^2),$$

et de même quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures, $f(x)=(2\lambda_2+e\mu_2)+(-4\lambda_2-2e\mu_2)h+(4\lambda_2+2e\mu_2)h^2+o(h^2)$. Par suite, f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$ si et seulement si $2\lambda_1+e\mu_1=2\lambda_2+e\mu_2$ ou encore $\mu_2=\frac{2}{e}(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_1$.

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\begin{cases}a(4x^2+1)+be^{-2x}\text{ si }x\leqslant-\frac{1}{2}\\ c(4x^2+1)+\left(\frac{2}{e}(a+c)-b\right)e^{-2x}\text{ si }x>-\frac{1}{2}\end{cases}$ $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Ainsi, l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 3 et une base de cet espace est par exemple (f_1,f_2,f_3) où $f_1\ :\ x\mapsto\begin{cases}4x^2+1\text{ si }x\leqslant-\frac{1}{2}\\ \frac{2}{e}e^{-2x}\text{ si }x>-\frac{1}{2}\end{cases}$, $f_2\ :\ x\mapsto\begin{cases}e^{-2x}\text{ si }x\leqslant-\frac{1}{2}\\ -e^{-2x}\text{ si }x>-\frac{1}{2}\end{cases}$ et $f_3\ :\ x\mapsto\begin{cases}0\text{ si }x\leqslant-\frac{1}{2}\\ 4x^2+1+\frac{2}{e}e^{-2x}\text{ si }x>-\frac{1}{2}\end{cases}$.

(b) Sur $I=]0,+\infty[$, l'équation (E) s'écrit $y''-\frac{2}{x+1}y'+\frac{2}{x(x+1)}y=0$. Puisque les deux fonctions $x\mapsto-\frac{2}{x+1}$ et $x\mapsto\frac{2}{x(x+1)}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

La fonction $f_1\ :\ x\mapsto x$ est solution de (E) sur I. Posons alors $y=f_1z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur I, la fonction y est deux fois dérivables sur I si et seulement si la fonction z est deux fois dérivables sur I. De plus, d'après la formule de LEIBNIZ,

$$\begin{aligned}(x^2+x)y''-2y'+2y &= (x^2+x)(f_1''z+2f_1'z'+f_1z'')-2x(f_1'z+f_1z')+2f_1z\\ &= (x^2+x)f_1z''+(2(x^2+x)f_1'-2xf_1)z'+((x^2+x)f_1''-2f_1'+2f_1)z\\ &= (x^3+x^2)z''+2xz'.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (x^3+x^2)z''(x)+2xz'(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ z''(x)+\frac{2}{x(x+1)}z'(x)=0 \Leftrightarrow \forall x\in I,\ \left(e^{2\ln|x|-2\ln|x+1|}z'\right)'(x)=0\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ z'(x)=\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in I,\ z(x)=\lambda\left(x+2\ln|x|-\right.\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in I,\ y(x)=\lambda(x^2+2x\ln|x|-1)+\mu x.\end{aligned}$$

(c) Cherchons les solutions développables en série entière. Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_n$ une série entière dont le rayon R est supposé à priori strictement positif. Pour $x\in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}4xf''(x)-2f'(x)+9x^2f(x) &= 4x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+9x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\ &= 4\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}2n(2n-3)a_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}=\sum_{n=1}^{+\infty}2n(2n-3)a_nx^{n-1}+9\sum_{n=3}^{+\infty}a_{n-3}x^{n-1}\\ &= -a_1+4a_2x+\sum_{n=3}^{+\infty}(2n(2n-3)a_n+9a_{n-3})x^{n-1}\end{aligned}$$

Par suite, f est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_1=a_2=0$ et $\forall n\geqslant 3$, $2n(2n-3)a_n+9a_{n-3}=0$ ce qui s'écrit encore

$$a_1=a_2=0 \text{ et } \forall n\geqslant 3,\ a_n=-\tfrac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}.$$

Les conditions $a_1=0$ et $\forall n\geqslant 3$, $a_n=-\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{3p+1}=0$ et les conditions $a_2=0$ et $\forall n\geqslant 3$, $a_n=-\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{3p+2}=0$.

Enfin les conditions $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $a_{3p}=-\frac{9}{6p(6p-3)}a_{3p-3}=-\frac{1}{2p(2p-1)}a_{3(p-1)}$ sont équivalentes pour $p\geqslant 1$ à

$$a_{3p}=-\tfrac{1}{2p(2p-1)}\times-\tfrac{1}{(2p-2)(2p-3)}\times\ldots\times-\tfrac{1}{2\times1}a_0=\tfrac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.$$

En résumé, sous l'hypothèse $R>0$, f est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si $\forall x\in]-R,R[$, $f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p}$.

Réciproquement, puisque pour tout réel x, $\lim_{x\to+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p}=0$ d'après un théorème de croissances comparées, $R=+\infty$ pour tout choix de a_0 ce qui valide les calculs précédents sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n}$, $x\in\mathbb{R}$. Ensuite, pour $x>0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{(2n)!}(x^{3/2})^{2n}=\cos\left(x^{3/2}\right).$$

Donc la fonction $x \mapsto \cos\left(x^{3/2}\right)$ est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$. La forme de cette solution nous invite à changer de variable en posant $t = x^{3/2}$. Plus précisément, pour $x > 0$, posons $y(x) = z(x^{3/2}) = z(t)$. Puisque l'application $\varphi\ :\ x \mapsto x^{3/2}$ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même, la fonction y est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$ si et seulement si la fonction est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
Pour $x > 0$, on a $y(x) = z(x^{3/2})$ puis $y'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2})$ puis $y''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4}xz''(x^{3/2})$ et donc

$$\begin{aligned}4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2y(x) &= 4x\left(\frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4}xz''(x^{3/2})\right) - 2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2})\right) + 9x^2z(x^{3/2})\\ &= 9x^2(z''(x^{3/2}) + z(x^{3/2})).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}y \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ 9x^2(z''(x^{3/2}) + z(x^{3/2})) = 0 \Leftrightarrow \forall t > 0,\ z''(t) + z(t) = 0\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall t > 0,\ z(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x > 0,\ y(x) = \lambda\cos(x^{3/2}) + \mu\sin(x^{3/2}).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto \lambda\cos(x^{3/2}) + \mu\sin(x^{3/2}),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

(d) Puisque les fonctions $x \mapsto -\frac{2}{1+x}$, $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1+x}$ sont continues sur $]-1,+\infty[$, les solutions de (E) sur $]-1,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution de l'équation homogène.

La fonction $f_1\ :\ x \mapsto e^x$ est solution sur $]-1,+\infty[$ de l'équation $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0$. Posons alors $y = f_1z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si la fonction z est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$. De plus, la formule de LEIBNIZ permet d'écrire pour $x > -1$

$$\begin{aligned}(1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) &= (1+x)(f_1''z(x) + 2f_1'(x)z'(x) + f_1(x)z''(x)) - 2(f_1'(x)z(x) + f_1(x)z'(x))\\ &\quad + (1-x)f_1(x)z(x)\\ &= (1+x)f_1(x)z''(x) + (2(1+x)f_1'(x) - 2f_1(x))z'(x) = ((1+x)z''(x) + 2xz'(x)\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}y \text{ solution de } (E_H) \text{ sur }]-1,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > -1,\ (1+x)z''(x) + 2xz'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > -1,\ z''(x) + \left(2 - \frac{2}{1+x}\right)z'(x)\\ &\Leftrightarrow \forall x > -1,\ e^{2x-2\ln(1+x)}z''(x) + \left(2 - \frac{2}{1+x}\right)e^{2x-2\ln(1+x)}z'(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x > -1,\ \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}z'\right)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > -1,\ z'(x) = \lambda(x+1)^2e^{-2}\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\int (x+1)^2e^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x} + \int (x+1)e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx\\ &= \left(-\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}\right)e^{-2x} + C = \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{5}{4}\right)e^{-2x} + C = -\frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 5)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E_H) \text{ sur }]-1,+\infty[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > -1,\ z'(x) = \lambda(x+1)^2 e^{-2x} \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x > -1,\ z(x) = -\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)e^{-2x} + \mu \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x > -1,\ y(x) = -\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)e^{-x} + \mu e^x.
\end{aligned}$$

Maintenant, λ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si $-\frac{\lambda}{4}$ décrit $\mathbb{R}$ et en renommant la constante λ, les solutions de (E_H) sur $]-1,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda(2x^2+6x+5)e^{-x} + \mu e^x$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Recherche d'une solution particulière de (E)**.** Au vu du second membre, on peut chercher une solution particulière de la forme $f_0\ :\ x \mapsto (ax+b)e^{-x}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(1+x)((ax+b)e^{-x})'' - 2((ax+b)e^{-x})' + (1-x)(ax+b)e^{-x} &= ((1+x)((ax+b)-2a) - 2(-(ax+b)+a) \\
&\quad + (1-x)(ax+b))e^{-x} \\
&= (2bx + (4b-4a))e^{-x}.
\end{aligned}$$

Par suite, f_0 est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si $2b = 1$ et $4b-4a = 0$ ce qui équivaut à $a = b = \frac{1}{2}$. Une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ est $x \mapsto \frac{x+1}{2}e^{-x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-1,+\infty[} = \left\{x \mapsto \lambda(2x^2+6x+5)e^{-x} + \mu e^x + \frac{x+1}{2}e^{-x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

(e) Puisque la fonction $x \mapsto \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.
L'équation caractéristique de l'équation homogène est $z^2+4z+4 = 0$. Puisque cette équation admet -2 pour racine double, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu x e^{-2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
D'après la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-2x} + \mu(x)xe^{-2x}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda'(x)e^{-2x} + \mu'(x)xe^{-2x} = 0 \\ -2\lambda'(x)e^{-2x} + \mu'(x)(-2x+1)e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}\right. .$$

Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(x) = \frac{1}{e^{-4x}}\begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} & (-2x+1)e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\mu'(x) = \frac{1}{e^{-4x}}\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. On peut prendre $\lambda(x) = -\sqrt{x^2+1}$ et $\mu(x) = \text{argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ puis $f_0(x) = \left(-\sqrt{x^2+1} + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)e^{-2x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\lambda + \mu x + \left(-\sqrt{x^2+1} + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right)e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

Correction de **l'exercice 4747 ▲**

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -f(-x) + e^x$. On en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x) = f'(-x) + e^x = -f(x) + e^{-x} + e^x,$$

et donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y=2\operatorname{ch}(x)$. Par suite, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{ch}(x)+\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$.
Réciproquement, soit f une telle fonction. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)+f(-x)=(\operatorname{sh}(x)-\lambda\sin(x)+\mu\cos(x))+(\operatorname{ch}(x)+\lambda\cos(x)-\mu\sin(x))=\\ e^x+(\lambda+\mu)(\cos(x)-\sin(x)),$$

et f est solution si et seulement si $\lambda+\mu=0$.
Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x\mapsto\operatorname{ch}(x)+\lambda(\cos(x)-\sin(x))$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Correction de **l'exercice 4748 ▲**

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=f\left(\frac{3}{16x}\right)$. On en déduit que f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ ou encore que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x)=-\frac{3}{16x^2}f'\left(\frac{3}{16x}\right)=-\frac{3}{16x^2}f\left(\frac{3/16}{(3/16)/x}\right)=-\frac{3}{16x^2}f(x),$$

et donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y''+\frac{3}{16}y=0$ (E). Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Cherchons une solution particulière de (E) sur $]0,+\infty[$ de la forme $g_\alpha\ :\ x\mapsto x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$f_\alpha \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x>0,\ x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\frac{3}{16}x^\alpha=0\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha+\frac{3}{16}=0\\ \Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{4}\text{ ou }\alpha=\frac{3}{4}.$$

Les deux fonctions $f_1\ :\ x\mapsto x^{1/4}$ et $f_2\ :\ x\mapsto x^{3/4}$ sont solutions de (E) sur $]0,+\infty[$. Le wronskien de ces solutions est $w(x)=\begin{vmatrix} x^{1/4} & x^{3/4}\\ \frac{1}{4}x^{-3/4} & \frac{3}{4}x^{-1/4}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq0$ et donc (f_1,f_2) est un système fondamental de solutions de (E) sur $]0,+\infty[$. Ainsi, si f est solution du problème, nécessairement $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x>0$, $f(x)=\lambda_1x^{1/4}+\lambda_2x^{3/4}$.
Réciproquement, soit f une telle fonction.
Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}$ et $f\left(\frac{3}{16x}\right)=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}$. Donc

$$\begin{aligned} f\text{ solution}&\Leftrightarrow\forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}\\ &\Leftrightarrow\forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}\\ &\Leftrightarrow\forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{1/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{3/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{3/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{1/4}\text{ (après multiplication par }x)\\ &\Leftrightarrow\frac{\lambda_1}{4}=\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}\text{ et }\frac{3\lambda_2}{4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}\Leftrightarrow\lambda_2=\frac{2}{3^{3/4}}\lambda_1.\end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\left(x^{1/4}+2\left(\frac{x}{3}\right)^{3/4}\right)$.

Correction de **l'exercice 4749 ▲**

La fonction nulle est solution. Dorénavant, f est une éventuelle solution non nulle. Il existe donc $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)\neq0$.
• L'égalité $f(x_0)f(0)=\int_{x_0-0}^{x_0+0}f(t)\,dt=0$ fournit $f(0)=0$.
• Pour tout réel y, $\int_{-y}^{y}f(t)\,dt=f(0)f(y)=0$. Maintenant, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $y\mapsto\int_{-y}^{y}f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient pour tout réel y, $f(y)+f(-y)=0$ et donc f est impaire.

• Pour tout réel y, on a alors $f(y) = \frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y} f(t)\, dt$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y} f(t)\, dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f. Mais alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y} f(t)\, dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f.

$$f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

• En dérivant à y fixé ou x fixé l'égalité $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt$, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$ et $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$. En dérivant la première égalité à y fixé et la deuxième à x fixé, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$. En particulier, pour tout réel x, $f''(x)f(x_0) - f(x)f''(x_0) = 0$ ou encore $f''(x) - kf(x) = 0$ où $f = \frac{f''(x_0)}{f(x_0}$.

$$f \text{ est solution d'une équation différentielle du type } y'' - ky = 0.$$

• f est donc de l'un des types suivants : $x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega > 0$ ou $x \mapsto ax+b$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ou $x \mapsto \lambda\,\text{ch}(\omega x) + \mu\,\text{sh}(\omega x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega > 0$ (suivant que $k > 0$, $k = 0$ ou $k < 0$). De plus, f étant impaire, f est nécessairement de l'un des types suivants :

$$x \mapsto \lambda\sin(\omega x),\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \omega > 0 \text{ ou } x \mapsto ax,\ a \in \mathbb{R}* \text{ ou } x \mapsto \lambda\,\text{sh}(\omega x),\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \omega > 0.$$

Réciproquement,
- si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x)f(y) = a^2xy$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt = \frac{a}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2axy$. Donc f est solution si

et seulement si $a = 2$. On obtient la fonction solution $x \mapsto 2x$.
- si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\sin(\omega x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\omega > 0$, alors $f(x)f(y) = \lambda^2\sin(\omega x)\sin(\omega y)$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt = \frac{\lambda}{\omega}(\cos(\omega(x-y)) - \cos(\omega(x+y))) = \frac{2\lambda}{\omega}\sin(\omega x)\sin(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda = \frac{2}{\omega}$.
On obtient les fonctions solutions $x \mapsto \frac{2}{\omega}\sin(\omega x)$, $\omega > 0$.
- si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\,\text{sh}(\omega x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\omega > 0$, alors $f(x)f(y) = \lambda^2\,\text{sh}(\omega x)\,\text{sh}(\omega y)$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt = \frac{\lambda}{\omega}(\text{ch}(\omega(x+y)) - \text{ch}(\omega(x-y))) = \frac{2\lambda}{\omega}\,\text{sh}(\omega x)\,\text{sh}(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda = \frac{2}{\omega}$.
On obtient les fonctions solutions $x \mapsto \frac{2}{\omega}\,\text{sh}(\omega x)$, $\omega > 0$.

Correction de l'exercice 4750 ▲

Existence de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$**.** Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$F \text{ est définie sur }]0,+\infty[.$$

Dérivées de F**.** Soient $a > 0$ puis $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.

• Pour tout réel $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

• La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variable x et pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}.$$

De plus
- pour tout $x \in [a,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[0,+\infty[$.
- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{te^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_1(t)$ et $\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2e^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_2(t)$ où les fonctions

φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$ car sont dominées en $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), F est deux fois dérivable sur $[a,+\infty[$ et les dérivées de F s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a>0$, F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, $F''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

$$\forall x>0,\ F''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

Equation différentielle vérifiée par F. Pour $x>0$, $F''(x)+F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{x}$.

$$\forall x>0,\ F''(x)+F(x)=\frac{1}{x}.$$

Existence de $G(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$. Soit $a>0$. Montrons l'existence de $\int_a^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_a^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$.
Soit $A>a$. Une intégration par parties fournit $\int_a^A\frac{\sin u}{u}\,du=-\frac{\cos a}{a}+\frac{\cos A}{A}-\int_a^A\frac{\cos u}{u^2}\,du$. Puisque $\left|\frac{\cos A}{A}\right|\leqslant\frac{1}{A}$, on a $\lim_{A\to+\infty}\frac{\cos A}{A}=0$. D'autre part, puisque $\forall u\geqslant a$, $\left|\frac{\cos u}{u^2}\right|\leqslant\frac{1}{u^2}$, la fonction $u\mapsto\frac{\cos u}{u^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ et en particulier, $\int_a^A\frac{\cos u}{u^2}\,du$ a une limite quand A tend vers $+\infty$. On en déduit que $\int_a^A\frac{\sin u}{u}\,du$ a une limite quand A tend vers $+\infty$ ou encore que l'intégrale $\int_a^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ converge en $+\infty$. De même, $\int_a^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ converge en $+\infty$.
Mais alors, pour $x>0$,

$$\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}\,du=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt=G(x)\text{ existe.}$$

$$G\text{ est définie sur }]0,+\infty[.$$

Equation différentielle vérifiée par G. Puisque la fonction $u\mapsto\frac{\sin u}{u}$ est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\int_1^x\frac{\sin u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. De même, la fonction $x\mapsto\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ puis G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout réel $x>0$,

$$G'(x)=-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\frac{\cos x\sin x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos x\sin x}{x}=-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du,$$

puis en redérivant

$$G''(x)=-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du+\frac{\sin^2x}{x}+\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos^2x}{x}=-G(x)+\frac{1}{x}.$$

$$\forall x>0,\ G''(x)+G(x)=\frac{1}{x}.$$

Limites de F et G en $+\infty$. Puisque $\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ sont deux intégrales convergentes, $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=0$. Puisque les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty}G(x)=0$.
Pour tout réel $x>0$, $|F(x)|=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\frac{1}{x}$ et donc $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}G(x)=0.$$

Egalité de F et G. D'après ce qui précède, $(F-G)''+(F-G)=0$ et donc il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x>0$, $F(x)-G(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x$. Si $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, alors $\lambda\cos x+\mu\sin x=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\cos(x-x_0)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Puisque $\lim_{x\to+\infty}F(x)-G(x)=0$, on a nécessairement $\lambda=\mu=0$ et donc $F-G=0$. On a montré que

$$\boxed{\forall x>0,\ \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt.}$$

Remarque. On peut montrer que l'égalité persiste quand $x=0$ (par continuité) et on obtient $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4751 ▲

(a) $y=-1+\frac{1}{1-\lambda e^x}$ ou $y=-1$.

(b) $y\equiv 2\arctan(\lambda e^{-\cos x})-\frac{\pi}{2}(\operatorname{mod}\pi)$.

(c) $y=\pm\sqrt{1+(\sqrt{x}+\lambda)^2}$ ou $y=\pm 1$.

(d) $y=-\ln\big(1-x(1-1/e)\big)$.

(e) $y=\left(\lambda+\frac{x}{2}\right)\left|\lambda+\frac{x}{2}\right|$ ou $y=0$.

Correction de l'exercice 4752 ▲

(a) $y=\frac{1-\lambda^2x^2}{2\lambda}$, $\lambda>0$.

(b) $y=-x\pm\sqrt{2x^2-\lambda}$ ou $y=x(-1\pm\sqrt{2})$.

(c) $y=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\lambda^2x^2}}{2\lambda}$ ou $y=\pm x$ ou $y=0$.

(d) $y=-x\pm\sqrt{\lambda+3x^2}$ et $y=x(-1\pm\sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 4753 ▲

(a) $y=\frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}$ ou $y=0$.

(b) $y=\pm\sqrt[4]{x^2+\frac{\lambda}{x^2}}$.

(c) $y=((\sqrt{x}+2)^2+\lambda e^{\sqrt{x}})^2$.

(d) $y=\frac{1}{x}\left(\frac{2}{\lambda-x}\right)^2$ ou $y=0$.

(e) $y=\pm\frac{\sqrt{2}x^3}{\sqrt{2\lambda-x^4}}$ ou $y=0$.

Correction de l'exercice 4754 ▲

$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln|x|+\lambda x}$ ou $y=\frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 4755 ▲

$y=\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+1-x^2}$ ou $y=0$.

Correction de l'exercice 4756 ▲

(a) $\gamma_1(t)=(-x(t),y(t))$ et $\gamma_2(t)=(x(-t),-y(-t))$ sont aussi solutions de (S).
Par ailleurs, la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique, en particulier s'il existe t_0 tel que $x(t_0)=0$ alors $x(t)=0$ pour tout t. De même s'il existe t_0 tel que $x(t_0)=y(t_0)=0$ alors $x(t)=y(t)=0$ pour tout t.
Pour λ,μ non nuls et x ne s'annulant pas, $t\mapsto(\lambda x(\mu t),\lambda y(\mu t))$ est solution de (S) si et seulement si $\mu=\lambda$.
L'ensemble des trajectoires maximales est donc stable par les symétries par rapport aux deux axes et par les homothéties de centre $(0,0)$. De plus toute trajectoire maximale qui touche l'axe des x est symétrique par rapport à cet axe.

(b) $x'(t_0)=0\Leftrightarrow x(t_0)=0$ ou $y(t_0)=0$. Dans le premier cas on a $x(t)=0$ pour tout t et $y(t)$ est arbitraire (solution de $y'=y^2$). Dans le second cas $x(t_0)$ est arbitraire (Cauchy-Lipschitz) donc l'ensemble des points à tangente verticale est la réunion des deux axes privé de $(0,0)$ (où il n'y a pas de tangente).
$y'(t_0)=0\Leftrightarrow x(t_0)=\pm y(t_0)$, quantité arbitraire, donc l'ensemble des points à tangente horizontale est la réunion des deux bissectrices des axes, privée de $(0,0)$.
Solutions particulières : $x(t)=0, y(t)=\frac{1}{\lambda-t}$.

(c) En supposant Φ de classe $\mathscr{C}^1$ on obtient l'équation $\frac{2}{n}x\Phi\Phi' = \Phi^2 - x^2$ soit $\frac{2}{n}x\psi' = \psi - x^2$ avec $\psi = \Phi^2$. On obtient $\psi(x) = |x|^n\left(\lambda + \frac{n}{(n-1)x}\right)$ si $n \neq 1$ et $\psi(x) = |x|(\lambda - \ln|x|)$ si $n = 1$.
Une courbe intégrale (en fait une trajectoire) qui ne touche aucun des deux axes vérifie l'hypothèse $y =$ fonction de x car x' ne peut s'annuler donc x est une fonction injective de t. Une trajectoire qui touche l'axe des y est incluse dans cet axe (déjà vu) et une trajectoire qui touche l'axe des x en dehors de $(0,0)$ le traverse ($y' \neq 0$), donc est réunion de sous-arcs localement d'un seul côté de l'axe des x, de la forme $y = \Phi(x) = \pm\sqrt{\psi(x)}$.

Correction de l'exercice 4757 ▲

Méthode d'Euler :

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	1.000	0.900	0.810	0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.348
z	0.000	0.100	0.180	0.243	0.292	0.328	0.354	0.372	0.383	0.387	0.387

Solution théorique : $y = e^{-x}$, $z = xe^{-x}$.

Correction de l'exercice 4758 ▲

(a) $y = 4\arctan((\sqrt{2}-1)e^x)$.

(b) $y = 2a - (\lambda x + \mu)^{2/3}$.

(c) $y = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)$.

Correction de l'exercice 4760 ▲

Si $a > 0$, $y'(0) = a^3$, si $a = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y^{IV}(0) = 6$. Donc y est croissante au voisinage de 0. Si $y' > 0$ sur $]0,\gamma[$, alors $y(\gamma) > 0$ donc $y'(\gamma) > 0$ et $y' > 0$ sur $[\gamma, \gamma+\varepsilon[$ donc, par connexité, $y' > 0$ sur $]0,\beta[$.
$y' \geqslant y^3 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{y'}{y^3} \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2} \leqslant \frac{1}{2a^2}$.

Correction de l'exercice 4761 ▲

(a) Régionnement.

(b) idem.

(c) Pour $x < 0$, $y' < -e^y \Rightarrow -y'e^{-y} > 1 \Rightarrow x > e^{-y} + C > C$.

Correction de l'exercice 4763 ▲

Supposons $t > t_0$ tel que $x^2(t) - t \geqslant 0$. On peut alors poser $t_1 = \min\{t > t_0 \,|\, x^2(t) - t > 0\}$. On a alors $x^2(t_1) - t_1 = 0$. Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $y(t) = x(t) - \sqrt{t}$. On a $y'(t_1) = -\frac{1}{2\sqrt{t_1}} < 0$. Cela contredit le fait que, pour tout $t \in [t_0, t_1[$, $y(t) < 0$. De même si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $z(t) = x(t) + \sqrt{t}$ et on aboutit à une contradiction. Par conséquent la courbe intégrale reste dans D_0. Si la solution maximale (à droite) est définie sur $[t_0, \beta[$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in [t_0, \beta[$, $-\beta \leqslant x'(t) \leqslant 0$. On en déduit que x' est intégrable sur $[t_0, \beta[$ et donc que $x(t)$ admet une limite finie quand t tend vers β. On prolonge la fonction en β et la fonction prolongée vérifie (E) sur $[t_0, \beta]$ ce qui est impossible. On en déduit que $\beta = +\infty$. On a, pour tout $t \geqslant t_0$, $x'(t) < 0$, donc x est décroissante. Si $x(t)$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ alors $x'(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -t$, ce qui est impossible. Par conséquent $x(t) \to -\infty$ (lorsque $t \to +\infty$).
En particulier, pour t assez grand, $x(t) \leqslant 0$. En dérivant (E) on a $x''(t) = 2x(t)(x^2(t) - t) - 1$. Si, à partir d'un certain rang, pour tout t, $x''(t) \geqslant 0$ alors x' est croissante et majorée. Elle ne peut tendre que vers 0 car sinon $x'(t) \sim \ell$, puis $x(t) \sim \ell t$ et $x'(t) \sim \ell^2 t^2$. Sinon il existe t_1 tel que $x''(t_1) < 0$. S'il existe $t_2 > t_1$

tel que $x''(t_2) = 0$ (avec t_2 minimal) alors $x'''(t_2) = 2x + \frac{1}{2x^2}$ qui est négatif pour t assez grand. Ceci est impossible et donc dans ce cas $x''(t)$ reste négatif lorsque t tend vers $+\infty$, on a alors $0 < t - x^2(t) \leqslant \frac{-1}{2x(t)}$. Par conséquent $x^2(t) - t \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, on en déduit que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Correction de l'exercice 4767 ▲

Soient y,z deux solutions distinctes. D'après Cauchy-Lipschitz, $y'(a) \neq z'(a)$, donc par exemple $y'(a) > z'(a)$. Soit $c > a$ maximal tel que : $\forall\, x \in \,]a,c[,\ y(x) > z(x)$. Donc $y - z$ est strictement positive convexe sur $[a,c]$, et s'annule en a et c, ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 4771 ▲

(a) Sinon $d(0, f'(\mathbb{R})) > 0$ et f ne peut pas être minorée.

(b) Supposons que pour tout $a \in \mathbb{R}^p$ on a $\nabla f(a) \neq 0$.
On considère l'équation différentielle autonome : $x' = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$. Pour $x(0)$ donné il existe une solution maximale, et elle est définie sur $\mathbb{R}$ car x' est bornée. Alors la fonction : $t \mapsto f(x(t))$ est $\mathscr{C}^1$ minorée sur $\mathbb{R}$ donc il esiste une suite de réels (t_n) telle que $\frac{d}{dt}(f(x(t_n))) = \|\nabla f(x(t_n))\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4772 ▲

$f_u : p \mapsto p + u \wedge p$ est linéaire injective car $f_u(p) = 0 \Rightarrow p \perp p$, donc bijective. L'application $u \mapsto f_u$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ est $\mathscr{C}^\infty$, donc il en est de même de l'application inverse : $u \mapsto (f_u)^{-1}$ et l'équation différentielle donnée équivaut à $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ qui relève de la théorie de Cauchy-Lipschitz : il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I. D'après l'équation différentielle, $(u' \mid u) = 0$ d'où $\|u\|$ est constant. Alors $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ est borné, donc u admet une limite finie en tout point fini par uniforme continuité, ceci prouve que $I = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4773 ▲

(a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_{t=0}^{x} (f_n - f_{n-1})(t - t^2)\,dt$ donc par récurrence $f_{n+1} - f_n \geqslant 0$.
De plus $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant x\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ d'où $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) \leqslant \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \int_{t=0}^{x} (t - t^2)\,dt \leqslant \frac{1}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ et $\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ ce qui prouve que la série télescopique $\sum(f_{n+1} - f_n)$ est normalement convergente.

(b) Par passage à la limite uniforme sous le signe intégral on a $f(x) = 1 + \int_{t=0}^{x} f(t - t^2)\,dt$ d'où f est $\mathscr{C}^1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$ ce qui entraine le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de f par récurrence. $f'(0) = f'(1) = f(0) = 1$.

(c) f' est positive d'après l'équation différentielle vérifiée par f et $f''(x) = (1-2x)f'(x - x^2)$ est du signe de $1 - 2x$, c'est-à-dire que f est convexe sur $[0, \frac{1}{2}]$ et concave sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

(d) $1 + x = f_1(x) \leqslant f(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(x) - f_k(x))$. De plus, $f'(x) = f(x - x^2) \leqslant f(x)$ d'où $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est décroissante et vaut 1 en 0 ce qui prouve que $f(x) \leqslant e^x$.

Correction de l'exercice 4774 ▲

(a) Qu'il en existe et qu'il y en a une unique maximale, son intervalle de définition est ouvert.

(b) Soit $(]\alpha,\beta[, x)$ une solution maximale. Si $t_0 \in \,]\alpha,\beta[$ est tel que $x(t_0) = a$ alors $x'(t_0) > 0$ donc $x(t) - a$ est du signe de $t - t_0$ au voisinage de t_0. Ceci montre que t_0 (éventuel) est unique, et en particulier $t_0 < 0$. De même, il existe au plus un réel t_1 tel que $x(t_1) = b$ et $t_1 < 0$. Par ailleurs l'existence de l'un des deux réels t_0 ou t_1 exclut l'autre. Enfin, $a \leqslant x(t) \leqslant b$ pour tout $t \in [0,\beta[$ donc d'après le théorème des bouts on a $\beta = +\infty$.

(c) Soit $\varphi : [a,b] \to [a,b], y \mapsto x(T)$. Comme deux courbes intégrales maximales distinctes n'ont aucun point commun, φ est injective et par disjonction de cas on montre que φ est strictement croissante et satisfait à la propriété des valeurs intermédiaires. En particulier φ est continue et $\varphi(y) - y$ prend une valeur positive en a, négative en b donc s'annule pour un certain $y \in [a,b]$. Pour cet y, la solution correspondante est T-périodique.

Correction de l'exercice 4775 ▲

Remarque : la seule continuité de f implique l'existence d'une solution maximale à condition initiale donnée (thm. de Cauchy-Arzela, HP), mais pas son unicité.

thm des bouts : supposons y solution, définie sur $[t_0, \alpha[$ avec $\alpha < \sup J$.

On a $\frac{d}{dt}(\|y\|^2) = 2(y' \mid y) = 2(f(t,y) \mid y) \leqslant 2a\|y\|^2 + 2b$, ce que l'on écrit $z' = 2az + 2b - c$ avec $z = \|y\|^2$ et c fonction continue positive. Donc $z(t) = \exp(2A(t) - 2A(t_0))z(t_0) + \int_{s=t_0}^{t} \exp(2A(t) - 2A(s))(2b(s) - c(s))\,ds$ où A est une primitive de a sur J. On en déduit que z est majorée sur $[t_0, \alpha[$ car A et b sont continues sur $[t_0, \alpha]$ et $c \geqslant 0$, donc $\|y'\| = \|f(t,y)\|$ est aussi majorée, et $\int_{s=t_0}^{\alpha} y'(s)ds$ est absolument convergente. Ainsi y admet une limite finie en α^-, et l'on peut prolonger y au dela de α avec le thm de Cauchy-Arzela ; y n'est pas maximale.

Correction de l'exercice 4776 ▲

(a) $\frac{d}{dt} f(x,y) = x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y}$ donc f convient si $\frac{\partial f}{\partial x} = y(x-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x(y-1)$ (condition suffisante). Il n'existe pas de telle fonction (thm. de Schwarz), mais on peut accepter f telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(x,y)y(x-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(x,y)x(y-1)$ où λ est une fonction bien choisie (appelée *facteur intégrant*). On voit immédiatement que $\lambda(x,y) = \frac{1}{xy}$ convient, d'où $f(x,y) = x + y - \ln(xy)$.

(b) D'après le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz, s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t, et de même pour y. Ainsi, si on fixe une condition initiale $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t. De plus, par le même raisonnement, si $(x(0), y(0)) \neq (1,1)$ alors $(x(t), y(t)) \neq (1,1)$ pour tout t. Désormais on suppose ces conditions satisfaites. Soit $k = f(x(0), y(0)) = x(0) + y(0) - \ln(x(0)y(0))$. Par étude de fonction, on voit que $k \neq 2$ et la courbe C_k d'équation $f(x,y) = k$ est une courbe fermée de classe $\mathscr{C}^1$ entourant le point $(1,1)$. Le point $M_t = (x(t), y(t))$ se déplace sur C_k avec une vitesse numérique $ds/dt = \sqrt{x^2(1-y)^2 + y^2(x-1)^2} \geqslant \alpha_k > 0$ où α_k ne dépend que de k. On en déduit qu'une abscisse curviligne de M_t décrit $\mathbb{R}$ quand t décrit $\mathbb{R}$. En particulier il existe $t_0 > 0$ tel que $s(t_0) - s(0) = \text{longueur}(C_k)$ ce qui implique $M_{t_0} = M_0$ et le mouvement est t_0-périodique.

Correction de l'exercice 4777 ▲

$f(x,y) = (3x - 2y)e^{4(x-y)}$.

Correction de l'exercice 4778 ▲

$f(x,y) = \frac{a(x-y)}{2} + g(x+y)$.

Correction de l'exercice 4779 ▲

$f(x,y) = g(xy)$.

Correction de l'exercice 4780 ▲

$f(x,y) = \ln|xy| + g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Correction de l'exercice 4781 ▲

$f(x,y) = g(\theta)$.

Correction de l'exercice 4782 ▲

(a) $g(\rho,\theta) = \lambda(\rho)e^{-2\theta}$.

(b) g est 2π-périodique, donc $\lambda = 0$, et $f = 0$.

Correction de l'exercice 4783 ▲

$f(x,y) = g\left(\frac{1+y^2}{x}\right)$.

Correction de l'exercice 4785 ▲

$f(x,y) = \rho^\alpha A(\theta) + \rho^{1-\alpha} B(\theta)$.

Correction de l'exercice 4786 ▲

(a) $(a+b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2a+b(\alpha+\beta)+2c\alpha\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (a+b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.

(b)

Correction de l'exercice 4787 ▲

$2u\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Rightarrow f(x,y) = A\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + B\left(\frac{x}{y}\right)$.

Correction de l'exercice 4788 ▲

$2tg'(t) + (1+t^2)g''(t) = t \Rightarrow g(t) = \frac{t}{2} + \lambda \arctan t + \mu$.

Correction de l'exercice 4789 ▲

(a) $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(b) $f(x,y) = \frac{xy}{16} + h(x) + k(y)$.

Correction de l'exercice 4790 ▲

$2u\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \Rightarrow f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + h(xy)$.

Correction de l'exercice 4791 ▲

$(1-t^2)f'' - 2tf' = 0 \Rightarrow f(t) = \lambda \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \mu$.

Correction de l'exercice 4792 ▲

$\Delta f = 4(x^2+y^2)\Delta F$.

Correction de l'exercice 4793 ▲

(a) $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x}$.

(b) $f(x,y) = \frac{xy}{2} + h(u) + k(v)$ avec $u+v = y$, $uv = x$.

Correction de l'exercice 4794 ▲

$f(r) = A\cos r + B\sin r$.

Correction de l'exercice 4795 ▲

(a) Il existe G telle que $\frac{\partial G}{\partial u} = g + u\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial(ug)}{\partial u}$ et $\frac{\partial G}{\partial v} = g + v\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial(vg)}{\partial v}$.
Donc $G = ug + \varphi(v) = vg + \psi(u)$, d'où $g = \frac{\varphi(v)-\psi(u)}{v-u}$. La réciproque est immédiate.

(b) $f(x,y) = x\left(\varphi\left(y - \frac{1}{x}\right) + \psi\left(y + \frac{1}{x}\right)\right)$.

Correction de l'exercice 4796 ▲

(a) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Posons $f(x,y) = g(u,v)$ où $u = x+y$ et $v = x+2y$. L'application $(x,y) \mapsto (x+y, x+2y) = (u,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et en particulier un C^1-difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g(u,v)) = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - 2\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite, $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = h(v) \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = h(x+2y)$.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y) \mapsto h(x+2y) \text{ où } h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

Par exemple, la fonction $(x,y) \mapsto \cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ est solution.

(b) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $f(x,y) = g(r,\theta)$ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. L'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$ est un C^1-difféormorphisme de $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta) = h_1(r)\\ &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = h(x^2+y^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y) \mapsto h(x^2+y^2) \text{ où } h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$

(c) Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. D'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Soit $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (u,uv)=(x,y) \end{array}$. Donc si on pose $f(x,y)=g(u,v)$, on a $g=f\circ\varphi$.

Soit $(x,y,u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\varphi(u,v)=(x,y)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} u=x \\ uv=y \end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l} u=x \\ v=\frac{y}{x} \end{array}\right..$$

Ainsi, φ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même et sa réciproque est l'application

$$\varphi^{-1}\ :\ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left(x,\frac{y}{x}\right)=(u,v) \end{array}.$$

De plus, φ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et son jacobien

$$J_\varphi(u,v)=\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ v & u \end{array}\right|=u$$

ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On sait alors que φ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même.

Puisque $g=f\circ\varphi$ et que φ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ si et seulement si g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right)+\left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}+2y\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v}-\frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ &=x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0&\Leftrightarrow\forall(u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=0 \\ &\Leftrightarrow\exists h\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=h(v) \\ &\exists(h,k)\in(C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall(u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ g(u,v)=uh(v)+k(v) \\ &\exists(h,k)\in(C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ f(x,y)=xh(xy)+k(xy). \end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les $(x,y)\mapsto xh(xy)+k(xy)$ où h et k sont deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4824 ▲

(a) Le graphe est bien un paraboloïde de révolution ayant l'origine pour sommet, d'axe de révolution l'axe des z, et dont la concavité tourne vers le haut. Les lignes de niveau sont les cercles $x^2+y^2=z_0$, $z_0=c$, $c>0$ étant une constante; pour $c=0$ c'est le somment, c.a.d. l'origine.

(b) Le graphe de la fonction f est un paraboloïde de révolution ayant le point $(0,0,25)$ pour sommet et plafonné par le plan des x et y, d'axe de révolution l'axe des z, et dont la concavité tourne vers le bas. Les lignes des niveau sont les cercles $x^2+y^2 = 25-z_0$, $z_0 = c$, $c < 25$ étant une constante qui dégénèrent en un point, le sommet, pour $c = 25$.

Le graphe de la fonction g est un demi-cône de révolution ayant le point $(0,0,5)$ pour sommet et plafonné par le plan des x et y, d'axe de révolution l'axe des z, et dont la concavité tourne vers le bas. Les lignes des niveau sont les cercles $x^2+y^2 = (5-z_0)^2$, $z_0 = c$ étant une constante telle que $0 \leqslant c \leqslant 5$ qui dégénèrent en un point, le sommet, pour $c = 5$.

(c) Dans $\mathbb{R}^3$ avec coordonnées (x,y,z), avec $f(x) = (y,z)$, le graphe en discussion est une hélice sur le cône de révolution $y2+z^2 = x^2$.

(d) Le support de cette courbe paramétrée est une spirale planaire qui rencontre l'origine et dont la pente à l'origine vaut zéro.

(e) Pour que $f(x,y,z) = \exp(x+y^2-z^2)$ soit constant il faut et il suffit que $x+y^2-z^2$ soit constant. Les surfaces de niveau en discussion sont donc les surfaces $x+y^2-z^2 = c$. Ce sont des paraboloïdes hyperboliques.

(f) Le graphe de l'application f en discussion est une surface dans $\mathbb{R}^4$, et la dimension 4 est trop grande pour représenter, sur une feuille de papier, ce graphe plongé dans $\mathbb{R}^4$. L'application f est un champs de vecteurs dans le plan cependant. De façon générale, on peut représenter graphiquement le champ de vecteurs $X\colon U \to \mathbb{R}^2$ dans l'ouvert U du plan en dessinant, au point (u_1,u_2) de U, le vecteur $X(u_1,u_2) = (x_1(u_1,u_2), x_2(u_1,u_2))$.

N.B. Quand on représente une surface dans l'espace de dimension 3 ordinaire par un dessin sur une feuille de papier, en vérité on ne dessine qu'une projection de l'espace de dimension 3 sur un plan.

Correction de l'exercice 4825 ▲

(a) La partie A_1 est ouverte. Car la courbe $x^2y^2 = 1$ a quatre branches, les deux branches de $xy = 1$ et les deux branches de $xy = -1$; ces quatre branches coupent le plan en cinq parties dont une contient l'origine. La courbe $x^2y^2 = 1$ étant une partie fermée, le complémentaire est un ouvert qui est réunion de cinq ouverts. La partie A_1 est la réunion des quatre parties qui ne contiennent pas l'origine. Puisque A_1 est ouvert, A_1 coïncide avec son intérieur. L'adhérence de A_1 est la réunion de A_1 avec les quatre branches de la courbe $x^2y^2 = 1$.

(b) La partie A_2 est le demi-cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre constitué des angles $0 < \varphi < \pi$ en radians et ce n'est ni ouvert ni fermé. La partie A_2 n'est pas ouverte car aucun disque de rayon positif n'est dans A_2 ; elle n'est pas fermée car les points $(\pm 1, 0)$ sont des points d'adhérence qui n'appartiennent pas à A_2. L'adhérence de A_2 est la partie

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = 1, y \geqslant 0\}$$

du plan.

Correction de l'exercice 4826 ▲

(a) Soient q_1 un point de B_1 et q_2 un point de B_2, soient d_1 resp. d_2 la distance de q_1 au bord de B_1 resp. la distance de q_2 au bord de B_2, et soit $0 < d \leqslant \min(d_1,d_2)$. Alors la boule ouverte dans $\mathbb{R}^{n+m}$ centrée en (q_1,q_2) et de rayon d est dans $B_1 \times B_2$.

(b) Soient p un point de A, q un point de B, soit B_1 un disque ouvert dans A contenant p, et soit B_2 un intervalle ouvert dans B contenant q. D'après (1.), $B_1 \times B_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $B_1 \times B_2 \subseteq A \times B$ et (p,q) appartient à $B_1 \times B_2$. Par conséquent, $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 4827 ▲

(a) La réunion $\cup_n A_n$ d'une suite de parties ouvertes A_n de $\mathbb{R}^2$ est bien une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit q un point de $\cup_n A_n$. Alors il existe n_0 tel que q appartienne à A_{n_0}. Puisque A_{n_0} est ouvert, il existe un disque ouvert D dans A_{n_0} tel que q appartienne à D. Par conséquent, il existe un disque ouvert D dans $\cup_n A_n$ tel que q appartienne à D.

L'intersection $\cap_n A_n$ d'une suite de parties ouvertes A_n de $\mathbb{R}^2$ n'est pas nécessairement ouverte. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'intersection des intervalles ouverts $]-1/n, 1/n[$ est la partie $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

(b) La réunion $\cup_n B_n$ d'une suite de parties fermées B_n de $\mathbb{R}^2$ n'est pas nécessairement une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Car le complémentaire $\mathscr{C}(\cup_n B_n)$ de $\cup_n B_n$ est l'intersection $\cap_n \mathscr{C} B_n$ des complémentaires et c'est donc l'intersection d'une suite $(\mathscr{C} B_n)$ de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ qui, d'après (1.), n'est pas nécessairement une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. De même, l'intersection $\cap_n B_n$ d'une suite de parties fermées B_n de $\mathbb{R}^2$ est bien une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Car le complémentaire $\mathscr{C}(\cap_n B_n)$ de $\cap_n B_n$ est la réunion $\cup_n \mathscr{C} B_n$ des complémentaires et c'est donc la réunion d'une suite $(\mathscr{C} B_n)$ de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ qui, d'après (1.), est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4828 ▲

La partie A du plan n'est pas ouverte puisqu'elle ne contient aucun disque ouvert. Cette partie A n'est pas fermée non plus : L'origine est un point d'adhérence : Quel que soit le disque ouvert B centré à l'origine, il existe un point de B qui appartient à A. Mais l'origine n'appartient pas à A d'où A n'est pas fermé. L'adhérence $\overline{A}$ de A est la réunion $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Car quelle que soit la suite (x_n) de points de $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$ telle que cette suite converge dans le plan, la limite appartient à $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Correction de l'exercice 4830 ▲

(a) Soit A une partie de E. $\overline{A}$ est fermé et donc $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. $\overset{\circ}{A}$ est ouvert et donc $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

(b) Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$.

• Pour tout $x \in E$, $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B}$. Donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.

• Pour tout $x \in E$, $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow B \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}$. Donc $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

(c) Soient A et B deux parties de E.

$\overline{A} \cup \overline{B}$ est une partie fermée de E contenant $A \cup B$. Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (puisque $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé de E au sens de l'inclusion contenant $A \cup B$).

Réciproquement, $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Finalement $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$ et donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

Réciproquement , $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{B} \Rightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Finalement, $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

(d) $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$ et donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A = [0,1[$ et $B =]1,2]$, $A \cap B = \varnothing$ puis $\overline{A \cap B} = \varnothing$ mais $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\} \neq \varnothing$.

$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cup B$ et donc $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$, $A \cup B = [0,2]$ puis $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} =]0,2[$ mais $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0,1[\cup]1,2[\neq]0,2[$.

(e) Soient A et B deux parties de E. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{\overbrace{A \setminus B}} &\Leftrightarrow A \setminus B \in \mathscr{V}(x) \Leftrightarrow \exists \mathscr{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathscr{B} \subset A \setminus B \\ &\Leftrightarrow \exists \mathscr{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathscr{B} \subset A \text{ et } \mathscr{B} \subset {}^cB \Leftrightarrow A \in \mathscr{V}(x) \text{ et } {}^cB \in \mathscr{V}(x) \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \text{ et } x \in \overset{\circ}{\overbrace{({}^cB)}} \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \text{ et } x \in {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \cap {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \setminus \overline{B}. \end{aligned}$$

Donc $\overset{\circ}{\widehat{A \setminus B}} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.

(f) Soit A une partie de E. $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}$. D'autre part $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$. Finalement, $\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.

$\mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}} \Rightarrow \mathring{\mathring{\overline{A}}} = \mathring{\overline{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$. D'autre part $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A} \Rightarrow \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \subset \mathring{\overline{A}}$. Finalement, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

Correction de l'exercice 4831 ▲

L'exercice 4830 montre que l'on ne peut pas faire mieux.

Soit $A = ([0,1[\cup]1,2]) \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4,5])$.

• $\mathring{A} =]0,1[\cup]1,2[$.

• $\overline{\mathring{A}} = [0,2]$.

• $\mathring{\overline{\mathring{A}}} =]0,2[$.

• $\overline{A} = [0,2]] \cup \{3\} \cup [4,5]$

• $\mathring{\overline{A}} =]0,2[\cup]4,5[$.

• $\overline{\mathring{\overline{A}}} = [0,2] \cup [4,5]$.

Les 7 ensembles considérés sont deux à deux distincts.

Correction de l'exercice 4832 ▲

Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n l'application définie par $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}\left|x - \frac{1}{2}\right|$.

Chaque fonction g_n est continue sur $[0,1]$ mais non dérivable en $\frac{1}{2}$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n \in E \setminus D$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|f - g_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$. On en déduit que la suite $(g_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers f dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_\infty)$.

f est donc limite d'une suite d'éléments de ${}^cD$ et donc est dans l'adhérence de ${}^cD$. Ceci montre que $\overline{{}^cD} = E$ ou encore ${}^c(\mathring{D}) = E$ ou enfin $\mathring{D} = \varnothing$.

Enfin, puisque $P \subset D$, on a aussi $\mathring{P} = \varnothing$.

Correction de l'exercice 4833 ▲

(a) Soit $x \in E$. Puisque D est dense dans E, il existe une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers x et puisque f et g sont continues et coincident sur D et donc en x

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} d_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(d_n) = \lim_{n\to+\infty} g(d_n) = g\left(\lim_{n\to+\infty} d_n\right) = g(x).$$

On a montré que $f = g$.

(b) Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On suppose que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Soit $a = f(1)$.

• $x = y = 0$ fournit $f(0) = 0 = a \times 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. $f(nx) = f(x + \ldots + x) = f(x) + \ldots + f(x) = nf(x)$. Ceci reste vrai pour $n = 0$.

• En particulier $x = 1$ fournit pour tout entier naturel non nul n, $f(n) = nf(1) = an$ puis $x = \frac{1}{n}$ fournit $nf\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = a$ et donc $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}$.

• Ensuite, $\forall (p,q) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)^2$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{p}{q}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ fournit $f(-x) = -f(x)$.

• En particulier, $\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f\left(-\frac{p}{q}\right) = -f\left(\frac{p}{q}\right) = -a\frac{p}{q}$.

En résumé, si f est morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$ où $a = f(1)$.

Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, les deux applications $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto ax$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$. D'après le 1), $f = g$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ où $a = f(1)$.
Réciproquement, toute application linéaire $x \mapsto ax$ est en particulier un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, continu sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Les morphismes continus du groupe } (\mathbb{R}, +) \text{ dans lui-même sont les applications linéaires } x \mapsto ax,\ a \in \mathbb{R}.}$

Correction de l'exercice 4834 ▲

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de l'espace normé $(E, \|\ \|)$ ayant une unique valeur d'adhérence que l'on note ℓ. Montrons que la suite u converge vers ℓ.
Supposons par l'absurde que la suite u ne converge pas vers ℓ. Donc

$$\exists \varepsilon > 0/\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0/\ \|u_n - \ell\| \geqslant \varepsilon \quad (*).$$

ε est ainsi dorénavant fixé.
En appliquant $(*)$ à $n_0 = 0$, il existe un rang $\varphi(0) \geqslant n_0 = 0$ tel que $\|u_{\varphi(0)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$.
Puis en prenant $n_0 = \varphi(0) + 1$, il existe un rang $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(1)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$ ... et on construit ainsi par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$.
Maintenant, la suite u est bornée et il en est de même de la suite $(u_{\varphi(n)})$. Puisque E est de dimension finie, le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS permet d'affirmer qu'il existe une suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_{\varphi(n)})$ et donc de u convergeant vers un certain $\ell' \in E$. ℓ' est donc une valeur d'adhérence de la suite u. Mais quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité $\|u_{\psi(n)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$, on obtient $\|\ell' - \ell\| \geqslant \varepsilon$ et donc $\ell \neq \ell'$. Ceci constitue une contradiction et donc u converge vers ℓ.

Correction de l'exercice 4841 ▲

(a)
(b) $d(x_n, a)$ décroît, donc tend vers d. Il existe une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers ℓ et $d(\ell, a) = d$. La suite $(f(x_{n_k}))$ converge vers $f(\ell)$ et on a $d(f(\ell), a) = d$, donc $\ell = a$. Il y a une seule valeur d'adhérence, donc la suite converge.

Correction de l'exercice 4842 ▲

C est stable par f_n qui est $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$-lipschitzienne. Donc il existe $x_n \in C$ tel que $f_n(x_n) = x_n$; toute valeur d'adhérence de (x_n) est point fixe de f.

Correction de l'exercice 4846 ▲

(a)
(b)
(c) Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} \delta(K_n)$. Il existe $x_n, y_n \in K_n$ tels que $d(x_n, y_n) = \delta(K_n)$. Après extraction de sous-suites, on peut supposer que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Pour $\varepsilon > 0$, $(\overline{B}(x, \varepsilon) \cap K_n)$ et $(\overline{B}(y, \varepsilon) \cap K_n)$ forment des suites décroissantes de compacts non vides, donc $\overline{B}(x, \varepsilon) \cap K$ et $\overline{B}(y, \varepsilon) \cap K$ sont non vides. Par conséquent, $\delta(K) \geqslant \ell - 2\varepsilon$.

Correction de l'exercice 4848 ▲

$U_{i,n} = \{x \in E \text{ tq } \overline{B}(x, 1/n) \subset O_i\}$ est ouvert et les $U_{i,n}$ recouvrent E. On extrait un recouvrement fini $\Rightarrow r = \min(1/n)$.

Correction de l'exercice 4849 ▲

Soit (u^n) une suite de suites éléments de A : $u^n = (u^n_k)$. On peut trouver une sous-suite $(u^{n_{p_0}})$ telle que $(u_0^{n_{p_0}})$ converge vers $u_0 \in [0,1]$, puis une sous-suite $(u^{n_{p_1}})$ telle que $(u_0^{n_{p_1}}, u_1^{n_{p_1}})$ converge vers $(u_0,u_1) \in [0,1]^2$, etc. Alors la suite $(u^{n_{p_k}})_k$ converge dans A vers $(u_0,u_1,\dots)$.

Correction de l'exercice 4852 ▲

On choisit $a \in K$ et on considère pour $n \geqslant 1$ la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}a + \left(1-\frac{1}{n}\right)f(x)$. f_n est une $\left(1-\frac{1}{n}\right)$-contraction de K donc admet un point fixe x_n. Si x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) alors $f(x) = x$.

Correction de l'exercice 4858 ▲

Pour $\alpha \in]0,\pi[$, posons $f(\alpha) = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |\sin(n\alpha)|$.

• Tout d'abord $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n(\pi-\alpha))| = |\sin(n\alpha)|$ et donc $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $f(\pi-\alpha) = f(\alpha)$. On en déduit que $\operatorname*{Inf}_{\alpha\in]0,\pi[} f(\alpha) = \operatorname*{Inf}_{\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]} f(\alpha)$.

• $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sup\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Ensuite, si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(\alpha) \geqslant \sin(\alpha) \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Par suite $\operatorname*{Inf}_{\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]} f(\alpha) = \operatorname*{Inf}_{\alpha\in]0,\frac{\pi}{3}]} f(\alpha)$.

• Soit alors $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{3}\right]$. Montrons qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $n_0\alpha \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.
Il existe un unique entier naturel n_1 tel que $n_1\alpha \leqslant \frac{\pi}{3} < (n_1+1)\alpha$ à savoir $n_1 = E\left(\frac{\pi}{3\alpha}\right)$.
Mais alors, $\frac{\pi}{3} < (n_1+1)\alpha = n\alpha + \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et l'entier $n_0 = n_1+1$ convient.
Ceci montre que $f(\alpha) \geqslant \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Finalement $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $f(\alpha) \geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et donc $\operatorname*{Inf}_{\alpha\in]0,\pi[}\left\{\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{Z}}|\sin(n\alpha)|\right\} = \operatorname*{Min}_{\alpha\in]0,\pi[}\left\{\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{Z}}|\sin(n\alpha)|\right\} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\operatorname*{Inf}_{\alpha\in]0,\pi[}\left\{\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{Z}}|\sin(n\alpha)|\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4859 ▲

(a) $A \setminus]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[$ est fini.

(b)

Correction de l'exercice 4861 ▲

Soient $x < y$: Il existe $a \in |||$ tel que $n \geqslant a \Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < y - x$.
Il existe $b \in |||$ tel que $\sqrt{a} - \sqrt{b} < x$.
Alors il existe $c \geqslant a$ tel que $x < \sqrt{c} - \sqrt{b} < y$.

Correction de l'exercice 4862 ▲

$n + p\sqrt{2} > 1 \Rightarrow n > 0,\ p > 0$, donc $A \cap]1,+\infty[$ admet un plus petit élément : $3 + 2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 4863 ▲

On construit un ensemble de type Cantor dont les trous ont pour longueur 1, $\frac{1}{2^a}$, $\frac{1}{4^a}$, ..., et on répartit les x_k de part et d'autre des trous en fonction de l'écriture décimale de k ($0 \to$ à gauche, $1 \to$ à droite).

Correction de l'exercice 4865 ▲

L'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle constitué de points fixes de $f \Rightarrow$ la suite (u_n) a une seule valeur d'adhérence.

Correction de l'exercice 4869 ▲

Soit $\ell = \liminf \frac{u_n}{n}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe p tel que $(\ell-\varepsilon)p \leqslant u_p \leqslant (\ell+\varepsilon)p$.
Alors pour $n \in |||$ et $0 \leqslant k < p$: $u_k + (\ell-\varepsilon)np \leqslant u_{np+k} \leqslant u_k + (\ell+\varepsilon)np$.

Correction de l'exercice 4870 ▲

(a) Il est supposé connu (et à savoir démontrer) le fait suivant : *si G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, alors soit G est monogène, soit $\overline{G} = \mathbb{R}$.* Dans le cas de la question, le groupe G des périodes de f contient 1 et $\sqrt{2}$ donc n'est pas monogène car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (la démonstration a été demandée à l'élève). De plus G est fermé par continuité de f, d'où f est constante.

(b) D'après la première question, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'application $x \mapsto f(x,y)$ est constante et il en va de même si $y \in \mathbb{Q}$ par continuité de f. Donc f est de la forme $(x,y) \mapsto g(y)$ où g est 1-périodique. Réciproquement, toute fonction f de cette forme convient.

Correction de l'exercice 4871 ▲

1ère solution. • Montrons qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Soient $d = y - x$ puis n un entier naturel non nul tel que $\frac{1}{n} < d$ (par exemple, $n = E\left(\frac{1}{d}\right) + 1$). Soient enfin $k = E(nx)$ et $r = \frac{k+1}{n}$. r est un rationnel et de plus

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{k+1}{n} = r \leqslant \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + d = x + y - x = y.$$

En résumé, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} /\ x < r < y)$. Ceci montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2ème solution. On sait que tout réel est limite d'une suite de décimaux et en particulier tout réel est limite d'une suite de rationnels. Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 4872 ▲

Soit f une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\exists \alpha > 0 /\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$ (le travail est analogue si $x \in \mathbb{R}^-$).
Pour $n \in \mathbb{N}$

$$|x - n\alpha| \leqslant \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leqslant x - n\alpha \leqslant \alpha \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - 1 \leqslant n \leqslant \frac{x}{\alpha} + 1 \Leftarrow n = E\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

On pose $n_0 = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant |f(x) - f(x-\alpha)| + |f(x-\alpha) - f(x-2\alpha)| + \ldots + |f(x-(n_0-1)\alpha) - f(x-n_0\alpha)| + |f(x-n_0\alpha) - f(0)| + \\
&\leqslant n_0 + 1 + |f(0)| \text{ (car } |x - n_0\alpha - 0| \leqslant \alpha) \\
&\leqslant \frac{x}{\alpha} + 2 + |f(0)|.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leqslant \frac{x}{\alpha} + 2 + |f(0)|$. Par symétrie des calculs, $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $|f(x)| \leqslant \frac{-x}{\alpha} + 2 + |f(0)|$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \frac{|x|}{\alpha} + 2 + |f(0)|$.

$$\boxed{f \text{ uniformément continue sur } \mathbb{R} \Rightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) \leqslant a|x|+b.}$$

Correction de l'exercice 4873 ▲

Soit $a \in \mathring{\overline{U}} \cap \mathring{\overline{V}}$: Il existe $B(a,r) \subset \overline{U} \cap \overline{V}$.
Soit $b \in B(a,r) \cap U$: Il existe $B(b,r') \subset B(a,r) \cap U$. Donc $b \notin \overline{V}$, contradiction.

Correction de l'exercice 4875 ▲

$\mathring{\overline{U}} \subset \overline{U} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{U}}} \subset \overline{U}$.
$U \subset \overline{U} \Rightarrow U \subset \mathring{\overline{U}} \Rightarrow \overline{U} \subset \overline{\mathring{\overline{U}}}$.

Correction de l'exercice 4876 ▲

Soit a intérieur à $\mathrm{Fr}(U)$: Il existe $B(a,r) \subset \overline{U} \setminus U$. $B(a,r) \cap U = \varnothing \Rightarrow a \notin \overline{U}$, contradiction.

Correction de l'exercice 4878 ▲

Par passage à la limite, $\delta(A) = \delta(\overline{A}) \geqslant \delta(\mathrm{Fr}(A))$.
Soient $x,y \in A$ distincts et D la droite passant par x et y. D coupe A suivant un ensemble borné dont les extrémités appartiennent à $\mathrm{Fr}(A)$. Donc $\delta(\mathrm{Fr}(A)) \geqslant \delta(A)$.

Correction de l'exercice 4880 ▲

Si f est continue : soit $x \in \overline{A}$: $x = \lim a_n \Rightarrow f(x) = \lim f(a_n) \in \overline{f(A)}$.
soit $x \in f^{-1}(B)^\circ$: $f(x) \in \mathring{B} \Rightarrow \exists\, B(f(x),r) \subset B$, $\exists\, \delta > 0$ tq $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),r)$
$\Rightarrow B(x,\delta) \subset f^{-1}(B)$.
si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$: soit $B \subset F$ fermé et $A = f^{-1}(B)$: $f(\overline{A}) \subset B$ donc $\overline{A} \subset A$.
si $f^{-1}(\mathring{B}) \subset f^{-1}(B)^\circ$: soit $B \subset F$ ouvert et $A = f^{-1}(B)$: $\mathring{A} \supset f^{-1}(\mathring{B}) = A$.

Correction de l'exercice 4885 ▲

(a) Pour $x,x' \in \mathbb{R}^n$ et $y \in A$ on a $d_A(x) \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x-x'\| + \|x'-y\|$. En prenant la borne inférieure sur y on obtient $d_A(x) \leqslant \|x-x'\| + d_A(x')$. Par symétrie on a aussi $d_A(x') \leqslant \|x-x'\| + d_A(x)$ d'où $|d_A(x) - d_A(x')| \leqslant \|x-x'\|$.

(b) On sait que $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } d_A(x) = 0\}$. Donc $d_A = d_B \Rightarrow \overline{A} = \overline{B}$ et la réciproque résulte de la propriété facile $d_A = d_{\overline{A}}$.

(c) On note : $M = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, $\alpha = \sup\{d_B(x), x \in A\}$ et $\beta = \sup\{d_A(x),\ x \in B\}$. Par restriction de y à $A \cup B$ on obtient $M \geqslant \max(\alpha,\beta)$. Par ailleurs, pour $y \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$ et $b \in B$ on a $\|y-a\| - \|y-b\| \leqslant \|a-b\|$ d'où $d_A(y) - \|y-b\| \leqslant d_A(b)$ puis $d_A(y) - d_B(y) \leqslant \beta$. Par symétrie on a aussi $d_B(y) - d_A(y) \leqslant \alpha$ donc $|d_A(y) - d_B(y)| \leqslant \max(\alpha,\beta)$ et finalement $M \leqslant \max(\alpha,\beta)$.

Correction de l'exercice 4888 ▲

(a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la demi-droite d'origine O et d'angle polaire θ coupe K selon un intervalle non trivial (K est convexe et O est interieur à K), fermé borné (K est compact). On note $f(\theta)$ la longueur de cet intervalle, ce qui définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ 2π-périodique telle que $K = \{M(\rho,\theta) \text{ tq } 0 \leqslant \rho \leqslant f(\theta)\}$. Continuité de f : soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $M(\rho_0,\theta_0)$ tel que $f(\theta_0) - \varepsilon < \rho_0 < f(\theta_0)$. Donc $M \in \mathring{K}$ et il existe $\alpha > 0$ tel que la boule de centre M et de rayon α est incluse dans K (faire un dessin). Ainsi, pour tout θ suffisament proche de θ_0 on a $f(\theta) \geqslant OM > f(\theta_0) - \varepsilon$. Considérons alors une hypothétique suite (θ_k) de réels convergeant vers θ_0 telle que la suite $(f(\theta_k))$ ne converge pas vers $f(\theta_0)$. Comme la suite $(f(\theta_k))$ est bornée on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer qu'elle converge vers un réel ℓ et le raisonnement précédent montre que $\ell > f(\theta_0)$. Si M_k désigne le point de K à la distance $f(\theta_k)$ dans la direction d'angle polaire θ_k alors la suite (M_k) converge vers le point $M(\ell,\theta_0)$ qui doit appartenir à K par compacité, mais qui contredit la définition de $f(\theta_0)$.

(b) Si g ne s'annule pas alors $\int_{x=0}^{\pi} g(x)\sin(x)\,dx \neq 0$. Si g ne s'annule qu'en $\alpha \in [0,\pi]$ alors g est de signe constant sur $[0,\alpha]$ et sur $[\alpha,\pi]$, les signes sont opposés, et on obtient encore une contradiction en considérant $\int_{x=0}^{\pi} g(x)\sin(x-\alpha)\,dx$ qui vaut 0 (développer le sinus).

(c) On choisit $O = G$. On a $\iint_{M\in K} \vec{OM} = \vec{0}$, soit $\int_{\theta=0}^{2\pi} f^3(\theta)\cos\theta\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} f^3(\theta)\sin\theta\,d\theta = 0$, soit encore : $\int_{\theta=0}^{\pi}(f^3(\theta)-f^3(\theta+\pi))\cos\theta\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi}(f^3(\theta)-f^3(\theta+\pi))\sin\theta\,d\theta = 0$. D'après la question précédente, il existe $\alpha \neq \beta \in]0,\pi[$ tels que $f(\alpha) = f(\alpha+\pi)$ et $f(\beta) = f(\beta+\pi)$, ce qui prouve qu'il y a au moins deux diamètres de K dont $O = G$ est le milieu. On prouve l'existence d'un troisième diamètre en décalant l'origine des angles polaires de façon à avoir $f(0) = f(\pi)$, ce qui est possible vu l'existence de α,β.

Correction de l'exercice 4889 ▲

Pour $\|x\| \leqslant 1$ et $\|y\| \leqslant 1$ on a $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$.

Pour $\|x\| \leqslant 1 < \|y\|$ on a $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|x-y\| + \left\|y - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \|x-y\| + \|y\| - 1 \leqslant \|x-y\| + \|y\| - \|x\| \leqslant 2\|x-y\|$.

Pour $1 < \|x\| \leqslant \|y\|$ on a $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|}\right\| + \left\|\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant \frac{\|x-y\|+\|y\|-\|x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\|x\|}$.

Remarque : dans le cas où la norme est euclidienne, $f(x)$ est le projeté de x sur la boule unité, c'est-à-dire le point de la boule unité le plus proche de x. Dans ce cas, f est 1-lipschitzienne. Dans le cas d'une norme non euclidienne on peut avoir $\|f(x)-f(y)\| > \|x-y\|$, par exemple avec $x = (1,1)$ et $y = (\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ dans $\mathbb{R}^2$ pour $\|\ \|_\infty$.

Correction de l'exercice 4899 ▲

On construit (s_k) de proche en proche de sorte que pour tout n fixé la suite $(y_n^{s_k})$ soit convergente vers z_n. Comme $\sum_{n\leqslant N}(y_n^{s_k})^2$ est bornée indépendamment de N et k la série $\sum_n z_n^2$ a ses sommes partielles bornées donc converge. On a alors $(x \mid y^{s_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x \mid z)$ pour toute suite x à support fini, puis pour toute suite de carré sommable par interversion de limites.

Correction de l'exercice 4900 ▲

(a) Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. On remplace la norme sur E par la norme infinie associée à $(e_1,\dots,e_p)$. Alors $\|\|u^n\|\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|u^n(e_i)\|$.

(b) Trigonaliser fortement u (ou son prolongement au complexifié de E). Comme (u^n) est borné, les valeurs propres de u sont de module inférieur ou égal à 1, et pour celles de module 1 le bloc triangulaire associé est en fait diagonal. On trouve $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u^i \xrightarrow[n\to\infty]{}$ projection sur $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$.

Correction de l'exercice 4904 ▲

(a)

(b)

(c)

(d) (P_n) converge vers 0 pour $a \in]-2,2[$ et vers 1 pour $a = 2$. La suite est non bornée si $|a| > 2$; elle est bornée divergente pour $a = -2$.

(e) $(X/b)^n$ converge vers 1 pour N_b et vers 0 pour N_a.

Correction de l'exercice 4906 ▲

(a)

(b)

(c) $f(x) = \int_{t=0}^{x} \sin(x-t)(f(t)+f''(((t))\,dt$, $f''(x) = (f(x)+f''(x)) - f(x)$.

Correction de l'exercice 4907 ▲

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \Rightarrow (AB)_{ij}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 \times \sum_{k=1}^{n} B_{kj}^2$.

Correction de l'exercice 4908 ▲

Si A est une matrice de rang $r > 0$ telle que $p(A) = 0$ alors pour toute matrice M de rang $< r$ on peut trouver P et Q telles que $M = PAQ$ d'où $P(M) = 0$. Donc p est nulle sur toute matrice de rang 1 et par inégalité triangulaire sur tout matrice.

Correction de l'exercice 4915 ▲

(a) $2^n \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.

(b) Supposons qu'il existe une norme euclidienne $\|\ \|$ et deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha\|u\|_\infty \leqslant \|u\| \leqslant \beta\|u\|_\infty$ pour tout $u \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. On pose $u(x) = 1-2|x|$ pour $x \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $u(x) = 0$ sinon. Soit $n \in |||$ et pour $1 \leqslant i \leqslant n$: $u_i(x) = u((n+1)x - i)$. Alors $\sum_\sigma \left\|\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)u_i\right\|^2 \leqslant 2^n\beta^2$ et $2^n \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \geqslant 2^n n\alpha^2$ donc ces deux sommes ne peuvent rester égales quand $n \to \infty$.

(c) Même construction. On trouve

$$\sum_\sigma \left\|\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)u_i\right\|^2 \leqslant 2^n\beta^2\|u\|_p^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/p}$$

et $2^n \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \geqslant 2^n\alpha^2\|u\|_p^2 \frac{n}{(n+1)^{2/p}}$.

Correction de l'exercice 4917 ▲

(a)

(b) On prouve la convexité de B. Soient $x, y \in B$, $t \in [0,1]$ et $z = (1-t)x + ty$. On a $N^2(z) \leqslant 2t^2 + 2(1-t)^2$, d'où $N(z) \leqslant 1$ si $t = \frac{1}{2}$. Ceci prouve déjà que B est stable par milieu, et on en déduit par récurrence sur $n \in |||$ que $z \in B$ si t est de la forme $a/2^n$ avec $a \in [[0, 2^n]]$.

Si t n'est pas de cette forme, on écrit t comme barycentre de deux nombres dyadiques $t = u\frac{a}{2^n} + (1-u)\frac{b}{2^n}$ en faisant en sorte que u soit arbitrairement proche de $\frac{1}{2}$. Si c'est possible, on obtient que z est barycentre de deux éléments de B avec les coefficients u et $1-u$, d'où $N^2(z) \leqslant 2u^2 + 2(1-u)^2 \xrightarrow[u \to 1/2]{}$. Reste donc à choisir n, a, b : pour n donné, on choisit $a = [2^n] - n$ et $b = [2^n] + n$. C'est possible car $[2^n t] \sim 2^n t$ et on est dans le cas $0 < t < 1$ donc on a bien $a, b \in [[0, 2^n]]$ si n est suffisament grand. Il vient $u = \frac{b-2^n t}{b-a}$, quantité comprise entre $\frac{n-1}{2n}$ et $\frac{1}{2}$ et donc qui tend bien vers $\frac{1}{2}$.

Remarque : la condition (iii) est aussi nécessaire, donc une norme est une application vérifiant (i), (ii) et (iii).

Correction de l'exercice 4923 ▲

(a) On procède par récurrence sur n. Pour $n=1$, l'application $[0,+\infty[\ni\lambda_1\mapsto\|x-\lambda_1 a_1\|$ est continue, constante si $a_1=0$ et tend vers $+\infty$ quand $\lambda_1\to+\infty$ si $a_1\neq 0$. Dans les deux cas elle admet un minimum.
Pour $n\geqslant 2$, soit $C'=\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i a_i, \lambda_i\geqslant 0\right\}$. Soit pour $\lambda_n\in[0,+\infty[\ :\ \varphi(\lambda_n)=d(x-\lambda_n a_n, C')$. La distance à C' est 1-lipschitzienne donc $\varphi(\lambda_n)\geqslant d(-\lambda_n a_n, C')-\|x\|=\lambda_n d(-a_n, C')-\|x\| \xrightarrow[\lambda_n\to+\infty]{} +\infty$. Étant continue, φ admet un minimum sur $[0,+\infty[$ et on applique l'hypothèse de récurrence à $x-\lambda_n a_n$.

(b)

Correction de l'exercice 4924 ▲

On procède par récurrence sur $n=\dim E$. Pour $n=1$, en confondant E et $\mathbb{R}$, C est un intervalle dense, c'est $\mathbb{R}$. Pour $n\geqslant 2$, soit $E=H\oplus<a>$ où H est un hyperplan de E. On montre ci-dessous que $C'=C\cap H$ est une partie de H convexe et dense, donc égale à H, d'où $H\subset C$ et ce pour tout H. Ainsi $C=E$.

Densité de C' : soit $x\in H$, et (y_k), (z_k) des suites d'éléments de C convergeant respectivement vers $x+a$ et $x-a$. On écrit $y_k=y'_k+\lambda_k a$ et $z_k=z'_k+\mu_k a$ avec $y'_k, z'_k\in H$ et $\lambda_k,\mu_k\in\mathbb{R}$. Par équivalence des normes en dimension finie, on a $\lambda_k\xrightarrow[k\to\infty]{}1$ et $\mu_k\xrightarrow[k\to\infty]{}-1$, donc le point $x_k=\frac{\lambda_k z_k-\mu_k y_k}{\lambda_k-\mu_k}$ est bien défini et appartient à C' pour k assez grand, et converge vers x.

Remarque : Si E est de dimension infinie, alors il contient des hyperplans non fermés, donc des parties strictes, convexes denses.

Correction de l'exercice 4926 ▲

(a) $\overline{P}=P$, $\mathring{P}=\{\text{fonctions strictement positives}\}$.

(b) $\overline{P}=P$, $\mathring{P}=\varnothing$.

Correction de l'exercice 4927 ▲

$\overline{F}=F$, $\mathring{F}=\varnothing$.

Correction de l'exercice 4928 ▲

Oui pour $\pm\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, non pour les autres (les symétries non triviales).

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ est isolé car si $u\neq\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et $u^2=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ alors -1 est valeur propre de u et $\|u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\|\geqslant 2$. De même pour $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Si u est une symétrie non triviale, soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base propre de u avec $u(e_1)=e_1$ et $u(e_2)=-e_2$. Pour $p\in|||^*$ soit $u_p\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $u_p(e_1)=e_1+e_2/p$ et $u_p(e_i)=u(e_i)$ pour $i\geqslant 2$. On a $u_p^2=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, $u_p\neq u$ et $u_p\xrightarrow[p\to\infty]{}u$.

Correction de l'exercice 4931 ▲

(a) $GL_n(\mathbb{C})=\det^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ est ouvert. Il est dense car $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque est limite des matrices $A-\frac{1}{p}I$ inversibles pour presque tout entier p (A a un nombre fini de valeurs propres).

(b) Toute matrice triangulaire est limite de matrices triangulaires à coefficients diagonaux distincts.

(c) $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lim_{p\to\infty}\begin{pmatrix}\lambda & 1/p\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ donc une matrice triangulaire à valeurs propres non distinctes est limite de matrices non diagonalisables. Par conjugaison, la frontière de $D_n(\mathbb{C})$ contient l'ensemble des matrices ayant au moins une valeur propre multiple.

Réciproquement, soit (A_k) une suite de matrices non diagonalisables convergeant vers une matrice A. Les matrices A_k ont toutes au moins une valeur propre multiple, et ces valeurs propres sont bornées (car si λ est une valeur propre de M alors $|\lambda| \leqslant \|M\|$ en prenant une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à une norme sur $\mathbb{C}^n$) donc on peut trouver une suite (z_k) de complexes convergeant vers un complexe z telle que $\chi'_{A_k}(z_k) = 0$. A la limite on a $\chi_A(z) = 0$ ce qui prouve que A a au moins une valeur propre multiple.

Conclusion : la frontière de $D_n(\mathbb{C})$ est exactement l'ensemble des matrices diagonalisables ayant au moins une valeur propre multiple et l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices à valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 4932 ▲

Si N est nilpotente, on peut se ramener au cas où N est triangulaire supérieure stricte.

Soit alors $P = \mathrm{diag}(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Le coefficient général de $P^{-1}NP$ est $\alpha^{j-i}N_{ij} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$.

Réciproquement, s'il existe une suite (N_k) de matrices semblables à N convergeant vers la matrice nulle, alors par continuité du polynôme caractéristique, on a $\chi_N = (-X)^n$ et N est nilpotente.

Correction de l'exercice 4933 ▲

(a) Ω est ouvert : si P a n racines distinctes $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ on choisit $b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n$. La suite $(P(b_0), \dots, P(b_n))$ est constituée de termes non nuls de signes alternés, il en est de même pour la suite $(Q(b_0), \dots, Q(b_n))$ où Q est un polynôme unitaire arbitraire suffisament proche de P (pour une norme quelconque).

Ω n'est pas fermé car $\varnothing \neq \Omega \neq \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ est connexe.

(b) Déjà, si l'on munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_n[X]$ de normes convenables, f est une isométrie bicontinue donc $f(\overline{\Omega}) = \overline{f(\Omega)}$. Montrons que $\overline{f(\Omega)}$ est l'ensemble $\mathscr{S}$ des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$.

Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, notons $M(P)$ la matrice compagne de P.

Si $P \in \mathscr{S}$ alors $M(P)$ est $\mathbb{R}$-trigonalisable, donc limite de matrices à valeurs propres réelles distinctes. Les polynômes caractéristiques de ces matrices, au signe près, appartienent à $f(\Omega)$ et convergent vers P d'où $\mathscr{S} \subset \overline{f(\Omega)}$.

Si (P_k) est une suite de polynômes de $f(\Omega)$ convergeant vers P alors il existe une suite (O_k) de matrices orthogonales telle que ${}^tO_kM(P_k)O_k$ est triangulaire supérieure (méthode de Schmidt). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que O_k converge vers une matrice orthogonale O et donc ${}^tOM(P)O$ est aussi triangulaire supérieure ce qui implique que $P \in \mathscr{S}$.

Correction de l'exercice 4935 ▲

Remarquer que la restriction de f à toute partie compacte est uniformément continue.

Correction de l'exercice 4942 ▲

(a)

(b) Soit F est un tel fermé, et $a \in F$. On prend $f(x) = x + d(x, F)$ si $0 \leqslant x \leqslant a$ et $f(x) = x - d(x, F)$ si $a \leqslant x \leqslant 1$.

Correction de l'exercice 4943 ▲

(a) Pour simplifier, on suppose $z = 0$ (sinon, se placer dans la base $(1, X - z, \dots, (X - z)^d)$ et invoquer l'équivalence des normes en dimension finie).

Soit $P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots + a_{n,d}x^d$. La suite (P_n) étant convergente est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a_{n,k}| \leqslant M$ pour tous n, k. De plus, $a_{n,0} \xrightarrow[n \to \infty]{} a_0 = 0$ et $a_{n,1} \xrightarrow[n \to \infty]{} a_1 \neq 0$.

Posons alors $Q_n(x) = -\frac{a_{n,0}+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,d}x^d}{a_{n,1}}$ (bien défini si n est assez grand). On va montrer que Q_n vérifie les hypothèses du théorème du point fixe sur $\overline{B(0,\delta)}$ pour tout n assez grand si δ est choisi assez petit, ce qui implique l'existence et l'unicité d'une racine pour P_n dans $\overline{B(0,\delta)}$.
$Q_n(\overline{B(0,\delta)}) \subset \overline{B(0,\delta)}$? Soit $x \in \overline{B(0,\delta)}$: on a

$$|Q_n(x)| \leqslant \frac{|a_{n,0}|+M(\delta^2+\cdots+\delta^d)}{|a_{n,1}|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{M(\delta^2+\cdots+\delta^d)}{|a_1|}.$$

On choisit $\delta > 0$ tel que $\frac{M(\delta+\cdots+\delta^{d-1})}{|a_1}\leqslant \frac{1}{2}$. Il existe alors $N_1 \in |||$ tel que $\frac{|a_{n,0}|+M(\delta^2+\cdots+\delta^d)}{|a_{n,1}|} \leqslant \delta$ pour tout $n \geqslant N_1$.
Q_n est contractante sur $\overline{B(0,\delta)}$? Soient $x,y \in \overline{B(0,\delta)}$. On a :

$$\begin{aligned}|Q_n(x)-Q_n(y)| &\leqslant \frac{|a_{n,2}||x^2-y^2|+\cdots+|a_{n,d}||x^d-y^d|}{|a_n,1|}\\ &\leqslant |x-y|\frac{|a_{n,2}||x+y|+\cdots+|a_{n,d}||x^{d-1}+\cdots+y^{d-1}|}{|a_{n,1}|}\\ &\leqslant |x-y|\frac{M(2\delta+\cdots+d\delta^{d-1})}{|a_{n,1}|}.\end{aligned}$$

Quitte à diminuer δ on peut imposer $\frac{M(2\delta+\cdots+d\delta^{d-1})}{|a_1|} \leqslant \frac{1}{2}$ et donc $\frac{M(2\delta+\cdots+d\delta^{d-1})}{|a_{n,1}|} \leqslant \frac{2}{3}$ pour tout $n \geqslant N_2$ et Q_n est $\frac{2}{3}$-lipschitzienne.

(b) Voir réponse précédente. Y a-t-il une réponse plus simple pour 1) ?

(c) Si z est zéro d'ordre k de P alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout n assez grand, P_n a exactement k racines comptées avec leur ordre de multiplicité dans $\overline{B(0,\delta)}$. Ceci est une conséquence du *théorème des résidus* largement hors programme...

Correction de l'exercice 4944 ▲

Si f est constante c'est évident. Sinon, on a facilement $|f(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$. Considérons un fermé F et une suite $(f(z_n))$ d'éléments de $f(F)$ convergeant vers $Z \in \mathbb{C}$. D'après la remarque, la suite (z_n) est bornée, elle admet une valeur d'adhérence $z \in F$ et $Z = f(z) \in f(F)$.
Remarque : ce résultat est faux pour une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}^p$ avec $p \geqslant 2$, prendre par exemple $f(x,y) = x$ sur $\mathbb{C}^2$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tq } xy = 1\}$.

Correction de l'exercice 4945 ▲

On suppose P non constant, sans quoi le résultat est trivial. Soit $S(X) = \sup(|P(x)|,\ x \in X)$. On a par inclusion et continuité : $S(\mathrm{Fr}(U)) \leqslant S(\overline{U}) = S(U)$. Soit $x \in \overline{U}$ tel que $|P(x)| = S(\overline{U})$. On démontre par l'absurde que $x \in \mathrm{Fr}(U)$, ce qui entraîne l'égalité demandée. Supposons donc $x \in U$ et soit $n = \deg(P)$. Alors pour $\rho > 0$ suffisament petit, et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $x+\rho e^{i\theta} \in U$ et :

$$P(x+\rho e^{i\theta}) = P(x) + \rho e^{i\theta}P'(X) + \cdots + \frac{\rho^n e^{in\theta}}{n!}P^{(n)}(x).$$

avec $P^{(n)}(x) = P^{(n)} \neq 0$. On en déduit :

$$2\pi|P(x)| = \left|\int_{\theta=0}^{2\pi} P(x+\rho e^{i\theta})\,d\theta\right| \leqslant \int_{\theta=0}^{2\pi} |P(x+\rho e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant 2\pi S(U) = 2\pi|P(x)|.$$

On en déduit que les inégalités sont des égalités, et en particulier que la quantité $|P(x+\rho e^{i\theta})|$ est indépendante de ρ et θ. Il y a contradiction car $|P(x+\rho e^{i\theta})|^2$ est un polynôme de degré $2n$ en ρ.

Correction de l'exercice 4946 ▲

(a) $f(rx) = rf(x)$ pour tout $r \in |||$ par récurrence, puis pour tout $r \in \mathbb{Z}$ par différence, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ par quotient et enfin pour tout $r \in \mathbb{R}$ par densité. Dans le cas de $\mathbb{C}$-ev f est $\mathbb{R}$-linéaire mais pas forcément $\mathbb{C}$-linéaire, ctrex : $z \mapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

(b) $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leqslant M2^{-n-1}$ donc la série télescopique $\sum(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est uniformément convergente.

(c) $\|f_n(x+y) - f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant M2^{-n}$ donc $\|g(x+y) - g(x) - g(y)\| \leqslant 0$ et g est continue (limite uniforme des f_n) d'où g est linéaire continue. $\|f(x) - g(x)\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}(f_k(x) - f_{k+1}(x))\| \leqslant 2M$ donc $f - g$ est bornée. Si h est une application linéaire telle que $f - h$ est bornée alors $g - h$ est aussi bornée ce qui entraîne $g = h$ par linéarité.

Correction de l'exercice 4949 ▲

(a)

(b) Si $c \neq 0$ alors P_c est continue pour toutes les normes N_p et $|||P_c|||_{N_p} = |c|^{-p}e^{|c|}$. Par contre P_0 n'est continue que pour N_0 car si $p > 0$ alors $N_p(x \mapsto e^{-n|x|}) = \frac{p^p e^{-p}}{(n+1)^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc la suite $(x \mapsto e^{-n|x|})$ converge vers la fonction nulle pour N_p, mais $P_0(x \mapsto e^{-n|x|}) = 1 \not\to 0$.

(c) Si $p < q$ alors $N_p(x \mapsto e^{-n|x|})/N_q(x \mapsto e^{-n|x|}) \to \infty$ losrque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4954 ▲

Prendre une base.

Correction de l'exercice 4955 ▲

$\frac{1}{1-X^n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_k X}$, $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Donc $1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-X^n}{n(1-\omega_k X)}$.

Il s'agit de polynômes, donc on peut remplacer X par u, d'où : $(\mathrm{id}_E - u^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{id}_E - e^{2ik\pi/n}u\right)^{-1}$.

Correction de l'exercice 4956 ▲

$\|X+iY\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$, $\|A(X+iY)\|^2 = \|AX\|^2 + \|AY\|^2 \leqslant |||A|||_{\mathbb{R}}^2(\|X^2\| + \|Y\|^2)$ donc $|||A|||_{\mathbb{C}} \leqslant |||A|||_{\mathbb{R}}$.

Correction de l'exercice 4957 ▲

(a) Non : $\|(x^2+1)^n\| = 2^n$.

(b) Oui : $\|\psi\| = \|A\|$.

(c) $\|\phi\| = e$, $\|\psi(x^n)\|/\|x^n\|$ si $mn \Rightarrow \psi$ est discontinue.

Correction de l'exercice 4958 ▲

(a) nv^{n-1}.

(b) Si u et v sont continus, $n\|v^{n-1}\| \leqslant 2\|u\|\,\|v^n\| \leqslant 2\|u\|\,\|v^{n-1}\|\,\|v\|$.
S'il existe k tel que $v^k = 0$, on peut remonter jusqu'à $v = 0$, absurde. Sinon, on a aussi une contradiction.

Correction de l'exercice 4959 ▲

(a)

(b) $\|P\| = N(P) + N(P') + N(P'') + \dots$ où N est une norme quelconque sur F.

Correction de l'exercice 4960 ▲

Les formes linéaires $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P(2)$ constituent une base de E_2^* donc engendrent les formes linéaires $P \mapsto P'(1)$, $P \mapsto P'(2)$ et $P \mapsto P'(3)$. Après calculs, on trouve :

$$\forall\, P \in E_2, \quad \begin{cases} 2P'(1) = & P(2) & & - & P(0) \\ 2P'(2) = & 3P(2) - & 4P(1) + & & P(0) \\ 2P'(3) = & 5P(2) - & 8P(1) + & & 3P(0). \end{cases}$$

En notant $P(0) = a$, $P(1) = b$ et $P(2) = c$ on doit donc chercher :

$$|||\varphi||| = \frac{1}{2}\sup\{|c-a| + 4|3c-4b+a| + 9|5c-8b+3a|,\ \text{tq } |a|+|b|+|c| \leqslant 1\}.$$

La fonction $f : (a,b,c) \mapsto |c-a| + 4|3c-4b+a| + 9|5c-8b+3a|$ est convexe donc son maximum sur l'*icosaèdre* $I = \{(a,b,c)$ tq $|a|+|b|+|c| \leqslant 1\}$ est atteint en l'un des sommets $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$.
Finalement, $|||\varphi||| = \frac{1}{2} f(0,1,0) = 44$.

Correction de l'exercice 4962 ▲

(a)

(b) Si $x \notin \mathrm{Ker} f$: $\forall\, y \in \mathrm{Ker} f,\ |f(x)| = |f(x-y)| \leqslant \|f\|\,\|x-y\|$ donc $|f(x)| \leqslant \|f\| d(x, \mathrm{Ker} f)$.
Soit $z \in E : z = \alpha x + y$ avec $y \in \mathrm{Ker} f$. Alors $|f(z)| = |\alpha||f(x)|$ et $\|z\| \geqslant |\alpha| d(x, \mathrm{Ker} f)$
donc $\frac{|f(z)|}{\|z\|} \leqslant \frac{|f(x)|}{d(x, \mathrm{Ker} f)}$.

Correction de l'exercice 4963 ▲

(a) $f(x_1) + f(x_2) \leqslant |||f|||\ \|x_1 + x_2\| \leqslant |||f|||\ (\|x_1 - \varepsilon\| + \|x_2 + \varepsilon\|)$.

(b) Prendre α compris entre le sup du premier membre et l'inf du troisième. Le sup et l'inf sont dans cet ordre d'après la question précédente.

(c) Rmq : φ est mal définie, il faut ajouter "φ est linéaire". On a évidemment $|||\varphi||| \geqslant |||f|||$ puisque φ prolonge f, et il reste à montrer :

$$\forall x \in F,\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ |f(x) + t\alpha| \leqslant |||f|||\ \|x + t\varepsilon\|.$$

Pour $t = 0$ c'est un fait connu. Pour $t > 0$, cela résulte de l'encadrement de α en prenant $x_1 = -x/t$ et $x_2 = x/t$. Pour $t < 0$, prendre $x_1 = x/t$ et $x_2 = -x/t$.

(d) Si $u^k = (u_n^k)_{n \in |||} \in E$ et $(u^k)_{k \in |||}$ est une suite de Cauchy, alors pour tout $n \in |||$ la suite réelle $(u_n^k)_{k \in |||}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel ℓ_n. De plus la suite $(u^k)_{k \in |||}$ est bornée dans E donc la suite ℓ ainsi mise en évidence est sommable (les sommes partielles de $\sum |\ell_n|$ sont majorées), et on montre que $\|u^k - \ell\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ par interversion de limites.

(e) Prendre $F_n = \{u \in E$ tq $u_k = 0$ si $k \geqslant n\}$.

(f) D'après la question **3)** on peut construire f_n, forme linéaire sur $F + F_n$ telle que f_{n+1} prolonge f_n et a même norme que f_n (donc $|||f_n||| = |||f|||$). Soit $G = \cup_{n \in |||}(F + F_n)$ et g la forme linéaire sur G coï ncidant avec chaque f_n sur $F + F_n$. G est dense dans E donc on peut prolonger g en $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par uniforme continuité. Il est alors clair que φ est une forme linéaire prolongeant f et a même norme que f.

Correction de l'exercice 4965 ▲

(a) Si ν est subordonnée à $\| \ \|$: on a $|\lambda| \leqslant \nu(f^p)^{1/p}$ pour toute valeur propre λ et tout $p \geqslant 1$, donc il suffit de prouver que la suite $(x_p = \nu(f^p)^{1/p})$ est convergente. Soit $\ell = \inf\{x_p,\ p \geqslant 1\}$, $\varepsilon > 0$ et $p \geqslant 1$ tel que $x_p \leqslant \ell + \varepsilon$. Pour $n > p$ on note $n-1 = pq+r$ la division euclidienne de $n-1$ par p et l'on a :
$$\nu(f^n) = \nu((f^p)^q \circ f^{r+1}) \leqslant \nu(f^p)^q \nu(f^{r+1})$$
d'où :
$$\ell \leqslant x_n \leqslant x_p^{pq/n} x_{r+1}^{(r+1)/n} \leqslant (\ell+\varepsilon)^{pq/n} \max(x_1,\dots,x_p)^{(r+1)/n}.$$
Le majorant tend vers $\ell+\varepsilon$ quand n tend vers l'infini donc pour n assez grand on a $\ell \leqslant x_n \leqslant \ell+2\varepsilon$ ce qui prouve la convergence demandée.
Dans le cas où ν est une norme quelconque sur $\mathscr{L}(E)$, il existe une norme subordonnée μ et deux réels $a,b > 0$ tels que $a\mu \leqslant \nu \leqslant b\mu$ et donc les suites $(\nu(f^p)^{1/p})$ et $(\mu(f^p)^{1/p})$ ont même limite par le théorème des gens d'armes. Remarque : il résulte de ceci que $\lim_{p\to\infty}(\nu(f^p)^{1/p})$ est indépendant de ν.

(b) Considérer la matrice de f^p dans une base propre pour f.

(c) On sait que $f^p = \sum_{\lambda\in\operatorname{spec}(f)} \lambda^p P_\lambda(p)$ où P_λ est un polynôme. D'où $\rho(f) \leqslant \nu(f^p)^{1/p} \leqslant \rho(f)+o(1)$ et donc $\nu(f^p)^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \rho(f)$ (thm du rayon spectral).

Correction de l'exercice 4966 ▲

Si $u(\mathring{B}(0,1))$ est ouvert alors il engendre $\mathbb{R}^m$ donc u est surjective.
Si u est surjective, soit $A = u(\mathring{B}(0,1))$. A est convexe, borné, symétrique par rapport à 0 et la réunion des homothétiques de A est égale à $\mathbb{R}^m$; la jauge associée à A est une norme sur $\mathbb{R}^m$ équivalente à l'une des normes usuelles donc A contient une boule de centre 0 et, par homothétie-translation, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ a une image ouverte dans $\mathbb{R}^m$.

Correction de l'exercice 4969 ▲

$E\setminus B$ est connexe par arcs et contient au moins un point $a\in A$. Soit $x\in E\setminus B$ et $\varphi : [0,1]\to E\setminus B$ un arc continu joignant a à x dans $E\setminus B$. Alors $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(A\cup B)$ est non vide, relativement ouvert et relativement fermé dans $[0,1]$, donc c'est $[0,1]$ ce qui prouve que $x\in A$.

Correction de l'exercice 4970 ▲

Le sens H est fermé $\Rightarrow$ $E\setminus H$ n'est pas connexe (par arcs) est évident. Réciproquement, si H n'est pas fermé alors $\overline{H} = E$. Soient $a,b\in E\setminus H$ et (x_n) une suite d'éléments de H telle que $x_0 = 0$ et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a-b$. On définit un arc continu $\varphi : [0,1]\to E\setminus H$ reliant a à b par : φ est affine sur $[\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1}]$, $\varphi(\frac{1}{n+1}) = b+x_n$ et $\varphi(0) = a$.

Correction de l'exercice 4971 ▲

Cas de la boule fermée. Soit $B = \{u\in E/\ \|u\|\leqslant 1\}$. Soient $(x,y)\in B^2$ et $\lambda\in[0,1]$.
$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda+1-\lambda = 1.$$
Ainsi, $\forall(x,y)\in B^2$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $\lambda x+(1-\lambda)y\in B$ et donc B est convexe.
Cas de la boule ouverte. Soit $B = \{u\in E/\ \|u\| < 1\}$. Soient $(x,y)\in B^2$ et $\lambda\in[0,1]$.
Puisque $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ et $0\leqslant\|x\| < 1$, on en déduit que $\lambda\|x\| < 1$. Comme $(1-\lambda)\|y\|\leqslant 1$ (et même < 1) et donc

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\| < 1.$$

$$\boxed{\text{La boule unité fermée (ou ouverte) de l'espace vectoriel normé } (E,\|\ \|) \text{ est un convexe de l'espace vectoriel } E.}$$

Correction de l'exercice 4972 ▲

(a) Puisque $p>0$ et $q>0$, $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{p}$ et donc $p>1$. De même, $q>1$. D'autre part, $q=\frac{p}{p-1}$.

i. L'inégalité est immédiate quand $y=0$. Soit $y>0$ fixé.
Pour $x\geqslant 0$, on pose $f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-xy$. Puisque $p>1$, la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\geqslant 0$, $f'(x)=x^{p-1}-y$. f admet donc un minimum en $x_0=y^{1/(p-1)}$ égal à

$$f\left(y^{1/(p-1)}\right)=\frac{y^{p(p-1)}}{p}+\frac{y^{p/(p-1)}}{q}-y^{1/(p-1)}y=y^{p/(p-1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)=0.$$

Finalement, f est positive sur $[0,+\infty[$ et donc

$$\boxed{\forall x\geqslant 0,\ \forall y\geqslant 0,\ xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.}$$

ii. Posons $A=\sum_{k=1}^n|a_k|^p$ et $B=\sum_{k=1}^n|b_k|^q$.
Si A (ou B) est nul, tous les a_k (ou tous les b_k) sont nuls et l'inégalité est vraie.
On suppose dorénavant que $A>0$ et $B>0$. D'après la question a),

$$\sum_{k=1}^n\frac{|a_k|}{A^{1/p}}\times\frac{|b_k|}{B^{1/q}}\leqslant\sum_{k=1}^n\left(\frac{|a_k|^p}{pA}+\frac{|b_k|^q}{qB}\right)=\frac{1}{pA}\sum_{k=1}^n|a_k|^p+\frac{1}{qB}\sum_{k=1}^n|b_k|^q=\frac{1}{pA}\times A+\frac{1}{qB}\times B=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

et donc $\sum_{k=1}^n|a_k||b_k|\leqslant A^{1/p}B^{1/q}=\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\right)^{1/q}$. Comme $|\sum_{k=1}^n a_kb_k|\leqslant\sum_{k=1}^n|a_k||b_k|$, on a montré que

$$\boxed{\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \sum_{k=1}^n|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\right)^{1/q}\text{ (Inégalité de HÖLDER).}}$$

Remarque. Quand $p=q=2$, on a bien $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et l'inégalité de HÖLDER s'écrit

$$\sum_{k=1}^n|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^2\right)^{1/2}\text{ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).}$$

iii. Soit $((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2$. D'après l'inégalité de HÖLDER, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^p&=\sum_{k=1}^n|a_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}+\sum_{k=1}^n|b_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}\\&\Leftrightarrow\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\&=\left(\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

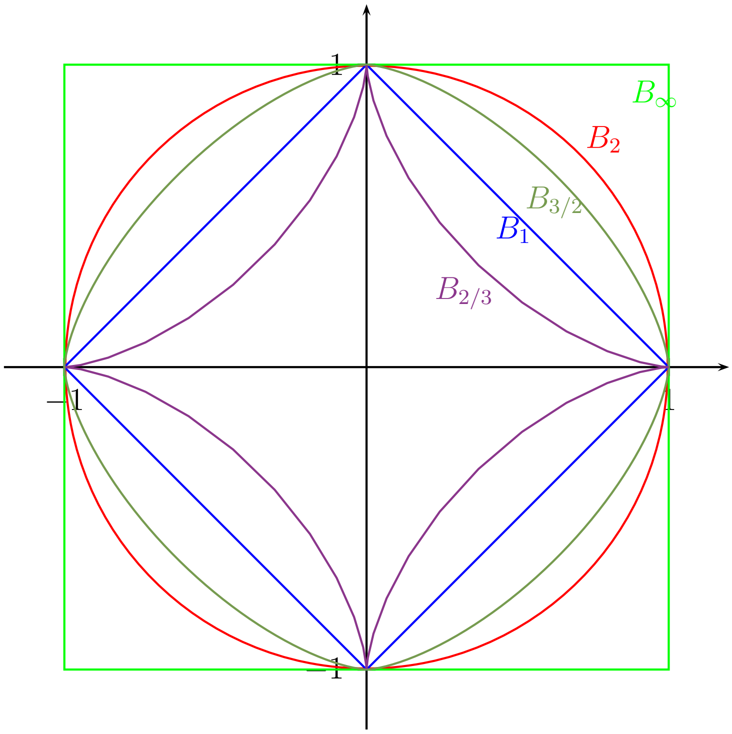
Si $\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^p=0$, tous les a_k et les b_k sont nuls et l'inégalité est claire.
Sinon $\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^p>0$ et après simplification des deux membres de l'inégalité précédente par le réel strictement positif $\sum k=1^n(|a_k|+|b_k|)^p$, on obtient $\left(\sum_{k=1}^n|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^p\right)^{1/p}$

$$\boxed{\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ (\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p)^{1/p} \leqslant (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^n |b_k|^p)^{1/p} \text{ (Inégalité de Min}}$$

(b) i. On sait déjà que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha > 1$.
(1) N_α est bien une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$.
(2) Soit $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ |x_k| = 0 \Rightarrow x = 0$.
(3) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(\lambda x) = (\sum_{k=1}^n |\lambda x_k|^\alpha)^{1/\alpha} = (|\lambda|^\alpha)^{1/\alpha} N_\alpha(x) = |\lambda| N_\alpha(x)$.
(4) L'inégalité triangulaire est l'inégalité de MINKOWSKI.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^n,\ N_\alpha \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^n.}$$

ii. Quelques « boules unités » dans $\mathbb{R}^2$.



Remarque. Toute boule unité est symétrique par rapport à O puisque $\forall x \in E$, $N(x) = N(-x)$ et donc

$$\forall x \in E,\ N(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow N(-x) \leqslant 1.$$

iii. Soient $\alpha > 0$ et $x \in E$. On a

$$N_\infty(x) \leqslant N_\alpha(x) \leqslant n^{1/\alpha} N_\infty(x),$$

et le théorème des gendarmes fournit $\lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x).}$$

iv. Soient $\alpha \in]0,1[$ puis $B = \{x \in \mathbb{R}^n /\ N_\alpha(x) \leqslant 1\}$. Les vecteurs $x = (1,0,0,\dots,0)$ et $y = (0,1,0,\dots,0)$ sont des éléments de B. Le milieu du segment $[xy]$ est $z = \frac{1}{2}(1,1,0,\dots,0)$.

$$N_\alpha(z) = \tfrac{1}{2}(1^\alpha + 1^\alpha)^{1/\alpha} = 2^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1 \text{ car } \tfrac{1}{\alpha} - 1 > 0$$

et donc $z \notin B$. Ainsi, B n'est pas convexe et donc N_α n'est pas une norme d'après l'exercice 4971.
On peut remarquer que pour $n = 1$, les N_α coïncident toutes avec la valeur absolue.

Correction de l'exercice 4973 ▲

• Il est connu que N est une norme sur E.

• Montrons que N' est une norme sur E.

(1) N' est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ car pour f dans E, f' est continue sur le segment $[0,1]$ et donc f' est intégrable

sur le segment $[0,1]$.

(2) Soit $f \in E$. Si $N'(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Par suite, f est un

polynôme de degré inférieur ou égal à 0 tel que $f(0) = 0$ et on en déduit que $f = 0$.

(3) $\forall f \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|\, dt = |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt\right) = |\lambda| N'(f)$.

(4) Soit $(f,g) \in E^2$.

$$N'(f+g) \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt + \int_0^1 |g'(t)| dt = N'(f) + N'(g).$$

Donc N' est une norme sur E.

• Montrons que N'' est une norme sur E. On note que $\forall f \in E$, $N''(f) = |f(0)| + N'(f')$ et tout est immédiat.

$$\boxed{N, N' \text{ et } N'' \text{ sont des normes sur } E.}$$

• Soit $f \in E$ et $t \in [0,1]$. Puisque la fonction f' est continue sur $[0,1]$

$$|f(t)| = |f(0) + \int_0^t f'(u)\, du| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| du \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)|\, du = N'(f),$$

et donc $N(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 N'(f)\, dt = N'(f)$.

Ensuite en appliquant le résultat précédent à f', on obtient

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leqslant |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

Finalement

$$\boxed{\forall f \in E, N(f) \leqslant N'(f) \leqslant N''(f).}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$.

$N(f_n) = \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E,N).

Par contre, pour $n \geqslant 1$, $N'(f_n) = n \int_0^1 t^{n-1}\, dt = 1$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E,N'). On en déduit que

$$\boxed{\text{les normes } N \text{ et } N' \text{ ne sont pas des normes équivalentes.}}$$

De même en utilisant $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$, on montre que les normes N' et N'' ne sont pas équivalentes.

Correction de l'exercice 4974 ▲

(a) Soit $x \in E$. $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $d_A(x)$.

(b) i. Soit A une partie fermée et non vide de E. Soit $x \in E$.

• Supposons que $x \in A$. Alors $0 \leqslant f(x) = \mathrm{Inf}\{\|x-a\|,\ a \in A\} \leqslant \|x-x\| = 0$ et donc $d_A(x) = 0$.

• Supposons que $d_A(x) = 0$. Par définition d'une borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A / \|x - a_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Soit V un voisinage de x. V contient une boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ puis d'après ce qui précède, V contient un élément de A. Finalement, $\forall V \in \mathscr{V}(x)$, $V \cap A \neq \varnothing$ et donc $x \in \overline{A} = A$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est fermée, } \forall x \in E,\ (d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A).}$$

ii. Posons $d = d_A(x)$. Pour chaque entier naturel n, il existe $a_n \in A$ tel que $d \leqslant \|x - a_n\| \leqslant d + \frac{1}{n}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|a_n\| \leqslant \|a_n - x\| + \|x\| \leqslant d + \frac{1}{n} + \|x\| \leqslant d + \|x\| + 1$. Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut extraire de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ convergeant vers un certain élément a de E. Ensuite, puisque A est fermée, on en déduit que $a \in A$. Puis, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d \leqslant \|x - a_{\varphi(n)}\| \leqslant d + \frac{1}{\varphi(n)},$$

et puisque $\varphi(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$, on obtient quand n tend vers l'infini, $d = \lim_{n\to+\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\|$. Maintenant on sait que l'application $y \mapsto \|y\|$ est continue sur l'espace normé $(E, \|\ \|)$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|x - a_{\varphi(n)}\right\| = \left\|x - \lim_{n\to+\infty} a_{\varphi(n)}\right\| = \|x - a\|.$$

On a montré qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.

(c) Soit $x \in E$.

Puisque $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}}(x)$ est un minorant de $\{\|x - a\|,\ a \in A\}$. Comme $d_A(x)$ est le plus grand des minorants de $\{\|x - a\|,\ a \in A\}$, on a donc $d_{\overline{A}}(x) \leqslant d_A(x)$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in \overline{A}$ tel que $\|x - y\| < d(x, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$ et puis il existe $a \in A$ tel que $\||y - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que

$$d_A(x) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\| < d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $d_A(x) < d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$. Quand ε tend vers 0, on obtient $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$.

Finalement

$$\boxed{\forall x \in E,\ d_A(x) = d_{\overline{A}}(x).}$$

(d) Montrons que l'application d_A est Lipschitzienne. Soit $(x, y) \in E^2$

Soit $a \in A$. $d_A(x) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\|$. Donc, $\forall a \in A$, $d_A(x) - \|x - y\| \leqslant \|y - a\|$ ou encore $d_A(x) - \|x - y\|$ est un minorant de $\{\|y - a\|,\ a \in A\}$. Puisque $d_A(y)$ est le plus grand des minorants de $\{\|y - a\|,\ a \in A\}$, on a donc $d_A(x) - \|x - y\| \leqslant d_A(y)$.

En résumé, $\forall (x, y) \in E^2$, $d_A(x) - d_A(y) \leqslant \|x - y\|$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient $\forall (x, y) \in E^2$, $d_A(y) - d_A(x) \leqslant \|x - y\|$ et finalement

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \|x - y\|.$$

Ainsi l'application $\begin{array}{rccc} d_A : & (E, \|\ \|) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ & x & \mapsto & d_A(x) \end{array}$ est 1-Lipschitzienne et en particulier d_A est continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$.

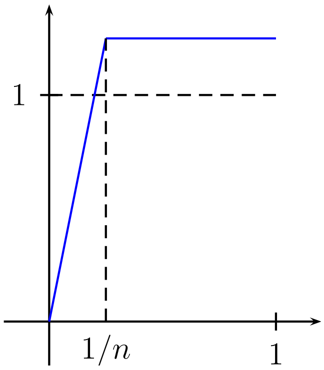
(e) Soient A et B deux parties fermées et non vides de E telles que $d_A = d_B$.

Soit $a \in A$. $d_B(a) = d_A(a) = 0$ (d'après 2)) et donc $a \in B$ (d'après 2)). Ainsi $A \subset B$ puis, par symétrie des rôles, $B \subset A$ et finalement $A = B$.

(f) (A n'est pas un sous espace vectoriel de E.)

Soit $f \in A$. $1 \leqslant \int_0^1 f(t)\, dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant \|f\|_\infty$. Ainsi, $\forall f \in A$, $\|f\|_\infty \geqslant 1$ et donc $d_A(0) \geqslant 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \left\{\begin{array}{l} (n+1)x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 + \frac{1}{n}\ x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{array}\right.$.



Pour chaque entier naturel non nul n, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n^2} \geqslant 1.$$

Donc, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de A. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_A(0) \leqslant \|f_n\|_\infty = 1+\frac{1}{n}$.
En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant d_A(0) \leqslant 1+\frac{1}{n}$ et finalement

$$\boxed{d_A(0) = 1.}$$

Remarque. A est fermée mais la distance à A n'est malgré tout pas atteinte. En effet

• Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A convergeant dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_\infty)$ vers un certain élément f de E. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et donc d'une part, $f(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ et d'autre part $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \geqslant 1$. Donc $f \in A$ et on a montré que A est fermée.

• Supposons qu'il existe $f \in A$ telle que $\|f\|_\infty = 1$. Alors l'encadrement $1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \|f\|_\infty = 1$ fournit $\int_0^1 f(x)\,dx = \|f\|_\infty = 1$ puis $\int_0^1 (\|f\|_\infty - f(x))\,dx = 0$ et donc $\|f\|_\infty - f = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) ou encore $f = 1$ ce qui contredit $f(0) = 0$. On ne peut donc pas trouver $f \in A$ tel que $d_A(0) = d(0,f)$.

Correction de l'exercice 4975 ▲

Soient F_1, F_2 fermés non vides disjoints tels que $F_1 \cup F_2 = A$: Alors $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(F_1) \cup \mathrm{Fr}(F_2)$.

Correction de l'exercice 4977 ▲

Soient F_1, F_2 fermés non vides disjoints tels que $F_1 \cup F_2 = \{\text{va de } u_n\}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(F_1,F_2) > \varepsilon$. Alors, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans un seul des F_i.

Correction de l'exercice 4982 ▲

Soit $r = \lim r_n$: $\|a_n - a_{n+k}\| \leqslant r_n - r_{n+k}$ donc la suite (a_n) est de Cauchy, et converge vers a.
On a $\|a_n - a\| \leqslant r_n - r$ donc $B(a,r) \subset B_n$.
Réciproquement, si $x \in \bigcap_n B_n$, alors $\|x - a_n\| \leqslant r_n$ donc $\|x - a\| \leqslant r$.

Correction de l'exercice 4984 ▲

Soit $a \in \mathring{F}$ et $B(a,r) \subset \bigcup_n F_n$: $B \setminus F_1$ est un ouvert non vide donc contient une boule $B_1(a_1,r_1)$. De même, $B_1 \setminus F_2$ contient une boule $B_2(a_2,r_2)$ etc. On peut imposer $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc il existe $c \in \bigcap_n B_n$, c.a.d. $c \in B$ mais pour tout n, $c \notin F_n$. Contradiction.

Correction de l'exercice 4985 ▲

Soit (a_n) définie par $a_{n+1} = f(a_n)$: les sous-suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers le point fixe de $f \circ f$.

Correction de l'exercice 4986 ▲

Supposons qu'il existe une famille $(\mathscr{C}_i = \mathscr{C}(a_i, R_i))_{i \in I}$ de cercles disjoints dont la réunion est égale au plan P. On note D_i le disque fermé de frontière $\mathscr{C}_i$. Soit $i_0 \in I$ choisi arbitrairement, i_1 tel que $a_{i_0} \in \mathscr{C}_{i_1}$, i_2 tel que $a_{i_1} \in \mathscr{C}_{i_2}$ etc. On a $R_{i_k} < \frac{1}{2} R_{i_{k-1}}$ donc la suite (D_{i_k}) vérifie le théorème des fermés emboités, l'intersection des D_{i_k} est réduite à un point x par lequel ne passe aucun cercle $\mathscr{C}_j$.

Correction de l'exercice 4987 ▲

(a)

(b) demi-cercle unité $\Rightarrow x = 0$, $y = \frac{2}{\pi}$.

(c) Sommes de Riemann + l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

(d) $\vec{N}'(t) = \vec{\sigma}(\vec{M}'(t)) \Rightarrow \|\vec{N}'(t)\| = \|\vec{M}'(t))\|$.
$\int_{t=a}^{b} G\vec{N}_t \|\vec{N}'(t)\| \, dt = \vec{0} = \int_{t=a}^{b} \sigma(\vec{G}) N_t \|\vec{M}'(t)\| \, dt$, donc $\sigma(G) = G$.

(e)

Correction de l'exercice 4988 ▲

(a)

(b)

(c) $\vec{e}_i{}'' = \vec{\Omega}' \wedge \vec{e}_i + (\vec{\Omega} | \vec{e}_i)\vec{\Omega} - \|\vec{\Omega}\|^2 \vec{e}_i$.

Correction de l'exercice 4991 ▲

(a) Non : $f(t) = (t, t^2)$, $g(t) = (1, t)$.

(b) Non : $f(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)$, $g(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 4993 ▲

(a) • Soit $P \in E$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n$, $a_k = 0$. Donc $\|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right|, \, k \in \mathbb{N}\right\} = \text{Max}\{|a_k|, \, 0 \leqslant k \leqslant n\}$ existe dans $\mathbb{R}$.

• $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty \geqslant 0$.

• Soit $P \in E$. $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \leqslant 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0 \Rightarrow P = 0$.

• Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\|_\infty = \text{Max}\{|\lambda a_k|, \, 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \text{Max}\{|a_k|, \, 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \|P\|_\infty$.

• Soient $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \geqslant 0} b_k X^k$ deux polynômes. Pour $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ et donc $\|P + Q\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$.

$$\boxed{\| \; \|_\infty \text{ est une norme sur } E.}$$

(b) $\forall P \in E$, $\|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$ et donc $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty} = 1$. On en déduit que $\text{Sup}\left\{\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty}, \, P \in E \setminus \{0\}\right\} = 1$. Ceci montre tout à la fois que f est continue sur $(E, \| \; \|_\infty)$ et $|||f||| = 1$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } (E, \| \; \|_\infty) \text{ et } |||f||| = 1.}$$

Correction de l'exercice 4994 ▲

(La linéarité de Δ est claire et de plus Δ est un endomorphisme de E car si u est une suite bornée, $\Delta(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\Delta(u)_n| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|\Delta(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

Ceci montre que Δ est continu sur E et $|||\Delta||| \leqslant 2$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$. En résumé,

• $\forall u \in E \setminus \{0\},\ \frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 2$,

• $\exists u \in E \setminus \{0\},\ \frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 2$.

On en déduit que

$$\boxed{\Delta \text{ est continu sur } (E, \|\ \|_\infty) \text{ et } |||\Delta||| = 2.}$$

(La linéarité de C est claire et C est un endomorphisme de E car si u est bornée, $C(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |(C(u))_n| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|C(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Par suite T est continue sur E et $|||T||| \leqslant 1$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|C(u)\|_\infty = 1$. En résumé,

• $\forall u \in E \setminus \{0\},\ \frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 1$,

• $\exists u \in E \setminus \{0\},\ \frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 1$.

On en déduit que

$$\boxed{C \text{ est continu sur } (E, \|\ \|_\infty) \text{ et } |||C||| = 1.}$$

Correction de l'exercice 4995 ▲

(a) Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}\|Tf\|_1 = \int_0^1 |Tf(x)|\,dx &= \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \|f\|_1\,dx = \|f\|_1.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\forall f \in E \setminus \{0\},\ \frac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1} \leqslant 1$. Ceci montre que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$ et que $|||T||| \leqslant 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = (1-x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-x)^n\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour $x \in [0,1]$, $Tf_n(x) = \int_0^x (1-t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}(1-(1-x)^{n+1})$ et donc

$$\|Tf_n\|_1 = \int_0^1 |Tf_n(x)|\,dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-(1-x)^{n+1})\,dx = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ |||T||| \geqslant \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2}$.

En résumé, $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leqslant |||T||| \leqslant 1$ et donc $|||T||| = 1$.

$$\boxed{T \text{ est continu sur } (E, \| \ \|_1) \text{ et } |||T||| = 1.}$$

(b) Supposons qu'il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 1) est une égalité et en particulier $\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx$ ou encore $\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = 0$. Par suite, $\forall x \in [0,1]$, $\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| = 0$ et finalement $f = 0$. Ceci est une contradiction et donc $|||T|||$ n'est pas atteinte.

Correction de l'exercice 4996 ▲

L'application f est linéaire de (E,N) dans $(\mathbb{R}, |\ |)$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$.

$$\begin{aligned}
|f(A)| = |\mathrm{Tr}(A)| &\leqslant \sum_{i=1}^n |a_{i,i}| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right) \leqslant \sum_{i=1}^n N(A) = nN(A).
\end{aligned}$$

Ceci montre déjà que f est continue sur (E,N) et que $|||f||| \leqslant n$. De plus, si $A = I_n \neq 0$, $\frac{|f(A)|}{N(A)} = \frac{n}{1} = n$. Donc

$$\boxed{f \text{ est continue sur } (E,N) \text{ et } |||f||| = n.}$$

Correction de l'exercice 4997 ▲

• $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \mathrm{Max}\{|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$.

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Posons $AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$.
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$|c_{i,j}| \leqslant \textstyle\sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n\|A\|_\infty \|B\|_\infty,$$

et donc, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Ainsi, $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty} \leqslant n$.
De plus, pour $A_0 = B_0 = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$, $\|A_0\|_\infty = \|B_0\|_\infty = 1$ puis $\|A_0B_0\|_\infty = \|nA_0\|_\infty = n$ et donc $\frac{\|A_0B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty\|B_0\|_\infty} = n$. Ceci montre que

$$\boxed{\mathrm{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\} = n.}$$

En particulier, $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme sous-multiplicative.
• $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
\|AB\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |c_{i,j}| &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right| \\
&\leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}|\right) = \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \\
&\sum_{1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n} |a_{i,j}||b_{k,l}| = \|A\|_1\|B\|_1.
\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1} \leqslant 1$.
De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0B_= E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0B_0\|_1}{\|A_0\|_1\|B_0\|_1} = 1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=1.}$$

En particulier, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.

• $\forall A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2=\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}^2}$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\|AB\|_2^2&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}c_{i,j}^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2\\&\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\ \text{(inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)}\\&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2\right)=\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}a_{i,k}^2b_{l,j}^2=\left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n}a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n}b_{l,j}^2\right)=\|A\|_2\|B\|_2\end{aligned}$$

Donc $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2}\leqslant 1$.

De plus, pour $A_0=B_0=E_{1,1}$, on a $A_0B_=E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0B_0\|_2}{\|A_0\|_2\|B_0\|_2}=1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=1}$$

En particulier, $\|\ \|_2$ est une norme sous-multiplicative.

Correction de l'exercice 4998 ▲

Une « norme trois barres » sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nécessairement sous-multiplicative. L'exercice précédent montre qu'il existe des normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas sous-multiplicatives (par exemple $\|\ \|_\infty$). Donc une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement une « norme trois barres ».

Correction de l'exercice 4999 ▲

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'exercice 4997, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.
Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, N et $\|\ \|_1$ sont des normes équivalentes.
Par suite, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha\|\ \|_1\leqslant N\leqslant\beta\|\ \|_1$.
Pour $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N(AB)\leqslant\beta\|AB\|_1\leqslant\beta\|A\|_1\|B\|_1\leqslant\frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$$

et le réel $k=\frac{\beta}{\alpha^2}$ est un réel strictement positif tel que $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB)\leqslant kN(A)N(B)$.

Remarque. Le résultat précédent signifie que $N'=\frac{1}{K}N$ est une norme sous-multiplicative car pour $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N'(AB)=\frac{1}{k^2}N(AB)\leqslant\frac{1}{k^2}N(A)N(B)=\frac{1}{k}N(A)\frac{1}{k}N(B)=N'(A)N'(B).$$

Correction de l'exercice 5000 ▲

Non, car si $A=E_{1,1}\neq 0$ et $B=E_{2,2}\neq 0$ alors $AB=0$ puis $N(AB)<N(A)N(B)$.

Correction de l'exercice 5001 ▲

• Pour $\|\ \|_1$. Soient $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j|\right) = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right) \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\} = \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\times\|X\|_1,\end{aligned}$$

en notant $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de la matrice A. Donc, $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1\leqslant \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$. Soit alors $j_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\|C_{j_0}\|_1=\mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$. On note X_0 le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la j_0-ème qui est égale à 1. X_0 est un vecteur non nul tel que

$$\|AX_0\|_1=\textstyle\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j_0}|=\mathrm{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}\times\|X_0\|_1.$$

En résumé,
(1) $\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}\leqslant \mathrm{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$,
(2) $\exists X_0\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1}=\mathrm{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$.
On en déduit que $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1=\mathrm{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$.
• Pour $\|\ \|_\infty$. Soient $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}|(AX)_i| &= \left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\|X\|_\infty \\ &\leqslant \mathrm{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}\|X\|_\infty=\mathrm{Max}\{\|L_k\|_1,\ 1\leqslant k\leqslant n\}\times\|X\|_\infty,\end{aligned}$$

en notant $L_1,\ldots,L_n$ les lignes de la matrice A. Donc, $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty\leqslant\mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$. Soit alors $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\|L_{i_0}\|_1=\mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$. On pose $X_0=(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $\forall j\in[\![1,n]\!]$, ε_j est un élément de $\{-1,1\}$ tel que $a_{i_0,j}=\varepsilon_j|a_{i_0,j}|$ (par exemple, $\varepsilon_j=\frac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j}\neq0$ et $\varepsilon_j=1$ si $a_{i_0,j}=1$).

$$\begin{aligned}\|AX_0\|_\infty &= \mathrm{Max}\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\varepsilon_j\right|,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\} \\ &\geqslant\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i_0,j}\varepsilon_j\right|=\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|=\|L_{i_0}\|_1=\mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}\times\|X_0\|_\infty.\end{aligned}$$

En résumé,
(1) $\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}\leqslant\mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$,
(2) $\exists X_0\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty}\geqslant\mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$.
On en déduit que $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty=\mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.
Ainsi, en notant $C_1,\ldots,C_n$ et $L_1,\ldots,L_n$ respectivement les colonnes et les lignes d'une matrice A,

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_1=\mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\text{ et }|||A|||_\infty=\mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}.}$$

Correction de l'exercice 5002 ▲

Soit $D=\mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2} \leqslant \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = \rho(D)\|X\|_2,$$

De plus, si λ est une valeur propre de D telle que $|\lambda| = \rho(D)$ et X_0 est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda|\|X_0\|_2 = \rho(D)\|X_0\|_2.$$

En résumé
(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \rho(D)$,
(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D)$.
On en déduit que $\forall D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$, $|||D|||_2 = \rho(D)$.
Soit alors $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PD^tP$. De plus $\rho(A) = \rho(D)$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|AX\|_2 &= \|PD^tPX\|_2 \\ &= \|D(^tPX)\|_2 \text{ (car } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PY\|_2 = \|Y\|_2) \\ &= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X' = {}^tPX.\end{aligned}$$

Maintenant l'application $X \mapsto {}^tPX = X'$ est une permutation de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car la matrice ${}^tP$ est inversible et donc X décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si X' décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout vecteur colonne X, $\|X'\|_2 = \|{}^tPX\|_2 = \|X\|_2$. On en déduit que $\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \left\{\frac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2},\ X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ et en particulier,

$$|||A|||_2 = |||D|||_2 = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_2 = \mathrm{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(A).}$$

Remarque. L'application $A \mapsto \rho(A)$ est donc une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et de plus cette norme est sous-multiplicative.

Correction de l'exercice 5012 ▲

(a) Soit $d : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$. On sait que l'application d est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de n'importe quelle norme) et que $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant que réunion de deux intervalles ouverts. Par suite, $GL_n(\mathbb{R}) = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynômedet$(A - xI)$ n'a qu'un nombre fini de racines (éventuellement nul) donc pour p entier naturel supérieur ou égal à un certain p_0, $\det\left(A - \frac{1}{p}I\right) \neq 0$. La suite $\left(A - \frac{1}{p}I\right)_{p\geqslant p_0}$ est une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ convergente de limite A. Ceci montre que l'adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ est $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou encore $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(b) $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant que complémentaire d'un ouvert.
Soit $n \geqslant 2$. Les matrices $A_p = pE_{1,1}$, $p \in \mathbb{N}$, sont non inversibles et la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est non bornée. Par suite $Mn(R) \setminus GLn(R)$ est non borné et donc non compact.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé mais non compact.}}$$

(c) • Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé. Posons $g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & (M,{}^tM)\end{array}$, $h :\ \begin{array}{ccc}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M,N) & \mapsto & MN\end{array}$ p

$f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(R) \\ M & \mapsto & M^tM\end{array}$.

g est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie. h est continue sur $(M_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que $f = h\circ g$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

• Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est borné. $\forall A\in O_n(\mathbb{R})$, $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}|\leqslant 1$ et donc $\forall A\in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$.

D'après le théorème de BOREL-Lebesgue, puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$O_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe. En effet, les deux matrices I_n et $-I_n$ sont orthogonales mais le milieu du segment joignant ces deux matrices est 0 qui n'est pas une matrice orthogonale.

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est compact mais non convexe.}}$$

(d) $S_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{S_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé.}}$$

(e) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et p un élément fixé de $[\![1,n-1]\!]$ (le résultat est clair si $p=0$ ou $p=n$).

A est de rang inférieur ou égal à p si et seulement si tous ses mineurs de format $p+1$ sont nuls (hors programme).

Soient I et J deux sous-ensembles donnés de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $p+1$ et $A_{I,J}$ la matrice extraite de A de format $p+1$ dont les numéros de lignes sont dans I et les numéros de colonnes sont dans J.

Pour I et J donnés, l'application $A\mapsto A_{I,J}$ est continue car linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$. Par suite, l'application

$f_{I,J}\ :\ A\mapsto \det(A_{I,J})$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices A telles que $\det(A_{I,J}) = 0$ est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f_{I,J}$) et l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés.

(f) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On sait que toute matrice est triangulable dans $\mathbb{C}$ et donc il existe $P\in GL_n(\mathbb{C})$ et $T\in\mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ avec $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $t_{i,i}=\lambda_i$ telle que $A = PTP^{-1}$.

On munit dorénavant $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme multiplicative notée $\|\ \|$. Puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe un réel strictement positif K telle que pour toute matrice M, $\|M\|\leqslant K\|M\|_\infty$.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe un n-uplet de réels $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ tels que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $0\leqslant \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}$ et les $\lambda_k+\varepsilon_k$ sont deux à deux distincts. (On prend $\varepsilon_1 = 0$ puis ε_2 dans $\left[0,\frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tel que $\lambda_2+\varepsilon_2\neq \lambda_1+\varepsilon_1$ ce qui est possible puisque $\left[0,\frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ est infini puis ε_3 dans $\left[0,\frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tel que $\lambda_3+\varepsilon_3$ soit différent de $\lambda_1+\varepsilon_1$ et $\lambda_2+\varepsilon_2$ ce qui est possible puisque $\left[0,\frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ est infini ...)

On pose $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ puis $T' = T+D$ et enfin $A' = PT'P^{-1}$. Tout d'abord les valeurs propres de A' sont deux à deux distinctes (ce sont les $\lambda_i+\varepsilon_i$, $1\leqslant i\leqslant n$) et donc A' est diagonalisable. Ensuite

$$\|A'-A\| = \|PDP^{-1}\|\leqslant \|P\|\|D\|\|P^{-1}\|\leqslant K\|P\|\|P^{-1}\|\|D\|_\infty < \varepsilon.$$

En résumé, $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists A'\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})/\ \|A'-A\|<\varepsilon$ et A' diagonalisable. On a montré que

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices complexes diagonalisables dans } \mathbb{C} \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$

On ne peut remplacer $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\chi_{A+E} = \begin{vmatrix} a-X & c-1 \\ b+1 & d-X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) + (b-c) + 1.$$

Le discriminant de χ_{A+E} est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4$. Supposons de plus que $\|E\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$. Alors

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4 \leqslant \frac{1}{4} + 4\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) - 4 = -\frac{5}{4} < 0.$$

Par suite, aucune des matrices $A+E$ avec $\|E\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$ n'a de valeurs propres réelles et donc aucun donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On a montré que l'ensemble des matrices réelles diagonalisables dans $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(g) La matrice de la forme quadratique $Q : (x,y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$ dans la base canonique est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de cette matrice sont strictement positives si et seulement si $a+c > 0$ et $ac - b^2 > 0$. L'application $(a,b,c) \mapsto a+c$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ car linéaire sur $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie et l'application $(a,b,c) \mapsto ac - b^2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que polynôme.

L'ensemble des triplets considéré est l'intersection des images réciproques par ces applications de l'ouvert $]0,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ et est donc un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

(h) Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est borné. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et donc $\|A\|_\infty \leqslant 1$. Ainsi, $\forall A/in\mathscr{S}$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$ et donc $\mathscr{S}$ est borné.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est fermé.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. L' application $f_{i,j} : A \mapsto a_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. $[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire $]-\infty,0[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par suite, $\left\{A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n} / \ a_{i,j} \geqslant 0\right\} = f_{i,j}^{-1}([0,+\infty[)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. L' application $g_i : A \mapsto \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. Le singleton $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Par suite, $\left\{A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n} / \ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1\right\} = g_i^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

$\mathscr{S}$ est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

En résumé, $\mathscr{S}$ est un fermé borné de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie et donc $\mathscr{S}$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est convexe. Soient $(A,B) \in (\mathscr{S})^2$ et $\lambda \in [0,1]$. D'une part, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geqslant 0$ et d'autre part, pour $i \in [\![1,n]\!]$

$$\sum_{j=1}^n ((1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = (1-\lambda)\sum_{j=1}^n a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^n b_{i,j} = (1-\lambda) + \lambda = 1,$$

ce qui montre que $(1-\lambda)A + \lambda B \in \mathscr{S}$. On a montré que $\forall (A,B) \in \mathscr{S}^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)A + \lambda B \in \mathscr{S}$ et donc $\mathscr{S}$ est convexe.

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices stochastiques est un compact convexe de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(i) Soient A et B deux matrices réelles diagonalisables. Soient $\gamma_1 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & (1-t).A + t.0 = (1-t)A \end{array}$ et

$\gamma_2 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & tB \end{array}$. Soit enfin $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(2t) \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-1) \text{ si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array} \right. \end{array}$.

γ_1 est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice nulle et γ_2 est un chemin continu joignant la matrice nulle à la matrice B. Donc γ est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice B. De plus, pour tout réel $t \in [0,1]$, la matrice $\gamma_1(t) = (1-t)A$ est diagonalisable (par exemple, si $A = P\mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$ alors $(1-t)A = P\mathrm{diag}((1-t)\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1})$ et de même, pour tout réel $t \in [0,1]$, la matrice $\gamma_2(t) = tB$ est diagonalisable. Finalement γ est un chemin continu joignant les deux matrices A et B diagonalisables dans $\mathbb{R}$, contenu dans l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$. On a montré que

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices diagonalisables dans } \mathbb{R} \text{ est connexe par arcs.}}$$

Correction de l'exercice 5013 ▲

(a) i. Un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}$ dont les coordonnées sont $(x_B - x_A, y_B - y_A) = (-3,1)$. Pour n'importe quel vecteur directeur $\vec{v} = (x_v, y_v)$ la pente est le réel $p = \frac{y_v}{x_v}$. La pente est indépendante du choix du vecteur directeur. On trouve ici $p = -\frac{1}{3}$. Une équation paramétrique de la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ passant par $A = (x_A, y_A)$ est donnée par $\begin{cases} x = x_v t + x_A \\ y = y_v t + y_A \end{cases}$. Donc ici pour le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ on trouve l'équation paramétrique $\begin{cases} x = -3t+2 \\ y = t+3 \end{cases}$

Il y a plusieurs façons d'obtenir une équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Première méthode. On sait que $A = (x_A, y_A)$ appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation $ax_A + by_A + c = 0$, idem avec B. On en déduit le système $\begin{cases} 2a+3b+c=0 \\ -a+4b+c=0 \end{cases}$. Les solutions s'obtiennent à une constante multiplicative près, on peut fixer $a=1$ et on trouve alors $b=3$ et $c=-11$. L'équation est donc $x+3y-11=0$.

ii. On trouve $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (5,-3)$, $p = -\frac{3}{5}$ et $\begin{cases} x = 5t-7 \\ y = -3t-2 \end{cases}$

Deuxième méthode. Pour trouver l'équation cartésienne on part de l'équation paramétrique réécrite ainsi $\begin{cases} \frac{x+7}{5} = t \\ -\frac{y+2}{3} = t \end{cases}$ On en déduit $\frac{x+7}{5} = -\frac{y+2}{3}$; d'où l'équation $3x+5y+31=0$.

iii. On trouve $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0,3)$, la droite est donc verticale (sa pente est infinie) une équation paramétrique est $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3t+6 \end{cases}$. Une équation cartésienne est simplement $(x=3)$.

(b) i. Equation paramétrique $\begin{cases} x = -3t+2 \\ y = -t+1 \end{cases}$

Troisième méthode. Pour une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, on sait que $\vec{n} = (a,b)$ est un vecteur normal à la droite et donc $\vec{v} = (-b,a)$ est un vecteur directeur (car alors $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$). Réciproquement si $\vec{v} = (-b,a)$ est un vecteur directeur alors une équation est de la forme $ax+by+c=0$ pour une certaine constante c à déterminer.

Ici on nous donne le vecteur directeur $\vec{v} = (-3,-1)$ donc on cherche une équation sous la forme $-x+3y+c=0$. Pour trouver c, on utilise que A appartient à la droite donc $-x_A+3y_A+c=0$, ce qui conduit à $c=-1$. Ainsi une équation de la droite est $-x+3y=1$.

ii. On trouve $2x-y+1=0$.

iii. Droite horizontale d'équation $(y=1)$.

(c) Voici juste les résultats :

i. $y = 3x+4$,

ii. $y = -3$,

iii. $8x+4y=4$ (les droites parallèles à $8x+4y=3$ sont de la forme $8x+4y=c$).

Correction de l'exercice 5017 ▲

(a) Le point A est l'intersection des droites (AB) et (AC). Les coordonnées (x,y) de A sont donc solutions du système : $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ donné par les équations des deux droites. La seule solution est $(x,y)=(1,1)$. On a donc $A=(1,1)$. On fait de même pour obtenir le point $B=(-1,2)$ et $C=(2,0)$.

(b) Notons A' le milieu de $[BC]$ alors les coordonnées se trouvent par la formule suivante $A'=(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2})=(\frac{1}{2},1)$. De même on trouve $B'=(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ et $C'=(0,\frac{3}{2})$.

(c) i. Les médianes ont pour équations : $(AA'):(y=1)$; $(BB'):(3x+5y=7)$; $(CC'):(3x+4y=6)$.

ii. Vérifions que les trois médianes sont concourantes (ce qui est vrai quelque soit le triangle). On calcule d'abord l'intersection $I=(AA')\cap(BB')$, les coordonnées du point I d'intersection vérifient donc le système $\begin{cases} y=1 \\ 3x+5y=7 \end{cases}$. On trouve $I=(\frac{2}{3},1)$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que I appartient à la droite (CC') d'équation $3x+4y=6$. En effet $3x_I+4y_I=6$ donc $I\in(CC')$.

Conclusion : les médianes sont concourantes au point $I=(\frac{2}{3},1)$.

Correction de l'exercice 5057 ▲

Soit $z\mapsto \alpha z+\beta$ la représentation en coordonnée complexe de la similitude directe envoyant A sur C et B sur D. On a donc

$$\begin{cases} \alpha a+\beta &= c \\ \alpha b+\beta &= d \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha=\frac{c-d}{a-b}$ et $\beta=\frac{ad-bc}{a-b}$. D'après la condition fixée par l'énoncé, on a $\alpha\neq 1$ donc cette similitude admet un unique point fixe Ω d'affixe

$$\omega=\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{ad-bc}{a-b-c+d}.$$

On remarque que l'expression de ω est inchangée en permutant b et c. Cela signifie qu'en faisant les mêmes calculs pour déterminer la représentation complexe de la similitude envoyant A sur B et C sur D, on obtient le même point fixe.

Correction de l'exercice 5059 ▲

(a) i. Une équation d'un plan est $ax+by+cz+d=0$. Si un point appartient à un plan cela donne une condition linéaire sur a,b,c,d. Si l'on nous donne trois point cela donne un système linéaire de trois équations à trois inconnues (car l'équation est unique à un facteur multplicatif non nul près). On trouve :

A. $x+y+z-1=0$

B. $3x+3y+z-7=0$

ii. $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est normal au plan. Si $\vec{n}=(a,b,c)$ alors une équation du plan est $ax+by+cz+d=0$. On trouve :

A. $-9x+7y+12z-17=0$

B. $17x+13y-7z-3=0$

iii. Trouver deux points B,C de la droite D. Le vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de P. Procédé ensuite comme la question précédente. On obtient :

A. Par exemple $B=(0,-6,-3)$ et $C=(-1,0,2)$ appartiennent à D. On trouve l'équation $4x-y+2z=0$.

B. Par exemple $B=(0,-1,1)$ (pout $t=0$) et $C=(1,1,-2)$ (pour $t=1$) appartiennent à D. On trouve l'équation $2x-y-1=0$.

iv. Trouver un point A de D et deux points B,C de la droite D'. Le vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de P. Puis procédé comme avant.

(b) Les plans sont définis paramétriquement par (P) : $(2,2,1)+s(1,2,-1)+t(2,1,-1)$ donc deux des vecteurs directeurs sont $\vec{u}=(1,2,-1)$ et $\vec{v}=(2,1,-1)$. Un vecteur normal à (P) est alors $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=(-1,-1,-3)$.
Pour le plan (P') défini par $(1,3,1)+s'(3,3,-2)+t'(-1,1,0)$, il a pour vecteurs directeurs $\vec{u'}=(3,3,-2)$ et $\vec{v'}=(-1,1,0)$. Un vecteur normal à (P') est alors $\vec{n'}=\vec{u'}\wedge\vec{v'}=(2,2,6)$.
Les vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires donc les plans (P) et (P') sont parallèles (ou confondus).
Maintenant le point $A=(2,2,1)$ appartient à (P) (on a fait $s=0$ et $t=0$). Il appartient aussi à (P') (en prenant $s'=0$ et $t'=-1$).
Bilan. (P) et (P') sont parallèles et ont un point commun : ils sont égaux !

Correction de l'exercice 5068 ▲

(a) i. Un point A appartient à un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ si et seulement si $ax_A+by_A+cz_A+d=0$. Donc $A(1,1,1)\in P_m$ si et seulement si $m^2+(2m-1)+m=3$. Ce qui équivaut à $m^2+3m-4=0$. Les deux solutions sont $m=1$ et $m=-4$. Donc A appartient aux plans P_1 et P_{-4} et pas aux autres.

ii. Un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}=(a,b,c)$. Donc si $\vec{n}=(2,-\frac{5}{2},-1)$ est un vecteur normal à P_m une équation cartésienne est de la forme $2x-\frac{5}{2}y-z+d=0$. Or une équation de P_m est $m^2x+(2m-1)y+mz-3=0$. Ces deux équations sont égales à un facteur multiplicatif près $\lambda\in\mathbb{R}^*$: $2x-\frac{5}{2}y-z+d=\lambda\big(m^2x+(2m-1)y+mz-3\big)$. On en déduit $2=\lambda m^2$, $-\frac{5}{2}=\lambda(2m-1)$ et $-1=\lambda m$. En divisant la première égalité par la troisième on trouve : $m=-2$. D'où $\lambda=\frac{1}{2}$. La seconde égalité est alors vérifiée.
Le seul plan ayant $\vec{n}$ pour vecteur normal est P_{-2}.

iii. Un vecteur est directeur du plan P si et seulement si le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$. Ici $\vec{n}=(m^2,2m-1,m)$. Donc $\vec{v}=(1,1,1)$ est vecteur directeur si et seulement si $m^2+2m-1+m=0$. Ce qui équivaut à $m^2+3m-1=0$. Les deux plans qui ont pour vecteur directeur $\vec{v}$ sont les plans ayant le paramètre $m=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

(b) Nous allons prendre 3 plans de la famille (P_m), calculer leur point d'intersection et finalement montrer que ce point appartient aux autres plans.
Prenons trois paramètre “au hasard” $m=0$, $m=1$, $m=-1$. Un point qui appartient à ces trois plans doit vérifier les trois équations :

$$\begin{cases} y=-3 \\ x+y+z=3 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver que l'intersection des trois plan P_0, P_1 et P_{-1} est le point $Q=(0,-3,6)$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que ce point appartient à tous les plans P_m : c'est le cas car $m^2\cdot 0+(2m-1)\cdot(-3)+m\cdot 6-3=0$.
Autre méthode. On cherche un point $Q=(x_0,y_0,z_0)$ qui vérifie l'égalité $m^2x_0+(2m-1)y_0+mz_0-3=0$ pour tout m. En considérant que c'est une égalité polynomiale en m (x_0,y_0,z_0 sont fixés) on en déduit que $m^2x_0+(2m-1)y_0+mz_0-3$ est le polynôme nul : $x_0m^2+(2y_0+z_0)m-y_0-3=0$. Ces coefficients sont nuls : $x_0=0$ (le coefficient de m^2), $2y_0+z_0=0$ (le coefficient de m), $-y_0-3=0$ (le terme constant). On trouve bien sûr le même point d'intersection de tous les plans : $Q=(0,-3,6)$.

Correction de l'exercice 5069 ▲

(a) La distance d'un point $A = (x_0, y_0, z_0)$ à un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ est donnée par la formule :

$$d(A,P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

On trouve donc

i. $d(A,P) = \frac{|2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 2+4|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

ii. $d(A,P) = \frac{2}{\sqrt{42}}$.

(b) Trouvons d'abord une équation paramétrique de la droite D. On pose par exemple $z = t$ et on exprime x et y en fonction de t. Partant du système $\begin{cases} -2x+y-3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$ on trouve $x = 1-t$ et $y = 3+t$. La droite D est donc l'ensemble des point $M_t = (1-t, 3+t, t)$ (t parcourant $\mathbb{R}$).
La distance AM_t vérifie donc

$$AM_t^2 = \|\vec{A}M_t\|^2 = \|(1-t-1, 3+t-2, t-3)\|^2 = t^2+(t+1)^2+(t-3)^2 = 3t^2-4t+10.$$

Minimiser cette distance c'est trouver le minimum de la fonction $\delta(t) = 3t^2-4t+10$. Il est donc atteint pour t_0 vérifiant $\delta'(t_0) = 0$, donc pour $t_0 = \frac{2}{3}$. La distance entre A et la droite D est donc la longueur $AM_{t_0} = \sqrt{\delta(t_0)} = \sqrt{\frac{26}{3}}$. Au passage on a obtenu la perpendiculaire à D passant par A c'est la droite (AM_{t_0}).

Autre méthode.
Il existe une formule pour calculer directement la distance. Si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de D et M_0 un point de D alors

$$d(A,D) = \frac{\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

On a paramétré la droite D par les points $M_t = (1,3,0)+t(-1,1,1)$. Donc $M_0 = (1,3,0) \in D$ et $\vec{v} = (-1,1,1)$ est un vecteur directeur de D. On a alors $\overrightarrow{AM_0} = (0,1,-3)$ et $\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0} = (-4,-3,-1)$: on obtient :

$$d(A,D) = \frac{\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}.$$

Correction de l'exercice 5080 ▲

(a) Soit G l'isobarycentre du triangle (ABC). On a donc $G = \mathrm{bar}(A(1), B(1), C(1))$. Notons A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$. D'après le théorème du barycentre partiel, $G = \mathrm{bar}(A(1), A'(2))$. En particulier, G est sur la médiane (AA'). De même, G est sur la médiane (BB') et sur la médiane (CC').

Finalement, G est sur les trois médianes. les trois médianes sont donc concourantes en G.

(b) Les droites (BC) et (CA) ne sont pas parallèles. Par suite, les médiatrices respectives des côtés $[B,C]$ et $[C,A]$ ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point que l'on note O. Par définition de O, on a $OA = OB = OC$. O est donc à égale distance de A et B et est ainsi sur la médiatrice de $[A,B]$. Finalement, les trois médiatrices sont concourantes en O. De plus, O étant à égale distance de A, B et C, le cercle de centre O et de rayon OA passe par B et C.

Réciproquement, un cercle passant par A, B et C a pour centre un point à égale distance de ces points et donc nécessairement de centre O et de rayon OA. Ceci démontre l'existence et l'unicité du cercle circonscrit au triangle (ABC) : c'est le cercle de centre O et de rayon OA.

(c) Les hauteurs issues de A et B ne sont pas parallèles (car perpendiculaires à deux droites non parallèles). Elles admettent ainsi un et un seul point d'intersection. Ceci assure l'unicité d'un point commun aux trois hauteurs.

Soit h l'homthétie de centre G et de rapport -2. Puisque $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA}$, on a $h(A') = A$ et de même $h(B') = B$ et $h(C') = C$.

Par h, l'image de la médiatrice de $[B,C]$, c'est-à-dire de la droite passant par A' et perpendiculaire à (BC) est la droite passant par $h(A') = A$ et perpendiculaire à (BC) (car parallèle à la médiatrice de $[B,C]$). Cette droite est la hauteur issue de A du triangle (ABC). De même, les images des médiatrices de $[C,A]$ et $[A,B]$ sont respectivement les hauteurs issues de B et C.

Le point O est sur les trois médiatrices. Son image par h est donc sur les trois hauteurs (d'où l'existence d'un point commun aux trois hauteurs). Ces trois hauteurs sont ainsi concourantes en un point noté H et appelé l'orthocentre du triangle (ABC). De plus, l'égalité $h(O) = H$ s'écrit $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ ou encore $\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ ou enfin,

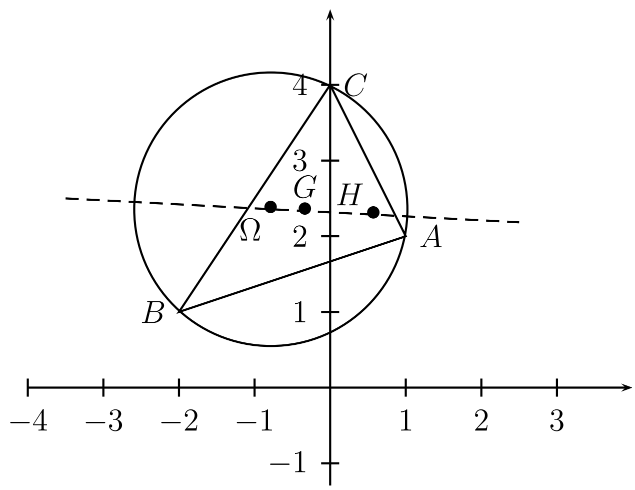
$$\boxed{\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \text{ EULER.}}$$

Les trois points O, G et H, s'ils sont deux à deux distincts, sont en particulier alignés sur une droite appelée **droite d'**EULER du triangle (ABC).

(d) Deux bissectrices intérieures ne sont pas parallèles (démontrez-le) et sont donc sécantes en un point I à égale distance des trois côtés et à l'intérieur du triangle (ABC). Ce point étant à égale distance des trois côtés est centre du cercle tangent intérieurement aux trois côtés, le cercle inscrit.

Correction de l'exercice 5081 ▲

(Notez bien l'alignement des points G, H et O).



(a) On a $AB = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$. Par suite,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{(-3)(-1)+(-1)(2)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Par suite, $\widehat{BAC} = 81°$ à un degré près.

(b) $\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}\text{abs}(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}) = \frac{7}{2}$.

(c) Notons G l'isobarycentre du triangle (ABC). $z_G = \frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C) = \frac{1}{3}(1+2i-2+i+4i) = \frac{1}{3}(-1+7i)$, et donc $\boxed{G(-\frac{1}{3},\frac{7}{3}).}$

Notons (x,y) les coordonnées de Ω, le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) (dans cette exercice, la lettre O désigne certainement l'origine du repère).

$$\begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \Omega A = \Omega C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2 \\ (x-1)^2+(y-2)^= x^2+(y-4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=0 \\ 2x-4y=-11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{11}{14} \text{ et } y = \frac{33}{14} \text{ (d'après les formules de CRAMER)},$$

et donc
$\boxed{\Omega(-\frac{11}{14}, \frac{33}{14}).}$

Notons (x,y) les coordonnées de l'orthocentre H du triangle (ABC).
1ère solution.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1)+3(y-2)=0 \\ -(x+2)+2(y-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=8 \\ -x+2y=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{7} \text{ et } y = \frac{16}{7} \text{ (d'après les formules de CRAMER)},$$

et donc, $\boxed{H(\frac{4}{7}, \frac{16}{7}).}$

2ème solution. Il est bien meilleur de connaître la relation d'EULER $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$ et de l'utiliser.

$$H = \Omega + 3\overrightarrow{\Omega G} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{14} \\ \frac{33}{14} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{11}{14} \\ \frac{7}{3}-\frac{33}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}.$$

Pour trouver le cercle circonscrit au triangle (ABC), on a déjà le centre Ω et le rayon

$$\Omega A = \sqrt{(1+\frac{11}{14})^2+(2-\frac{33}{14})^2} = \frac{1}{14}\sqrt{25^2+5^2} = \frac{5}{14}\sqrt{5^2+1} = \frac{5\sqrt{26}}{14}.$$

Il n'y a plus qu'à écrire l'équation cherchée :

$$(x+\frac{11}{14})^2+(y-\frac{33}{14})^2 = \frac{325}{98} \text{ ou encore } x^2+y^2+\frac{11}{7}x-\frac{33}{7}y+\frac{20}{7}=0.$$

Néanmoins, on peut trouver directement une équation de ce cercle. Les points A, B et C n'étant pas alignés, on sait que le cercle circonscrit existe et est unique.
Soient alors $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

$$(A,B,C) \in \mathscr{C}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=-5 \\ -2a+b+c=-5 \\ 4b+c=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-4b-16a-2b=11 \\ -2a-3b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{11}{7} \\ b=-\frac{33}{7} \\ c=\frac{20}{7} \end{cases} \text{(CRAMER)}$$

(d) Les bissectrices de l'angle A sont les deux droites constituées des points à égale distance des droites (AB) et (AC). Ces deux droites admettent pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1(1,-3)$ et $\vec{n}_2(2,1)$.
Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} d(M,(AB)) = d(M,(AC)) &\Leftrightarrow \frac{(\overrightarrow{AM}.\vec{n}_1)^2}{||\vec{n}_1||^2} = \frac{(\overrightarrow{AM}.\vec{n}_2)^2}{||\vec{n}_2||^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{((x-1)-3(y-2))^2}{10} = \frac{(2(x-1)+(y-2))^2}{5} \Leftrightarrow (x-3y+5)^2 = 2(2x+y-4)^2 \\ &\Leftrightarrow [(x-3y+5)+\sqrt{2}(2x+y-4)].[(x-3y+5)-\sqrt{2}(2x+y-4)]=0 \\ &\Leftrightarrow (1+2\sqrt{2})x+(-3+\sqrt{2})y+5-4\sqrt{2}=0 \text{ ou } (1-2\sqrt{2})x-(3+\sqrt{2})y+5+4\sqrt{2}= \\ &\Leftrightarrow y=(1+\sqrt{2})x+1-\sqrt{2} \text{ ou } y=(1-\sqrt{2})x+1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

La bissectrice intérieure δ_A de l'angle $\widehat{A}$ est la droite (pour certains, cette bissectrice est une demi-droite) passant par $A(2,1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = -\sqrt{10}.(\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC}\overrightarrow{AC})$. Ce vecteur a pour coordonnées $(3+\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$.
Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \delta_A &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})(x-1) - (3+\sqrt{2})(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})x - (3+\sqrt{2})y + 5 + 4\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = (1-\sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5082 ▲

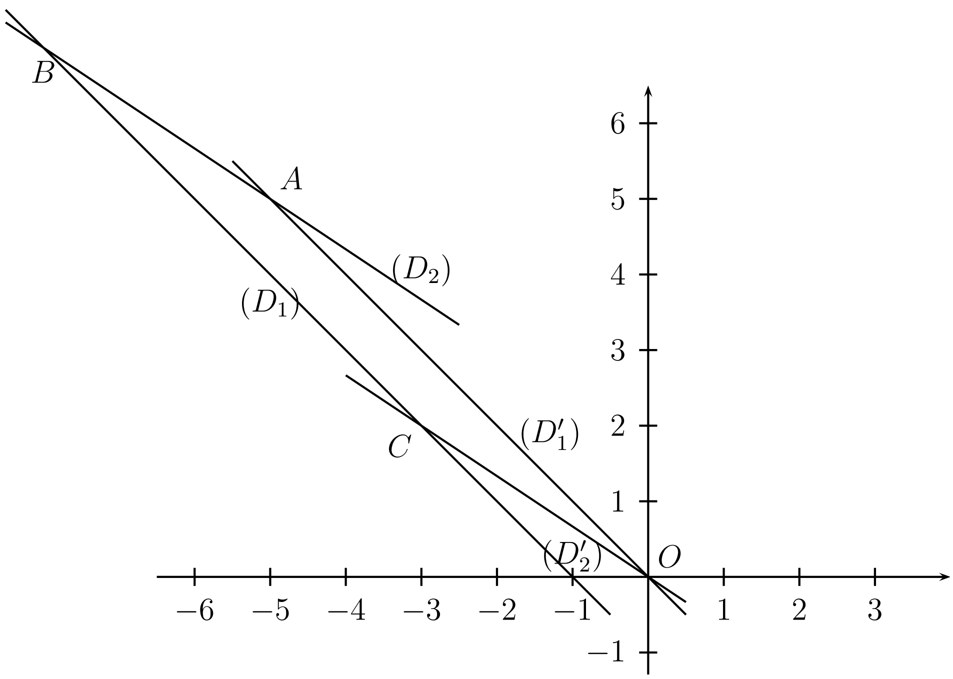
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5 = 2x^2+x(5y-3)+3y^2-2y-5 &= 2(x+\frac{1}{4}(5y-3))^2 - \frac{1}{8}(5y-3)^2+3y^2-2y-5 \\ &= \frac{1}{8}(4x+5y-3)^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{14}{8}y - \frac{49}{8} \\ &= \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2-(y^2-14y+49)] = \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2-(y-7)^2] \\ &= \frac{1}{8}(4x+4y+4)(4x+6y-10) = (x+y+1)(2x+3y-5) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5 = 0 \Leftrightarrow (x+y+1 = 0 \text{ ou } 2x+3y-5 = 0.$$

(E) est la réunion de la droite (D_1) d'équation $x+y+1=0$ et de la droite (D_2) d'équation $2x+3y-5=0$.



La parallèle à (D_1) passant par O est la droite (D'_1) d'équation $x+y=0$ et la parallèle à (D_2) passant par O est la droite (D'_2) d'équation $2x+3y=0$. Ces droites se coupent en les quatre points $O(0,0)$, $A(-5,5)$, $B(-8,7)$ et $C(-3,2)$. L'aire de ce parallélogramme vaut $\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})\right| = 5$.

Correction de l'exercice 5083 ▲

Notons (D_1), (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives $y = 2x+1$, $y = 2x+7$ et $y = -\frac{1}{2}x$. Soit $\mathscr{C}$ un cercle.

Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles. Donc, $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre est sur l'ensemble des points à égale distance de (D_1) et (D_2) à savoir la droite d'équation $y = 2x+4$ et son rayon est la moitié de la distance de (D_1) à (D_2), ou encore la moitié de la distance d'un point de (D_1), par exemple $(0,1)$, à (D_2). Cette distance vaut $\frac{|2.0-1+7|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre Ω a des coordonnées de la forme $(a, 2a+4)$, $a \in \mathbb{R}$, et son rayon vaut $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ est tangent à (D_3) si et seulement si la distance de Ω à (D_3) est le rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Donc,

$$\mathscr{C} \text{ solution} \Leftrightarrow d(\Omega,(D_3)) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a+2(2a+4)|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |5a+8| = 3$$
$$\Leftrightarrow 5a+8 = 3 \text{ ou } 5a+8 = -3 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } a = -\frac{11}{5}$$

On trouve deux cercles solutions, le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $\Omega_1(-1,2)$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ et le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre $\Omega_2(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5})$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Correction de l'exercice 5084 ▲

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons s_i la symétrie centrale de centre A_i. Le problème revient à trouver n points B_1,..., B_n tels que $B_2 = s_1(B_1)$, $B_3 = s_2(B_2)$,...,$B_n = s_{n-1}(B_{n-1})$, $B_1 = s_n(B_n)$. Ceci équivaut à

$$\forall i \in \{2,\dots,n\},\ B_i = s_{i-1} \circ s_{i-2} \circ \dots \circ s_1(B_1) \text{ et } B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1(B_1)\ (*).$$

Posons alors $f = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1$. f est une composée de symétries centrales. Il y a donc deux cas. Si n est pair, on peut regrouper les symétries deux par deux. f est alors (d'après l'exercice 5205) une composée de translations et donc f est une translation. Si n est impair, $n-1$ est pair et donc la composée des $n-1$ premières symétries est une translation. Par suite, f est la composée d'une translation et d'une symétrie centrale et est donc une symétrie centrale (d'après l'exercice 5205).

Maintenant, $(*)$ a une solution si et seulement si f a un point invariant.

1er cas. Si n est impair, f étant une symétrie centrale, f a un et un seul point invariant : son centre. Il existe donc un et un seul point B_1 vérfiant $B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1(B_1)$ et finalement, un et un seul n-uplet $(B_1,\dots,B_n)$ solution du problème posé.

2ème cas. Si n est pair, f est une translation. Si son vecteur est non nul, f n'a pas de point invariant et le problème n'a pas de solution. Si son vecteur est nul, f est l'identité et tout point est invariant par f.

Déterminons le vecteur de f. On pose $n = 2p$. On a alors

$$f = s_{2p} \circ s_{2p-1} \circ \dots s_2 \circ s_1 = t_{2\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}}} \circ \dots \circ t_{2\overrightarrow{A_1A_2}} = t_{2(\overrightarrow{A_1A_2}+\dots+\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}})}.$$

Quand $n = 2p$ est pair, le problème posé a des solutions si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2}+\dots+\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}} = \overrightarrow{0}$.

Correction de l'exercice 5085 ▲

Tout d'abord, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-2x+4y+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = 4$ et $\mathscr{C}$ est le cerlce de centre $\Omega(1,-2)$ et de rayon 2.

(a) Le point $A(2,-2+\sqrt{3})$ est effectivement sur $\mathscr{C}$ car $(2-1)^2+(-2+\sqrt{3}+2)^2 = 1+3 = 4$. La tangente (T) en A à $\mathscr{C}$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$.

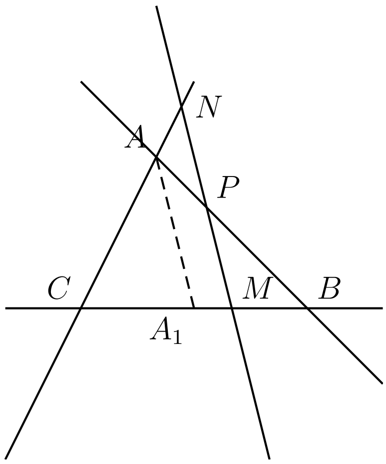
$$M(x,y)\in(T)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0\Leftrightarrow(x-2)+\sqrt{3}(y+2-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow x+\sqrt{3}y-5+2\sqrt{3}=0.$$

(b) Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 2. Une équation de ce cercle est $x^2+y^2-2x-3=0$. Par suite,

$$M(x,y)\in\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2-2x+4y+1=0\\x^2+y^2-2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4y+4=0\quad((1)-(2))\\x^2+y^2-2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-1\\x^2-2x-2=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-1\\x=1+\sqrt{3}\text{ ou }x=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Il ya donc deux points d'intersection : $(1+\sqrt{3},-1)$ et $(1-\sqrt{3},-1)$.

Correction de l'exercice 5086 ▲



Montrons tout d'abord que si M, N et P sont alignés, alors $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$ $(*)$.

On suppose donc que M, N et P sont alignés et on note (Δ) la droite contenant M, N et P.

1ère solution. Soit A_1 le projeté de A sur la droite (BC) parallèlement à la droite (Δ). D'après le théorème de THALES, on a

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}}\text{ et }\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}},$$

et donc,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}}.\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}}=1.$$

2ème solution. Soit h_1 l'homothétie de centre M et de rapport $k_1=\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, de sorte que $h_1(C)=B$. Soit h_2 l'homothétie de centre N et de rapport $k_2=\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, de sorte que $h_2(A)=C$.

Maintenant, le produit k_1k_2 peut-il être égal à 1 ? Si c'était le cas, on aurait $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=1$ et donc, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$. La réciproque du théorème de THALES permettrait alors d'affirmer que (MN) et (AB) sont parallèles, ce qui n'est pas. Donc, $k_1k_2\neq1$ et d'après l'exercice 5205, $h_1\circ h_2$ est une homothétie. Puisque $h_1\circ h_2$ transforme A en B, son centre est sur la droite (AB). Mais d'autre part, son centre est sur la droite des centres (MN). Finalement, le centre de $h_1\circ h_2$ est le point d'intersection de (MN) et (AB), c'est-à-dire le point P.

Mais alors, le rapport de $h_1\circ h_2$ vaut également $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$. Ainsi, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ et finalement, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$.

3ème solution. On se place dans le repère $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Dans ce repère, les coordonnées des différents points sont : $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $M(m, 1-m)$, $N(0,n)$ et $P(p,0)$ où m, n et p sont distincts de 0 et de 1.

Les coordonnées de $\overrightarrow{MB}$ sont $(1-m, m-1)$ et celles de $\overrightarrow{MC}$ sont $(-m, m)$. Par suite, $m\overrightarrow{MB} = (m-1)\overrightarrow{MC}$ et finalement, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{m-1}{m}$. On trouve de même $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{n-1}{n}$ et $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{p}{p-1}$. Finalement,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} M,\ N \text{ et } P \text{ alignés } &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & p-m \\ m+n-1 & m-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -m(m-1)-(p-m)(m+n-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -pm-pn+p+mn = 0 \Leftrightarrow mn = p(m+n-1) \Leftrightarrow mn \\ &= -p(m-1)(n-1)+pmn \Leftrightarrow p(m-1)(n-1) = mn(p-1) \\ &\Leftrightarrow \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)} = 1 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, alors les points M, N et P sont alignés. Pour cela, vérifions tout d'abord que (MN) n'est pas parallèle à (AB). Dans le cas contraire, le théorème de THALES fournirait $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ et donc $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, puis $\overline{PA} = \overline{PB}$ et finalement $\overline{AB} = 0$, ce qui n'est pas.

Par suite, la droite (MN) coupe la droite (AB) en un point P_1 vérifiant d'après le début de l'exercice $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = 1$. On en déduit que $\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$. Notons k la valeur commune de ce rapport.

On a déjà que $k \neq 1$, ou encore $1-k \neq 0$. Par suite, $P_1 = \text{bar}\{A(1), B(-k)\} = P$, ce qui montre que les points M, N et P sont alignés.

Correction de l'exercice 5087 ▲

(a) Le fait que (D) et (D') soient sécantes équivaut à $ab' - a'b \neq 0$.

Soit $A(x_A, y_A)$ le point d'intersection de (D) et (D').

Si (Δ) est une droite ayant une équation de la forme $\lambda(ax+by+c) + \mu(a'x+b'y+c') = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ alors, puisque

$$\lambda(ax_A + by_A + c) + \mu(a'x_A + b'y_A + c') = \lambda.0 + \mu.0 = 0,$$

le point A appartient à (Δ).

Réciproquement, soit (Δ) une droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées (α, β). Puisque $ab' - a'b \neq 0$, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}(a,b)$ et $\overrightarrow{u}'(a', b')$ ne sont pas colinéaires. Mais alors, la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}')$ est une base du plan (vectoriel). Par suite, il existe $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ (car $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$) tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}'$, ou encore tel que $\alpha = \lambda a + \mu a'$ et $\beta = \lambda b + \mu b'$. Toute droite (Δ) admet donc une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax+by) + \mu(a'x+b'y) + \gamma = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

Maintenant, si $A \in (\Delta)$, alors

$$\gamma = -\lambda(ax_A + by_A) + \mu(a'x_A + b'y_A) = -\lambda(-c) - \mu(-c') = \lambda c + \mu c'.$$

Finalement, si $A \in (\Delta)$, (Δ) admet une équation de la forme $\lambda(ax+by+c) + \mu(a'x+b'y+c') = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

(b) Les deux droites (D) et (D') considérées sont bien sécantes car $5.2 - 7(-3) = 31 \neq 0$. Notons A leur point d'intersection et B le point de coordonnées $(1,0)$. B n'est sur aucune des deux droites considérées de sorte qu'il existe une et seule droite, notée (Δ), solution du problème posé.

Puisque (Δ) passe par A, (Δ) a une équation de la forme $\lambda(5x+7y+1)+\mu(-3x+2y+1)=0$. Il est clair que l'on ne peut avoir $\lambda=0$ (car (Δ) n'est pas (D')) et après division par λ, l'équation s'écrit sous la forme $(5x+7y+1)+k(-3x+2y+1)=0$ où k est un réel. Maintenant, (Δ) passe par B si et seulement si $6-2k=0$ ou encore $k=3$.

Une équation cartésienne de (Δ) est donc $(5x+7y+1)+3(-3x+2y+1)=0$ ou encore $-4x+13y+4=0$.

(c) Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\forall m\in\mathbb{R},\ M\in(D_m)\Leftrightarrow\forall m\in\mathbb{R},\ (2m-1)x+(m+1)y-4m-1=0\Leftrightarrow\forall m\in\mathbb{R},\ m(2x+y-4)-x+y-1=0$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y-4=0\\-x+y-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1\text{ et }y=2$$

Toutes les droites (D_m) passent par le point $A(1,2)$.

La droite (D_{-1}) passe par A et est parallèle à (Oy). Ensuite, pour $m\neq-1$, (D_m) est la droite passant par A et de coefficient directeur $f(m)=\frac{-2m+1}{m+1}=-2+\frac{3}{m+1}$. Quand m décrit $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(m)$ prend toutes les valeurs réelles sauf -2.

La droite passant par A de coefficient directeur -2 (et donc d'équation $y=-2x+4$) n'est pas une droite (D_m). Toute autre droite passant par A est une droite (D_m).

Correction de l'exercice 5088 ▲

• **Repère de (D).**

$$\left\{\begin{array}{l}x-z-a=0\\y+3z+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=a+z\\y=-1-3z\end{array}\right..$$

(D) est la droite passant par $A(a,-1,0)$ et dirigée par $u(1,-3,1)$. • **Repère de (D').**

$$\left\{\begin{array}{l}x+2y+z-2b=0\\3x+3y+2z-7=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2y+z=2b-x\\3y+2z=7-3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=4b-7+x\\z=14-6b-3x\end{array}\right.$$

(D') est la droite passant par $A'(0,4b-7,-6b+14)$ et dirigée par $u'(1,1,-3)$. • Les vecteurs u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') ne sont pas parallèles. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A,u,u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\left|\begin{array}{ccc}x-a&1&1\\y+1&-3&1\\z&1&-3\end{array}\right|=0\Leftrightarrow 8(x-a)+4(y+1)+4z=0\Leftrightarrow 2x+y+z=2a-1.$$

• Enfin, (D) et (D') sont sécantes si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D)\text{ et }(D')\text{ sécantes}\Leftrightarrow A'\in(P)\Leftrightarrow(4b-7)+(-6b+14)=2a-1\Leftrightarrow b=-a+4.$$

(D) et (D') sont sécantes si et seulement si $b=-a+4$ et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est $2x+y+z=2a-1$.

Correction de l'exercice 5089 ▲

• (Δ) est parallèle à (D) si et seulement si (Δ) est dirigée par le vecteur $u(3,2,1)$ ou encore (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l}x=a+3\lambda\\y=b+2\lambda\\z=c+\lambda\end{array}\right.$. Ensuite, (Δ) est sécante à (D_1) si et seulement si on peut choisir le point (a,b,c) sur (D_1) ou encore si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l}x=3\lambda\\y=b+2\lambda\\z=4+\lambda\end{array}\right.$. Enfin,

$$(\Delta) \text{ et } (D_2) \text{ sécantes} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ b+2\lambda = 4+\lambda+4 = 0 \Leftrightarrow b+2\times(-8) = 0 \Leftrightarrow b = 16.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de (Δ) : un système d'équations paramétriques de (δ) est $\left\{\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 16+2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{array}\right.$.

Un système d'équations cartésiennes de (Δ) est $\left\{\begin{array}{l} x = 3(z-4) \\ y = 16+2(z-4) \end{array}\right.$ ou encore

$$\boxed{(\Delta) : \left\{\begin{array}{l} x-3z+12 = 0 \\ y-2z-8 = 0 \end{array}\right. .}$$

Correction de l'exercice 5090 ▲

Notons (Δ) une éventuelle droite solution. • (Δ) est sécante à (D_1) et (D_2) si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et par un point de la forme $(b,1,0)$ ou encore si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et est dirigée par un vecteur de la forme $(b-1,1,-a)$. Ainsi, (Δ) est sécante à (D_1) et (D_2) si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda(b-1) \\ y = \lambda \\ z = a-\lambda a \end{array}\right.$ ou encore un système d'équations cartésiennes de la forme $\left\{\begin{array}{l} x-(b-1)y = 1 \\ ay+z = a \end{array}\right.$.

• Ensuite, (Δ) et (D_3) sécantes $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} -(b-1)y = 1 \\ ay+1 = a \end{array}\right. \Leftrightarrow b \neq 1$ et $-\frac{a}{b-1}+1 = a \Leftrightarrow b \neq 0$ et $b \neq 1$ et $a = 1-\frac{1}{b}$. En résumé, les droites sécantes à (D_1), (D_2) et (D_3) sont les droites dont un système d'équations cartésiennes est

$$\left\{\begin{array}{l} x-(b-1)y = 1 \\ \left(1-\frac{1}{b}\right)y+z = 1-\frac{1}{b} \end{array}\right., b \notin \{0,1\}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
(\Delta) \text{ et } (D) \text{ sécantes} &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} x-(b-1)y = 1 \\ \left(1-\frac{1}{b}\right)y+z = 1-\frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} -6z+6(b-1)z = 1 \\ -6\left(1-\frac{1}{b}\right)z+z = 1-\frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow b \notin \{0,1,2\} \text{ et } -6\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{6(b-2)}+\frac{1}{6(b-2)} = 1-\frac{1}{b} \\
&\Leftrightarrow b \notin \{0,1,2\} \text{ et } -6(b-1)+b = 6(b-1)(b-2) \Leftrightarrow b \notin \{0,1,2\} \text{ et } 6b^2-13b+6 = 0 \\
&\Leftrightarrow b \in \left\{\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les droites solutions sont } (\Delta_1) : \left\{\begin{array}{l} 3x+y = 3 \\ y-2z = 1 \end{array}\right. \text{ et } (\Delta_2) : \left\{\begin{array}{l} 2x-y = 2 \\ y+3z = 1 \end{array}\right. .}$$

Correction de l'exercice 5091 ▲

• Déterminons le centre de gravité G.

$$G = \tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{3}B+\tfrac{1}{3}C = \tfrac{1}{3}(2,-2,0)+\tfrac{1}{3}(4,2,6)+\tfrac{1}{3}(-1,-3,0) = \left(\tfrac{5}{3},-1,2\right).$$

• Déterminons le centre du cercle circonscrit O. Une équation du plan (ABC) est $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -3 \\ y+2 & 4 & -1 \\ z & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ou encore $6(x-2)-18(y+2)+10z=0$ ou enfin $3x-9y+5z=24$. Posons alors $O(a,b,c)$. Ensuite, $OA=OB \Leftrightarrow (a-2)^2+(b+2)^2+c^2=(a-4)^2+(b-2)^2+(c-6)^2 \Leftrightarrow 4a+8b+12c=48 \Leftrightarrow a+2b+3c=16$ et $OA=OC \Leftrightarrow (a-2)^2+(b+2)^2+c^2=(a+1)^2+(b+3)^2+c^2 \Leftrightarrow -6a-2b=2 \Leftrightarrow 3a+b=-1$. D'où le système

$$\left\{\begin{array}{l} 3a-9b+5c=24 \\ a+2b+3c=16 \\ 3a+b=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a-1 \\ 3a-9(-3a-1)+5c=24 \\ a+2(-3a-1)+3c=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a-1 \\ 6a+c=3 \\ -5a+3c=18 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a-1 \\ c=3-6a \\ -5a+3(3-6a)=18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-\frac{9}{23} \\ b=\frac{4}{23} \\ c=\frac{123}{23} \end{array}\right.$$

Donc $O\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right)$. • Déterminons l'orthocentre H. D'après la relation d'EULER,

$$H=O+3\overrightarrow{OG}=\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right)+3\left(-\frac{9}{23}-\frac{5}{3},\frac{4}{23}+1,\frac{123}{23}-2\right)=\left(\frac{-151}{23},\frac{85}{23},\frac{354}{23}\right).$$

• Déterminons le centre du cercle inscrit I. On sait que $I=\text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$ où $a=BC=\sqrt{5^2+5^2+6^2}=\sqrt{86}$, $b=AC=\sqrt{3^2+1^2+0^2}=\sqrt{10}$ et $c=AB=\sqrt{2^2+4^2+6^2}=\sqrt{54}$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{86}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}A+\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}B+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}C \\ &= \left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right). \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ et $C(-1,-3,0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A,B,C).

$$\boxed{\begin{array}{c} G\left(\frac{5}{3},-1,2\right),\ O\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right) \text{ et } H\left(\frac{-151}{23},\frac{85}{23},\frac{354}{23}\right) \text{ puis} \\ I\left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right). \end{array}}$$

Correction de l'exercice 5092 ▲

• Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=-1-z \\ 2x+y=2-5z \end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-4z \\ y=-4+3z \end{array}\right. .$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(3,-4,0)$ et $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$. • Soit $M(x,y,z)$ un point du plan. On sait que

$$d(A,(D))=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}=\frac{\sqrt{(y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2}}{\sqrt{26}}$$

• Notons $\mathscr{C}$ le cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

$$M(x,y,z)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow d(A,(D))=2 \Leftrightarrow (y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2=104$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe } (D) \text{ et de rayon 2 est} \\ (y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2=104. \end{array}}$$

Correction de l'exercice 5093 ▲

• Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0\\ 2x+y+5z=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=-z-1\\ 2x+y=-5z+2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4z+3\\ y=3z-4\end{array}\right.$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(3,-4,0)$ et $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$. • Déterminons un repère de (D').

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2\\ 2x+y-5z=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=-z+2\\ 2x+y=5z+3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6z+1\\ y=-7z+1\end{array}\right.$$

Un repère de (D') est $\left(A',\overrightarrow{u'}\right)$ où $A'(1,1,0)$ et $\overrightarrow{u'}(6,-7,1)$. • $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$. Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D'). • On sait que la distance d de (D) à (D') est donnée par

$$d = \frac{\text{abs}\left(\left[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right]\right)}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\|},$$

avec $[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}] = \begin{vmatrix}-2&-4&6\\5&3&-7\\0&1&1\end{vmatrix} = 10\times(-2)+10\times 5 = 30$ et donc $d=\frac{30}{10\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

$$\boxed{d((D),(D'))=\sqrt{3}.}$$

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\left\{\begin{array}{l}\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0\\ \left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0\end{array}\right.$. Or,

$$\frac{1}{10}\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right] = \begin{vmatrix}x-3&-4&1\\y+4&3&1\\z&1&1\end{vmatrix} = 2(x-3)+5(y+4)-7z = 2x+5y-7z+14,$$

et

$$\frac{1}{10}\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right] = \begin{vmatrix}x-1&6&1\\y-1&-7&1\\z&1&1\end{vmatrix} = -8(x-1)-5(y-1)+13z = -8x-5y+13z+13.$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à } (D) \text{ et } (D') \text{ est}\\ \left\{\begin{array}{l}2x+5y-7z=-14\\ 8x+5y-13z=13\end{array}\right. .\end{array}}$$

Correction de l'exercice 5094 ▲

$\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{P_1}\cap\overrightarrow{P_2}\cap\overrightarrow{P_3} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}z-2y=0\\ 2x-3z=0\\ 3y-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=3y\\ z=2y\end{array}\right.$. Ainsi, les plans (P_1), (P_2) et (P_3) sont tous trois parallèles à la droite affine (D) d'équations $\left\{\begin{array}{l}x=3y\\ z=2y\end{array}\right.$. Ces plans définissent donc un prisme. Déterminons alors l'aire d'une section droite. Le plan (P) d'équation $3x+y+2z=0$ est perpendiculaire à la

droite (D). Son intersection avec les plans (P_1), (P_2) et (P_3) définit donc une section droite du prisme.
• Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M\in(P_1)\cap(P_2)\cap(P)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z-2y=5\\2x-3z=0\\3x+y+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\frac{z-5}{2}\\x=\frac{3}{2}z\\\frac{9}{2}z+\frac{z-5}{2}+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=\frac{5}{14}\\y=-\frac{65}{28}\\x=\frac{15}{28}\end{array}\right.$$

Notons $A\left(\frac{15}{28},-\frac{65}{28},\frac{5}{14}\right)$. • Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M\in(P_1)\cap(P_3)\cap(P)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z-2y=5\\3y-x=0\\3x+y+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=2y+5\\x=3y\\9y+y+2(2y+5)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-\frac{5}{7}\\x=-\frac{15}{7}\\z=\frac{25}{7}\end{array}\right.$$

Notons $B\left(-\frac{15}{7},-\frac{5}{7},\frac{25}{7}\right)$.
• Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M\in(P_2)\cap(P_3)\cap(P)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x-3z=0\\3y-x=0\\3x+y+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=z=0$$

Une section droite est OAB où $A\left(\frac{15}{28},-\frac{65}{28},\frac{5}{14}\right)$ et $B\left(-\frac{15}{7},-\frac{5}{7},\frac{25}{7}\right)$. De plus

$$\text{aire de}(OAB)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\left\|\begin{pmatrix}3\\-13\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\sqrt{63^2+21^2+42^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\times21\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\frac{75}{4\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\text{L'aire d'une section droite est }\frac{75}{4\sqrt{14}}.}$$

Correction de l'exercice 5095 ▲

Soient (P) le plan d'équation $x+2y+2z=3$ et (P') le plan d'équation $x+y=0$. L'angle entre (P) et (P') est l'angle entre les vecteurs normaux $\overrightarrow{n}(1,2,2)$ et $\overrightarrow{n'}(1,1,0)$:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'}}\right)=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}}{\|\overrightarrow{n}\|\|\overrightarrow{n'}\|}\right)=\arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 5096 ▲

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On a

$$d(M,(P_1))=\frac{|4x+4y-7z-1|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}}=\frac{|4x+4y-7z-1|}{9}\text{ et }d(M,(P_2))=\frac{|8x-4y+z+7|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}}=\frac{|8x-4y+z+7|}{9}.$$

Par suite,

$$d(M,(P_1))=d(M,(P_2))\Leftrightarrow|4x+4y-7z-1|=|8x-4y+z+7|\Leftrightarrow(4x+4y-7z-1)^2=(8x-4y+z+7)^2$$
$$\Leftrightarrow((4x+4y-7z-1)-(8x-4y+z+7))((4x+4y-7z-1)+(8x-4y+z+7))=0$$
$$\Leftrightarrow(-4x+8y-8z-8)(12x-6z+6)=0\Leftrightarrow x-2y+2z+2=0\text{ ou }2x-z+1=0.$$

$$\boxed{\text{Les plans bissecteurs de }(P_1)\text{ et }(P_2)\text{ admettent pour équation cartésienne }x-2y+2z+2=0\text{ et }2x-z+1=0.}$$

Correction de l'exercice 5097 ▲

• Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l}x+y-3z+4=0\\2x-z+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y-3z=-x-4\\z=2x+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=5x-1\\z=2x+1\end{array}\right.$$

Un repère de (D) est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,1)$ et $\overrightarrow{u}(1,5,2)$. • Puisque un système d'équations de (D') est $\left\{\begin{array}{l}x=z-1\\y=z-1\end{array}\right.$, un repère de (D') est $\left(A',\overrightarrow{u'}\right)$ où $A'(-1,-1,0)$ et $\overrightarrow{u'}(1,1,1)$. • $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}\neq\overrightarrow{0}$. Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D').

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\left\{\begin{array}{l}\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0\\\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=0\end{array}\right.$. Or,

$$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\begin{vmatrix}x&1&3\\y+1&5&1\\z-1&2&-4\end{vmatrix}=-22x+10(y+1)-14(z-1)=-22x+10y-14z+24,$$

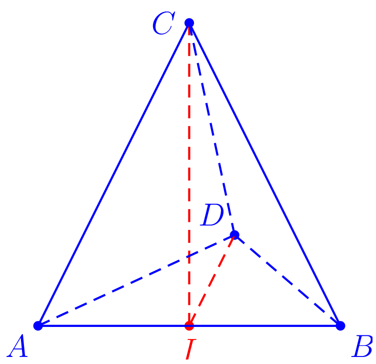
et

$$\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\begin{vmatrix}x+1&1&3\\y+1&1&1\\z&1&-4\end{vmatrix}=-5(x+1)+7(y+1)-2z=-5x+7y-2z+2.$$

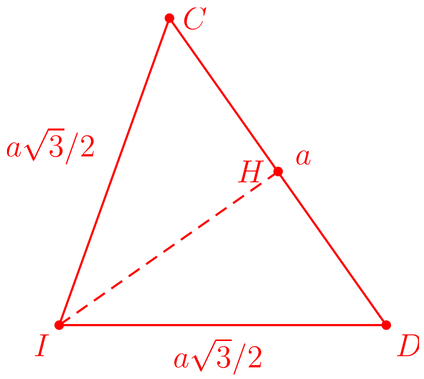
Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est $\left\{\begin{array}{l}11x-5y+7z=12\\5x-7y+2z=2\end{array}\right.$.

Correction de l'exercice 5098 ▲



Angle entre deux arêtes. Les faces du tétraèdre $ABCD$ sont des triangles équilatéraux et donc l'angle entre deux arêtes est $60°$.



Angle entre une arête et une face. C'est l'angle $\widehat{CDI}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CDI} = \arccos\left(\frac{HD}{DI}\right) = \arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,7\ldots^\circ.$$

Angle entre deux faces. C'est l'angle $\widehat{CID}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CID} = \pi - 2\widehat{CDI} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 70,5\ldots^\circ.$$

Correction de l'exercice 5099 ▲

Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-z=y \\ y+2y=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{10}{3} \\ z=x-\frac{10}{3} \end{array}\right. .$$

Un repère de (D) est $(A, \overrightarrow{u})$ où $A\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, 0\right)$ et $\overrightarrow{u}(1,0,1)$. On sait alors que

$$d(O,(D)) = \frac{\|\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{10}{3}\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{d(O,(D)) = \frac{10}{\sqrt{6}}.}$$

Correction de l'exercice 5100 ▲

(D) est une droite de vecteur normal $\vec{n} = (2,-3)$. Le projeté orthogonal $p(M_0)$ de M_0 sur (D) est de la forme $M_0 + \lambda.\vec{n}$ où λ est un réel à déterminer. Le point $M_0 + \lambda.\vec{n}$ a pour coordonnées $(x_0 + 2\lambda, y_0 - 3\lambda)$.

$$M_0 + \lambda.\vec{n} \in (D) \iff 2(x_0+2\lambda) - 3(y_0 - 3\lambda) = 5 \iff \lambda = \frac{-2x_0+3y_0+5}{13}.$$

$p(M_0)$ a pour coordonnées $\left(x_0 + 2\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}, y_0 - 3\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}\right)$ ou encore $p(M_0) = \left(\frac{9x_0+6y_0+10}{13}, \frac{6x_0+4y_0-15}{13}\right)$.
Le symétrique orthogonal $s(M_0)$ vérifie : $s(M_0) = M_0 + 2\overrightarrow{M_0p(M_0)}$ (car $p(M_0)$ est le milieu du segment $[M_0, s(M_0)]$) autrement dit $s(M_0) = M_0 + 2\lambda.\vec{n}$ (pour le λ obtenu ci-dessus).
Ses coordonnées sont donc $s(M_0) = \left(x_0 + 4\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}, y_0 - 6\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}\right)$ ou encore $\left(\frac{5x_0+12y_0+20}{13}, \frac{12x_0-5y_0-30}{13}\right)$.

Correction de l'exercice 5101 ▲

$\det(\vec{MI}, \vec{MJ}) + \det(\vec{MJ}, \vec{MK}) + \det(\vec{MK}, \vec{MI}) = \det(\vec{IJ}, \vec{IK})$.

Correction de l'exercice 5102 ▲

Le système $\begin{cases} P \\ P' \\ Q \end{cases}$ doit être lié.

Correction de l'exercice 5103 ▲

$11x+2y-13z=-4$.

Correction de l'exercice 5104 ▲

(a) $a=-4$

(b) $x-5y+3z=-9$

Correction de l'exercice 5105 ▲

(a) Le plan passant par A et D' n'est pas parallèle à D''.

(b) On doit pouvoir s'en sortir avec un repère adéquat ...

Correction de l'exercice 5107 ▲

Repère $(A,\vec{AB},\vec{AD})$.

Correction de l'exercice 5108 ▲

$\begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5109 ▲

$\dim(\mathscr{H})=\dim(\mathscr{F})+\dim(\mathscr{G})-\dim(\mathscr{F}\cap\mathscr{G})$ si $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}\neq\varnothing$.
$\dim(\mathscr{H})=\dim(\mathscr{F})+\dim(\mathscr{G})-\dim(\mathscr{F}\cap\mathscr{G})+1$ sinon.

Correction de l'exercice 5111 ▲

(a) $ux+vy+h=\lambda^2(ua+v)+\lambda(u+va)+h$. Ceci est nul pour tout λ si et seulement si $ua+v=0$, $u+va=0$, $h=0$ soit $(u,v,a,h)=(u,-u,1,0)$ ou $(u,v,a,h)=(u,u,-1,0)$.

(b) $x-y+(\lambda-\lambda^2)(z-1)=0$ et $x+y-(\lambda+\lambda^2)(z+1)=0$.

(c)

Correction de l'exercice 5112 ▲

Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1$, on choisit d'exprimer x et z en fonction de y. Soit $M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. D'après les formules de CRAMER, on a

$$\begin{aligned} M\in(D) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y+2z+7=0 \\ 2x+2y+3z-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2z=y-7 \\ -2x-3z=2y-5 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} y-7 & 2 \\ 2y-5 & -3 \end{vmatrix} \text{ et } z=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & y-7 \\ -2 & 2y-5 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=31-7y \\ z=-19+4y \end{array}\right. . \end{aligned}$$

$$\boxed{(D) \text{ est la droite passant par } A(31,0,-19) \text{ dirigée par le vecteur } u(-7,1,4).}$$

Correction de l'exercice 5113 ▲

Soit $M(2+\lambda, 3-\lambda, 7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un point quelconque de (D).

$$M \in (P) \Leftrightarrow (2+\lambda)+3(3-\lambda)-5\times 7+2=0 \Leftrightarrow \lambda = 12.$$

$(P)\cap(D)$ est donc un singleton. Pour $\lambda = 12$, on obtient les coordonnées du point d'intersection

$$\boxed{(P)\cap(D)=\{(14,-9,7)\}.}$$

Correction de l'exercice 5114 ▲

• **Repère de** (D)**.**

$$\left\{\begin{array}{l} x+2=-2z \\ y=3x+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2-2z \\ y=3(-2-2z)+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2-2z \\ y=-6-5z \end{array}\right.$$

(D) est la droite passant par $A(0,-1,-1)$ et dirigée par $u(2,5,-1)$. • **Repère de** (D')**.**

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y=z-1 \\ 2x+y=z+a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2z+a-1 \\ y=2-a-3z \end{array}\right.$$

(D') est la droite passant par $A'(a-1,2-a,0)$ et dirigée par $u'(2,-3,1)$. • Déjà u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') sont ou bien sécantes en un point et dans ce cas coplanaires ou bien non coplanaires. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A,u,u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x,y,z)\in(P) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc} x & 2 & 2 \\ y+1 & 5 & -3 \\ z+1 & -1 & 1 \end{array}\right| = 0 \Leftrightarrow 2x-4(y+1)-16(z+1)=0 \Leftrightarrow -x+2y+8z=-10.$$

• Enfin, (D) et (D') sont coplanaires si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ coplanaires} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow -(a-1)+2(2-a)=-10 \Leftrightarrow a=\tfrac{5}{3}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (D) \text{ et } (D') \text{ sont coplanaires si et seulement si } a=\frac{5}{3} \text{ et dans ce cas, une équation du plan contenant } (D) \\ \text{et } (D') \text{ est } -x+2y+8z=-10. \end{array}}$$

Correction de l'exercice 5115 ▲

Puisque P parallèle à la droite (Oy), le vecteur $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$ est dans $\overrightarrow{P}$. De même, le vecteur $\overrightarrow{AB}=(-1,3,1)$ est dans $\overrightarrow{P}$. P est donc nécessairement le plan passant par $A(0,-1,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{AB}=(1,0,1)$. Réciproquement, ce plan convient. Une équation de P est donc $(x-0)+(z-2)=0$ ou encore $x+z=2$.

$$\boxed{\text{Une équation du plan parallèle à la droite } (Oy) \text{ et passant par } A(0,-1,2) \text{ et } B(-1,2,3) \text{ est } x+z=2.}$$

Correction de l'exercice 5118 ▲

(a) $\begin{cases} 2x' = x - 2y - z + 1 \\ 2y' = -x - z + 1 \\ 2z' = -x - 2y + z + 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x' = -5x - 3y + 2z - 3 \\ 2y' = 3x + y - 2z - 1 \\ z' = -3x - 3y + z - 3 \end{cases}$

Correction de l'exercice 5119 ▲

affinité de base $\mathscr{P} : x + 2y + z = 2$, de direction $\mathrm{vect}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$, de rapport 3.

Correction de l'exercice 5120 ▲

si trois points sont non alignés, $ABCD$ doit être un parallélogramme.
si deux points sont distincts et A, B, C, D sont alignés, on doit avoir $A = C$, $B = D$.

Correction de l'exercice 5122 ▲

affinité de rapport $\lambda\mu$ si $\lambda\mu \neq 1$, transvection ou id sinon.

Correction de l'exercice 5124 ▲

5. $\mathscr{B} = \{3(x + y + z) = 1\}$, $\quad \vec{\mathscr{F}} = \mathrm{vect}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $\quad 9\vec{u} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$.

Correction de l'exercice 5125 ▲

oui ssi $\vec{P'Q'}$ est colinéaire à $\vec{PQ}$. Dans ce cas, f est unique.

Correction de l'exercice 5126 ▲

Il existe une homothétie de centre O transformant A en A', B en B', et C en C', et l'homothétie de centre $G, -\frac{1}{2}$ transforme A en α, B en β, C en γ.

Correction de l'exercice 5145 ▲

Repère $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) \Rightarrow$ les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles.

Correction de l'exercice 5146 ▲

$A_i^{(k)} = \mathrm{Bar}\left(A_j : \frac{1}{2^k} \sum_{l \equiv j (\mathrm{mod}\, n)} C_k^{|l-i|}\right)$.

Correction de l'exercice 5147 ▲

$\vec{GA_i^{(k+1)}} = -\frac{1}{n-1} \vec{GA_i^{(k)}}$.

Correction de l'exercice 5148 ▲

$A_k = \mathrm{Bar}(A_0 : \alpha_k, A_1 : \beta_k, A_2 : \gamma_k)$ où α_k, β_k, γ_k vérifient : $x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + 2x_{k-3}$.
Les racines de l'équation caractéristique sont $2, j, j^2$, donc $x_k \sim \lambda 2^k$ avec $\lambda = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{7} = \frac{1}{7}$.
Donc $\alpha_k \sim \beta_k \sim \gamma_k$, et $A_k \to G$, isobarycentre de $A_0A_1A_2$.

Correction de l'exercice 5152 ▲

$\frac{1}{7}$.

Correction de l'exercice 5153 ▲

(a)

(b) $N = \mathrm{Bar}(A : 1-\alpha, B : 1-\beta, C : 1-\gamma)$.

(c)

(d) homothétie de centre G, de rapport $-\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5154 ▲

Repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

Correction de l'exercice 5155 ▲

$M_1 \mapsto M_4$ est affine, et échange A et B. $\Rightarrow$ involutive.

Correction de l'exercice 5156 ▲

(a)

(b) G et les symétriques de A, B, C par rapport aux milieux des côtés opposés.

Correction de l'exercice 5158 ▲

(a) Soit $\alpha' = \overline{(\vec{A'A}, \vec{A'B})}$: $\frac{A'B}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AB}{\sin(\alpha')}$, $\frac{A'C}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AC}{\sin(\pi-\alpha')}$.

(b) $I = \mathrm{Bar}(A : a, B : b, C : c)$.

Correction de l'exercice 5145 ▲

Repère $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) \Rightarrow$ les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles.

Correction de l'exercice 5146 ▲

$A_i^{(k)} = \mathrm{Bar}\left(A_j : \frac{1}{2^k} \sum_{l \equiv j (\mathrm{mod}\, n)} C_k^{|l-i|}\right)$.

Correction de l'exercice 5147 ▲

$\overrightarrow{GA_i^{(k+1)}} = -\frac{1}{n-1} \overrightarrow{GA_i^{(k)}}$.

Correction de l'exercice 5148 ▲

$A_k = \mathrm{Bar}(A_0 : \alpha_k, A_1 : \beta_k, A_2 : \gamma_k)$ où α_k, β_k, γ_k vérifient : $x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + 2x_{k-3}$.
Les racines de l'équation caractéristique sont $2, j, j^2$, donc $x_k \sim \lambda 2^k$ avec $\lambda = \frac{x_0+x_1+x_2}{7} = \frac{1}{7}$.
Donc $\alpha_k \sim \beta_k \sim \gamma_k$, et $A_k \to G$, isobarycentre de $A_0A_1A_2$.

Correction de l'exercice 5152 ▲

$\frac{1}{7}$.

Correction de l'exercice 5153 ▲

(a)

(b) $N = \text{Bar}(A : 1-\alpha, B : 1-\beta, C : 1-\gamma)$.

(c)

(d) homothétie de centre G, de rapport $-\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5154 ▲

Repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

Correction de l'exercice 5155 ▲

$M_1 \mapsto M_4$ est affine, et échange A et B. $\Rightarrow$ involutive.

Correction de l'exercice 5156 ▲

(a)

(b) G et les symétriques de A, B, C par rapport aux milieux des côtés opposés.

Correction de l'exercice 5158 ▲

(a) Soit $\alpha' = \overline{(\vec{A'A}, \vec{A'B})}$: $\frac{A'B}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AB}{\sin(\alpha')}$, $\frac{A'C}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AC}{\sin(\pi-\alpha')}$.

(b) $I = \text{Bar}(A : a, B : b, C : c)$.

Correction de l'exercice 5159 ▲

(a) $-\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$.

(b) $H = \text{Bar}(A : \tan\alpha, B : \tan\beta, C : \tan\gamma) = \text{Bar}\left(A : \frac{a}{\cos\alpha}, B : \frac{b}{\cos\beta}, C : \frac{c}{\cos\gamma}\right)$.

Correction de l'exercice 5160 ▲

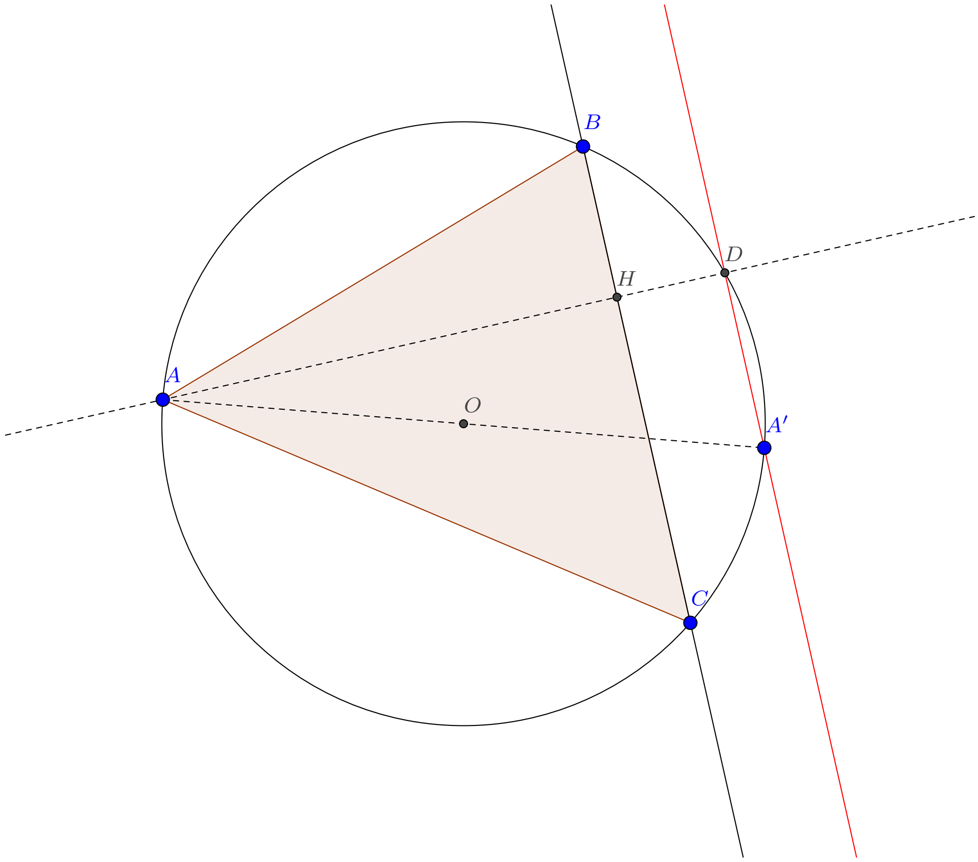
Il revient au même de démontrer que, si le plan est rapporté à un repère orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets ont pour coordonnées des nombres entiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, non alignés et à coordonnées entières. On sait que $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||}$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||}$.

Par suite, ou bien le triangle (ABC) est rectangle en A (et n'est donc pas équilatéral), ou bien $\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$. Dans ce dernier cas, $\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un quotient de deux nombres entiers, et est donc un rationnel. Malheureusement, pour un triangle équilatéral, la tangente de chacun de ses angles vaut $\sqrt{3}$ qui n'est pas un rationnel.

Quand le repère est orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées entières.

Correction de l'exercice 5161 ▲



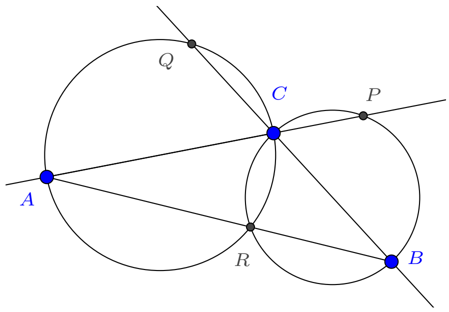
D'après les hypothèses, la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (AH) et ADA' est rectangle en D. Donc, les droites (AH) et $(A'D)$ sont perpendiculaires. Or, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Correction de l'exercice 5162 ▲

Le point A est l'orthocentre de PQB. L'angle est donc droit.

Correction de l'exercice 5163 ▲

Un triangle dont un des côtés est un diamètre du cercle circonscrit est rectangle. On en déduit que les trois droites sont les hauteurs de ABC. Elles sont donc concourantes.



Correction de l'exercice 5164 ▲

Prendre un deuxième point N sur le cercle de telle sorte que (AM) et (BN) se coupent en un point C. On peut alors construire l'orthocentre de ABC. La troisième hauteur fournit une droite orthogonale à (AB), coupant le cercle en deux points P et Q. On peut alors compléter MPQ en un trapèze (isocèle) $MPQR$, en utilisant les diagonales d'un tel trapèze. La droite (MR) est orthogonale à (AB).

Correction de l'exercice 5165 ▲

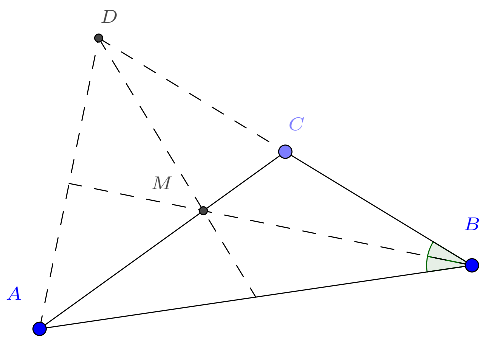
(a) Par définition, (IA) et (IB) sont tangentes au cercle $\mathscr{C}$, donc $IA = IB$. On a de même $IA = IC$ et donc I est le milieu de $[BC]$. Le triangle ABC est donc un triangle d'écolier et il est rectangle en A.

Correction de l'exercice 5169 ▲

L'exercice se résout assez simplement en utilisant trois triangles isocèles, mais on peut remarquer que les trois tangentes sont les trois axes radicaux, qui s'intersectent tous trois au centre radical des trois cercles.

Correction de l'exercice 5170 ▲

Soit D le symétrique de B par rapport à C.



Alors $[AC]$ est une médiane de ABD et M est son centre de gravité. Comme $BA = 2BC = BD$, le triangle ABD est isocèle en B. On en déduit que la médiane issue de B est également la bissectrice issue de B. Les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{MBC}$ sont donc égaux.

Correction de l'exercice 5173 ▲

Pour montrer $CA = CP$, on va montrer que le triangle CAP est donc isocèle en C.

On a les égalités d'angles :

$$\begin{aligned}\widehat{CAP} &= \widehat{OAB} \text{ car les angles sont opposés par le sommet}\\ &= \pi/2 - \widehat{ABO}\\ &= \pi/2 - \widehat{OPB} \text{ car } POB \text{ est isocèle en } O\\ &= \widehat{APC}\end{aligned}$$

Le triangle CAP est donc isocèle en C, et donc $CA = CP$.

Correction de l'exercice 5174 ▲

Deuxième indication : un des angles du triangle a une mesure $\geqslant \pi/3$, et un autre a une mesure $\leqslant \pi/3$.

Correction de l'exercice 5178 ▲

Pour le cercle de centre P, il suffit de montrer que P est le centre du cercle inscrit du triangle MAB. Pour cela, en notant C le projeté orthogonal de P sur (MA), il suffit de montrer que $PC = PH$, ou de montrer que $AC = AH$. Or, on a $AC = AH = \cos(\widehat{AMO})/OA$.

D'autres solutions sont possibles, par exemple avec des homothéties.

Correction de l'exercice 5188 ▲

Soit f la transformation considérée.

(a) f est la translation de vecteur $\vec{u}(3,-1)$.

(b) $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3,0)$.

(c) $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

(d) $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1-2i$. Comme $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1,-2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 5194 ▲

Cercle circonscrit au triangle $A'BC$ symétrique de ABC par rapport à (BC).

Correction de l'exercice 5195 ▲

$xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = r^2 - OM^2$ avec $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O,r)$.
$xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = xAM^2 + yBM^2 + zCM^2$.

Correction de l'exercice 5197 ▲

Nous savons que la distance d'un point $M_0(x_0,y_0)$ à une droite D d'équation $ax+by+c=0$ est donnée par la formule $d(M_0,D) = \frac{|ax_0+by_0+c_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Pour une droite D_λ la formule donne : $d(M_0,D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)x_0+2\lambda y_0-(4\lambda+2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2}}$.

Analyse.
On cherche un point $M_0 = (x_0,y_0)$ tel que pour tout λ, $d(M_0,D_\lambda) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.
L'égalité $d(M_0,D_\lambda)^2 = k^2$ conduit à

$$\Big((1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda+2)\Big)^2 = k^2\Big((1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\Big)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Nos inconnues sont x_0, y_0, k. On regarde l'égalité comme une égalité de deux polynômes en la variable λ.
Pour ne pas avoir à tout développer on raffine un peu : on identifie les termes de plus haut degré en λ^4 : $x_0^2\lambda^4 = k^2\lambda^4$ donc $x_0^2 = k^2$.
En évaluant l'égalité pour $\lambda = 0$ cela donne $(x_0-2)^2 = k^2$. On en déduit $(x_0-2)^2 = x_0^2$ dont la seule solution est $x_0 = 1$. Ainsi $k = 1$ (car $k > 0$).
L'égalité pour $\lambda = +1$ donne $(2y_0-6)^2 = 4k^2$ et pour $\lambda = -1$ donne $(-2y_0+2)^2 = 4k^2$. La seule solution est $y_0 = 2$.

Synthèse. Vérifions que le point de coordonnées $M_0 = (1,2)$ est situé à une distance $k = 1$ de toutes les droites D_λ.
Pour $(x_0,y_0) = (1,2)$, on trouve : $d(M_0,D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)+4\lambda-(4\lambda+2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2}} = \frac{|\lambda^2+1|}{\sqrt{(\lambda^2+1)^2}} = \frac{|\lambda^2+1|}{|\lambda^2+1|} = 1$. Donc $M_0 = (1,2)$ est bien équidistant de toutes les droites D_λ.

Correction de l'exercice 5199 ▲

Décomposer les rotations en symétries.

Correction de l'exercice 5200 ▲

la symétrie centrale $(\alpha+\beta+\gamma=\pi)$ autour de K, point de contact du cercle inscrit et de (AC).

Correction de l'exercice 5202 ▲

$x' = \frac{ay^2}{x^2+y^2-ax}$, $y' = \frac{-axy}{x^2+y^2-ax}$, M' est bien défini ssi M n'appartient pas au cercle de diamètre $[AO]$.

Soit D le demi-disque supérieur de diamètre $[AO]$, D est caractérisé par les inégalités $x^2+y^2-ax<0$, $y>0$ d'où $x'<0$ et $y'>0$. La réciproque se traite (péniblement) en remarquant que seuls les points de D ont une image dans ce quart de plan et que f est quasi-involutive.

Correction de l'exercice 5203 ▲

(D) est une droite de vecteur normal $(1,3)$. Le projeté orthogonal $p(M_0)$ de M_0 sur (D) est de la forme $M_0+\lambda.\vec{n}$ où λ est un réel à déterminer. Le point $M_0+\lambda.\vec{n}$ a pour coordonnées $(x_0+\lambda, y_0+3\lambda)$.

$$M_0+\lambda.\vec{n} \in (D) \Leftrightarrow (x_0+\lambda)+3(y_0+3\lambda)-5=0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-x_0-3y_0+5}{10}.$$

$p(M_0)$ a pour coordonnées $(x_0+\frac{-x_0-3y_0+5}{10}, y_0+3\frac{-x_0-3y_0+5}{10})$ ou encore $(\frac{9x_0-3y_0+5}{10}, \frac{-3x_0+y_0+15}{10})$.
Le symétrique orthogonal $s(M_0)$ vérifie : $s(M_0) = M_0+2\overrightarrow{M_0p(M_0)}$.
Ses coordonnées sont donc $(x_0+2(\frac{9x_0-3y_0+5}{10}-x_0), y0+2(\frac{-3x_0+y_0+15}{10}-y_0)$ ou encore $(\frac{4x_0-3y_0+5}{5}, \frac{-3x_0-4y_0+15}{5})$.
(Remarque. Si on n'avait pas déjà $p(M_0)$ on aurait cherché le symétrique sous la forme $M_0+\lambda.\vec{n}$, λ étant entièrement déterminé par la condition : le milieu du segment $[M_0, s(M_0)]$ appartient à (D).)

Correction de l'exercice 5204 ▲

Puisque $(ABDC)$ un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $(1,1)$.

Correction de l'exercice 5205 ▲

(a) Soient k et k' deux réels non nuls, Ω et Ω' deux points (pas nécessairement distincts), puis h (resp.h') l'homothétie de centre Ω (resp. Ω') et de rapport k (resp. k').
Soient M un point du plan, puis $M' = h(M)$ et $M'' = h'(M')$.

$$M'' = \Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'M'} = \Omega'+k'(\overrightarrow{\Omega'\Omega}+\overrightarrow{\Omega M'}) = \Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}\ (*)$$

Chechons alors les points invariants par $h'\circ h$.

$$h'\circ h(M) = M \Leftrightarrow \Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M} = M \Leftrightarrow -\overrightarrow{\Omega' M}+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow (kk'-1)\overrightarrow{\Omega M} = (k'-1)\overrightarrow{\Omega\Omega'}\ (**)$$

1er cas. Si $kk'\neq 1$, $(**) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k'-1}{kk'-1}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, ce qui signifie que l'équation $(**)$ a une et eune seule solution que l'on note Ω'', ou encore $h'\circ h$ a un et un seule point invariant, le point Ω'' tel que $\Omega'' = \Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''}$.
Mais alors, l'égalié $(*)$ s'écrit pour tout point M

$$M'' = \Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M} = \Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''}+kk'\overrightarrow{\Omega'' M} = \Omega''+kk'\overrightarrow{\Omega'' M}.$$

$h'\circ h$ est donc l'homothétie de rapport kk' et de centre Ω''. On doit noter que le centre Ω'' est sur la droite $(\Omega\Omega')$.

$\boxed{\text{Si } kk'\neq 1,\ h'\circ h \text{ est une homothétie de rapport } kk'.}$

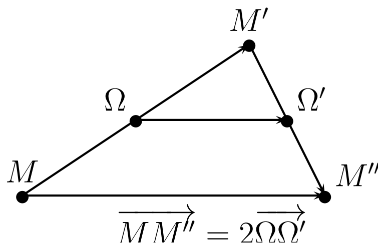
2ème cas. Si $kk' = 1$, l'égalité $(*)$ s'écrit pour tout point M, $M'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ et donc

$$\overrightarrow{MM''} = \Omega' + k'(\Omega - \Omega') + (M - \Omega) - M = (1 - k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}.$$

Dans ce cas, $h' \circ h$ est la translation de vecteur $(1 - k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

En résumé, **la comoposée de deux homothéties de rapport respectifs k et k′ tous deux non nuls est une homothétie de rapport kk′ si $\mathbf{kk' \neq 1}$ et une tranlation si $\mathbf{kk' = 1}$** (ce résultat est à connaître).

(b) C'est un cas particulier de la question précédente. Une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1. Puisque $(-1)(-1) = 1$, $s' \circ s$ est une translation. Son vecteur est $\overrightarrow{\Omega s' \circ s(\Omega)} = \overrightarrow{\Omega s'(\Omega)} = 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.



La composée de deux symétries centrales est une translation.

(c) Soit Ω' le point tel que $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{\Omega'\Omega}$, c'est-à-dire $\Omega' = \Omega - \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$. Soit s' la symétrie centrale de centre Ω'. D'après 2), $s \circ s'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega'\Omega} = \overrightarrow{u}$. Par suite, $s \circ t = s \circ s \circ s' = s'$.

La composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale.

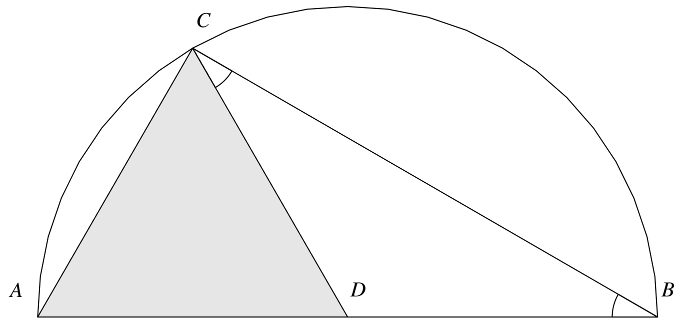
Correction de l'exercice 5208 ▲

On relie les points A et B. On construit le milieu I de $[AB]$. On a donc $AI = \frac{1}{2}AB$. On trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AI. Ceci fait, On trace le cercle $\mathscr{C}'$ centré en I de diamètre AB. Nommons C l'un des deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Il s'agit de l'une des deux solutions possibles.

En effet, par construction $AC = \frac{1}{2}AB$, puisque C appartient à $\mathscr{C}$. En outre ACB est rectangle en C. En effet, ACB est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}'$ et AB est un diamètre de $\mathscr{C}'$.

Correction de l'exercice 5209 ▲

Comme par hypothèse $DA = DC = DB$, les points A, B et C sont situés sur le cercle de centre A et de diamètre AB. Donc, ACB est rectangle en C.



Puisque ADC est équilatéral, $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} = 60°$. Comme ACB est rectangle en C, donc $\widehat{ACB} = 90°$. De la relation $180° = \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA}$ on tire $\widehat{CBA} = 30°$.

Correction de l'exercice 5211 ▲

(a) Soit G l'isobarycentre. On a

$$G=\frac{A+B+C+D}{4}=\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{C+D}{2}}{2}$$

Donc si I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[CD]$, on a montré que G est le milieu de $[IJ]$. On construit I et J, puis leur milieu G.

(b) Soit H le deuxième barycentre. Par définition,

$$H=\frac{A+B+3C+3D}{8}=\frac{1}{4}\left(\frac{A+B}{2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

On construit donc I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$, puis on construit le barycentre de $(I,1/4)$ et $(J,3/4)$.

(c) Même technique : tracer les milieux I et J de $[AB]$ et $[CD]$, puis tracer le milieu K de $[IJ]$. L'isobarycentre du pentagone est le barycentre de $(K,4/5)$ et $(E,1/5)$.

Correction de l'exercice 5213 ▲

(a) Les droites sont perpendiculaires.

(b) Pour les tangentes communes extérieures, le cercle de centre O' et de rayon $r'-r$ intersecte le cercle de diamètre $[OO']$ en deux points C et D. Les droites $(O'C)$ et $(O'D)$ coupent $\mathscr{C}'$ en deux points A' et B'. Les tangentes extérieures sont les parallèles à (OC) et (OD) passant par A' et B'. Pour les tangentes intérieures, utiliser le cercle de centre O' et de rayon $r'+r$.

Correction de l'exercice 5217 ▲

Tracer le lieu des points à distance R des cercles et droites en présence. Leurs éventuels points d'intersection fournissent des solutions.

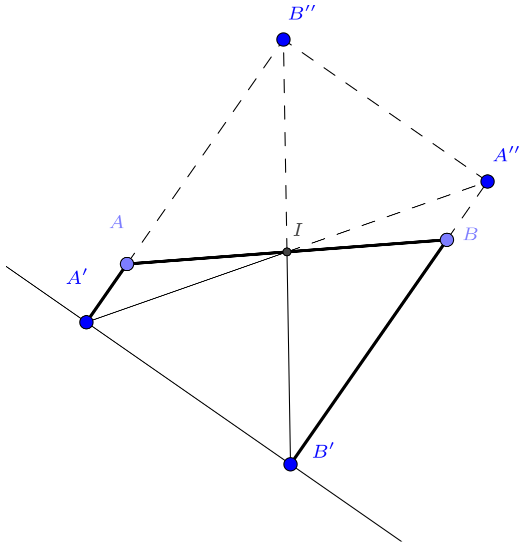
Correction de l'exercice 5221 ▲

Si n est impair, la composée définie dans l'indication est une symétrie centrale, et son centre (que l'on peut construire en considérant les images de plusieurs points) est un sommet du polygone. On récupère ensuite les autres sommets en appliquant les autres symétries centrales les unes après les autres.

Remarque : cet exercice peut également se résoudre à l'aide de nombres complexes, en écrivant que le milieu de deux points a pour affixe $(a+b)/2$. On obtient un système linéaire, dont on discute l'existence de solutions.

Correction de l'exercice 5222 ▲

On complète le trapèze rectangle $ABB'A'$ en un rectangle comme conseillé, en utiisant la symétrie de centre I.



Le résultat demandé est alors une conséquence du fait que les diagonales d'un rectangle sont égales et se coupent en leur milieu.

Correction de l'exercice 5223 ▲

Correction de l'exercice 5224 ▲

Tracer des rayons de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ parallèles entre eux.

Correction de l'exercice 5226 ▲

Analyse. Traçons comme suggéré une figure avec le carré déjà construit : on trace un carré puis on trace un triangle adéquat autour. On constate qu'un des côtés du carré, notons-le $[IJ]$, est parallèle à $[BC]$. Il y a une homothétie h de centre A qui envoie $[IJ]$ sur $[BC]$. Alors, l'image du carré $IJKL$ par h est un carré dont un des côtés est $[BC]$. Notons $BCDE$ ce carré et traçons-le. On constate que $h(K) = D$ et $h(L) = E$, c'est-à-dire $K = h^{-1}(D)$ et $L = h^{-1}(E)$. Il ne reste plus qu'à faire la synthèse.

Correction de l'exercice 5227 ▲

(a) Le triangle des milieux est l'image de ABC par l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est l'image du cercle circonscrit par cette homothétie, et donc que son centre est l'image de Ω par cette homothétie : il est donc sur la droite $(G\Omega)$.

(b) Montrons que $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$. Considérons la composition de l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$ avec l'homothétie de rapport -1 et de centre J. C'est une homothétie de rapport $1/2$ qui envoie $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$. Comme elle envoie de plus Ω sur J, son centre est le point M tel que $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M\Omega}$. Or on sait déjà, par exemple en considérant l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, que $\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. On en déduit que $M = H$.

Correction de l'exercice 5235 ▲

Soit O le pt d'intersection. On note ϕ l'homothétie qui envoie A sur B, et ψ celle qui envoie B sur C. Alors $\phi\psi = \psi\phi$. L'image de A est C et l'image de A' est C', d'où le parallélisme demandé.
Si les droites sont parallèles, on remplace les homothéties par des translations.

Correction de l'exercice 5237 ▲

La partie linéaire de $f \circ g^{-1}$ est l'identité. Donc c'est une translation. En regardant l'image d'un des centres, on trouve que le vecteur est $(1-\lambda)O1O2$.

Correction de l'exercice 5238 ▲

Appliquer la translation au cercle. (Si on n'a pas donné le centre du cercle, commencer par construire le centre.)

Les points d'intersection des deux cercles fournissent les (ou la) solutions du problème.

Correction de l'exercice 5239 ▲

Après avoir suivi l'indication, translater ce cercle de manière à ce qu'il contienne le point A.

Correction de l'exercice 5240 ▲

Commencer par tracer la bissectrice, puis (OA). Ensuite, tracer un cercle quelconque tangent aux deux droites (dans le même secteur angulaire), et utiliser une homothétie.

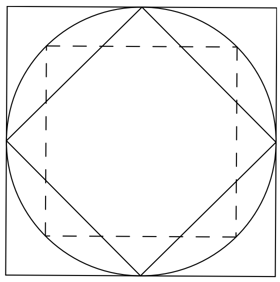
Note : les exercices faisant intervenir des homothéties se résolvent plus facilement en « partant de la fin », c'est-à-dire en procédant par analyse-synthèse et en faisant une figure approximative de ce que sera la solution.

Correction de l'exercice 5242 ▲

On a et $MM' = 2IJ$ et d'autre part I et J sont les projetés de O et O' sur la droite D, donc $IJ \leqslant OO'$ avec égalité ssi $(OO')//(IJ)$, dans ce cas le maximum est donc $2OO'$.

Correction de l'exercice 5243 ▲

En suivant l'indication on comprend qu'un carré inscrit dans un cercle inscrit au carré initial $ABCD$ a une aire deux fois plus petite que $ABCD$.



On en déduit une construction du petit carré : ses sommets sont les points d'intersection des diagonales avec le cercle inscrit.

Correction de l'exercice 5244 ▲

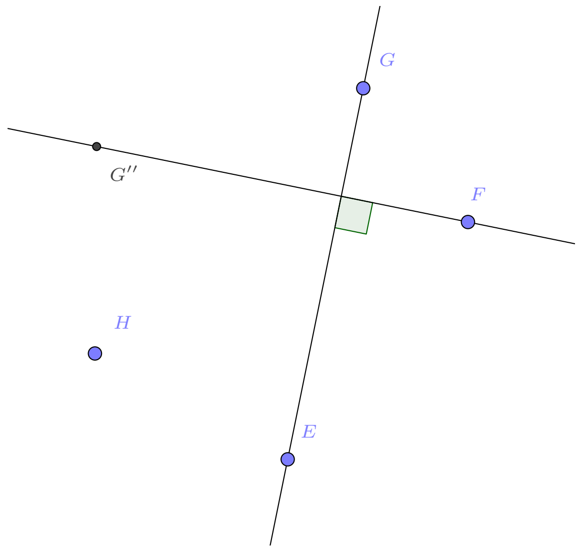
On construit l'image du carré par une rotation d'angle $\pi/4$. Les points d'intersection des deux carrés forment un octogone régulier qui répond à la question.

Correction de l'exercice 5245 ▲

Voici une solution dans une configuration « générique ».

Commençons par analyser le problème. On suppose que $ABCD$ est direct et que $E \in [AB]$, $F \in [BC]$ etc. Considérons la rotation de centre O (le centre du carré), et d'angle $\pi/4$. L'image du segment $[EG]$ est un segment $[E'G']$, que l'on suppose distinct de $[FH]$. En fait, on suppose pour simplifier $E' \neq F$. Considérons alors la translation de vecteur $\overrightarrow{E'F}$. Elle envoie G' sur un point G'' appartenant à la droite (DA). Si on suppose que ce point est différent de H, alors on a $(DA) = (G''H)$.

Voici comment obtenir le point G''. On construit la perpendiculaire à (EG) passant par F, et sur cette droite, on place le point G'' tel que $FG'' = EG$ et $(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{FG''}) = \pi/2$. Ceci permet de tracer la droite (HG'') c'est-à-dire (AD).



On projette ensuite les points E et G sur cette droite, ce qui donne A et D. On peut ensuite terminer la construction du carré.
Il existe d'autres solutions qui utilisent le théorème de l'angle au centre.

Correction de l'exercice 5246 ▲

La rotation de centre O (le centre du carré) et d'angle $\pi/2$ envoie le triangle DAM sur ABN. On en déduit que $(DM)\perp(AN)$ et donc que (AN) est une hauteur de DMN. On procède de même pour la deuxième hauteur.

Correction de l'exercice 5247 ▲

Tracer une figure en prolongeant les segments $[OP]$ et $[OR]$, et considérer une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

Correction de l'exercice 5253 ▲

Deux carrés sont toujours semblables, et une similitude qui n'est pas une translation admet toujours un point fixe, son centre.

Correction de l'exercice 5255 ▲

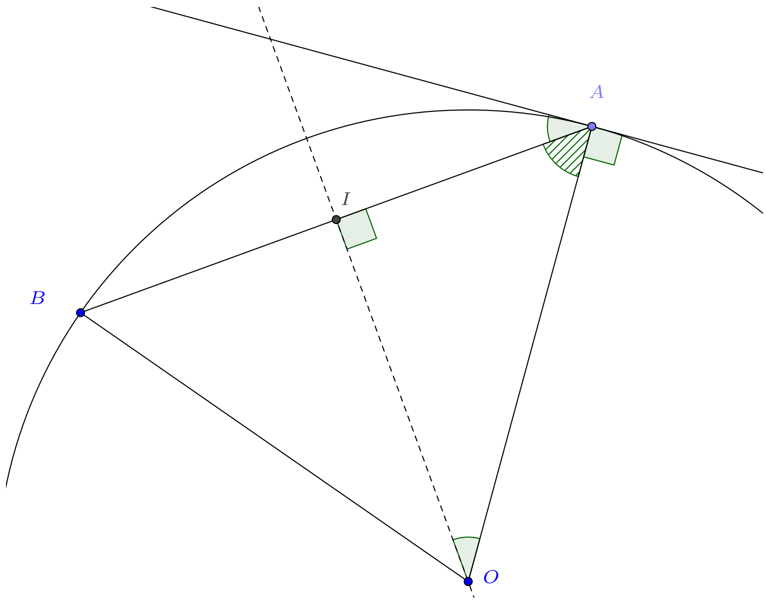
Les triangles $AA'I$ et $BB'C$ sont semblables, par une similitude d'angle $\pi/2$. L'image de (AJ) par cette similitude est (BI).

Correction de l'exercice 5257 ▲

La composée est une translation, on en déduit que $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$.

Correction de l'exercice 5259 ▲

Traçons la figure, où on a placé I le milieu de $[AB]$, de telle sorte que $\frac{1}{2}(OA, OB) = (OA, OI)$.



Les angles $(AO,\mathscr{T})$ et (AI,IO) sont droits. On a d'une part :

$$0 = (\mathscr{T},\mathscr{T}) = (\mathscr{T},AI) + (AI,AO) + \pi/2,$$

et d'autre part, dans le triangle AIO :

$$0 = (AI,AO) + (IO,IA) + (OA,OI) = (AI,AO) + \pi/2 + (OA,OI).$$

Finalement, on a donc :

$$(\mathscr{T},AB) = (\mathscr{T},AI) = -(AI,AO) - \pi/2 = (OA,OI) = \frac{1}{2}(OA,OB),$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Correction de l'exercice 5260 ▲

Par le théorème de l'angle inscrit, c'est un arc de cercle, dont le centre est sur la médiatrice de $[AB]$.
Par le cas limite du théorème de l'angle inscrit, on sait aussi que si $\mathscr{T}$ est la tangente à ce cercle en A, alors $(\mathscr{T},AB) = \alpha$.
On trace donc la droite $\mathscr{T}$ faisant un angle α avec (AB) en A, puis la perpendiculaire à $\mathscr{T}$ passant par A. Cette droite coupe la médiatrice en un point O qui est donc le centre du cercle recherché.

Correction de l'exercice 5261 ▲

Construisons un triangle AIB isocèle rectangle en I et le cercle de centre I et de rayon IA. Ce cercle intersecte la médiatrice de $[AB]$ en un point O qui vérifie $\widehat{AOB} = \pm\pi/4$, par le théorème de l'angle au centre. C'est donc le centre d'un octogone appuyé sur $[AB]$. En traçant le cercle de centre O et de rayon OA, on peut terminer la construction de cet octogone.

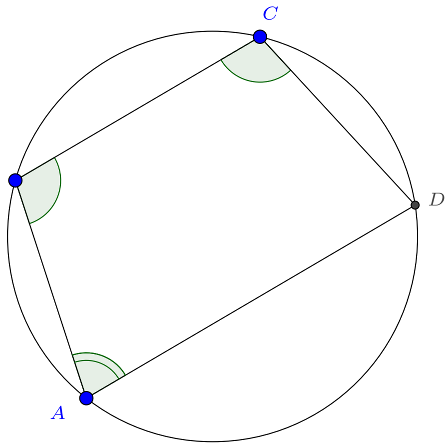
Correction de l'exercice 5262 ▲

Commençons par rappeler deux points :

(a) dans un trapèze, deux angles non adjacents à une même base sont supplémentaires, puisque les deux bases sont parallèles.

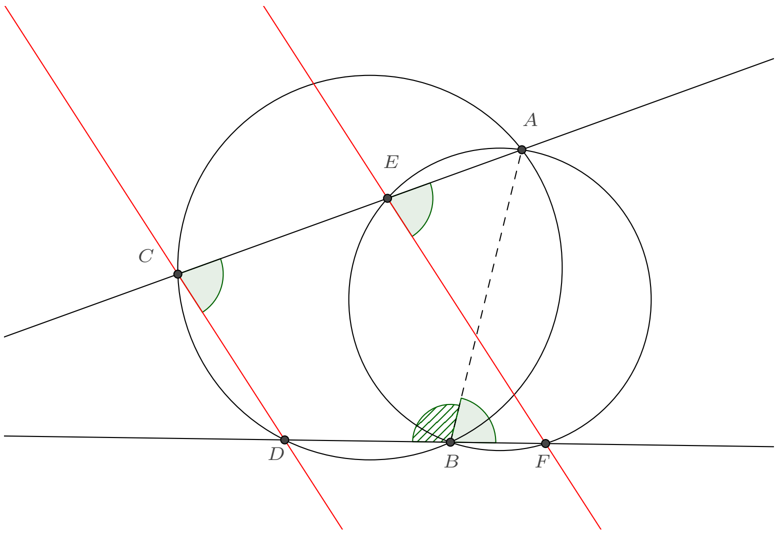
(b) un quadrilatère non croisé est inscriptible ssi les angles opposés sont supplémentaires.

Un trapèze est isocèle ssi les angles adjacents à une même base sont égaux, donc (par le premier point ci-dessus) ssi les angles opposés sont supplémentaires, donc (par le deuxième point) ssi il est inscriptible.

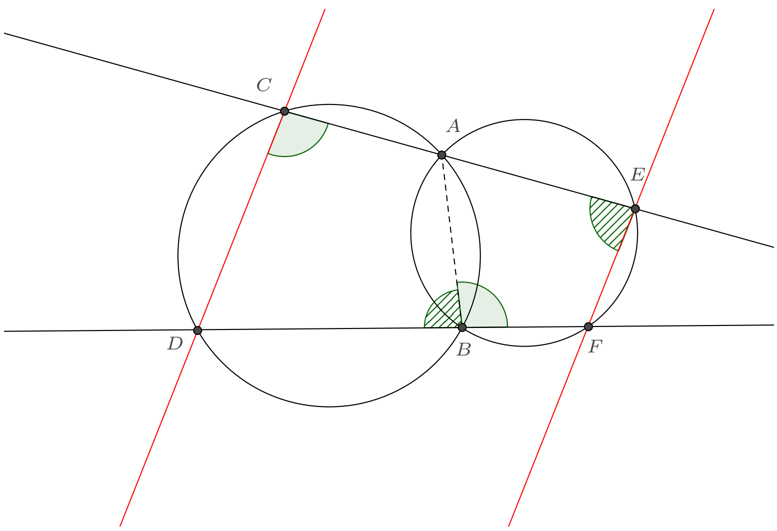


Correction de **l'exercice 5264 ▲**

Traçons une figure. *On marque dès à présent quelques égalités d'angles obtenues par le théorème de l'angle inscrit :*



Les égalités d'angles repérées sur la figure permettent de voir la solution, au moins dans la configuration particulière dessinée. On voit en effet que les angles $\widehat{ECD}$ *et* $\widehat{AEF}$ *sont égaux. Attention toutefois, les angles géométriques sont trompeurs et les égalités que l'on voit sur une figure peuvent dépendre de la façon de tracer la figure. Sur la figure ci-dessous par exemple, les angles en question ne sont pas égaux mais supplémentaires.*

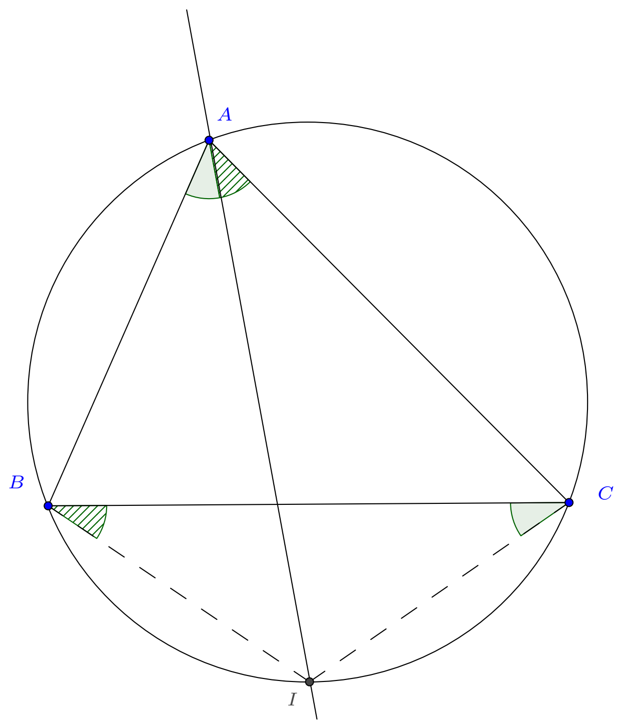


Il ne reste plus qu'à rédiger rigoureusement la solution avec des angles de droites, en s'appuyant sur l'intuition donnée par la figure.
Pour montrer que (CD) et (EF) sont parallèles, il suffit par exemple de montrer qu'elles forment le même angle avec la droite (CA). Or on a la suite d'égalités d'angles de droites :

$$\begin{aligned}(CD,CA) &= (BD,BA) \text{ car } CDAB \text{ est inscriptible}\\ &= (BF,BA) \text{ car } (BD)=(BF)\\ &= (EF,EA) \text{ car } BFAE \text{ est inscriptible}\\ &= (EF,CA) \text{ car } (EA)=(CA).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5265 ▲

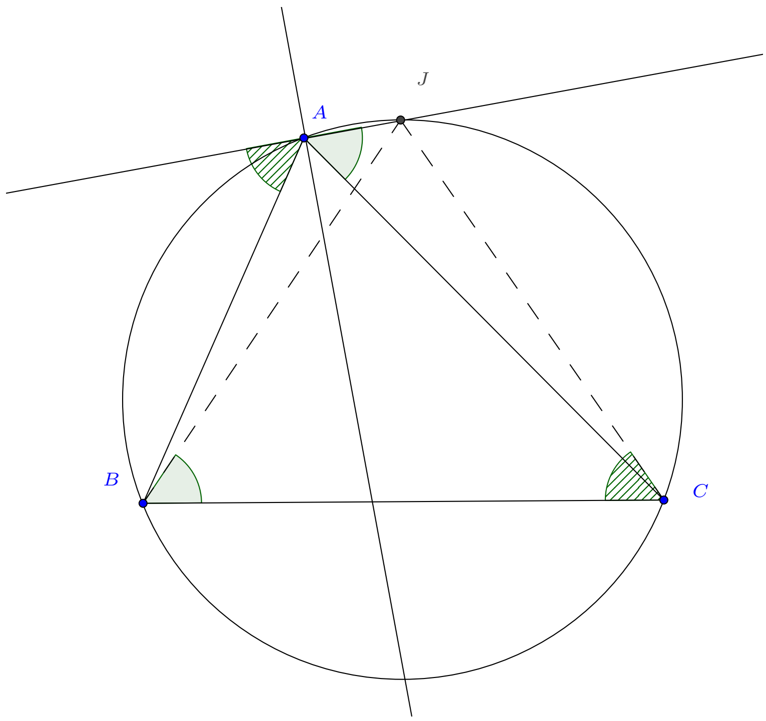
Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que IBC et JBC sont isocèles en I et J.
On commence par prouver le résultat pour I :



Pour montrer que BCI est isocèle en I, il suffit de montrer que $(BC,BI)=(CI,CB)$. Or, on a

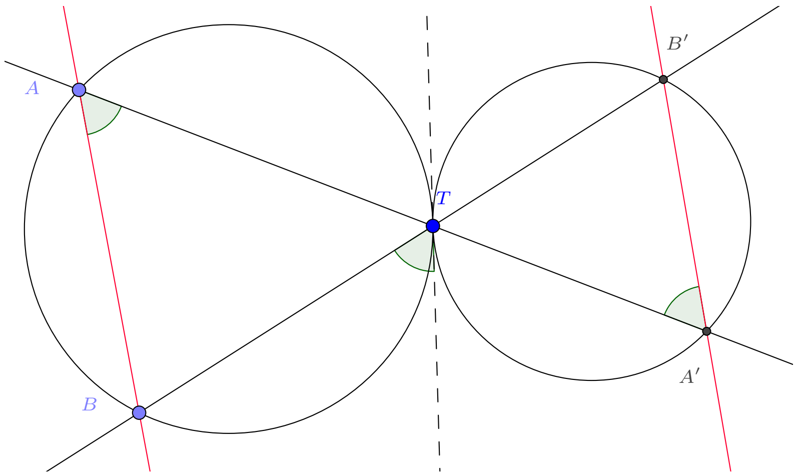
$$\begin{aligned}(BC,BI) &= (AC,AI) \text{ car } ABIC \text{ est inscriptible}\\ &= (AI,AB) \text{ car } (AI) \text{ est une bissectrice de } (AC) \text{ et } (AB)\\ &= (CI,CB) \text{ car } ABIC \text{ est inscriptible.}\end{aligned}$$

On remarque qu'en rédigeant avec des angles de droites, on n'a pas eu besoin (ni en fait la possibilité) de préciser si la bissectrice était intérieure ou extérieure, ce qui implique que la preuve sera la même pour J. Traçons juste une figure pour visualiser la deuxième situation.



Correction de l'exercice 5266 ▲

Soit $\mathscr{T}$ la tangente commune aux deux cercles.



Par le cas limite du théorème des angles inscrits, on a

$$(AB,AT) = (BT,\mathscr{T}) = (B'T,\mathscr{T}) = (A'B',A'T)$$

Comme $(AT) = (A'T)$, on en déduit que

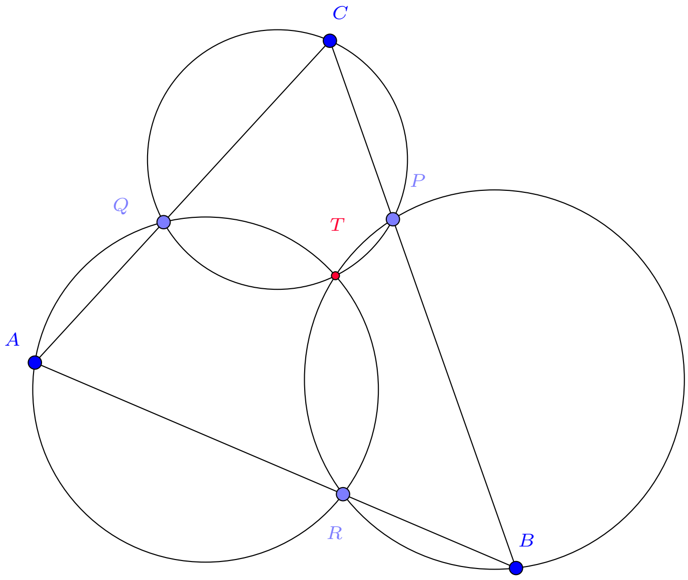
$$(AB,AT) = (A'B',AT),$$

et donc que $(AB)//(A'B')$.

Autre preuve : considérer une homothétie de centre T qui envoie un cercle sur l'autre.

Correction de l'exercice 5267 ▲

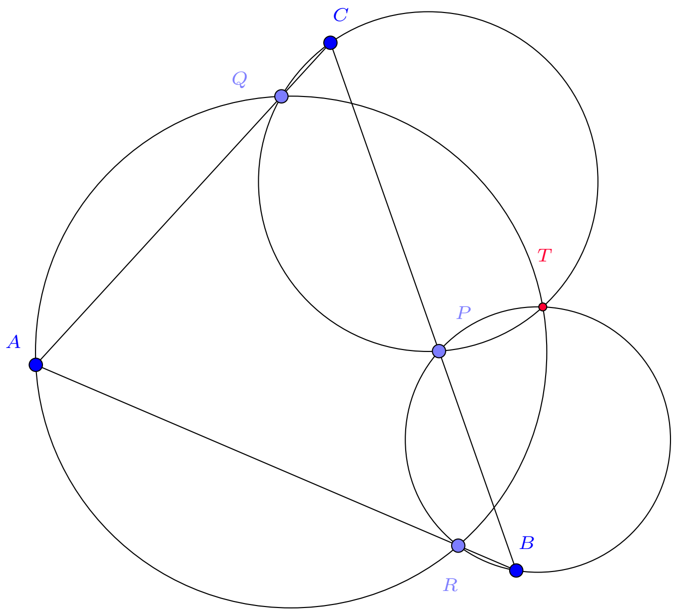
Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles circonscrits à ARQ et BPR. Traitons le premier cas, celui où ils se coupent en R et en un deuxième point T.



Il s'agit de montrer que T,P,C,Q sont cocycliques.
Par le cours, il suffit de montrer l'égalité d'angles de droites $(QT,QC)=(PT,PC)$. Or on a :

$$\begin{aligned}(QT,QC) &= (QT,QA) \text{ car } (QC)=(QA)\\ &= (RT,RA) \text{ car } AQTR \text{ est inscriptible}\\ &= (RT,RB) \text{ car } (RA)=(RB)\\ &= (PT,PB) \text{ car } PTRB \text{ est inscriptible}\\ &= (PT,PC) \text{ car } (PB)=(PC).\end{aligned}$$

Attention, si on utilise des angles géométriques au lieu des angles de droites pour rédiger la solution, on peut être amené à distinguer plusieurs configurations possibles, par exemple celle-ci :



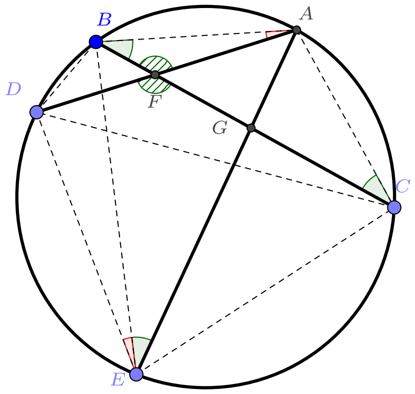
(Les angles $\widehat{BRT}$ et $\widehat{BPT}$ sont supplémentaires dans la première figure, et égaux dans la seconde.)
Le second cas, celui où les deux premiers cercles sont tangents en R, se traite à l'aide du cas limite du théorème de l'angle au centre.

Correction de l'exercice 5268 ▲

Les deux parties ont la même aire.

Correction de l'exercice 5269 ▲

Traçons une figure :



[Sur la figure, on voit que les angles $\widehat{GFD}$ et $\widehat{GED}$ sont supplémentaires, car $\widehat{GFD} = \widehat{BFA}$ et $\widehat{GED} = \widehat{GEB} + \widehat{BED} = \widehat{FBA} + \widehat{BAF}$. Il ne reste plus qu'à rédiger cette preuve un peu plus rigoureusement avec des angles de droites.]

Montrons que $(FD,FG) = (ED,EG)$, ce qui prouve que $EDFG$ est inscriptible.

Tout d'abord, comme $(FD) = (FA)$ et $(FG) = (FB)$, on a

$$(FD,FG) = (FA,FB).$$

Ensuite, la somme des angles du triangle ABF vaut π, donc en termes d'angles de droites on a la relation $(FA,FB)+(AB,AF)+(BF,BA) = 0$, c'est-à-dire :

$$(FA,FB) = (AF,AB)+(BA,BF).$$

Calculons chacun de ces deux angles. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}(AF,AB) &= (AD,AB) \text{ car } (AD) = (AF)\\ &= (ED,EB) \text{ car } ABDE \text{ est inscriptible.}\end{aligned}$$

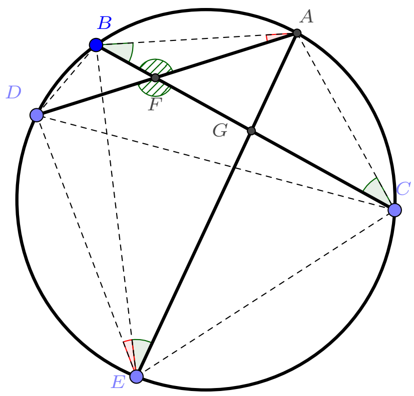
Et d'autre part :

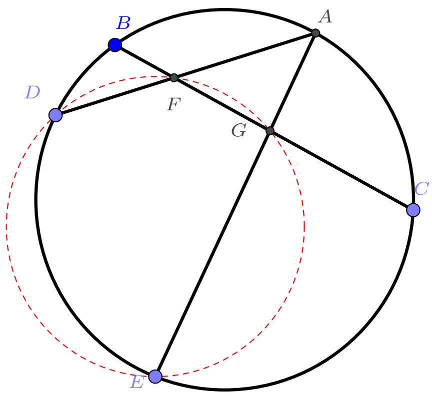
$$\begin{aligned}(BA,BF) &= (BA,BC) \text{ car } (BF) = (BC)\\ &= (CB,CA) \text{ car } ABC \text{ est isocèle en } A\\ &= (EB,EA) \text{ car } ABCE \text{ est inscriptible.}\end{aligned}$$

Finalement, on obtient donc :

$$\begin{aligned}(FD,FG) &= (FA,FB)\\ &= (AF,AB)+(BA,BF)\\ &= (ED,EB)+(EB,EA)\\ &= (ED,EA)\\ &= (ED,EG) \text{ car } (EG) = (EA),\end{aligned}$$

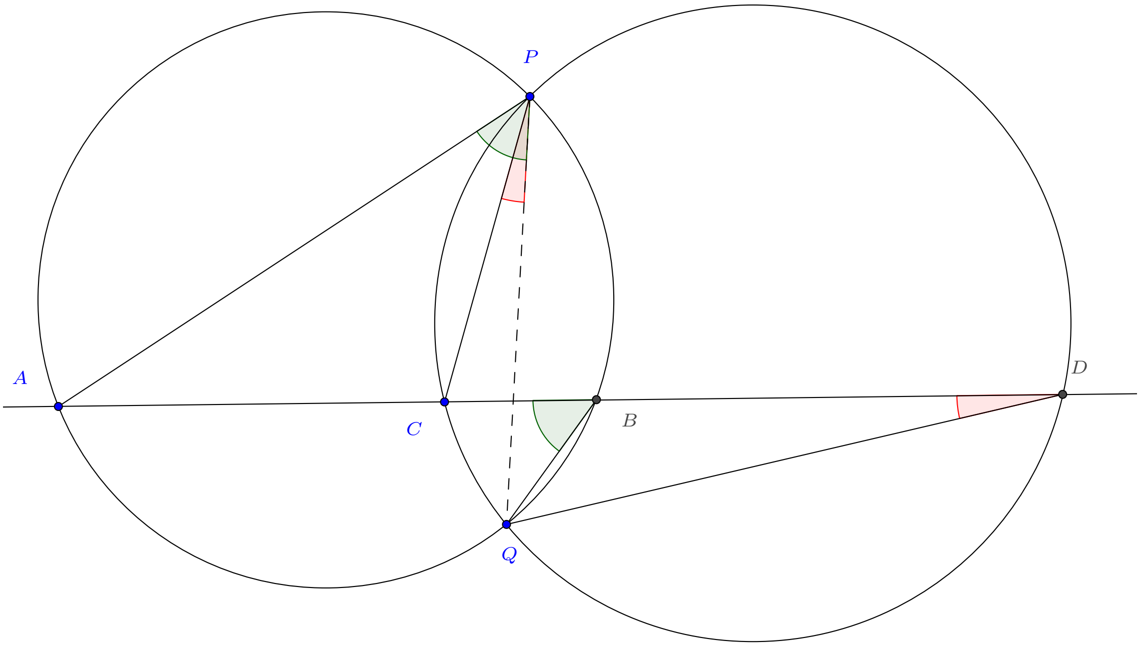
ce qu'il fallait démontrer.





Correction de l'exercice 5270 ▲

Traçons une figure. *[Le fait de marquer toutes les égalités d'angles disponibles donne le résultat. Sur la figure, on ne marque que celles utilisées dans la rédaction proposée.]*



Montrons que $(PA,PC) = (DQ,BQ)$. On a :

$$\begin{aligned}(PA,PC) &= (PA,PQ)+(PQ,PC)\\ &= (BA,BQ)+(DQ,DC) \text{ par cocyclicité dans chaque cercle}\\ &= (BA,BQ)+(DQ,BA) \text{ car } (DC)=(BA)\\ &= (DQ,BQ).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5271 ▲

(a) Soit θ l'angle de la similitude. La partie linéaire $\overrightarrow{\phi}$ de ϕ est une similitude vectorielle d'angle θ. On a donc $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\phi}\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$.

(b) On a $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = (\widehat{\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{CQ}}$ et d'autre part θ : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\phi(A)}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}$. Donc $AQCO$ est inscriptible.

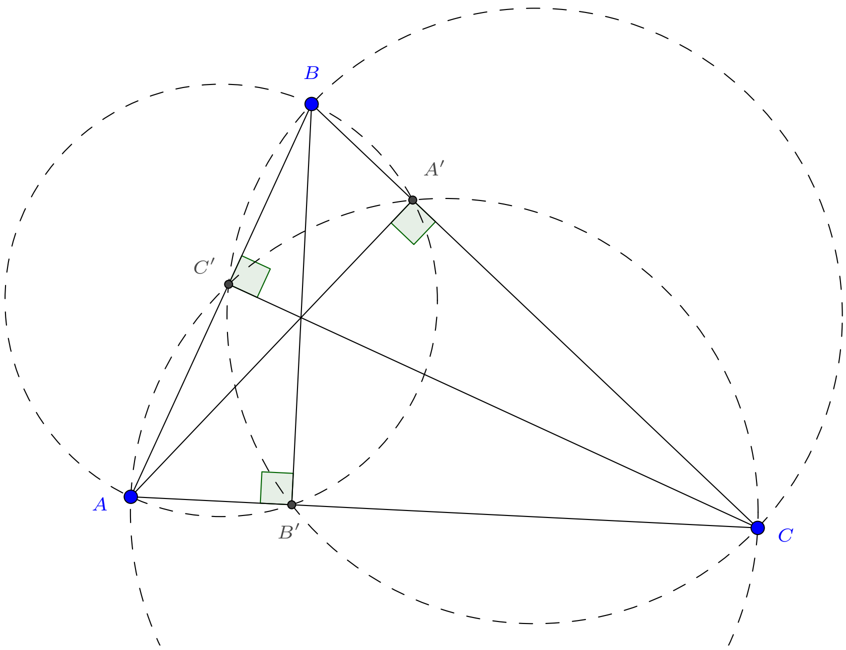
(c) De même $BQDO$ est inscriptible. Donc O appartient à l'intersection des cercles circonscrits à ACQ et BDQ.

(d) Si les segments sont parallèles, la similitude est une homothétie. S'ils sont de plus de même longueur, c'est une translation ou une symétrie centrale.

Correction de l'exercice 5272 ▲

Le quadrilatère $ABA'B'$ est inscriptible dans un cercle de diamètre $[AB]$. En effet, les triangles ABA' et ABB' sont par définition rectangles en A' et B', et ont même hypoténuse $[AB]$.

De même, les quadrilatères $BCB'C'$ et $CAC'A'$ sont inscriptibles dans des cercles de diamètre $[BC]$ et $[CA]$.

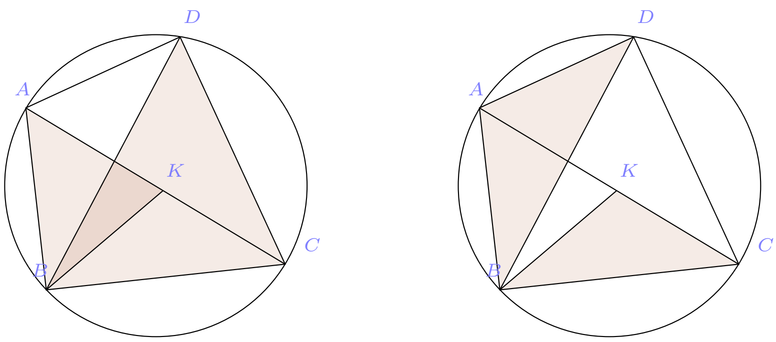


Montrons que la hauteur (BB') est une bissectrice des droites $(B'C')$ et $(B'A')$. Pour cela, on montre que $(B'C',B'B) = (B'B,B'A')$.
On a :

$$\begin{aligned}
(B'C',B'B) &= (CC',CB) \text{ (car } BCB'C' \text{ est inscriptible)}\\
&= (CC',CA') \text{ (mêmes droites)}\\
&= (AC'AA') \text{ (car } ACA'C' \text{ est inscriptible)}\\
&= (AB,AA') \text{ (mêmes droites)}\\
&= (B'B,B'A') \text{ (car } ABA'B' \text{ est inscriptible)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5273 ▲

Le théorème de l'angle inscrit sur l'arc BC donne l'égalité $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. La considération des autres arcs CD, DA et AB donne les égalités $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$, $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.



Suivons l'énoncé. Soit K le point de la diagonale $[AC]$ tel que $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$.
Alors, ABK et DBC sont semblables (première figure) car leurs angles sont égaux : $\widehat{BAK} = \widehat{BDC}$ et $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$. On a une similitude de rapport

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BC}{BK} = \frac{DC}{AK},$$

envoyant ABK sur DBC.

De même, ABD et KBC sont semblables (deuxième figure) car leurs angles sont égaux : $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{KCB}$ et $\widehat{ABD} = \widehat{KBC}$. La similitude envoyant ABD sur KBC a pour rapport

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}.$$

On a $AC = AK + KC$, donc $AC \cdot BD = AK \cdot BD + KC \cdot BD$, or, $AK \cdot BD = AB \cdot CD$ (première similitude), et $KC \cdot BD = AD \cdot BC$ (seconde similitude), d'où le résultat :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Correction de l'exercice 5277 ▲

La somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 2π :

$$\begin{aligned} 2\pi &= \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} \\ &= 2\widehat{ABI} + 2\widehat{KCD} + 2\widehat{CDK} + 2\widehat{IAB} \end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{ABI} + \widehat{KCD} + \widehat{CDK} + \widehat{IAB} = \pi,$$

autrement dit la somme des demi-angles vaut π.

On termine alors la preuve en utilisant le critère de cocyclicité.

Correction de l'exercice 5278 ▲

On trouve un parallélogramme dont les angles sont les supplémentaires de ceux de $ABCD$.

Correction de l'exercice 5280 ▲

Si ABC est rectangle, l'orthocentre coïncide avec un des sommets et la vérification de l'assertion est relativement facile. Dans la suite on suppose qu'on n'est pas dans ce cas.

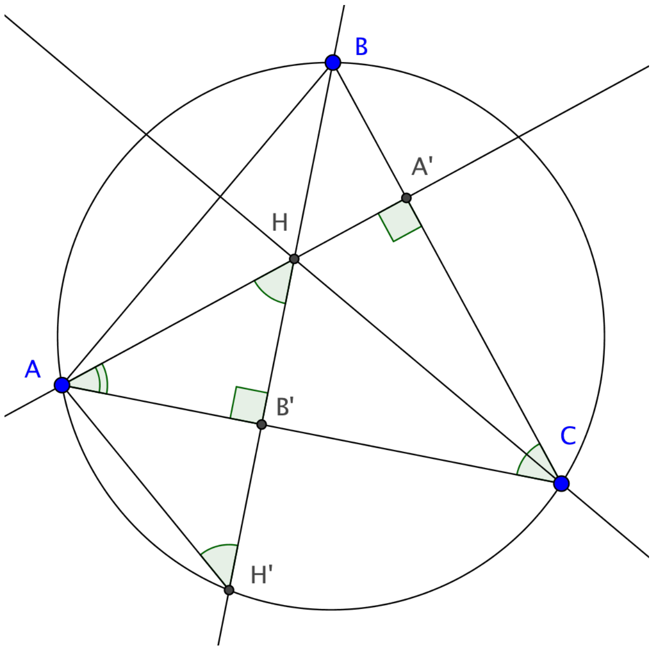
Par définition, H' est le symétrique de H par rapport à (AC) si (AC) est la médiatrice de $[HH']$. C'est cela qu'on doit montrer.

D'autre part, par définition, on a $(AC) \perp (HH')$, donc (AC) est la hauteur de AHH' issue de A.

Donc si AHH' est isocèle en A, alors cette hauteur de AHH' est aussi la médiane issue de A et c'est encore la médiatrice du côté opposé à A c'est-à-dire $[HH']$.

Il suffit donc de montrer que AHH' est isocèle en A. Pour cela, il suffit de montrer que les angles adjacents à la base sont égaux, autrement dit $\widehat{AHH'} = \widehat{AH'H}$ avec des angles géométriques non orientés, ou plus précisément avec des angles orientés $(H'A, H'H) = (HH', AH)$.

Suivant la méthodologie habituelle, on marque de façon systématique les angles égaux (ou complémentaires, supplémentaires etc) sur la figure. Ceci indique la marche à suivre pour la preuve.

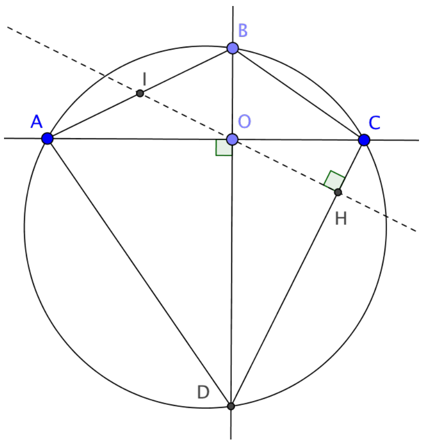


Montrons que $(H'A, H'H) = (HH', AH)$. On a :

$$\begin{aligned}
(H'A, H'H) &= (H'A, H'B) \text{ (car } (H'H) = (HB)\text{)} \\
&= (CA, CB) \text{ (car } ABCH' \text{ est inscriptible)} \\
&= (CA, AH) + (AH, CB) \text{ (par Chasles)} \\
&= (CA, AH) + \pi/2 \text{ (car } (AH) \text{ est une hauteur de } ABC\text{)} \\
&= (CA, AH) + (HH', CA) \\
&= (HH', AH) \text{ (par Chasles)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5281 ▲

Rappelons la figure :



(a) On rappelle que le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le centre de son cercle circonscrit (une autre façon de le dire est que l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit).

Si $IO = IA$, cela signifie que I est sur la médiatrice de $[OA]$. D'autre part, AOB est rectangle en O et I est par définition sur l'hypoténuse $[AB]$. Donc I est l'intersection de l'hypoténuse et d'une médiatrice d'un autre côté, c'est donc le milieu de l'hypoténuse par la propriété rappelée plus haut. Il est donc suffisant de montrer que $IO = IA$.

(b) Pour montrer que $IO = IA$, il suffit de montrer que IOA est isocèle en I, c'est-à-dire que $(AI, AO) =$

(OA, OI). Or, on a :

$$\begin{aligned}
(AI, AO) &= (AB, AC) \text{ (mêmes droites)} \\
&= (DB, DC) \text{ (car } ABCD \text{ est inscriptible} \\
&= (DO, DH) \text{ (mêmes droites)} \\
&= (DO, OH) + (OH, DH) \text{ (par Chasles)} \\
&= (DO, OH) + \pi/2 \text{ (par définition de } H) \\
&= (OB, OI) + \pi/2 \text{ (mêmes droites)} \\
&= (OB, OI) + (OA, OB) \text{ (car } (OA) \perp (OB) \text{ d'après l'énoncé)} \\
&= (OA, OI) \text{ (par Chasles)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5282 ▲

(a) Soit $\mathscr{D}'$ une autre droite passant par P et intersectant le cercle en deux points A' et B'. Les quantités $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ et $\overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$ ont forcément même signe, donc il suffit de montrer que $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.
Comme $ABA'B'$ est inscriptible, le théorème de l'angle inscrit donne

$$(BA, BA') = (B'A, B'A').$$

On en déduit que les triangles PAB' et $PA'B$ ont donc deux de leurs angles égaux, donc tous leurs angles égaux, donc sont semblables. On en déduit que :

$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB},$$

donc

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

(b) On procède de la même manière, en utilisant la version tangentielle du théorème de l'angle inscrit.

(c) Avec les notations de la question précédente, on a par le théorème de Pythagore $PT^2 + r^2 = PO^2$, d'où le résultat.

(d) L'ensemble est donc $\{P \in \mathscr{P}, ||\overrightarrow{OP}|| = \lambda + r^2\}$ Si $\lambda < -r^2$, l'ensemble est vide. Si $\lambda = -r^2$, c'est le centre du cercle, et si $\lambda > -r^2$, c'est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\lambda + r^2}$.

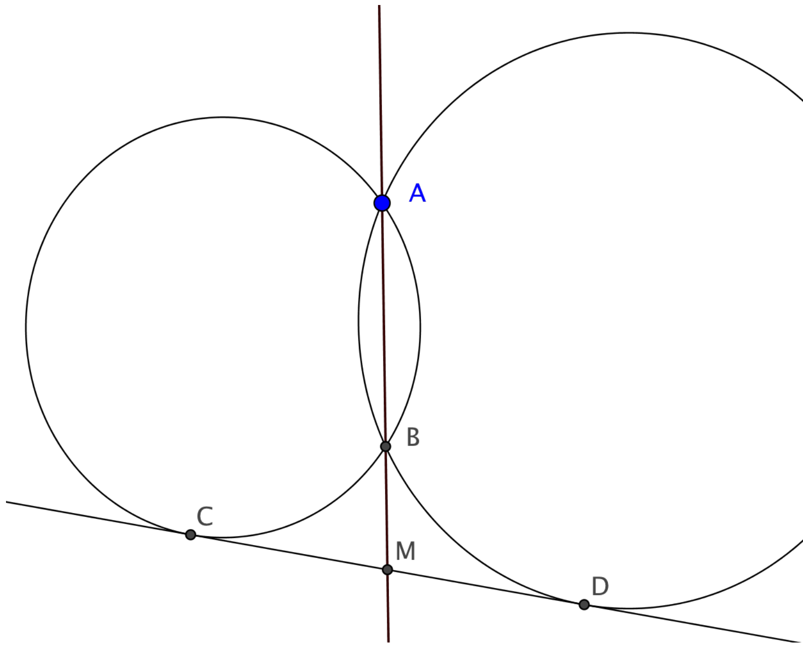
(e) Si les deux produits sont nuls, alors P coïncide avec l'un des deux points A et B, ainsi qu'avec l'un des deux points C et D. On en déduit que $ABCD$ est en fait un triangle et qu'il est donc inscriptible.
Si les deux produits ne sont pas nuls, on obtient

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

donc les triangles PAD et PBC sont semblables, donc ont mêmes angles. On conclut en utilisant la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

Correction de l'exercice 5283 ▲

Rappelons la figure :



Soit M un point de (AB). Sa puissance par rapport aux deux cercles est la même et vaut $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
Par ailleurs, si M est de plus sur la tangente commune (CD), alors sa puissance par rapport au premier cercle est MC^2, et celle par rapport au deuxième cercle est MD^2. On en déduit que $MC = MD$, donc M est le milieu de $[CD]$.

Correction de l'exercice 5284 ▲

Soit A' le symétrique de A par rapport à $[BC]$. Alors, $BACA'$ est inscriptible, et la puissance de H par rapport à son cercle circonscrit est

$$p_{\mathscr{C}}(H) = HB \cdot HC = HA \cdot HA' = HA^2.$$

Deuxième solution, n'utilisant pas la puissance d'un point par rapport à un cercle :
Les triangles ABC, ABH et ACH sont semblables car ils ont à chaque fois deux (donc trois) angles identiques. Les rapports de longueurs de côtés homologues sont donc égaux, ce qui donne

$$\frac{AB}{AC} = \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}$$

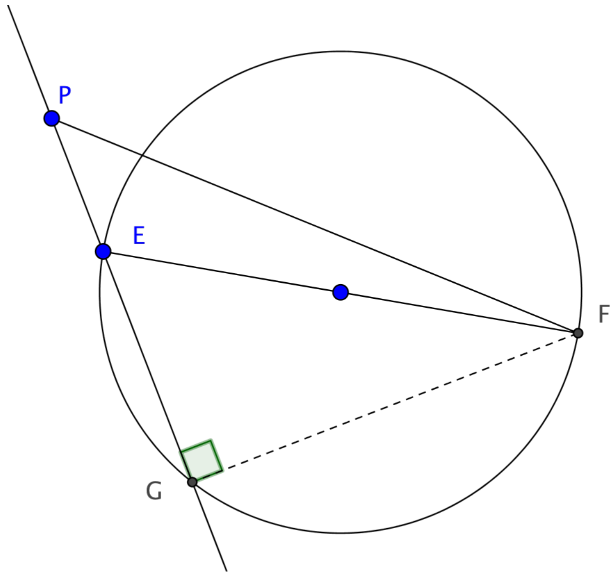
d'où on tire $HA^2 = HB \cdot HC$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 5285 ▲

Soit G le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} &= \overrightarrow{PE} \cdot (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GF}) \\ &= \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PG}\end{aligned}$$

Distinguons deux cas $G = E$ et $G \neq E$. Dans le premier cas, cela signifie que le diamètre (EF) est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, donc que celle-ci est tangente au cercle. Dans ce cas, $PE \cdot PG = PE^2$ est la puissance de P par rapport au cercle.
Dans le deuxième cas, EFG est rectangle en G, donc G est sur le cercle de diamètre $[EF]$. On en déduit que G est le second point d'intersection de (PE) avec le cercle, et donc que $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PG}$ est là aussi la puissance de P par rapport au cercle.



Correction de l’exercice 5286 ▲

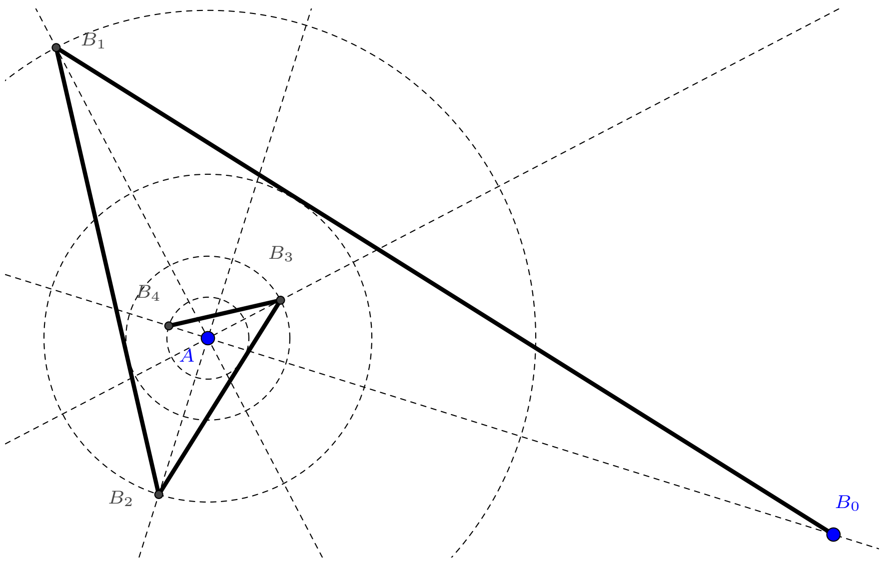
Il existe une unique similitude directe s qui envoie $[AE]$ sur $[CB]$. Son rapport est $1/l$ et son angle $-\pi/2$. Soit $D' = s(D)$. Alors $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD'}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{s(A)s(D)}) = -\pi/2$ et $CD' = \frac{1}{l}AD = \frac{1}{l}$.
Cette similitude envoie donc D et F ssi $CF = CD'$ c’est-à-dire ssi $1/l = l - 1$. Comme $l \neq 0$, cette équation est équivalente à $1 = l^2 - l$. Elle admet une unique solution positive : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l’exercice 5287 ▲

Il existe une unique similitude directe qui envoie le couple (B, D) sur le couple (C, E). Comme $BD = CE$, c’est une isométrie donc une rotation, et comme $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \pi/2$, son angle est $\pi/2$.
Or, il n’y a qu’une rotation d’angle $\pi/2$ qui envoie B sur C : son centre est I. On en déduit que IDE est rectangle isocèle en I.

Correction de l’exercice 5288 ▲

(a) Pour faire la figure on peut
  i. tracer la droite (AB_0), sa perpendiculaire passant par A, puis les deux bissectrices de ces deux droites.
  ii. Tracer les cercles de centre A et de rayons 8, 4, 2 et plus généralement $8 \cdot 2^{-k}$. Les points de la suite (B_n) sont sur les intersections de ces droites et cercles.



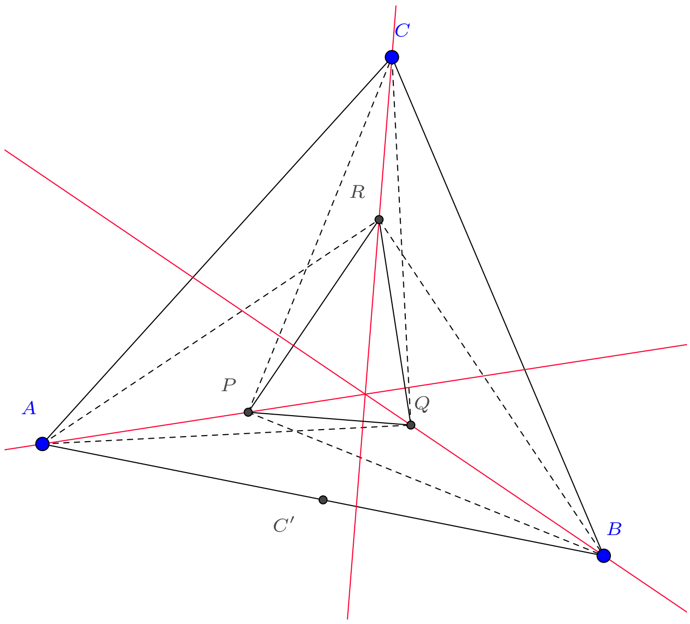
(b) Soit $n \in |||$. On a $AB_{n+1}B_{n+2} = s(A)s(B_n)s(B_{n+1})$.

(c) Pour tout entier naturel n, on définit $l_n = B_nB_{n+1}$. La longueur (finie ou infinie) de la spirale est la somme de la série $\sum l_n$.

D'après la question précédente, $B_{n+1}B_{n+2} = \frac{1}{2}B_nB_{n+1}$. Autrement dit, la suite $(l_n)_{n\in|||}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et donc pour tout $n \in |||$ on a $l_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot l_0$. On en déduit que la série $\sum l_n$ converge absolument, et que sa somme est $l_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2l_0 = 2B_0B_1$.

Correction de l'exercice 5289 ▲

Complétons la figure :



(a) Suivons l'indication. Soit $s = s_2 \circ s_1$. C'est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\pi/2$. On vérifie également que $s(C') = C'$, donc c'est la rotation de centre C' et d'angle $\pi/2$.

Or, d'une part on a $s(R) = A$, et d'autre part $s_1(Q) = C$ et $s_2(C) = P$, donc $s(Q) = P$. On en déduit que $\overrightarrow{AP}$ est l'image de $\overrightarrow{RQ}$ par une rotation de $\pi/2$. Les vecteurs ont donc même norme et sont orthogonaux.

(b) Les droites (AP), (BQ) et (CE) sont les hauteurs de PQR donc sont concourantes en l'orthocentre de PQR. Ce point est le *point intérieur de Vecten* de ABC.

Correction de l'exercice 5290 ▲

Soient H_{12}, H_{34}, H_{13} et H_{24} les projetés orthogonaux de M sur les droites (M_1M_2), (M_3M_4), (M_1M_3) et (M_2M_4). Soit s la similitude directe de centre M qui envoie M_2 sur M_3. L'image par s de la droite (M_1M_2) est une droite $\mathscr{D}$ passant par M_3 et telle que

$$(M_1M_2, \mathscr{D}) = (MM_2, MM_3).$$

Or, on a $(MM_2, MM_3) = (M_1M_2, M_1M_3)$ car les quatre points sont cocycliques. On en déduit que $\mathscr{D} = (M_1M_3)$, et donc que s envoie la droite (M_1M_2) sur la droite (M_1M_3).

On prouve de la même manière que s envoie la droite (M_2M_4) sur la droite (M_3M_4).

Comme $s(M) = M$ et que les similitudes conservent les angles orientés et en particulier l'orthogonalité, on en déduit que $s(H_{12}) = H_{13}$ et que $s(H_{24}) = H_{34}$.

Comme une similitude conserve les rapports de longueurs, on a finalement $\frac{MH_{13}}{MH_{34}} = \frac{MH_{12}}{MH_{24}}$ c'est-à-dire :

$$MH_{12} \cdot MH_{34} = MH_{13} \cdot MH_{24}.$$

Correction de l'exercice 5291 ▲

(a) Soit ϕ un déplacement préservant $\mathscr{S}$. C'est une translation ou une rotation.

i. Si ϕ est une translation de vecteur $\vec{v}$, alors $\vec{v}$ est horizontal (s'il avait une composante verticale, alors pour n grand et $s \in \mathscr{S}$, le point $\phi^n(s)$ aurait une ordonnée qui n'appartiendrait pas à $[-1;1]$ ce qui est impossible. Si $\vec{v}$ est horizontal, on en déduit que $||\vec{v}||$ soit être une période de sinus, donc un multiple de 2π. Réciproquement, toute translation horizontale d'un multiple de 2π est une isométries de $\mathscr{S}$.

ii. Si ϕ est une rotation, alors son centre est un point de la forme $(n\pi, 0)$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, et l'angle est π, autrement dit ϕ est une symétrie centrale.

Réciproquement, les symétries centrales de centres les points $(n\pi, 0)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ sont dans G. La composée de deux telles symétries est une des translations trouvées plus haut.

Déterminons maintenant les antidéplacements préservant $\mathscr{A}$. Un antidéplacement est soit une réflexion soit une réflexion glissée.

i. Si ϕ est une réflexion, son axe est forcément vertical par un argument similaire à celui plus haut. On en déduit ensuite que l'axe doit être une droite d'équation $x = \pi/2 + n\pi$ avec n un certain entier relatif.

ii. Si ϕ est une réflexion glissée, la direction de glissement doit être horizontale (idem), et on en déduit ensuite que la longueur de translation doit être un multiple de π.

(b) On trouve les translations horizontales de vecteur de norme multiple de π et les symétries centrales dont le centre est de la forme $(k\pi, 0)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 5292 ▲

Comme une isométrie est affine, elle conserve les barycentres. Soit P un sommet du triangle. Comme ce n'est pas un barycentre d'autres points du triangle, son image par une isométrie fixant le triangle non plus, c'est-à-dire que son image est un sommet. On en déduit que les sommets sont envoyés sur les sommets.

Par préservation du barycentre une isométrie de $\mathscr{T}$ fixe son isobarycentre.

Comme elle a au moins un point fixe, ça ne peut être une translation ou une symétrie glissée.

Correction de l'exercice 5293 ▲

(a) Les trois réflexions suivant les médiatrices du triangle conviennent, de même que l'identité, et les rotations d'angles $\pm 2\pi/3$ de centre O. Ceci donne six isométries, trois directes et trois indirectes. On remarque en les composant entre elles que l'on n'obtient pas d'autres isométries. Cet ensemble de six isométries est donc stable par composition, et il est également stable par inverse, c'est donc un sous-groupe de G. Dans la suite, on va prouver que c'est G tout entier.

(b) Comme une isométrie est affine, elle conserve les barycentres. Soit P un sommet du triangle. Comme ce n'est pas un barycentre d'autres points du triangle, son image par une isométrie fixant le triangle non plus, c'est-à-dire que son image est un sommet. On en déduit que les sommets sont envoyés sur les sommets.

(c) D'après ce qui précède, une isométrie de $\mathscr{T}$ permute les sommets. Donc à toute isométrie $f \in G$ on peut associer la bijection dans $\mathrm{Bij}(\{A, B, C\})$ qui lui correspond. Ce groupe de bijections est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, en numérotant les sommets de 1 à 3 (A est le premier sommet, B le second etc). On obtient donc une application

$$G \to \mathfrak{S}_3.$$

Elle est injective car une application affine est complètement déterminée par l'image de trois points non alignés : donc préciser la permutation sur les sommets du triangle détermine complètement l'isométrie du plan. C'est un morphisme de groupes par construction : composer les isométries va composer les permutations des sommets.

(d) Pour montrer que le morphisme de la question précédente est surjectif, on va utiliser la première question. À part l'identité qui est envoyée sur l'identité, les deux rotations sont envoyées sur les 3-cycles (123) et (132). Les trois réflexions sont envoyées sur les trois transpositions, par exemple la réflexion suivant la médiatrice de $[BC]$ est envoyée sur la transposition (23). On remarque qu'une isométrie est directe ssi la permutation associée est paire.

(e) D'après la question précédente, H est composé de l'identité et des deux rotations décrites plus haut. Ce sous-groupe est envoyé sur le groupe des permutations paires $\mathfrak{A}_3$. Il est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par l'application qui envoie $[0]$ sur l'identité, $[1]$ sur (123) et $[2]$ sur (132), et qui est un morphisme de groupe bijectif.

Correction de l'exercice 5294 ▲

Comme une isométrie est affine, elle conserve les barycentres. Soit P un sommet du triangle. Comme ce n'est pas un barycentre d'autres points du triangle, son image par une isométrie fixant le triangle non plus, c'est-à-dire que son image est un sommet. On en déduit que les sommets sont envoyés sur les sommets.

Dans la suite on suppose que ABC est isocèle en A. Soit f une isométrie de ABC. Comme une isométrie conserve les angles non orientés et que le triangle est isocèle en A et non équilatéral, on en déduit que B et C sont envoyés soit sur B soit sur C. Le point A est donc fixe.

Comme une application affine est déterminée par l'image de trois points non alignés, on conclut que le triangle ABC n'admet que deux isométries : l'identité, et la réflexion σ suivante la médiatrice de $[BC]$.

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathscr{T})$ est donc de cardinal deux, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(Un isomorphisme est donné par $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Isom}(\mathscr{T})$ l'application qui envoie $[0] = 2\mathbb{Z}$ sur l'identité et $[1] = 1 + 2\mathbb{Z}$ sur σ. C'est une bijection, et on vérifie que c'est un isomorphisme de groupes.)

Correction de l'exercice 5295 ▲

(a) Montrons d'abord qu'une isométrie du carré permute les sommets.

i. Première preuve : considérons une diagonale, par exemple $[AC]$. Comme g est une isométrie, la distance entre A et C est la même qu'entre leurs images. Or, deux points du carré à distance AC sont forcément deux sommets d'une diagonale du carré. L'isométrie g permute donc les sommets.

ii. Deuxième preuve : une isométrie est affine, donc préserve les barycentres, donc envoie les points extrémaux (ceux qui ne sont pas des barycentres d'autres points du carré) sur d'autres points extrémaux, et donc permute les sommets.

Le centre O étant l'isobarycentre des sommets, et une isométrie conservant les barycentres, on en déduit que $g(O) = O$. Ce n'est pas une translation ou une réflexion glissée, puisque ces dernières n'ont pas de points fixes. C'est donc une rotation (dont le centre est forcément O car O est fixe), ou bien une réflexion (dont l'axe contient O).

(b) Soit f une isométrie du carré. Elle envoie un sommet P sur un des autres sommets.

i. Si c'est une réflexion, son axe est la médiatrice du segment $[Pf(P)]$, donc l'axe est forcément une diagonale, ou bien une médiatrice d'un côté du carré.

Réciproquement, on vérifie que les réflexions dont les axes sont les deux diagonales ou bien les deux médiatrices des côtés sont bien des isométries du carré.

ii. Si c'est une rotation, son centre est O, et comme P est envoyé sur un autre sommet, les angles possibles sont les multiples de $\pi/2$. Réciproquement, on vérifie que les rotations de centre O et d'angles 0, $\pi/2$, π et $3\pi/2$ sont des isométries du carré.

Le groupe des isométries du carré a donc huit éléments : quatre réflexions et quatre rotations (dont l'identité).

(c) Le groupe H est composé des quatre rotations décrites plus haut. L'application qui à un entier n associe la rotation de centre O et d'angle $n\pi/2$ est un morphisme de groupes, noté $\phi : (\mathbb{Z},+) \to (H,\circ)$. Il est surjectif. Déterminons son noyau. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} n \in \ker(\phi) &\Leftrightarrow \phi(n) = \mathrm{Id} \\ &\Leftrightarrow n\pi/2 \equiv 0[2\pi] \\ &\Leftrightarrow n \equiv 0[4] \\ &\Leftrightarrow n \in 4\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On en déduit $\ker(\phi) = 4\mathbb{Z}$. Ce morphisme de groupes passe donc au quotient par $4\mathbb{Z}$ et induit un morphisme injectif $\overline{\phi} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to H$ qui est donc un isomorphisme de groupes.

Correction de l'exercice 5296 ▲

Dans le rectangle, les points maximalement éloignés sont les sommets des diagonales. Comme une isométrie conserve les distances, on en déduit qu'une isométrie du rectangle doit envoyer une diagonale sur une autre, et donc soit permuter les sommets. Elle fixe donc le centre, qui est l'isobarycentre des sommets, et donc est une rotation ou une réflexion, car les translations et les réflexions glissées n'ont pas de points fixes.

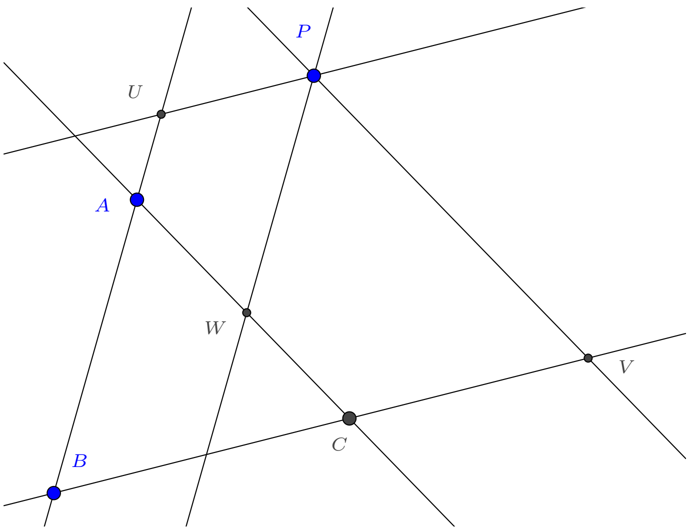
Soit P un sommet et Q son image par une isométrie du rectangle. Si c'est une réflexion, son axe est donc la médiatrice de $[PQ]$, donc l'axe peut être une des deux médiatrices des côtés du rectangle (et pas une médiatrice d'une diagonale, car le rectangle n'est pas carré). Réciproquement, ces deux réflexions, notons-les σ et σ', sont des isométries du rectangle.

Si c'est une rotation, son angle est 0 ou bien π, car le rectangle n'est pas carré. Réciproquement, ces deux rotations (Id et $-\mathrm{Id}$) conviennent.

Le groupe d'isométries du rectangle est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, un isomorphisme possible étant celui qui envoie $(1,0)$ sur σ et $(0,1)$ sur σ' (et donc $(1,1) = (0,1) + (1,0)$ sur $\sigma \circ \sigma' = -\mathrm{Id}$.

Correction de l'exercice 5297 ▲

(a) Il suffit de montrer que $(AU,AW) = (PU,PW)$.



Or, on a :

$$\begin{aligned} (AU,AW) &= (AB,AC) \text{ (mêmes droites)} \\ &= \pi/3 \text{ (car équilatéral direct)} \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
(PU,PW) &= (BC,BA) \text{ (droites parallèles donc mêmes angles)}\\
&= \pi/3 \text{ (car équilatéral direct).}
\end{aligned}
$$

Donc $(AU,AW) = (PU,PW)$ et donc $APUW$ est inscriptible.
On procède de même pour l'autre quadrilatère.

(b) Pour chaque quadrilatère inscriptible, on peut en déduire six égalités d'angles inscrits, car il y a $6 = \binom{2}{4}$ façons de choisir une corde. Si $APUW$ est inscriptible, on a donc les égalités d'angles de droites :

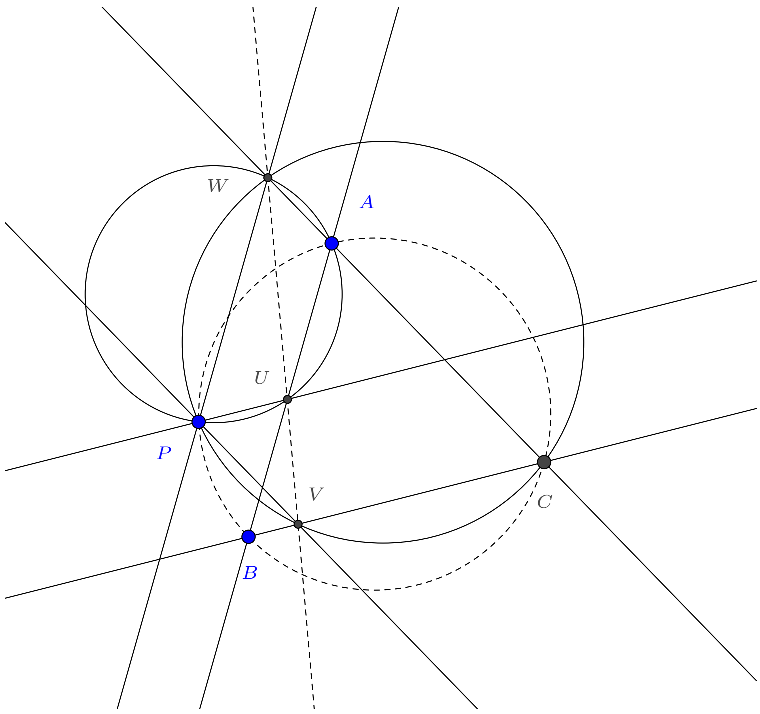
$$(UA,UP) = (WA,WP), \quad (AU,AW) = (PU,PW),$$

et surtout :

$$
\begin{aligned}
(WA,WU) = (PA,PU) &\quad (AU,AP) = (WU,WP),\\
(UP,UW) = (AP,AW), &\quad (PW,PA) = (UW,UA).
\end{aligned}
$$

Les plus intéressantes (et utiles pour la suite) sont les quatre dernières.
On procède de même pour l'autre quadrilatère.

(c) Il suffit de montrer que $ABCP$ est inscriptible si et seulement si $(WU,WP) = (WV,WP)$. Cette dernière assertion dit en effet que les droites (WU) et (WV) forment le même angle avec WP donc sont parallèles, et donc égales car elles ont le point W en commun.



On a :

$$
\begin{aligned}
(WU,WP) &= (AU,AP) \text{ (car } AUWP \text{ est inscriptible)}\\
&= (AB,AP) \text{ (mêmes droites car } U \in (AB) \text{)}\\
&= (CB,CP) \ \underline{\text{ssi } ABPC \text{ est inscriptible}}
\end{aligned}
$$

et d'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
(CB,CP) &= (CV,CP) \text{ (mêmes droites car } V \in (BC) \text{)}\\
&= (WV,WP) \text{ (car } PWCV \text{ est inscriptible)}
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 5298 ▲

(a) Soit ρ la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. D'après l'énoncé, on a $\rho(B) = A$ et $\rho(D) = C$. Donc $[AC]$ est l'image de $[AD]$ par ρ, d'où on déduit que $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$.

(b) Le quadrilatère $IJKL$ est toujours un parallélogramme, même sans hypothèses sur $ABCD$ (c'est le théorème de Varignon). En effet, par le théorème de Thalès (ou simplement le théorème des milieux) :

$$\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{JK}.$$

Ceci signifie que les côtés $[IL]$ et $[JK]$ ont même longueur et sont parallèles, donc $IJKL$ est un parallélogramme.

Pour voir que c'est un carré, remarquons qu'on montre de même que

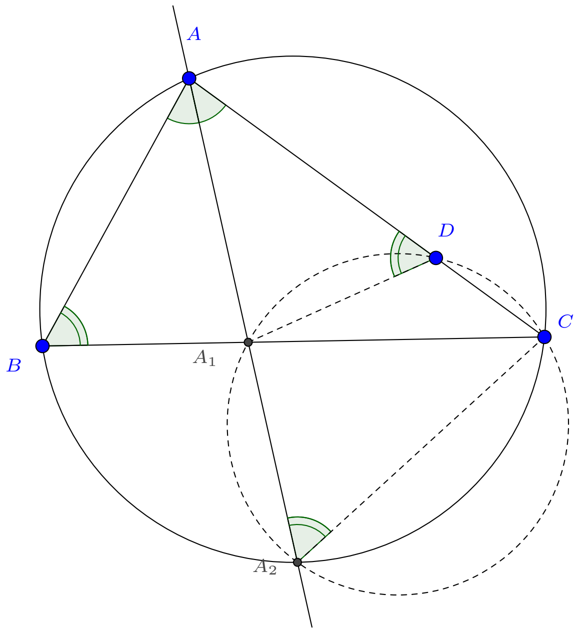
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LK},$$

et d'après la première question, $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$, donc $IJKL$ est un parallélogramme ayant un angle droit et des cotés consécutifs de même longueur. C'est donc un carré.

Correction de l'exercice 5299 ▲

(a) Par construction, la droite Δ est la hauteur et la médiane de ABD. Le triangle est donc isocèle en A et Δ est également sa bissectrice, ce qui montre que $\widehat{BAA_1} = \widehat{A_1AD}$ et donc que $D \in (AC)$.

(b) Il suffit de prouver que $(A_2A_1, A_2C) = (DA_1, DC)$.



Or on a :

$$\begin{aligned}(A_2A_1, A_2C) &= (A_2A, A_2C)\\ &= (BA, BC) \text{ (car } ABCA_2 \text{ est inscriptible)}\\ &= (BA, BA_1) \text{ (mêmes droites)}\\ &= (DA, DA_1) \text{ (par réflexion suivant } \Delta)\\ &= (DC, DA_1) \text{ (mêmes droites)},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Remarquons déjà que $AB = AD$. D'autre part, il suffit de montrer que

$$\frac{AA_1}{AD} = \frac{AC}{AA_2}.$$

La question précédente montre que les triangles ADA_1 et AA_2C sont (inversement) semblables, puisqu'ils ont deux (et donc trois) angles en commun. Les rapports entre les côtés sont donc égaux, c'est-à-dire précisément

$$\frac{AA_1}{AD} = \frac{AC}{AA_2}.$$

Remarque : si on connaît la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle, on peut conclure plus vite : les deux produits égaux sont la puissance de A par rapport au cercle A_1A_2CD.

Correction de l'exercice 5303 ▲

(a) Notons $\mathscr{R}$ le repère initial $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dire qu'un point M du plan a pour coordonnées (x,y,z) dans $\mathscr{R}$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
Si $\mathscr{R}'$ désigne un autre repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ alors le même point M a pour coordonnées (x',y',z') dans $\mathscr{R}'$ signifie $\overrightarrow{AM} = x'\vec{u}+y'\vec{v}+z'\vec{w}$.
La formule de changement c'est simplement écrire les coordonnées de l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x'\vec{u}+y'\vec{v}+z'\vec{w}$$

Mais on connaît les coordonnées de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ dans $\mathscr{R}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où l'égalité de changement de repère :

$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{cases} x = -2+x'+2y'+3z' \\ y = 4+x'+2y'-z' \\ z = 1+x'-4y'+z' \end{cases}$$

(b) Dans l'équation de la droite (D) $\begin{cases} y-z=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ dans le repère $\mathscr{R}$ on remplace x,y,z par la formule $(\mathscr{S})$ obtenue à la question précédente.
On obtient :

$$\begin{cases} (4+x'+2y'-z')-(1+x'-4y'+z') = 3 \\ (-2+x'+2y'+3z')+(4+x'+2y'-z') = 2 \end{cases}.$$

Ce qui donne une équation de (D) dans le repère $\mathscr{R}'$:

$$\begin{cases} 6y'-2z' = 0 \\ 2x'+4y'+2z' = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} 3y'-z' = 0 \\ x'+2y'+z' = 0 \end{cases}$$

En particulier en faisant $(x',y',z') = (0,0,0)$ on remarque que cette droite passe par A.

(c) Nous avions obtenu l'égalité $(\mathscr{S})$ de changement de repère de $\mathscr{R}'$ vers $\mathscr{R}$ qui s'écrit :

$$\begin{cases} x+2 = x'+2y'+3z' \\ y-4 = x'+2y'-z' \\ z-1 = x'-4y'+z' \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} X = x'+2y'+3z' \\ Y = x'+2y'-z' \\ Z = x'-4y'+z' \end{cases}$$

Où l'on a noté $X = x+2$, $Y = y-4$, $Z = z-1$. On inverse le système par la méthode de Gauss pour obtenir après calculs :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{12}(X+7Y+4Z) \\ y' = \frac{1}{12}(X+Y-2Z) \\ z' = \frac{1}{12}(3X-3Y) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{12}\big(x+7y+4z-30\big) \\ y' = \frac{1}{12}\big(x+y-2z\big) \\ z' = \frac{1}{12}\big(3x-3y+18\big) \end{cases}$$

Avec les matrices cela se fait ainsi : le système $(\mathscr{S})$ devient

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 5305 ▲

(a) Notons P le plan d'équation $2x+2y-z=1$. Et soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque. $\vec{n} = (2, 2, -1)$ est un vecteur normal au plan. On cherche $p(M_0)$ appartenant au plan sous la forme $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$.

$$\begin{aligned} p(M_0) \in P &\iff M_0 + \lambda \cdot \vec{n} \in P \\ &\iff (x_0, y_0, z_0) + \lambda(2, 2, -1) \in P \\ &\iff (x_0 + 2\lambda, y_0 + 2\lambda, z_0 - \lambda) \in P \\ &\iff 2(x_0 + 2\lambda) + 2(y_0 + 2\lambda) - (z_0 - \lambda) = 1 \\ &\iff \lambda = \frac{1 - 2x_0 - 2y_0 + z_0}{9} \end{aligned}$$

En posant $\lambda_0 = \frac{1-2x_0-2y_0+z_0}{9}$, le projeté orthogonal de M_0 sur P est défini par $p(M_0) = (x_0 + 2\lambda_0, y_0 + 2\lambda_0, z_0 - \lambda_0)$.

(b) Notons D la droite d'équation $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$ et soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque.

Il nous faut deux vecteurs normaux : par exemple $\vec{n_1} = (1, 1, 1)$ et $\vec{n_2} = (2, 0, -1)$ (qui sont les vecteurs normaux aux deux plans définissant D).

On cherche le projeté orthogonal $\pi(M_0)$ sur la droite D sous la forme $M_0 + \lambda_1 \vec{n_1} + \lambda_2 \vec{n_2}$. On va déterminer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de sorte que ce point appartienne à D.

$$\begin{aligned} \pi(M_0) \in D &\iff M_0 + \lambda_1 \vec{n_1} + \lambda_2 \vec{n_2} \in D \\ &\iff (x_0, y_0, z_0) + \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(2, 0, -1) \in D \\ &\iff (x_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2, y_0 + \lambda_1, z_0 + \lambda_1 - \lambda_2) \in D \\ &\iff \begin{cases} (x_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2) + (y_0 + \lambda_1) + (z_0 + \lambda_1 - \lambda_2) = 1 \\ 2(x_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2) - (z_0 + \lambda_1 - \lambda_2) = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - x_0 - y_0 - z_0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 2 - 2x_0 + z_0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \frac{1}{14}\big(3 - 3x_0 - 5y_0 - 6z_0\big) \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{14}\big(5 - 5x_0 + y_0 + 4z_0\big) \end{aligned}$$

Ainsi $\pi(M_0) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(2, 0, -1)$ avec les valeurs de λ_1, λ_2 obtenues.

(c) Le principe est similaire, voici les étapes :

i. Trouver une équation du plan. Un vecteur normal au plan est $\vec{u} \wedge \vec{u'} = (-1,-2,-2)$. Donc le plan est d'équation $x+2y+2z-2=0$.

ii. Chercher le projeté d'un point $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ sous la forme $M_0 + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$. Trouver λ_0 de sorte que $M_0 + \lambda_0 \cdot \overrightarrow{AB}$ appartiennent au plan.

iii. On trouve $\overrightarrow{AB} = (-1,0,3)$ et $\lambda_0 = -\frac{1}{5}(x_0+2y_0+2z_0-2)$ et donc le projeté cherché est $p(M_0) = (x_0-\lambda_0, y_0, z_0+3\lambda_0)$.

Correction de l'exercice 5310 ▲

Droite parallèle à (AC) passant par $D = \mathrm{Bar}(A:1, B:-\frac{1}{3})$.

Correction de l'exercice 5311 ▲

Pour $k=-1,-5$: plan médiateur de $G = \mathrm{Bar}(A:1,B:2,C:k)$ et $I = \mathrm{Bar}(D:1,E:1)$.
Pour $k \neq -1,-3,-5$: sphère de centre $O = \mathrm{Bar}(G:(3+k)^2, I:-4)$.
Pour $k=-3$: sphère de centre I.

Correction de l'exercice 5312 ▲

$221C_1 = (949,149,-615)$, $93C_2 = (128,-71,397)$.

Correction de l'exercice 5313 ▲

$A_P = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\lambda)$, $A_Q = (1, 1-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$, $A_R = (1-\frac{\lambda}{2}, 1, \frac{\lambda}{2})$, $A_S = (\frac{7-\lambda}{11}, -\frac{1+3\lambda}{11}, \frac{10\lambda-4}{11})$.
coplanaires $\Leftrightarrow 8\lambda+3\lambda^2+3\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Correction de l'exercice 5314 ▲

(a) $\Omega : (1,1,1)$, $R = \sqrt{5}$.

(b) $(ABC) : x+y+z=6$. $(ABD) : 4x-2y+z=3$. $(ACD) : x+4y-2z=3$. $(BCD) : 7x+y-5z=12$.

(c)
$$I:(a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-a-b-c &= r\sqrt{3} \\ 4a-2b+c-3 &= r\sqrt{21} \\ a+4b-2c-3 &= r\sqrt{21} \\ 12-7a-b+5c &= r\sqrt{75} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a &= 9-2\sqrt{7} \\ 2b &= 6-\sqrt{7} \\ 2c &= 3 \\ 2r &= \sqrt{21}-2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5315 ▲

$H : (-18/54, 8/54, -28/54)$, $K : (7/54, 13/54, -33/54)$.

Correction de l'exercice 5316 ▲

$H : (-2/19, 28/19, 35/19)$, $K : (-6/19, 40/19, 23/19)$, $d = 4\sqrt{19}$.

Correction de l'exercice 5317 ▲

Soient B', D' les projetés de B, D sur (AC). Alors $BB' = DD'$ donc la perpendiculaire commune à (AC) et (BD) passe par le milieu de $[B,D]$. Par symétrie, elle passe aussi par le milieu de $[A,C]$ et par Pythagore $AB = CD$.

Correction de l'exercice 5318 ▲

$a/\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 5319 ▲

$d^2 = \frac{(x+2y-z+3)^2}{6} + \frac{(3x+3z+11)^2}{9}$.

Correction de l'exercice 5320 ▲

$$\begin{cases} 14x' = 13x - 2y - 3z + 4 \\ 14y' = -2x + 10y - 6z + 8 \\ 14z' = -3x - 6y + 5z + 12. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5321 ▲

$D' : (9/53, 40/53, -117/53)$, $E' : (-14/53, 32/53, 23/53)$, $\vec{u} : (23, 8, -140)$.

Correction de l'exercice 5322 ▲

$2x - 7y - z = -1$.

Correction de l'exercice 5325 ▲

$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2\sin^2(\pi/5)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Correction de l'exercice 5326 ▲

$x^2 + y^2 + z^2 - 10z = 9$.

Correction de l'exercice 5327 ▲

Soient A, B deux points de S distincts. Intersection de S avec un plan passant par A et $B \Rightarrow S$ est réunion de cercles passant par A et B. On considère le plan médiateur de $[A, B]$, P qui coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Le plan $Q = (OAB)$ coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}'$. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont en commun les points C, D. (CD) est médiatrice de $[A, B]$ dans Q donc est un diamètre de $\mathscr{C}'$ et passe par O, donc est aussi diamètre de $\mathscr{C}$. Ainsi $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de même centre et même rayon dans des plans perpendiculaires. En considérant les plans coupant P et Q à angle droit, on obtient que S est une sphère de centre O.

Correction de l'exercice 5328 ▲

Soient $D, \vec{u}, \alpha$ l'axe, le vecteur, et l'angle de g. Alors $f \circ g \circ f^{-1}$ est le vissage d'axe $f(D)$, de vecteur $\vec{f}(\vec{u})$, et d'angle α.

On veut que ce soit g, donc D est invariant par f, ce qui implique que D soit l'axe de f.

Réciproquement, si f et g ont même axe, alors ils commutent.

Correction de l'exercice 5329 ▲

Soit $v = \sigma_1 \circ \sigma_2$. (vissage autour de la perp. commune à D_1 et D_2)

$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est un $\frac{1}{2}$-tour $\Rightarrow v \circ \sigma_3 \circ v \circ \sigma_3 = $id, donc $\sigma_3 \circ v \circ \sigma_3^{-1} = v^{-1}$.

L'axe de v est donc invariant par σ_3, donc parallèle ou perpendiculaire à D_3. Si parallèle, alors $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est encore un vissage $\Rightarrow$ ne convient pas.

Correction de l’exercice 5330 ▲

$d_{AD}(D) = D$, $\quad d_{AC}(D) = D'$ tq $\vec{AD'} = \vec{DC}$.
La droite (AD') est parallèle à (DC) qui est perpendiculaire à (AB).
Donc $f(D) = d_{AB}(D') = D''$ tq $\vec{AD''} = \vec{CD}$.
$d_{AD}(D'') = C$, $\quad d_{AC}(C) = C$, $\quad f(D'') = d_{AB}(C) = C'$ tq $\vec{AC'} = \vec{CB}$.
$d_{AD}(C') = C''$ tq $\vec{AC''} = \vec{BC}$, $\quad d_{AC}(C'') = B$, $\quad f(C') = d_{AB}(B) = B$.
$d_{AD}(B) = B'$ tq $\vec{AB'} = \vec{BD}$, $\quad d_{AC}(B') = B''$ tq $\vec{AB''} = \vec{DB}$, $\quad f(B) = d_{AB}(B'') = D$.
Soit E le symétrique de C par rapport à (BD) : f est le $\frac{1}{4}$-tour autour de (AE) envoyant D sur B.

Correction de l’exercice 5331 ▲

ABC équilatéral : 12, $\quad ABC$ isocèle : 4, $\quad ABC$ scalène : 2.

Correction de l’exercice 5332 ▲

(a) 24 éléments :

identité	(1)
rotations autour de l’axe d’une face	(8)
symétries % plan médiateur d’une arête	(6)
$\frac{1}{2}$-tour autour de la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées	(3)
$\frac{1}{4}$-tour autour de la perp. ...+ symétrie % plan médian	(6)

(b) 48 éléments :

identité		(1)
symétries	% plan médian d’une face	(3)
	% plan diagonal d’une face	(6)
	% axe d’une face	(3)
	% axe d’une arête	(6)
	% centre du cube	(1)
rotation	$\pm 2\pi/3$ autour d’une diagonale	(8)
	$\pm\pi/2$ autour de l’axe d’une face	(6)
symétries-rotations	$\pm\pi/2$ % axe face	(6)
	$\pm\pi/3$ % diagonale	(8)

(c) si les droites ne sont pas perpendiculaires :

identité	(1)
$\frac{1}{2}$-tour autour de la perpendiculaire commune	(1)
$\frac{1}{2}$-tour autour d’une bissectrice	(2)

si elles sont perpendiculaires, il y a aussi :

symétrie % plan contenant une droite et la perp. commune	(2)
symétrie-$\frac{1}{4}$-tour autour de la perp. commune	(2)

Correction de l’exercice 5333 ▲

L’application $M_1 \mapsto M_4$ est affine donc est une homothétie-translation (dim 1) et le coefficient d’homothétie est strictement inférieur à 1.

Correction de l’exercice 5334 ▲

• $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(2, -3, -4)$. Ce vecteur n’est pas nul. Par suite, les points O, A et B ne sont pas alignés et le plan (OAB) est bien défini. C’est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -3, -4)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $2x - 3y - 4z = 0$. • $\overrightarrow{n}' = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(4,-9,-1)$. Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, C et D ne sont pas alignés et le plan (OCD) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{n}'(4,-9,-1)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $4x-9y-z=0$. • $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n}'$ a pour coordonnées $(33,14,6)$. Ce vecteur n'est pas nul et on sait que les plans (OAB) et (OCD) sont sécants en une droite, à savoir la droite passant par $O(0,0,0)$ et de vecteur directeur $(33,14,6)$. Un système d'équations cartésiennes de cette droite est $\left\{\begin{array}{l}2x-3y-4z=0\\4x-9y-z=0\end{array}\right.$.

Correction de **l'exercice 5335 ▲**

Les vecteurs $(2,-3,1)$ et $(1,2,0)$ ne sont pas colinéaires, de sorte que (P) est bien un plan. Trouvons alors une équation cartésienne de (P)

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(P)&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda+\mu\\y=-1-3\lambda+2\mu\\z=1+\lambda\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}\lambda=z-1\\x=1+2(z-1)+\mu\\y=-1-3(z-1)+2\mu\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}\lambda=z-1\\\mu=x-2z+1\\y=-1-3(z-1)+2(x-2z+1)\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow-2x+y+7z-4=0\end{aligned}$$

Soit alors $M(2+3t,-t,1+t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de (D)

$$M\in(P)\Leftrightarrow-2(2+3t)+(-t)+7(1+t)-4=0\Leftrightarrow 0\times t-1=0.$$

Ce dernier système n'a pas de solution et donc $(D)\cap(P)=\varnothing$. La droite (D) est strictement parallèle au plan (P).

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(P)\cap(P')&\Leftrightarrow\exists(\nu,\eta)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}x=-5-\nu\\y=3+\nu+3\eta\\z=\nu+\eta\\-2x+y+7z-4=0\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\exists(\nu,\eta)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}x=-5-\nu\\y=3+\nu+3\eta\\z=\nu+\eta\\-2(-5-\nu)+(3+\nu+3\eta)+7(\nu+\eta)-4=0\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\exists(\nu,\eta)\in\mathbb{R}^2/\left\{\begin{array}{l}\eta=-\nu-\frac{9}{10}\\x=-5-\nu\\y=3+\nu+3\left(-\nu-\frac{9}{10}\right)\\z=\nu+\left(-\nu-\frac{9}{10}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists\nu\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}x=-\nu-5\\y=-2\nu+\frac{3}{10}\\z=-\frac{9}{10}\end{array}\right.\end{aligned}$$

(P) et (P') sont donc sécants en la droite passant par le point $\left(-5,\frac{3}{10},-\frac{9}{10}\right)$ et de vecteur directeur $(1,2,0)$.

Correction de **l'exercice 5336 ▲**

Soit r la rotation cherchée. Notons u le vecteur $\frac{1}{3}(1,2,2)$ (u est unitaire) et θ l'angle de r. r est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire u. On sait que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$

$$r(v)=(\cos\theta)v+(1-\cos\theta)(v.u)u+(\sin\theta)u\wedge v\quad(*)$$

et en particulier que $[v,r(v),u]=\sin\theta\|v\wedge u\|^2$. L'égalité $r(j)=k$ fournit

$$\sin\theta\|j\wedge u\|^2=[j,r(j),u]=[u,j,k]=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{3}.$$

Comme $u\wedge j=\frac{1}{3}(i+2j+2k)\wedge j=-\frac{2}{3}j+\frac{1}{3}k$, on a $\|j\wedge u\|^2=\frac{5}{9}$ et donc $\sin\theta=\frac{3}{5}$. L'égalité $r(j)=k$ fournit ensuite

$$k=(\cos\theta)j+(1-\cos\theta)\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}(i+2j+2k)+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}(i+2j+2k)\wedge j$$

En analysant la composante en i, on en déduit que $\frac{2}{9}(1-\cos\theta)-\frac{2}{5}=0$ et donc $\cos\theta=-\frac{4}{5}$. Ainsi, pour tout vecteur $v=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, l'égalité $(*)$ s'écrit

$$\begin{aligned}r(v)&=-\frac{4}{5}(x,y,z)+\frac{9}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}(x+2y+2z)(1,2,2)+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}(2z-2y,2x-z,-2x+y)\\&=\frac{1}{5}(-4x+(x+2y+2z)+(2z-2y),-4y+2(x+2y+2z)+(2x-z),-4z+2(x+2y+2z)+(-2x+y))\\&=\frac{1}{5}(-3x+4z,4x+3z,5y)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&0&4\\4&0&3\\0&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

La matrice cherchée est

$$\boxed{\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&0&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&0&\frac{3}{5}\\0&1&0\end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 5337 ▲

On note $\mathscr{C}$ la courbe considérée.

(a) i. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les x positifs. Son foyer est le point $F\left(\frac{1}{4},0\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ x=-\frac{1}{4}$.

ii. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les x négatifs. Son foyer est le point $F\left(-\frac{1}{4},0\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ x=\frac{1}{4}$.

iii. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Oy), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les y positifs. Son foyer est le point $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ y=-\frac{1}{4}$.

iv. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Oy), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les y négatifs. Son foyer est le point $F\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ y=\frac{1}{4}$.

(b) i. $\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre O avec $a=5>3=b$ et donc d'axe focal (Ox).
Ses sommets sont $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$.
$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$ et donc les foyers sont $F(4,0)$ et $F'(-4,0)$.
L'excentricité e vaut $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.
Les directrices ont pour équations respectives $x=\frac{a}{e}=\frac{25}{4}$ et $x=-\frac{25}{4}$.

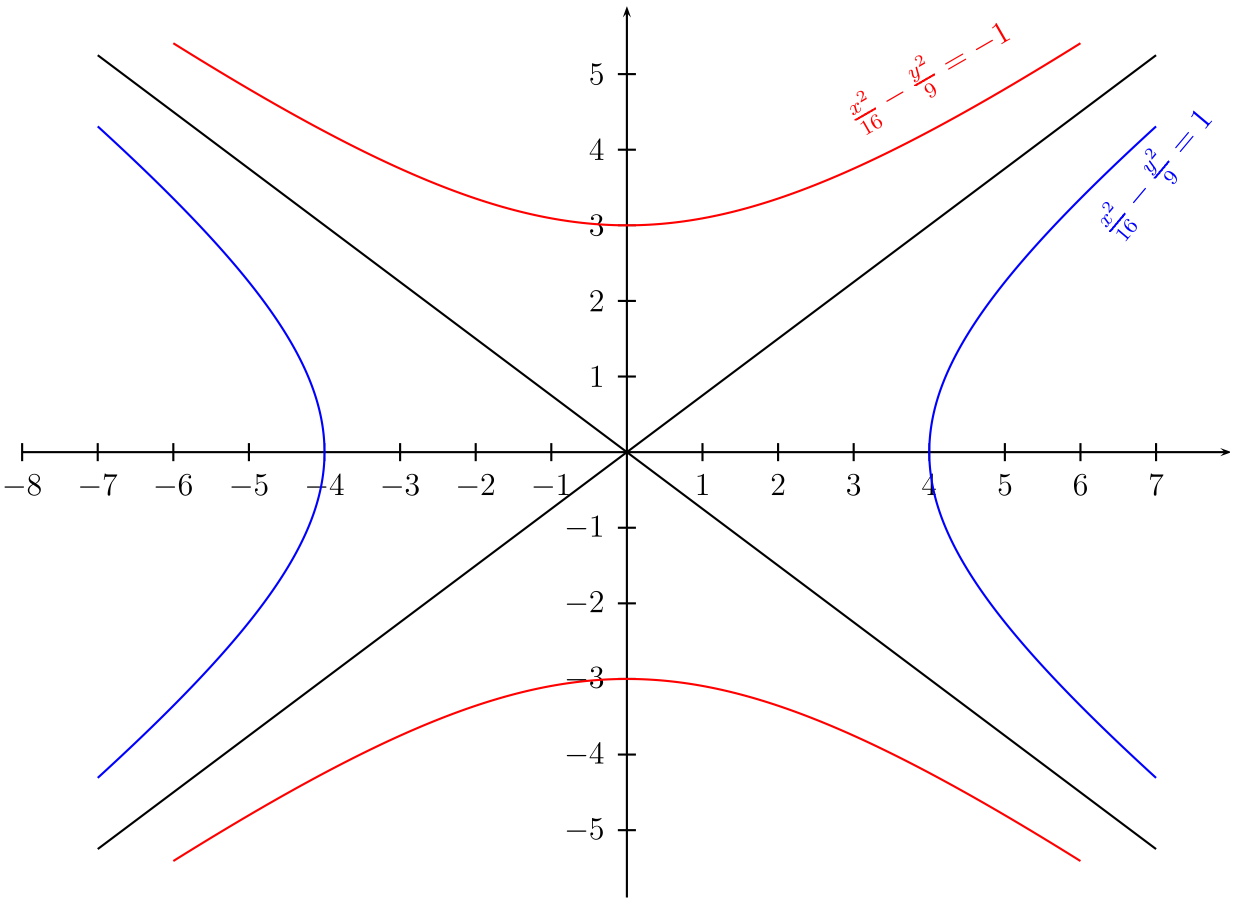
ii. $\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre O avec $a=3<5=b$ et donc d'axe focal (Oy).
Ses sommets sont $A(3,0)$, $A'(-3,0)$, $B(0,5)$ et $B'(0,-5)$.
$c=\sqrt{b^2-a^2}=4$ et donc les foyers sont $F(0,4)$ et $F'(0,-4)$.
L'excentricité e vaut $e=\frac{c}{b}=\frac{4}{5}$.
Les directrices ont pour équations respectives $y=\frac{b}{e}=\frac{25}{4}$ et $y=-\frac{25}{4}$.

iii. $x^2+2y^2=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$.
$\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre O avec $a=1>\frac{1}{\sqrt{2}}=b$ et donc d'axe focal (Ox).

Ses sommets sont $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B'\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
$c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc les foyers sont $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.
L'excentricité e vaut $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Les directrices ont pour équations respectives $x=\frac{a}{e}=\sqrt{2}$ et $x=-\sqrt{2}$.

(c) i. $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a=4$ et $b=3$ et donc $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, puis $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$.
Les sommets sont $A(4,0)$ et $A'(-4,0)$ et les foyers sont $F(5,0)$ et $F(-5,0)$.
Les directrices sont les droites d'équations respectives $x=\frac{a}{e}=\frac{16}{5}$ et $x=-\frac{16}{5}$.
Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives $y=\frac{3}{4}x$ et $y=-\frac{3}{4}x$.

ii. $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Oy) avec $a=4$ et $b=3$ et donc $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, puis $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{3}$.
Les sommets sont $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$ et les foyers sont $F(0,5)$ et $F(0,-5)$.
Les directrices sont les droites d'équations respectives $y=\frac{b}{e}=\frac{9}{5}$ et $y=-\frac{9}{5}$.
Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives $y=\frac{3}{4}x$ et $y=-\frac{3}{4}x$.



iii. $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a=b=1$ et donc $c=\sqrt{2}$, puis $e=\sqrt{2}$.
Les sommets sont $A(1,0)$ et $A'(-1,0)$ et les foyers sont $F(\sqrt{2},0)$ et $F(-\sqrt{2},0)$.
Les directrices sont les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives $y=x$ et $y=-x$.

Correction de l'exercice 5338 ▲

(a) i. $y=x^2+x+1 \Leftrightarrow y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(y-\frac{3}{4}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$, de paramètre $p=\frac{1}{2}$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2},1\right)$ et de directrice d'équation $y=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

ii. $y^2+y-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2\left(x+\frac{1}{8}\right)$. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{2}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$, de paramètre $p=1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{8},-\frac{1}{2}\right)$ et de directrice d'équation $x=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$.

iii. $y=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow y^2=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$ et $y \geqslant 0$. $\mathscr{C}$ est une demi-parabole de sommet $S\left(-\frac{3}{2},0\right)$, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2},0\right)=(-1,0)$ et de directrice d'équation $x=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$.

(b) i. $x^2+x+2y^2+y=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=1$. $\mathscr{C}$ est une ellipse. Centre : $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$. $a=\sqrt{\frac{3}{8}}>\frac{\sqrt{3}}{4}=b$. Axe focal : $y=-\frac{1}{4}$. Sommets : $A\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $A'\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Foyers : $F\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$. Directrices : $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. $y=-2\sqrt{-x^2+x} \Leftrightarrow y^2=4(-x^2+x)$ et $y \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+y^2=1$ et $y \leqslant 0$. $\mathscr{C}$ est une demi-ellipse. Centre : $\left(\frac{1}{2},0\right)$. $a=\frac{1}{2}<1=b$. Axe focal : $x=0$. Sommets : $A(1,0)$, $A'(0,0)$ et $B'\left(\frac{1}{2},-1\right)$. $c=\sqrt{b^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Foyers : $F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(c) $x^2-y^2+x+y+1=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-1$. $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et d'axe focal la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$. $a=b=1$. Sommets : $B\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$ puis $e=\frac{c}{b}=\sqrt{2}$. Foyers : $F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Asymptotes : $y=x+1$ et $y=-x$.

Correction de l'exercice 5339 ▲

(a) On note $\mathscr{H}$ l'hyperbole considérée. On tourne de $\frac{\pi}{4}$. Pour cela, on pose $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{array}\right.$. On a alors

$$y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow xy=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(X-Y)(X+Y)=1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

Ainsi, si $\mathscr{R}$ est le repère orthonormé initial $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et $\mathscr{R}'$ est le repère $\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$ où $\overrightarrow{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$, une équation de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}$ est $xy=1$ et une équation de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}'$ est $\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$. On obtient $a=b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$ et $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. Les formules de changement de repère s'écrivent $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{array}\right.$ et les formules inverses s'écrivent $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{array}\right.$ (dans ce qui suit, les coordonnées d'un point dans $\mathscr{R}'$ seront notées avec $\mathscr{R}'$ en indice alors que les coordonnées dans $\mathscr{R}$ seront notées sans écrire $\mathscr{R}$ en indice).

$\boxed{\text{Centre O(0,0)}}$.

Asymptotes : bien sûr, les axes (Ox) et (Oy).

Axe focal : l'axe (OX) ou encore la droite d'équation $y = x$ (dans $\mathscr{R}$).

Sommets : $A(\sqrt{2},0)_{\mathscr{R}'}$, $A'(-\sqrt{2},0)_{\mathscr{R}'}$ et donc $\boxed{\text{Sommets A(1,1) et A'(-1,-1)}}$.

Foyers : $F(2,0)_{\mathscr{R}'}$, $F'(-2,0)_{\mathscr{R}'}$ et donc $\boxed{\text{Foyers } F(\sqrt{2},\sqrt{2}) \text{ et } F'(-\sqrt{2},-\sqrt{2}).}$

Directrices : les droites d'équations $X = \pm\frac{a}{e} = \pm 1$ et donc dans $\mathscr{R}$, les droites d'équations respectives $x + y = \pm\sqrt{2}$.

(b) Le discriminant de cette conique vaut $41 \times 34 - 12^2 = 1250 > 0$. Il s'agit donc d'une conique du genre ellipse. On pose $\left\{\begin{array}{l} x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \\ y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \end{array}\right.$ et on détermine θ (ou plutôt $\cos\theta$ et $\sin\theta$) de sorte que le terme en XY disparaisse. Mais, le coefficient de XY dans

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 41(\cos(\theta)X - \sin(\theta)Y)^2 - 24(\cos(\theta)X - \sin(\theta)Y)(\sin(\theta)X + \cos(\theta)Y) + 34(\sin(\theta)X + \cos$$

vaut

$$-82\cos\theta\sin\theta - 24(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 68\cos\theta\sin\theta = -24(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 14\cos\theta\sin\theta.$$

Ce coefficient est nul si et seulement si $-12\cos^2\theta + 12\sin^2\theta - 7\cos\theta\sin\theta = 0$ ou encore, après division par $\cos^2\theta$, $12\tan^2\theta - 7\tan\theta - 12 = 0$. On peut alors prendre $\tan\theta = \frac{4}{3}$, puis on peut prendre $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{3}{5}\frac{4}{3} = \frac{4}{5}$.

Posons donc $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3X-4Y}{5} \\ y = \frac{4X+3Y}{5} \end{array}\right.$ $(*)$. On a alors

$$\begin{aligned} 41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 &= \frac{1}{25}(41(3X-4Y)^2 - 24(3X-4Y)(4X+3Y) + 34(4X+3Y)^2 \\ &\quad - 530(3X-4Y) + 460(4X+3Y) + 1850) \\ &= \frac{1}{25}(625X^2 + 1250Y^2 + 250X + 3500Y + 1850) \\ &= 25\left(X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25}\right) \end{aligned}$$

Une équation de la courbe dans le repère défini par $(*)$ est donc $X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25} = 0$. Ensuite,

$$X^2 + 2Y^2 + \tfrac{2}{5}X + \tfrac{28}{5}Y + \tfrac{74}{25} = 0 \Leftrightarrow \left(X + \tfrac{1}{5}\right)^2 + 2\left(Y + \tfrac{7}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(X + \tfrac{1}{5}\right)^2 + \frac{\left(Y+\frac{7}{5}\right)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

$\mathscr{C}$ est une ellipse. On trouve $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$ $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ puis Centre $\Omega(1,-1)$. Axe focal : $3x + 4y + 1 = 0$ et axe non focal : $-4x + 3y + 7 = 0$.

Sommets : $A\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, $A'\left(\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}\right)$, $B\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{5}, -1 + \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ et $B'\left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{5}, -1 - \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$.

Foyers : $F\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ et $F'\left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. Directrices : $4x - 3y + 3 = 0$ et $4x - 3y + 17 = 0$.

(c) $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$. On pose donc $\left\{\begin{array}{l} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{array}\right.$.

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2Y^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(X+Y) - \frac{2}{\sqrt{2}}(-X+Y) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(Y + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{5}{\sqrt{2}}X + \frac{15}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(Y + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(X + \frac{3}{8\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ est une parabole de paramètre $p = \frac{5}{4\sqrt{2}}$.

Sommet : $S\left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$. Axe focal : $x + y + \frac{1}{4} = 0$.

Foyer : $F\left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$. Directrice : $x - y - \frac{1}{4} = 0$.

(d) $\mathscr{C}$ est le point d'intersection des droites d'équation $x-y+1=0$ et $x+y-1=0$ c'est-à-dire le point de coordonnées $(0,1)$.

(e) $x^2+y^2-3x-y+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ et donc $\mathscr{C}$ est vide.

(f) $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$ est une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0,2)$ et $B(1,3)$.

(g) Si on pose $\left\{\begin{array}{l} X=x+y+1 \\ Y=x-y+3 \end{array}\right.$, on effectue un changement de repère non orthonormé. Dans le nouveau repère, $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne $XY=3$ et donc $\mathscr{C}$ est une hyperbole. Avec le changement de repère effectué, on obtient directement les éléments affines de cette hyperbole mais pas ses éléments métriques : hyperbole d'asymptotes les droites d'équations $x+y+1=0$ et $x-y+3=0$ et donc de centre $(-2,1)$. Pour obtenir l'axe focal, l'excentricité, les foyers et les directrices il faut faire un changement de repère orthonormé.

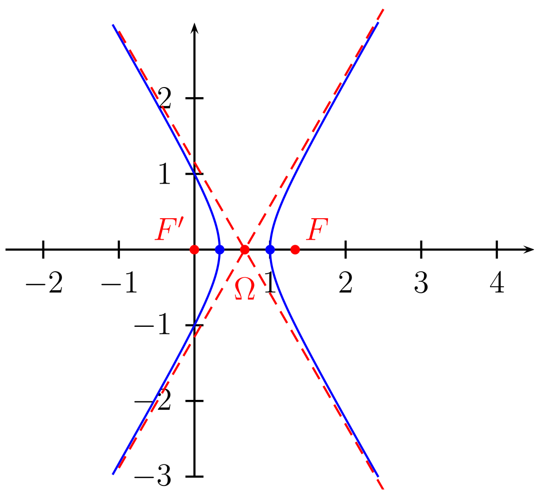
(h) Si on pose $\left\{\begin{array}{l} X=2x+y+1 \\ Y=3x+3y \end{array}\right.$, $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne dans le nouveau repère $Y=X^2$ et donc $\mathscr{C}$ est une parabole. Pour obtenir ces éléments métriques, il faut un changement de repère orthonormé.

Correction de l'exercice 5340 ▲

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

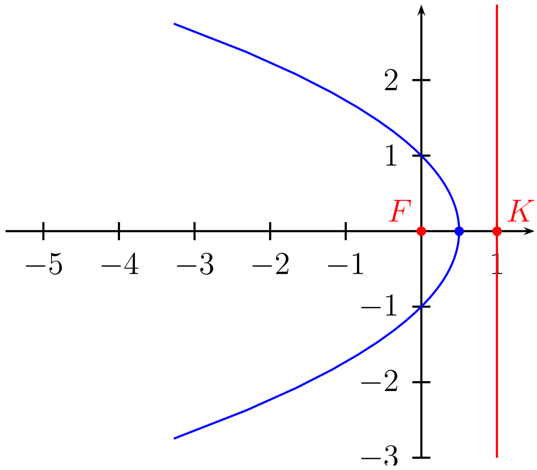
$$1)\ r=\frac{1}{1+2\cos\theta}\quad 2)\ r=\frac{1}{1+\cos\theta}\quad 3)\ r=\frac{1}{2+\cos\theta}\quad 4)\ r=\frac{1}{1-\sin\theta}\quad 5)\ r=\frac{1}{2-\cos\theta}.$$

(a) $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité 2 et donc une hyperbole.



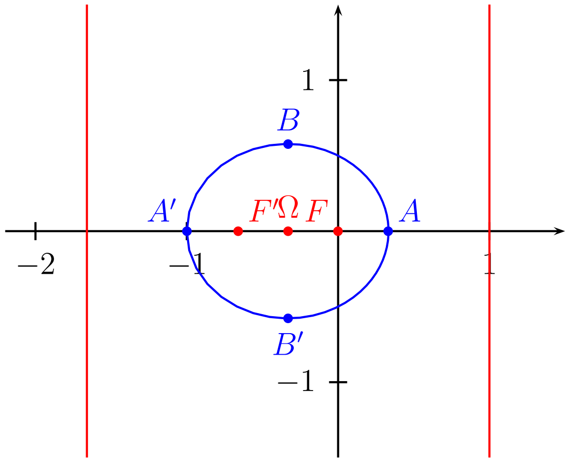
L'axe focal est (Ox). Les sommets sont les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et (Ox) c'est-à-dire les points $M(0)$ et $M(\pi)$ de coordonnées cartésiennes respectives $A'\left(\frac{1}{3},0\right)$ et $A(1,0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ c'est-à-dire $\Omega\left(\frac{2}{3},0\right)$. L'un des foyers est $F'=O$ et l'autre est le symétrique de F' par rapport à Ω : c'est le point $F\left(\frac{4}{3},0\right)$. Puisque $a=\frac{1}{3}$ et $e=2$, les directrices sont les droites d'équation $x=x_\Omega-\frac{a}{e}=\frac{1}{2}$ et $x=\frac{5}{6}$. Les branches infinies sont obtenues pour $\theta=\pm\frac{2\pi}{3}$. Les asymptotes sont donc les droites passant par Ω d'angle polaire $\pm\frac{2\pi}{3}$. Ce sont les droites d'équations cartésiennes $y=\pm\sqrt{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

(b) $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité 1 et donc une parabole.



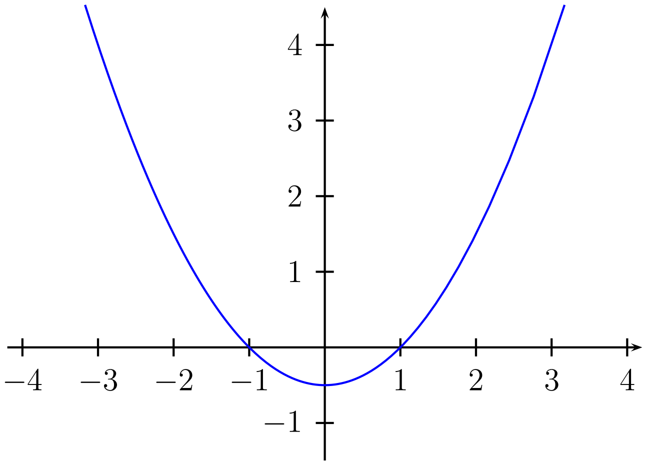
L'axe focal est (Ox). Le sommet est le point $M(0)$ de coordonnées cartésiennes $S\left(\frac{1}{2},0\right)$. Le foyer est $F=O$. Le point K est le symétrique de F par rapport à S et a pour coordonnées $(1,0)$. La directrice a donc pour équation $x=1$.

(c) $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité $e=\frac{1}{2}$ et donc une ellipse.

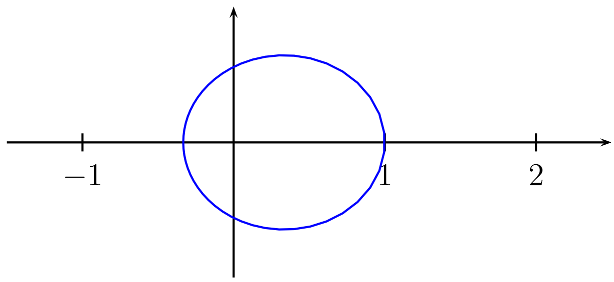


L'axe focal est (Ox). Les sommets sur cet axe sont $A=M(0)$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3},0\right)$ et $A'=M(\pi)$ de coordonnées $(-1,0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ et a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3},0\right)$. L'un des foyers est $F=O$. L'autre est le symétrique de F par rapport à Ω : c'est le point F' de coordonnées $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. Par suite, $c=\frac{1}{3}$ $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. D'où les sommets $B\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Les directrices sont les droites d'équations $x=x_\Omega+\frac{a}{e}=1$ et $x=-\frac{5}{3}$.

(d) $M\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\left[r\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\theta-\frac{\pi}{2}\right]=\left[\frac{1}{1+\cos\theta},\theta-\frac{\pi}{2}\right]=\mathrm{rot}_{O,-\pi/2}\left(\left[\frac{1}{1+\cos\theta},\theta\right]\right)$. Donc $\mathscr{C}$ est l'image de la parabole d'équation polaire $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$ par le quart de tour indirect de centre O.



(e) $M(\theta+\pi) = [r(\theta+\pi), \theta+\pi] = \left[\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta+\pi\right] = s_O\left(\left[\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta\right]\right)$. Donc $\mathscr{C}$ est l'image de l'ellipse d'équation polaire $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$ par la symétrie centrale de centre O.



Correction de l'exercice 5341 ▲

Un point du plan est sur le cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si son affixe z est de module 1 ou encore si et seulement si il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Or, pour θ réel,

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+1+e^{-i\theta}} = \overline{\left(\frac{e^{i\theta}}{1+2\cos\theta}\right)}.$$

L'ensemble cherché est donc la symétrique par rapport à (Ox) de la courbe d'équation polaire $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$. Cette dernière est une ellipse, symétrique par rapport à $(0x)$. Donc l'ensemble cherché est l'ellipse d'équation polaire $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$ (voir l'exercice 5340, 1)).

Correction de l'exercice 5342 ▲

(a) Soit M un point du plan. **1er cas.** Supposons que $M \notin (AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

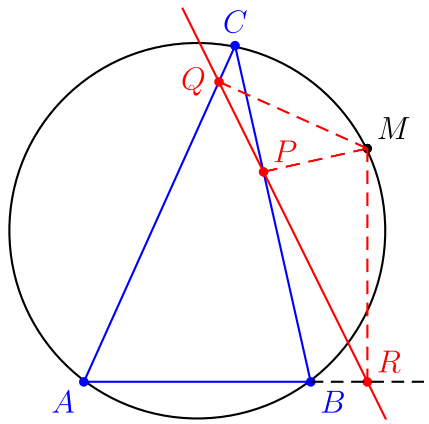
$$P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}\right)\ [\pi].$$

Maintenant, puisque les triangles MPC et MQC sont rectangles en P et Q respectivement, les points P et Q sont sur le cercle de diamètre $[MC]$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right)\ [\pi]$. De même, $\left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$. Par suite,

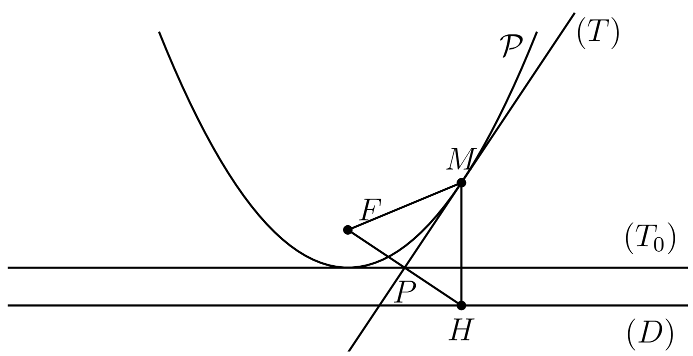
$$\begin{aligned}
P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ (privé des points } A,\ B \text{ et } C).
\end{aligned}$$

2ème cas. Supposons par exemple que $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = R$. Si de plus M n'est ni A, ni B, alors $M \neq P$ et $M \neq Q$ puis les droites (MP) et (MQ) sont perpendiculaires aux droites (BC) et (AC) respectivement. Si par l'absurde, les points P, Q et R sont alignés, on a $(MP) = (MQ)$ et donc $(AB)//(AC)$. Ceci est une contradiction. Donc, si les points P, Q et R sont alignés, M est l'un des trois points A, B ou C. La réciproque est immédiate. En résumant les deux cas,

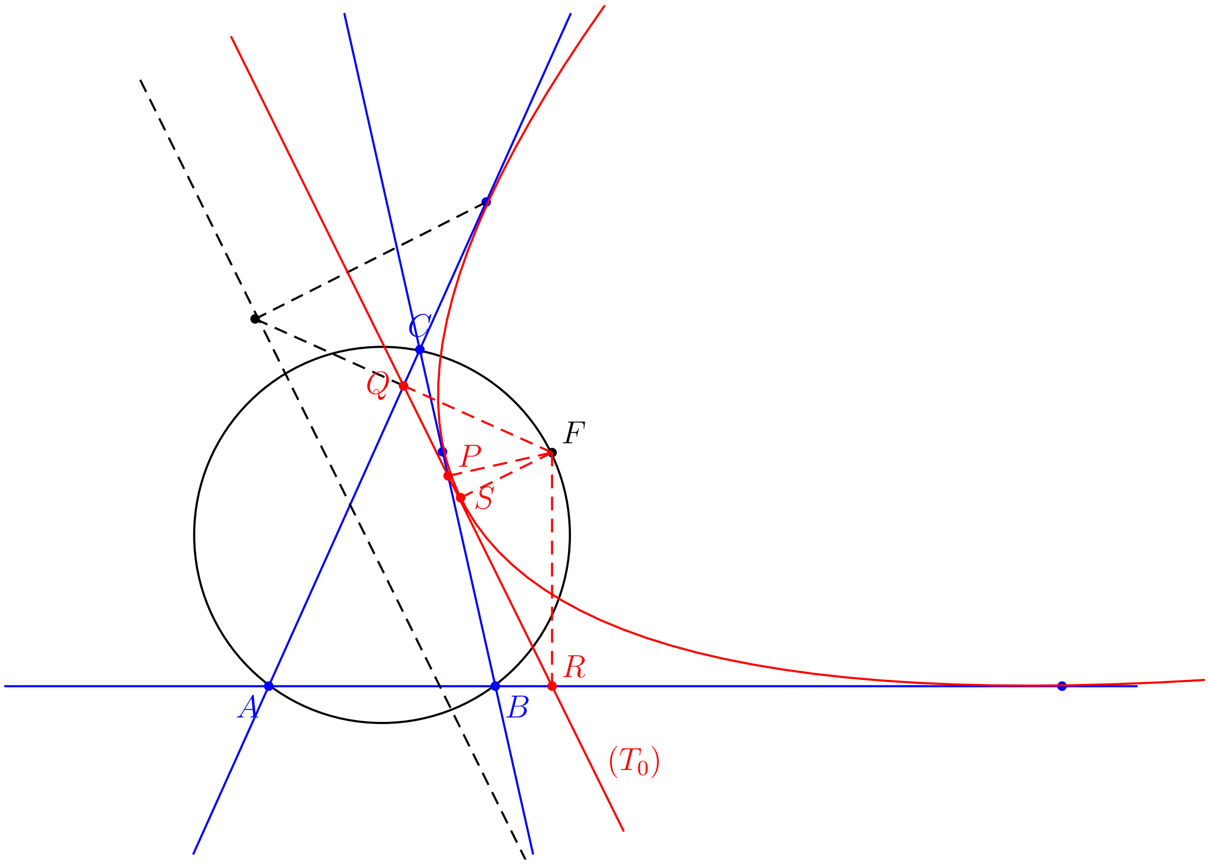
$$\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés si et seulement si } M \text{ est sur le cercle circonscrit au triangle } ABC.}$$



(b) **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Commençons par rappeler une construction usuelle de la tangente en un point d'une parabole : le triangle FMH est isocèle en M et la tangente en M à $\mathscr{P}$ est la médiatrice du segment $[FH]$. Par suite, le projeté orthogonal P de F sur la tangente (T) est sur $5T_0)$ la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$.



Soient A, B et C trois points non alignés. Si $\mathscr{P}$ est une parabole tangente aux droites (BC), (CA) et (AB), les projetés orthogonaux P, Q et R de son foyer F sur les droites (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$. D'après 1), le point F est nécessairement sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Réciproquement, si F est l'un des trois points A, B ou C, F n'est pas solution car une tangente à une parabole ne passe jamais par son foyer. Soit donc F un point du cercle circonscrit au triangle ABC et distinct des points A, B et C. Montrons alors qu'il existe une parabole de foyer F, tangente aux droites (BC), (CA) et (AB). On construit les projetés orthogonaux P, Q et R de F sur les droites (BC), (CA) et (AB). Ils sont alignés sur la droite de SIMSON (T_0) de F relativement au triangle ABC. La parabole de foyer F et de tangente au sommet (T_0) est solution du problème posé. La construction des points de contact est fournie par le graphique de la page précédente : on construit les symétriques de F par rapport aux points P, Q et R (ces symétriques sont sur la directrice) puis on remonte perpendiculairement à (T_0) jusqu'à la parabole.

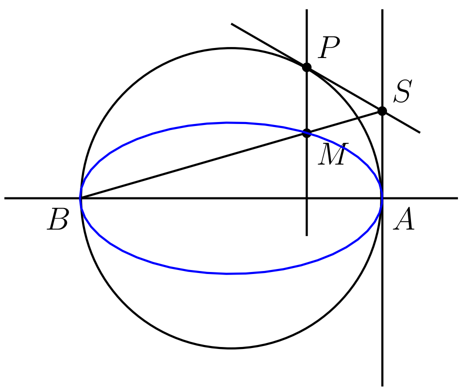


Correction de l'exercice 5343 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel A a pour coordonnées $(R,0)$ et $(\mathscr{C})$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$. Soit $P(R\cos t, R\sin t)$ un point de $(\mathscr{C})$. La tangente (D) à $(\mathscr{C})$ en A est la droite d'équation $x=R$ et la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en P est la droite d'équation $x\cos t+y\sin t=R$. Quand $t\notin\pi\mathbb{Z}$, (T) recoupe (D) en le point S de coordonnées $\left(R, R\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)$ ou encore $\left(R, R\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.
Une équation de la droite (BS) est $-\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x+R)+2y=0$. L'abscisse de M est $R\cos t$ et donc

$$y_M=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x_M+R)=\frac{1}{2}R\tan\left(\frac{t}{2}\right)(\cos t+1)=R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}R\sin t.$$

L'ensemble des points M est donc le support de l'arc $\left\{\begin{array}{l} x=R\cos t \\ y=\frac{1}{2}R\sin t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$. C'est l'image du cercle $\mathscr{C}$ dans l'affinité de base (AB), de direction (D) et de rapport $\frac{1}{2}$ et donc une ellipse de grand axe $[AB]$.



Correction de **l'exercice 5344 ▲**

Dans tout l'exercice, on pose $\mathscr{R} = (O,i,j)$ et (Γ) l'ensemble considéré, d'équation $f(x,y) = 0$.

(a) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = 2x^2+6xy+5y^2+4x+6y+1$ et $Q((x,y)) = 2x^2+6xy+5y^2$.
Le discriminant de cette conique est $\Delta = 2\times 5 - 3^2 = 1 > 0$ et la courbe (Γ) est du genre ellipse c'est-à-dire soit une ellipse, éventuellement un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.
Point critique.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4x+6y+4=0\\ 6x+10y+6=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1 \text{ et } y=0.$$

On note Ω le point de coordonnées $(-1,0)$ dans le repère $\mathscr{R}$.

Réduction de Q en base orthonormée. La matrice de Q dans la base (i,j) est $\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2-7X+1$ et les valeurs propres de A sont $\alpha = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.
$\mathrm{Ker}(A-\alpha I_2)$ est la droite d'équation $-(1+\sqrt{5})x+2y = 0$ et est engendrée par le vecteur unitaire $e_1 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}(2,1+\sqrt{5})$. Puis $\mathrm{Ker}(A-\alpha I_2)$ est la droite d'équation $-(1-\sqrt{5})x+2y=0$ et est engendrée par le vecteur unitaire $e_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2,1-\sqrt{5})$.
Equation réduite de (Γ) dans $\mathscr{R}' = (\Omega,e_1,e_2)$.
Les termes de degré 1 disparaissent car Ω est l'origine de $\mathscr{R}'$ et d'autre part, $Q(xi+yj) = Q(Xe_1+Ye_2) = \alpha X^2+\beta Y^2$.
Il manque simplement la constante mais si on effectue le changement de variables $x = x_0+aX+bY$ et $y = y_0+cX+dY$, la constante est bien sûr $f((x_0,y_0))$. Donc une équation cartésienne de (Γ) dans $\mathscr{R}'$ est $\alpha X^2+\beta Y^2+f((-1,0)) = 0$ ce qui s'écrit encore

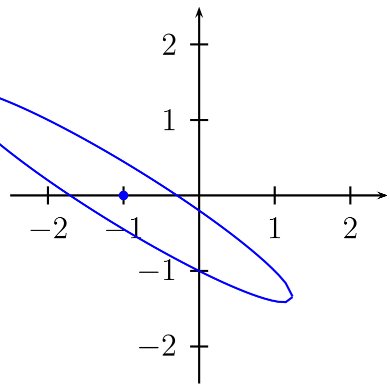
$$\frac{7+3\sqrt{5}}{2}X^2+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}Y^2 = 1.$$

Eléménts caractéristiques de la courbe (Γ) dans le repère $\mathscr{R}'$.
(Γ) est une ellipse de centre Ω, d'axe focal (ΩY) car $a = \frac{1}{\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}} = b$ et d'axe non focal (ΩX).
- *Centre* $\Omega(0,0)_{\mathscr{R}'}$.
- *Excentricité* $c^2 = b^2-a^2 = \frac{2}{7-3\sqrt{5}} - \frac{2}{7+3\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$ puis $e^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{3\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}} = \frac{-45+21\sqrt{5}}{4}$ et $e = \frac{1}{2}\sqrt{-45+21\sqrt{5}} = 0,69\ldots$
- *Sommets* $A\left(\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}},0\right)_{\mathscr{R}'}$ $A'\left(-\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}},0\right)_{\mathscr{R}'}$ $B\left(0,\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$ $B'\left(0,-\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$
- *Foyers* $\Omega F = \Omega F' = c = \sqrt{3\sqrt{5}}$ et puisque (ΩY) est l'axe focal, $F(0,\sqrt{3\sqrt{5}})$ et $F'(0,-\sqrt{3\sqrt{5}})$.
- *Directrices* $\Omega K = \Omega K' = \frac{b}{e} = 2\sqrt{\frac{2}{(7-3\sqrt{5})(-45+21\sqrt{5})}} = \frac{2}{7-3\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{5}}} = \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$ et donc $(D) : Y = \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$ et $(D') : Y = -\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$.
Eléménts caractéristiques de (Γ) dans $\mathscr{R}$.
Les formules de changement de repère s'écrivent $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\\ \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.
- *Centre* $\Omega(-1,0)_{\mathscr{R}}$ et excentricité $e = \frac{1}{2}\sqrt{-45+21\sqrt{5}} = 0,69\ldots$
- *Sommets* $A\left(-1+\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}},\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ et $A'\left(-1-\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}},-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ puis

$B\left(-1+\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ et $B'\left(-1-\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$

- Foyers $F\left(-1+\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}, \sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}\right)_{\mathscr{R}}$ et $F'\left(-1-\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}, -\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}\right)_{\mathscr{R}}$

-Directrices (D) : $\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2(x+1)+(1-\sqrt{5})y) = \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$ et (D') : $\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2(x+1)+(1-\sqrt{5})y) = -\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$.



(b) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = x^2+2xy+y^2+3x-2y+1$ puis $Q((x,y)) = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$. Q est de rang 1 et donc (Γ) est du genre parabole c'est-à-dire soit une parabole, soit une réunion de deux droites parallèles éventuellement confondues, soit l'ensemble vide.

Si (Γ) est non vide, (Γ) est une conique est de direction asymptotique d'équation $y=-x$ (fournie par $Q(x,y)=0$).

1ère étude. On étudie l'intersection de (Γ) avec une perpendiculaire quelconque à sa direction. Soit (D_k) la droite d'équation $y = x+k$, $k \in \mathbb{R}$.

L'équation aux abscisses des points d'intersection de (Γ) et (D_k) est $x^2+2x(x+k)+(x+k)^2+3x-2(x+k)+1=0$ ou encore

$$4x^2+(4k+1)x+k^2-2k+1=0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (4k+1)^2-16(k^2-2k+1) = 40k-15$. Puisque ce discriminant change de signe, (Γ) est une parabole.

Le discriminant est nul pour $k=\frac{3}{8}$ ce qui founit la tangente au sommet (T) : $y = x+\frac{3}{8}$ et aussi le sommet :

$$x_S = -\frac{4\times\frac{3}{8}+1}{2\times 4} = -\frac{5}{16} \text{ et } y_S = x_S+\frac{3}{8} = \frac{1}{16}.$$

Le sommet de la parabole (Γ) est le point $S\left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$.

L'axe focal est la perpendiculaire à la droite (T) en S. Une équation de l'axe focal (Δ) est $y+\frac{5}{16} = -\left(x-\frac{1}{16}\right)$ ou encore $y=-x-\frac{1}{4}$.

Pour obtenir le paramètre, le foyer et la directrice, on constate tout d'abord au vu du signe du discriminant calculé plus haut que $F = S+\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $K = S-\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Il ne manque plus que le paramètre p. Soit M l'un des deux points de (Γ) situé sur la parallèle à la tangente au sommet passant par F. La construction usuelle d'une parabole point par point montre que le quadrilatère (M,F,K,H) est un carré. Le paramètre p cherché est alors $p = FK = FM$.

Dans ce cas, la droite (MK) est la tangente à (Γ) en M et la bissectrice de l'angle des droites (D) et (Δ). Cette tangente est donc parallèle à l'un des axes de coordonnées.

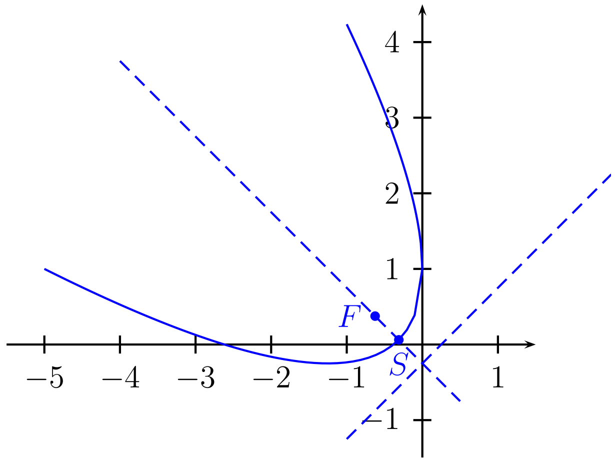
L'équation générale de la tangente en un point (x_0,y_0) de (Γ) est fournie par la règle de dédoublement des termes : $xx_0+xy_0+x_0y+yy_0+\frac{3}{2}(x+x_0)-(y+y_0)+1=0$ ou encore $x\left(x_0+y_0+\frac{3}{2}\right)+y(x_0+y_0-1)+x_0-y_0+1=0$. Cette tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées si et seulement si $x_0+y_0+\frac{3}{2}=0$ ou $x_0+y_0-1=0$.

M est donc sur l'une des deux droites (Δ_1) : $x+y+\frac{3}{2}=0$ ou (Δ_2) : $x+y-1=0$ qui sont toutes deux parallèles à l'axe focal (Δ) : $x+y+\frac{1}{4}=0$.

p est donc aussi la distance de (Δ) à l'une quelconque de ces deux droites ou la distance d'un point quelconque de (Δ) à la droite (Δ_1). Comme le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ est sur (Δ),

$$p = \frac{\left|-\frac{1}{4}+0+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$$

puis $F = S+\frac{5}{8\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{5}{16}-\frac{5}{16},\frac{1}{16}+\frac{5}{16}\right) = \left(-\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$ et $K = S-\frac{5}{8\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{5}{16}+\frac{5}{16},\frac{1}{16}-\frac{5}{16}\right)$ $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ de sorte que la directrice (D) a pour équation $y = x-\frac{1}{4}$.



2ème étude. On pose $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$ ou encore $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ ce qui correspond au changement de bases orthonormées de matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. On note (e_1,e_2) la famille de matrice P dans la base (i,j). Déterminons une équation de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}' = (O,e_1,e_2)$.

$$(x+y)^2+3x-2y+1 = 0 \Leftrightarrow 2X^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(X-Y)-\frac{2}{\sqrt{2}}(X+Y)+1 = 0 \Leftrightarrow 2X^2+\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{5}{\sqrt{2}}Y+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(X+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{5}{\sqrt{2}}Y+1 = 0 \Leftrightarrow \left(X+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}\left(Y-\frac{3}{8\sqrt{2}}\right).$$

Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}'$.

- (Γ) est une parabole de *sommet* $S\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{3}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$.
- *Paramètre* $p = \frac{5}{4\sqrt{2}}$. L'axe focal de (Γ) est l'axe (SY) et le foyer a une ordonnée strictement supérieure à Y_S.
- *Foyer* $F = S+\frac{5}{8\sqrt{2}}(0,1)_{\mathscr{R}'} = \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$.
- *Directrice* $K = S-\frac{5}{8\sqrt{2}}(0,1)_{\mathscr{R}'} = \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$ et donc $(D): Y = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Eléments de la parabole (Γ) dans le repère $\mathscr{R}$.

- *Paramètre* $p = \frac{5}{4\sqrt{2}}$. *Sommet* $S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_S-\frac{1}{\sqrt{2}}Y_S,\frac{1}{\sqrt{2}}X_S+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_S\right)_{\mathscr{R}} = \left(-\frac{5}{16},\frac{1}{16}\right)_{\mathscr{R}}$.
- Le *foyer* F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_F-\frac{1}{\sqrt{2}}Y_F,\frac{1}{\sqrt{2}}X_F+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_F\right)_{\mathscr{R}} = \left(-\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)_{\mathscr{R}}$.
- La *directrice* (D) a pour équation $\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$ et donc $y = x-\frac{1}{4}$.

(c) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = 2x^2-4xy-3x+3y+1$ puis $Q((x,y)) = 2x^2-4xy = 0$.
Le discriminant de cette conique est $\Delta = 2\times 0-(-2)^2 = -4 < 0$ et la courbe est du genre hyperbole c'est-à-dire soit une hyperbole, soit une réunion de deux droites sécantes. Dans les deux cas, les deux directions asymptotiques admettent pour équation respective $x = 0$ et $x = 2y$ (fourni par $Q(x,y) = 0$)
Point critique.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4x-4y-3=0\\ -4x+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{3}{4} \text{ et } y=0.$$

On note Ω le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4},0\right)$ dans le repère $\mathscr{R}$.

Asymptotes. Ce sont les droites passant par Ω de directions d'équations $x=0$ et $x=2y$. Les asymptotes sont les droites $(D_1): x=\frac{3}{4}$ et $(D_2): x-\frac{3}{4}=2y$. La réunion de ces deux droites a pour équation $\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}-2y\right)=0$ ou encore $2x^2-4xy-3x+3y+\frac{9}{2}=0$. (Γ) n'est pas $(D_1)\cup(D_2)$ et donc (Γ) est une hyperbole.

Axe focal et axe transverse.

Ce sont les deux bissectrices de la paire de droites $((D_1),(D_2))$ ou encore l'ensemble des points à égale distance de ces deux droites ou encore l'ensemble des points de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$ tels que $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{5}\left(x-2y-\frac{3}{4}\right)^2$.

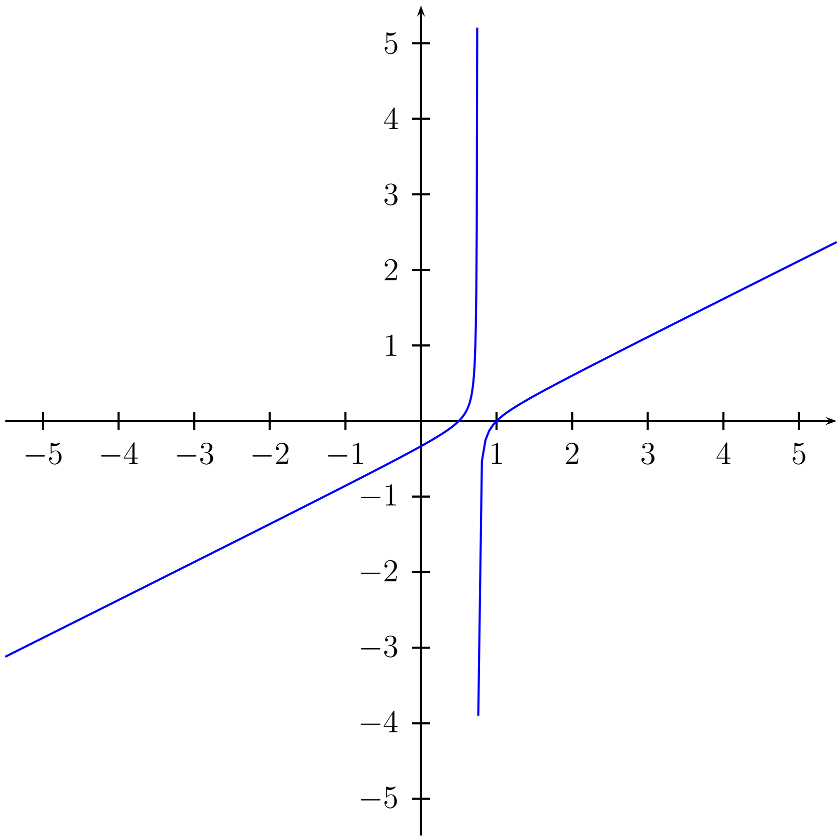
Ce sont donc les droites d'équations respectives $\left(x-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x-2y-\frac{3}{4}\right)=0$ et $\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x-2y-\frac{3}{4}\right)=0$ ou encore $y=-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)$ et $y=\frac{\sqrt{5}+1}{8}(4x-3)$. Seule l'une de ses deux droites a une intersection non vide avec (Γ), à savoir l'axe focal et les deux points d'intersection sont les sommets de l'hyperbole.

L'équation aux abscisses des points d'intersection de (Γ) et (D_1) est

$$2x^2-4x\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)\right)-3x+3\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)\right)+1=0$$

ou encore $2\sqrt{5}x^2-3\sqrt{5}x+\frac{9\sqrt{5}-1}{8}=0$ ou enfin $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{1}{16\sqrt{5}}=0$ dont le discriminant vaut $\frac{1}{4\sqrt{5}}>0$.

L'axe focal est donc la droite d'équation $y=-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)$. Les solutions de l'équation précédente fournissent les abscisses des sommets.



(d) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $Q(x,y)=-5x^2+6\sqrt{3}xy+y^2$. Le discriminant de (Γ) vaut $-5-27=-32<0$.

La conique est du genre hyperbole et de centre O. Comme $O \notin (\Gamma)$, (Γ) est plus précisément une hyperbole de centre O. Les asymptotes sont fournies par l'égalité $Q(x,y)=0$ et sont donc les droites d'équations $y=(-3\sqrt{3}\pm 4\sqrt{2})x$.

La matrice de Q dans la base canonique est $M=\begin{pmatrix} -5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_M = X^2+4X-32=(X-4)(X+8)$. Ensuite, $M=PD{}^tP$ où $P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $D=\mathrm{diag}(-8,4)$.

Les formules de changement de repère s'écrivent $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}X+Y) \\ y=\frac{1}{2}(-X+\sqrt{3}Y) \end{array}\right.$ ou aussi $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x-y) \\ Y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y) \end{array}\right.$.

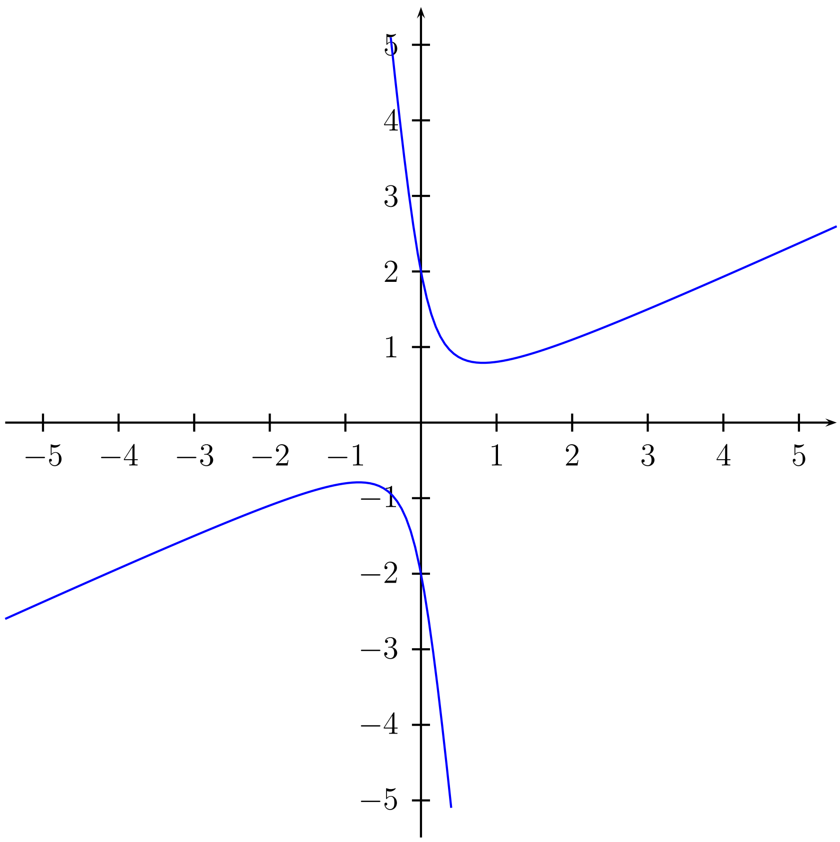
Dans $\mathscr{R}'(O,e_1,e_2)$, (Γ) a pour équation $-8X^2+4Y^2-4=0$ ou encore $-\frac{X^2}{(1/\sqrt{2})^2}+Y^2=1$. Donc $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=1$ et $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Eléments de l'hyperbole dans $\mathscr{R}'$ puis $\mathscr{R}$. L'axe focal est (O,e_2) c'est-à-dire la droite d'équation $X=0$ dans $\mathscr{R}'$ ou encore $y=\sqrt{3}x$ dans $\mathscr{R}$.

- Les *sommets* sont les points B et B' de coordonées $(1,0)$ et $(-1,0)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dans $\mathscr{R}$.

- *Excentricité, foyers, directrices.* $c=\sqrt{\frac{3}{2}}$ puis $e=\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Les foyers F et F' ont pour coordonnées $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ et $\left(0,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc $\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}$.

En ce qui concerne les directrices, $K=O+\frac{1}{e}\overrightarrow{OB}=\left(0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{\mathscr{R}'}$. Les directrices sont les droites d'équations respectives $Y=\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $Y=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ dans $\mathscr{R}'$ ou encore d'équations respectives $x+\sqrt{3}y=\frac{4}{\sqrt{6}}$ et $x+\sqrt{3}y=-\frac{4}{\sqrt{6}}$.



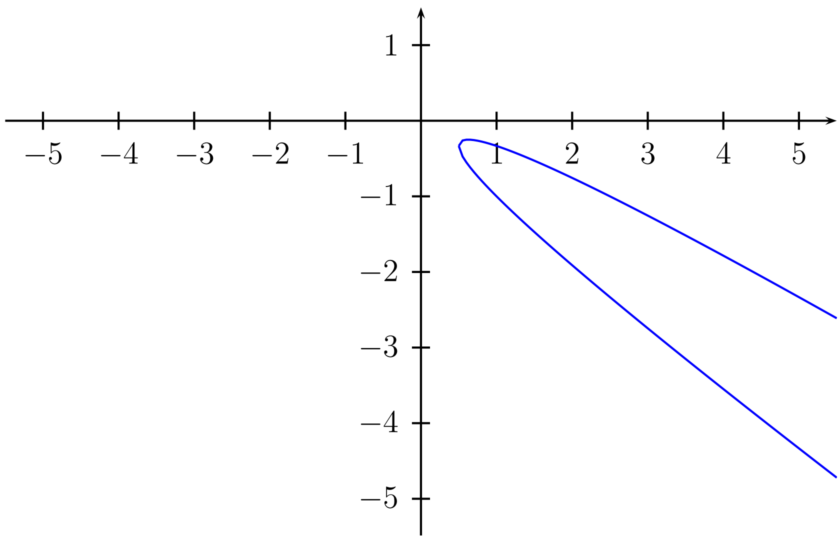
(e) L'équation proposée s'écrit $(2x+3y)^2-2x+1=0$. Il s'agit d'une conique du genre parabole de direction asymptotique éventuelle $2x+3y=0$.
Posons $X=\frac{1}{\sqrt{13}}(2x+3y)$ et $Y=\frac{1}{\sqrt{13}}(3x-2y)$ ou encore $x=\frac{1}{\sqrt{13}}(2X+3Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{13}}(3X-2Y)$.

Dans $\mathscr{R}' = (O,X,Y)$, (Γ) admet pour équation cartésienne :

$$13X^2 - \frac{2}{\sqrt{13}}(2X+3Y)+1=0 \Leftrightarrow 13\left(X-\frac{2}{13\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{6}{\sqrt{13}}Y+\frac{165}{169}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(X-\frac{2}{13\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{6}{13\sqrt{13}}\left(Y-\frac{55}{26\sqrt{13}}\right)$$

Ceci montre que (Γ) est une parabole, fournit le paramètre $p=\frac{6}{13\sqrt{13}}$ puis les éléments de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}'$:
$S=\left(\frac{2}{13\sqrt{13}},\frac{55}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ puis $F=S+\frac{p}{2}(0,1)_{\mathscr{R}'}=\left(\frac{2}{13\sqrt{13}},\frac{61}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ et $K=S-\frac{p}{2}(0,1)_{\mathscr{R}'}=\left(\frac{2}{13\sqrt{13}},\frac{49}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$
et donc $(D) : Y=\frac{49}{26\sqrt{13}}$.

Eléments de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}$.
$S\left(\frac{173}{338},-\frac{49}{169}\right)_{\mathscr{R}}$ puis $F\left(\frac{191}{338},-\frac{55}{169}\right)_{\mathscr{R}}$ et $(D) : 3x-2y=\frac{49}{26}$.



(f) (Γ) est le point d'intersection des droites d'équations respectives $x-y+1=0$ et $x+y-1=0$ à savoir le point de coordonnées $(0,1)$.

(g) L'équation s'écrit $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. (Γ) est le cercle de centre $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(h) On reconnait une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0,2)$ et $B(1,3)$.

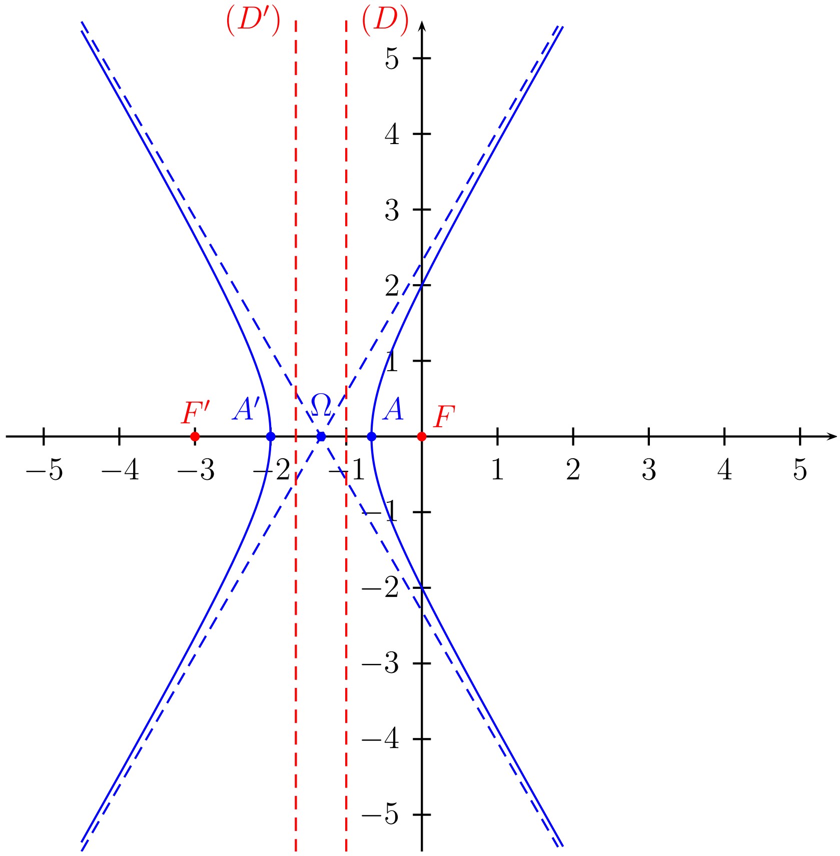
(i) Si on pose $X=x+2y-4$ et $Y=x-y-1$, l'équation s'écrit $XY=3$ ce qui montre immédiatement que la courbe est une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équations respectives $x+2y-4=0$ et $x-y-1=0$ et donc de centre le point d'intersection de ces deux droites $\Omega(2,1)$. Ce changement de repère non orthonormé ne peut pas fournir davantage et si on veut les éléments métriques de l'hyperbole, il faut revenir aux méthodes de 3) ou 4).

(j) De nouveau, si on pose $X=2x+y-1$ et $Y=x+y$ (ou même $Y=3(x+y)$) , l'équation s'écrit $X^2=3Y$. Le nouveau repère est quelconque mais on peut tout de même affirmer que la courbe est une parabole de direction asymptotique $2x+y=0$. Avec cette équation, on ne lit cependant aucun des éléments métriques de celle-ci.

Correction de l'exercice 5345 ▲

Les trois courbes proposées sont des coniques propres (équation polaire d'une conique propre dans un repère dont l'axe des abscisses est l'axe focal d'origine un foyer : $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ où $p=ed=eFK$).

(a) $e=2$. Il s'agit une hyperbole dont l'un des foyers est l'origine.



L'axe focal est (Ox) et donc les sommets de l'hyperbole sont les points d'intersection de la courbe avec l'axe (Ox). Ce sont les points A et A' de coordonnées cartésiennes $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ et $(-2,0)$ obtenus pour $\theta=\pi$ et $\theta=0$ respectivement.

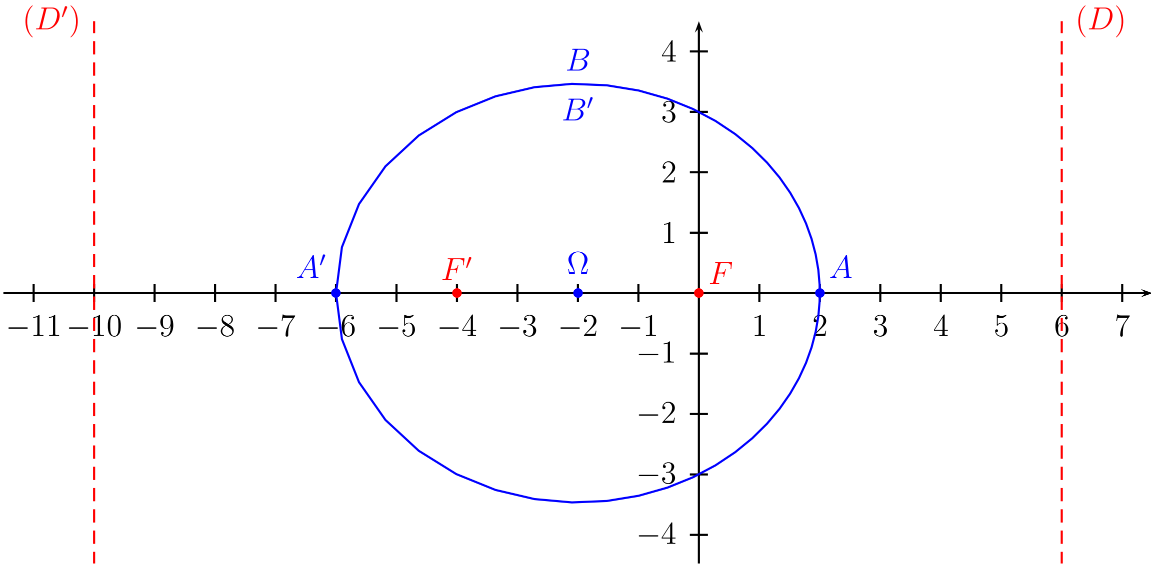
Le centre est le milieu du segment $[AA']$ à savoir le point $\Omega\left(-\frac{4}{3},0\right)$.

les directions asymptotiques sont fournies par : $2\cos\theta-1=0 \Leftrightarrow \theta\in\pm\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}$. Les asymptotes sont les droites d'angle polaire $\pm\frac{\pi}{3}$ passant par Ω. Ce sont les droites d'équations respectives $y=\sqrt{3}\left(x+\frac{4}{3}\right)$ et $y=-\sqrt{3}\left(x+\frac{4}{3}\right)$.

L'un des foyers F est l'origine. L'autre est le symétrique de F par rapport à Ω à savoir le point F' de coordonnées $(-3,0)$.

Les directrices sont fournies par les points $K=\Omega+\frac{1}{e}\overrightarrow{OA}=(-1,0)$ et $K'=\Omega-\frac{1}{e}\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{5}{3},0\right)$. Les directrices sont les droites (D) et (D') d'équations respectives $x=-1$ et $x=-\frac{5}{3}$.

(b) L'équation s'écrit $r=\frac{3}{\frac{1}{2}+\cos\theta}$. Donc $e=\frac{1}{2}$ et la courbe est une ellipse.



Les sommets du grand axe sont les points $A(2,0)$ et $A'(-6,0)$ obtenus pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Le centre est le milieu Ω de $[AA']$ de coordonnées $(-2,0)$.

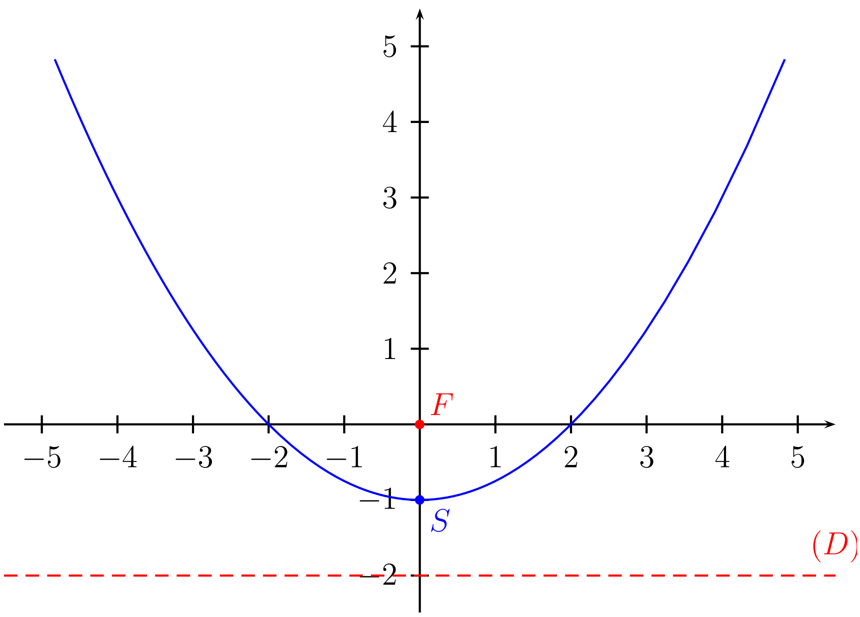
Le premier foyer F est l'origine et le deuxième est le symétrique du point F par rapport à Ω à savoir le point $F'(-4,0)$.

Les points K et K' sont définis par : $K = \Omega + \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (6,0)$ et $K' = \Omega - \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (-10,0)$. Les directrices sont les droites (D) et (D') d'équations respectives $x = 6$ et $x = -10$.

Les sommets du petit axe sont déterminés par $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ puis $B = \Omega + b\overrightarrow{j} = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ et $B = \Omega - b\overrightarrow{j} = \left(-2, -2\sqrt{3}\right)$

(c) L'équation $r = \frac{2}{1+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$. On reconnait une parabole dans une présentation non traditionnelle.

Le foyer est toujours l'origine et comme la direction asymptotique est obtenue pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (et a donc pour angle polaire $\frac{\pi}{2}$), l'axe focal est donc la droite passant par l'origine F et d'angle polaire $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées. Le sommet est l'intersection de la courbe avec l'axe (Oy) obtenue pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$, on obtient $r = 1$ et donc $S(-1,0)$. Puis $K = s_S(F) = (-2,0)$ et la directrice (D) est la droite d'équation $y = -2$. Enfin, $p = FK = 2$.



Remarque. Si on n'est pas à l'aise en polaires, on peut toujours repasser en cartésien mais c'est une très grosse perte de temps :

En 1), $r(1-2\cos\theta)=2$ s'écrit $r-2x=2$ puis $x^2+y^2=(2x+2)^2$.
En 2), $r(2+\cos\theta)=6$ s'écrit $2r+x=6$ et donc $4(x^2+y^2)=(-x+6)^2$.
En 3), $r(1-\sin\theta)=2$ s'écrit $r-y=2$ puis $x^2+y^2=(y+2)^2$ et donc $y=\frac{x^2}{4}-1$.

Correction de l'exercice 5346 ▲

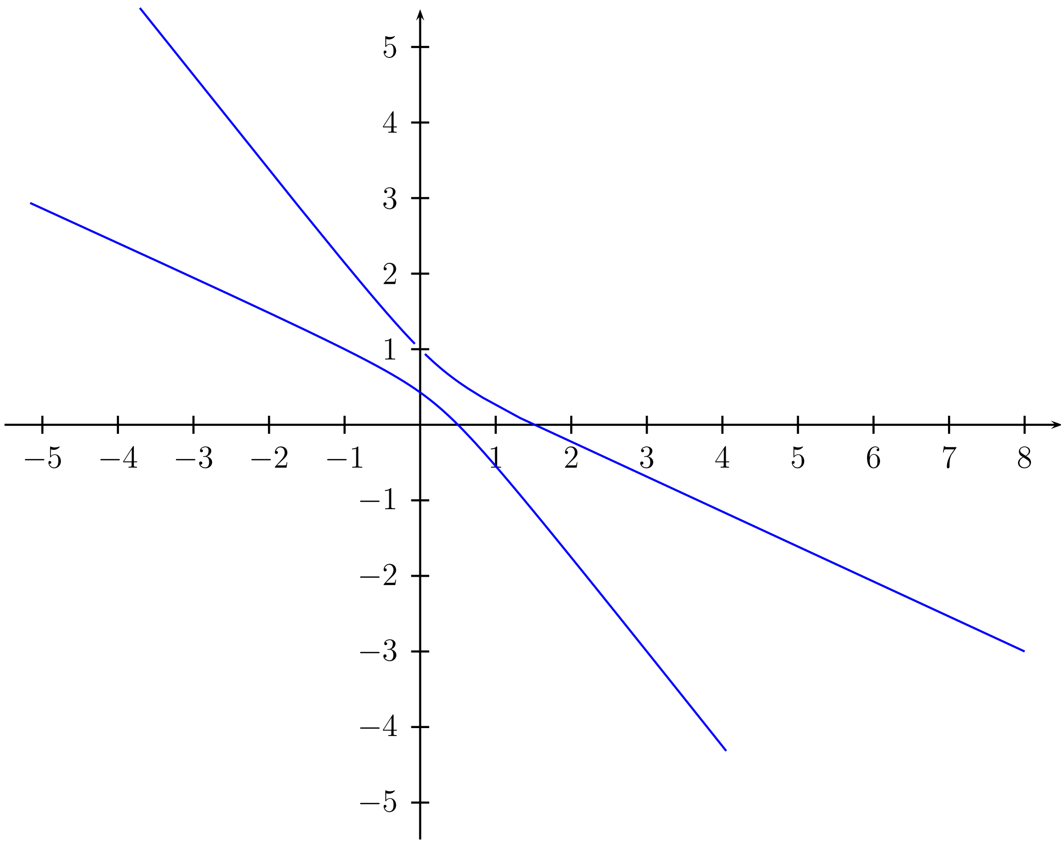
(a) Une ellipse (privée d'un point) admet une représentation paramétrique de la forme $\left\{\begin{array}{l} a\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ b\frac{2t}{1+t^2} \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$, dans un repère adapté. Une branche d'hyperbole admet une représentation paramétrique de la forme $\left\{\begin{array}{l} a\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ b\frac{2t}{1-t^2} \end{array}\right.$, $t\in]-1,1[$, dans un repère adapté. Une parabole admet une représentation paramétrique de la forme $\left\{\begin{array}{l} \frac{t^2}{2p} \\ t \end{array}\right.$, dans un repère adapté ...

Réciproquement, si la courbe admet une paramétrisation du type de l'énoncé, les six polynômes P^2, PQ, Q^2, PR, QR et R^2 sont dans $\mathbb{R}_4[X]$ qui est de dimension 5 et donc sont linéairement dépendants. On en déduit qu'il existe $(a,b,c,d,e,f)\neq(0,0,0,0,0,0)$ tel que $aP^2+2bPQ+cQ^2+2dPR+2eQR+fR^2=0$ ou encore tel que pour tout réel t tel que $R(t)\neq 0$,

$$a\left(\frac{P(t)}{R(t)}\right)^2+2b\frac{P(t)}{R(t)}\times\frac{Q(t)}{R(t)}+c\left(\frac{Q(t)}{R(t)}\right)^2+2d\frac{P(t)}{R(t)}+2e\frac{Q(t)}{R(t)}+f=0.$$

Le support de l'arc est donc contenu dans la courbe d'équation $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ où $(a,b,c,d,e,f)\neq(0,0,0,0,0,0)$).

(b) Construction de la courbe $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{2t+1}{t^2+2t-1} \\ y=\frac{t^2-1}{t^2+2t-1} \end{array}\right.$.



Correction de l'exercice 5349 ▲

Soient P, P' les symétriques de F par rapport aux tangentes. Donc $F'P = F'P' = 2a$.
Le triangle FPP' est rectangle, donc T est le milieu de $[P, P']$, et $TF = TP = TP'$.
Donc, $TF^2 + TF'^2 = F'P^2 = 4a^2$.
$TF^2 + TF'^2 = 2TO^2 + OF^2 + OF'^2$ donc T appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.

Correction de l'exercice 5350 ▲

(a) $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$.

(b) $M : \begin{pmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \end{pmatrix}, P : \begin{pmatrix} 2a\cos\alpha \\ 2a\sin\alpha \end{pmatrix}$: (MP) est tangente à $\mathscr{E}' \Leftrightarrow \theta \equiv \alpha \pm \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Correction de l'exercice 5351 ▲

(a) $\frac{x^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = d^2$.

Correction de l'exercice 5352 ▲

$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow T : \begin{pmatrix} a/e \\ b^2(e-X)/d \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{FM} \cdot \vec{FT} = 0.$

Correction de l'exercice 5355 ▲

Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des points considérés. Pour x réel, posons $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

$$\begin{aligned} P(x) = P(y) &\Leftrightarrow (x^3 - y^3) + A(x^2 - y^2) + B(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)((x^2+xy+y^2) + A(x+y) + B) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ ou } x^2 + xy + y^2 + A(x+y) + B = 0. \end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ est donc la réunion de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe $\mathscr{E}$ d'équation $x^2 + xy + y^2 + A(x+y) + B = 0$. Pour déterminer la nature de $\mathscr{E}$, on fait un changement de repère orthonormé en posant

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$$

On obtient

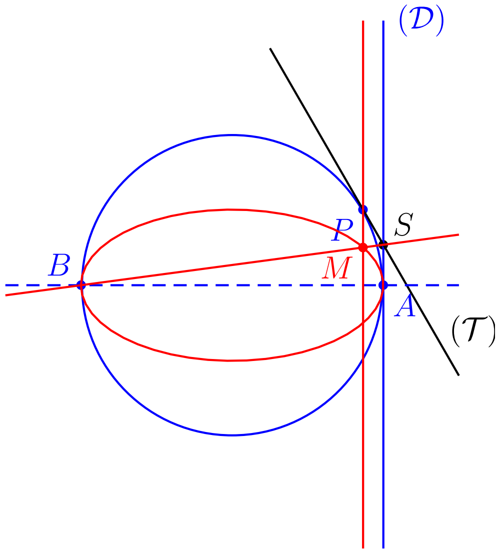
$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 + A(x+y) + B = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}((X-Y)^2 + (X-Y)(X+Y) + (X+Y)^2) + \frac{A}{\sqrt{2}}X + B = 0 \\ &\Leftrightarrow 3X^2 + Y^2 + \sqrt{2}AX + 2B = 0 \Leftrightarrow 3\left(X + \frac{A\sqrt{2}}{6}\right)^2 + Y^2 = \frac{A^2 - 12B}{6}\ (*) \end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est une ellipse si et seulement si $A^2 - 12B > 0$ (sinon $\mathscr{E}$ est un point ou est vide). Dans ce cas, puisque $a = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 = b$,

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Correction de l'exercice 5356 ▲

On choisit un repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel le point A a pour coordonnées $(1,0)$ et le point B a pour coordonnées $(-1,0)$. Dans le repère $\mathscr{R}$, la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation $x=1$. Ensuite, il existe un réel θ tel que le point P ait pour coordonnées $(\cos\theta,\sin\theta)$. La tangente $(\mathscr{T})$ a pour équation $x\cos\theta+y\sin\theta=1$. Pour $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, le point S a pour coordonnées $\left(1,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ ou encore $\left(1,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.



La perpendiculaire à la droite (AB) passant P admet pour équation $x=\cos\theta$. La droite (BS) admet pour équation $-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(x+1)+2y=0$. Ces deux droites se coupent en le point M de coordonnées $\left(\cos\theta,\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(1+\cos\theta)\right)$ ou encore $\left(\cos\theta,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ ou enfin $(\cos\theta,\frac{1}{2}\sin\theta)$.
L'ensemble des points M est donc l'ensemble des points de coordonnées $\left(\cos\theta,\frac{1}{2}\sin\theta\right)$ quand θ décrit $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ ou encore l'ellipse d'équation $x^2+4y^2=1$ privée des points A et B.

Correction de l'exercice 5357 ▲

Posons $P=X^3+\alpha X^2+\beta X+\gamma$.

$$\begin{aligned}P(x)=P(y)&\Leftrightarrow(y^3-x^3)+\alpha(y^2-x^2)+\beta(y-x)=0\Leftrightarrow(y-x)(x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta)=0\\&\Leftrightarrow y-x=0\text{ ou }x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0.\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la réunion de la droite (D) d'équation $y=x$ et de la courbe (Γ) d'équation $x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0$. Pour étudier la courbe (Γ) qui est du genre ellipse, posons $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ puis notons $\mathscr{R}'$ le repère (OXY).

$$\begin{aligned}x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0&\Leftrightarrow\frac{1}{2}((X+Y)^2+(X+Y)(X-Y)+(X-Y)^2)+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(X+Y+X-Y)+\beta=0\\&\Leftrightarrow\frac{1}{2}(3X^2+Y^2)+\alpha\sqrt{2}X+\beta=0\Leftrightarrow 3\left(X+\frac{\alpha\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta).\end{aligned}$$

(Γ) est une ellipse si et seulement si $\alpha^2-3\beta>0$ (sinon (Γ) est un point ou est vide). Dans ce cas, $3\left(X+\frac{\alpha\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta)\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ où $a^2=\frac{2}{9}(\alpha^2-3\beta)<\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta)=b^2$. Par suite,

$$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Correction de l'exercice 5361 ▲

(a) Soit O ce milieu. La tangente en M est parallèle à (FH'), et passe par le milieu de $[F,H]$, donc par le milieu de $[H,H']$.

(b) Calcul d'angles. $\overline{(\vec{MO},\vec{MF})} \equiv \overline{(\vec{FH'},\vec{FM'})}$.

Correction de l'exercice 5362 ▲

Soit O' ce centre. Les triangles MPQ et MAB sont semblables, donc O' est l'image de O par l'homothétie de centre M qui transforme A en P.

Soit $(A'B')$ la symétrique de (AB) par rapport à O. D'après l'homothétie,

$$\frac{O'M}{d(O',\Delta)} = \frac{OM}{d(O,(AB))} = (cste) = \frac{OM-O'M}{d(O,(AB))-d(O',\Delta)} = \frac{OO'}{d(O',(A'B'))}.$$

Donc O' décrit une partie d'une conique de foyer O et de directrice $(A'B')$.

Correction de l'exercice 5363 ▲

Repère $(O,\frac{\vec{OA}}{R},\vec{j}) \Rightarrow$ parabole $\rho = \frac{R}{1+\sin\theta}$.

Correction de l'exercice 5364 ▲

arcs de paraboles de foyer F et de directrices Δ,Δ', parallèles à D à la distance $2a$ de D.

Correction de l'exercice 5366 ▲

$A:(t^2/2p,t)$, $B:(u^2/2p,u)$ avec $t(t+u)=-2p^2$. AB est minimal pour $t^2=2p^2$ et vaut alors $3p\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 5367 ▲

(a) Parabole : $y^2=2px \Rightarrow x=2pt^2, y=2pt$. Corde : $\begin{vmatrix} 2pa^2 & 2pb^2 & x \\ 2pa & 2pb & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(b) $a^2+ab+ac+bc+1=0$.

(c) $c=-\frac{a^2+ab+1}{a+b}$.
$(BC):(2pa+y)b^2+(2pa^2+2p-x)b-(ax+a^2y+y)=0$.
Point fixe : $y=-2pa$, $x=2p(a^2+1)$.

(d) Parabole translatée de $\mathscr{P}$ de $(2p,0)$.

Correction de l'exercice 5368 ▲

(a) $M=(2pt^2,2pt) \Rightarrow 2t^2+2tt_0+1=0$. Il y a deux solutions si $|t_0|>\sqrt{2}$, une seule si $|t_0|=\sqrt{2}$ et aucune si $|t_0|<\sqrt{2}$.

(b) $t_1+t_2=-t_0$, $t_1^2+t_2^2=t_0^2-1$. Centre : $(4pt_0^2-2p,0)$ (1/2-droite).

Correction de l'exercice 5369 ▲

(a) $x_C-x_A=2p\pm\sqrt{4p^2+8pxA}$.

(b) $x_{n+1}=x_n+\sqrt{8px_n+4p^2}+2p=x_n\left(1+\sqrt{\frac{8p}{x_n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)\right)$ donc $\sqrt{x_{n+1}}=\sqrt{x_n}+\sqrt{2p}+o(1)$ et $x_n\sim 2pn^2$.

Correction de l'exercice 5370 ▲

Dans un certain repère orthonormé, la parabole $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $x^2 = 2py$. D'après la règle de dédoublement des termes, une équation de la tangente $\mathscr{T}_{x_0}$ en un point $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{x_0^2}{2p}\right)$ de $\mathscr{P}$ est

$$xx_0 = p(y + y_0).$$

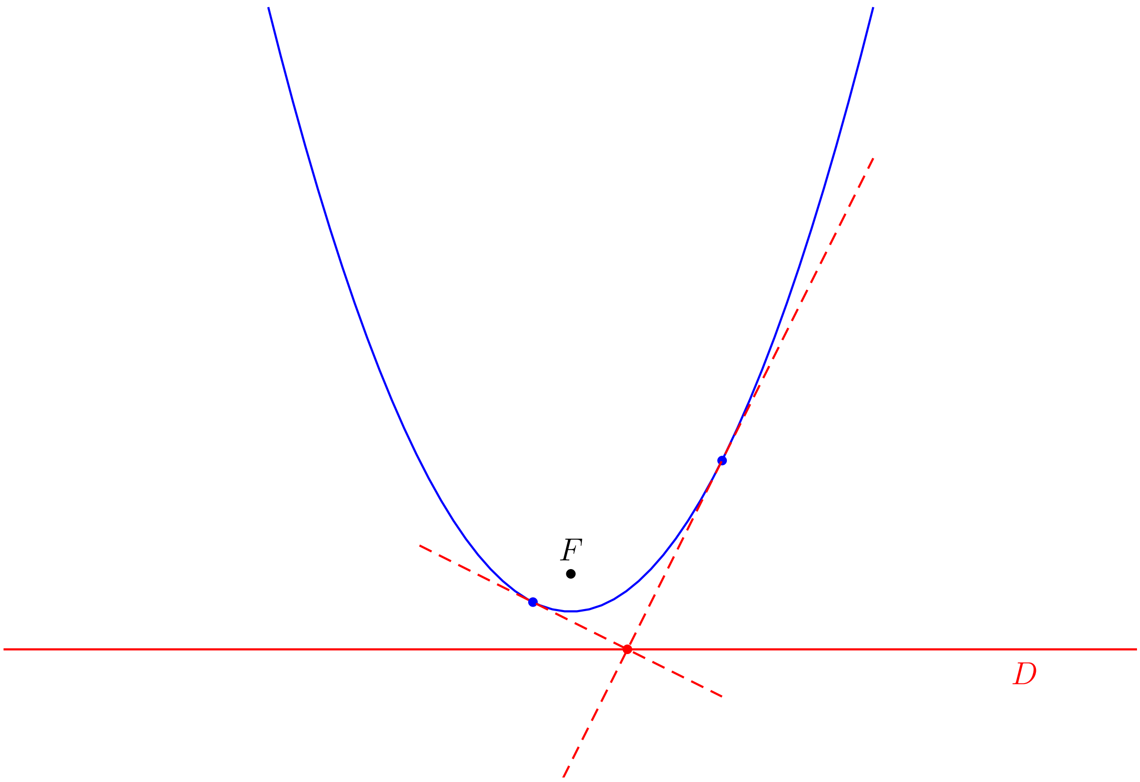
Les tangentes en $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_1, y_1)$ sont perpendiculaires si et seulement si $x_0x_1 + p^2 = 0$. L'orthoptique $\mathscr{C}$ est donc l'ensemble des points d'intersection de $\mathscr{T}_{x_0}$ et $\mathscr{T}_{-p^2/x_0}$ où x_0 décrit $\mathbb{R}^*$.

$$M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} xx_0 = p\left(y + \frac{x_0^2}{2p}\right) \\ -x\frac{p^2}{x_0} = p\left(y + \frac{p^3}{2x_0^2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} tx - py = \frac{t^2}{2} \\ px + ty = -\frac{p^3}{2t} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{t^2+p^2}\left(\frac{t^3}{2} - \frac{p^4}{2t}\right) \\ y = \frac{1}{t^2+p^2}\left(-\frac{p^3}{2} - \frac{pt^2}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^2-p^2}{2t} \\ y = -\frac{p}{2} \end{array}\right. .$$

Maintenant, $\lim_{t \to 0^+} \frac{t^2-p^2}{2t} = -\infty$ et $\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2-p^2}{2t} = +\infty$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{t^2-p^2}{2t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, quand t décrit $]0, +\infty[$, $x = \frac{t^2-p^2}{2t}$ décrit $\mathbb{R}$. Finalement, l'orthoptique $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $y = -\frac{p}{2}$ ou encore

l'orthoptique d'une parabole est sa directrice.



Correction de l'exercice 5371 ▲

On choisit un repère orthonormé $\mathscr{R}_1 = \left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ tel que le plan d'équation $x + y + z = 1$ dans $\mathscr{R}$ soit le plan d'équation $Z = 0$ dans $\mathscr{R}_1$. On prend $O' = (1, 0, 0)$ puis $\overrightarrow{K} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et enfin $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Les formules de changement de repère s'écrivent

$$\begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1 \\ y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ensuite, soit M un point de l'espace dont les coordonnées dans $\mathscr{R}$ sont notées (x,y,z) et les coordonnées dans $\mathscr{R}_1$ sont notées (X,Y,Z).

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right) + 1 \\ Z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 1\right)^2 + \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0 \end{cases}.$$

On travaille maintenant en dimension 2 et on note encore $\mathscr{R}_1$ le repère $\left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$. Une équation de (Γ) dans $\mathscr{R}_1$ est $\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0$ ou encore $\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0$. On pose $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2} \\ y' = -\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}Y}{2} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2} \\ Y = \frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2} \end{cases}$ et on note $\mathscr{R}' = \left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ le nouveau repère défini par ces formules.

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{7x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(y' + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right).$$

(Γ) est une parabole de paramètre $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$. Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}'$: sommet $S\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$, axe : $x' = -\frac{21}{4\sqrt{6}}$, foyer $F\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$, directrice : $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}_1$ en repassant à trois coordonnées : sommet $S\left(-\frac{41}{16\sqrt{2}}, -\frac{45}{16\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathscr{R}_1}$, axe : $\begin{cases} \sqrt{3}X + Y = -\frac{21}{2\sqrt{6}} \\ Z = 0 \end{cases}$, foyer $F\left(-\frac{11}{4\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathscr{R}_1}$, directrice : $\begin{cases} -X + \sqrt{3}Y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Z = 0 \end{cases}$. Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}$: sommet $S\left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right)_{\mathscr{R}}$, axe : $\begin{cases} 8x - 4y - 4z + 21 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ foyer $F\left(-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, 10\right)_{\mathscr{R}}$, directrice : $\begin{cases} 2y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

Correction de l'exercice 5372 ▲

On cherche l'équation d'une telle parabole $\mathscr{P}$ sous la forme $(ax + by)^2 + 2cx + 2dy + e = 0$, $a^2 + b^2 = 1$, $a > 0$.

$$(1,0) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \boxed{a^2 + 2c + e = 0} \text{ et } (0,2) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \boxed{4b^2 + 4d + e = 0}.$$

D'après la règle de dédoublement des termes, une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{P}$ en $(1,0)$ est $a^2x + aby + c(x+1) + dy + e = 0$ ou encore $(a^2 + c)x + (ab + d)y + c + e = 0$. Cette tangente est l'axe (Ox) si et seulement si $\boxed{a^2 + c = c + e = 0 \text{ et } ab + d \neq 0.}$ Une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{P}$ en $(0,2)$ est $2abx + 2b^2y + cx + d(y+2) + e = 0$ ou encore $(2ab + c)x + (2b^2 + d)y + 2d + e = 0$.

Cette tangente est l'axe (Oy) si et seulement si $\boxed{2b^2+d=2d+e=0 \text{ et } 2ab+c\neq 0.}$ En résumé, $\mathscr{P}$ est solution si et seulement si

$$\begin{cases} c=-a^2 \\ d=-2b^2 \\ e=a^2=4b^2 \\ a^2+b^2=1 \\ ab+d\neq 0 \\ 2ab+c\neq 0 \\ a>0 \end{cases}.$$

Maintenant, $\left(a^2=4b^2,\ a^2+b^2=1 \text{ et } a>0\right) \Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Le cas $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ fournit $d=-\frac{2}{5}$ puis $ab+d=0$ ce qui est exclu. Donc, nécessairement $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ puis $c=-\frac{4}{5}$, $d=-\frac{2}{5}$ et $e=\frac{4}{5}$ qui sont effectivement solution du système. On obtient ainsi une et une seule courbe du second degré solution, à savoir la courbe d'équation cartésienne

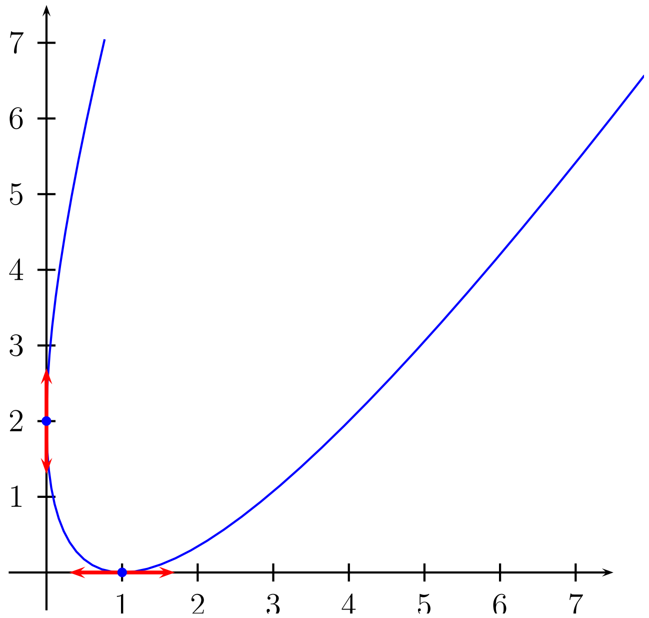
$$\boxed{(2x-y)^2-8x-4y+4=0.}$$

Il reste à vérifier que cette courbe est effectivement une parabole. On pose $\begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt{5}}(-x-2y) \\ Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2X-Y) \end{cases}$.

$$(2x-y)^2-8x-4y+4=0 \Leftrightarrow 5Y^2-\frac{8}{\sqrt{5}}(-X+2Y)-\frac{4}{\sqrt{5}}(-2X-Y)+4=0 \Leftrightarrow 5Y^2-\frac{12}{\sqrt{5}}Y+\frac{16}{\sqrt{5}}X+4=0$$

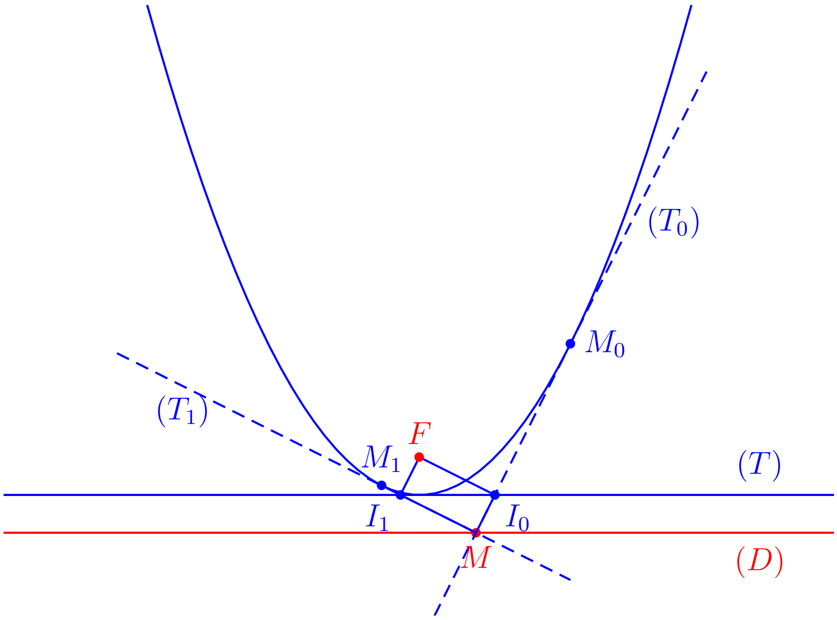
$$\Leftrightarrow 5\left(Y-\frac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{16}{\sqrt{5}}\left(X+\frac{4}{5\sqrt{5}}\right).$$

$\mathscr{C}$ est donc effectivement une parabole.



Correction de l'exercice 5373 ▲

Solution géométrique.



Soit M un point de l'othoptique. M est sur les tangentes (T_0) et (T_1) à la parabole en deux points distincts M_0 et M_1 et clairement distinct du sommet S. Soient I_0 et I_1 les points d'intersection des droites (T_0) et (T_1) respectivement avec la tangente (T) au sommet de la parabole. On sait (construction usuelle de la parabole par points et tangentes) que les droites (T_0) et (T_1) sont perpendiculaires aux droites (FI_0) et (FI_1) respectivement. Donc le quadrilatère FI_0MI_1 est un rectangle (3 angles droits connus). Par suite, le milieu de $[FM]$ qui est aussi le milieu de $[I_0I_1]$ est sur la tangente au sommet (T) et M est l'image d'un point de la tangente (T) par l'homothétie de centre F et de rapport 2. Finalement, le point M est sur la directrice de la parabole.

Réciproquement, soit M un point de la directrice et I le milieu de $[FM]$. On reconstruit le rectangle précédent en plaçant d'abord sur la tangente au sommet (T) les points I_0 et I_1 tels que I soit le milieu de $[I_0I_1]$ et tels que $I_0I_1 = MI$. Les droites (MI_0) et (MI_1) sont effectivement des tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires l'une à l'autre.

$$\boxed{\text{L'orthoptique d'une parabole est sa directrice.}}$$

Solution analytique. On choisit un repère orthonormé dans lequel la parabole a pour équation cartésienne $y^2 = 2px$. Une équation de la tangente (T_0) à la parabole en un point $M_0 = (x_0, y_0) = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ est $-px_0 + yy_0 = px_0$.

Deux tangentes (T_0) et (T_1) sont perpendiculaires si et seulement si $p^2 + y_0y_1 = 0$ (en particulier $y_0y_1 \neq 0$). Le point d'intersection des tangentes (T_0) et (T1) en deux points distincts est la solution du système $\left\{\begin{array}{l} -px + yy_0 = px_0 \\ -px + yy_1 = px_1 \end{array}\right.$ et a donc pour coordonnées $\left(\frac{p(x_0y_1 - y_0x_1)}{p(y_0 - y_1)}, \frac{p^2(x_0 - x_1)}{p(y_0 - y_1)}\right) = \left(-\frac{y_0y_1}{2p}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right) = \left(-\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)\right)$.

En résumé, un point $M(x, y)$ est sur l'orthoptique si et seulement si il existe $y_0 \neq 0$ tel que $\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{p}{2} \\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right) \end{array}\right.$ ce qui montre déjà qu'un point de l'orthoptique est sur la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$ c'est-à-dire sur la directrice de la parabole. Réciproquement, la fonction $y_0 \mapsto \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$, tend vers $-\infty$ quand y_0 tend vers 0 par valeurs supérieures et tend vers $+\infty$ quand y_0 tend vers $+\infty$. Donc $\frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)$ décrit $\mathbb{R}$ quand y_0 décrit $]0, +\infty[$, ce qui montre que l'on obtient la totalité de la directrice.

Correction de l'exercice 5374 ▲

(a) Soit M un point du plan.
1er cas. Supposons que $M \notin (AB) \cup (AC) \cup (BC)$.

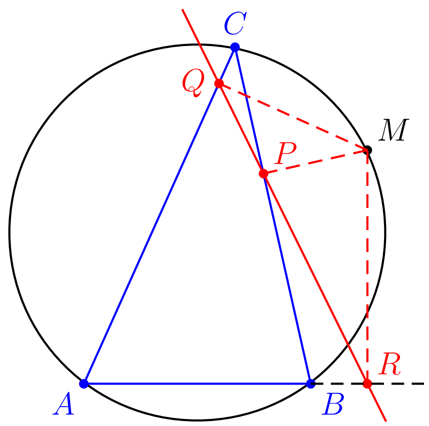
$$P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right)\ [\pi].$$

Maintenant, puisque les triangles MPC et MQC sont rectangles en P et Q respectivement, les points P et Q sont sur le cercle de diamètre $[MC]$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right)\ [\pi]$. De même, $\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$. Par suite,

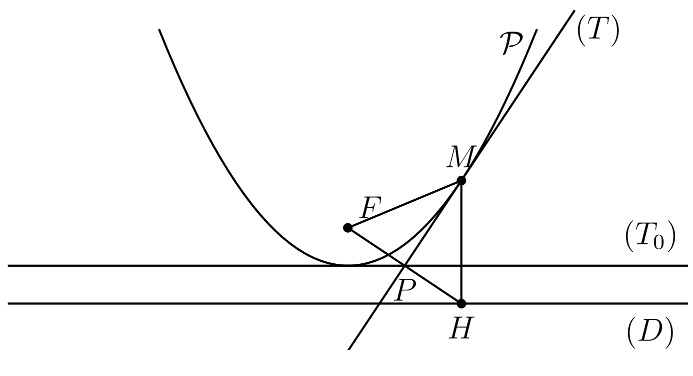
$$\begin{aligned} P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ (privé des points } A,\ B \text{ et } C). \end{aligned}$$

2ème cas. Supposons par exemple que $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = R$. Si de plus M n'est ni A, ni B, alors $M \neq P$ et $M \neq Q$ puis les droites (MP) et (MQ) sont perpendiculaires aux droites (BC) et (AC) respectivement. Si par l'absurde, les points P, Q et R sont alignés, on a $(MP) = (MQ)$ et donc $(AB)//(AC)$. Ceci est une contradiction.
Donc, si les points P, Q et R sont alignés, M est l'un des trois points A, B ou C. La réciproque est immédiate.
En résumant les deux cas,

$$\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés si et seulement si } M \text{ est sur le cercle circonscrit au triangle } ABC.}$$



(b) **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Commençons par rappeler une construction usuelle de la tangente en un point d'une parabole : le triangle FMH est isocèle en M et la tangente en M à $\mathscr{P}$ est la médiatrice du segment $[FH]$. Par suite, le projeté orthogonal P de F sur la tangente (T) est sur $5T_0)$ la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$.

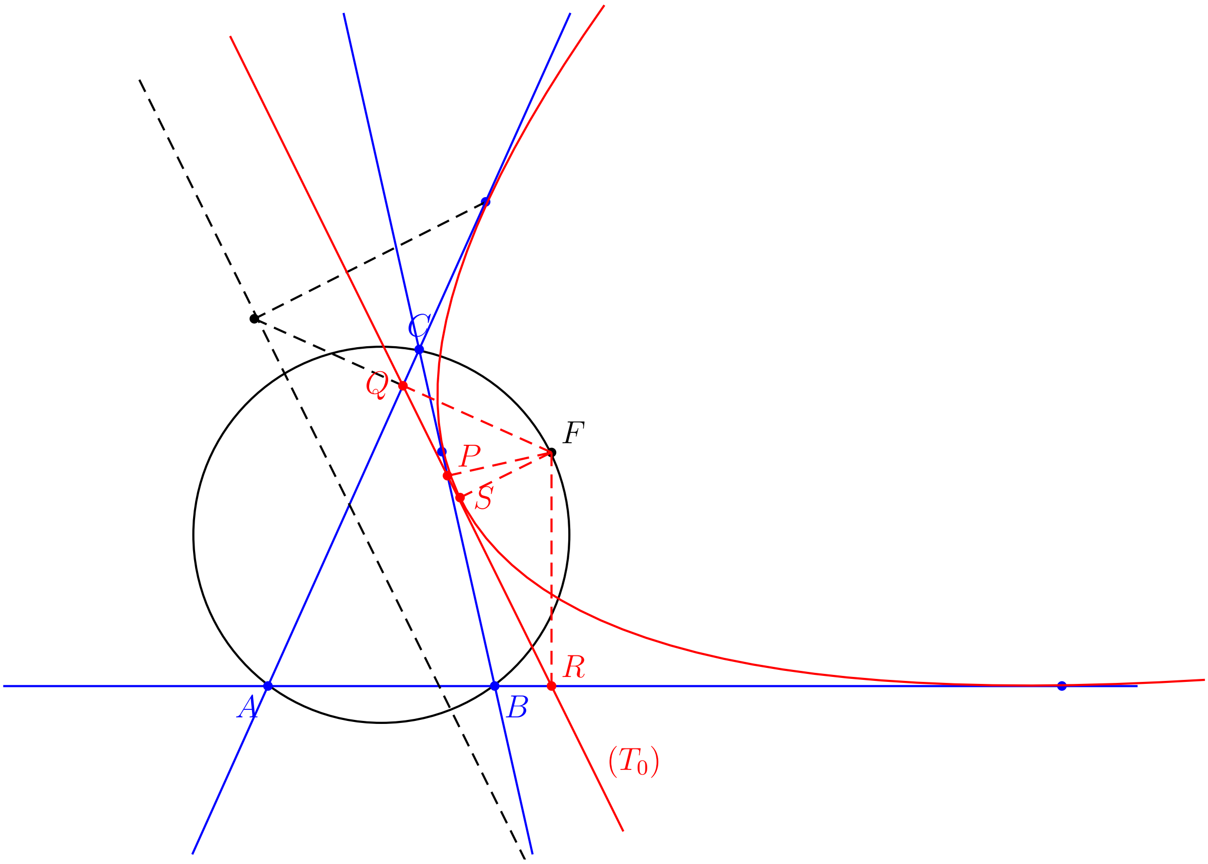


Soient A, B et C trois points non alignés. Si $\mathscr{P}$ est une parabole tangente aux droites (BC), (CA) et (AB), les projetés orthogonaux P, Q et R de son foyer F sur les droites (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$. D'après 1), le point F est nécessairement sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Réciproquement, si F est l'un des trois points A, B ou C, F n'est pas solution car une tangente à une parabole ne passe jamais par son foyer.

Soit donc F un point du cercle circonscrit au triangle ABC et distinct des points A, B et C. Montrons alors qu'il existe une parabole de foyer F, tangente aux droites (BC), (CA) et (AB).

On construit les projetés orthogonaux P, Q et R de F sur les droites (BC), (CA) et (AB). Ils sont alignés sur la droite de SIMSON (T_0) de F relativement au triangle ABC. La parabole de foyer F et de tangente au sommet (T_0) est solution du problème posé. La construction des points de contact est fournie par le graphique de la page précédente : on construit les symétriques de F par rapport aux points P, Q et R (ces symétriques sont sur la directrice) puis on remonte perpendiculairement à (T_0) jusqu'à la parabole.



Correction de l'exercice 5375 ▲

(Γ) est l'intersection d'un cylindre parabolique de direction (Oz) et d'un plan non perpendiculaire à la direction de ce cylindre. On choisit un repère orthonormé $\mathscr{R}' = (\Omega, X, Y, Z)$ dans lequel le plan d'équation $x+y+z-1=0$ dans le repère $\mathscr{R} = (O,x,y,z)$ soit le plan (Ω, X, Y) ou encore le plan d'équation $Z=0$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

On pose donc $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z-1)$ puis par exemple $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z)$ ce qui s ?écrit

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dans le repère $\mathscr{R}'$, la courbe (Γ) admet pour système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z + \frac{1}{3}\right) + 1 \\ Z = 0 \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right) + 1 \\ Z = 0 \end{array} \right. .$$

Continuons à deux coordonnées X et Y dans le plan (Ω, X, Y).

$$\begin{aligned} M(X,Y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right) + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{3}X + Y)^2 + \frac{2}{3\sqrt{6}}(\sqrt{3}X + Y) + \frac{1}{9} + \sqrt{2}X + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{3}X + Y)^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}X + \frac{2}{3\sqrt{6}}Y + \frac{10}{9} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3}X + Y)^2 + 8\sqrt{2}X + \frac{2\sqrt{6}}{3}Y + \frac{20}{3} = 0. \end{aligned}$$

On trouve déjà une conique du genre parabole. On pose maintenant $x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}X + Y)$ et $y' = \frac{1}{2}(-X + \sqrt{3}Y)$ correspondant aux formules de changement de repère $\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}X + Y) \\ y' = \frac{1}{2}(-X + \sqrt{3}Y) \end{array} \right.$ ou encore $\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \\ Y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y') \end{array} \right.$

Dans le repère (Ω, x', y'), une équation de la courbe (Γ) est

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}X + Y)^2 + 8\sqrt{2}X + \frac{2\sqrt{6}}{3}Y + \frac{20}{3} = 0 &\Leftrightarrow 4x'^2 + 4\sqrt{2}(\sqrt{3}x' - y') + \frac{\sqrt{6}}{3}(x' + \sqrt{3}y') + \frac{20}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow x'^2 + \frac{13}{2\sqrt{6}}x' - \frac{3}{2\sqrt{2}}y' + \frac{5}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x' + \frac{13}{4\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}y' + \frac{5}{3} - \frac{169}{96} = 0 \Leftrightarrow \left(x' + \frac{13}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(y' + \right. \end{aligned}$$

(Γ) est la parabole de paramètre $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$ et dont les éléments caractéristiques dans le repère (Ω, x', y') sont

$S\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$, $F = S + \frac{p}{2}(0,1) = \left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{8\sqrt{2}}(0,1) = \left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$ puis $K = S - \frac{p}{2}(0,1) = \left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{8\sqrt{2}}(0,1) = \left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et donc $(D) : y' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

On repasse maintenant dans le repère (Ω, X, Y). S a pour coordonnées $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{13}{4\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{16\sqrt{2}} \\ -\frac{29}{16\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, F a pour coordonnées $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{13}{4\sqrt{6}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{4\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ puis (D) a pour équation $-X + \sqrt{3}Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On revient enfin au repère (O,x,y,z).

Le point S a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{25}{16\sqrt{2}} \\ -\frac{29}{16\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{13}{16} \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix}$ puis le point F a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{7}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{4\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et enfin

(D) : $\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(x+y-2z)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x+y+z-1=0 \end{array}\right.$

(Γ) est la parabole de paramètre $p=\frac{3}{4\sqrt{2}}$, de sommet $S\left(-\frac{3}{4},\frac{13}{16},\frac{15}{16}\right)$, de foyer $F\left(-\frac{3}{4},1,\frac{3}{4}\right)$ et de directrice (D) : $\left\{\begin{array}{l} -y+z=\frac{1}{2} \\ x+y+z-1=0 \end{array}\right.$.

Correction de l'exercice 5376 ▲

On cherche une équation sous la forme $(ax+by)^2+2cx+2dy+e=0$ avec $a^2+b^2=1$ et $a>0$.

• $(1,0)\in(\mathscr{P})\Leftrightarrow a^2+2c+e=0$ et $(0,2)\in(\mathscr{P})\Leftrightarrow 4b^2+4d+e=0$.

• D'après la règle de dédoublement des termes, la tangente en $(1,0)$ à $(\mathscr{P})$ admet pour équation cartésienne $a^2x+aby+c(x+1)+dy+e=0$ ou encore $(a^2+c)x+(ab+d)y+c+e=0$. Cette tangente est l'axe (Ox) si et seulement si $a^2+c=0$ et $c+e=0$ et $ab+d\neq 0$.

• La tangente en $(0,2)$ à $(\mathscr{P})$ admet pour équation cartésienne $2abx+2b^2y+cx+d(y+2)+e=0$ ou encore $(2ab+c)x+(2b^2+d)y+2d+e=0$. Cette tangente est l'axe (Oy) si et seulement si $2b^2+d=0$ et $2d+e=0$ et $2ab+c\neq 0$.

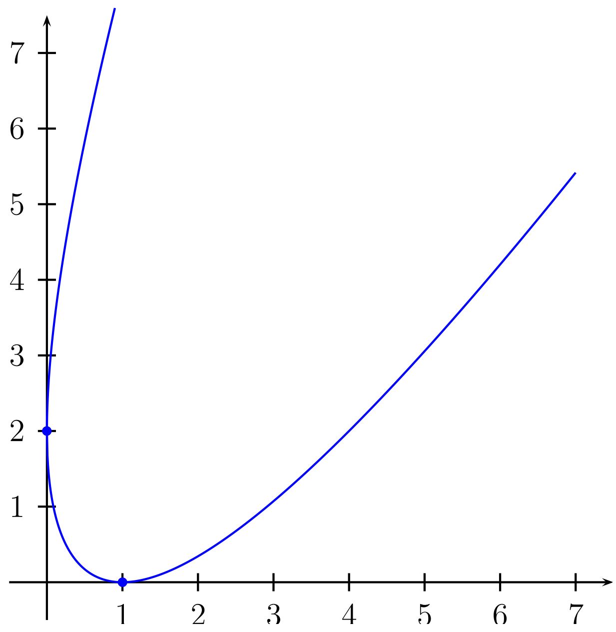
En résumé, $(\mathscr{P})$ est solution si et seulement si $c=-a^2$, $d=-2b^2$, $e=a^2=4b^2$, $a^2+b^2=1$, $ab+d\neq 0$, $2ab+c\neq 0$ et $a>0$.

$a>0$, $a^2=4b^2$ et $a^2+b^2=1\Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Les égalités $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ fournissent $ab+d=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0$ ce qui ne convient pas.

Il reste $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $b=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $c=-\frac{4}{5}$, $d=-\frac{2}{5}$ et $e=\frac{4}{5}$ qui fournit bien une solution. On trouve une et une seule parabole.

La parabole $(\mathscr{P})$ admet pour équation cartésienne $(2x-y)^2-8x-4y+4=0$.



Correction de l'exercice 5377 ▲

Hyperbole d'excentricité $\frac{1}{\cos\alpha}$, avec $\overline{(\vec{D},\vec{\Delta})} \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Correction de l'exercice 5378 ▲

(a) $xy = \frac{a^2}{2}$.

Correction de l'exercice 5380 ▲

(a) $MH = \frac{1}{2}MF \Rightarrow IMH$, IMN, et INF sont semblables.

Correction de l'exercice 5381 ▲

Soit $\alpha \equiv \overline{(\vec{AM},\vec{AO})}$.

$\frac{OM}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin(2\alpha)} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{AM}{OM}$.

Al-Khâshi $\Rightarrow \frac{AM^2}{OM}(OM - OA) = (OM - OA)(OM + OA)$.

$OM = OA \Rightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4}$.

$OM \neq OA \Rightarrow OM = 2d(M,\Delta)$ où Δ est la médiatrice de $[O,A]$, et M est du côté de O.

Correction de l'exercice 5382 ▲

$M : \begin{pmatrix} 1/\cos\theta \\ -\tan\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$ hyperbole.

Correction de l'exercice 5383 ▲

On se ramène à une hyperbole d'équation $xy = 1$. Soient $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$, $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$, $C = \left(c, \frac{1}{c}\right)$. Alors $H = \left(-\frac{1}{abc}, -abc\right) \in \mathscr{H}$.

L'équation du cercle circonscrit à ABC est : $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ et les points communs au cercle et à $\mathscr{H}$ vérifient donc : $x^4+\alpha x^3+\gamma x^2+\beta x+1=0$. On connaît 3 racines : $x=a,b,c$ donc la quatrième est $q=\frac{1}{abc}$ ce qui prouve que Q et H sont symétriques par rapport à O.

Correction de l'exercice 5384 ▲

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole. Il existe un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{H}$ admet une équation catésienne de la forme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>0,\ b>0)$. Dans ce repère, les asymptotes ont pour équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^2=-1$ ou encore si et seulement si $a=b$. L'excentricité de $\mathscr{H}$ est alors

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}.$$

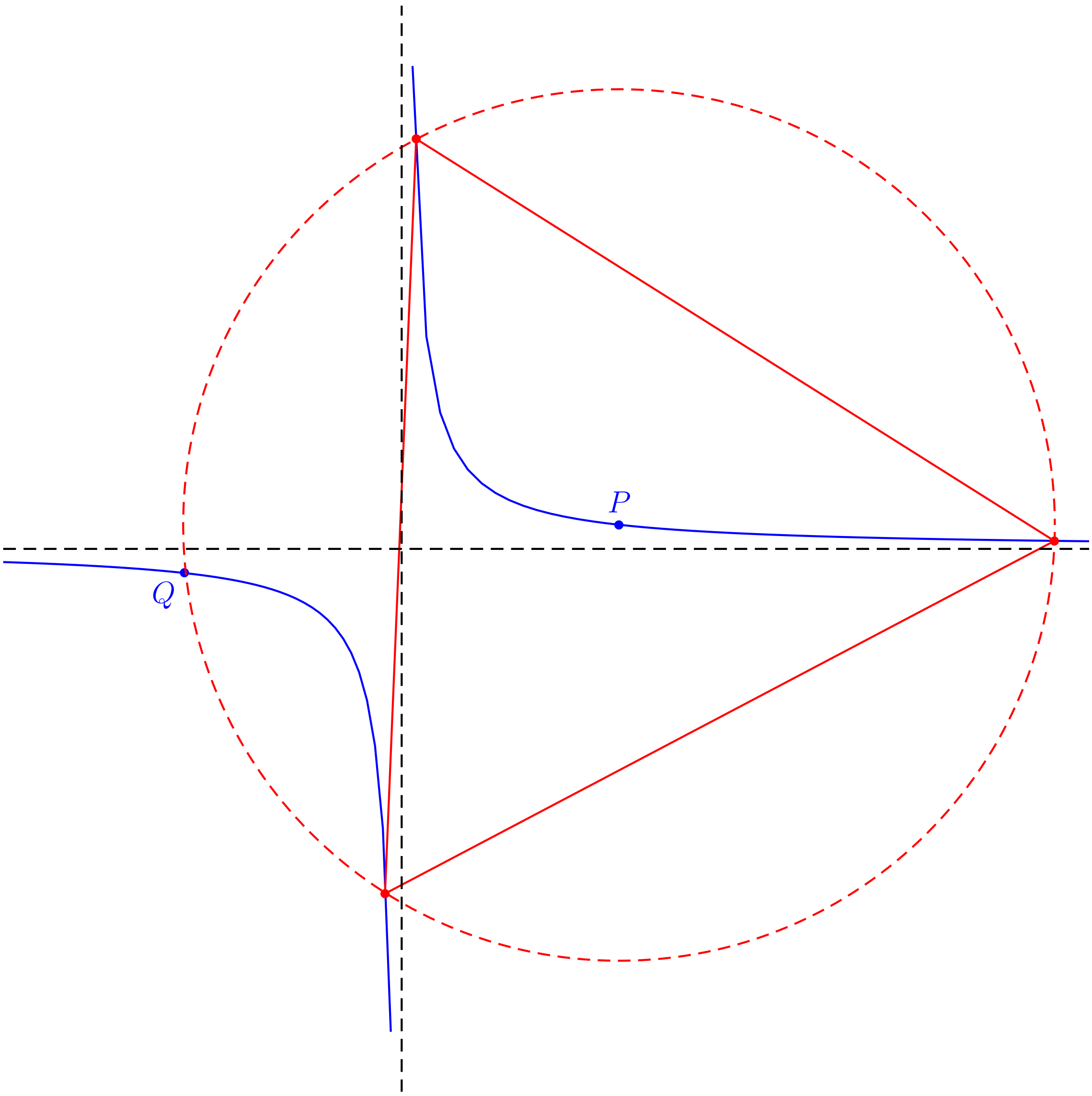
$$\boxed{\text{L'excentricité de l'hyperbole équilatère vaut } \sqrt{2}.}$$

Correction de l'exercice 5385 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel P a pour coordonnées (a,b), $a>0$, $b>0$ et l'hyperbole $\mathscr{H}$ a pour équation $xy=ab$. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre P et de rayon PQ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t \\ y=b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. Soit donc $M\left(a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t, b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin t\right)$ un point de $\mathscr{C}$.

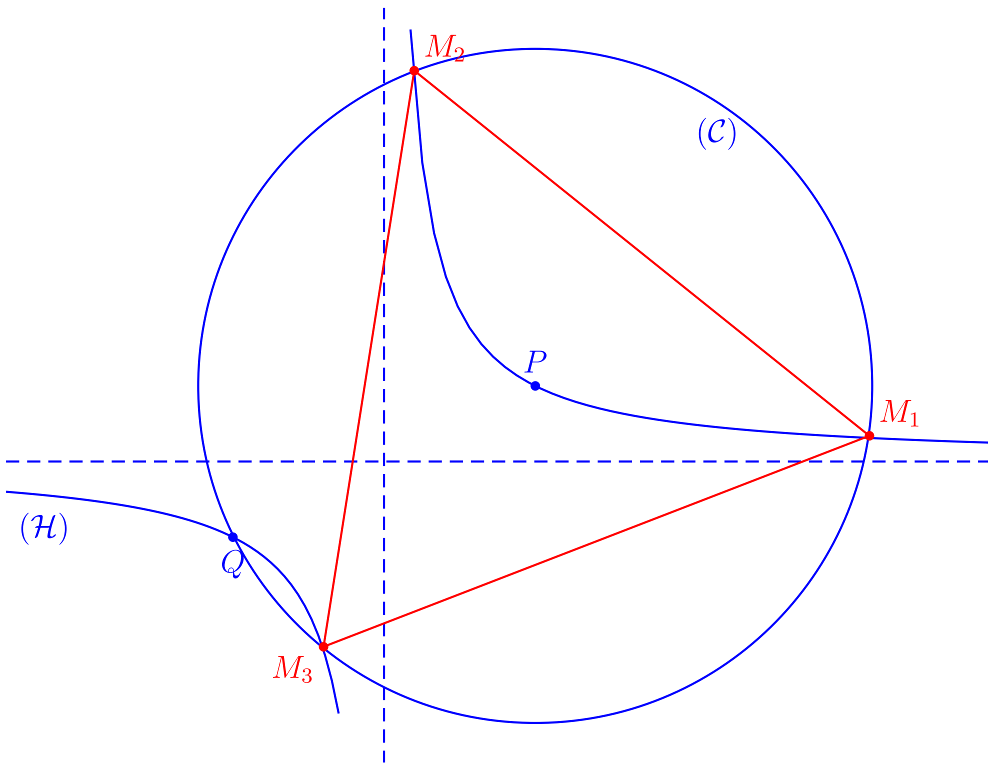
$$\begin{aligned}
M\in\mathscr{C} &\Leftrightarrow (a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t)(b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin t)=ab\\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}(b\cos t+a\sin t)+4(a^2+b^2)\cos t\sin t=0\\
&\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t+\sin(2t)=0\right)\\
&\Leftrightarrow \sin(2t)+\sin(t+t_0)+0 \text{ où } \cos(t_0)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(t_0)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ 2t=-t-t_0+2k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}/\ 2t=\pi+t+t_0+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ t=-\frac{t_0}{3}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}/\ t=\pi+t_0+2k\pi.
\end{aligned}$$

$t=\pi+t_0+2k\pi$ fournit le point de coordonnées $(-a,-b)$ c'est-à-dire le point Q. Sinon, on obtient trois autres points les points $M\left(-\frac{t_0}{3}\right)$, $M\left(-\frac{t_0}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$ et $M\left(-\frac{t_0}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$. On note A, B et C ces trois points. Puisque ces trois points sont sur un cercle de centre P et que $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\right)=\left(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\right)=\left(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PA}\right)=\frac{2\pi}{3}$, le triangle ABC est équilatéral.



Correction de **l'exercice 5386 ▲**

On peut choisir un repère orthonormé dans lequel $(\mathscr{H})$ admet pour équation équation cartésienne $xy = ab$ et P a pour coordonnées (a, b) où a et b sont deux réels strictement positifs.



Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre P et de rayon $PQ = 2OP$ admet la paramétrisation $\left\{\begin{array}{l} x = a + 2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta \\ y = b + 2\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta \end{array}\right.$.
Soit $M(a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta, b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, un point du cercle $\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (\mathscr{H}) &\Leftrightarrow (a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta)(b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta) = ab \\ &\Leftrightarrow (a^2+b^2)\cos\theta\sin\theta + 2\sqrt{a^2+b^2}(b\cos\theta + a\sin\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(2\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(2\theta) + \sin(\theta+\theta_0) = 0 \text{ où } \theta_0 = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\theta+\theta_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0 + \pi\ (2\pi) \text{ ou } \theta = -\frac{\theta_0}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Les égalités $\theta = \theta_0 + \pi\ (2\pi)$ fournissent le point Q.
Les égalités $\theta = -\frac{\theta_0}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$ fournissent trois valeurs deux à deux distinctes de θ modulo 2π et donc trois points deux à deux distincts M_1, M_2 et M_3 de l'hyperbole tels que les trois angles au centre P du triangle $M_1M_2M_3$ soient égaux à $\frac{2\pi}{3}$. Puisque P est le centre du cercle circonscrit à ce triangle, ce triangle est équilatéral de centre P.

Correction de l'exercice 5387 ▲

(a) vp $= 1, 1 \pm \sqrt{2}$. er : $X^2 + (1+\sqrt{2})Y^2 + (1-\sqrt{2})Z^2 + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow$ hyperboloïde à 2 nappes.
(b) vp $= -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0$. er : $-\frac{3}{2}(X^2+Y^2) + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow$ cylindre de révolution.
(c) vp $= 0, 0, 14$. er : $14Z^2 + 4 = 0 \Rightarrow \varnothing$.
(d) vp $= 0, -1 \pm \sqrt{7}$. er : $-(1+\sqrt{7})Y^2 + (-1+\sqrt{7})Z^2 + 3 = 0 \Rightarrow$ cylindre hyperbolique.
(e) vp $= 0, 2, 3$. er : $2Y^2 + 3Z^2 - \frac{8X}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$ paraboloïde elliptique.
(f) vp $= -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$. er : $-\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} + Z^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ hyperboloïde de révolution à une nappe.

(g) $\text{vp} = 0, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}$. er : $\frac{9Y^2}{2} - \frac{3Z^2}{2} = 0 \Rightarrow$ deux plans sécants.

(h) $\text{vp} = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. er : $Y^2 - Z^2 = \sqrt{2} \Rightarrow$ cylindre hyperbolique.

(i) $\text{vp} = 1, 1, 0$. er : $X^2 + Y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow$ cylindre de révolution.

Correction de l'exercice 5390 ▲

(a) $\frac{(xz_0 - x_0z)^2}{a^2} + \frac{(yz_0 - y_0z)^2}{b^2} = (z - z_0)^2$.

(b) $y_0 = 0$, $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{b^2} = 1$.

Correction de l'exercice 5391 ▲

(a)

(b)

(c) Non lorsque la valeur propre médiane est nulle (paraboloïde hyperbolique, cylindre hyperbolique, cylindre parabolique, plans).

Correction de l'exercice 5392 ▲

(a) $x^2 + y^2 = 1 + \lambda^2 z^2$.

(b)

Correction de l'exercice 5394 ▲

(a) Hyperbole équilatère d'asymptotes : $\begin{cases} x - z - 1 = \pm y\sqrt{2} \\ x + z = 1. \end{cases}$

(b) $x^2 + y^2 = 2z^2$, cône de révolution.

Correction de l'exercice 5395 ▲

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V = \frac{8\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 5396 ▲

$\lambda = 0 : S = (0,0,0)$, cône de révolution.
$\lambda = \frac{4}{3} : S = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, cône de révolution.

Correction de l'exercice 5398 ▲

$\frac{\vec{MP}}{a^2} = \frac{\vec{MQ}}{b^2} = \frac{\vec{MR}}{c^2}$.

Correction de l'exercice 5401 ▲

$e < 1$: ellipsoïde de révolution, $e = 1$: cylindre parabolique, $e > 1$: hyperboloïde de révolution.

Correction de l'exercice 5402 ▲

Ellipsoïde.

Correction de l'exercice 5403 ▲

$x^2\cos^2\theta + y^2 - 2xz\cos\theta\sin\theta - z^2\cos^2\theta = 0 \Rightarrow$ cône elliptique.

Correction de l'exercice 5404 ▲

Soit r le rayon de S et h la distance du centre I de S à P. On choisit un repère tel que $P = Oxy$ et $I = (0,0,h)$. Soit S' une sphère de centre $M(x,y,z)$:
Pour $z > 0$: S et S' extérieures $\Leftrightarrow 2(h+r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$.
S à l'intérieur de $S' \Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h > r$.
S' à l'intérieur de $S \Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.
Pour $z < 0$: S et S' extérieures $\Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.
S' à l'intérieur de $S \Leftrightarrow 2(h+r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.

Correction de l'exercice 5406 ▲

(a) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$.
Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x^2+y^2+z^2-2yz = x^2+(y-z)^2 = X^2+2Y^2$ en posant $X = x$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z)$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$ correspondant au changement de bases orthonormées de matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
Notons $\mathscr{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$ le repère orthonormé ainsi défini. La surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation dans $\mathscr{R}$? $X^2 + 2Y^2 - 4X + 2\sqrt{2}(Y+Z) - 1 = 0$ ou encore

$$(X-2)^2 + 2\left(Y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2\sqrt{2}\left(Z - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un paraboloïde elliptique de sommet S de coordonnées $\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc $(2,2,1)$ dans $\mathscr{R}$.

(b) En posant $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$ et $Z = z$, on obtient : $2X^2 + Z^2 = 1$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre elliptique d'axe (OY) ou encore d'axe la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = -x \\ z = 0 \end{array}\right.$.

(c) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz$.
La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (X-1) + (X-1) = (1-X)((1-X)^2 - 2)$$
$$= (1-X)(1+\sqrt{2}-X)(1+\sqrt{2}-X).$$

Q est de rang 3 et de signature $(2,1)$. La surface $(\mathscr{S})$ peut être un hyperboloïde à une ou deux nappes ou un cône de révolution.
$\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.
$\mathrm{Ker}(A - (1+\sqrt{2})I_3) = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, -1, 1)$ et $\mathrm{Ker}(A - (1-\sqrt{2})I_3) = \mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, -1)$

La matrice de passage correspondante est la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathscr{S})$ dans le repère (O, e_1, e_2, e_3).

$$\begin{aligned}
&X^2+(1+\sqrt{2})Y^2+(1-\sqrt{2})Z^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(Y+Z)-\frac{1}{2}(\sqrt{2}X-Y+Z)+\frac{1}{2}(\sqrt{2}X+Y-Z)+1=0\\
&\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y^2+\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}Y\right)+(1-\sqrt{2})\left(Z^2-\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}Z\right)+1=0\\
&\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+\frac{3+\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3+\sqrt{2})^2}{8(1+\sqrt{2})}+(1-\sqrt{2})\left(Z-\frac{3-\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3-\sqrt{2})^2}{8(1-\sqrt{2})}+1=0\\
&\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{11+6\sqrt{2}}{8(1+\sqrt{2})}+\frac{11-6\sqrt{2}}{8(1-\sqrt{2})}-1\\
&\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=-\frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow -\frac{4}{3}X^2-\frac{4(1+\sqrt{2})}{3}\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=1.
\end{aligned}$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes de centre de coordonnées $\left(0, -1+\frac{\sqrt{2}}{4}, 1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

(d) On pose $X = \frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y)$ et $Z = z$. Dans le repère $\mathscr{R}'$ ainsi défini, la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation $5X^2+5Z^2-\frac{2}{\sqrt{5}}(X+2Y)+\frac{4}{\sqrt{5}}(-2X+Y)=0$ ou encore $5\left(X-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+5Z^2=1$.

La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ Z=0 \end{array}\right.$ dans $\mathscr{R}'$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(e) $x^2-4x-3y-2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=3(y+2)$. La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre parabolique de direction (Oz).

(f) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z) = 7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz$. La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 10 \\ 2 & -2 & 8 \\ 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} 7-X & 2 & 10 \\ 2 & -2-X & 8 \\ 10 & 8 & 4-X \end{vmatrix} = (7-X)(X^2-2X-72)-2(-2X-72)+10(10X+36)\\
&= -X^3+9X^2+162X = -X(X+9)(X-18).
\end{aligned}$$

Donc Q est de rang 2 et de signature $(1,1)$.

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x+2y+10z=0 \\ 2x-2y+4z=0 \\ 10x+8y+4z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y=-4z \\ 5x+4y=-2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2z \\ y=2z \end{array}\right.$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \frac{1}{3}(-2,2,1)$.

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(A+9I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 16x+2y+10z=0 \\ 2x+7y+8z=0 \\ 10x+8y+13z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-8x-5z \\ z=-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x \\ z=-2x \end{array}\right.$ et $\mathrm{Ker}(A+9I_3)=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\frac{1}{3}(1,2,-2)$.
$\mathrm{Ker}(A-18I_3)=\mathrm{Vect}(e_3)$ où $e3=-e_1\wedge e_2=\frac{1}{3}(2,1,2)$.

La matrice de passage du changement de bases ainsi défini est $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathscr{S})$ dans le repère $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2,e_3)$

$$\begin{aligned}
&7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz-36x+72y-108z+36=0 \\
&\quad\Leftrightarrow -9Y^2+18Z^2-12(-2X+Y+2Z)+24(2X+2Y+Z)-36(X-2Y+2Z)+36=0 \\
&\quad\Leftrightarrow -9Y^2+18Z^2+36X+108Y-72Z+36=0 \Leftrightarrow -Y^2+2Z^2+4X+12Y-8Z+4=0 \\
&\quad\Leftrightarrow 4(X+8)=(Y-6)^2-2(Z-2)^2.
\end{aligned}$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un paraboloïde hyperbolique. Son point selle est le point de cordonnées $(-8,6,2)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

(g) La surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne : $x^2+y^2+z^2-xy-xz-zx-x+y=0$.
Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-zx$. La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}(A)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$. Un base orthonormée (e_1,e_2,e_3) de vecteurs propres est la famille de matrice $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.
Dans le repère $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2,e_3)$, la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne $\frac{3}{2}(X^2+Y^2)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)=0$ ou encore $\frac{3}{2}(X^2+Y^2)-\sqrt{2}X=0$ ou enfin $\left(X-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{9}$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{\sqrt{2}}{3} \\ Y=0 \end{array}\right.$ dans le repère $\mathscr{R}'$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(h) En posant $X=y$, $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$ (et $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y+z)$, $xy+yz=0\Leftrightarrow XY=\sqrt{2}$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre hyperbolique.

(i) Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z)=xy+yz+zx$.
La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}(A)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$ et donc la surface $(\mathscr{S})$ est soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, soit un cône du second degré et dans tous les cas une surface de révolution (puisque les deux valeurs propres négatives sont égales) d'axe de direction $\mathrm{Ker}(A-I_3)=\mathrm{Vect}(1,1,1)$ et passant par le point critique $\Omega(-1,1,-1)$.
Quand on se place dans le repère (Ω,i,j,k), la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation $XY+YZ+ZX+2=0$ (car $f(-1,1,-1)=2$) puis dans le repère (Ω,e_1,e_2,e_3), $-\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2+Z^2+2=0$ ou encore $\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{4}Y^2-\frac{1}{2}Z^2=1$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Correction de **l'exercice 5407 ▲**

On cherche $(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j) \neq (0,...,0)$ tel que la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fzx+2gx+2hy+2iz+j=0$ contienne la parabole $(\mathscr{P})$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{t^2}{2} \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$, la parabole $(\mathscr{P}')$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=t \\ z=\frac{t^2}{2} \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$, et le point $A(2,3,2)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{P})\subset(\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4+bt^2+dt^3+gt^2+2ht+j=0 \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4+dt^3+(b+g)t^2+2ht+j=0\\ &\Leftrightarrow a=d=h=j=0 \text{ et } g=-b.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P})$ est contenue dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ a une équation de la forme $by^2+cz^2+2eyz+2fzx-2bx+2iz=0$ avec $(b,c,e,f,i)\neq(0,0,0,0,0)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}')\subset(\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ bt^2+\frac{c}{4}t^4+et^3+it^2=0 \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \frac{c}{4}t^4+et^3+(b+i)t^2=0\\ &\Leftrightarrow c=e=0 \text{ et } i=-b.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont contenues dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ a une équation de la forme $by^2+2fzx-2bx-2bz=0$ avec $(b,f)\neq(0,0)$.

Enfin, $A\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow 9b+8f-4b-4b=0\Leftrightarrow b=-8f$ et $f\neq0$. On trouve donc une et une seule quadrique à savoir la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $-4y2+zx+8x+8z=0$.

En posant $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)$, $Y=y$ et $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)$, on obtient

$$\begin{aligned}-4y2+zx+8x+8z &= -4Y^2+\frac{1}{2}(X+Z)(X-Z)+8\sqrt{2}X\\ &=\frac{1}{2}\left(X+8\sqrt{2}\right)^2-4Y^2+\frac{1}{2}Z^2-64.\end{aligned}$$

Dans le nouveau repère ainsi défini, une équation cartésienne de la surface $(\mathscr{S})$ est $\frac{1}{128}\left(X+8\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{16}Y^2+\frac{1}{128}Z^2=1$ et $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes.

Correction de **l'exercice 5408 ▲**

Soit $(\mathscr{S})$ une surface du second degré d'équation $f(x,y,z)=0$ où f est symétrique en x, y et z. Soient σ_1, σ_2 et σ_3 les trois fonctions symétriques élémentaires en x, y et z.

Puisque f est symétrique en x, y et z, f est un polynôme en σ_1, σ_2 et σ_3. f est d'autre part un polynôme de degré 2 en x, y et z et donc

$$\text{il existe } (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \text{ avec } (a,b)\neq(0,0) \text{ tel que } f=a\sigma_1^2+b\sigma_2+c\sigma_1+d.$$

Réciproquement, si f est de la forme ci-dessus, alors f est symétrique en x, y et z.

Puisque $\sigma_2=xy+yz+zx=\frac{1}{2}((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))$, $(\mathscr{S})$ admet une une équation cartésienne de la forme :

$$\left(a+\tfrac{b}{2}\right)(x+y+z)^2-b(x^2+y^2+z^2)+c(x+y+z)+d=0 \text{ où } (a,b)\neq(0,0).$$

Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par O dirigée par $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ ($\overrightarrow{n}$ est vecteur normal à tout plan d'équation $x+y+z=k$, $k\in\mathbb{R}$) et soit r une rotation quelconque d'axe $(\mathscr{D})$.

Si M est un point de coordonnées (x,y,z) et $M' = r(M)$ a pour coordonnées (x',y',z') alors $x+y+z = x'+y'+z'$ car M et M' sont dans un plan perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et $x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ car une rotation est une isométrie et car $r(O) = O$.
Finalement, pour toute rotation r d'axe $(\mathscr{D})$, $M \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow r(M) \in (\mathscr{S})$ et donc la surface $(\mathscr{S})$ est une surface de révolution d'axe $(\mathscr{D})$.

Correction de l'exercice 5409 ▲

Soit $A(a,b,c)$ un point quelconque de l'espace E_3.
Déterminons un système d'équation du cercle (C_A) d'axe (Δ) d'équations $x=y=z$ passant par A.
Ce cercle est par exemple l'intersection du plan passant par A de vecteur normal $(1,1,1)$ et de la sphère de centre O et de rayon OA.
Un système d'équations de (C_A) est $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \end{array}\right.$.
Déterminons alors une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x,y,z)$ soit un point de $(\mathscr{S})$ est $(C_M)\cap(\mathscr{D}) \neq \varnothing$. Donc

$$
\begin{aligned}
M \in (\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l} x+y+z=\alpha+\beta+\gamma \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \alpha=\gamma+2 \\ \beta=2\gamma+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l} \alpha=\gamma+2 \\ \beta=2\gamma+1 \\ x+y+z=\gamma+2+2\gamma+1+ \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l} \alpha=\gamma+2 \\ \beta=2\gamma+1 \\ \gamma=\frac{1}{4}(x+y+z-3) \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)+2\right)^2+\left(\frac{2}{4}(x+y+z-3)+1\right)^2+\left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)\right)^2 \\
&\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z+5)^2+4(x+y+z-1)^2+(x+y+z-3)^2 \\
&\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2)=6(x+y+z)^2-2(x+y+z)+38 \\
&\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)-(x+y+z)-19=0.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (\mathscr{S}) \text{ est } 5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)-(x+y+z)-19=0.}$$

La matrice de la forme quadratique $(x,y,z)\mapsto 5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont 8, valeur propre d'ordre 2 associée au plan d'équation $x+y+z=0$ et -1 valeur propre d'ordre 1 associé à la droite d'équation. Dans le repère $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ où $\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ et $\overrightarrow{e_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$$M\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow 8x'^2+8y'^2-z'^2-\sqrt{3}z'-19=0 \Leftrightarrow 8\left(x'-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 8y'^2-z'^2=19+\frac{3}{32}.$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à une nappe.

Correction de l'exercice 5410 ▲

(a) On note $(\mathscr{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\setminus\{O\}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ O+\lambda\overrightarrow{OM}\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \exists t\in\mathbb{R}^*/\ \left\{\begin{array}{l}\lambda x=t\\ \lambda y=t^2\\ \lambda z=t^3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \exists t\in\mathbb{R}^*/\ \left\{\begin{array}{l}t=\lambda x\\ y=\lambda x^2\\ z=\lambda^2x^3\end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq 0 \text{ et } y\neq 0 \text{ et } z=\left(\frac{y}{x^2}\right)^2x^3$$

$$\Leftrightarrow x\neq 0 \text{ et } y\neq 0 \text{ et } z=y^2x.$$

Si on récupère le point O, $M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow(x=y=0 \text{ ou } xy\neq 0)$ et $z=y^2x$.
On peut noter que la surface d'équation $z=y^2x$ est la réunion du cône, sommet O compris, et des axes (Ox) et (Oy) qui ne font pas partie du cône (à l'exception du point O).

(b) On note $(\mathscr{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\setminus\{S\}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ S+\lambda\overrightarrow{SM}\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ (1+\lambda(x-1),-1+\lambda(y+1),\lambda z)\in(\mathscr{C})$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ \left\{\begin{array}{l}-1+\lambda(y+1)+\lambda z=1\\ (1+\lambda(x-1))^2+(-1+\lambda(y+1))^2=\lambda z\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{2}{y+z+1}(x-1)\right)^2+\left(-1+\frac{2}{y+z+1}(y+1)\right)^2=\frac{2}{y+z+1}z$$

$$\Leftrightarrow(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z \text{ et } y+z+1\neq 0.$$

En résumé, $M(x,y,z)$ est dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $M=S$ ou $M\neq S$ et $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z$ et $y+z+1\neq 0$.
Maintenant le point $S(1,-1,0)$ est dans le plan (P) d'équation $y+z+1=0$ et la courbe $(\mathscr{C})$ n'a aucun point dans ce plan. Donc la surface $(\mathscr{S})$ contient un et un seul point de ce plan.
Notons alors $(\mathscr{S}')$ la surface d'équation $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z$ et vérifions que l'intersection de $(\mathscr{S}')$ et de (P) est $\{S\}$. Ceci montrera que $(\mathscr{S}')=(\mathscr{S})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\cap(P)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y+z+1=0\\ (2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y+z+1=0\\ 2x+y+z-1=0\\ y-z+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-1\\ z=0\\ x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow M=S$$

Finalement $(\mathscr{S}')=(\mathscr{S})$. Une équation de $(\mathscr{S})$ est donc $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z$ ou encore $4x^2+2y^2+4xy+4xz-2yz-4x+2y-6z+2=0$. $(\mathscr{S})$ est donc un cône du second degré.

Correction de l'exercice 5411 ▲

Notons (C) le cône de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$.

(a) Ici $(\mathscr{S})$ est la sphère de centre O et de rayon 3 et le point S est extérieur à cette sphère. Donc

$$M(x,y,z)\in(C)\Leftrightarrow M=S \text{ ou } M\neq S \text{ et } d(O,(SM))=3\Leftrightarrow M=S \text{ ou } M\neq S \text{ et } \|\overrightarrow{SO}\wedge\overrightarrow{SM}\|=3\|\overrightarrow{SM}\|$$

$$\Leftrightarrow\|\overrightarrow{SO}\wedge\overrightarrow{SM}\|=3\|\overrightarrow{SM}\|\Leftrightarrow\|(0,5,0)\wedge(x,y-5,z)\|=3\|(x,y-5,z)\|$$

$$\Leftrightarrow(5z)^2+(5x)^2=9(x^2+(y-5)^2+z^2)\Leftrightarrow 16x^2-9(y-5)^2+16z^2=0.$$

(b) Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de $(\mathscr{S})$ (c'est-à-dire tel que $x_0^2+x_0y_0+z_0-1=0$). $(\mathscr{S})$ est une surface du second degré. Une équation du plan tangent à $(\mathscr{S})$ en M_0 est fournie par la règle de dédoublement des termes :

$$xx_0+\frac{1}{2}(y_0x+x_0y)+\frac{1}{2}(z+z_0)-1=0.$$

Ce plan tangent contient le point $S(0,0,0)$ si et seulement si $z_0=2$ ce qui montre déjà que la courbe de contact admet pour système d'équations $\left\{\begin{array}{l}x^2+xy+z-1=0\\ z=2\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}x^2+xy+1=0\\ z=2\end{array}\right.$. C'est une hyperbole du plan d'équation $z=2$.

Le cône de sommet S circonscrit à $(\mathscr{S})$ est alors le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l}x^2+xy+1=0\\ z=2\end{array}\right.$. On trouve la surface d'équation $4x^2+4xy+z^2=0$. C'est un cône du second degré.

Correction de l'exercice 5412 ▲

Une équation de $(\mathscr{S})$ est encore $xy+yz+zx-\lambda x-\lambda y-\lambda z+\lambda=0$.

La matrice de la forme quadratique $Q\ :\ (x,y,z)\mapsto xy+yz+zx$ dans la base (i,j,k) est $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ est les valeurs propres de cette matrice sont $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et 1. Le rang de Q est 3 et sa signature est $(1,2)$. La surface $(\mathscr{S})$ est à priori soit un hyperboloïde, soit un cône du second degré. Donc $(\mathscr{S})$ est un cône du second degré si et seulement si son (unique) centre de symétrie qui est aussi l'unique point critique de la fonction $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)-\lambda$ appartient à $(\mathscr{S})$.

Point critique.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y+z=\lambda\\ z+x=\lambda\\ x+y=\lambda\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\lambda}{2}.$$

On note alors Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$.

$(\mathscr{S})$ est un cône $\Leftrightarrow \Omega\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow \frac{3\lambda^2}{4}-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda\in\left\{0,\frac{4}{3}\right\}$.

• Si $\lambda=0$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation $xy+yz+zx=0$. Dans le repère (O,X,Y,Z) où $X=/dfrac1\sqrt{2}(x-y)$, $Y=\frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z)$ et $Z=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne $-\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{2}Z^2=0$ ou encore $(\mathscr{S})$ est le cône de révolution de sommet O et de section droite le cercle d'équations $\left\{\begin{array}{l}Z=1\\ X^2+Y^2+Z^2=3\end{array}\right.$ dans (O,X,Y,Z) ou encore $\left\{\begin{array}{l}x+y+z=\sqrt{3}\\ x^2+y^2+z^2=3\end{array}\right.$ dans (O,x,y,z).

Puisque $(\mathscr{S})$ est un cône de révolution de sommet O et d'axe la droite d'équations $x=y=z$, il est plus interessant de fournir le demi angle au sommet θ. Le point $A(1,1,1)$ est sur l'axe et le point $M(2,2-1)$ est sur le cône. Donc $\theta=\arccos\left(\frac{|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}|}{OA\times OM}\right)=\arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{3}}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

• Si $\lambda=\frac{4}{3}$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation $xy+yz+zx-\frac{4}{3}(x+y+z)+\frac{4}{3}=0$ dans (O,i,j,k) ou encore $XY+XZ+YZ=0$ dans (Ω,i,j,k) ce qui ramène au cas précédent.

Correction de l'exercice 5413 ▲

Pour tout réel t, $(x(t))^2+(y(t))^2=\frac{1}{4}e^{2t}((\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2)=\frac{1}{2}e^{2t}=\frac{1}{2}(z(t))^2$ et le support de l'arc considéré est contenu dans le cône de révolution d'équation $z^2=2(x^2+y^2)$.

Correction de l'exercice 5414 ▲

(a)

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists m\in(C)/\ M=m+\lambda\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l}x=a\cos t+\lambda\\ y=b\sin t\\ z=a\cos t\sin t+\lambda\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l}\lambda=x-a\cos t\\ y=b\sin t\\ z=a\cos t\sin t+x-a\cos t\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l}y=b\sin t\\ z=a\cos t\sin t+x-a\cos t\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l}y=b\sin t\\ z-x=a\cos t(\sin t-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l}y=b\sin t\\ b(z-x)=a\cos t(y-b)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow b^4(z-x)^2+y^2a^2(y-b)^2=a^2b^2(y-b)^2.$$

En effet,

• $\Rightarrow$ / s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $y=b\sin t$ et $b(z-x)=a\cos t(y-b)$ alors

$$\begin{aligned}b^4(z-x)^2+y^2a^2(y-b)^2&=b^2a^2\cos^2t(y-b)^2+b^2\sin^2ta^2(y-b)^2=a^2b^2(y-b)^2(\cos^2t+\sin^2t)\\&=a^2b^2(y-b)^2.\end{aligned}$$

• $\Leftarrow$ / Réciproquement, si $b^4(z-x)^2+y^2a^2(y-b)^2=a^2b^2(y-b)^2$ alors $b^4(z-x)^2=a^2(y-b)^2(b^2-y^2)$ et donc
ou bien $y=b$, ou bien $b^2-y^2\geqslant 0$. Par suite, il existe un réel t tel que $y=b\sin t=b\sin(\pi-t)$ puis

$$\begin{aligned}b^4(z-x)^2=a^2(y-b)^2(b^2-y^2)&\Rightarrow b^4(z-x)^2=a^2(b\sin t-b)^2b^2\cos^2t\Rightarrow b(z-x)=\pm a\cos t(b\sin t-b)\\&\Rightarrow b(z-x)=a\cos t(y-b)\text{ ou }b(z-x)=a\cos(\pi-t)(y-b)\end{aligned}$$

et il existe un réel t' tel que $y=b\sin t'$ et $b(z-x)=a\cos t'(y-b)$.

(b)

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists m\in(C)/\ M=m+\lambda\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l}x=X\\ y=Y+\lambda\\ z=Z+\lambda\\ Y+Z=1\\ X^2+Y^2=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l}(y-\lambda)+(z-\lambda)=1\\ x^2+(y-\lambda)^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}(y+z-1)\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+(y-z+1)^2=4.$$

Correction de l'exercice 5415 ▲

La direction du cylindre est orthogonale au plan d'équation $z=x$ et est donc engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1,0,-1)$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists m\in(C)/\ M=m+\lambda\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l}x=X-\lambda\\ y=Y\\ z=Z+\lambda\\ Z=X\\ 2X^2+Y^2=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l}z-\lambda=x+\lambda\\ 2(x+\lambda)^2+y^2=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x+\frac{1}{2}(z-x)\right)^2+y^2=1\Leftrightarrow(x+z)^2+2y^2=2.$$

Correction de l'exercice 5416 ▲

Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(2,1,0)$ et $\overrightarrow{u}(1,1,1)$.

$$\begin{aligned}M\in(\mathscr{C}) &\Leftrightarrow d(M,(\mathscr{D}))=R\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\|^2=R^2\|\overrightarrow{u}\|^2\Leftrightarrow\|(x-2,y-1,z)\wedge(1,1,1)\|^2=R^2\|(1,1,1)\|^2\\&\Leftrightarrow (y-z-1)^2+(x-z-2)^2+(x-y-1)^2=3R^2\\&\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz-6x+6z+6-3R^2=0.\end{aligned}$$

La droite (Oz) est tangente à $(\mathscr{C})$ si et seulement si $d((Oz),(\mathscr{D}))=R$.

$$(Oz)\text{ est tangente à }(\mathscr{C})\Leftrightarrow\frac{\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{k},\overrightarrow{u}\right]^2}{\left\|\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{u}\right\|^2}=R^2\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}^2=\|(-1,1,0\|^2\Leftrightarrow 1=2R^2\Leftrightarrow R=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 5417 ▲

En un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de l'ellipsoïde la règle de dédoublement des termes fournit une équation du plan tangent : $xx_0+2yy_0+3zz_0=21$.

Ce plan est parallèle au plan d'équation $x+4y+6z=0$ si et seulement si le vecteur $(x_0,2y_0,3z_0)$ est colinéaire au vecteur $(1,4,6)$ ou encore si et seulement si $2x_0=y_0=z_0$.

Enfin le point $(x_0,2x_0,2x_0)$ est sur l'ellipsoïde si et seulement si $x_0^2+8x_0^2+12x_0^2=21$ ce qui équivaut à $x_0^2=1$.

Les plans cherchés sont les deux plans d'équations respectives $x+4y+6z=21$ et $x+4y+6z=-21$.

Correction de l'exercice 5418 ▲

Le plan tangent (P_0) en (x_0,y_0,z_0) tel que $x_0-8y_0z_0=0$ admet pour équation $(x+x_0)-8(z_0y+y_0z)=0$ ou encore $x-8z_0y-8y_0z+8y_0z_0=0$.

Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(-2,1,0)$ et $\overrightarrow{u}(4,0,-1)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{D})\subset(P_0)&\Leftrightarrow\forall\lambda\in\mathbb{R},\ (-2+4\lambda)-8z_0+8y_0\lambda+8y_0z_0=0\Leftrightarrow\forall\lambda\in\mathbb{R},\ (8y_0+4)\lambda+8y_0z_0-8z_0-2=0\\&\Leftrightarrow 8y_0+4=0\text{ et }8y_0z_0-8z_0-2=0\Leftrightarrow y_0=-\frac{1}{2}\text{ et }z_0=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

On trouve un et un seul plan tangent contenant la droite $(\mathscr{D})$, à savoir le plan tangent à $(\mathscr{S})$ en $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)$ d'équation $3x+4y+12z+2=0$.

Correction de l'exercice 5419 ▲

(a) Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(3,3,1)$.

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(\mathscr{C})&\Leftrightarrow d(M,(\mathscr{D}))=3\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\right\|^2=9\|\overrightarrow{u}\|^2\\&\Leftrightarrow\|(x,y+1,z-2)\wedge(3,3,1)\|^2=9\times19\Leftrightarrow(y-3z+7)^2+(x-3z+6)^2+9(x-y-1)^2=171.\end{aligned}$$

(b) Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(3,3,1)$. De plus, $S=A$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{C}) \Leftrightarrow M=A \text{ ou } M\neq A \text{ et } \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right|}{AM\times\|\overrightarrow{u}\|}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right)^2=\frac{1}{4}AM^2\|\overrightarrow{u}\|^2$$
$$\Leftrightarrow 4(3x+3(y+1)+(z-2))^2=19(x^2+(y+1)^2+(z-2)^2)$$
$$\Leftrightarrow 4(3x+3y+z+1)^2-19(x^2+(y+1)^2+(z-2)^2)=0$$
$$\Leftrightarrow 17x^2+17y^2-15z^2+72xy+24xz+24yz+24x-14y+84z-91=0.$$

Correction de l'exercice 5422 ▲

(a) Parabole. axes = $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. sommet : $X=-\frac{4}{5}$, $Y=-\frac{16}{5}$.

(b) Ellipse. $\Omega=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, axes à $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $a=2$, $b=\sqrt{2}$.

(c) Ellipse. $\Omega=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, axes à $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(d)

(e) Centre $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} & & m & <0 & \Rightarrow & \text{ellipse horizontale.}\\ 0 & < & m & <1/2 & \Rightarrow & \text{hyperbole verticale.}\\ 1/2 & < & m & <1 & \Rightarrow & \text{hyperbole horizontale.}\\ 1 & < & m & & \Rightarrow & \text{ellipse verticale.}\end{cases}$$

Correction de l'exercice 5423 ▲

axes d'angle $-\frac{1}{2}\arctan 2\ [\pi/2]$, excentricité = $\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$.

Correction de l'exercice 5424 ▲

$\mathscr{C}: x^2(1-e^2)+y^2+2e^2dx-e^2d^2=0$
$T_u,v: x(u(1-e^2)+e^2d)+vy=e^2d(d-u)$
$uv'-u'v=0\Rightarrow x=d$.

Correction de l'exercice 5446 ▲

(a)

(b)

(c) $\left(\frac{y'}{x'}\right)'=\frac{2t(t^2-t-1)}{(t-1)^2}\Rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(d) $\det(M',M'')=\frac{3}{2}\sin 4t+3\sin 2t\Rightarrow t=k\pi$.

Correction de l'exercice 5447 ▲

(a)

(b) $\frac{m'(t)}{m(t)}=\frac{-2(t-1)(t^2+t+1)(t^3-3t-1)}{t(2t^3+1)(t^3+2+3t)}$.

Correction de l'exercice 5452 ▲

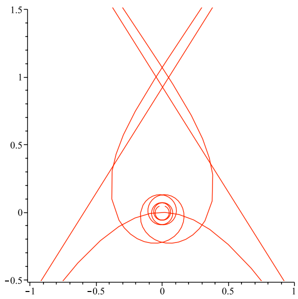
(a)

(b) Repère $(0, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ avec θ constant $\Rightarrow$ point de concours : $X = \cos\theta$, $Y = \sin\theta$.

Correction de l'exercice 5453 ▲

Coordonnées polaires : $\rho = \frac{a}{2}\left(4\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)$ avec $A = (a, 0)$.

Correction de l'exercice 5454 ▲



La courbe est symétrique par rapport à Oy. $M(\rho,\theta) = M_1(\rho_1,\theta_1)$ si et seulement si $\begin{cases}\theta_1 \equiv \theta\ [2\pi]\\ \rho_1 = \rho\end{cases}$ ou $\begin{cases}\theta_1 \equiv \theta+\pi\ [2\pi]\\ \rho_1 = -\rho.\end{cases}$

Dans le premier cas, $\rho = \rho_1 \Leftrightarrow \theta\theta_1 = -1$ pour $\theta \neq \theta_1$ ce qui donne l'équation en θ :

$$\theta^2 + 2k\pi\theta + 1 = 0$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Cette équation à k fixé non nul admet deux racines, ce qui donne deux familles de points doubles. De même, le second cas ammène deux autres familles définies par l'équation :

$$\theta^2 + (2k+1)\pi\theta + 1 = 0.$$

Correction de l'exercice 5455 ▲

(les grands classiques)

(a) **L'astroïde.**

i. **Domaine d'étude.**

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t)$. Par suite, la courbe complète est obtenue quand t décrit un segment de longueur

2π comme par exemple $[-\pi, \pi]$.

• Pour tout réel t,

$$M(-t) = \begin{pmatrix}\cos^3(-t)\\ \sin^3(-t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^3 t\\ -\sin^3 t\end{pmatrix} = s_{(Ox)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

• Pour tout réel t,

$$M(t+\pi) = \begin{pmatrix} \cos^3(t+\pi) \\ \sin^3(t+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

La portion de courbe obtenue quand t décrit $[-\pi, 0]$ est donc aussi la symétrique par rapport à O de la portion de
courbe obtenue quand t décrit $[0, \pi]$. Néanmoins, cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine
d'éude.
• Pour tout réel t,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \cos^3(\pi - t) \\ \sin^3(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy), puis
par réflexion d'axe (Ox).
• Pour tout réel t,

$$M\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \begin{pmatrix} \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 t \\ \cos^3 t \end{pmatrix} = s_{y=x}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite
d'équation $y = x$, puis d'axe (Oy) et enfin d'axe (Ox).
Variations conjointes de x et y. La fonction $t \mapsto x(t)$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et la fonction $t \mapsto y(t)$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. **Etude des points singuliers.** Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -3a\cos^2 t \sin t \\ 3a\sin^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3a\cos t \sin t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Pour tout réel t, le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est unitaire et n'est donc pas nul. Par suite,

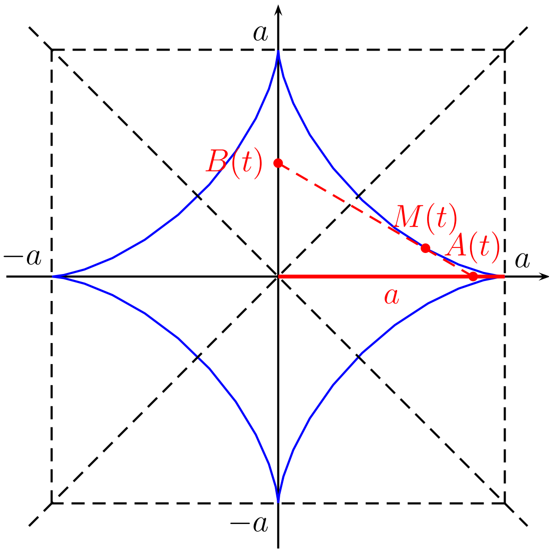
$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3a\cos t \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ ou } \sin t = 0 \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Les points singuliers sont donc les $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $M(t)$ est un point régulier et la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Etudions alors le point singulier $M(0)$.
Pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} &= \frac{a\sin^3 t}{a\cos^3 t - a} = \frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \\ &= \frac{8\sin^3 \frac{t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}}{-2\sin^2 \frac{t}{2}(\cos^2 t + \cos t + 1)} = \frac{-4\sin \frac{t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}}{\cos^2 t + \cos t + 1}, \end{aligned}$$

et donc, $\lim_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = 0$. (Si on connaît déjà les équivalents, c'est plus court : $\frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{t^3}{-\frac{t^2}{2} \times 3} = -\frac{2t}{3} \to 0$). La courbe admet en $M(0)$ une tangente dirigée par le vecteur $(1, 0)$. Par symétrie, la courbe admet également une tangente en $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $M(\pi)$, dirigée respectivement par $(0, 1)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Toujours par symétrie, ces quatre points sont des points de rebroussement de première espèce. Il en résulte aussi que pour tout réel t, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-\cos t, \sin t)$.

On en déduit la courbe.



ii. Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a vu que la tangente (T_t) en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-\cos t, \sin t)$. Une équation cartésienne de T_t est donc : $-\sin t(x - a\cos^3 t) - \cos t(y - a\sin^3 t) = 0$, ou encore

$$x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t \ (T_t).$$

On en déduit immédiatement que $A(t)$ a pour coordonnées $(a\cos t, 0)$ et que $B(t)$ a pour coordonnées$(0, b\sin t)$ puis que

$$\boxed{\forall t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[,\ A(t)B(t) = a.}$$

(b) **La cycloïde.**

i. La condition de roulement sans glissement se traduit par $\overline{OI} = MI$

ou encore $x_\Omega = Rt$. On en déduit que

$$x_M = x_\Omega + x_{\overrightarrow{\Omega M}} = Rt + R\cos\left(2\pi - \tfrac{\pi}{2} - t\right) = Rt - R\sin t = R(t - \sin t)$$

et

$$y_M = y_\Omega + y_{\overrightarrow{\Omega M}} = R + R\sin\left(2\pi - \tfrac{\pi}{2} - t\right) = R - R\cos t = R(1 - \cos t).$$

ii. **Domaine d'étude.**

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(t + 2\pi) = M(t) + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}(2\pi R, 0)$. Par suite, on trace la courbe quand t décrit $[0, 2\pi]$ et la

courbe complète est obtenue par translations de vecteurs $k\overrightarrow{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.

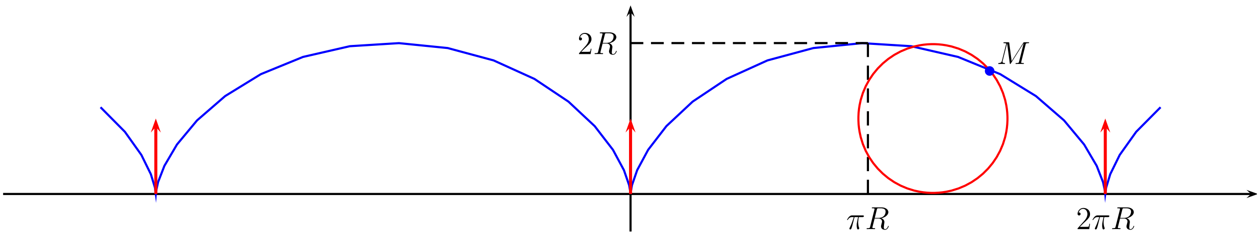
• Pour tout réel t, $M(-t) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(M(t))$. On trace la courbe quand t décrit $[0, \pi]$, puis on complète

par réflexion d'axe (Oy) puis par translations.

Etude des points singuliers. Pour $t \in [0, \pi]$, $x'(t) = R(1 - \cos t) = 2R\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et $y'(t) = R\sin t = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Le point $M(t)$ est régulier si et seulement si $t \in]0, \pi]$. Dans ce cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} 2R\sin^2(t/2) \\ 2R\sin(t/2)\cos(t/2) \end{pmatrix}$ ou encore par $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Etudions également le point singulier $M(0)$. Pour $t \in]0,\pi]$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{R(1-\cos t)}{R(t-\sin t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} = \frac{3}{t}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = +\infty$ et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $(0,1)$. Ainsi, dans tous les cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Par symétrie, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce. Sinon, x et y sont des fonctions croissantes sur $[0,\pi]$.



(c) **une courbe de** LISSAJOUS **Domaine d'étude.**

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t)$ et la courbe complète est obtenue quand t décrit $[-\pi,\pi]$.

• Pour tout réel t,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \sin(-2t) \\ \sin(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\sin(3t) \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0,\pi]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de
centre O.

• Pour tout réel t,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi - 2t) \\ \sin(3\pi - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

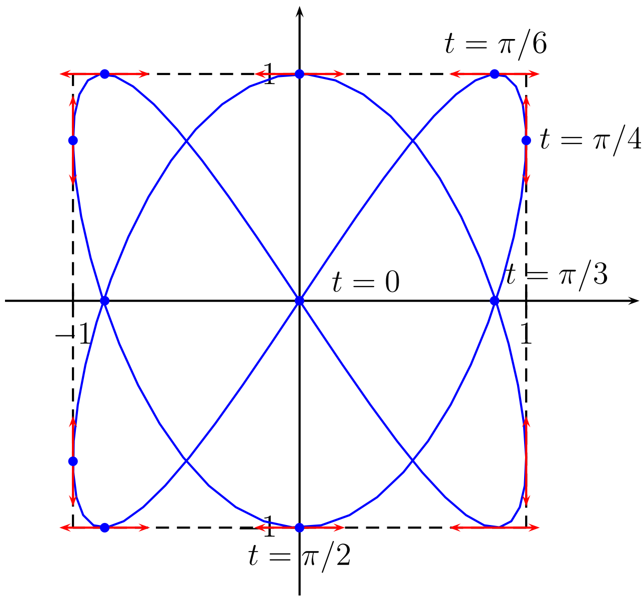
On étudie et on construit la courbe pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis
par symétrie centrale de centre O.

• On note aussi que $M(t+\pi) = s_{(Ox)}(M(t))$, mais cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine
d'étude.

Variations conjointes de x et y. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = 2\cos(2t)$ et $y'(t) = 3\cos(3t)$. On en déduit immédiatement le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
x	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	0
y	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1
$y'(t)$		$+$	0		$-$		

puis on en déduit la courbe.



Points multiples. D'abord, tout point de l'arc est multiple, puisque la courbe est parcourue une infinité de fois. Il y a essentiellement deux « vrais points » multiples à déterminer, les autres s'en déduisent par symétrie. L'un des deux est le point de (Ox) d'abscisse strictement positive obtenu pour un certain réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$y(t)=0 \Leftrightarrow \sin(3t)=0 \Leftrightarrow 3t \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{3}.$$

Le point de la courbe qui est sur (Ox) et qui a une abscisse strictement positive est le point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. Sinon, on cherche $t_1 \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ et $t_2 \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $M(t_1)=M(t_2)$.

$$\begin{aligned}M(t_1)=M(t_2) &\Rightarrow x(t_1)=x(t_2) \Leftrightarrow t_2 \in t_1+\pi\mathbb{Z} \text{ ou } t_2 \in \frac{\pi}{2}-t_1+\pi\mathbb{Z} \Rightarrow t_2 \in \frac{\pi}{2}-t_1+\pi\mathbb{Z}\\ &\Rightarrow t_2=\frac{\pi}{2}-t_1-\pi \Rightarrow t_2=-\frac{\pi}{2}-t_1.\end{aligned}$$

Réciproquement, si $t_2=-\frac{\pi}{2}-t_1$, alors $x(t_1)=x(t_2)$ et donc,

$$\begin{aligned}M(t_1)=M(t_2) &\Leftrightarrow y\left(-\frac{\pi}{2}-t_1\right)=y(t_1) \Leftrightarrow \sin\left(3\left(-\frac{\pi}{2}-t_1\right)\right)=\sin(3t_1)\\ &\Leftrightarrow 3t_1 \in -\frac{3\pi}{2}-3t_1+2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 3t_1 \in \pi+\frac{3\pi}{2}+3t_1+2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 6t_1 \in -\frac{3\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow t_1 \in -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t_1=\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

Le point $M\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est le point multiple d'abscisse et d'ordonnée strictement positives.

(d) **La lemniscate de** BERNOULLI **Domaine d'étude.**

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(-t) = s_O(M(t))$. On étudie et construit la courbe quand t décrit $\mathbb{R}^+$ et on obtient la courbe

complète par symétrie centrale de centre O.

• Pour $t > 0$,

$$M\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^4}}, \frac{\frac{1}{t^3}}{1+\frac{1}{t^4}}\right) = \left(\frac{t^3}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^4}\right) = s_{y=x}(M(t)).$$

On étudie et construit la courbe quand t décrit $[0,1]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite

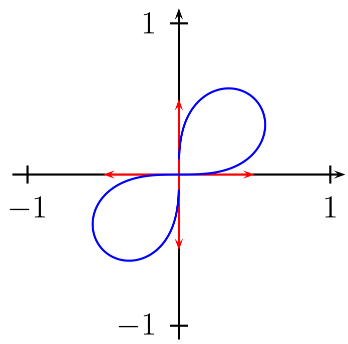
d'équation $y = x$ puis par symétrie centrale de centre O. **Variations conjointes de** x **et** y**.** Les fonctions x et y sont dérivables sur $[0,1]$ et pour $t \in [0,1]$,

$$x'(t) = \frac{(1+t^4) - t(4t^3)}{(1+t^4)^2} = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \text{ et } y'(t) = \frac{3t^2(1+t^4) - t^3(4t^3)}{(1+t^4)^2} = \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$

On en déduit immédiatement le tableau :

t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$x'(t)$		$+$	0	-	
x	0	$\nearrow$	$\frac{(\sqrt[4]{3})^3}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0		$\nearrow$		$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0		$+$		

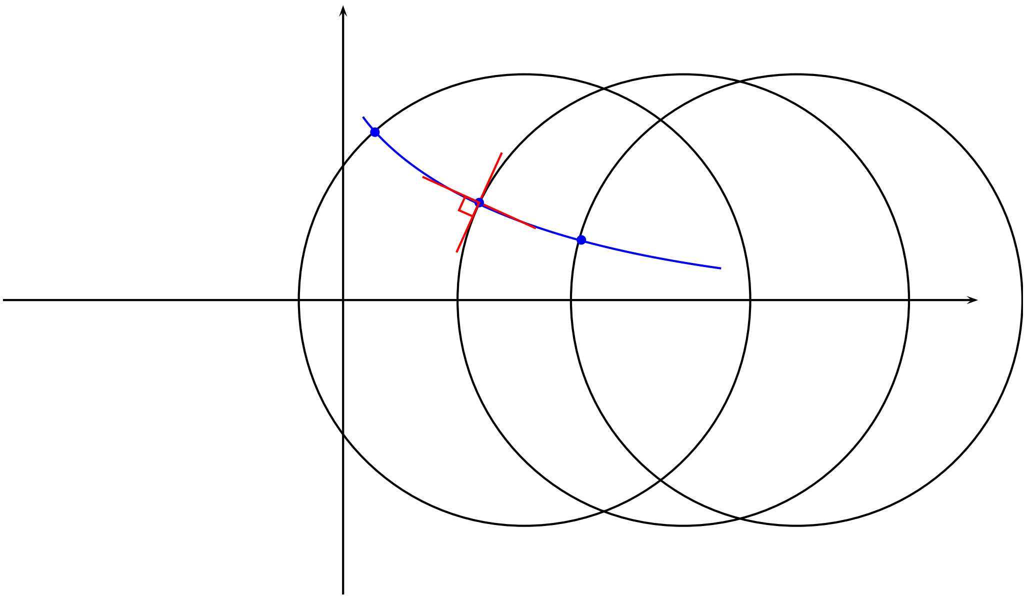
La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $(1,0)$. Par symétrie, la tangente en « $M(+\infty)$ » est dirigée par le vecteur $(0,1)$.



(e) **Les tractrices**

i. Cherchons les arcs solutions sous la forme $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) + R\cos t \\ y = R\sin t \end{array}\right.$ où f est une foncton dérivable sur un certain intervalle I (de sorte que le point $M(t)$ est sur le cercle $\mathscr{C}(t)$ de centre

$\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon R). La trajectoire cherchée est orthogonale à chaque cercle $\mathscr{C}(t)$ si et seulement si la tangente à cette trajectoire en $M(t)$ est orthogonale à la tangente au cercle $\mathscr{C}(t)$ en $M(t)$ ou encore « si et seulement si » les vecteurs $(f'(t) - R\sin t, R\cos t)$ et $(-\sin t, \cos t)$ sont orthogonaux. Cette dernière condition s'écrit $-f'(t)\sin t + R(\sin^2 t + \cos^2 t) = 0$ ou encore $f'(t) = \frac{R}{\sin t}$ ou enfin, $f(t) = R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$. Les arcs solutions sont les arcs de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) + C \\ R\sin t \end{pmatrix}$, où $C \in \mathbb{R}$.



Les courbes solutions se déduisent de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) \\ R\sin t \end{pmatrix}$ par translations de vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{i}$. On peut montrer que la courbe obtenue est la trajectoire de la roue arrière d'une voiture quand celle-ci se gare en marche avant, la roue avant étant quant à elle collée au trottoir.

ii. **Domaine d'étude.** La fonction $t \mapsto M(t)$ est 2π-périodique et on l'étudie donc sur $[-\pi, \pi]$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $M(t)$ existe si et seulement si $t \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$. Pour $t \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$ puis

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)\right| + \cos(\pi - t)\right) \\ R\sin(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\left(-\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| - \cos t\right) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} = s_{Oy}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe quand t décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par réflexion d'axe (Ox). **Dérivée. Etude des points singuliers.** Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} R\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right) \\ R\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ R\cos t \end{pmatrix} = R\frac{\cos t}{\sin t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 t}{\sin t} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point singulier. Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$, $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = R(\sin t - 1) = -R\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) \sim -\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2$. D'autre part, posons $h = \frac{\pi}{2} - t$ ou encore $t = \frac{\pi}{2} - h$. Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$x'(t) = R\frac{\cos^2 t}{\sin t} = R\frac{\sin^2 h}{\cos h} \sim Rh^2 = R\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

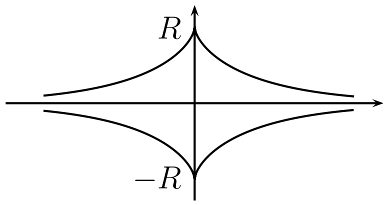
et donc par intégration,

$$x(t)-x(\frac{\pi}{2})=\frac{R}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3+o\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)\sim\frac{R}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Comme d'autre part, $y(t)-y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-R(1-\sin t)=-R(1-\cos h)\sim-\frac{R}{2}h^2=-\frac{R}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2$, on en déduit que

$$\frac{y(t)-y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t)-x\left(\frac{\pi}{2}\right)}\sim\frac{-\frac{R}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{R}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3}=-\frac{3}{2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)},$$

et donc $\lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}}\frac{y(t)-y(\frac{\pi}{2})}{x(t)-x(\frac{\pi}{2})}=+\infty$. Par symétrie d'axe (Oy), la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point de rebroussement de première espèce. Sinon, x' et y' sont strictement positives sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que x et y sont strictement croissantes sur cet intervalle. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers 0. On en déduit que la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe. D'autre part, x croit de $-\infty$ à 0 pendant que y croit de 0 à 1. **Courbe.**



Correction de l'exercice 5456 ▲

(a) **Domaine d'étude.** $M(t)$ existe si et seulement si $t\notin\{-1,1\}$. Sinon, il n'y a pas de symétrie particulière (la fonction y est effectivement paire, mais x n'est ni paire ni impaire).

Dérivée. Pour $t\in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}x'(t)&=x(t)(3\ln|t|-2\ln|t+1|-\ln|t-1|)'=\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}(\frac{3}{t}-\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t-1})\\&=\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}\frac{3(t^2-1)-2(t^2-t)-(t^2+t)}{t(t+1)(t-1)}=\frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2},\end{aligned}$$

et

$$y'(t)=\frac{2t(t^2-1)-2t(t^2)}{(t^2-1)^2}=\frac{-2t}{(t^2-1)^2},$$

ce qui reste vrai par continuité de x et y en 0.

Etude des points singuliers. Pour $t\in]-1,1[$, $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)=\vec{0}\Leftrightarrow t=0$. $M(0)=(0,0)$ est l'unique point singulier. Pour $t\in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}=\frac{t^2}{t^2-1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{t^3}=\frac{t+1}{t}.$$

Par suite, $\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et vers $-\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs inférieures. La tangente en $M(0)$ est dirigée par $\vec{j}$ et d'autre part, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Etude quand t tend vers $\pm\infty$. Quand t tend vers $\pm\infty$, $M(t)$ tend vers le point $(1,1)$. On prolonge la courbe en posant $M(\infty)=1,1)$. On a alors

$$\frac{y(t)-y(\infty)}{x(t)-x(\infty)} = (\frac{t^2}{t^2-1}-1)(\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}-1)^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{-t^2+t+1} = \frac{t+1}{-t^2+t+1} \sim -\frac{1}{t}.$$

Cette expression tend donc vers 0 quand t tend vers $\pm\infty$ et la tangente en $M(\infty)$ est dirigée par $\vec{i}$.

Etude quand t tend vers 1. Quand t tend vers 1, $x(t) \sim 14(t-1)$ et $y(t) \sim \frac{1}{2(t-1)}$. Donc, x et y tendent vers l'inifini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim 2$. Puis,

$$y(t)-2x(t) = \frac{t^2}{t^2-1} - 2\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} = \frac{t^2(t+1)-2t^3}{(t+1)^2(t-1)} = -\frac{t^2}{(t+1)^2}.$$

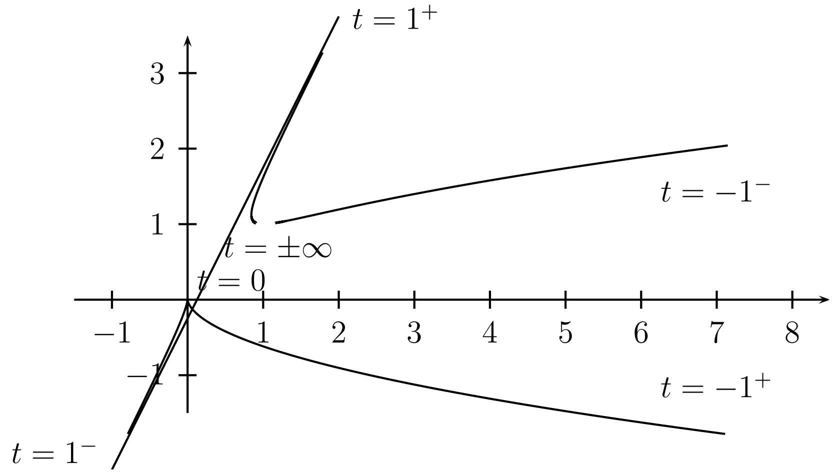
Cette dernière expression tend vers $-\frac{1}{4}$ et la droite (Δ) d'équation $y = 2x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe.

Etude quand t tend vers -1. Quand t tend vers 1, $x(t) \sim 12(t+1)^2$ et $y(t) \sim \frac{-1}{2(t+1)}$. Donc, x et y tendent vers l'inifini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim -(t+1)$. Par suite, $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0 quand t tend vers -1. La courbe admet une barnche parabolique de direction (Ox).

Variations conjointes de x et y. On rappelle que pour $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $x'(t) = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2}$ et $y'(t) = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}$. On en déduit le tableau suivant :

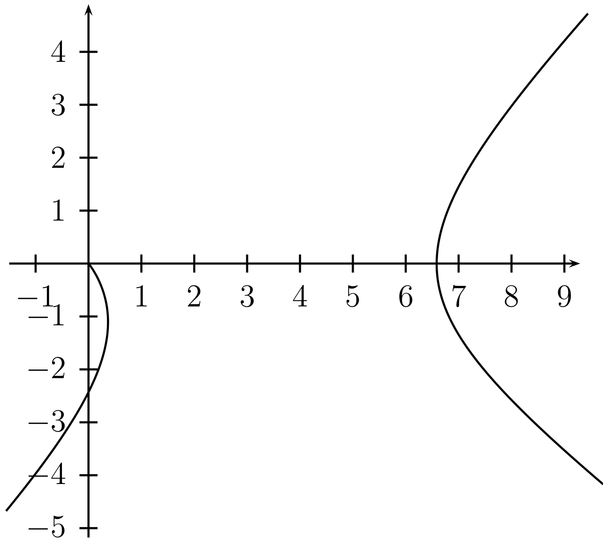
t	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{27}{32}$	↗	1
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{8}$	↘	1
$y'(t)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖		$-$		

On peut noter que la tangente en $M(3)$ est dirigée par le vecteur $\vec{j}$. Voir graphique page suivante.

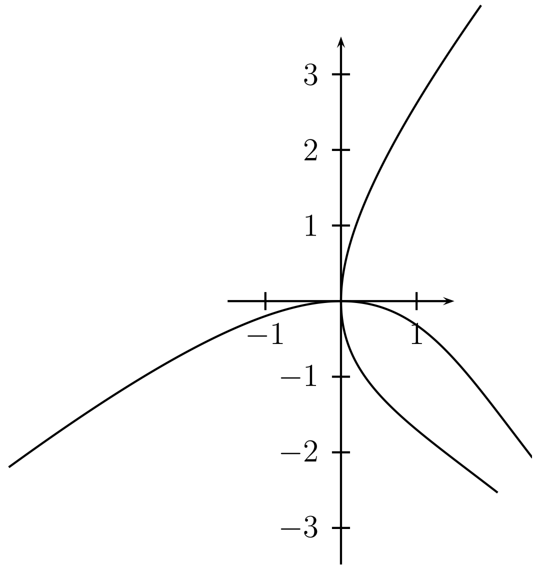


Dans la suite de cet exercice, je ne détaillerai que très peu ou pas du tout l'étude de la courbe.

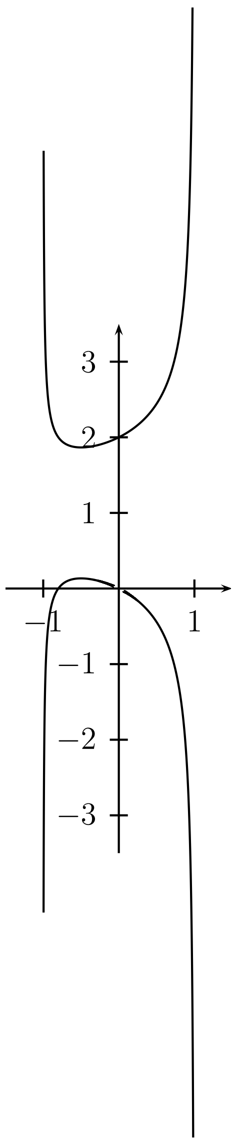
(b)



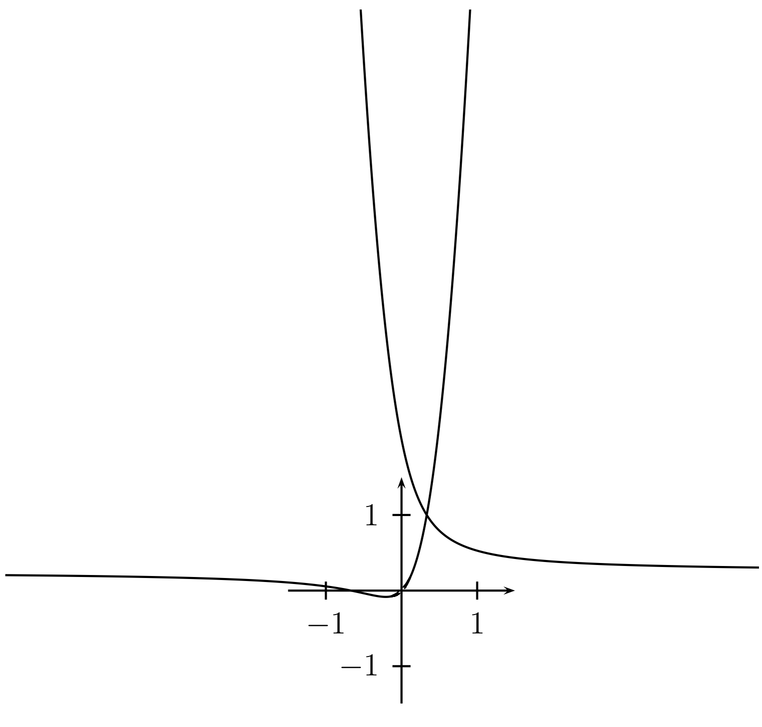
(c)



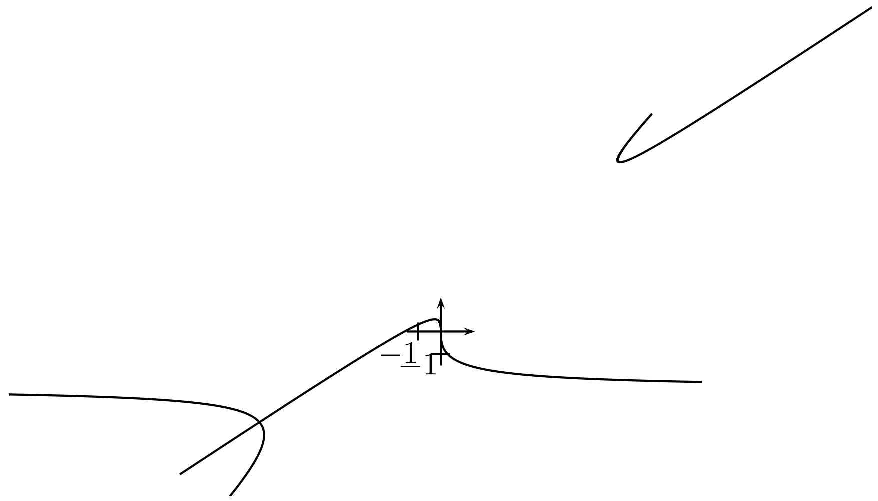
(d) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$



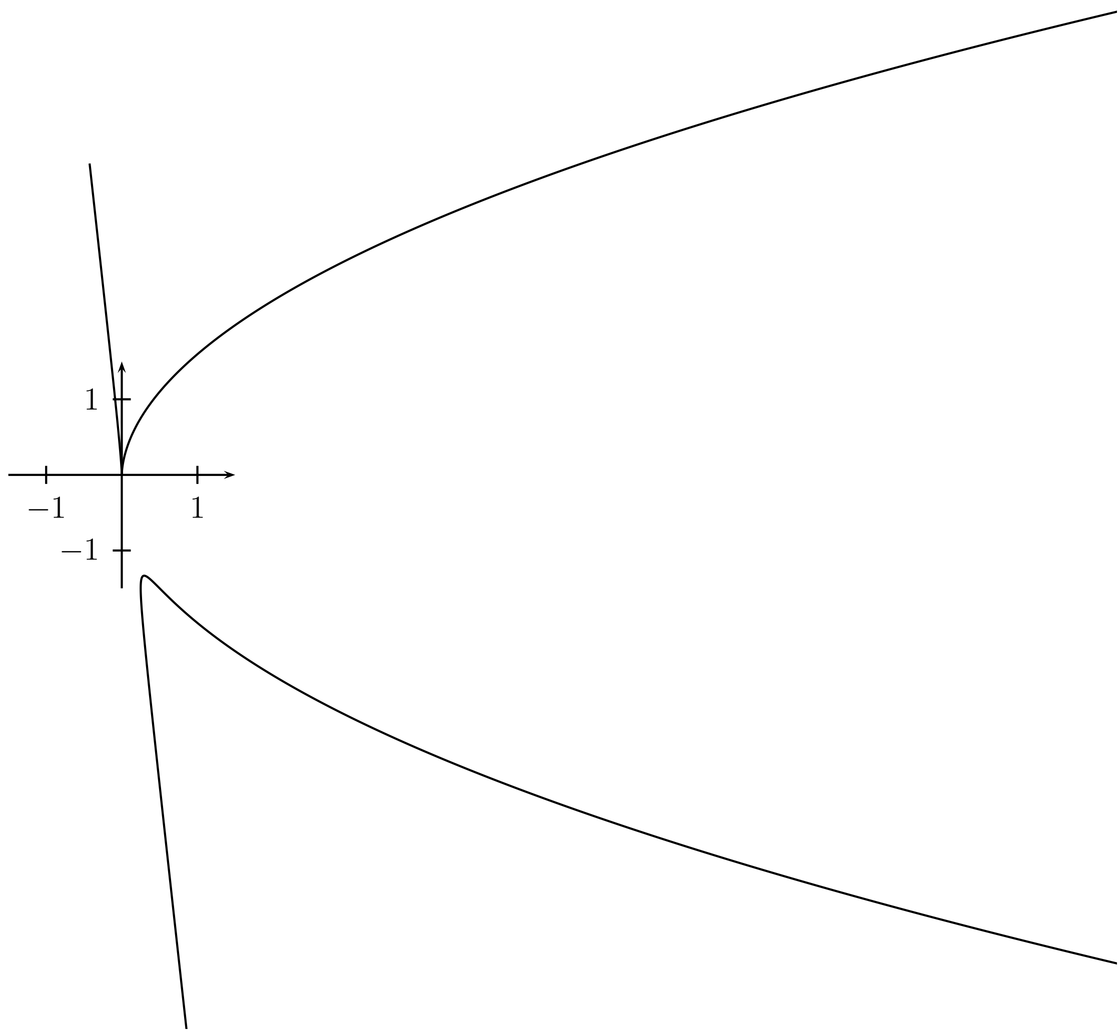
(e)



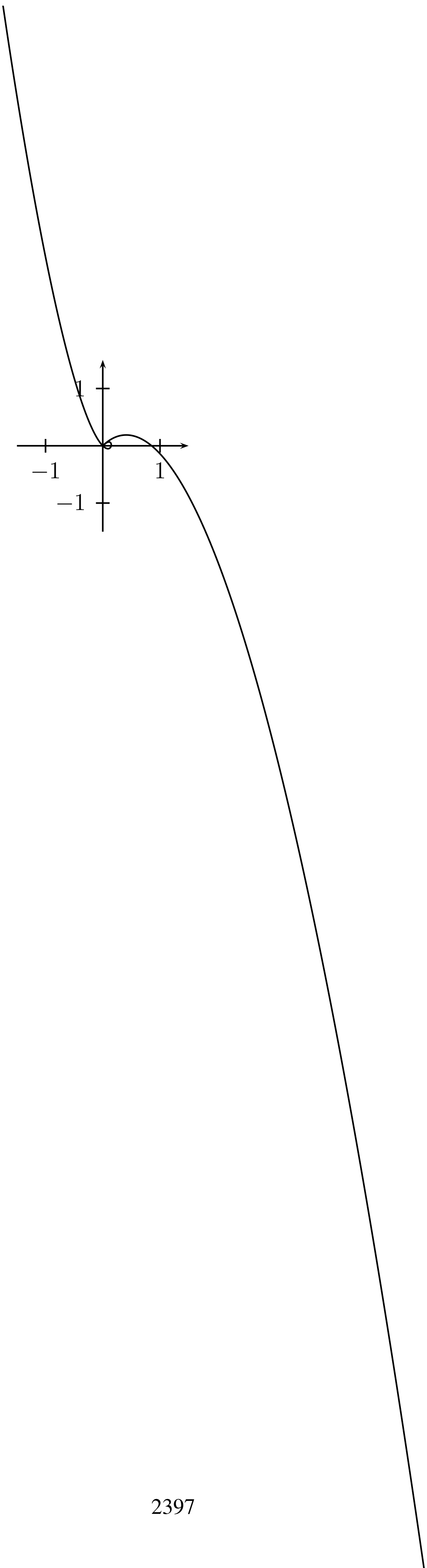
(f) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$



(g) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$



(h) $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$



1
−1
1
−1

Correction de l'exercice 5457 ▲

(a) On a vu dans l'exercice 5455, que la tangente (T_t) en $M(t)$ est toujours dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = (-\cos t, \sin t)$. Une équation de la tangente en $M(t)$ est donc $\sin t(x - a\cos^3 t) + \cos t(y - a\sin^3 t) = 0$ ou encore

$$x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t \ (T_t).$$

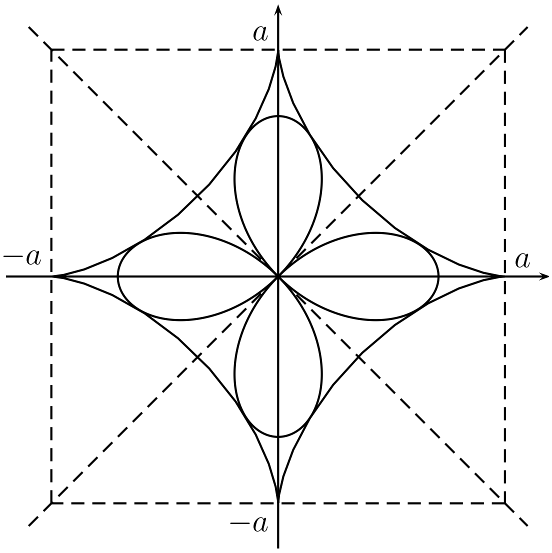
Soit $(t, u) \in [-\pi, \pi]^2$.

$$(T_t)\perp(T_u) \Leftrightarrow \vec{u}(t)|\vec{u}(u) = 0 \Leftrightarrow \cos t\cos u + \sin t\sin u = 0 \Leftrightarrow \cos(t-u) = 0 \Leftrightarrow u \in t + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Il est alors clair que l'orthoptique est l'ensemble des points d'intersection des tangente (T_t) et $(T_{t+\frac{\pi}{2}})$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M(x,y)\ (T_t)\cap(T_{t+\frac{\pi}{2}}) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t \\ x\cos t - y\sin t = -a\sin t\cos t \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow x = -\begin{vmatrix} a\sin t\cos t & \cos t \\ -a\sin t\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \text{ et } y = -\begin{vmatrix} \sin t & a\sin t\cos t \\ \cos t & -a\sin t\cos t \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = a\sin t\cos t(-\cos t + \sin t) \text{ et } y = a\sin t\cos t(\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

L'orthoptique cherchée est la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} a\sin t\cos t(-\cos t + \sin t) \\ a\sin t\cos t(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$.



Correction de l'exercice 5461 ▲

(a) Pour $f(x) = \sin^2 x + \cos x$, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, et f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On remarque que f est 2π-périodique et paire, il suffit donc de faire l'étude de f sur l'intervalle $[0;\pi]$.
— Variations de f
Pour $x \in [0;\pi]$, $f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$ et donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{0; \frac{\pi}{3}; \pi\}$. Comme $\sin x > 0$ si $x \in]0;\pi[$, pour étudier le signe de $f'(x)$, il suffit d'étudier le

signe de $(2\cos x - 1)$, et on obtient

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & \frac{\pi}{3} & & \pi \\
\hline
f'(x) & 0 & + & 0 & - & 0 \\
\hline
 & & & \frac{5}{4} & & \\
f & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 1 & & & & -1
\end{array}$$

— Tangentes horizontales
Le graphe de f possède une tangente horizontale là où f' s'annule, c'est-à-dire aux points de coordonnées $(0,1)$, $(\frac{\pi}{3},\frac{5}{4})$ et $(\pi,-1)$. En particulier, la tangente au point d'abscisse 0 est horizontale et a pour équation $y=1$. Pour déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point, on étudie le signe de $f(x)-1$ pour x proche de 0 :

$$f(x)-1=\sin^2 x-1+\cos x=-\cos^2 x+\cos x=\cos x(1-\cos x)$$

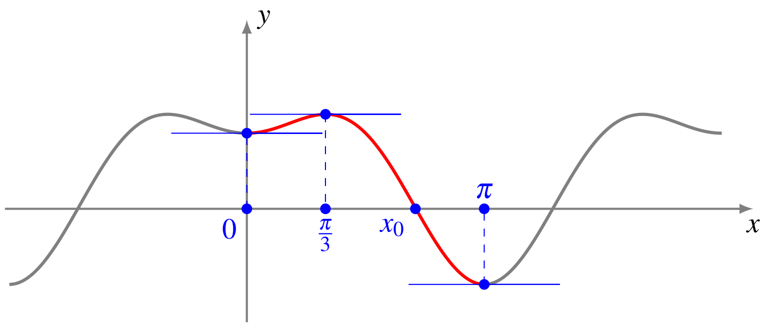
Cette expression est positive au voisinage de 0 (et même >0 pour $x\neq 0$ proche de 0). La courbe est donc au-dessus de sa tangente.

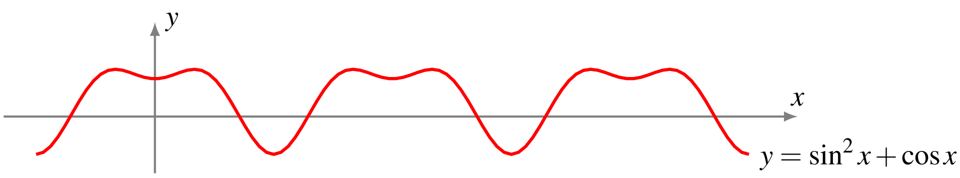
— Points particuliers
Le graphe de f coupe l'axe des abscisses entre 0 et π en un unique point x_0, qu'on détermine en résolvant

$$f(x)=0\Longleftrightarrow 1-\cos^2 x+\cos x=0\Longleftrightarrow X^2-X-1=0\ (X=\cos x)$$

ce qui donne deux solutions pour X, mais une seule dans $[-1;1]$: $X=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et donc $x_0=\arccos(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

Le graphe de f est obtenu sur $[-\pi;\pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.





(b) Pour $f(x)=x+\ln(1+e^x)$, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ et f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

— Variations de f
Comme $f'(x)=1+\frac{e^x}{1+e^x}$, pour tout x, $f'(x)>1$. En particulier f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— Allure du graphe en $+\infty$
On a $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et

$$\frac{f(x)}{x}=1+\frac{\ln\left(e^x(e^{-x}+1)\right)}{x}=1+\frac{x+\ln(e^{-x}+1)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}2$$

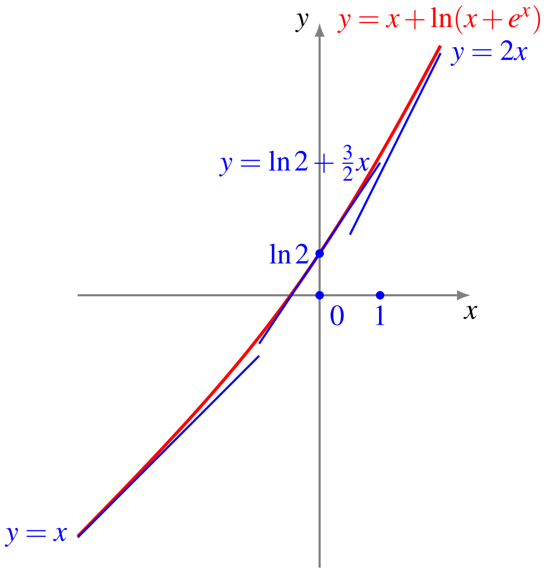
puis $f(x)-2x=\ln(e^{-x}+1)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0^+$. Ainsi le graphe de f a en $+\infty$ une asymptote, d'équation $y=2x$, et reste au-dessus de cette asymptote.

— Allure du graphe en $-\infty$
On a $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et
$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\ln(1+e^x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$$
puis $f(x) - x = \ln(1+e^x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+$. Ainsi le graphe de f a en $-\infty$ une asymptote, d'équation $y = x$, et reste au-dessus de cette asymptote.

— Tangente au point d'abscisse 0
L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0, et la position du graphe par rapport à cette tangente, peuvent être obtenues simultanément à partir du développement limité de f en x_0. Pour l'équation de la tangente, un développement limité à l'ordre 1 suffit, mais pour avoir la position il faut pousser le développement limité à l'ordre 2 (ou à l'ordre 3 si le terme d'ordre 2 est nul, ou plus encore...) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x+\ln(1+e^x) = x+\ln\left(1+1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\\
&= x+\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right)\\
&= x+\ln 2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)^2+o(x^2)\\
&= \ln 2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 (donnée par le DL à l'ordre 1) est donc
$$y = \ln 2 + \frac{3}{2}x$$
De plus, $f(x) - \left(\ln 2 + \frac{3}{2}x\right) = \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{8}x^2(1+o(1))$ où $o(1)$ est un terme qui tend vers 0 quand $x \to 0$. Ainsi $(1+o(1))$ a le même signe que 1 pour x proche de 0, et $f(x) - \left(\ln 2 + \frac{3}{2}x\right)$ est positif au voisinage de 0 : la courbe reste localement au-dessus de sa tangente.



Correction de l'exercice 5462 ▲

(a) Pour transformer une équation cartésienne $y = f(x)$ en paramétrisation, il suffit de poser $x = t$ et $y = f(t)$, en faisant décrire au paramètre t le domaine de définition de f. Ici, $f(x) = \sqrt{-x^2 - 3x + 4}$

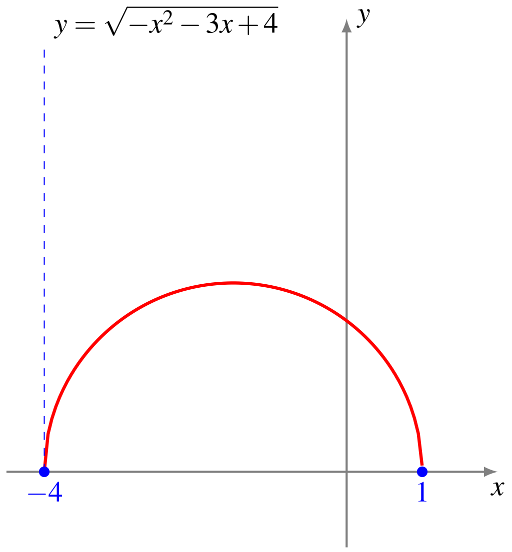
est bien définie pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $-x^2 - 3x + 4 \geqslant 0$ *i.e.* $x \in [-4; -1]$. On obtient donc la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{-t^2 - 3t + 4} \end{cases} \qquad (t \in [-4; 1])$$

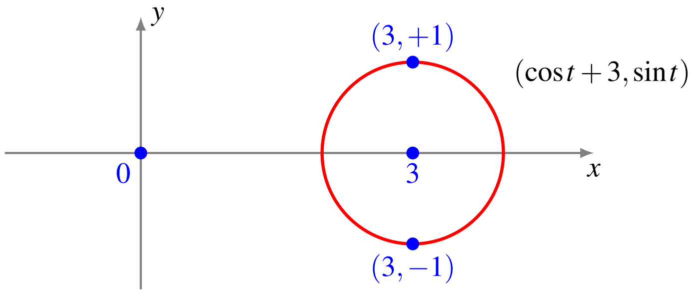
ce qui signifie

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathscr{C} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \in [-4; 1] \\ y = \sqrt{-x^2 - 3x + 4} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists t \in [-4; 1] \mid \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{-t^2 - 3t + 4} \end{cases} \end{aligned}$$

où $\mathscr{C}$ est la courbe étudiée.



(b) S'il est toujours possible de représenter le graphe d'une fonction comme une courbe paramétrée, la réciproque n'est pas vraie. Ici, la courbe considérée est le cercle de rayon 1 centré au point $(3,0)$. Ce n'est donc pas un graphe de fonction, puisque plusieurs points de la courbe ont la même abscisse : connaître x ne donne pas y ! Par exemple, pour $t = \pm\frac{\pi}{2}$, on obtient les deux points de la courbe $(3,-1)$ et $(3,+1)$.



(c) On constate, en utilisant la formule $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = -1 - x(t)$, que

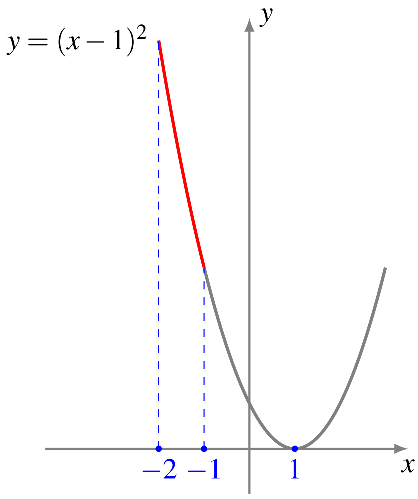
$$\begin{aligned} y(t) &= \sin^4 t + 4\sin^2 t + 4 = (-1 - x(t))^2 + 4(-1 - x(t)) + 4 \\ &= x(t)^2 - 2x(t) + 1 = (x(t) - 1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi les points (x,y) de la courbe vérifient l'équation $y = (x-1)^2$. De plus, lorsque le paramètre t décrit $\mathbb{R}$, $x(t) = \cos^2 t - 2$ décrit l'intervalle $[-2; -1]$. Finalement,

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathscr{C} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x(t) = \cos^2 t - 2 \\ y(t) = \sin^4 t + 4\sin^2 t + 4 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \in [-2; -1] \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

et la courbe est donc le graphe de la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} [-2;-1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-1)^2 \end{array}$$



Correction de **l'exercice 5463 ▲**

(a) Les expressions $x(t) = \cos^3 t$ et $y(t) = \sin^3 t$ sont bien définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

— Réduction de l'intervalle d'étude
Les fonctions x et y étant 2π-périodiques, il suffit de restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π pour obtenir l'intégralité du support de la courbe.

La fonction x est paire, la fonction y est impaire : on fait donc l'étude sur $[0;\pi]$, puis la courbe complète sera obtenue par symétrie par rapport à l'axe (Ox).

On constate que $x(\pi - t) = -x(t)$ et que $y(\pi - t) = y(t)$, par conséquent les points $M(\frac{\pi}{2} - t)$ et $M(\frac{\pi}{2} + t)$ sont symétriques par rapport à l'axe (Oy) : on restreint donc l'étude à $[0;\frac{\pi}{2}]$, puis on complète par symétrie par rapport à (Oy).
$\boxed{\text{Finalement, on fait l'étude sur } [0;\frac{\pi}{2}]}$ puis on complète en utilisant successivement les symétries par rapport à (Oy) et (Ox).

— Tableau de variations conjointes
Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{array}{ll} x(t) = \cos^3 t & y(t) = \sin^3 t \\ x'(t) = -3\sin t \cos^2 t & y'(t) = 3\cos t \sin^2 t \\ x'(t) < 0 \iff t \in]0;\frac{\pi}{2}[& y'(t) > 0 \iff t \in]0;\frac{\pi}{2}[\\ x'(t) = 0 \iff t \in \{0;\frac{\pi}{2}\} & y'(t) = 0 \iff t \in \{0;\frac{\pi}{2}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & & \frac{\pi}{2} \\ \hline x'(t) & 0 & - & 0 \\ \hline & 1 & & \\ x & & \searrow & \\ & & & 0 \\ \hline & & & 1 \\ y & & \nearrow & \\ & 0 & & \\ \hline y'(t) & 0 & + & 0 \end{array}$$

Cela signifie que lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ la courbe va vers la gauche (car $x(t)$ décroît) en montant (car $y(t)$ croît) du point $(1,0)$ à $(0,1)$.

— Points particuliers

— $M(\frac{\pi}{6}) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right) = (0.64\ldots, 0.125)$; la tangente est dirigée par $\left(x'(\frac{\pi}{6}), y'(\frac{\pi}{6})\right) = \left(-\frac{9}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = (-1.125, 0.64\ldots)$.

— $M(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = (0.35\ldots, 0.35\ldots)$; la tangente est dirigée par $\left(x'(\frac{\pi}{4}), y'(\frac{\pi}{4})\right) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = (-1.06\ldots, 1.06\ldots)$.

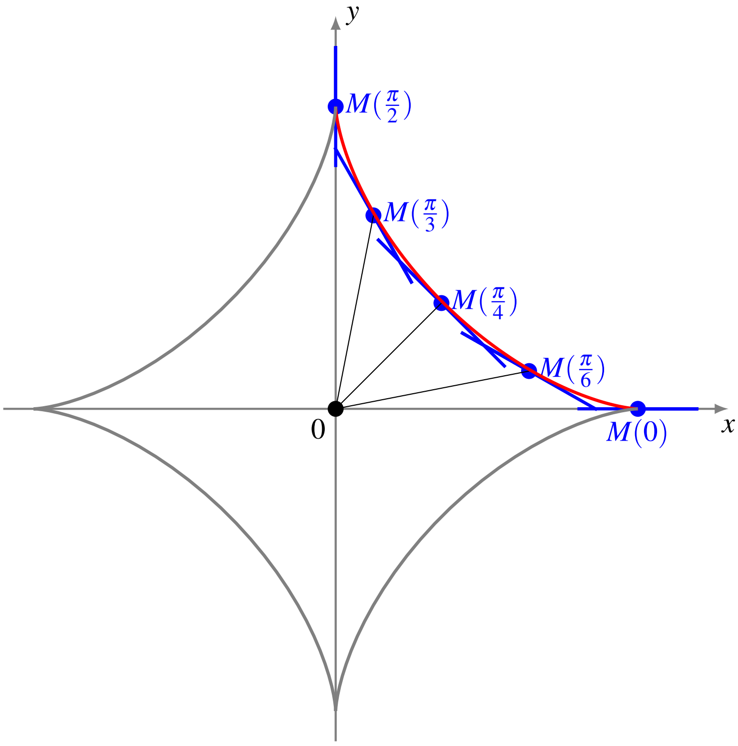
— $M(\frac{\pi}{3}) = \left(\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = (0.125, 0.64\ldots)$; la tangente est dirigée par $\left(x'(\frac{\pi}{3}), y'(\frac{\pi}{3})\right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{9}{8}\right) = (-0.64\ldots, 1.125)$.

— Étude des points singuliers

Le point $M(t)$ est singulier si $x'(t) = y'(t) = 0$, ce qui est le cas dans le domaine d'étude $[0; \frac{\pi}{2}]$ uniquement pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$. Pour déterminer la tangente au point $M(0)$ (de coordonnées cartésiennes $(1,0)$), on étudie la limite en 0 de

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t - 1}$$

Or $\sin^3 t \underset{0}{\sim} t^3$ et $\cos^3 t - 1 = (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))^3 - 1 \underset{0}{\sim} -3\frac{t^2}{2}$, donc le quotient est équivalent à $-\frac{2}{3}t$ et tend vers 0 en 0. Ainsi, $\mathscr{C}$ admet au point $M(0)$ une tangente, de pente nulle c'est-à-dire horizontale.



(b) Les expressions $x(t) = t - \text{th}\, t$ et $y(t) = \frac{1}{\text{ch}\, t}$ sont bien définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

— Réduction du domaine d'étude

Comme x est impaire et y paire, $\boxed{\text{on restreint l'étude à } \mathbb{R}^+}$ puis on complète par symétrie par rapport à l'axe (Oy).

— Tableau de variations conjointes

Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{array}{ll}
x(t) = t - \text{th}\, t & y(t) = \frac{1}{\text{ch}\, t} \\
x'(t) = \text{th}^2 t & y'(t) = -\frac{\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t} \\
x'(t) > 0 \Longleftrightarrow t > 0 & y'(t) < 0 \Longleftrightarrow t > 0 \\
x'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0 & y'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0
\end{array}$$

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$-$	

Cela signifie que le courbe va vers la droite et vers le bas lorsque t va de 0 à $+\infty$.

— Étude des points singuliers

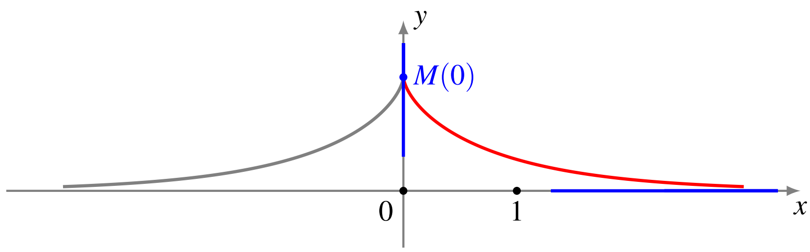
Le seul point singulier est $M(0)$, or $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \dfrac{1-\operatorname{ch} t}{t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}$ et

$$\frac{1-\operatorname{ch} t}{t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t} = \frac{-t^2/2 + o(t^2)}{t(1+t^2/2+o(t^2)) - (t+t^3/6+o(t^3))} \underset{0}{\sim} \frac{-t^2/2}{t^3/3}$$

et par conséquent $\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty$. Ainsi $\mathscr{C}$ possède une tangente verticale au point $M(0)$ de coordonnées cartésiennes $(0,1)$.

— Étude des branches infinies

Comme $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$.



(c) Les expressions $x(t) = t - \sin t$ et $y(t) = 1 - \cos t$ sont bien définies pour $t \in \mathbb{R}$.

— Réduction du domaine d'étude

On remarque que $x(t+2\pi) = 2\pi + x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$: le point $M(t+2\pi)$ se déduit de $M(t)$ par translation de vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$. Il suffit donc d'étudier la courbe sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$. La fonction x étant impaire et y paire, on restreint l'étude à $[0;\pi]$ puis on complète par symétrie par rapport à l'axe (Oy).

$\boxed{\text{Finalement, on fait l'étude sur } [0;\pi]}$ puis on complète en utilisant successivement la symétrie par rapport à (Oy), puis des translations successives de vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$.

— Tableau de variations conjointes

Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $t \in [0;\pi]$:

$$\begin{array}{ll}
x(t) = t - \sin t & y(t) = 1 - \cos t \\
x'(t) = 1 - \cos t & y'(t) = \sin t \\
x'(t) > 0 \iff t > 0 & y'(t) > 0 \iff 0 < t < \pi \\
x'(t) = 0 \iff t = 0 & y'(t) = 0 \iff t \in \{0;\pi\}
\end{array}$$

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	2
x	0	$\nearrow$	π
y	0	$\nearrow$	2
$y'(t)$	0	$+$	0

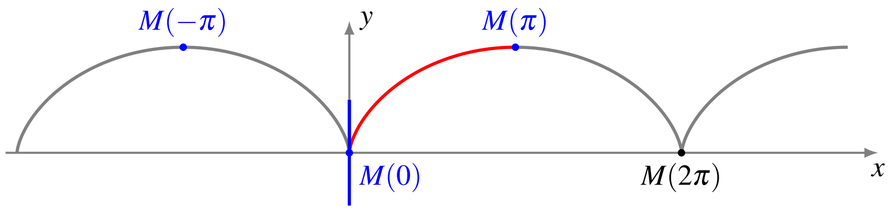
La courbe va vers la droite en montant lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

— Étude des points singuliers

Le point $M(0)$, qui est l'origine, est singulier. Pour étudier l'existence d'une tangente en ce point, on considère

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{1-\cos t}{t-\sin t} \underset{0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6}$$

et donc $\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$. Par conséquent, la courbe possède une tangente de pente verticale au point $M(0)$.



Correction de l'exercice 5464 ▲

(a) Soit $t>0$:

$$\begin{cases} x(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t}\ln(\frac{1}{t}) = -y(t) \\ y(\frac{1}{t}) = t\ln(\frac{1}{t}) = -x(t) \end{cases}$$

et par conséquent, le point $M(\frac{1}{t})$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y=-x$. On restreint l'étude à l'intervalle $]0;1]$, puis on obtiendra l'intégralité de la courbe par symétrie par rapport à la seconde bissectrice.

(b) Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1]$.

— Tableau de variations conjointes

Pour $t\in]0;1]$:

$$\begin{array}{ll} x(t) = t\ln t & y(t) = \frac{\ln t}{t} \\ x'(t) = 1+\ln t & y'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2} \\ x'(t)>0 \iff t>1/e & y'(t)>0 \\ x'(t)=0 \iff t=1/e & y'(t)\neq 0 \end{array}$$

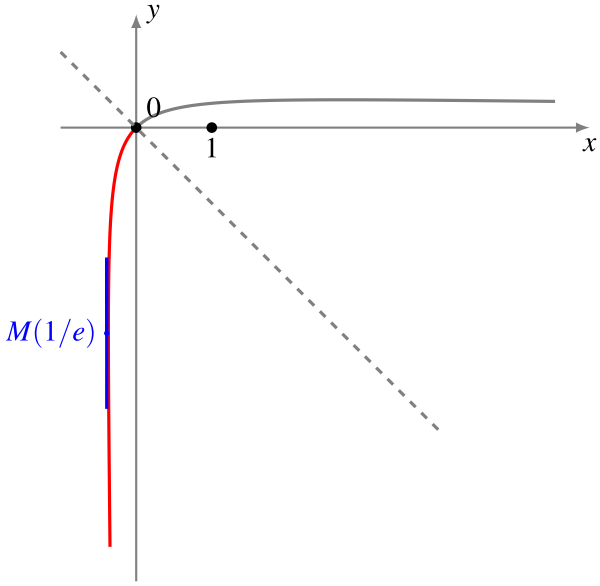
puisque $\frac{1}{e}<1<e$. On obtient donc le tableau suivant :

t	0		$1/e$		1
$x'(t)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
x	0	↘	$-1/e$	↗	0
y	$-\infty$	↗	$-e$	↗	0
$y'(t)$	$+\infty$	$+$	$2e^2$	$+$	1

Il n'y a pas de point singulier.

— Étude des branches infinies

Comme $x(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et $y(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty$, l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$.



Correction de l'exercice 5465 ▲

Les expressions $x(t) = \frac{1}{t^2-t}$ et $y(t) = \frac{t}{t^2-1}$ sont bien définies, et de classe $\mathscr{C}^1$ en dehors de $t = 0$ et $t = \pm 1$. Le domaine de définition est donc

$$\mathscr{D} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

La courbe possède un point double si elle se recoupe : on cherche donc deux paramètres $t_1, t_2 \in \mathscr{D}$ tels que $t_1 \neq t_2$ et $M = M(t_1) = M(t_2)$, *i.e.*

$$\begin{cases} \frac{1}{t_1^2-t_1} = \frac{1}{t_2^2-t_2} \\ \\ \frac{t_1}{t_1^2-1} = \frac{t_2}{t_2^2-1} \end{cases} \iff \begin{cases} t_1^2 - t_1 = t_2^2 - t_2 \\ t_1(t_2^2-1) - t_2(t_1^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (t_1 - t_2)(t_1 + t_2 - 1) = 0 \\ (t_2 - t_1)(t_1 t_2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Comme on cherche $t_1 \neq t_2$, le système obtenu est équivalent à $\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = -1 \end{cases}$, autrement dit à un système du type somme-produit : cela signifie que t_1 et t_2 doivent être les deux racines (distinctes) de $X^2 - X - 1$, c'est-à-dire $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (qui sont bien dans $\mathscr{D}$). On a donc un seul point double, c'est

$$M\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = M\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

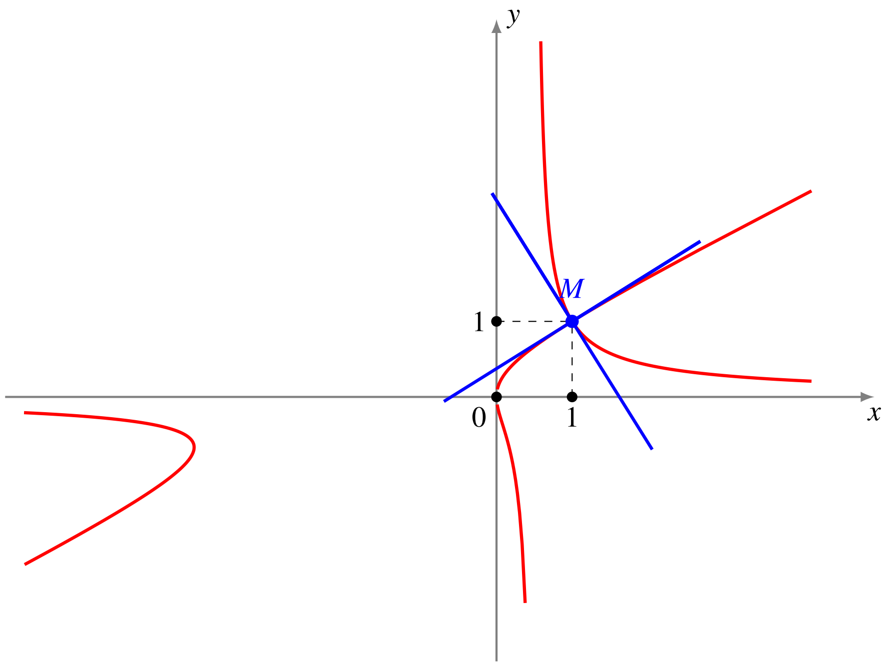
de coordonnées cartésiennes $(1,1)$. Pour déterminer les tangentes en ce point, on calcule le vecteur dérivé :

$$\vec{V}(t) = \begin{cases} x'(t) = \frac{1-2t}{(t^2-t)^2} \\ \\ y'(t) = \frac{-1-t^2}{(t^2-1)^2} \end{cases}$$

En remplaçant, on obtient

$$\vec{V}(t_1) = \begin{pmatrix} x'(t_1) \\ y'(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \frac{-5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}(t_2) = \begin{pmatrix} x'(t_2) \\ y'(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \frac{-5+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Les deux tangentes à la courbe au point de coordonnées $(1,1)$ sont donc dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{V}(t_1)$ et $\vec{V}(t_2)$, dont on vérifie en faisant le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x'(t_1)x'(t_2) + y'(t_1)y'(t_2) = 0$ qu'ils sont orthogonaux.



Correction de l'exercice 5466 ▲

Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Un point $M(t)$ de la courbe est singulier si $x'(t) = y'(t) = 0$, or

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{4(t^2+1)-2t(4t-3)}{(t^2+1)^2} = \frac{-2(2t^2-3t-2)}{(t^2+1)^2} \\ \\ y'(t) = \frac{2(t^2+2)-2t(2t-1)}{(t^2+2)^2} = \frac{-2(t^2-t-2)}{(t^2+2)^2} \end{cases}$$

Ainsi $M(t)$ est singulier si et seulement si $\begin{cases} 2t^2-3t-2=0 \\ t^2-t-2=0 \end{cases}$. Ce système admet une unique solution $t=2$, correspondant au point $M(2)$ de coordonnées $(1, \frac{1}{2})$.

Le vecteur dérivé est nul au point $M(2)$; pour obtenir l'allure de la courbe au voisinage de ce point, il faut donc effectuer un développement limité à un ordre assez grand pour trouver deux termes non constants non nuls. Ici l'ordre 3 suffira, on pose $t = 2+h$ pour simplifier (ainsi "t proche de 2" devient "h proche de 0") :

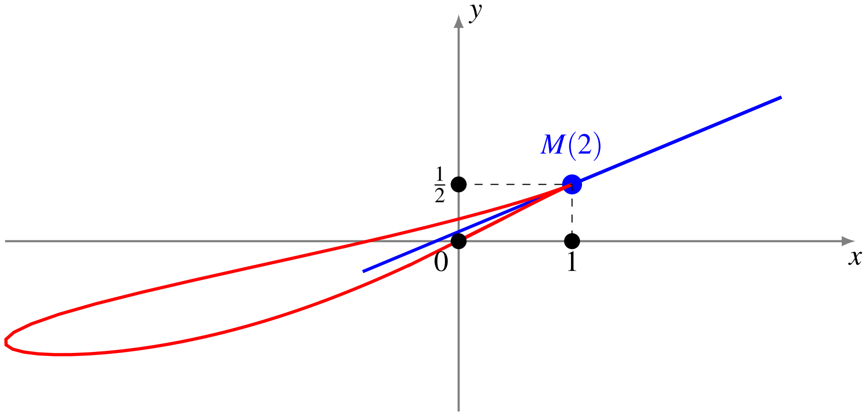
$$\begin{aligned} x(2+h) &= \frac{4(2+h)-3}{(2+h)^2+1} = \frac{5+4h}{5+4h+h^2} = 1 - \frac{1}{5}h^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{4h+h^2}{5}} \\ &= 1 - \frac{1}{5}h^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{4h+h^2}{5}\right) + o\left(\frac{4h+h^2}{5}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{5}h^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}h + o(h)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{5}h^2 + \frac{4}{25}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(2+h) &= \frac{2(2+h)-1}{(2+h)^2+2} = \frac{3+2h}{6+4h+h^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{4h+h^2}{6}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{4h+h^2}{6}\right) + o\left(\frac{4h+h^2}{6}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}h + o(h)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{18}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

On a donc le développement limité vectoriel suivant :

$$M(2+h) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \cdot h^2 + \begin{pmatrix} \frac{4}{25} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix} \cdot h^3 + o(h^3)$$

On vérifie que le terme constant du développement limité correspond bien à $\begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \end{pmatrix}$ et que le terme linéaire, qui vaut $\begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} \cdot h$, est nul. Les coefficients de h^2 et h^3 sont des vecteurs non nuls, $M(2)$ est donc un point de rebroussement de première espèce ($p = 2$, $q = 3$). La tangente est dirigée par le premier vecteur non nul, coefficient de h^k (avec $k \geqslant 1$), donc ici le coefficient de h^2 ; ainsi la tangente en $M(2)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.



Correction de **l'exercice 5467 ▲**

Les expressions $x(t) = t + \frac{4}{t}$ et $y(t) = \frac{t}{3} + 2 + \frac{3}{t+1}$ sont bien définies pour $t \in \mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$.

(a) Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$. Soit $t \in \mathscr{D}$:

$$x(t) = t + \frac{4}{t} \qquad y(t) = \frac{t}{3} + 2 + \frac{3}{t+1}$$
$$x'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} \qquad y'(t) = \frac{1}{3} - \frac{3}{(t+1)^2}$$

$$x'(t) > 0 \iff |t| > 2 \qquad y'(t) > 0 \iff |t+1| > 3 \iff \begin{cases} t > 2 \\ \text{ou} \\ t < -4 \end{cases}$$

$$x'(t) = 0 \iff t \in \{-2;2\} \qquad y'(t) = 0 \iff t \in \{-4;2\}$$

t	$-\infty$		-4		-2		-1		0		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	$\frac{11}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	

(b) Le tableau de variations conjointes indique :

— $t = -4$: tangente horizontale, au point de coordonnées $(-5, -\frac{1}{3})$;

— $t=-2$: tangente verticale, au point de coordonnées $(-4,-\frac{5}{3})$;
— $t=-1$: une asymptote verticale, d'équation $x=-5$;
— $t=0$: une asymptote horizontale, d'équation $y=5$;
— $t=2$: il y a un point singulier en $(4,\frac{11}{3})$ (voir après).

Il reste à étudier le comportement quand $t\to\pm\infty$:

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{t^3+16t^2+6t}{3(t^3+t^2+4t+4)}\xrightarrow[t\to\pm\infty]{}\frac{1}{3}$$

puis $y(t)-\frac{1}{3}x(t)\xrightarrow[t\to\pm\infty]{}2$. La courbe a donc pour asymptote, quand $t\to-\infty$ et quand $t\to+\infty$, la même droite d'équation $y=\frac{1}{3}x+2$.

(c) On constate sur le tableau de variation qu'il n'y a qu'un seul point singulier, correspondant au paramètre $t=2$. Pour connaître l'allure de la courbe au voisinage du point $M(2)$, on fait un développement limité de x et y au voisinage de $t=2$. Comme ici x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ et d'expressions assez simples, on peut directement appliquer la formule de Taylor-Young :

$$\begin{cases} x(t)=x(2)+x'(2)\cdot(t-2)+\frac{1}{2}x''(2)\cdot(t-2)^2+\frac{1}{6}x'''(2)\cdot(t-2)^3+o((t-2)^3)\\ y(t)=y(2)+y'(2)\cdot(t-2)+\frac{1}{2}y''(2)\cdot(t-2)^2+\frac{1}{6}y'''(2)\cdot(t-2)^3+o((t-2)^3)\end{cases}$$

On sait déjà que $x(2)=4$, $y(2)=\frac{11}{3}$ et $x'(2)=y'(2)=0$. De plus $x''(t)=\frac{8}{t^3}$, $x'''(t)=\frac{-24}{t^4}$ et $y''(t)=\frac{6}{(t+1)^3}$, $y'''(t)=\frac{-18}{(t+1)^4}$, ce qui donne

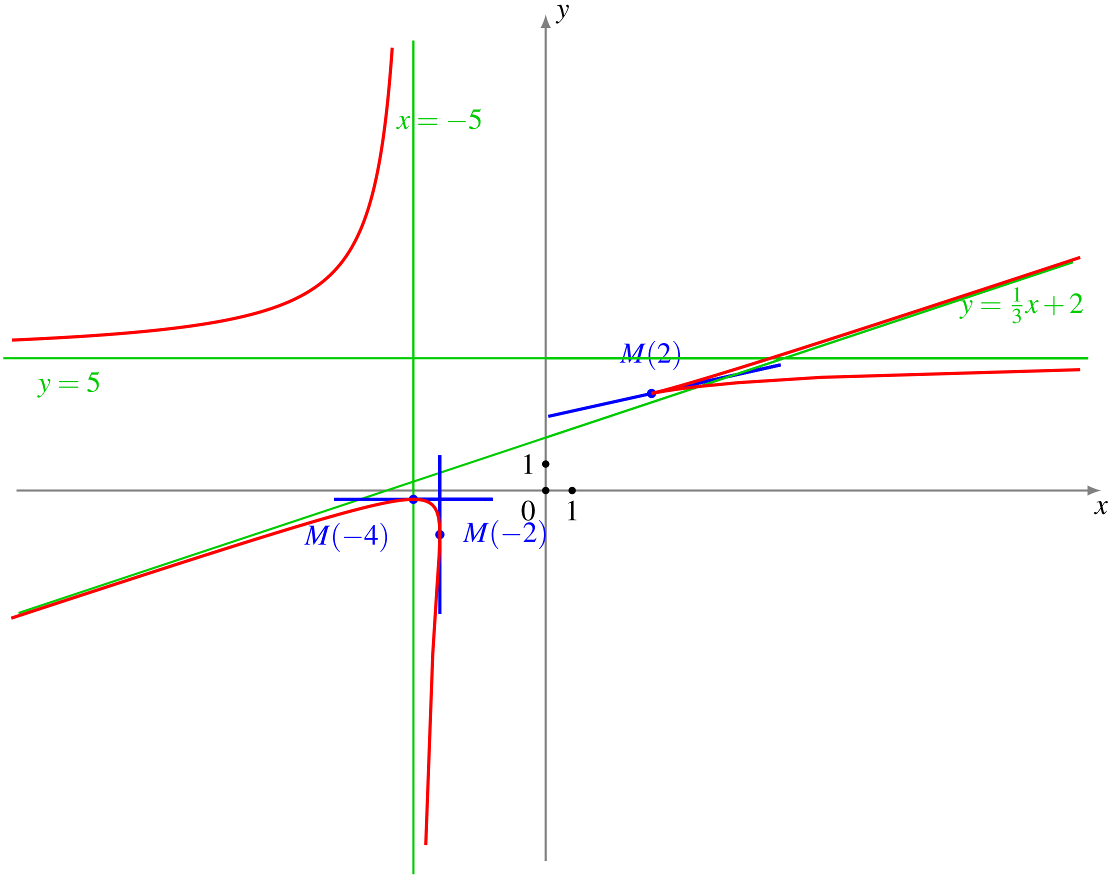
$$M(t)=\begin{pmatrix}4\\ \frac{11}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot(t-2)^2+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ \frac{-1}{27}\end{pmatrix}\cdot(t-2)^3+o((t-2)^3)$$

C'est un point de rebroussement de première espèce. L'équation (sous forme paramétrée) de la tangente $T_{M(2)}$ s'obtient en tronquant le développement limité :

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in T_{M(2)}\Longleftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ \frac{11}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot\lambda$$

En éliminant le paramètre λ, on récupère une équation cartésienne

$$T_{M(2)}:\ y=\frac{11}{3}+\frac{1}{9}\cdot 2(x-4)=\frac{2}{9}x+\frac{25}{9}$$



Correction de **l'exercice 5468 ▲**

(a) Commençons par trouver le vecteur tangent à la courbe au point $M(t)$. Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $x'(t) = 6t$, $y'(t) = 12t^2$. Si $t \neq 0$, le vecteur tangent à la courbe au point $M(t)$ est donc le vecteur dérivé $\begin{pmatrix} 6 \\ 12t \end{pmatrix}$. Si $t = 0$, le vecteur dérivé est nul et il faut dériver encore une fois pour obtenir un vecteur non nul $\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui est donc un vecteur directeur de la tangente au point $M(0)$. Finalement, pour tout t, la tangente au point $M(t)$ est dirigée par le vecteur

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12t \end{pmatrix}$$

(b) — Une droite D est tangente à $\mathscr{C}$ s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $M(t) \in D$ et $\vec{V}(t)$ soit un vecteur directeur de D.
— Une droite D est orthogonale à $\mathscr{C}$ s'il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $M(t') \in D$ et $\vec{V}(t')$ soit un vecteur orthogonal à la droite D.

(c) On cherche donc à quelle condition $\vec{V}(t)$ et $\vec{V}(t')$ sont orthogonaux :

$$\vec{V}(t) \cdot \vec{V}(t') = 0 \Longleftrightarrow 36 + 144tt' = 0 \Longleftrightarrow tt' = -\frac{1}{4}$$

ce qui exclut le paramètre $t = 0$.

(d) Soit donc $t \neq 0$, et $T(t)$ la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(t)$:

$$T(t) = \left\{M(t) + \lambda \vec{V}(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left| \begin{array}{l} x = 3t^2 + 6\lambda \\ y = 4t^3 + 12\lambda t \end{array} \right. \right\}$$

En éliminant λ, on trouve que $T(t)$ a pour équation cartésienne

$$y = 4t^3 + 2t(x - 3t^2) = 2tx - 2t^3$$

(e) On sait déjà que $T(t)$ et $T(-\frac{1}{4t})$ sont perpendiculaires. Il reste à voir si $T(t)$ coupe bien $\mathscr{C}$ au point $M(-\frac{1}{4t})$:

$$\begin{aligned} M\left(-\frac{1}{4t}\right) \in T(t) &\iff 4\left(-\frac{1}{4t}\right)^3 = 2t \cdot 3\left(-\frac{1}{4t}\right)^2 - 2t^3 \\ &\iff 32t^6 - 6t^2 - 1 = 0 \\ &\iff X = t^2 \quad \text{et} \quad X^3 - \frac{3}{16}X - \frac{1}{32} = 0 \end{aligned}$$

L'étude des variations du polynôme $X^3 - \frac{3}{16}X - \frac{1}{32}$ montre qu'il admet $-\frac{1}{4}$ comme racine (double), il se factorise donc sous la forme $X^3 - \frac{3}{16}X - \frac{1}{32} = (X+\frac{1}{4})^2(X-\frac{1}{2})$ et sa seule racine positive est $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} M\left(-\frac{1}{4t}\right) \in T(t) &\iff X = t^2 \quad \text{et} \quad X \in \left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\} \\ &\iff t^2 = \frac{1}{2} \iff t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(f) Ainsi $T(\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $T(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ sont les seules droites à la fois tangentes et orthogonales à $\mathscr{C}$:

— La droite

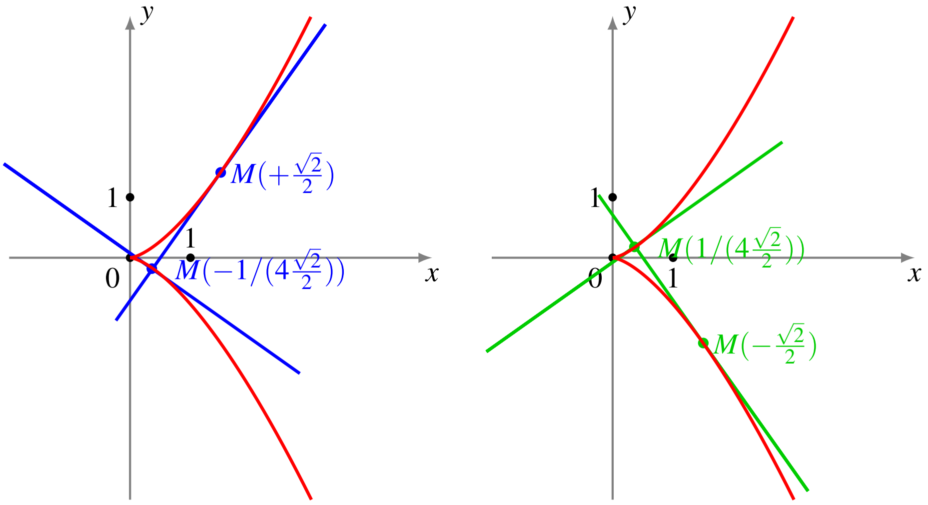
$$T(\frac{\sqrt{2}}{2}) : \; y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

est tangente au point $M(\frac{\sqrt{2}}{2})$ et orthogonale au point $M(-1/(4\frac{\sqrt{2}}{2}))$.

— La droite

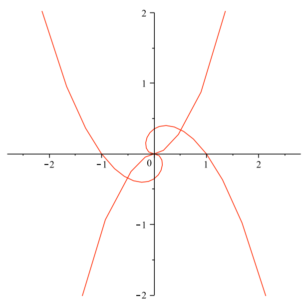
$$T(-\frac{\sqrt{2}}{2}) : \; y = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

est tangente au point $M(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ et orthogonale au point $M(1/(4\frac{\sqrt{2}}{2}))$.

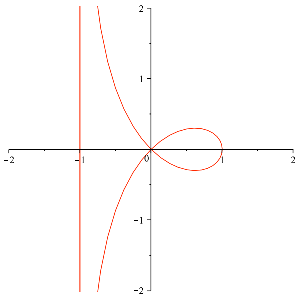


Correction de l'exercice 5480 ▲

(a)

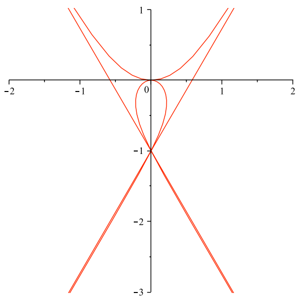


(b)



aire de la boucle : $2-\dfrac{\pi}{2}$

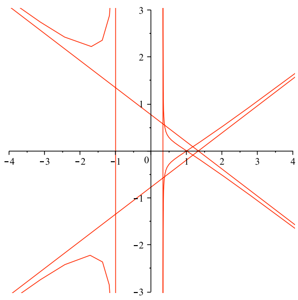
(c)



asymptotes : $y=\pm x\sqrt{3}-1$

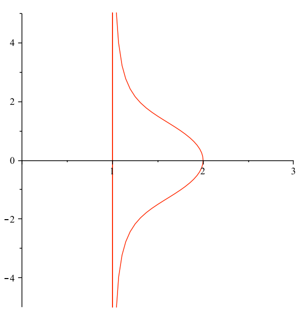
la courbe traverse ses asymptotes au point de concours

(d)

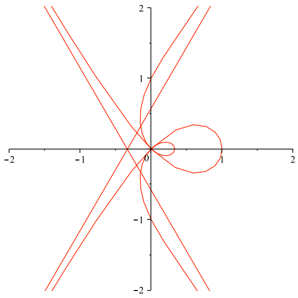


asymptotes : $x \pm y\sqrt{3}=\dfrac{4}{3}$

(e)

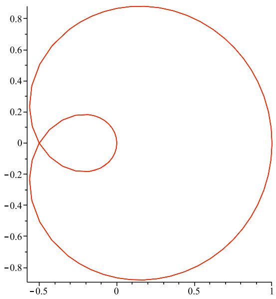


(f)

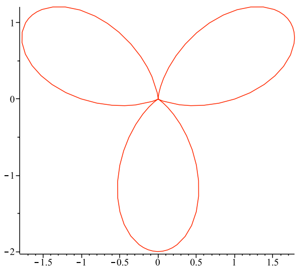


asymptotes : $3x \pm y\sqrt{3} = -1$

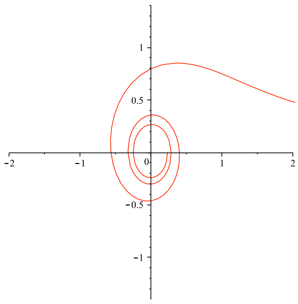
(g)



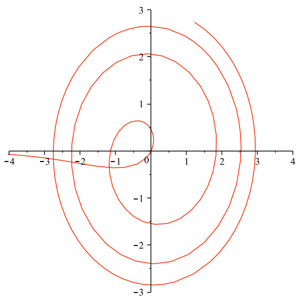
(h)



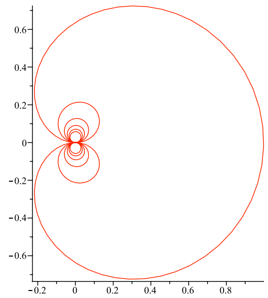
(i)



(j)



(k)



Correction de l'exercice 5481 ▲

Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché.

Tout d'abord, pour tout réel θ, $1+\sin(2\theta)\geqslant 0$, $1-\sin(2\theta)\geqslant 0$ puis $\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}>0$, car $\sin(2\theta)$ ne peut valoir simultanément 1 et -1. La fonction $r\mapsto r(\theta)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$, clairement 2π-périodique.

Ainsi,

$$M(\theta+2\pi)=[r(\theta+2\pi),\theta+2\pi]=[r(\theta),\theta+2\pi]=M(\theta).$$

On obtient donc l'ensemble complet quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi,\pi]$ par exemple.

La fonction $r\mapsto r(\theta)$ est plus paire. Par suite,

$$M(-\theta)=[r(-\theta),-\theta]=[r(\theta),-\theta]=s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta\in[0,\pi]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

Pour $\theta\in[0,\pi]$, on a clairement $r(\pi-\theta)=r(\theta)$. Par suite,

$$M(\pi-\theta)=[r(\pi-\theta),\pi-\theta]=[r(\theta),\pi-\theta]=s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Oy) puis par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

Pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, on a clairement $r(\frac{\pi}{2}-\theta)=r(\theta)$. Par suite, en notant (Δ) la droite d'équation $y=x$,

$$M(\frac{\pi}{2}-\theta)=[r(\frac{\pi}{2}-\theta),\frac{\pi}{2}-\theta]=[r(\theta),\frac{\pi}{2}-\theta]=s_{(\Delta)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Δ) puis par symétrie orthogonale d'axe (Oy) et enfin par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

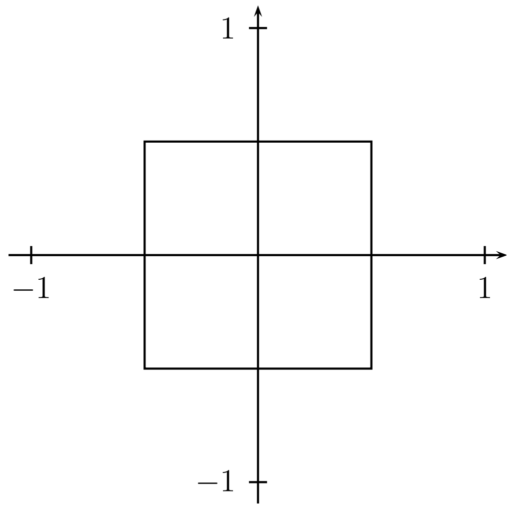
Maintenant, pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}}&=\frac{1}{\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}+\sqrt{1-\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}+\sqrt{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)+\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}\\&=\frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-\theta))}=\frac{1}{2\cos\theta}.\end{aligned}$$

En notant x et y les coordonnées d'un point M, on a alors

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\cos\theta} \Leftrightarrow r\cos(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

D'où le graphique :



Correction de [l'exercice 5482 ▲]

(a) (**Lemniscate de** BERNOULLI.) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$. **Domaine d'étude.** Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta \mapsto \sqrt{\cos(2\theta)}$. • $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$ et pour $\theta \in D$,

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$. • $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ et pour $\theta \in D$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox). • $\theta \in D \Leftrightarrow \pi - \theta \in D$ et pour $\theta \in D$,

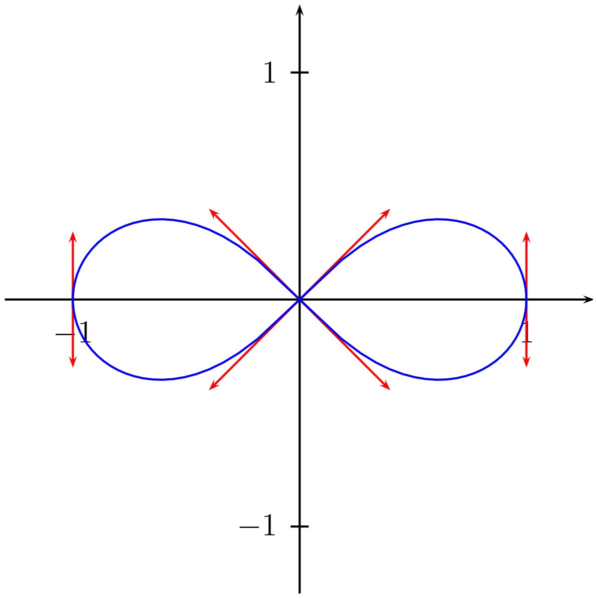
$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta), \pi - \theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis d'axe (Ox). Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in D \Leftrightarrow \cos(2\theta) \geqslant 0 \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On étudie donc la courbe sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. **Variations et signe de r.** La fonction r est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{4}$. **Etude en $\frac{\pi}{4}$.** $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = O$ et donc la tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est la droite passant par O et d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ ou encore la droite d'équation $y = x$.

Etude en 0. $M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0)$. Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$,

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\overrightarrow{u}_\theta + \sqrt{\cos(2\theta)}\overrightarrow{v}_\theta \text{ et donc } \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(0) = \overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{j}.$$

$M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0)$ et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$



(b) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. **Domaine d'étude.** • Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M(\theta + 6\pi) = [r(\theta + 6\pi), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi, 3\pi]$.
• Pour $\theta \in [-3\pi, 3\pi]$,

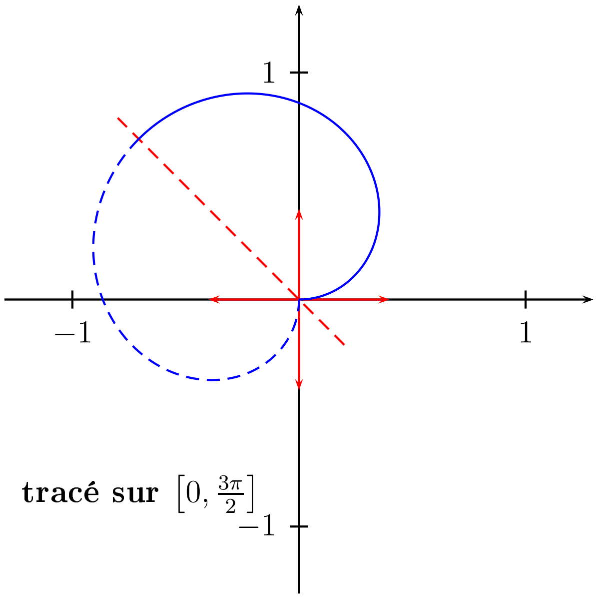
$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [-r(\theta), -\theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

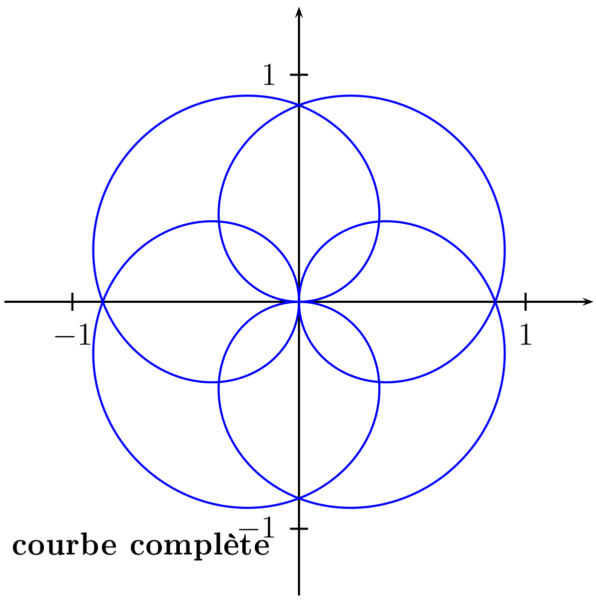
On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, 3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy). • Pour $\theta \in [0, 3\pi]$, $M(3\pi - \theta) = [r(3\pi - \theta), 3\pi - \theta] = [-r(\theta), 3\pi - \theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis d'axe (Oy).
• Pour $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, $M\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \left[r\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = \left[r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = s_{y=-x}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axes la droite d'équation $y = -x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy).

• **Remarque.** La fonction r admet 3π pour plus petite période strictement positive. Pourtant, on n'obtient pas la courbe complète quand θ décrit $[0, 3\pi]$ car 3π ne fournit pas un nombre entier de tours. Plus précisément,

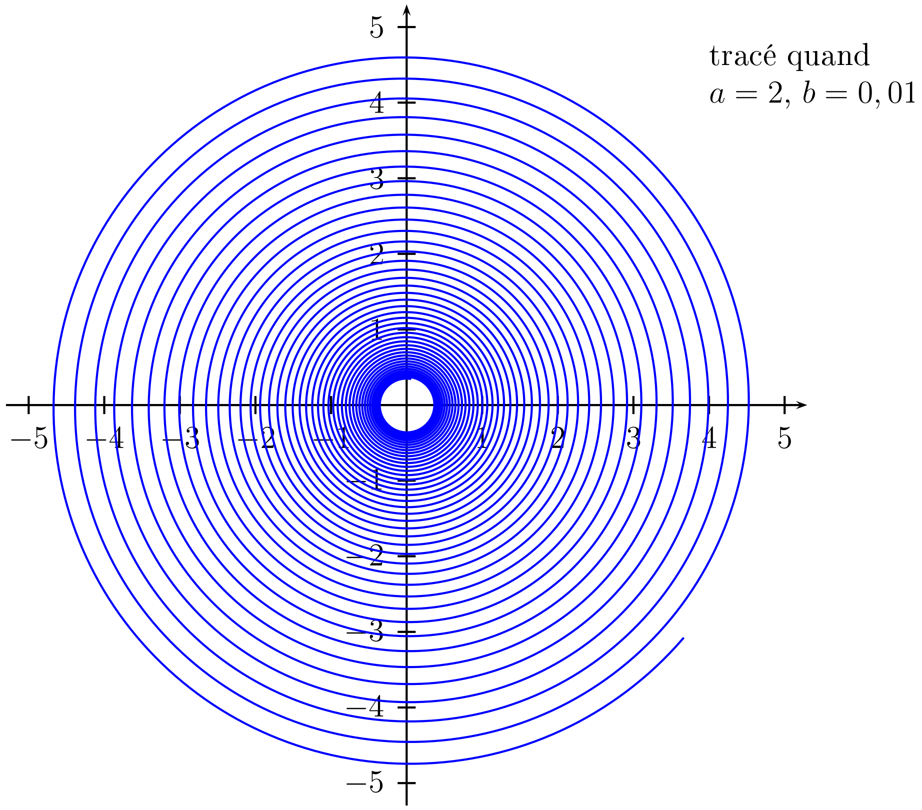
$$M(\theta + 3\pi) = [r(\theta + 3\pi), \theta + 3\pi] = [r(\theta), \theta + \pi] = s_O(M(\theta)).$$

Variations et signe de r. La fonction r est strictement positive sur $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right]$ et s'annule en 0. La fonction r est strictement croissante sur $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. • $M(0)$ est le point O. La tangente en $M(0)$ est la droite passant par O d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox).



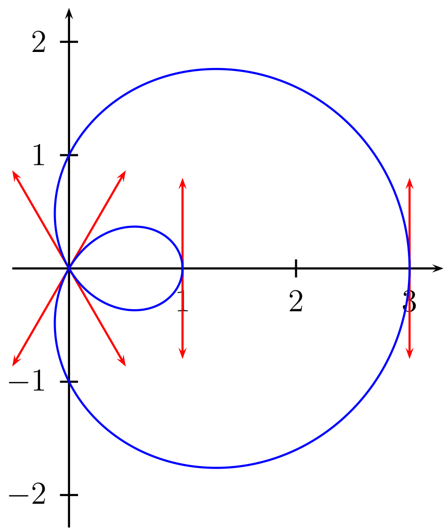


(c) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = ae^{b\theta}$. L'étude est très brève. La fonction $r\ :\ \theta \mapsto ae^{b\theta}$ est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Tout en tournant, on ne cesse de s'écarter de l'origine : la courbe est une spirale.



(d) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = 2\cos(\theta) + 1$.

Domaine d'étude. • Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$. • Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox). **Variations et signe de r.** La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. La fonction r est strictement positive sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ et s'annule en $\frac{2\pi}{3}$. Donc la fonction $\theta \mapsto OM(\theta) = |r(\theta)|$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$. • $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ est le point O. La tangente en $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ est la droite passant par O d'angle polaire $\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire la droite d'équation $y = -\sqrt{3}x$. • Par symétrie par rapport à (Ox), les tangentes en $M(0)$ et $M(\pi)$ sont parrallèles à (Oy).



(e) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. **Domaine d'étude.** Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta \mapsto \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. • $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 6\pi \in D$ et $M(\theta + 6\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi, 3\pi]$.

• $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ et $M(-\theta) = s_{(Oy)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, 3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy). • $\theta \in D \Leftrightarrow 3\pi - \theta \in D$ et $M(3\pi - \theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis par réflexion d'axe (Oy). • $\theta \in D \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \theta \in D$ et

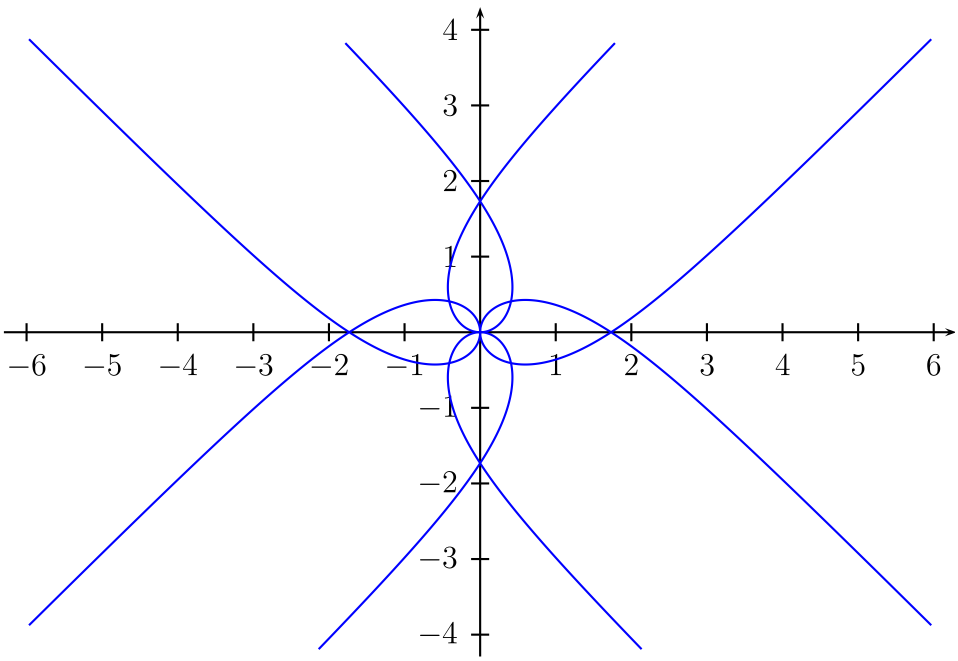
$$M\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \left[-r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = \left[r(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta\right] = s_{y=x}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe la droite d'équation $y = x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy). • Pour $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $r(\theta)$ existe si et seulement si $\theta \neq \frac{3\pi}{4}$. On étudie donc sur $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right[$.
Variations et signe de r. La fonction r est strictement croissante sur $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right[$, strictement positive sur $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$ et s'annule en 0.
• La tangente en $M(0) = O$ est la droite passant par O et d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox).
• **Etude quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$.** Quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$ par valeurs inférieures, $r(\theta)$ tend vers $+\infty$. la courbe admet donc une direction asymptotique d'angle polaire $\frac{3\pi}{4}$ ou encore d'équation $y = -x$. Recherchons une éventuelle droite asymptote. Pour cela, étudions $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{3\pi}{4} \\ \theta < \frac{3\pi}{4}}} r(\theta) \sin\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Posons $h = \frac{3\pi}{4} - \theta$ ou encore $\theta = \frac{3\pi}{4} - h$.

$$r(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2h}{3}\right) \sin(-h) = -\mathrm{cotan}\, h \sin h = -\cos h \to -1.$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D) quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$. De plus,

$$M(x,y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{\frac{3\pi}{4}} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = -1 \Leftrightarrow y = -x + \sqrt{2}.$$



Correction de l'exercice 5483 ▲

Domaine d'étude. Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta \mapsto \frac{2\cos\theta + 1}{2\sin\theta + 1}$. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$ et $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$. Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $2\sin\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$. On étudie donc la courbe sur $[-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$. **Signe de r.**

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos\theta+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2\sin\theta+1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de r		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Variations de r. La fonction r est dérivable sur $[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}$ et pour $\theta\in[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}$

$$r'(\theta)=\frac{-2\sin\theta(2\sin\theta+1)-2\cos\theta(2\cos\theta+1)}{(2\sin\theta+1)^2}=\frac{-4-2\cos\theta-2\sin\theta}{(2\sin\theta+1)^2}=\frac{-4-2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(2\sin\theta+1)^2}<0.$$

La fonction r est strictement décroissante sur $\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right[$, sur $\left]-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]-\frac{\pi}{6},\pi\right]$. **Etude quand θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$.** $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ x<-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ x>-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une direction asymptotique d'angle polaire $-\frac{5\pi}{6}$ ou encore d'équation $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$. Etudions maintenant l'existence d'une éventuelle droite asymptote et pour cela étudions $\lim_{\theta\to-\frac{5\pi}{6}} r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)$. On pose $h=\theta+\frac{5\pi}{6}$ ou encore $\theta=-\frac{5\pi}{6}+h$ de sorte que θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$ si et seulement si h tend vers 0. Quand h tend vers 0

$$r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}{2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}\sin h=\frac{(1-\sqrt{3}\cos h)+\sin h}{-\sqrt{3}\sin h+(1-\cos h)}\sin h\sim\frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}h}\times h=1-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D_1) quand θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$. De plus

$$M(x,y)\in(D_1)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{-\frac{5\pi}{6}}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Etude quand θ tend vers $-\frac{\pi}{6}$. $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ x<-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une direction asymptotique d'angle polaire $-\frac{\pi}{6}$ ou encore d'équation $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$. On pose ensuite $h=\theta+\frac{\pi}{6}$. Quand h tend vers 0

$$r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}{2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}\sin h=\frac{(1+\sqrt{3}\cos h)+\sin h}{\sqrt{3}\sin h+(1-\cos h)}\sin h\sim\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}h}\times h=1+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D_2) quand θ tend vers $-\frac{\pi}{6}$. De plus

$$M(x,y)\in(D_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{-\frac{\pi}{6}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tableau de variation de r.

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$r'(\theta)$		$-$	$\Vert$		$-$		$\Vert$		$-$		
r	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

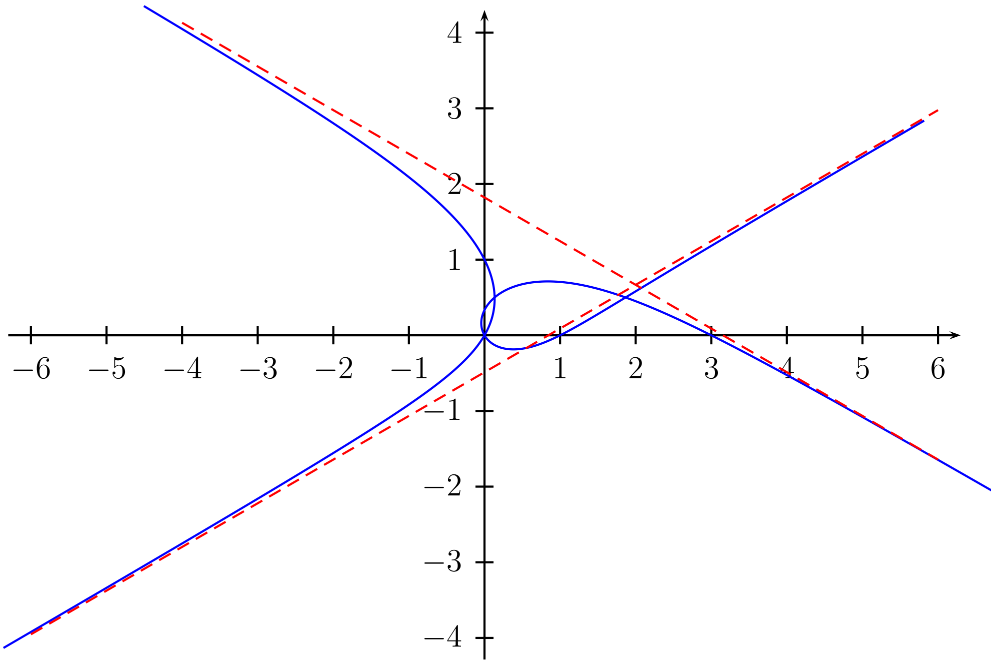
Recherche des points multiples. Soit $(\theta_1,\theta_2)\in\left([-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}\right)^2$ tel que $\theta_1<\theta_2$. On suppose de plus que $\theta_1\notin\left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ et $\theta_1\notin\left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ de sorte que $M(\theta_1)\neq O$ et $M(\theta_2)\neq O$.

$$\begin{aligned}M(\theta_1)=M(\theta_2)&\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ \theta_2=\theta_1+2k\pi\text{ et }r(\theta_2)=r(\theta_1))\text{ ou }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ \theta_2=\theta_1+\pi+2k\pi\text{ et }r(\theta_2)=-r(\theta_1))\\&\Leftrightarrow\theta_1\in[-\pi,0],\ \theta_2=\theta_1+\pi\text{ et }r(\theta_2)=-r(\theta_1)\\&\Leftrightarrow\theta_1\in[-\pi,0],\ \theta_2=\theta_1+\pi\text{ et }\frac{-2\cos(\theta_1)+1}{-2\sin(\theta_1)+1}=-\frac{2\cos(\theta_1)+1}{2\sin(\theta_1)+1}.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $\theta \in [-\pi, 0] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

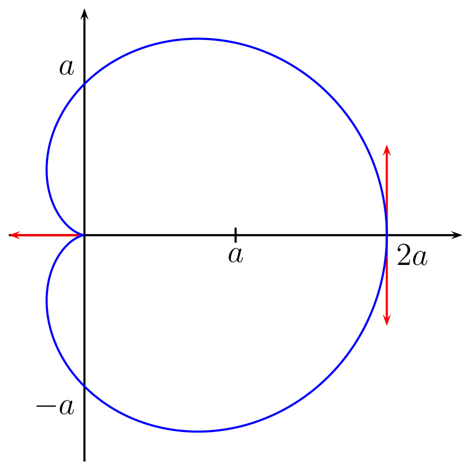
$$\begin{aligned}\frac{-2\cos(\theta)+1}{-2\sin(\theta)+1} = -\frac{2\cos(\theta)+1}{2\sin(\theta)+1} &\Leftrightarrow -4\cos(\theta)\sin(\theta)+1 = 4\cos(\theta)\sin(\theta)-1 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\theta \in \frac{\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 2\theta \in \frac{5\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{12}+\pi\mathbb{Z} \text{ ou } \theta \in \frac{5\pi}{12}+\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta \in \left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, les points doubles distincts de l'origine sont $M\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = M\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $M\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = M\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Sinon, $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = M\left(\frac{2\pi}{3}\right) = O$.



Correction de **l'exercice 5484 ▲**

(a) **Domaine d'étude.** La fonction r est 2π-périodique et paire. Donc on étudie et on construit la courbe quand θ décrit $[0, \pi]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox). **Variations et signe de r.** La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, strictement positive sur $]0, \pi]$ et s'annule en π. **Etude pour $\theta = \pi$.** La tangente en $M(\pi) = O$ est la droite passant par O d'angle polaire π c'est-à-dire l'axe (Ox). Par symétrie par rapport à (Ox), le point $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce.



(b) Soient $\theta \in [-\pi, \pi]$ puis $M = O + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta$ le point de $\mathscr{C}$ de paramètre θ.

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} &= -a\sin\theta\overrightarrow{u}_\theta + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right)\\ &= 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right) = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Longueur ℓ de la cardioïde. On a $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = \left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (pour $\theta \in [-\pi, \pi]$) et donc

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| d\theta = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\theta/2)\,d\theta = 4a\left[\sin(\theta/2)\right]_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

$$\boxed{\text{La cardioïde d'équation polaire } r = a(1+\cos\theta),\ a > 0, \text{ a pour longueur } 8a.}$$

Développée. Le point $M(\theta)$ est régulier si et seulement si $\theta \neq \pm\pi$. Dans ce cas,

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et aussi } \overrightarrow{\tau}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}$$

En notant $\alpha(\theta)$ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\tau}(\theta)\right)$, on peut prendre $\alpha(\theta) = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$. En notant $R(\theta)$ le rayon de courbure au point $M(\theta)$,

$$R(\theta) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

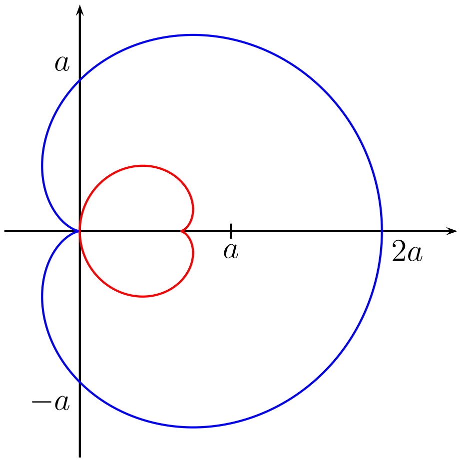
Ensuite, $\overrightarrow{n}(\theta) = r_{\pi/2}\left(\overrightarrow{\tau}(\theta)\right) = -\overrightarrow{u}_{3\theta/2}$ et donc, en notant $\Omega(\theta)$ le centre de courbure au point $M(\theta)$,

$$\begin{aligned}\Omega(\theta) &= M(\theta) + R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta)\\ &= O + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta - \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{3\theta/2}\\ &= O + a(1+\cos\theta)\left(\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}\right) - \frac{4}{3}a\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{i} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{j}\right)\\ &= O + a\left[\left(\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \frac{2}{3}(\cos(\theta) + \cos(2\theta))\right)\overrightarrow{i} + \left(\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{2}{3}(\sin(\theta) + \sin(2\theta\right.\right.\\ &= O + a\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos^2(\theta)\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{3}\sin(\theta) - \frac{1}{3}\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\overrightarrow{j}\right]\\ &= O + \frac{2a}{3}\overrightarrow{i} + \frac{a}{3}(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta\end{aligned}$$

Notons Γ la développée cherchée. On a $\Gamma = t \circ h(\mathscr{C}_1)$ où t est la translation de vecteur $\frac{2a}{3}\overrightarrow{i}$, h est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$ et $\mathscr{C}_1$ la courbe d'équation polaire $r = a(1-\cos\theta)$. Maintenant, en notant r la fonction $\theta \mapsto a(1+\cos\theta)$ et r_1 la fonction $\theta \mapsto a(1-\cos\theta)$,

$$[r_1(\theta+\pi), \theta+\pi)] = [a(1+\cos\theta), \theta+\pi] = s_O([r(\theta), \theta)]).$$

La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc la symétrique par rapport à O de la courbe $\mathscr{C}$. En résumé, la développée de $\mathscr{C}$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la transformation $t \circ h \circ s_O$: c'est encore une cardioïde.



Correction de **l'exercice 5485 ▲**

Soient $(R,\theta) \in \mathbb{R}^2$ puis M le point du plan dont un couple de coordonnées polaires est $[r,\theta]$.

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow x^2(x^2+y^2)-(y-x)^2 = 0 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta \times r^2 - (r\sin\theta - r\cos\theta)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2[r^2\cos^2\theta - (\sin\theta-\cos\theta)^2] = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r^2 = \left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \ (\cos\theta = 0 \text{ ne fournit pas de solutio}$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = \tan\theta - 1 \text{ ou } r = 1-\tan\theta.$$

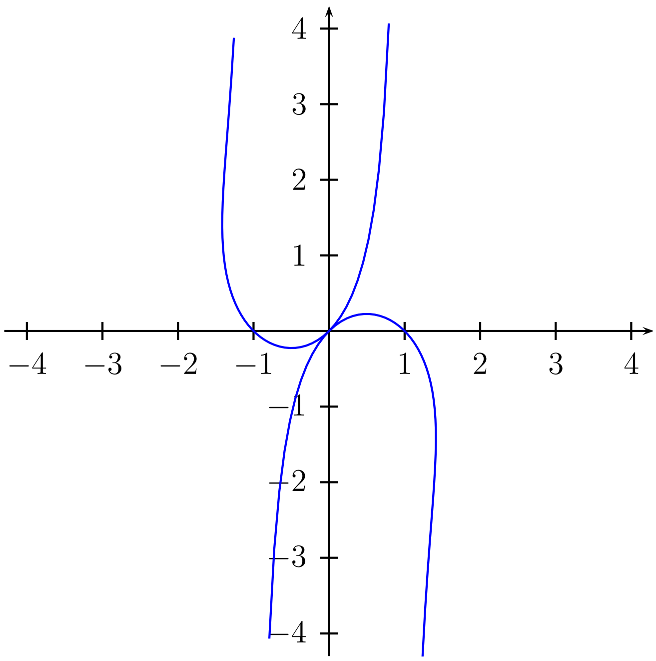
$\mathscr{C}$ est donc la réunion de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ d'équation polaire $r = \tan\theta - 1$, $(\mathscr{C}_2)$ d'équation polaire $r = 1-\tan\theta$ et $\{O\}$. On note que le point O appartient à $(\mathscr{C}_1)$ car $\theta = \frac{\pi}{4}$ fournit $r = 0$. Donc $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \{O\} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$. Ensuite, on notant r_1 et r_2 respectivement la fonction $\theta \mapsto \tan\theta - 1$ et $r_2 = -r_1$,

$$M[\theta+\pi, r_2(\theta+\pi)] = M[\theta+\pi, r_2(\theta)] = M[\theta+\pi, -r_1(\theta)] = M[\theta, r_1(\theta)],$$

et comme $\theta+\pi$ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si θ décrit $\mathbb{R}$, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont une seule et même courbe.

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est la courbe d'équation polaire } r = \tan\theta - 1.}$$

Construction de $\mathscr{C}$.



Correction de l'exercice 5486 ▲

Développée. $M(\theta) = O + ae^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta}$ puis

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = ae^{\theta}(\overrightarrow{u}_{\theta} + \overrightarrow{v}_{\theta}) = a\sqrt{2}e^{\theta}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{u}_{\theta} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{v}_{\theta}\right) = a\sqrt{2}e^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}.$$

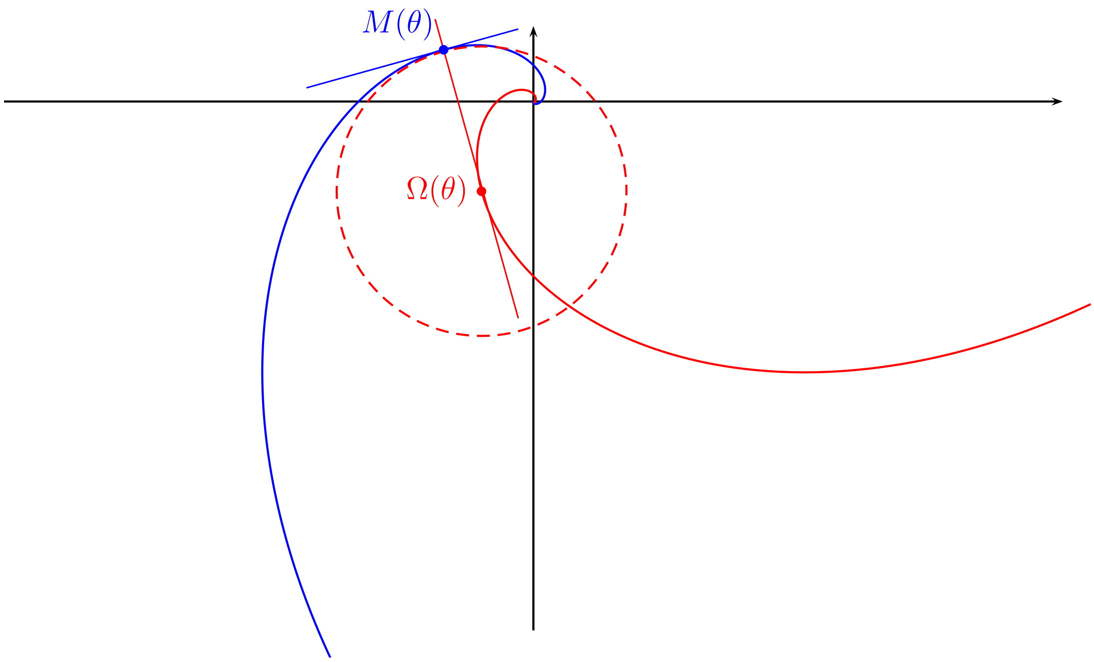
On en déduit $\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{2}e^{\theta}$ et $\overrightarrow{\tau}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}$. On peut alors prendre $\alpha(\theta) = \theta + \frac{\pi}{4}$ et donc $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1$. Par suite

$$R(\theta) = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{a\sqrt{2}e^{\theta}}{1} = a\sqrt{2}e^{\theta}.$$

D'autre part, $\overrightarrow{n}(\theta) = \overrightarrow{\tau}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_{\theta} + \overrightarrow{v}_{\theta})$ et donc

$$\Omega(\theta) = M(\theta) + R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta) = O + ae^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta} + a\sqrt{2}e^{\theta}.\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_{\theta} + \overrightarrow{v}_{\theta}) = O + ae^{\theta}\overrightarrow{v}_{\theta} = r_{O,\frac{\pi}{2}}(M(\theta)).$$

La développée de la spirale logarithmique d'équation polaire $r = ae^{\theta}$ est l'image de cette spirale par le quart de tour direct de centre O.



Correction de l'exercice 5487 ▲

(a) L'expression $r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\tan(2\theta)}}$ est bien définie sur $\mathscr{D} =]0, \frac{\pi}{4}[$ (il faut $\tan(2\theta)$ bien défini et strictement positif).

— Passages par l'origine
Puisque r ne s'annule pas, la courbe ne passe pas par l'origine. Mais elle admet l'origine pour point limite : $r(\theta) \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{4}^-]{} 0^+$.

— Variations et signe de la fonction r
La fonction r est strictement décroissante, et strictement positive, sur $]0; \frac{\pi}{4}[$:

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r	$+\infty$	$\searrow$	0

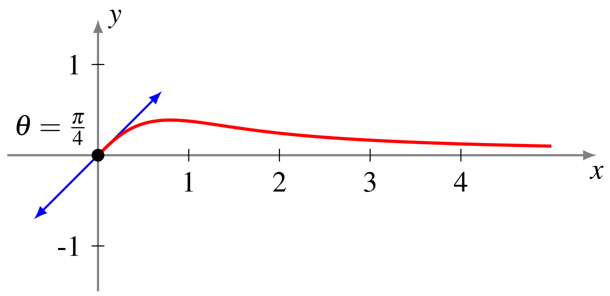
Cela signifie que la courbe tourne (dans le sens trigonométrique) en se rapprochant de l'origine.

— Tangente à l'origine
Le point $M(\frac{\pi}{4})$ est à l'origine : la tangente en ce point est donc dirigée par $\vec{u}_{\frac{\pi}{4}}$, c'est la première bissectrice.

— Étude des branches infinies
Lorsque θ tend vers 0, $r(\theta)$ tend vers $+\infty$: il y a donc une branche infinie. Pour étudier sa nature, passons en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{array}{rcl} x(\theta) & = & \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\tan(2\theta)}} \xrightarrow[\theta\to0^+]{} +\infty \\ y(\theta) & = & \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\tan(2\theta)}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\theta}{\sqrt{2\theta}} \end{array}$$

Ainsi $x(\theta) \xrightarrow[\theta\to0^+]{} +\infty$, $y(\theta) \xrightarrow[\theta\to0^+]{} 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale.



(b) L'expression $r(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ est bien définie sur $\mathscr{D} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

— Réduction du domaine d'étude
Comme r est paire, il suffit en fait de faire l'étude pour les $\theta > 0$, donc sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, puis de compléter par réflexion d'axe (Ox), en effet $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$.
On se restreint donc dans la suite à $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

— Passages par l'origine
La courbe passe par l'origine si r s'annule : pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$r(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0$$

— Variations et signe de la fonction r
La fonction r est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et s'annule en 0 :

$$\begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & & \frac{\pi}{2} \\ \hline & & & +\infty \\ r & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array}$$

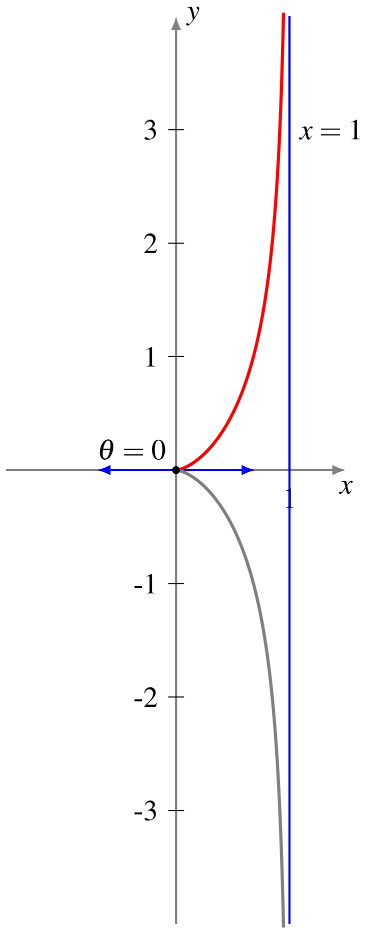
Ainsi la courbe tourne en s'éloignant de l'origine.

— Tangente à l'origine
La courbe passe par l'origine en $\theta = 0$. Par conséquent, la tangente en $O = M(0)$ est la droite passant par O et d'angle polaire 0, c'est-à-dire l'axe (Ox).

— Étude des branches infinies
Lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{2}$, $r(\theta)$ tend vers $+\infty$: il y a donc une branche infinie. Pour étudier sa nature, passons en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{array}{rcl} x(\theta) & = & \sin^2\theta \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}^-]{} 1 \\ y(\theta) & = & \dfrac{\sin^3\theta}{\cos\theta} \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}^-]{} +\infty \end{array}$$

Ainsi la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale.



(c) L'expression $r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$ est bien définie si $\cos(2\theta)$ est positif, *i.e.* sur $\mathscr{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi]$.

— Réduction du domaine d'étude
La fonction r est π-périodique : on l'étudie sur un intervalle de longueur π, par exemple $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \cap \mathscr{D} = [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$, puis on complète par rotation d'angle π. De plus r est paire : $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$, et pour $\theta \in D$ on a

$$M(-\theta) = [r(-\theta) : -\theta] = [r(\theta) : -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta))$$

Finalement, on étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, puis on obtient la courbe complète d'abord par réflexion d'axe (Ox), puis par rotation d'angle π (symétrie centrale par rapport à l'origine).

— Passages par l'origine
La courbe passe par l'origine si r s'annule : pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$r(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

— Variations et signe de la fonction r
La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{4}$:

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r	1	$\searrow$	0

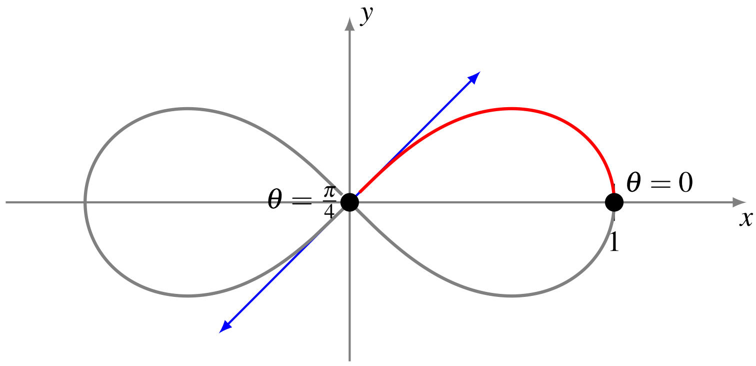
Ainsi la courbe tourne en se rapprochant de l'origine.

— Tangentes
La courbe passe par l'origine en $\theta = \frac{\pi}{4}$, et donc la tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est la droite passant par O et d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire la première bissectrice.

En $\theta = 0$, $r(0) = 1$ (et $r'(0) = 0$) et la tangente est dirigée par le vecteur

$$\frac{\overrightarrow{M}}{\theta}(0) = r'(0)\vec{u}_0 + r(0)\vec{v}_0 = \vec{v}_0 = \vec{j}$$

et la tangente à la courbe au point $M(0)$ de coordonnées cartésiennes $(1,0)$ est donc verticale.



Correction de l'exercice 5488 ▲

Les deux équations sont 2π-périodiques en θ, soit donc $\theta \in [0; 2\pi[$, cherchons pour chaque courbe le vecteur tangent au point $M_i(\theta)$. Déjà, $\mathscr{C}_2$ ne passe pas par le pôle mais $\mathscr{C}_1$ oui, pour $\theta = \pi$: elle a donc en $M_1(\pi)$ une tangente horizontale (dirigée par le vecteur $\vec{u}_\pi$) et $N_1(\pi)$ est l'axe (Oy). Dans tous les autres cas, la tangente à $\mathscr{C}_i$ au point $M_i(\theta)$ est dirigée par le vecteur

$$\frac{\overrightarrow{OM_i}}{\theta}(\theta) = r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{v}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_\theta + (a_i + \cos\theta)\vec{v}_\theta$$

où $a_1 = 1, a_2 = 3$. Le vecteur directeur de $N_i(\theta)$ est donc

$$\vec{n}_i(\theta) := (a_i + \cos\theta)\vec{u}_\theta + \sin\theta\,\vec{v}_\theta$$

et $M \in N_i(\theta) \iff \exists t \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_i(\theta)} + t \cdot \vec{n}_i(\theta)$. Finalement,

$$\forall \theta \neq \pi,\ N_i(\theta) = \left\{(1+t)(a_i + \cos\theta)\vec{u}_\theta + t\sin\theta\,\vec{v}_\theta \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

et le résultat s'étend au cas $\theta = \pi$ pour $i = 2$.

— Si $\theta = \pi$, $N_1(\pi) = (Oy)$ et $N_2(\pi) = \{2(1+t)\vec{u}_\pi \mid t \in \mathbb{R}\} = (Ox)$, ces deux droites s'intersectent en O.

— Si $\theta \neq \pi$, $N_1(\theta)$ et $N_2(\theta)$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{n}_1(\theta)$ et $\vec{n}_2(\theta)$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{vmatrix} 1+\cos\theta & 3+\cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \end{vmatrix} \neq 0$ *i.e.* $\sin\theta \neq 0$. Ainsi, pour $\theta \neq 0$, les droites $N_1(\theta)$ et $N_2(\theta)$ sont sécantes en un point $P(\theta)$, que l'on peut déterminer :

$$\begin{aligned} & (1+t_1)(1+\cos\theta)\vec{u}_\theta + t_1\sin\theta\,\vec{v}_\theta = (1+t_2)(3+\cos\theta)\vec{u}_\theta + t_2\sin\theta\,\vec{v}_\theta \\ \iff & \begin{cases} (1+t_1)(1+\cos\theta) = (1+t_2)(3+\cos\theta) \\ t_1\sin\theta = t_2\sin\theta \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_1 = t_2 \end{cases} \end{aligned}$$

puisqu'ici $\sin\theta \neq 0$. On obtient alors $\overrightarrow{OP(\theta)} = -\sin\theta\,\vec{v}_\theta$.

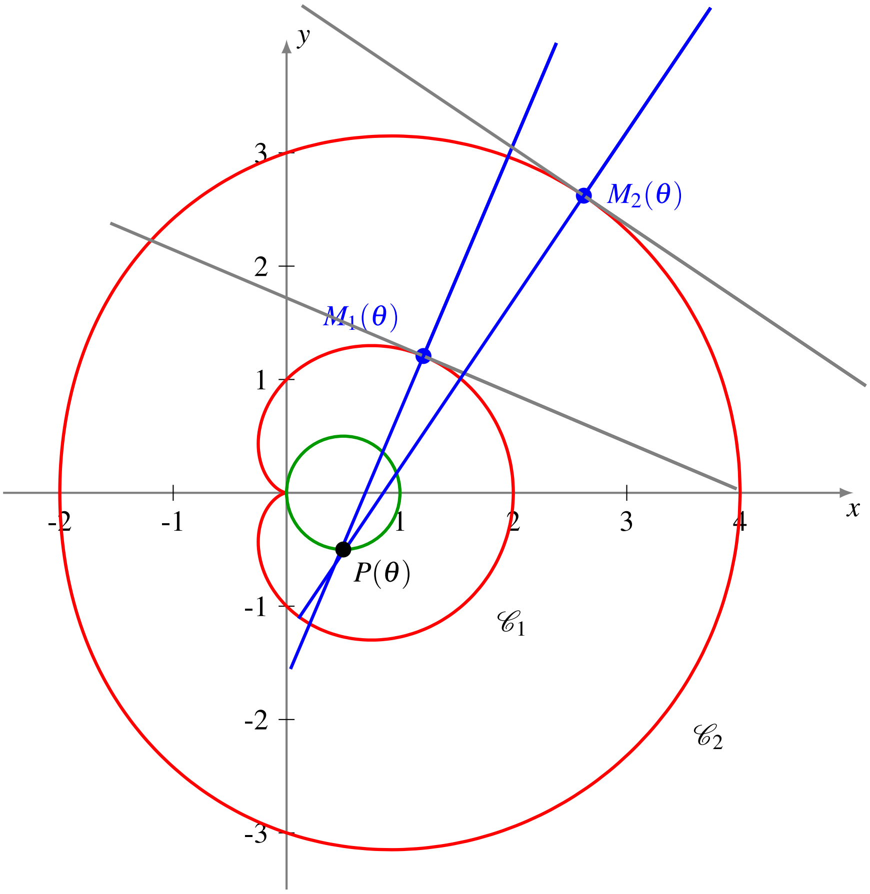
La formule donnant $P(\theta)$ pour $\theta \neq \pi$ est en fait encore valable en $\theta = \pi$ puisqu'on retrouve dans ce cas $P(\pi) = O$. En coordonnées cartésiennes, on a donc

$$\forall \theta \in]0; 2\pi[,\ P(\theta) = (\sin^2\theta, -\sin\theta\cos\theta)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
(\sin^2\theta, -\sin\theta\cos\theta) &= \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}, -\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}, 0\right) - \frac{1}{2}\big(\cos(2\theta), \sin(2\theta)\big)
\end{aligned}$$

Lorsque θ décrit $]0;2\pi[$, 2θ décrit $]0;4\pi[$ et $\big(\cos(2\theta),\sin(2\theta)\big)$ décrit (deux fois, sauf en $(1,0)$ où l'on ne passe qu'une fois) le cercle unité. Par conséquent $\{P(\theta) \mid \theta \in]0;2\pi[\}$ est le cercle de centre $(\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.



Correction de l'exercice 5489 ▲

(a) $y = ae^{bx}$.

(b) $y = \pm\sqrt{ax+b}$.

(c) $(a-x)^2 + y^2 = b^2$.

(d) $x = a\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) + b, \quad y = a\sin t$.

(e) $y^2 = \frac{x^2}{2} + a^2\ln|x| + b$.

Correction de l'exercice 5490 ▲

(a) $\rho = \frac{1}{a\theta+b}$.

(b) $\rho = a\theta + b$. (Spirale d'Archimède)

Correction de l'exercice 5491 ▲

$D = Ox \Rightarrow x_T = x - \frac{x'y}{y'}$, $x_N = x + \frac{yy'}{x'} \Rightarrow 2x + y\left(t - \frac{1}{t}\right) = a$ (cste).
On dérive : $2x' + y'\left(t - \frac{1}{t}\right) + y\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = 0 \Rightarrow y'\left(t + \frac{1}{t}\right) + y\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = 0$.
$\Rightarrow y = \frac{\lambda}{t}$, $x = b + \frac{\lambda}{2t^2}$ (Parabole)

Correction de l'exercice 5492 ▲

$D = Ox \Rightarrow x_T = x - \frac{x'y}{y'}$, $x_N = x + \frac{yy'}{x'} \Rightarrow y\left(t + \frac{1}{t}\right) = a$ (cste).
$y = \frac{at}{1+t^2}$ et $x' = ty' \Rightarrow x = a\left(\ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{1+t^2}\right) + b$.

Correction de l'exercice 5493 ▲

La tangente ne doit pas être parallèle à Oy, donc on peut paramétrer $\mathscr{C}$ sous la forme : $y = f(x)$, ce qui donne l'équation :

$$|x + yy'| = |y|\sqrt{1 + y'^2} \Leftrightarrow 2xyy' = y^2 - x^2.$$

(équation homogène) on obtient : $y = \pm\sqrt{\lambda x - x^2}$. Les courbes cherchées sont des arcs de cercles centrés sur Ox passant par O.

Correction de l'exercice 5494 ▲

On suppose que la droite est Ox et on paramètre la courbe cherchée, $\mathscr{C}$, par une abscisse curviligne s. Soient $M = (x,y) \in \mathscr{C}$, $I = (x - R\frac{dy}{ds}, y + R\frac{dx}{ds})$ le centre de courbure en M où R est le rayon de courbure. On veut $|R| = \left|y + R\frac{dx}{ds}\right| = |y + R\cos\varphi|$ d'où :

$$\pm\frac{dR}{ds} = \frac{dy}{ds} - R\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \frac{dR}{ds}\cos\varphi = \frac{dR}{ds}\cos\varphi.$$

Ceci implique $\frac{dR}{ds} = 0$ donc R est constant (cercle) ou $\varphi \equiv 0 \bmod \pi$ (droite horizontale). Le deuxième cas est exclu (courbe birégulière) donc il reste le cas d'un cercle qui convient s'il est tangent à Ox.

Correction de l'exercice 5495 ▲

$y + 2R\cos\varphi = \pm 2R \Rightarrow 2\frac{dR}{d\varphi}\sin\frac{\varphi}{2} + R\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ ou $2\frac{dR}{d\varphi}\cos\frac{\varphi}{2} - R\sin\frac{\varphi}{2} = 0$.
cas 1 : $R = \frac{K}{\sin\varphi/2}$, $x = 2K\ln\left|\tan\frac{\varphi}{4}\right| - 4K\cos\frac{\varphi}{2} + L$, $y = 4K\sin\frac{\varphi}{2}$.
cas 2 : $R = \frac{K}{\cos\varphi/2}$, $x = -2K\ln\left|\tan\frac{\varphi+\pi}{4}\right| + 4K\sin\frac{\varphi}{2} + L$, $y = -4K\cos\frac{\varphi}{2}$.

Correction de l'exercice 5496 ▲

$M + a\vec{t} \in Ox$ (tractrices) $x = a\cos\varphi + a\ln|\tan\varphi/2| + b$, $y = a\sin\varphi$.

Correction de l'exercice 5498 ▲

(a) $x = \int^s \cos\ln|t|\,dt$, $\quad y = \int^s \sin\ln|t|\,dt$, $\quad \rho = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta+\pi/4}$.

(b) $x = \int_0^s \cos\frac{u^2}{2}\,du$, $\quad y = \int_0^s \sin\frac{u^2}{2}\,du$ (Clothoïde ou spirale de Cornu)

(c) $x = a(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)$, $\quad y = a(-\varphi\cos\varphi + \sin\varphi)$.

(d) $x = \ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$, $\quad y = \frac{1}{\cos\varphi} = \operatorname{ch} x$.

(e) $x = \frac{a}{4}(\sin 2\varphi + 2\varphi)$, $\quad y = \frac{a}{4}\cos 2\varphi$ (cycloïde).

Correction de l'exercice 5499 ▲

Développante de cercle : $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dR}{ds}\vec{N} \Rightarrow \frac{dR}{d\varphi} = r$.

$\Rightarrow x = x_0 + r(\cos\varphi - 1 + \varphi\sin\varphi), \quad y = y_0 + r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$.

Correction de l'exercice 5500 ▲

$y = \frac{s}{2}\sin\varphi \Rightarrow s = a\sin\varphi \Rightarrow x = \frac{a\sin 2\varphi}{4} + \frac{a\varphi}{2} + b, \quad y = \frac{a\sin^2\varphi}{2}$. (cycloïde)

Correction de l'exercice 5501 ▲

Soit θ l'angle polaire de $\vec{OM}$: $\vec{MC} = \frac{ds}{d\varphi}\vec{n}$ et $\vec{MN} = \frac{ds}{d\theta}\vec{n}$.

$\frac{ds}{d\theta} = k\frac{ds}{d\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{k} + b \Rightarrow V = a\theta + b$ avec $a = \frac{1}{k} - 1$.

$\frac{\rho}{\rho'} = \tan(a\theta + b) \Rightarrow \rho = \lambda\cos(a\theta + b)^{-1/a}$ si $a \neq 0$ ou $\rho = \lambda e^{\mu\theta}$ si $a = 0$.

$k = 1 \quad \Rightarrow$ Spirale logarithmique.

$k = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow$ Parabole de foyer O.

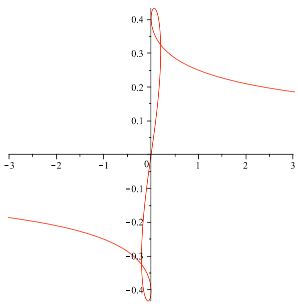
$k = 2 \quad \Rightarrow$ Cardioïde.

$k = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow$ Hyperbole de centre O.

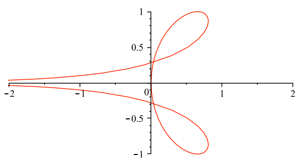
$k = -1 \Rightarrow$ Lemniscate de Bernouilli.

Correction de l'exercice 5503 ▲

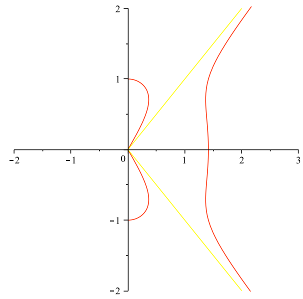
(a)



(b)



(c)

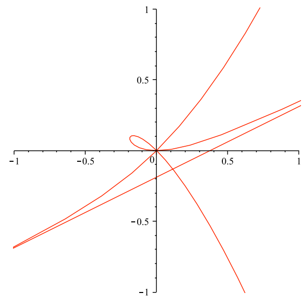


asymptotes : $y = \pm x$

$x - y \sim 1/(4x) \Rightarrow$ aire infinie

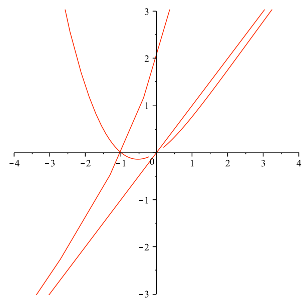
$y' = 0 \Leftrightarrow t = 0, (\sqrt{6} \pm \sqrt{2})/2$

(d)



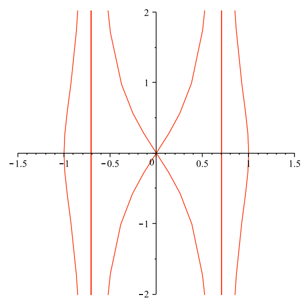
asymptote : $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{16}$ (traversée)

(e)



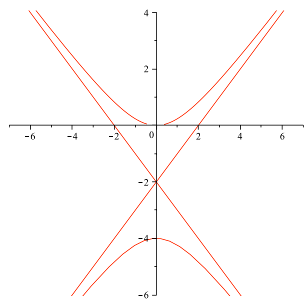
asymptote : $y = x$

(f)



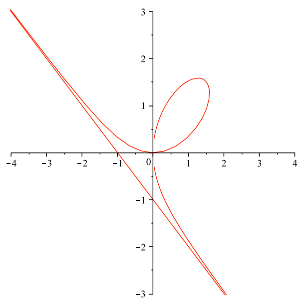
inflexions : $\tan \frac{t}{2} = 0, \pm 3$

(g)



hyperbole : $(y+2)^2 - x^2 = 4$

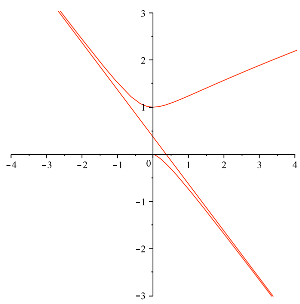
(h)



asymptote : $x+y=-1$

équation cartésienne : $x^3+y^3=3xy$

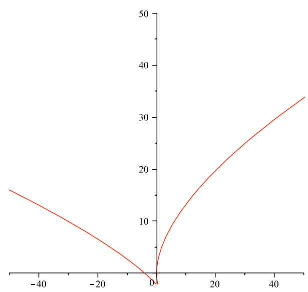
(i)



asymptote : $x+y=e^{-1}$

branche parabolique horizontale

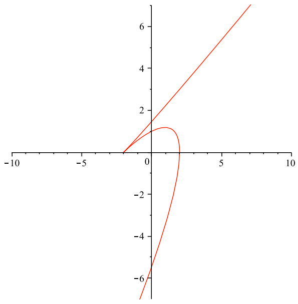
(j)



branche parabolique horizontale

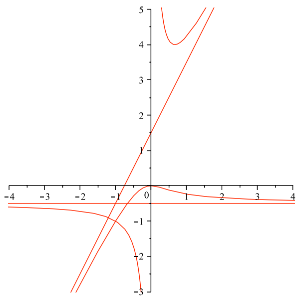
rebroussement pour $t=1$

(k)



branche parabolique de coefficient 1

(l)

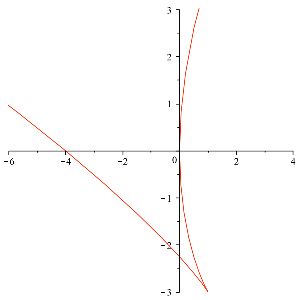


asymptote : $y = 2x + \frac{3}{2}$
point double : $t^2 + t = 1$, $x = y = -1$ les tangentes sont orthogonales

---

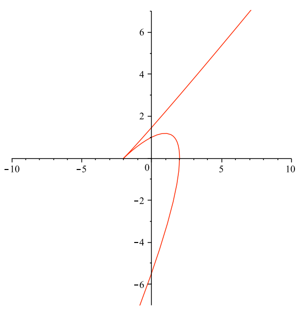
Correction de l'exercice 5504 ▲

(a)



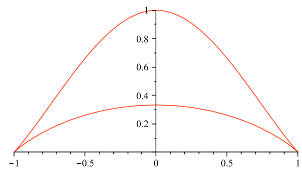
branche parabolique horizontale

(b)



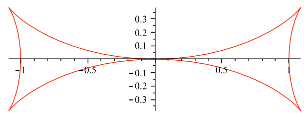
branche parabolique de coefficient 1

(c)



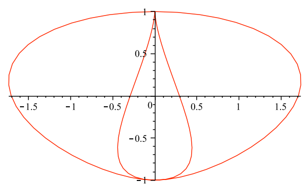
inflexion : $\cos t = \frac{2}{3}$

(d)



rebroussement : $\cos^2 t = \frac{1}{3}$.

(e)



Correction de l'exercice 5505 ▲

$x = \frac{3\cos\theta - \cos 3\theta}{4}$, $y = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$.

Correction de l'exercice 5506 ▲

$M = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $S = (a, 0)$:

On obtient les équations paramétriques : $x = \frac{R(R\cos\theta - a)}{R - a\cos\theta}$, $y = \frac{(R^2 - a^2)\sin\theta}{R - a\cos\theta}$.

Pour $R \neq a$, il s'agit de la conique de centre O et d'équation cartésienne : $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1$.

Correction de l'exercice 5507 ▲

$$y_A = t \Rightarrow \begin{cases} 2px = t^2 + ht + h^2/2 \\ y = t + h/2 \end{cases} \Rightarrow \text{parabole } y^2 + h^2/4 = 2px.$$

Correction de l'exercice 5508 ▲

$y_A = t, y_B = u \Rightarrow C : \left(\frac{ut}{2p}, \frac{t+u}{2}\right)$; aire $= \frac{|u-t|^3}{8p}$.
enveloppe : $M = \text{mil}(A,B)$, parabole $y^2 + a^2/4 = 2px$.

Correction de l'exercice 5509 ▲

(a) F.

(b) $M = (t^2/2p, t)$, $M' = (t'^2/2p, t') \Rightarrow tt' = -p^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{4}\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) \\ y = \frac{p}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \end{cases}$ avec $u = \frac{t}{p}$. (Parabole passant par F)

(c) $\begin{cases} x = \frac{3p}{4}\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) \\ y = -\frac{p}{4}\left(u - \frac{1}{u}\right)^3. \end{cases}$

Correction de l'exercice 5510 ▲

(a) Foyer.

(b) Point d'impact : $\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$ Point caractéristique : $\left(\frac{3t^2}{2p}, \frac{t(3p^2-t^2)}{2p^2}\right)$.

Correction de l'exercice 5511 ▲

$M = (t^2/2p, t) \Rightarrow I = (3t^2/2p + p, -t^3/p^2)$. Soit $P = (u^2/2p, u)$:
$IP = IM \Leftrightarrow (u-t)^3(u+3t) = 0 \Rightarrow u = -3t$.
Enveloppe : $\begin{cases} x = -3t^2/2p \\ y = 3t. \end{cases}$ (Parabole)

Correction de l'exercice 5512 ▲

équation polaire : $\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p(\cos\theta - \sin\theta)}{2+e(\cos\theta-\sin\theta)} \\ y = \frac{p(\cos\theta+\sin\theta)}{2+e(\cos\theta-\sin\theta)} \end{cases}$ conique d'excentricité $\frac{e}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 5513 ▲

$3x = \cos 2\theta + 2\cos\theta$, $3y = \sin 2\theta + 2\sin\theta$: cardioïde à rebroussement en $(-1/3, 0)$.

Correction de l'exercice 5514 ▲

$D = Ox$, rayon $= 1$: $x = \theta - \cos\theta\sin\theta$, $y = \sin^2\theta$. pt caractéristique = projeté de I.

Correction de l'exercice 5515 ▲

$M = \begin{pmatrix} a(1+\cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2a\cos t(1+\cos t) \\ 2a\sin t(1-\cos t) \end{pmatrix}$. Hypocycloïde à trois rebroussements.

Correction de l'exercice 5516 ▲

$x = a\cos 4\theta$, $y = a\sin 4\theta$.

Correction de l'exercice 5517 ▲

(a) $x = \frac{\cos t}{a}(a^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t)$, $y = \frac{\sin t}{b}(b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t)$.

(b)

(c) Point stationnaire ssi $a^2 > 2b^2$, obtenu pour $\sin^2 t = \frac{a^2 - 2b^2}{3(a^2 - b^2)}$. Rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce.

Correction de l'exercice 5518 ▲

$D = Ox$, $A = (0,a)$,$M = (t,0) \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2/a. \end{cases}$ (Parabole)

Correction de l'exercice 5526 ▲

(a) $\mathrm{sh}^2 t$.

(b) $\theta - \mathrm{th}\,\frac{\theta}{2}$.

Correction de l'exercice 5527 ▲

$2 - \sqrt{2} + 3\ln(1 + \sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 5528 ▲

(a) $4\sqrt{2} + 4\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = 4\sqrt{2} + 4\arctan\sqrt{2} - \pi$.

(b) 4.

Correction de l'exercice 5529 ▲

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{xy} = 1 - x - y \Rightarrow (x - y)^2 = 2(x + y) - 1$. La courbe est un arc de parabole d'axe la première bissectrice et tangent aux axes en $(1,0)$ et en $(0,1)$.

Longueur : $x - y = \mathrm{sh}\,t$, $2(x + y) = \mathrm{ch}^2 t \Rightarrow x = \frac{1}{2}\mathrm{ch}^2 t + \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,t$, $y = \frac{1}{2}\mathrm{ch}^2 t - \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,t$, $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\sqrt{2}}$.

$L = \int_{t=-\,\mathrm{argsh}\,1}^{\mathrm{argsh}\,1} \frac{\mathrm{ch}^2 t\,dt}{\sqrt{2}} = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + 1$.

Correction de l'exercice 5530 ▲

Soit (a_i) une subdivision de $[a,b]$ et P la ligne brisée passant par les points $(a_i, f(a_i))$. On montre ci-dessous que pour toute courbe rectifiable L située au dessus de P et ayant même extrémités, on a $\mathrm{long}(L) \geqslant \mathrm{long}(P)$ (résultat intuitivement évident : planter des clous aux points $(a_i, f(a_i))$ et attacher un élastique en $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, passant au dessus de ces clous). Cela étant montré, l'inégalité demandée en résulte en faisant tendre le pas de la subdivision vers zéro.

Démonstration du thm de l'élastique : par récurrence sur le nombre n de segments de P. Pour $n = 1$ c'est un fait connu. $n - 1 \Rightarrow n$: si L passe par $(a_1, f(a_1))$ alors l'hypothèse de récurrence s'applique. Sinon, notons D la demi-droite issue de $(a_0, f(a_0))$ et passant par $(a_1, f(a_1))$. Par concavité, P est en dessous de D. L contient un point d'abscisse a_1 strictement au dessus de D, et aboutit en $(b, f(b))$ en dessous de D, donc il existe un point (u,v) sur $L \cap D$ avec $u > a_1$. En remplaçant l'arc $(a_0, f(a_0))$ – (u,v) de L par le segment correspondant on obtient une ligne L' plus courte que L, encore au dessus de P, et qui relève du premier cas.

Correction de l'exercice 5531 ▲

(a) $x = -4t^3$, $y = \frac{3 + 6t^2 - 3t^4}{2}$.

(b) $x = 6\cos t - 3\cos 2t$, $\quad y = 6\sin t + 3\sin 2t$.

(c) $x = t + \sin t$, $\quad y = -1 + \cos t$, $I_t = M_{t-\pi} + (\pi, -2)$.

(d) $x = a(\cos^3 t + 3\cos t \sin^2 t)$, $\quad y = a(\sin^3 t + 3\sin t \cos^2 t)$. $x \pm y = a(\cos t \pm \sin t)^3 \Rightarrow$ similitude de centre O, rapport 2, angle $\frac{\pi}{4}$.

(e) $x_I = \frac{3x^4+1}{2x^3}$, $\quad y_I = \frac{x^4+3}{2x}$.

(f) $x = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$, $\quad y = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t$.

(g) $\rho = e^{\theta - \pi/2}$.

(h) $x = \frac{2+\cos\theta - \cos^2\theta}{3}$, $\quad y = \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{3}$, $\quad$ cardioïde homothétique.

Correction de l'exercice 5532 ▲

Calcul.

Correction de l'exercice 5535 ▲

(a)

(b) Cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5536 ▲

$R = \frac{1}{2}$ aux sommets principaux $(0, \pm 1)$ et $R = \sqrt{2}$ aux sommets secondaires $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$.

Correction de l'exercice 5537 ▲

$-\frac{156}{125\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 5538 ▲

$y'(0) = \lambda \Rightarrow I = (-\lambda - \lambda^3, 1 + \lambda^2)$.

Correction de l'exercice 5540 ▲

$c_i = \frac{1}{\sqrt{1+a^2c^2}}\left(\frac{ac'}{1+a^2c^2} \pm c\right)$ où c est la courbure en M et $c' = \frac{dc}{ds}$.

Dans le repère de Frenet, les normales ont pour équations : $X = 0$, $\pm X = acY - a$, donc se coupent en C.

Correction de l'exercice 5541 ▲

(a) Soit θ l'angle polaire de D. Dans le repère $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$, $\mathscr{P}$ a pour équation : $Y = aX^2 + bX$.

On veut que $\mathscr{P}$ soit tangente à Oy, soit $b = -\tan\theta$ et que le rayon de courbure soit R, soit $a = \frac{1}{2R\cos^3\theta}$.

Équation dans $0xy$: $x^2\sin^2\theta - 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\cos^2\theta - 2Rx\cos^2\theta = 0$.

(b) O.

Correction de l'exercice 5542 ▲

(a)

(b) $x = \frac{4t^3 + a(1-t^2)}{1+t^2}$, $\quad y = \frac{t^4 - 3t^2 + 2at}{1+t^2}$.

Correction de l'exercice 5543 ▲

$x = a\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|, \quad y = a\cos t.$

Correction de l'exercice 5544 ▲

(a) L'astroïde complète est obtenue quand t décrit $[-\pi,\pi]$ et pour des raisons de symétrie, $L = 4\int_0^{\pi} 2\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\| dt$.

Or $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} -3a\sin t\cos^2 t \\ 3a\cos t\sin^2 t \end{pmatrix} = 3a\sin t\cos t\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ et donc $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\| = 3a|\sin t\cos t| = \frac{3a}{2}|\sin(2t)|$ puis

$$L = 4\int_0^{\pi/2}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\| dt = 6a\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt = 6a\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6a.$$

$$\boxed{L = 6a.}$$

(b) $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1-\cos t) \\ R\sin t \end{pmatrix} = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin t\cos t\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$ et donc $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\| = 2R\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$ puis

$$L = \int_0^{2\pi}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\| dt = 2R\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,dt = 4R\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8R.$$

$$\boxed{L = 8R.}$$

(c) Une représentation paramétrique de Γ est $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}$, $0 \leqslant t \leqslant a$ et donc

$$L = \int_0^a \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = \int_0^a \sqrt{1+\frac{t^2}{p^2}}\,dt = p\int_0^{a/p}\sqrt{u^2+1}\,du$$
$$= p\left(\left[u\sqrt{u^2+1}\right]_0^{a/p} - \int_0^{a/p}\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}}\,du\right) = a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}} - p\int_0^{a/p}\frac{u^2+1-1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$
$$= a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}} - L + p\,\mathrm{argsh}\left(\frac{a}{p}\right),$$

et donc

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}} + p\,\mathrm{argsh}\left(\frac{a}{p}\right)\right).}$$

(d) La cardioïde complète est obtenue quand θ décrit $[-\pi,\pi]$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = a((-\sin\theta)\overrightarrow{u}_\theta + (1+\cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta) = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right).$$

Comme le vecteur $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta$ est unitaire, $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = \left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$ puis

$$L = \int_{-\pi}^{\pi}\left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| dt = 4a\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) dt = 8a\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8a.$$

$$\boxed{L = 8a.}$$

Correction de l'exercice 5545 ▲

On obtient la courbe complète quand t décrit $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$. Puisque $M(-t)=s_{(Ox)}(M(t))$ et $M(\pi-t)=s_{(Oy)}(M(t))$, on se contente d'étudier et de construire la courbe quand $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe (Oy) puis d'axe (Ox). Pour $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}=\begin{pmatrix} R(-\sin t+\frac{1}{\sin t}) \\ R\cos t \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ \cos t \end{pmatrix}=R\frac{\cos t}{\sin t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}=R\,\mathrm{cotan}\,t\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Puisque $R\,\mathrm{cotan}\,t>0$ pour $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et puisque le vecteur $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt}=R\,\mathrm{cotan}\,t \text{ puis } \overrightarrow{\tau}(t)=\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

On a donc $\overrightarrow{n}(t)=\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ et d'autre part, on peut prendre $\alpha(t)=t$. En notant $\rho(t)$ le rayon de courbure au point $M(t)$,

$$\rho(t)=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{ds/dt}{d\alpha/dt}=R\,\mathrm{cotan}\,t,$$

puis

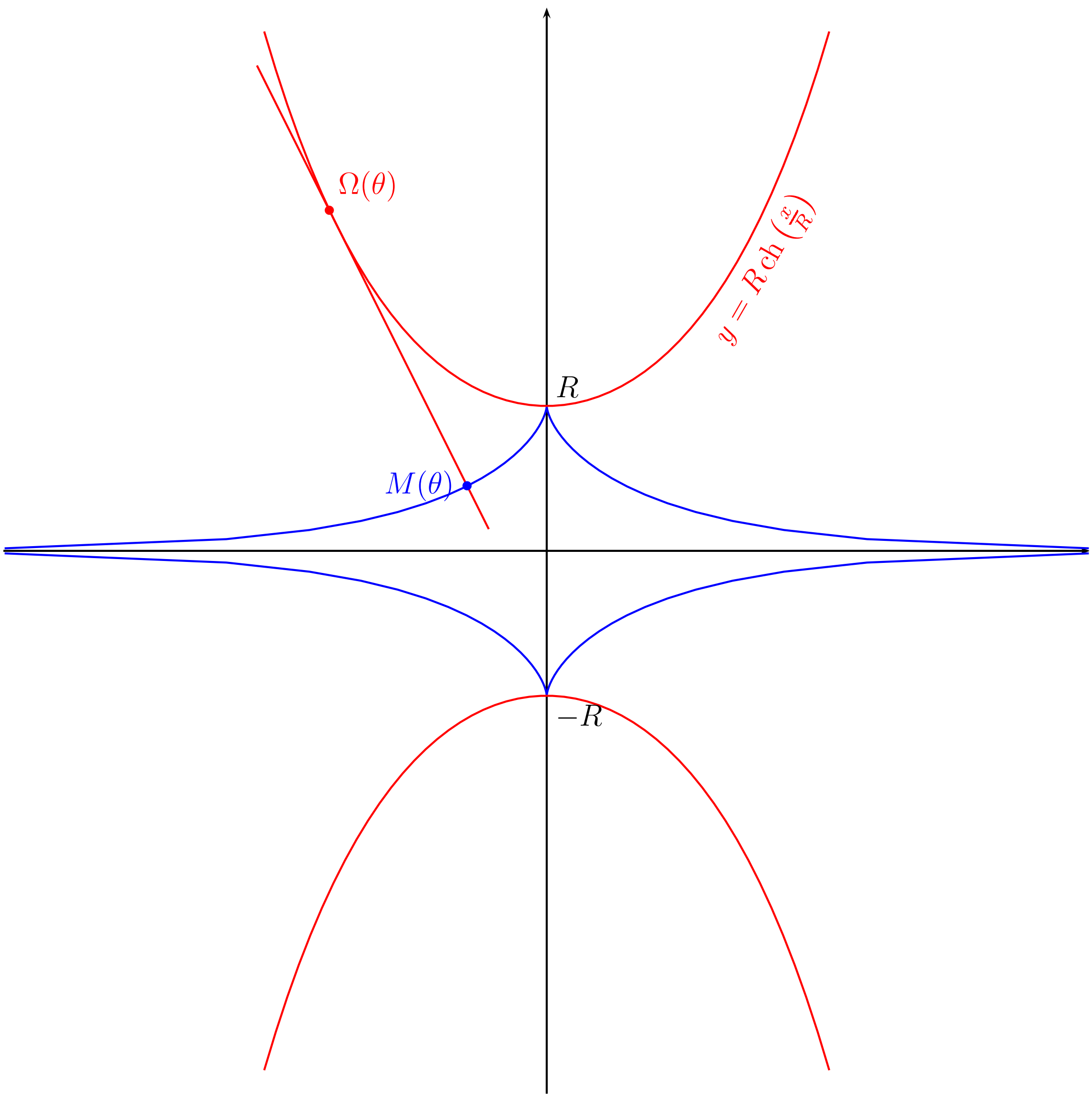
$$\begin{aligned}\Omega(t)=M(t)+\rho(t)\overrightarrow{n}(t)&=\begin{pmatrix} R\left(\cos t+\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) \\ R\sin t \end{pmatrix}+R\,\mathrm{cotan}\,t\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La développée cherchée est l'arc $t\mapsto\begin{pmatrix} R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}$, $t\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$ (en complétant par symétrie).

Quand t décrit $]0,\pi[$, on effectue alors le changement de paramètres $t\mapsto R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|=u$ qui est un C^1-difféomorphisme de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$. On obtient $x=u$ puis

$$y=\frac{R}{\frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}}=\frac{R}{2}\left(\tan\frac{t}{2}+\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\right)=R\frac{e^{u/R}+e^{-u/R}}{2}=R\,\mathrm{ch}\left(\frac{u}{R}\right).$$

Le support de la développée sur $]0,\pi[$ est aussi le support de l'arc $u\mapsto\begin{pmatrix} u \\ R\,\mathrm{ch}\left(\frac{u}{R}\right) \end{pmatrix}$, $u\in\mathbb{R}$ ou encore la chaînette d'équation cartésienne $y=R\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{R}\right)$.



12. Quand t décrit $[0,2\pi]$, on obtient une arche de cycloïde complète. Les autres arches s'en déduisent par translations de vecteurs $2k\pi R\overrightarrow{i}$. Pour $t \in [0,2\pi]$

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1-\cos t) \\ R\sin t \end{pmatrix} = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Le point $M(t)$ est régulier pour $t \in]0,2\pi[$ et pour $t \in]0,2\pi[$, $2R\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$. Puisque le vecteur $\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt} = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } \overrightarrow{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ et d'autre part, on peut prendre $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. En notant $\rho(t)$ le rayon de courbure au point $M(t)$,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -4R\sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

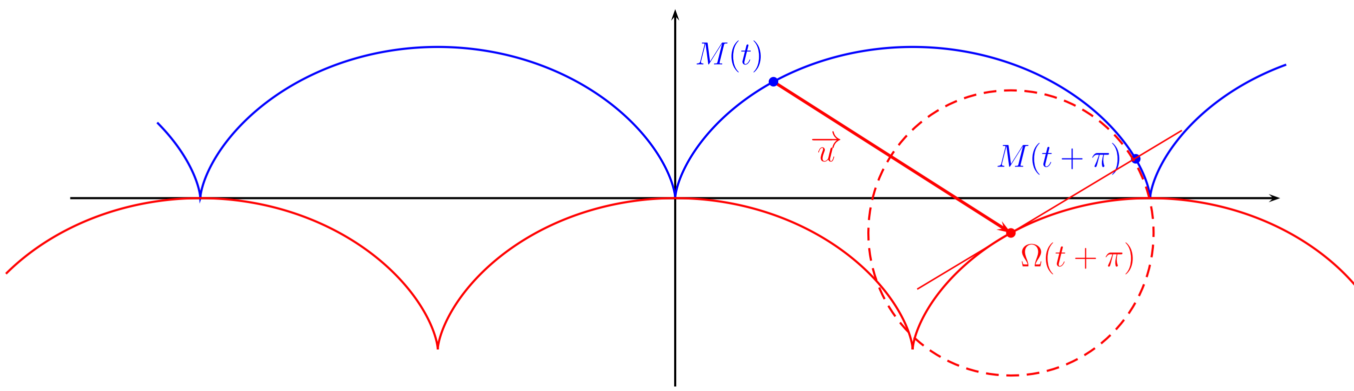
et donc

$$\Omega(t) = M(t) + \rho(t)\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} R(t-\sin t) \\ R(1-\cos t) \end{pmatrix} - 4R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t-\sin t) + 2R\sin t \\ R(1-\cos t) - 2R(1-\cos t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} R(t+\sin t) \\ -R(1-\cos t) \end{pmatrix}.$$

La développée cherchée est l'arc $t \mapsto \begin{pmatrix} R(t+\sin t) \\ -R(1-\cos t) \end{pmatrix}$. Poursuivons.

$$\Omega(t+\pi) = \begin{pmatrix} R(t+\pi-\sin t) \\ -R(1+\cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t-\sin t) \\ R(1-\cos t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi R \\ -2R \end{pmatrix} = t_{\overrightarrow{u}}(M(t)) \text{ où } \overrightarrow{u} = (\pi R, -2R).$$

Ainsi, le centre de courbure au point $M(t+\pi)$ est le translaté du point $M(t)$ dans la translation de vecteur $(\pi R, -2R)$ et donc la développée de la cycloïde est la translatée de la cycloïde par la translation de vecteur $(\pi R, -2R)$. En particulier, c'est encore une cycloïde.



13. $\mathscr{C}$ est le support de la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$. $M(t)$ est birégulier si et seulement si $t/neq0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$. Par suite

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+9t^4} \text{ et } \overrightarrow{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Donc, d'une part $\overrightarrow{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'autre part, puisque les coordonnées de $\overrightarrow{\tau}(t)$ sont positives, on peut prendre $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\right)$. Par suite, pour $t \neq 0$

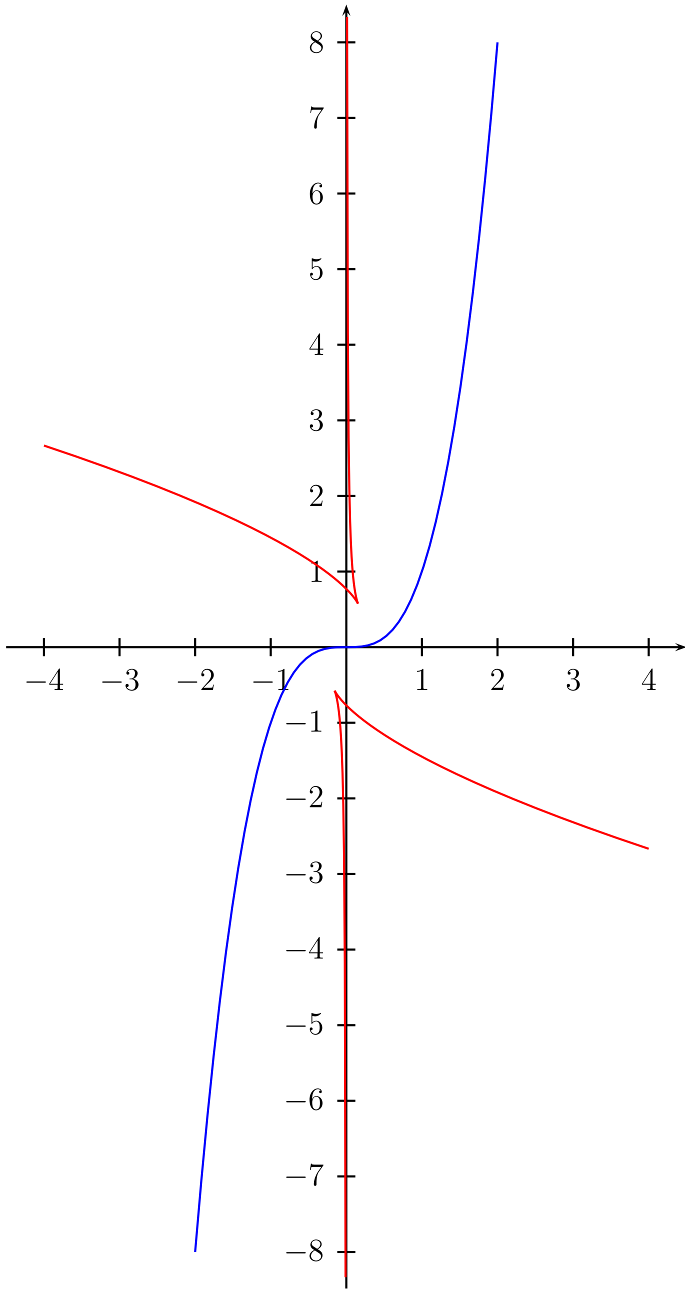
$$\frac{d\alpha}{dt} = -\left(-\frac{1}{2}\right)36t^3(1+9t^4)^{-3/2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+9t^4}}} = \frac{6t}{1+9t^4}$$

puis

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{(1+9t^4)^{3/2}}{6t},$$

et donc

$$\Omega(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} + \frac{1+9t^4}{6t}\begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} - \frac{9t^5}{2} \\ \frac{5t^3}{2} + \frac{1}{6t} \end{pmatrix}.$$



Correction de l'exercice 5546 ▲

$\mathscr{C}$ est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln t \end{pmatrix}$, $t > 0$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \end{pmatrix} = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \\ 1/\left(t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}.$$

Donc, $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ et on peut prendre $\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ puis

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} = -\frac{1}{t^2+1},$$

et finalement

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}.$$

Pour $t > 0$, posons $f(t) = |R(t)| = \frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $t > 0$,

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2}(t^2+1)^{3/2} + 3(t^2+1)^{1/2} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(-(t^2+1)+3t^2) = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(2t^2-1).$$

f admet un minimum en $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ égal à $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Le rayon de courbure minimum est } \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ et est le rayon de courbure en } M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.}$$

Correction de l'exercice 5547 ▲

$\mathscr{C}$ est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix}$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin t/\cos t \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Puisque $\frac{1}{\cos t} > 0$ et que $\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ est unitaire, on a successivement $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos t}$, $\overrightarrow{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\alpha(t) = -t$ puis

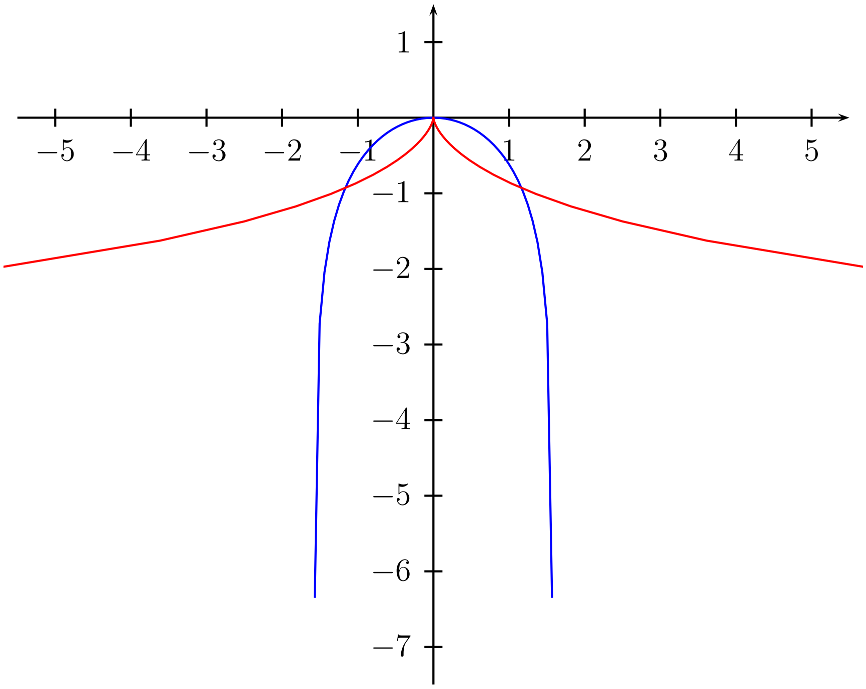
$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\cos t}.$$

Ensuite, si s est l'abscisse curviligne d'origine 0 orientée dans le sens des t croissants,

$$s(t) = \int_0^t s'(u)\,du = \int_0^t \frac{1}{\cos u}\,du = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Enfin,

$$\Omega(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tan t \\ \ln(\cos t) - 1 \end{pmatrix}.$$



Correction de l'exercice 5548 ▲

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathscr{C}_\lambda$ est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \lambda t e^{-t} \end{pmatrix}$. $\mathscr{C}_0$ est l'axe (Ox) et donc C_0 n'est pas défini, puis $\mathscr{C}_{-\lambda}$ est la symétrique de $\mathscr{C}_\lambda$ par rapport à l'axe (Ox) et donc $C_{-\lambda}$ est le symétrique de C_λ par rapport à l'axe (Ox). Dans ce qui suit, on suppose $\lambda > 0$.

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

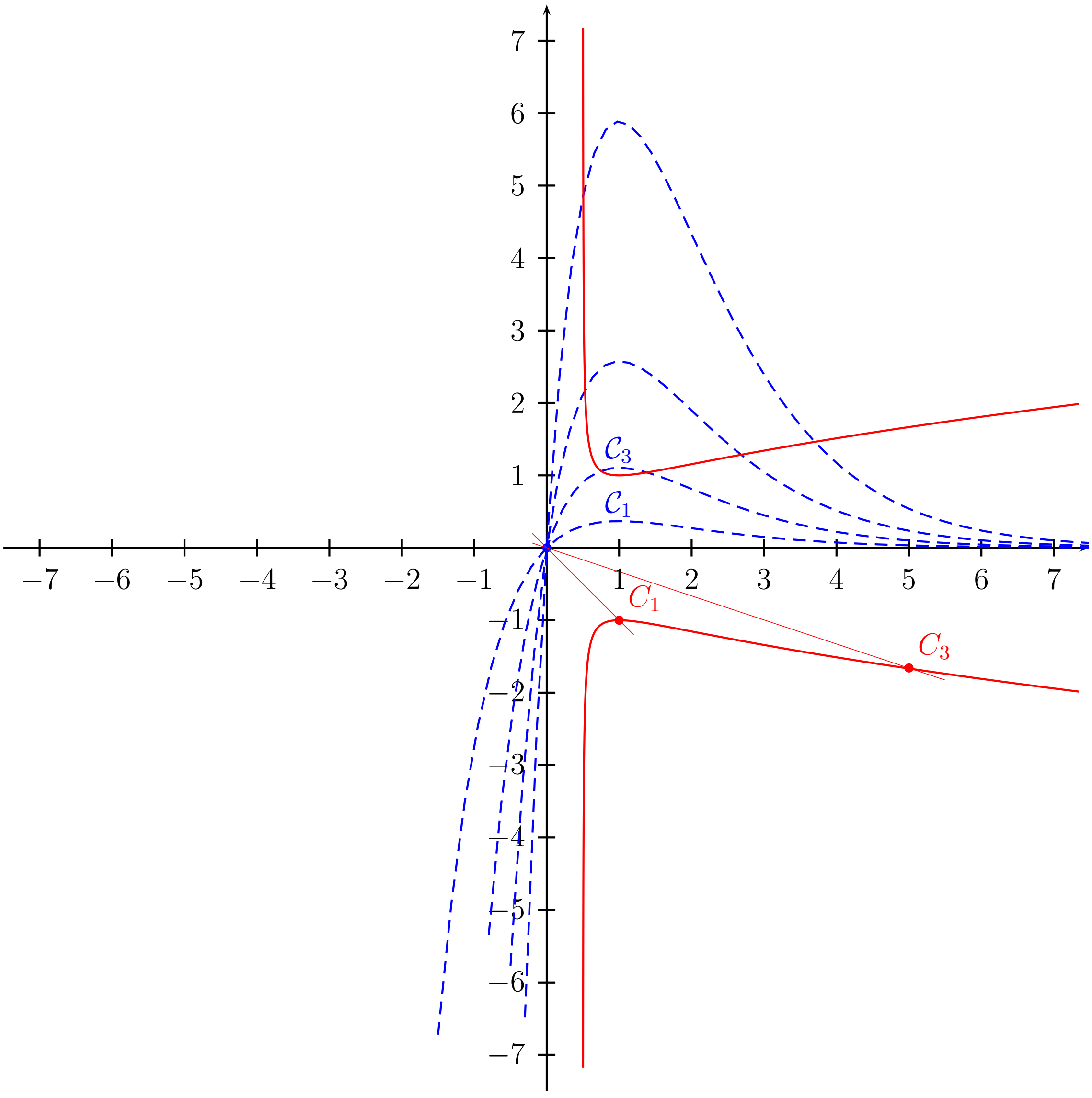
Par suite $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}$, $\overrightarrow{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\begin{pmatrix} -\lambda(1-t)e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$ et on peut prendre $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\right)$ (car $\overrightarrow{\tau}(t)$ a une abscisse strictement positive). Ensuite,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\lambda^2((2t-2)-2(t-1)^2)e^{-2t}}{2(1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t})^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}}$$

et donc $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{-4\lambda^2}{2(1+\lambda^2)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\lambda^2}}} = \frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}$ puis $R(0) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt}(0) = -\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda^2)^{3/2}$ et donc

$$C_\lambda = \Omega(0) = M(0) + R(0)\overrightarrow{n}(0) = O - \frac{1}{2\lambda}(1+\lambda^2)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\lambda^2)/2 \\ -(1+\lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des C_λ, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, est le support de l'arc $\lambda \mapsto \begin{pmatrix} (1+\lambda^2)/2 \\ -(1+\lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.



Correction de l'exercice 5549 ▲

M_1, M_2, M_3, M_4 sont coplanaires si et seulement s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que le plan P d'équation $ax + by + cz - d = 0$ passe par ces points, ce qui équivaut à : t_1, t_2, t_3, t_4 sont les racines (distinctes) du polynôme $at^4 + bt^3 + ct^2 - d$. Un tel polynôme existe si et seulement si $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = 0$ soit : $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} = 0$ si aucun des t_i n'est nul.

Correction de l'exercice 5550 ▲

(a) $\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{\tau}{c}\vec{B} \Rightarrow \vec{T}_1 = \vec{B}$, $\frac{ds_1}{ds} = -\frac{\tau}{c}$, $\vec{N}_1 = -\vec{N}$, $c_1 = c$.

(b) $\tau_1 = -\frac{c^2}{\tau}$.

Correction de l'exercice 5551 ▲

$c_1 = \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{c^2}}$, $\tau_1 = \frac{c\tau' - \tau c'}{c(c^2 + \tau^2)}$.

Correction de l'exercice 5552 ▲

Pt caractéristique : $P = M + a(s)\vec{N} + b(s)\vec{B}$: CNS $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{c} \\ \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} = \arctan(b/a)' = \tau. \end{cases}$ Rmq : le point caractéristique se projette sur I.

Correction de l'exercice 5553 ▲

$\vec{B} = \vec{T} + 2\vec{k} \Rightarrow s^2 \frac{d^2\vec{T}}{ds^2} + s\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{T} = -\vec{k}$.
on pose $s = e^u$: $\vec{OM} = e^u \cos u\vec{A} + e^u \sin u\vec{B} - e^u\vec{k}$ où $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{k})$ est orthogonale et $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \|\vec{k}\|$.
(spirale logarithmique relevée sur un cône)

Correction de l'exercice 5587 ▲

(a) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $P(x, y) = 2x + 2y + e^{x+y} = Q(x, y)$. Les fonctions P et Q sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et comme $\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + e^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, la forme différentielle ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.

Soit f une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$df = \omega \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y + e^{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y + e^{x+y} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x, y) = x^2 + 2xy + e^{x+y} + g(y) \\ 2x + e^{x+y} + g'(y) = 2x + 2y + e^{x+y} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x, y) = x^2 + 2xy + e^{x+y} + g(y) \\ g(y) = y^2 + \lambda \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (x + y)^2 + e^{x+y} + \lambda.$$

Les primitives de ω sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto (x + y)^2 + e^{x+y} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Remarque. On pouvait aussi remarquer immédiatement que si $f(x, y) = (x + y)^2 + e^{x+y}$ alors $df = \omega$.

(b) La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ car convexe. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur Ω si et seulement si ω est fermée sur Ω.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-y} + y\frac{1}{(x-y)^2}\right) = -\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{2y}{(x-y)^3} = -\frac{x+y}{(x-y)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3}$.
$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x-y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y-x} - x\frac{1}{(y-x)^2}\right) = \frac{1}{(y-x)^2} + \frac{2x}{(y-x)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right)$.
Donc ω est exacte sur l'ouvert Ω. Soit f une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \Omega,\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) /\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \begin{cases} f(x,y) = \frac{y}{x-y} + g(y) \\ \frac{x}{(x-y)^2} + g'(y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall (x,y) \in \Omega,\ f(x,y) = \frac{y}{x-y} + \lambda.
\end{aligned}$$

Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \frac{y}{x-y} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas étoilé. On se place dorénavant sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in]-\infty, 0]\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Sur Ω, ω est exacte si et seulement si ω est fermée d'après le théorème de SCHWARZ.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Donc ω est exacte sur Ω. Soit f une application de classe C^1 sur Ω.

$$\begin{aligned}
df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \Omega,\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) /\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + g(y) \\ \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall (x,y) \in \Omega,\ f(x,y) = \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2) - y^2) + \lambda.
\end{aligned}$$

Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2) - y^2) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Les fonctions précédentes sont encore des primitives de ω sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et donc ω est exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(d) ω est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc ω est exacte sur $]0,+\infty[^2$ si et seulement si ω est fermée sur $]0,+\infty[^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right) = \frac{1}{x^2y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right) = -\frac{1}{x^2y^2}$. Donc $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right) \neq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right)$ et ω n'est pas exacte sur $]0,+\infty[^2$.
On cherche un facteur intégrant de la forme $h\ :\ (x,y) \mapsto g(x^2+y^2)$ où g est une fonction non nulle de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}g(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}g(x^2+y^2)\right) = -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned}
h\omega \text{ est exacte sur }]0,+\infty[^2 &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2) = -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2}g'(x^2+ \\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}g'(x^2+y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t > 0,\ -tg'(t) + g(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall t > 0,\ g(t) = \lambda t.
\end{aligned}$$

La forme différentielle $(x^2+y^2)\omega$ est exacte sur $]0,+\infty[^2$. De plus,

$$d\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right)dy = (x^2+y^2)\omega.$$

Correction de l'exercice 5588 ▲

(a) C est l'arc paramétré $t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{2}, t\right)$, t variant en croissant de -1 à 1.

$$\int_C \omega = \int_{-1}^{1} \left(\frac{(t^2-1)/2}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} t + \frac{t}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} \right) dt$$
$$= 0 \text{ (fonction impaire)}.$$

$$\boxed{\int_C \omega = 2\ln 2.}$$

(b)

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} ((\cos t - \sin^3 t)(-\sin t) + \cos^3 t(\cos t))dt = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t - \cos t \sin t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin t)dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin^2(2t)}{2}\right) dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{1}{4}(1-\cos(4t))\right) dt = 2\pi \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\boxed{\int_C \omega = \frac{3\pi}{2}.}$$

(c)

$$\int_C \omega = \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t \cos t \sin t)(-\sin t)\, dt = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^3 t\, dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \cos^4 t \sin t)dt = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$
$$= -\frac{2}{15}.$$

$$\boxed{\int_C \omega = -\frac{2}{15}.}$$

Correction de l'exercice 5589 ▲

(a) $\omega = x^2dx + y^2dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et est fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de SCHWARZ. Par suite, l'intégrale de ω le long de tout cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique est nulle.

(b) $\omega = y^2dx + x^2dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et n'est pas fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2$. L'intégrale de ω le long d'un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique n'est plus nécessairement nulle.
On parcourt le cercle C le cercle de centre (a,b) et de rayon $R > 0$ une fois dans le sens trigonométrique ou encore on considère l'arc paramétré $\gamma\ :\ t \mapsto (a + R\cos t, b + R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à 2π.

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left((b+R\sin t)^2(-R\sin t)+(a+R\cos t)^2(R\cos t)\right)\, dt\\
&= R\int_0^{2\pi} (a\cos t - b\sin t + 2aR\cos^2 t - 2bR\sin^2 t + R^2(\cos^3 t - \sin^3 t))\, dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi} (2a\cos^2 t - 2b\sin^2 t + R(\cos^3 t - \sin^3 t))\, dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi} (a(1+\cos t) - b(1-\cos t) + R(\cos t - \sin t)(\cos^2 t + \cos t\sin t + \sin^2 t))\, dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi} (a-b+R(\cos t - \sin t)(1+\cos t\sin t))\, dt\\
&= R^2\left(2\pi(b-a)+\int_0^{2\pi} R(\cos t - \sin t + \cos^2 t\sin t - \cos t\sin^2 t)\, dt\right)\\
&= 2\pi R^2(b-a).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5590 ▲

(a) La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. D'après le théorème de SCHWARZ, sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, la forme différentielle ω est exacte si et seulement si la forme différentielle ω est fermée.
Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, posons $P(x,y)=\frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x)$ et $Q(x,y)=\frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\cos x + y\sin x)$.
Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2xe^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\cos x+y\sin x)+\frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-x\sin x+\cos x+y\cos x)\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-2x(x\cos x+y\sin x)+(x^2+y^2)(-x\sin x+\cos x+y\cos x))\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x+(-2xy-x^3-xy^2)\sin x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x-y\cos x)+\frac{-2ye^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\sin x-y\cos x)+\frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-\cos x)\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-(x^2+y^2)(x\sin x-y\cos x)-2y(x\sin x-y\cos x)-(x^2+y^2)\cos x)\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x+(-2xy-x^3-xy^2)\sin x)\\
&= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

Finalement, la forme différentielle ω est exacte sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
On choisit $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,y),\ y\leqslant 0\}$. Ω est un ouvert étoilé (en tout point de la forme $(0,y)$, $y>0$) de $\mathbb{R}^2$ contenant le contour fermé Γ. Puisque ω est exacte sur Ω, on sait alors que $\int_\Gamma \omega = 0$.

(b) Le contour Γ est constitué de 4 arcs :
- Γ_1 est l'arc $t\mapsto(t,0)$, t variant en croissant de r à R,
- Γ_2 est l'arc $t\mapsto(R\cos t, R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à π.
- Γ_3 est l'arc $t\mapsto(t,0)$, t variant en croissant de $-R$ à $-r$,

• Γ_4 est l'arc $t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$, t variant en décroissant de π à 0.
D'après la question 1), $\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega + \int_{\Gamma_4} \omega = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \omega &= \int_r^R (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt = \int_r^R P(t,0)\,dt\\ &= \int_r^R \frac{1}{t^2} \times t\sin t\,dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\,dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_3} \omega = \int_{-R}^{-r} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\,dt$ (puisque la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est paire) et donc $\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = 2\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$ puis pour tout $(r,R) \in]0,+\infty[^2$ tel que $r < R$,

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_4} \omega\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \omega &= \int_0^\pi (P(R\cos t, R\sin t)(-\sin t) + Q(R\cos t, \sin t)(\cos t))\,dt\\ &= \int_0^\pi e^{-R\sin t}((\cos t\sin(R\cos t) - \sin t\cos(R\cos t))(-\sin t) + (\cos t\cos(R\cos t) + \sin t\sin(R\cos t))(\cos t))\,d\\ &= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_4} \omega = \int_\pi^0 e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt = -\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$ et on a montré que

$$\boxed{\forall (r,R) \in]0,+\infty[^2,\ r < R \Rightarrow \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt - \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right).}$$

(c) • Etudions $\lim_{R\to+\infty} \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt$. Pour $R > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right| &\leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,|\cos(R\cos t)|\,dt \leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt\\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-R(2t/\pi)}\,dt \text{ (la fonction sinus étant concave sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right])\\ &= \frac{\pi}{R}\left[-e^{-2Rt/\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{R}(1 - e^{-2R})\\ &\leqslant \frac{\pi}{R}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{R}$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, $\lim_{R\to+\infty} \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt = 0$. On en déduit que pour tout $r > 0$, l'intégrale $\int_r^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge en $+\infty$ et que

$$\boxed{\forall r > 0,\ \int_r^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt.}$$

• Etudions maintenant $\lim_{r\to 0} \int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$. Soit $F : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (r,t) & \mapsto & e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\end{array}$.

- Pour tout réel $r \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto F(r,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$.
- Pour tout réel $t \in [0,\pi]$, la fonction $r \mapsto F(r,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $(r,t) \in [0,+\infty[\times[0,\pi]$, $|F(r,t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $r \mapsto \int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt = \int_0^{\pi} e^0\cos(0)\,dt = \pi,$$

et finalement que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Correction de l'exercice 5591 ▲

Supposons tout d'abord que le support de l'arc γ est de longueur $L = 2\pi$. Puisque γ est un arc de classe C^1 régulier, on peut choisir pour γ une paramétrisation normale c'est-à-dire une paramétrisation de classe C^1 $t\mapsto (x(t),y(t))$, $t\in[0,2\pi]$, telle que $\forall t\in[0,2\pi]$, $x'^2(t)+y'^2(t) = 1$. L'arc étant fermé, on a de plus $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Cette dernière condition permet de prolonger les fonctions x et y en des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux et 2π-périodiques.

Puisque les fonctions x' et y' sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de PARSEVAL permet d'écrire

$$\begin{aligned}
L = 2\pi &= \int_0^{2\pi} 1\,dt = \int_0^{2\pi}(x'^2(t)+y'^2(t))\,dt = \int_0^{2\pi} x'^2(t)\,dt + \int_0^{2\pi} y'^2(t)\,dt\\
&= \pi\left(\frac{a_0^2(x')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x')+b_n^2(x')) + \frac{a_0^2(y')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(y')+b_n^2(y'))\right)\\
&= \pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x')+b_n^2(x')+a_n^2(y')+b_n^2(y'))\right)\ \left(a_0(x') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x'(t)\,dt = \frac{1}{\pi}(x(2\pi)-x(0)) = 0 = a_0(y')\right)\\
&\pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n^2(a_n^2(x)+b_n^2(x)+a_n^2(y)+b_n^2(y))\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de GREEN-RIEMANN

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_\gamma x dy = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}((x(t)+y'(t))^2-(x(t)-y'(t))^2)\,dt\\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{a_0^2(x+y')}{2}-\frac{a_0^2(x-y')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x+y')-a_n^2(x-y')+b_n^2(x+y')-b_n^2(x-y'))\right)\\
&= \pi\left(\frac{a_0(x)a_0(y')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(x)a_n(y')+b_n(x)b_n(y'))\right)\ \text{(par linéarité des coefficients de FOURIER)}\\
&= \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n(a_n(x)b_n(y)-b_n(x)a_n(y))\\
&\leqslant \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y)) = \frac{\mathscr{L}}{2}\times\frac{\mathscr{L}}{\pi} = \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Si on a l'égalité, alors les inégalités valables pour $n\geqslant 1$,

$$n(a_n(x)b_n(y)-b_n(x)a_n(y)) \leqslant n\times\tfrac{1}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y)) \leqslant \tfrac{n^2}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y)),$$

sont des égalités. En particulier, pour $n\geqslant 2$, on a $a_n(x) = a_n(y) = b_n(x) = b_n(y) = 0$. D'autre part, quand $n = 1$, $a_1(x)b_1(y)-b_1(x)a_1(y) = \frac{1}{2}(a_1^2(x)+b_1^2(y)+b_1^2(x)+a_1^2(y))$ impose $(a_1(x)-b_1(y))^2+(b_1(x)+a_1(y))^2 = 0$ et donc $a_1(y) = -b_1(x)$ et $b_1(y) = a_1(x)$.

D'après le théorème de DIRICHLET, en posant $\alpha = \frac{a_0(x)}{2}$, $\beta = \frac{a_0(y)}{2}$, $a = a_1(x)$ et $b = b_1(x)$,

$$\forall t\in[0,2\pi],\ \begin{cases} x(t) = \alpha + a\cos t + b\sin t = \alpha+\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-t_0)\\ y(t) = \beta - b\cos t + a\sin t = \beta+\sqrt{a^2+b^2}\sin(t-t_0)\end{cases}$$

où $\cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Le support de l'arc γ est donc un cercle. La réciproque est claire.

L'inégalité isopérimétrique est donc démontrée dans le cas où $L = 2\pi$ et on a l'égalité si et seulement si le support de l'arc γ est un cercle. Dans le cas où la longueur de la courbe C est un réel strictement positif $\mathscr{L}$ quelconque, l'homothétique (C') de (C) dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2\pi}{\mathscr{L}}$ a une longueur $\mathscr{L}'$ égale à 2π et délimite une aire $\mathscr{A}' = \left(\frac{2\pi}{\mathscr{L}}\right) \times \mathscr{A}$.

L'inégalité $\mathscr{A}' \leqslant \frac{\mathscr{L}'^2}{2\pi} = 2\pi$ s'écrit encore $\mathscr{A} \leqslant 2\pi \times \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi^2} = \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}$. De plus on a l'égalité si et seulement si la courbe (C) est un cercle (dans ce cas, $\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} = \pi R^2 = \mathscr{A}$).

$$\boxed{\mathscr{A} \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi} \text{ avec égalité si et seulement si la courbe } (C) \text{ est un cercle.}}$$

(A périmètre donné, le cercle est la courbe fermée délimitant la plus grande aire)

Correction de l'exercice 5592 ▲

(a) Pour ω_1, on pose $P(x,y) = 2xy$ et $Q(x,y) = x^2$. Comme ω_1 est définie sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, le théorème de Poincaré permet de dire que ω_1 est exacte. On cherche f tel que $df = \omega_1$. Ceci équivaut à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & x^2 \end{array}\right.$$

En intégrant la première ligne par rapport à x, on trouve $f(x,y) = x^2 y + c(y)$. En dérivant l'expression que l'on vient d'obtenir par rapport à y et en identifiant avec la deuxième ligne du système, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + c'(y) = x^2.$$

Il s'ensuit que $c'(y) = 0$ et donc que $c(y) = c \in \mathbb{R}$. Par suite, la fonction f cherchée est :

$$f(x,y) = x^2 y + c$$

où c est une constante réelle.

(b) Pour ω_2, on pose $P(x,y,z) = xy$, $Q(x,y,z) = -z$ et $R(x,y,z) = xz$. On constate que $\frac{\partial P}{\partial y} = x$ alors que $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. La forme ω_2 n'est donc pas exacte.

(c) Pour ω_3, on pose $P(x,y) = 2xe^{x^2-y}$ et $Q(x,y) = -2e^{x^2-y}$. Là aussi, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ puisque $\frac{\partial P}{\partial y} = -2xe^{x^2-y}$ alors que $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4xe^{x^2-y}$; ω_3 n'est donc pas exacte.

(d) Pour ω_4, posons $P(x,y,z) = yz^2$, $Q(x,y,z) = xz^2 + z$, $R(x,y,z) = 2xyz + 2z + y$. On constate que

i. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z^2$

ii. $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2zy$

iii. $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2xz + 1$.

La forme ω_4 est de plus définie sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^3$, elle est donc exacte d'après le théorème de Poincaré. Cherchons maintenant f telle que $df = \omega_4$, ceci revient à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} & = & yz^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & xz^2 + z \\ \frac{\partial f}{\partial z} & = & 2xyz + 2z + y \end{array}\right.$$

En intégrant la première équation par rapport à x, on trouve

$$f(x,y,z) = xyz^2 + \psi(y,z).$$

Maintenant, en dérivant l'expression obtenue successivement par y et z et en égalisant avec les deux dernières équations du système, on obtient un nouveau système

$$\begin{cases} xz^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} & = & xz^2 + z \\ 2xyz + \frac{\partial \psi}{\partial z} & = & 2xyz + 2z + y \end{cases}$$

qui équivaut à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} & = & z \quad (1) \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} & = & 2z + y \quad (2) \end{cases}$$

Finalement, en intégrant (1) par rapport à y, il vient $\psi(y,z) = zy + c(z)$. En dérivant cette expression de ψ par rapport à z et en égalisant avec (2), on trouve $y + c'(z) = 2z + y$, c'est-à-dire $c'(z) = 2z$ donc $c(z) = z^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f telle que $\omega_4 = df$ est de la forme

$$f(x,y,z) = xyz^2 + zy + z^2 + c$$

où $c \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5593 ▲

(a) On vérifie que :

i. $dx = \cos\varphi\cos\theta dr - r\sin\varphi\cos\theta d\varphi - r\sin\theta\cos\varphi d\theta$

ii. $dy = \cos\varphi\sin\theta dr - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi + r\cos\theta\cos\varphi d\theta$

iii. $dz = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi$.

Par suite, on a :

i. $xdx = r\cos^2\varphi\cos^2\theta dr - r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta d\varphi - r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi d\theta$

ii. $ydy = r\cos^2\varphi\sin^2\theta dr - r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta d\varphi + r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi d\theta$

iii. $zdz = r\sin^2\varphi dr + r^2\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$.

(b) En additionnant, on obtient $xdx + ydy + zdz = rdr$. On en déduit que :

$$xdx + ydy + zdz = r(\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz).$$

Ainsi

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Correction de l'exercice 5594 ▲

(a) Posons $P(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ et $Q(x,y) = 2y$. On voit facilement que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. La forme ω n'est donc pas exacte.

(b) Comme ω est définie sur $\mathbb{R}^2$, il suffit que $\psi\omega$ soit exacte pour que f existe. Maintenant, $\psi\omega$ est exacte si et seulement si

$$\frac{\partial(\psi(x)(x^2+y^2+2x))}{\partial y} = \frac{\partial(\psi(x)2y)}{\partial x}.$$

Ceci équivaut à $2y\psi(x) = 2y\psi'(x)$. Ainsi, $\psi(x) = \psi'(x)$ pour tout x. Donc $\psi(x) = ke^x$ avec k constante. On peut choisir $k = 1$. Ainsi

$$\psi\omega = e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + e^x(2y)dy.$$

On cherche ensuite f telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & e^x(x^2 + y^2 + 2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & e^x(2y) \end{cases}$$

En intégrant la deuxième équation par rapport à y, on trouve

$$f(x,y) = e^x y^2 + c(x).$$

En dérivant cette expression par rapport à x et en égalisant avec la première équation du système, on obtient

$$e^x y^2 + c'(x) = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$$

c'est-à-dire

$$c'(x) = e^x(x^2 + 2x).$$

Il en résulte que $c(x) = x^2 e^x + c$ et donc que

$$f(x,y) = e^x(x^2 + y^2) + c$$

avec c dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5595 ▲

Au champ $\vec{V}(x,y)$ est associée la forme

$$\omega = (1+2xy)dx + (x^3 - 3)dy.$$

Cette forme n'est pas exacte puisque $\frac{\partial(1+2xy)}{\partial y} \neq \frac{\partial(x^3-3)}{\partial x}$. Il s'ensuit que $V(\vec{x},y)$ n'est pas un champ de gradient.

Correction de l'exercice 5596 ▲

Le champ vectoriel qui dérive du potentiel U est

$$\vec{\text{grad}}(U) = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}).$$

Il s'agit donc du champ vectoriel de composantes :

$$\vec{\text{grad}}(U) = (1 + y + yz, x + xz, xy).$$

Correction de l'exercice 5597 ▲

Soit $\omega = 3xdx + (x+y)dy$ la forme différentielle naturellement associée à $\vec{V}(x,y)$ et considérons $x = \cos t$ et $y = \sin t$ comme paramétrage du cercle de centre O et de rayon 1 (avec $t \in [0;2\pi]$). Il s'ensuit que la circulation $\int_C \vec{V}.\vec{dl}$ n'est autre que :

$$\int_C \vec{V}.\vec{dl} = \int_C w = \int_0^{2\pi} (3\cos t(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\cos t)dt.$$

Comme $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, on obtient :

$$\int_C \vec{V}.\vec{dl} = \int_0^{2\pi} (-2\sin t\cos t + \frac{\cos(2t)+1}{2})dt = [\cos^2(t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}]_0^{2\pi} = \pi.$$

Remarquons que si la forme ω avait été exacte, on aurait obtenu $\int_C \vec{V}.\vec{dl} = 0$ comme réponse, puisque l'intégrale curviligne d'une forme exacte sur une courbe fermée est nulle.

Correction de l'exercice 5598 ▲

Notons $\omega = yzdx + zxdy + xydz$ la forme différentielle associée à $\vec{F}(x,y,z)$. Par définition de W, on a $W = \int_H \vec{F}.\vec{dl} = \int_H \omega$. D'après le paramétrage donné pour H, on a

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} yzdx + zxdy + xydz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\sin t)t(-\sin t) + t\cos^2 t + \cos t \sin t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (t\cos(2t) + \cos t \sin t)dt. \end{aligned}$$

On a utilisé ici la formule trigonométrique : $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$. En faisant une intégration par parties, on constate que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t)dt = [\frac{t\sin(2t)}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2t)}{2}dt.$$

On en déduit que

$$W = [\frac{t\sin(2t)}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}[\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}[\sin^2(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Remarquons que $\omega = yzdx + zxdy + xydz$ est exacte. De plus, on vérifie aisément que $\omega = d(xyz)$. On peut alors retrouver le résultat précédent en faisant :

$$W = f(B) - f(A)$$

où l'on a posé $f(x,y,z) = xyz$,

$$B = (\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}), \frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$$

et

$$A = (\cos(0), \sin(0), 0) = (1,0,0).$$

Correction de l'exercice 5599 ▲

(a) On note $P(x,y,z) = y^2\cos x$, $Q(x,y,z) = 2y\sin x + e^{2z}$ et $R(x,y,z) = 2ye^{2z}$. La forme $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, naturellement associée au champ $\vec{V}(x,y,z)$, est exacte puisqu'elle est définie sur $\mathbb{R}^3$ et
  i. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x$
  ii. $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$
  iii. $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2e^{2z}$.

  Le champ $\vec{V}(x,y,z)$ est donc un champ de gradient.

(b) Cherchons U tel que $\omega = dU$. Cela nous conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} &= y^2\cos x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 2y\sin x + e^{2z} \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 2ye^{2z} \end{cases}$$

En intégrant la première équation par rapport à x, on trouve :

$$U(x,y,z) = y^2\sin x + \psi(y,z).$$

Maintenant, en utilisant les deux dernières équations, on est amené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= e^{2z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 2ye^{2z} \end{cases}$$

Par suite, on vérifie que $\psi(y,z) = e^{2z}y + c(z)$ avec $c'(z) = 0$. Donc $c(z) = c$ avec c constante réelle et finalement :

$$U(x,y,z) = y^2 \sin x + e^{2z}y + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, on veut que $U(0,0,0) = 1$ ce qui donne $c = 1$.

(c) La circulation du champ de $A(0,1,0)$ à $B(\frac{\pi}{2},3,0)$ est

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{V}.\vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} \omega = U(B) - U(A) = U(\frac{\pi}{2},3,0) - U(0,1,0) = 11.$$

Remarquons que lorsque ω est exacte, pour calculer l'intégrale curviligne de ω sur un chemin, il suffit de connaître l'origine et l'extrémité du chemin. Autrement dit, l'intégrale curviligne d'une forme exacte sur $\widehat{AB}$ ne dépend que de A et de B, et non du chemin choisi pour aller de A à B.

Correction de l'exercice 5600 ▲

On rapporte le plan à un repère orthonormé direct d'origine O. D'après la formule de Green-Riemann, en choisissant de prendre $P = 0$ et $Q = x^2y$ de sorte que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy$, on obtient :

$$I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_T x^2ydy$$

où l'on a noté T le triangle OAB orienté dans le sens direct avec $O(0,0)$, $A(1,0)$ et $B(1,1)$. Ainsi

$$I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_{\widehat{OA}} x^2ydy + \int_{\widehat{AB}} x^2ydy + \int_{\widehat{BO}} x^2ydy.$$

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur un chemin est indépendant du paramétrage choisi pour ce chemin. Pour le calcul, nous choisissons de paramétrer $\widehat{OA}$ par $x = t$ et $y = 0$ avec t variant de 0 à 1 et ainsi $\int_{\widehat{OA}} x^2ydy = 0$. De même, nous choisissons de paramétrer $\widehat{BO}$ par $x = 0$ et $y = t$ avec t variant de 1 à 0 et ainsi $\int_{\widehat{BO}} x^2ydy = 0$. Enfin, nous choisissons de paramétrer $\widehat{AB}$ par $x = t$ et $y = 1-t$ avec t allant de 1 à 0 et donc :

$$I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_{\widehat{AB}} x^2ydy = \int_1^0 \frac{t^2(1-t)}{2}(-dt) = \int_0^1 \frac{t^2(1-t)}{2}dt = \frac{1}{24}.$$

Remarquons qu'il n'aurait pas été plus difficile ici de calculer directement l'intégrale double sans utiliser la formule de Green-Riemann :

$$\iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_{0^1}(\int_0^{1-x} xydy)dx = \int_0^1 x[\frac{y^2}{2}]_0^{1-x}dx = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{24}.$$

Correction de l'exercice 5601 ▲

(a) La forme $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Paramétrons le cercle C par $x = \cos t$, $y = \sin t$ avec $t \in [0;2\pi]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

(c) La forme ω n'est pas exacte, sinon son intégrale curviligne sur la courbe fermée C serait nulle et cela contredirait notre résultat de la question précédente. Remarquons cependant que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2}) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

En fait, avec cet exemple, on voit que dans le théorème de Poincaré, l'hypothèse que l'ouvert doit être étoilé, est indispensable. Ici $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ n'est pas étoilé, c'est un domaine "troué". De plus, $\int_C \omega$ n'est pas nulle car le cercle entoure le "trou".

Correction de l'exercice 5602 ▲

Droite orthogonale à $\vec{S}\wedge\vec{u}$, $\vec{u}\perp\vec{\mathscr{P}}$, ou $\varnothing$ ou $\mathscr{P}$.

Correction de l'exercice 5605 ▲

Soit $\mathscr{T}$ un torseur : on décompose $\mathscr{T}(A)$ en $\alpha\vec{AB}\wedge\vec{BC}+\beta\vec{AB}\wedge\vec{BD}+\gamma\vec{AC}\wedge\vec{CD}$, et $\vec{R}$ en $\alpha'\vec{AB}+\beta'\vec{AC}+\gamma'\vec{AD}$.

$\Rightarrow$ famille génératrice.

Correction de l'exercice 5607 ▲

(a) Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $f(x,y)=x^4-x^3+xy-y^2$ puis pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $g(x,y,z)=z-f(x,y)$. $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z=f(x,y)$ ou encore $g(x,y,z)=0$.
La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, g\right)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x^3+3x^2-y \\ -x+2y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Donc, la surface $\mathscr{S}$ est régulière et en tout point (x_0,y_0,z_0) de la surface $\mathscr{S}$, le vecteur gradient est un vecteur normal au plan tangent $\mathscr{P}_0$ à la surface $\mathscr{S}$ en (x_0,y_0,z_0). Le plan

$$\mathscr{P}_0 \text{ parallèle à } \left(O,\vec{i},\vec{j}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4x_0^3+3x_0^2-y_0=0 \\ -x_0+2y_0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0=2y_0 \\ -y_0(32y_0^2-12y_0+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0=2y_0 \\ -y_0(32y_0^2-12y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y_0=0=x_0 \text{ ou } (y_0=\frac{1}{4} \text{ et } x_0=\frac{1}{2}) \text{ ou } (y_0=\frac{1}{8} \text{ et } x_0=\frac{1}{4})$$

On obtient ainsi les trois points $O(0,0,0)$, $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0\right)$ et $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{256}\right)$.

(b) La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$rt-s^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)^2 = (12x^2-6x)(-2)-1^2 = -24x^2+12x-1$$

• En O, le plan tangent est le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. De plus, $(rt-s^2)(0,0)=-1<0$. Donc le point O est un point selle.

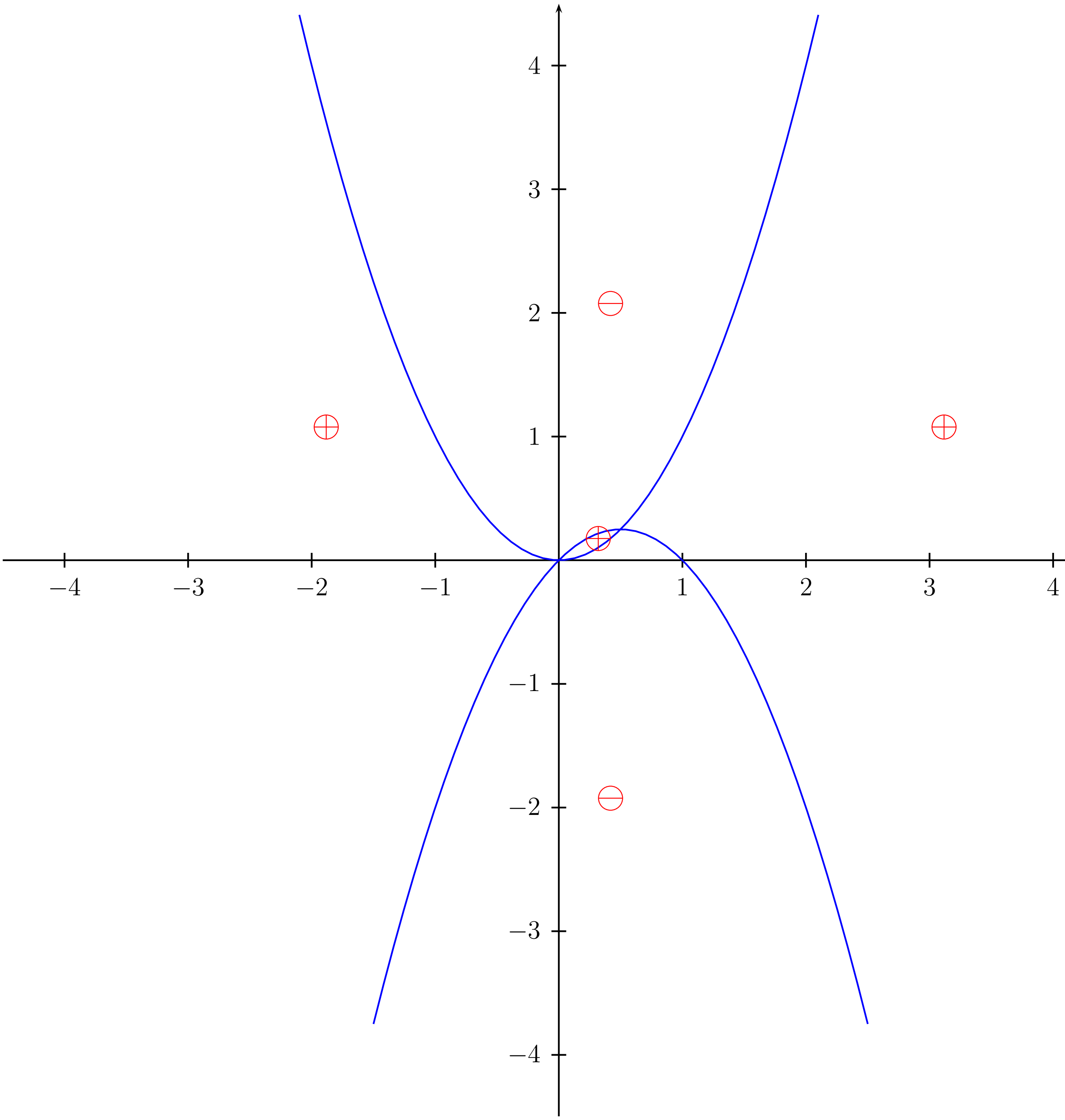
• En A, le plan tangent est aussi le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. De plus, $(rt-s^2)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=-1<0$. Donc le point A est un point selle.

• En B, le plan tangent est le plan d'équation $z=\frac{1}{256}$. De plus, $(rt-s^2)\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}>0$. Donc la surface $\mathscr{S}$ a une disposition en ballon au point B.

(c) Il s'agit maintenant d'étudier le signe de $z=f(x,y)=x^4-x^3+xy-y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y)=x^4-x^3+xy-y^2=(x^4-y^2)-x(x^2-y)=(x^2-y)(x^2+y-x).$$

L'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donc la réunion des deux paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $y = -x^2 + x$ dans le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Représentons cette intersection ainsi que le signe de $f(x, y) \oplus \ominus$.



Correction de l'exercice 5609 ▲

$4x^2 + 4y^2 - 3z^2 = a^2$.

Correction de l'exercice 5610 ▲

(Γ) est l'intersection d'un cylindre hyperbolique et d'un plan. C'est une hyperbole dans ce plan.

Pour $M(x,y,z) \in \Gamma$, on pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et on élimine x et y entre les équations :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ x^2-y^2-4x+2=0 \\ x+z=1. \end{cases}$$

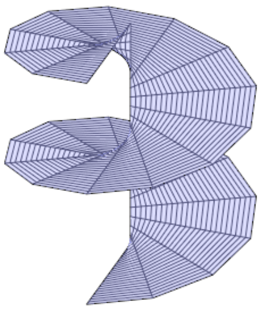
ce qui donne $2z^2 = r^2$, donc Γ est incluse dans l'hyperboloïde de révolution d'équation $2z^2 = x^2+y^2$ et la surface cherchée itou. La réciproque est évidente.

Correction de l'exercice 5611 ▲

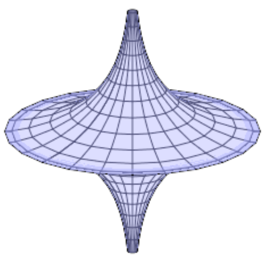
(a) $\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} - \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)x - \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} + \rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)y + \rho z = \rho f - \rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}$.

(b) $f - \rho\frac{\partial f}{\partial\rho} = a(\theta) \Rightarrow f(\rho,\theta) = a(\theta) + b(\theta)\rho$.

(c)



Correction de l'exercice 5612 ▲



Correction de l'exercice 5613 ▲

La normale en M est parallèle ou sécante à $Oz \Leftrightarrow y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial\theta} = 0 \Leftrightarrow f = f(\rho)$.

Correction de l'exercice 5615 ▲

(a) Hyperboloïde de révolution à deux nappes.

(b) $x = 2y$, $z^2 = 1 + 5y^2$.

Correction de l'exercice 5616 ▲

(a) $z = x^2 + y^2$.

(b) $x + y = \frac{1}{2}$.

(c) $(x - y + \frac{1}{2})^2 = 2(z - y + \frac{1}{4})$.

Correction de l'exercice 5617 ▲

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + 2z = 1$.

Correction de l'exercice 5620 ▲

(a) $\begin{pmatrix} (x+2y)(y+2z) \\ -(2x+y)(y+2z) \\ (2x+y)(2y+z) \end{pmatrix}$ sauf pour $M = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(1, -2, 1)$.

(b) $(x - z)(x + y + z) = 0$.

(c) segment $x = z \in [-1, 1]$ et ellipse $x^2 + z^2 + xz = 1$.

Correction de l'exercice 5621 ▲

$a^2y^2 = (x^2 + y^2)(r^2 - z^2)$.

Correction de l'exercice 5622 ▲

$y(x^2 + (y-1)^2 + z^2) = z^2$.

Correction de l'exercice 5623 ▲

$x = \frac{a}{2}(1 + \cos u)$, $y = \frac{v}{2}(1 + \cos u)$, $z = \frac{\sqrt{a^2+v^2}}{2}\sin u$.

Correction de l'exercice 5624 ▲

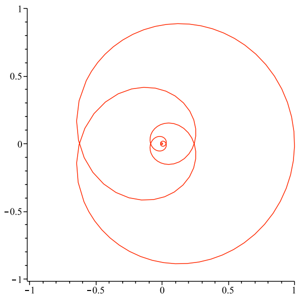
(a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(b) On paramètre (Σ) par : $\begin{cases} x = a\cos u/\operatorname{ch} v \\ y = a\sin u/\operatorname{sh} v \\ z = a\operatorname{th} v. \end{cases}$

La tangente à la méridienne passant par $M(u,v)$ est dirigée par $\frac{\partial\vec{M}}{\partial v}$ et la tangente à (Γ) passant par $M(t, mt)$ est dirigée par $\frac{\partial\vec{M}}{\partial u} + m\frac{\partial\vec{M}}{\partial v}$. Après calculs, le cosinus de ces deux vecteurs vaut $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$ donc est constant.

(c) Une courbe tracée sur (Σ) est définie par la donnée de u et v en fonction d'un paramètre t. Le cosinus de l'angle entre cette courbe et une méridienne de (Σ) vaut $\frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}$, donc est constant si et seulement si le rapport v'$_{\overline{u'}}$ est constant. En notant m cette constante et en prenant $u(t) = t$, on trouve les courbes déduites de (Γ) par rotation autour de Oz.

(d)



Correction de l'exercice 5625 ▲

Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a $20!$.

Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

(a) Choix des deux ex-aequo : $\binom{20}{2} = 190$ choix ;

(b) Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;

(c) Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a 18! choix.

Il y a au total : $19\binom{20}{2}(18!)$ choix possibles.

Correction de l'exercice 5626 ▲

- Une tenue est un triplet (P,T,C) : il y a $5 \times 6 \times 8 = 240$ tenues différentes ;
- «Il est tout en noir» : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2 \times 4 \times 5 = 40$ façons.

La probabilité de l'événement «Il est tout en noir» est donc : $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$.

- «Une seule pièce est noire sur les trois » : notons les événements : N_1 la première pièce (pantalon) est noire, N_2 la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, N_3 la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par : $(N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3)$. Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement «une seule pièce est noire sur les trois» est donc : 0.325.

Correction de l'exercice 5627 ▲

Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

Correction de l'exercice 5628 ▲

(a) Une grille-réponses est une suite ordonnée de 10 réponses, il y a 4 choix possibles pour chacune. Il y a donc 4^{10} grilles-réponses possibles.

(b) L'événement E «répondre au hasard au moins 6 fois correctement» est réalisé si le candidat répond bien à 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10 questions. Notons A_n l'événement : «répondre au hasard exactement n fois correctement». Alors, A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $10-n$ sont incorrectes : 3 choix sont possibles pour chacune de ces dernières. Comme il y a $\binom{10}{n}$ choix de n objets parmi 10, et donc il y a : $\binom{10}{n} \times 3^{10-n}$ façons de réaliser A_n et :

$$P(A_n) = \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}}$$

pour $n = 6,7,8,9,10$. $P(E) = \sum_{n=6}^{10} \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}} \simeq 1.9728 \times 10^{-2}$, soit environ 2%.

Correction de l'exercice 5629 ▲

Considérons plutôt l'événement complémentaire : l'oiseau n'est pas touché s'il n'est touché ni par Amédée, ni par Barnabé, ni par Charles. Cet événement a pour probabilité : $(1-0.7)\cdot(1-0.5)\cdot(1-0.9)=0.015$. La probabilité que l'oiseau soit touché est donc : $1-0.015=0.985$.

Correction de l'exercice 5630 ▲

L'univers des possibles est ici l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi les 300; il y en a $\binom{300}{10}$. Je ne gagne rien si les 10 billets achetés se trouvent parmi les 296 billets perdants, ceci avec la probabilité :

$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$

La probabilité cherchée est celle de l'événement complémentaire :

$$1-\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}\simeq 0.127.$$

La probabilité est environ 12.7% de gagner au moins un lot.

Correction de l'exercice 5631 ▲

$P(A\cap B)=pq$ car les maladies sont indépendantes. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=p+q-pq$

Correction de l'exercice 5632 ▲

Soit A : l'événement «tirer un roi» et B : «tirer un pique».
$P(A\cap B)=\frac{1}{52}; P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}; P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.
Donc $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ et donc les événements A et B sont indépendants.
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{52}=\frac{4}{13}$.

Correction de l'exercice 5633 ▲

Notons, pour le cas où la famille Potter comporte 2 enfants, l'univers des possibles pour les enfants : $\Omega=\{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\}$, représente les cas possibles, équiprobables, d'avoir garçon-garçon, garçon-fille etc... : Alors $P(A)=\frac{2}{4}$, $P(B)=\frac{3}{4}, P(A\cap B)=\frac{2}{4}$. On en conclut que : $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ et donc que les événements A et B ne sont pas indépendants.

Si maintenant la famille Potter comporte 3 enfants : Alors $\Omega'=\{(a,b,c)\mid a\in\{G,F\}, b\in\{G,F\}, c\in\{G,F\}\}$ représente les $2^3=8$ cas possibles, équiprobables. Cette fois, $P(A)=1-P(\{(G,G,G),(F,F,F)\})=\frac{6}{8}$; $P(B)=\frac{4}{8}, P(A\cap B)=P\{(F,G,G),(G,F,G),\{(G,G,F)\}=\frac{3}{8}$. On a $P(A)P(B)=\frac{3}{8}=P(A\cap B)$, et les événements A et B sont indépendants

Avec n enfants, on peut généraliser sans difficulté : $P(A)=1-\frac{2}{2^n}$, $P(B)=\frac{1+n}{2^n}$ $P(A\cap B)=\frac{n}{2^n}$ Un petit calcul montre que $P(A)P(B)=P(A\cap B)$ si et seulement si $n=3$.

Correction de l'exercice 5636 ▲

Pour gagner 10 euros, il faut avoir tiré exactement une boule rouge et 4 boules blanches, ou 2 boules vertes et 3 boules blanches. Ces deux événements, notés A et B, sont incompatibles. Ici l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 5 boules, c'est-à-dire l'ensemble des parties à 5 éléments d'un ensemble de 20 boules. Les $\binom{20}{5}=\frac{20.19.18.17.16}{5!}=15504$ combinaisons sont équiprobables. Les éléments de l'événement A sont les combinaisons formées de la boule rouge et d'une combinaison de 4 boules blanches. Il y en a $\binom{16}{4}=\frac{16.15.14.13}{4!}=1820$. Par conséquent, $p(A)=\frac{1820}{15504}$. Les éléments de l'événement

B sont les combinaisons formées d'une combinaison de deux boules vertes et d'une combinaison de 3 boules blanches. Il y en a $\binom{3}{2}\binom{16}{3} = 3.\frac{16.15.14}{6!} = 1680$. Par conséquent, $p(B) = \frac{1680}{15504}$. La probabilité de gagner 10 euros est donc égale à $p(A)+p(B) = \frac{3500}{15504} \simeq 0.225....$

Correction de l'exercice 5637 ▲

(a) Dés non pipés signifie que la probabilité de tirer 3 (ou tout autre chiffre) sur un dé est $1/6$. Les tirages étant indépendants, la probabilité d'avoir trois 3 est $(1/6)^3 = 1/216$.

(b) Il y a trois manières d'obtenir deux 2 et un 1, et 216 tirages possibles, donc la probabilité cherchée est $3/216 = 1/72$.

(c) $6/216$

(d) Un total de 9 s'obtient par l'une des additions suivantes,

$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3,$$

où on a rangé les résultats d'un tirage par ordre décroissant. On rencontre l'addition 6+2+1 dans $3! =$ 6 tirages différents. De même pour 5+3+1 et 4+3+2. En revanche, 5+2+2 et 4+4+1 ne correspondent qu'à 3 tirages et 3+3+3 à un seul. Il y a donc 6+6+6+3+3+1=25 tirages qui donnent une somme de 9. La probabilité que la somme soit 9 vaut donc $25/216$.

(e) Un total de 10 s'obtient par l'une des additions suivantes,

$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3.$$

On rencontre les additions 6+3+1, 5+4+1, 5+3+2 dans $3! = 6$ tirages différents. En revanche, 6+2+2, 4+4+2 et 4+3+3 ne correspondent qu'à 3 tirages. Il y a donc 6+6+6+3+3+3=27 tirages qui donnent une somme de 9. La probabilité que la somme soit 9 vaut donc $27/216$.

Correction de l'exercice 5640 ▲

(a) Soit X la variable aléatoire "nombre d'erreurs commises lors de la transmission de 5 bits". Alors X suit une loi binomiale $B(5;0,1)$. Recevoir une majorité de 1 alors que 00000 a été émis correspond à l'événement $X \geqslant 3$. Sa probabilité est
$P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}(0,1)^3(0,9)^2 + \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}(0,1)^4(0,9)^1 + \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}(0,1)^5(0,9)^0 =$ $0,0081+0,00045+0,00001 = 0,00856$.

(b) Recevoir une majorité de 1 alors que 11111 a été émis correspond à l'événement $X \leqslant 2$, i.e. au complémentaire du précédent. Sa probabilité est donc $1-0,00856 = 0,99144$. Par conséquent, au prix de multiplier par 5 le temps de transmission, on améliore considérablement la fiabilité.

Correction de l'exercice 5641 ▲

Notons les différents événements : Fe : «être femme», Lu : «porter des lunettes», H : «être homme»
Alors on a $P(Fe) = 0.6$, $P(Lu/Fe) = \frac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle probabilité de «porter des lunettes» sachant que la personne est une femme. De même, on a $P(Lu/H) = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $P(Fe/Lu)$. D'après la formule des probabilités totales on a : $P(Fe/Lu)P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe)$ avec $P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe) + P(Lu/H)P(H)$.
Application numérique : $P(Lu) = 0.4$, donc $P(Fe/Lu) = \frac{P(Lu/Fe)P(Fe)}{P(Lu)} = 0.5$. Remarque : on peut trouver les mêmes réponses par des raisonnements élémentaires.

Correction de l'exercice 5642 ▲

C'est évidemment le même que le précédent (exercice **??**), seul le contexte est différent : il suffit d'adapter les calculs faits. En pronostiquant un enfant, le présentateur a une chance sur deux environ de ne pas se tromper.

Correction de l'exercice 5643 ▲

Fumeurs

Définissons les événements : F_n «Fumer le $n^{\text{ème}}$ jour», et $\overline{F_n}$ l'événement complémentaire. Alors $\{\overline{F_n}, F_n\}$ constitue un système complet d'événements, $P_n = P(F_n)$; on peut donc écrire : $P(\overline{F_{n+1}}) = P(\overline{F_{n+1}}/F_n)P(F_n) + P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n})P(\overline{F_n})$.

Comme $P(\overline{F_{n+1}}/F_n) = 0.9$ et $P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}) = 0.3$ $1 - P_{n+1} = 0.9P_n + 0.3(1-P_n)$, soit $P_{n+1} = -0.6P_n + 0.7$. Notons (R) cette relation.

Pour connaître le comportement à long terme, il faut étudier cette suite récurrente ; il y a des techniques mathématiques pour ça, c'est le moment de s'en servir.

Cherchons la solution de l'équation «$\ell = -0.6\ell + 0.7$», la limite éventuelle satisfait nécessairement cette équation : faire un passage à la limite dans la relation (R), ou utiliser le théorème du point fixe.

On trouve $\ell = \frac{7}{16}$; alors, la suite $Q_n = (P_n - \ell)$ vérifie : $Q_{n+1} = -0.6Q_n$, ce qui permet de conclure : $Q_{n+1} = (-0.6)^n Q_1$ et comme $((-0.6)^n)$ est une suite qui tend vers 0, on peut dire que la suite (Q_n) tend vers 0 et donc que la suite (P_n) tend vers $\ell = \frac{7}{16}$.

Conclusion : la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n tend vers $\frac{7}{16} \simeq 0.4375$.

Correction de l'exercice 5644 ▲

$P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1}/E_n)P(E_n) + P(E_{n+1}/\overline{E_n})P(\overline{E_n}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. Donc $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$.

La suite $(P_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell = \ell$ soit $\ell = \frac{4}{13}$. Donc $P_n = \frac{4}{13} + a(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

Correction de l'exercice 5645 ▲

La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre B est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$. Je cherche donc n tel que : $1 - (\frac{4}{5})^n \geqslant 0.8$. On a facilement : $n \geqslant 8$.

Puis, je cherche m tel que : $1 - (\frac{4}{5})^m \geqslant 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%. Pour la probabilité 99%, $n \geqslant 21$.

Correction de l'exercice 5646 ▲

(a) Le taux global de personnes soulagées : $P(S) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.

(b) Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé : $P(A/S) = P(A \cap S)/P(S) = P(A)P(S/A)/P(S) = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%$.

Correction de l'exercice 5647 ▲

(a) Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est $P(CB/YB) = P(YB/CB)P(CB)/P(YB)$=$P(YB \cap CB)/P(YB) = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$.

(b) La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est $P(YB/CB) = P(YB \cap CB)/P(CB)$=$\frac{0.15}{0.25} = 0.6$.

(c) La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds,de ne pas avoir les yeux bruns. C'est $P(\text{non}YB/CB) = 1 - P(YB/CB) = 0.4$.

Correction de l'exercice 5648 ▲

On obtient par calcul direct ou par événement contraire la probabilité de voler : $1-p+p(1-q)^2$.

Correction de l'exercice 5649 ▲

(a) La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est $P(M/T^+) = P(T^+/M)P(M)/P(T^+)$ or $P(T^+) = P(T^+/M)P(M) + P(T^+/S)P(S) = 0.95 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.97 = 0.1255$. D'où : $P(M/T^+) = 23.7\%$.

(b) La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est $P(S/T^+) = 1 - P(M/T^+) = 76.3\%$.

(c) La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $P(M/T^-) = 0.0017$.

(d) La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1 - P(M/T^-) = 0.998 = 99.8\%$.

Correction de l'exercice 5650 ▲

Une manière de résoudre le problème est la suivante : puisqu'il y a 8 clés et que j'écarte une après l'autre les mauvaises clés, je considère comme ensemble de toutes les possibilités, toutes les permutations de ces huit clés : il y en a 8 !. Alors la solution de chaque question est basée sur le même principe :

(a) Les permutations (fictives) qui traduisent le cas (1) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $BMMMMMMM$, la lettre B désigne la bonne, M désigne une mauvaise. Il y a $7!$ permutations de ce type. Donc $P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$, on s'en doutait !

(b) De même, les permutations (fictives) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $MBMMMMMM$: il y en a encore 7 !, et la probabilité est la même.

(c) Le raisonnement permet en fait de conclure que la probabilité, avant de commencer, d'ouvrir la porte est la même pour le premier, deuxième,..., huitième essai.

Correction de l'exercice 5651 ▲

(a) L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles : il y en a $6! = 720$ (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard, $\frac{1}{6!}$.

(b) André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a $5!$ permutations pour ces derniers : $P(B) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$.

(c) André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a $4!$ permutations pour ces derniers : $P(C) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$.

(d) André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements D_1 : «André danse avec son épouse» ; D_2 : «René danse avec son épouse». Alors $D = D_1 \cup D_2$ et $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{10}$.

Correction de l'exercice 5652 ▲

(a) Combien de grilles ? Il y en a $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$

(b) Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ? Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à «choisir» parmi 49. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons Par exemple :

$$|\bullet\bullet||\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|$$

les gagnants sont : 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 14. Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes. Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38(=49-5-6)$ dans 7 boîtes. Il y a $\frac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.0591 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

Correction de l'exercice 5653 ▲

(a) $u_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}/Gn)P(Gn) + P(G_{n+1}/\overline{G_n})P(\overline{G_n}) = 0.6u_n + 0.3v_n$.
$v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n$.
Donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
Comme $u_n + v_n = 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1-u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $0.3 + 0.3\ell = \ell$, donc $\ell = \frac{3}{7}$. Donc $u_n = \frac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \frac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$.

Correction de l'exercice 5655 ▲

On note A l'événement “l'enfant a la maladie M”, A^c son complémentaire (événement “l'enfant n'a pas la maladie M”), B l'événement “l'enfant a une réaction positive au test”, B^c son complémentaire (événement “l'enfant a une réaction négative au test”). D'après l'énoncé, $P(A) = 0,01$, $P(A^c) = 0,99$, $P(B^c|A^c) = 0,9$ et $P(B|A) = 0,95$. Donc,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A\cap B) + P(A^c \cap B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ &= P(B|A)P(A) + (1-P(B^c|A^c))P(A^c) = 0,0095 + 0,099 = 0,1085. \end{aligned}$$

La probabilité qu'un enfant de moins de trois mois pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M est donnée par $P(A|B) = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{95}{1085} \simeq 0,088$. Un tel test serait d'une utilité discutable.

Correction de l'exercice 5658 ▲

La méthode la plus simple consiste à introduire la population totale N et à compter les daltoniens. Soit $d_H = 5\%$, $d_F = 0,25\%$ (taux de daltoniens chez les hommes et les femmes), $p_H = 48\%$, $p_F = 52\%$ (proportions d'hommes et de femmes dans la population). Le nombre d'hommes est Np_H, le nombre d'hommes daltoniens est Np_Hd_H. De même, le nombre de femmes daltoniennes est Np_Fd_F. La proportion de daltoniens hommes parmi les daltoniens est donc

$$\frac{\text{nombre de daltoniens hommes}}{\text{nombre de daltoniens}} = \frac{Np_Hd_H}{Np_Hd_H + Np_Fd_F} = \frac{p_Hd_H}{p_Hd_H + p_Fd_F} \approx 0,95.$$

La probabilité pour qu'un daltonien soit un homme est d'environ 95%.

Une formulation plus élaborée (mais strictement équivalente) consiste à utiliser la formule de Bayes. Soit H l'événement “être un homme” et D l'événement “être daltonien”. On veut calculer $P(H|D)$. Selon la formule de Bayes, $P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)}$. En utilisant que $P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)$ (formule des probabilités totales), on obtient

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)} = \frac{p_Hd_H}{p_Hd_H + p_Fd_F}.$$

Correction de l'exercice 5659 ▲

Soit U_1 l'événement “on tire la boule dans la première urne” et U_2 l'événement “on tire la boule dans la seconde urne”. Le choix de l'urne étant équiprobable, on a : $P(U_1) = P(U_2) = 0,5$. Soit B l'événement

“on tire une boule blanche”. L’énoncé donne les probabilités conditionnelles suivantes :
$P(B|U_1) = 30/40 = 0,75$ et $P(B|U_2) = 20/40 = 0,5$.
On cherche la probabilité $P(U_1|B)$. La formule de Bayes, appliquée à la partition (H_1,H_2), nous donne :

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1)P(U_1)}{P(B|U_1)P(U_1)+P(B|U_2)P(U_2)} = \frac{0,75\times 0,5}{0,75\times 0,5+0,5\times 0,5} = 0,6$$

(probabilité a posteriori)

Interprétation : avant de regarder la couleur de la boule, la probabilité d’avoir choisi la première urne est une probabilité a priori $P(U_1)$ soit 50 %. Après avoir regardé la boule, on révise notre jugement et on considère $P(U_1|B)$, soit 60 %.

Correction de l’exercice 5660 ▲

(a) On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres» $n = 5$, $p = \frac{3}{5}$. On obtient $P(A) = 1-(\frac{2}{5})^4 = 0.9744$, $P(B) = \binom{4}{2}(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2 = 0.3456$.

(b) La loi de probabilité de X est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres». $n = 10$, $p = \frac{3}{5}$, son espérance est $np = 6$, sa variance est $np(1-p) = \frac{12}{5}$.

Correction de l’exercice 5661 ▲

On utilise une loi hypergéométrique

$P(A) = 1-\frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 0.73626$

$P(B) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = 2.1978\times 10^{-2}$

$P(C) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = 0.49451$

Correction de l’exercice 5662 ▲

Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0.75$. Son espérance est $np = 15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15\cdot 0.25}$. La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15}0.75^{15}0.25^5 = 0.20233$.

Correction de l’exercice 5663 ▲

La variable aléatoire associée à ce problème est X «nombre de sujets révisés parmi les 3» ; son support est l’ensemble $\{0,1,2,3\}$. La loi de X est une loi hypergéométrique puisque l’événement $[X = k]$, pour k compris entre 0 et 3, se produit si le candidat tire k sujet(s) parmi les 60 révisés, et $3-k$ sujets parmi les 40 non révisés.
Alors :

(a) Les trois sujets tirés ont été révisés : $P[X = 3] = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.

(b) Deux des trois sujets tirés ont été révisés : $P[X = 2] = \frac{\binom{60}{2}\cdot\binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.

(c) Aucun des trois sujets : $P[X = 0] = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La loi de probabilité de X est donnée sur le support $\{0,1,2,3\}$ par :

$$P[X = k] = \frac{\binom{60}{k}\cdot\binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}$$

Résultats numériques :
$k=0: P[X=0] \simeq 6.110\times 10^{-2}$
$k=1: P[X=1] \simeq 0.289$
$k=2: P[X=2] \simeq 0.438$
$k=3: P[X=3] \simeq 0.212$
L'espérance est $E(X)=1.8$ (selon la formule $E(X)=np$).

Correction de l'exercice 5664 ▲

Puisque les réponses sont données au hasard, chaque grille-réponses est en fait la répétition indépendante de 20 épreuves aléatoires (il y a 4^{20} grilles-réponses). Pour chaque question la probabilité de succès est de $\frac{1}{4}$ et l'examinateur fait le compte des succès : la variable aléatoire X, nombre de bonnes réponses, obéit à une loi binomiale donc on a directement les résultats. Pour toute valeur de k comprise entre 0 et 20 : $P[X=k]=C_{20}^{k}(\frac{1}{4})^k(1-\frac{1}{4})^{20-k}$, ce qui donne la loi de cette variable aléatoire.
Quelle est l'espérance d'un candidat fumiste ? C'est $E(X)=np=5$

Correction de l'exercice 5665 ▲

Une variable aléatoire adaptée à ce problème est le nombre X de personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h. Compte tenu des hypothèses, on partage l'heure en 60 minutes. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=60$ et $p=0.1$. On est dans le cas de processus poissonnien : on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda=60\times 0.1=6$. L'espérance de X est donc $E(X)=6$;

On peut alors calculer les probabilités demandées : $P[X=k]=\frac{6^k e^{-6}}{k!}$. Valeurs lues dans une table ou calculées : $P[X=3]\simeq 0.9\%$; $P[X=4]\simeq 13.4\%$; $P[X=5]=P[X=6]\simeq 16.1\%$; $P[X=7]\simeq 13.8\%$; $P[X=8]\simeq 10.3\,\%$.
Remarque : de façon générale si le paramètre λ d'une loi de Poisson est un entier K, on a : $P[X=K-1]=\frac{K^{K-1}e^{-K}}{(K-1)!}=\frac{K^K e^{-K}}{K!}=P[X=K]$.
Calculons maintenant la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h : C'est $P[X\geqslant 10]=1-\sum_{k=0}^{9}\frac{6^k e^{-6}}{k!}\simeq 8.392\times 10^{-2}$.

Correction de l'exercice 5666 ▲

La probabilité $p=\frac{1}{100}$ étant faible, on peut appliquer la loi de Poisson d'espérance $100p=1$ au nombre X de centenaires pris parmi cent personnes. On cherche donc : $P[X\geqslant 1]=1-P[X=0]=1-e^{-1}\simeq 63\%$.
Sur un groupe de 200 personnes : l'espérance est 2 donc : $P[X'\geqslant 1]=1-e^{-2}\simeq 86\%$. La probabilité des événements : $[X'=1]$ et $[X'=2]$ sont les mêmes et valent : 0.14. Ainsi, sur 200 personnes, la probabilité de trouver exactement un centenaire vaut 0.14, égale à la probabilité de trouver exactement deux centenaires. Cette valeur correspond au maximum de probabilité pour une loi de Poisson d'espérance 2 et se généralise. Si X obeit à une loi de Poisson d'espérance K, alors le maximum de probabilité est obtenu pour les événements $[X=K-1]$ et $[X=K]$.

Correction de l'exercice 5667 ▲

(a) 30% est la probabilité de l'événement Panne, noté Pa ; la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans, d'être hors d'usage est $P(HU)=P(HU/Pa)P(Pa)+P(HU/nonPa)P(nonPa)=0.3\cdot 0.75+0.4\cdot 0.7=0.505$.

(b) La probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant est $P(\text{non}\,Pa/HU)=P(HU/\text{non}\,Pa)P(\text{non}\,Pa)/P(HU)=0.4\cdot 0.7/0.505=0.55446$.

(c) La loi de probabilité de X est une loi binomiale, $n=10$, $p=0.3$, espérance 3.

(d) $P[X=5]=\binom{10}{5}(0.3)^5(0.7)^5=0.10292$

Correction de l'exercice 5668 ▲

Le nombre X de personnes mesurant plus de 1.90m parmi 100 obéit à une loi de Poisson de paramètre $\frac{100}{80}$.

La probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1-P[X=0]=1-e^{-\frac{100}{80}}=1-e^{-\frac{5}{4}}=0.71350$.

Sur 300 personnes : la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1-P[Y=0]=1-e^{-\frac{300}{80}}=0.97648$.

Correction de l'exercice 5671 ▲

(a) Une lampe tirée au hasard a une probabilité de $0,2$ d'avoir une durée de vie inférieure à 3000 heures. Le nombre X de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 tiré au hasard est la somme de 15 variables de Bernoulli de paramètre $p=0,2$. Par conséquent, il suit une loi binomiale $B(15;0,2)$. Son espérance vaut $E(X)=15\times 0,2=3$.

(b) C'est $p(X=0)=\binom{15}{0}(0,2)^0(0,8)^{15}\sim 0,0352$.

(c) C'est $p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)$

$$\begin{aligned}
&= \binom{15}{0}(0,2)^0(0,8)^{15}+\binom{15}{1}(0,2)^1(0,8)^{14}+\binom{15}{2}(0,2)^2(0,8)^{13}\\
&= 0,0352+0,1319+0,2309\simeq 0,398.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5672 ▲

(a) La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n=23$, $p=0,75$: $P(X=k)=\binom{k}{n}p^k(1-p)^{n-k}$ si $0\leqslant k\leqslant n$. Son espérance est $np=17,25$.

(b) $P(X\leqslant 20)=1-P(X\in\{21,22,23\})\simeq 0,951$.

Correction de l'exercice 5673 ▲

(a) $Y\sim B(10,1/2)$, $X=Y/10$.

(b) $P(X>0,5)=P(Y>5)=P(Y=6,7,8,9,10)\simeq 0,377$.

(c) $P(0,4\leqslant X\leqslant 0,6)=P(4\leqslant Y\leqslant 6)=P(Y=4,5,6)\simeq 0,656$

(d) $P(3\leqslant Y\leqslant 7)\simeq 0,891$. $P(2\leqslant Y\leqslant 8)\simeq 0,978$. Donc $a=3$.

(e) Oui. Non.

Correction de l'exercice 5674 ▲

(a) C'est une loi de Poisson de paramètre 6 : $P(X=n)=e^{-6}\frac{6^n}{n!}$. La probabilité qu'il n'y ait aucun appel est $p(X=0)=e^{-6}\simeq 0,002$.

(b) Soit Y la variable aléatoire “Nombre d'appels reçus en 2 minutes”. Alors Y suit une loi de Poisson de paramètre 4. La probabilité qu'il y ait entre 0 et 4 appels est $P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)\simeq 0,629$. Donc $P(Y\geqslant 5)=1-P(Y\leqslant 4)\simeq 0,371$.

Correction de l'exercice 5675 ▲

(a) $P(X=k)=0,5^k0,5=0,5^{k+1}$ si $0\leqslant k\leqslant 4$, $P(X=5)=0,5^5$.

(b) $E(X)=\sum_{0\leqslant k\leqslant 5} kP(X=k)=\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}+3\frac{1}{16}+4\frac{1}{32}+5\frac{1}{32}=0,96875$.
$Y=$ nombre de garçons. Il y a exactement 1 garçon sauf s'il y a 5 filles. $P(Y=0)=0,5^5=1/32$. $E(Y)=P(Y=1)\times 1=0,96875$. $E(X)=E(Y)$, donc pas efficace.

Correction de l'exercice 5681 ▲

(a) Soit A l'événement "Charles n'a pas de chien" et B l'événement "Sophie n'a pas de chat". L'énoncé donne $P(B|A)=0,9$. Par conséquent, la probabilité pour que le ménage n'ait aucun animal est $P(A\cap B)=P(B|A)P(A)=0,9\times 0,8=0,72$.

(b) i. Z ne peut prendre que les valeurs 0, 1 et 2. L'événement $\{Z=0\}$ coïncide avec $A\cap B$, donc $P(Z=0)=0,72$. Il vient $P(Z=2)=1-P(Z=0)-P(Z=1)=1-0,72-0,1=0,18$.

ii. $E(Z)=0\cdot P(Z=0)+1\cdot P(Z=1)+2\cdot P(Z=2)=0,1+0,36=0,46$. $E(Z^2)=0^2P(Z=0)+1^2P(Z=1)+2^2P(Z=2)=0,1+0,72=0,82$, d'où $\mathrm{Var}(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=0,6084$, $\sigma(Z)=\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}=0,78$.

iii. On calcule $P(X=0 \text{ et } Y=0)=P(Z=0)=0,72$, $P(X=1 \text{ et } Y=1)=P(Z=2)=0,18$, $P(X=0 \text{ et } Y=1)=P(A\cap B^c)=P(B^c|A)P(A)=(1-P(B|A))P(A)=0,1\times 0,8=0,08$. On complète le tableau en utilisant le fait que le somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

	$Y=0$	$Y=1$	Total
$X=0$	0,72	0,08	0,8
$X=1$	0,02	0,18	0,2
Total	0,74	0,26	1

La dernière ligne du tableau donne la loi de Y, $P(Y=0)=0,74$ et $P(Y=1)=0,26$.

iv. On constate que $P(X=1 \text{ et } Y=1)=0,18$ n'est pas égal à $P(X=1)P(Y=1)=0,2\times 0,26$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Correction de l'exercice 5683 ▲

La probabilité qu'une bille soit rejetée est, en notant D la variable aléatoire «diamètre», $p=1-P[7.97\leqslant D\leqslant 8.03]$. Or $P[7.97\leqslant D\leqslant 8.03]=P[-\frac{0.03}{0.02}\leqslant\frac{D-8}{0.02}\leqslant\frac{0.03}{0.02}]=F(1.5)-F(-1.5)=0.8664$. La proportion de billes rejetées est donc $p=13.4\%$.

Correction de l'exercice 5684 ▲

(a) La probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm est : $P[X\leqslant 0.36]=P[\frac{X-0.3}{0.1}\leqslant 0.6]=0.726$, soit 72.6%.

La probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm est $P[0.25\leqslant X\leqslant 0.35]=2F(0.5)-1=0.383$, soit 38.3%.

(b) Pour $n=20$, la loi de $Z=\sum X_i$ est une loi normale de paramètres : d'espérance $E(Z)=20m=6$ et de variance $\mathrm{Var}\, Z=20\sigma=0.2$.

Correction de l'exercice 5685 ▲

Pour $n=2000$, la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» est une loi de Poisson de paramètre 2 : alors $P[N\leqslant 3]=0.86$.

Remarquons qu'en faisant l'approximation par une loi normale et en employant le théorème central limite, on obtient : $P[N\leqslant 3]\simeq 0.76$, et avec correction de continuité on obtient $P[N\leqslant 3]\simeq 0.85$.

Correction de l'exercice 5686 ▲

Par des méthodes analogues on trouve que la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6 mm est 14.3.

Correction de l'exercice 5687 ▲

Si X est de moyenne m et d'écart-type σ alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite. Donc si $P[X \leqslant 165]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{165-m}{\sigma}] = 0,56$. Or on peut lire dans la table de Gauss $F(0.15) = 0.5596$.
De même, si $P[X \geqslant 180]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \geqslant \frac{180-m}{\sigma}] = 0.1$. Donc $P[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{180-m}{\sigma}] = 0.9$ et l'on peut lire de même $F(1.28) = 0.8997$.
Pour trouver m et σ il suffit de résoudre le système d'équations : $\frac{165-m}{\sigma} = 0.15$ et $\frac{180-m}{\sigma} = 1.28$ d'où $\sigma \simeq 13.27$, $m \simeq 163$ cg. Alors, $P[X \geqslant 182] = P[\frac{X-m}{\sigma} \geqslant \frac{182-m}{\sigma}] = 1 - F(1.43) = 0.0764$.
Sur 10000 personnes on estime le nombre de personnes à soigner de l'ordre de 764 personnes ; en fait la théorie de l'estimation donnera une fourchette.

Correction de l'exercice 5688 ▲

(a) Loi binomiale $B(365; \frac{4}{365})$, approchée par la loi de Poisson de paramètre 4, d'espérance et variance 4.
(b) Loi binomiale $B(6; \frac{1}{2})$, d'espérance 3 et variance $\frac{3}{2}$.
(c) Loi hypergéométrique.

Correction de l'exercice 5689 ▲

(a) La loi de X est la loi binomiale $B(1000; 0.02)$, d'espérance 20, d'écart-type $\sqrt{19.6}$.
(b) En approchant cette loi par celle d'une loi normale de paramètre $m = 20$, écart-type $\sqrt{19.6}$. $P[18 \leqslant X \leqslant 22] = P[(17.5-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (X-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (22.5-20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.428$.
Sans correction de continuité on trouve $P[(17-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (X-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (22-20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.348$.
Approchée par la loi de Poisson de paramètres : espérance 20 et variance 20, on trouve $P[18 \leqslant X \leqslant 22] \simeq 0.423$.
Enfin par la vraie loi binomiale : on trouve $P[18 \leqslant X \leqslant 22] \simeq 0.427$.

Correction de l'exercice 5690 ▲

(a) Soit F l'événement «la pièce est fausse» ; soit U l'événement «la pièce est un euro» ; soit D l'événement «la pièce est deux euros». Alors $P(F) = P(F/U)P(U) + P(F/D)P(D) = 2.9\%$.
(b) On cherche $P(U/F) = (P(F/U)P(U))/P(F) = 51.7\%$.
(c) X la variable aléatoire «nombre de pièces fausses parmi 1000» obéit à une loi binomiale$B(1000; 5\%)$. Espérance : 50 ; écart-type : $\sigma = \sqrt{47.5}$. En approchant cette loi par une loi normale $N(50; \sigma)$, la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52 est : $P[(47.5-50)/\sigma \leqslant (X-50)/\sigma \leqslant (52.5-50)/\sigma] \simeq 28.3\%$.

Correction de l'exercice 5691 ▲

(a) La loi de X est une loi binomiale $B(180; \frac{1}{6})$ Espérance : 30 ; écart-type : $\sigma = \sqrt{25} = 5$.
(b) En approchant cette loi par une loi normale $N(30; \sigma)$ la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32 : $P[(28.5-30)/\sigma \leqslant (X-30)/\sigma \leqslant (32.5-30)/\sigma] \simeq 30.94\%$. Avec la vraie loi, on trouve la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32 est 30.86%.

Correction de l'exercice 5692 ▲

(a) Lorsque l'on tire un bulletin au hasard, la probabilité que ce soit un bulletin pour A est de 0.2.

(b) Il y a suffisamment de bulletins de vote en tout pour que l'on puisse assimiler ces tirages à des tirages avec remise; alors la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0.2$; or $np = 40$; on peut faire l'approximation normale. L'espérance de X est donc $m = 40$ et l'écart-type : $\sqrt{40 \times 0.8} = 4\sqrt{2}$.

(c) $P[X \geqslant 45] = 1 - P[X \leqslant 44] \simeq 1 - F(\frac{44.5-40}{4\sqrt{2}}) \simeq 21\%$, c'est la probabilité pour que le nombre de voix pour A soit supérieur à 45 dans un lot de 200 bulletins. De même, $P[30 \leqslant X \leqslant 50] \simeq F(\frac{50.5-m}{\sigma}) - F(\frac{29.5-m}{\sigma}) \simeq 93.6\%$.

(d) Reprenons le calcul pour le candidat B qui n'a obtenu que 2% des voix. Alors pour $n = 100$ et $p = 0.02$ l'approximation par une loi de Poisson d'espérance $\lambda = 2$ est légitime. On peut dire que $P[Y \geqslant 5] = 1 - P[Y \leqslant 4] = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-2}2^k}{k!}$, de l'ordre de 5%.

Enfin $P[1 \leqslant Y \leqslant 4] = \sum_{k=1}^{4} \frac{e^{-2}2^k}{k!} \simeq 0.812$.

Correction de l'exercice 5693 ▲

(a) i. Pour calculer la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année, posons le nombre de contrôles comme une variable aléatoire. Elle obéit à une loi binomiale $B(700; 0.1)$. On peut l'approcher par la loi normale $N(70; \sqrt{63})$.
$P[60 \leqslant X \leqslant 80] = P[-10/\sqrt{63} \leqslant X \leqslant 10/\sqrt{63}] \simeq 2F(10.5/\sqrt{63}) - 1 = 0.814$. La probabilité d'être contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année est 81.4.

ii. Calculons le prix que devrait payer le voyageur : $1,12 \times 700 = 784$ euros. Il est perdant si l'amende dépasse ce prix. Or l'amende est aX, si a est l'amende fixée par la compagnie.
On cherche donc a pour que : $P[aX \geqslant 784] \geqslant 0.75$: Soit $P[aX \leqslant 784] \leqslant 0.25$: Par lecture de table : $a = 784/64.642 = 12.128$ Il faut que l'amende dépasse 13 euros.

(b) Calculons le prix que devrait payer le voyageur : $1,12 \times 300 = 336$ euros Il est perdant si l'amende dépasse ce prix. Or l'amende est bX, si b est l'amende fixée par la compagnie. X obéit à une loi binomiale $B(300; 0.5)$. On cherche donc b pour que : $P[bX \geqslant 336] \geqslant 0.75$. Par un raisonnement analogue, on obtient cette fois le résultat : il suffit que l'amende dépasse 2 euros 30 !

Correction de l'exercice 5694 ▲

(a) $E(X_1) = 3.5$, $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{35}{12} \simeq 2,92$.

(b) X_1, X_2 sont indépendantes de même loi. D'où $E(S) = 2E(X_1) = 7$ et $\mathrm{Var}(S) = 2\mathrm{Var}(X_1) = \frac{35}{6}$.

Correction de l'exercice 5697 ▲

$E(X) = 2, E(Y) = 1/2, E(XY) = 3/2$, d'où $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1/2$. $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathrm{Var}(Y) = 1/2$, d'où $\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = 1/2$.

Correction de l'exercice 5698 ▲

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY)$ car $E(X) = E(U) - E(V) = 0$ (U, V ont même loi). $E(XY) = E((U-V)(U+V)) = E(U^2) - E(V^2) = 0$ (U, V ont même loi). D'où $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Correction de l'exercice 5699 ▲

Il faut que Mme Michel arrive entre 9h30 et 10h30. Intervalle de temps d'1h sur 4h, donc proba = 1/4.

Correction de l'exercice 5700 ▲

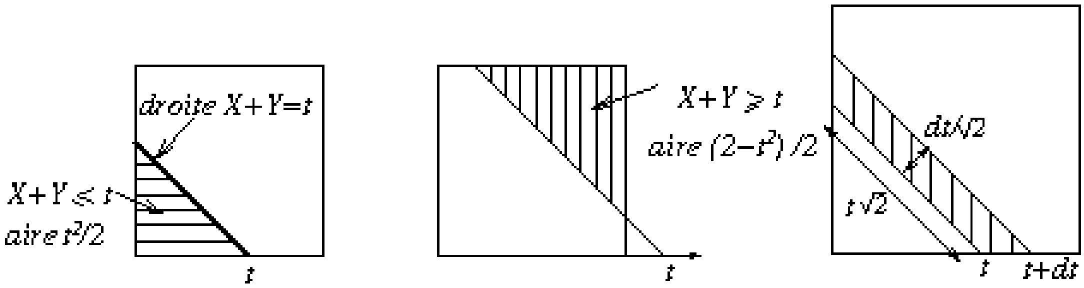
On donne 2 méthodes graphiques et un calcul direct.

On peut prendre comme modèle $\Omega = [0,1]^2$, P la mesure de Lebesgue sur le carré, $X(x,y) = x$, $Y(x,y) = y$. On peut alors représenter $Z = t$ par la droite d'équation $x+y = t$ dans le carré (figure de gauche).

Si $0 \leqslant t \leqslant 1$ alors $F_Z(t) = P(X+Y \leqslant t) = \frac{t^2}{2}$ (figure de gauche). Si $1 \leqslant t \leqslant 2$, alors $F_Z(t) = 1 - \frac{(2-t)^2}{2}$ (figure du milieu). Si $t < 0$ alors $F_Z(t) = 0$ et si $t > 2$ alors $F_Z(t) = 1$.

F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux, on peut donc dériver pour obtenir f_Z la densité de Z : $f_Z(t) = t$ si $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f_Z(t) = 2-t$ si $1 \leqslant t \leqslant 2$, $f_Z(t) = 0$ sinon.

On peut également calculer la densité directement, “à la physicienne”, en considérant dt comme un tout petit accroissement (on l'a dessiné assez gros pour rendre le dessin lisible). Sur la figure de droite, on a dessiné $X+Y \in [t, t+dt]$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. L'aire de la partie hachurée est à peu près $t\sqrt{2} \times \frac{dt}{\sqrt{2}}$ (longueur $\times$ largeur), donc on a $P(t \leqslant X+Y \leqslant t+dt) = tdt$. Or $P(t \leqslant Z \leqslant t+dt) = f_Z(t)dt$, ce qui donne la densité $f_Z(t) = t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. On fait pareil pour $1 \leqslant t \leqslant 2$.



Calcul direct : La densité de X et Y est $f(t) = 1\!\!1_{[0,1]}(t)$. Par indépendance, $Z = X+Y$ a une densité $f_Z(t) = f * f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)f(x)dx$ (résultat du cours, qu'on peut redémontrer par changement de variable à partir de la définition de $P_X * P_Y$).

$f(t-x)f(x) = 1$ si $0 \leqslant t-x \leqslant 1$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(t-x)f(x) = 0$ sinon.

Soit $D_t = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t-x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid t-1 \leqslant x \leqslant t \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. $D_t = [\max(0, t-1), \min(t,1)]$. On a $f_Z(t) = \int_{D_t} 1\, dx$, alors :

– si $0 \leqslant t \leqslant 1$, $D_t = [0,t]$ et $f_Z(t) = t$,

– si $1 \leqslant t \leqslant 2$, $D_t = [t-1, 1]$ et $f_Z(t) = 2-t$,

– si $t < 0$ ou $t > 2$, $D_t = \emptyset$ et $f_Z(t) = 0$.

Correction de l'exercice 5701 ▲

$P(Z > t) = P(X_1 > t, X_2 > T, \dots, X_n > t) = P(X_1 > t)P(X_2 > t)\cdots P(X_n > t)$ par indépendance. Comme $P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t)$, on a $1 - F_Z(t) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 - F_{X_i}(t))$.

Comme $F_{X_i}(t) = 1 - e^{-t}$ si $t \geqslant 0$ et $F_{X_i}(t) = 0$ sinon, on trouve que $F_Z(t) = 1 - e^{-nt}$ si $t \geqslant 0$ et $F_Z(t) = 0$ sinon. La densité de Z est donc $1\!\!1_{\mathbb{R}_+} ne^{-nt}$. Par conséquent, Z est de loi exponentielle de paramètre n.

Correction de l'exercice 5702 ▲

(a) Inégalité de Markov : $P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{E(X)}{75} = \frac{2}{3}$.

(b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - 50| \geqslant 25) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{25^2} = \frac{5^2}{25^2} = 0,04$. Donc $P(X \geqslant 75) \leqslant 0,04$.

Correction de l'exercice 5703 ▲

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - 10^2| \geqslant 10^3 - 10^2) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{(10^3 - 10^2)^2} \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{(10^3)^2} = 10^{-4}$. Donc $P(X \geqslant 10^3) \leqslant 10^{-4}$.

Correction de l'exercice 5706 ▲

(a) L'énoncé suggère que le poids en grammes des paquets est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 500 et d'écart-type 25. Soit X la variable aléatoire correspondante, et $Y = (X-500)/25$.

(b) $P(480 \leqslant X \leqslant 520) = P(|Y| \leqslant 0,8) = 0,576$. On s'attend donc à ce que, sur 1000 paquets, il y en ait 576 dont le poids est compris entre 480g et 520g.

(c)

$$\begin{aligned} P(480 \leqslant X \leqslant 490) &= P(-0,8 \leqslant Y \leqslant -0,4) \\ &= P(0,4 \leqslant Y \leqslant 0,8) \\ &= p(Y \leqslant 0,8) - p(Y \leqslant 0,4) = 0,1327. \end{aligned}$$

On s'attend donc à ce que, sur 1000 paquets, il y en ait 132 dont le poids est compris entre 480g et 490g.

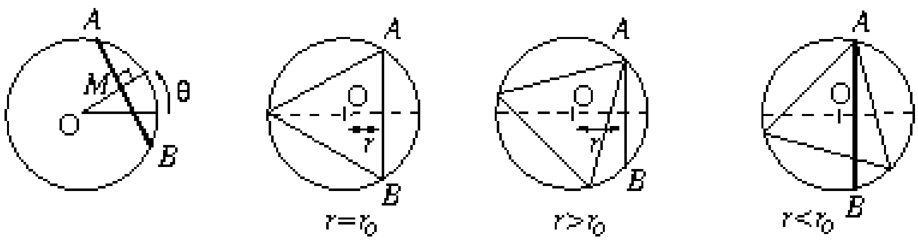
(d) $P(450 \leqslant X) = 0,5 + P(0 \leqslant Y \leqslant 2) = 0,5 + \frac{1}{2}P(-2 \leqslant Y \leqslant 2) = 0,5 + 0,4772 = 0,9772$. On s'attend donc à ce que, sur 1000 paquets, il y en ait 977 dont le poids est supérieur à 450g.

(e) Il faut trouver t tel que $p(|Y| < t) = 0,9$. La table donne $t = 1,645$, puis $a = 25t = 41$. Par conséquent, environ 90% de la production a un poids compris entre $500-41 = 459$g et $500+41 = 541$g.

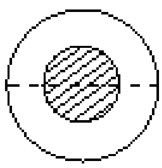
Correction de l'exercice 5707 ▲

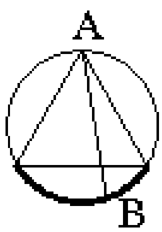
Voici plusieurs façons de définir une corde, qui mènent à choisir un point au hasard dans un espace différent. Même avec la probabilité "naturelle" (probabilité uniforme), on obtient des résultats différents.

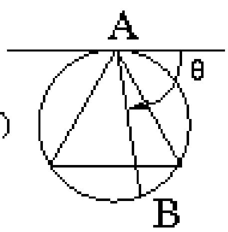
(a) La corde $[AB]$ est déterminée par sa distance au centre O, qui est $r = OM$, où M est le milieu de $[AB]$, et par l'angle θ entre l'horizontale et la droite (OM) (voir la figure de gauche dans (1) ci-dessous). Le problème étant symétrique par rotation, l'angle θ n'intervient pas. On est donc ramené à choisir une distance r au hasard dans $[0,R]$, où R est le rayon du cercle. La corde est à l'extérieur si $r \geqslant r_0$ avec $r_0 = \frac{1}{2}R$ (voir les figures (1) ci-dessous). Donc la probabilité cherchée est $1/2$ (on a pris la probabilité uniforme sur $[0,R]$).

1)


(b) La corde $[AB]$ est déterminée par son centre M : il suffit de tracer la perpendiculaire à (OM) passant par M (figure de gauche ci-dessus, comme pour 1). On est donc ramené à choisir un point M au hasard dans le disque de rayon R. La corde passe à l'intérieur du triangle si $|OM| \leqslant \frac{1}{2}R$ (comme au 1), autrement dit si le point M se trouve dans le disque de rayon $R/2$, hachuré sur la figure (2) ci-dessous. L'aire du domaine est $\pi(R/2)^2$ et l'aire totale est πR^2, donc la probabilité cherchée est $1/4$ (on a pris la probabilité uniforme sur le disque de rayon R).

2)


3)


4)


(c) Une corde est déterminée par 2 points A et B sur le cercle (ses extrémités). Le problème étant symétrique par rotation, on peut fixer le point A et considérer la position du point B. On est donc ramené à choisir un point B au hasard sur le cercle. La corde passe à l'intérieur du triangle pour B appartenant à un arc de cercle faisant 1/3 du cercle (voir la figure (3) ci-dessus). Donc la probabilité cherchée est $1/3$ (on a pris la probabilité uniforme sur le cercle, c'est-à-dire la longueur d'un arc divisé par la longueur du cercle entier).

(d) On peut déterminer la corde par son extrémité A et l'angle θ que fait la corde avec la tangente au cercle en A (voir la figure (4) ci-dessus). On est donc ramené à choisir un angle θ au hasard dans $[0,\pi]$. On voit que la corde passe dans le triangle si $\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$. Ce qui donne une probabilité de $1/3$ (on a pris la probabilité uniforme sur $[0,\pi]$).

Correction de l'exercice 5708 ▲

(a) On obtient, sur l'échantillon, la moyenne $m_e = 214$, l'écart-type $\sigma_e = 55.77$.

(b) La moyenne sur l'entreprise est estimée par m_e. L'écart-type est estimé par : $\widehat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{100}{99}}55.77 \simeq 56.05$.

(c) On en déduit, au seuil 95%, un intervalle de confiance pour la moyenne : $[m_e - y_\alpha \frac{\widehat{\sigma}_e}{\sqrt{n}}; m_e + y_\alpha \frac{\widehat{\sigma}_e}{\sqrt{n}}] = [203.01; 224.99]$. Ainsi le taux moyen de cholestérol est, à un seuil de confiance 95%, située entre 203 et 225 cg.

Correction de l'exercice 5709 ▲

Il s'agit ici d'estimer une proportion, suite à une observation qui vaut : $f = \frac{13}{12000} \simeq 1.0833 \times 10^{-3}$.
On peut utiliser une approximation par une loi normale pour la moyenne d'échantillon. On en déduit un intervalle de confiance pour la proportion, au seuil 95% : $I_\alpha = [f - y_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}; p + y_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}] \simeq [4.7 \times 10^{-4}, 1.7 \times 10^{-3}]$.
On peut choisir I_α comme intervalle de confiance, au seuil 95%, de la proportion cherchée. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a l'intervalle $I = [f-a, f+a]$, avec : $P[\left|\overline{X} - p\right| \leqslant a] \geqslant 1 - (\frac{\mathrm{Var}\,\overline{X}}{a^2})$ et $P[|X-p| \leqslant a] \geqslant 0.95$ si $1 - \frac{\mathrm{Var}\,\overline{X}}{a^2} \geqslant 0.95$, soit $a \geqslant 1.3979 \times 10^{-3}$. On préfèrera donc la première méthode.

Correction de l'exercice 5710 ▲

Un intervalle dans lequel on soit «sûr» à 95% de trouver le nombre exact de personnes à soigner sur les 10 000 : $[p - y_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; fe + y_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$. Fréquence entre 65,7% et 94,3%. Donc entre 698 et 802 personnes sur 10000

Correction de l'exercice 5711 ▲

La loi exacte suivie par X est une loi binomiale de paramètres : n, p. $E(X) = 0.75n$ et $\mathrm{Var}\,X = 0.25 \cdot 0.75n$. Comme $n > 150$, on peut faire l'approximation par la loi normale d'espérance $0,75n$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{0.25 \cdot 0.75n}$. $P[X > 150] \leqslant 0.05$ si $P[X \leqslant 150] \geqslant 0.95$ si : $P[\frac{X - 0.75n}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75n}} \leqslant \frac{150 - 0.75n}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75n}}] \geqslant 0.95$.
Dans la table de Gauss, on lit $F(1.645) = 0.95$. On n'a plus qu'à résoudre l'inéquation : $\frac{150.5 - 0.75n}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75n}} \geqslant 1.645$, dont les solutions sont :

$$0 \leqslant n \leqslant 187.$$

Ainsi, en vendant moins de 187 billets, la compagnie ne prend qu'un risque inférieur à 5% de devoir indemniser des voyageurs en surnombre. Faisons varier les paramètres, cela ne pose aucun problème :
$N = 150$, $p = 0.5$. n est solution de l'inéquation : $\frac{150.5 - 0.5n}{\sqrt{0.5.0.5n}} \geqslant 1.645$. Solution : $n \leqslant 272$.
$N = 300$, $p = 0.75$. n est solution de l'inéquation : $\frac{300.5 - 0.75n}{\sqrt{0.25.0.75n}} \geqslant 1.645$. Solution : $n \leqslant 381$.

$N=300$, $p=0.5$. n est solution de l'inéquation : $\frac{300.5-0.5n}{\sqrt{0.5.0.5n}} \geqslant 1.645$. Solution : $n \leqslant 561$.

Correction de l'exercice 5712 ▲

(a) La loi de X est la loi binomiale $n=30$, $p=0.2$.

(b) Un intervalle de confiance au seuil 95%, permettant d'estimer le nombre de clients à prévoir : c'est pour la fréquence : 0.657 ; 0.943. Soit entre 20 et 28 personnes. C'est une large fouchette due à n petit.

Correction de l'exercice 5713 ▲

(a) On peut estimer m par la moyenne de l'échantillon : 68 kg, et σ par $\sigma_e\sqrt{\frac{300}{299}} = 7\sqrt{\frac{300}{299}} \simeq 7.0117$ kg. On en déduit un intervalle de confiance pour la moyenne m : $I_\alpha = [67.2;68.8]$.

(b) La borne supérieure de l'intervalle étant de 69 kg, il est raisonnable de prendre 70 kg comme espérance de la variable poids d'un passager.

(c) Le décollage est autorisé si le poids total des voyageurs et de leurs bagages ne dépasse pas 26.2 tonnes. Pour chacun des 300 passagers, notons : X_i son poids et Y_i le poids de ses bagages. Faisons l'hypothèse d'indépendance entre les variables X_i et Y_i. Le poids total $Z = \sum_{i=1}^{300}(X_i+Y_i)$ est la somme de 600 variables aléatoires indépendantes ; le théorème central limite s'applique sous cette hypothèse. Comme l'espérance totale est $E(Z) = 300\cdot(70+15) = 25\,500$ et la variance de Z est : $\operatorname{Var} Z = 300\cdot(\operatorname{Var} X_i + \operatorname{Var} Y_i)$. Alors Z suit approximativement une loi normale de moyenne $m = 25\,500$, d'écart-type $\sigma = \sqrt{300\cdot(8^2+5^2)} = 163.4$. Alors $Z' = \frac{Z-m}{\sigma}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite. Le décollage est interdit si : $Z > 26\,200$, c'est-à-dire si $Z' > 4.284$. On lit dans la table de Gauss : pour $t=4$, $F(t) = 0.999\,968 = P[Z' \leqslant 4]$. Le décollage est interdit pour cause de surcharge pondérale avec une probabilité inférieure à $0.000\,04$.

Correction de l'exercice 5714 ▲

(a) L'intervalle de temps de 4 minutes est la répétition de 240 secondes, au cours desquelles les appels surviennent de façon indépendante, avec la probabilité d'appel de $\frac{1}{20}$; la loi de probabilité du nombre d'appels reçus en 4 minutes est donc une loi binomiale, de paramètres $n=240$ et $p=\frac{1}{20}$.

(b) Comme $n \geqslant 30$ et $np \leqslant 15$, il est possible d'approcher cette loi par une loi de Poisson de paramètre λ estimé par $np = 12$.

(c) Un échantillon de taille 200 a été réalisé pour estimer le nombre moyen d'appels par minute ; c'est un échantillon de taille 50 pour la variable précédente (nombre d'appels reçus en 4 minutes) qui suit une loi de Poisson d'espérance et de variance 12. Un intervalle de confiance au niveau 95% pour la moyenne est $I_\alpha = [11;13]$.

Correction de l'exercice 5715 ▲

Posons H_0 «les rejets chimiques ne modifient pas le nombre de plages atteintes par les algues».

Notons $p_0 = 0.1$ la proportion théorique de plages atteintes par l'algue verte avant les rejets chimiques ; p la proportion théorique de plages atteintes par l'algue verte après les rejets chimiques et f la fréquence observée dans l'échantillon.

Considérons alors la variable aléatoire X_i, $i \leqslant 50$, qui a deux modalités : 1 si la plage est atteinte, 0 sinon. C'est une variable de Bernoulli, alors le nombre total de plages atteintes dans l'échantillon est une variable aléatoire qui, sous H_0, obéit à une loi binomiale de paramètres $n=50$, $p_0=0.1$.

Sous H_0, «$p = p_0 = 0.1$» la variable «moyenne d'échantillon» :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{i=50} X_i}{n}$$

dont une réalisation est la fréquence observée, soit $\frac{10}{50}$, obéit à une loi que l'on peut approcher par une loi normale de paramètres : moyenne p_0 et écart-type $\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{50}}$.
A l'aide de la formule de cours, on détermine l'intervalle de confiance associé : $I \simeq [0.017; 0.183]$. On constate que la fréquence observée est dans la zone de rejet (non chimique) : 0.2 n'est pas dans l'intervalle de confiance au seuil 95%. On peut donc rejeter H_0 et conclure, au risque 0.05, que les rejets chimiques modifient de façon significative le nombre de plages atteintes par l'algue.

Correction de l'exercice 5716 ▲

Mise en oeuvre du test :

(a) On définit un risque : 5%. Pour étudier la dépendance de ces caractères faisons l'hypothèse H_0 : «les deux caractères sont indépendants » et voyons ce qui se passerait sous cette hypothèse. Notons les événements :
— C : «avoir un cancer dans la population observée»
— F : «être fumeur dans la population observée»
Si les événements F et C sont indépendants, alors : $P(F \cap C) = P(F) \cdot P(C)$ et de même pour les trois autres possibilités : $P(\overline{C} \cap F)$, $P(\overline{C} \cap \overline{F}), P(C \cap \overline{F})$, quantités que l'on peut donc calculer sous H_0 :
$P(F) = \frac{600}{1000}$, $P(C) = \frac{500}{1000}$, $P(F) \cdot P(C) = \frac{3}{10}$, alors l'effectif théorique correspondant à la catégorie «fumeur et cancéreux» est de 300.

(b) On en déduit le tableau théorique sous H_0 :

Théorique	cancer	non cancer	marge
fumeur	300	300	600
non fumeur	200	200	400
marge	500	500	1000

(c) On calcule alors la valeur de $s = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$: on obtient : $s = 34.73$. On a précisé le risque de %, mais pour $\alpha = 0,001$, on lit dans la table du khi-deux à un degré de liberté : $P[\chi^2 \geqslant 10.83] = 0.001$ et le χ^2 calculé est 34.73 !

(d) On décide de rejeter H_0. Ainsi, en rejetant l'hypothèse de l'indépendance des caractères «être fumeur» et «avoir un cancer de la gorge», on a moins de une chance sur 1000 de se tromper, puisque moins de un tableau possible sur mille conduit à un calcul de χ^2 plus grand que 10.83 ; beaucoup moins sans doute, conduiraient à un calcul de χ^2 plus grand que 34.73.

Correction de l'exercice 5717 ▲

(a) La meilleure estimation de G est la valeur moyenne mesurée, $g_1 = 1,364$. Pour donner un intervalle de confiance, on fait l'hypothèse que les mesures suivent une loi normale d'espérance G et d'écart-type σ. La probabilité que l'intervalle $[g_1 - 1,645\sigma_{pop}, g_1 + 1,645\sigma_{pop}]$ ne contienne pas G_v est inférieure à $0,1$. On conclut que $[1,357; 1,371]$ est un intervalle de confiance relatif à G au seuil de 90%.

(b) La meilleure estimation de G est la valeur moyenne mesurée, $\bar{g} = \frac{1}{10}(g_1 + \cdots + g_5) = 1,365$. Soit $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(g_i - \bar{g})^2 \simeq 2,25.10^{-5}$. La meilleure estimation de σ est $\bar{\sigma} \simeq 4,7.10^{-3}$.
Comme $\frac{1}{5}(X_1 + \cdots + X_5)$ suit une loi normale d'espérance G et de variance $\frac{1}{25}(\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_5)) = \frac{1}{5}\sigma^2$, la probabilité que l'intervalle $[\bar{g} - 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{5}}, \bar{g} + 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{5}}]$ ne contienne par G est inférieure à $0,1$. Si on estime σ par $\bar{\sigma}$, on trouve que $[1,363; 1,367]$ est un intervalle de confiance relatif à G au seuil de 90%.

Correction de l'exercice 5718 ▲

On note p la proportion inconnue. Soit X_i la variable qui vaut 1 si le i-ème électeur interrogé déclare avoir l'intention de voter pour A, 0 sinon. Les X_i sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli

$\mathscr{B}(p)$, donc le nombre $Z = \sum_{i=1}^{1000}$ d'électeurs favorables à A dans un échantillon de 1000 électeurs suit une loi binomiale $\mathscr{B}(p, 1000)$. Comme p semble de l'ordre de 0,5, on peut approcher $\mathscr{B}(p, 1000)$ par $\mathscr{N}(1000p, \sqrt{1000p(1-p)})$. De nouveau, comme $n = 1000$ est grand, on peut estimer p par la fréquence $f = 0,521$ observée dans l'échantillon, et supposer que l'écart-type de la variable fréquence d'échantillon $F = Z/1000$ vaut $\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{1000} \simeq 0,0158$. Comme la variable $\dfrac{F-p}{\sigma(F)}$ est normale standard, la probabilité que l'intervalle $[f - 1,96 \times 0,0158, f + 1,96 \times 0,0158]$ ne contienne pas p est inférieure à 0,05. On conclut que $[0,49, 0,55]$ (autrement dit $52 \pm 3\%$) est intervalle de confiance relatif à p au seuil de 95%.

Correction de l'exercice 5719 ▲

On suppose que la variable X = "durée de vie d'un appareil" suit une loi normale d'espérance m_{pop} et d'écart-type $\sigma_{pop} = 100$h. Si on fait n essais indépendants, alors $T = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - m_{pop}}{\sigma_{pop}}$ suit une loi normale standard, donc $p(|T| > 1,96) < 0,05$. Au niveau de confiance 95%, on peut affirmer que l'intervalle $[\bar{x} - 1,96\frac{100}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96\frac{100}{\sqrt{n}}]$ contient la durée de vie moyenne cherchée m_{pop}.

La marge d'erreur n'excède pas 50h dès que $1,96\frac{100}{\sqrt{n}} < 50$, i.e. si $n \geqslant 16$.

La marge d'erreur n'excède pas 20h dès que $1,96\frac{100}{\sqrt{n}} < 20$, i.e. si $n \geqslant 97$.

Correction de l'exercice 5721 ▲

Loi estimée $\mathscr{E}(\lambda)$ d'espérance $m = 1/\lambda$ et d'écart-type $\sigma = 1/\lambda$. Estimateur de m : $\bar{X}_n = 10$. Donc on approxime σ par 10. TCL : $P(\frac{|S_n - nm|}{\sigma\sqrt{n}} < c) \simeq P(|\mathscr{N}(0,1)| < c)$. Pour avoir un intervalle de confiance à 95%, on prend $c = 1,96$. L'encadrement $-c < \frac{\bar{X}_n - 1/\lambda}{\sigma/\sqrt{n}} < c$ donne

$$\frac{1}{\bar{X}_n + c\sigma/\sqrt{n}} < \lambda < \frac{1}{\bar{X}_n - c\sigma/\sqrt{n}}$$

d'où l'intervalle de confiance $[0,091, 0,111]$.

Correction de l'exercice 5722 ▲

On choisit de comparer les fréquences observées sur les deux échantillons.

On fait l'hypothèse H_0 : les deux échantillons sont des tirages de variables de Bernoulli indépendantes ayant la même espérance p_{pop}.

Sous l'hypothèse H_0, l'effectif n_iF_i suit une loi binomiale $\mathscr{B}(p_{pop}, n_i)$. Les échantillons étant de grande taille (n_1, $n_2 \geqslant 30$), on peut supposer que F_i suit une loi normale $\mathscr{N}(p_{pop}, \sqrt{p_{pop}(1-p_{pop})/n_i})$. De plus, pour le calcul de la variance, on peut estimer p_{pop} au moyen de l'ensemble des données disponibles, i.e.

$$p_{pop} \sim \frac{300 + 125}{700 + 225} = 0,46.$$

La différence $D = F_1 - F_2$ suit une loi normale d'espérance nulle et de variance $\mathrm{Var}(D) = \mathrm{Var}(F_1) + \mathrm{Var}(F_2) = p_{pop}(1 - p_{pop})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}) \sim 0,2484(\frac{1}{700} + \frac{1}{225}) = 0,00146$.

Par conséquent, on choisit comme fonction discriminante $T = D/\sqrt{0.00146} = D/0,0382$, qui suit une loi normale standard. La table donne $p(|T| > 1,96) = 0,05$. Or, sur l'échantillon mesuré, la variable T prend la valeur $t = \frac{-0,127}{0,0382} = -3,324$. Comme $|t| > 1,96$, on rejette H_0. On conclut, avec au plus 5% de chances de se tromper, que les deux lots de boulons ne sont pas tirés de la même population.

Correction de l'exercice 5723 ▲

Notons X le résultat d'un tirage d'un entier entre 0 et 9 à l'aide de ce générateur et $p = (p_0, \ldots, p_9)$ sa loi. On cherche à tester l'hypothèse H_0 : "p est la loi $\mathscr{U}_{\{0,\ldots,9\}}$" contre l'hypothèse H_1 : "p n'est pas la

loi $\mathscr{U}_{\{0,\ldots,9\}}$" au niveau 5%. Notons $N^{(i)}$ le nombre d'apparitions du chiffre i sur 1000 tirages de chiffres à l'aide de ce générateur et $Z = \sum_{i=0}^{9} \frac{(N^{(i)}-100)^2}{100}$.
On rejette l'hypothèse H_0 au niveau 5% si la valeur observée z_{obs} de Z est telle que $P_{H_0}(Z \geqslant z_{obs}) \leqslant 0,05$. Comme pour tout $i \in \{0,\ldots,9\}$, $1000p_i = 100$ est suffisamment grand, on peut approximer la fonction de répartition de la loi de Z sous H_0 par celle du χ^2 à 9 degrés de liberté. Donc, on peut approximer $P_{H_0}(Z \geqslant z_{obs})$ par $1 - F_{\chi^2_9}(z_{obs})$. A partir des valeurs observées pour les variables aléatoires $N^{(i)}$ qui sont données dans le tableau, on obtient $z_{obs} \simeq 21,86$. D'après la table de valeurs numériques de la loi du χ^2, $F_{\chi^2_9}(z_{obs})$ est compris entre $0,99$ et $0,995$. Donc, au niveau 5%, on rejette l'hypothèse H_0. On rejette encore l'hypothèse H_0 au niveau 1% mais pas au niveau $0,5$%.

Correction de l'exercice 5727 ▲

Soit G sous-groupe de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{Card}G$ divise $\mathrm{Card}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = 8$. Donc $\mathrm{Card}G \in \{1,2,4,8\}$. De plus si G contient la classe $\bar{n}$ d'un nombre impair, alors G contient le sous-groupe engendré par $\bar{n}$ qui est $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ car alors n et 8 sont premiers entre eux, donc $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Étude des cas. Si $\mathrm{Card}G = 8$ alors $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Si $\mathrm{Card}G = 4$ alors G ne peut contenir que des classes d'entiers pairs d'après la remarque précédente, mais comme il y a exactement 4 classes d'entiers pairs alors $G = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6}\}$. Si $\mathrm{Card}G = 2$ alors $G = \{\bar{0},x\}$ et x est un élément d'ordre 2, le seul élément d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est $\bar{4}$. Donc $G = \{\bar{0},\bar{4}\}$. Enfin si $\mathrm{Card}G = 1$ alors $G = \{\bar{0}\}$.

Correction de l'exercice 5730 ▲

La relation d'équivalence associée au quotient $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$ est :

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} > 0.$$

Si $x > 0$ alors $x \sim +1$ car $x(1)^{-1} > 0$ (en fait x est équivalent à n'importe quel réel strictement positif) ; si $x < 0$ alors $x \sim -1$ car $x(-1)^{-1} > 0$, enfin -1 et $+1$ ne sont pas équivalents. Il y a donc deux classes d'équivalence : $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ = \{\overline{+1},\overline{-1}\}$.
L'application $\phi : \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\phi(\overline{+1}) = \tilde{0}$ et $\phi(\overline{-1}) = \tilde{1}$ est un isomorphisme entre les deux groupes.

Correction de l'exercice 5734 ▲

(a) Il faut montrer que pour $x \in G$ et $y \in D(G)$, $xyx^{-1} \in D(G)$. Commençons par montrer ceci pour y un générateur de $D(G)$. Si $y = ghg^{-1}h^{-1}$ avec $g,h \in G$. Nous remarquons que :

$$xyx^{-1} = \left(xghx^{-1}(gh)^{-1}\right)\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)\left(hgx(hg)^{-1}x^{-1}\right)$$

qui est un produit d'éléments de $D(G)$. Donc xyx^{-1} est un élément de $D(G)$.
Soit maintenant y un élément quelconque de $D(G)$, alors il s'écrit comme produit de générateurs :

$$y = y_1y_2\ldots y_n, \qquad \text{avec } y_i = g_ih_ig_i^{-1}h_i^{-1}.$$

Écrivons $xyx^{-1} = (xy_1x^{-1})(xy_2x^{-1})\ldots(xy_nx^{-1})$. Chaque xy_ix^{-1} appartient à $D(G)$. Et donc xyx^{-1}. Donc $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

(b) Soit $\alpha,\beta \in G/D(G)$, alors il existe $a,b \in G$ tels que $\bar{a} = \alpha$ et $\bar{b} = \beta$. Nous savons que $aba^{-1}b^{-1} \in D(G)$ et donc $\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \varepsilon$ où ε est l'élément neutre de $G/D(G)$. Mais

$$\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\overline{ba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

Donc $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \varepsilon$, autrement dit $\alpha\beta = \beta\alpha$. Et ceci quelque soit α et β, donc $G/D(G)$ est commutatif. Généralisation : si H est un sous-groupe distingué.

- Si $D(G) \subset H$ alors $G/D(G)$ est un sous-groupe de G/H donc G/H est commutatif car $G/D(G)$ l'est.
- Si G/H est commutatif alors pour $g,h \in G$ la classe de $ghg^{-1}h{-}1$ dans G/H vérifie :

$$\overline{ghg^{-1}h{-}1} = \bar{g}\overline{hg^{-1}h^{-1}} = \bar{g}\overline{g^{-1}}\bar{h}\overline{h^{-1}} = \varepsilon.$$

Mais les éléments dont la classe dans G/H est l'élément neutre sont exactement les éléments de H. Donc $ghg^{-1}h^{-1}$ appartient à H. Ainsi tous les générateurs de $D(G)$ sont dans H et donc $D(G) \subset H$.

Correction de l'exercice 5738 ▲

Notons $C = AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Un calcul donne $C^8 = I$ et pour $1 \leqslant k \leqslant 7$, $C^k \neq I$. Donc le groupe H engendré par C est d'ordre 8. Attention ! même si $A^2 = I$ et $B^2 = I$ on a $(AB)^2 \neq I$ car $AB \neq BA$.

(b) Pour montrer que H est distingué il suffit de montrer que ACA^{-1} et BCB^{-1} sont dans H. Mais $ACA^{-1} = ACA = AABA = BA = (AB)^{-1} \in H$. De même $BCB^{-1} = (AB)^{-1}$. Donc H est distingué dans H.

Un élément M de G s'écrit

$$M = A^{a_1}B^{b_1}A^{a_2}\dots A^{a_n}B^{b_n} \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}.$$

Mais dans G/H tout terme $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$ vaut $\bar{I}$ Donc $G/H = \{\bar{I}, \bar{A}, \bar{A}^2, \bar{A}^3, \dots, \bar{B}, \bar{B}^2, \bar{B}^3, \dots\}$ mais comme $A^2 = B^2 = I$ et $AB \in H$ alors G/H s'écrit simplement :

$$G/H = \left\{\bar{I}, \bar{A}\right\}.$$

Enfin, par la formule $|G| = |H| \times |G/H|$ nous obtenons $|G| = 8 \times 2 = 16$.

Correction de l'exercice 5739 ▲

(a) i. $f((x,y)+(x',y')) = f(x+x',y+y') = 3(x+x')+6(y+y') = 3x+6y+3x'+6y' = f(x,y)+f(x',y')$.

ii. $\mathrm{Ker} f = \{(x,y); f(x,y) = 0\} = \{(x,y); 3x+6y = 0\} = \{(x,y); x = -2y\} = \{(-2k,k); k \in \mathbb{Z}\}$. Si $\mathrm{Ker} f = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$ alors $f(p,0) = 0$ donc $3p = 0$ soit $p = 0$. De même $f(0,q) = 0$ implique $q = 0$ et alors $\mathrm{Ker} f = \{(0,0)\}$, ceci contredit le fait que $f(-2,1) = 0$.

iii. On a $f(\mathbb{Z}^2) = 3\mathbb{Z}$, le morphisme $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ définit par passage au quotient par le noyau un morphisme injectif $\bar{f} : \mathbb{Z}^2/\mathrm{Ker} f \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ (c'est le théorème de factorisation). De plus comme f est surjectif alors $\bar{f}$ l'est aussi. Ainsi $\bar{f}$ est un isomorphisme entre $\mathbb{Z}^2/\mathrm{Ker} f = \mathbb{Z}^2/(-2,1)\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$.

(b) Définissons $g : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $g(x,y) = (\bar{x},\bar{y})$ où $\bar{n}$ désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le noyau de g est $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} = \langle (2,0); (0,2) \rangle = G$. Le passage au quotient par le noyau définit l'isomorphisme $\bar{g}$ cherché.

Correction de l'exercice 5743 ▲

(I) (a) $E \neq \emptyset$ car $X \in E$. L'ensemble $A_0 = \bigcap_{A \in E} A$ est de manière évidente le plus petit élément de E.

(b) On a $\varphi(A_0) \subset A_0$ puisque $A_0 \in E$. On déduit, par la croissance de φ, que $\varphi(\varphi(A_0)) \subset \varphi(A_0)$, ce qui donne $\varphi(A_0) \in E$ et donc $A_0 \subset \varphi(A_0)$.

(II) (a) La croissance de φ est immédiate.

(b) Considérons la partie A_0 associée à φ. D'après le (b) du (I), on a $X \setminus h(X \setminus g(A_0)) = A_0$. Autrement dit, les parties A_0 et $h(X \setminus g(A_0))$ constituent une partition de X. Considérons l'application $f : X \to X$ définie comme étant g sur A_0 et h^{-1} sur $h(Y \setminus g(A_0))$. On voit sans difficulté que f est une bijection (noter que les images respectives des deux restrictions précédentes sont $g(A_0)$ et $Y \setminus g(A_0)$ et qu'elles constituent une partition de Y).

Correction de l'exercice 5744 ▲

Pour tout $x \in X$, posons $C(x) = \{y \in X \mid x \text{ et } y \text{ sont comparables}\}$ et considérons $Y = \bigcap_{x \in X} C(x)$. La partie Y est totalement ordonnée puisque dès que $y, y' \in Y$, alors $y' \in C(y)$ et donc y et y' sont comparables. De plus, pour tout $x \notin Y$, il existe $y \in X$ tel que $x \notin C(y)$, c'est-à-dire, y et x non comparables.

Il n'y a pas unicité de l'ensemble Y en général. En effet, dans un ensemble ordonné où il existe un élément y qui n'est comparable qu'à lui-même, on peut prendre $Y = C(y) = \{y\}$. Il est facile de construire des ensembles ordonnés possédant plusieurs tels éléments y (penser à la relation d'égalité, dont le graphe est la diagonale).

Correction de l'exercice 5748 ▲

Pour la dernière question, vérifier par récurrence que $x^{\star n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k x^k$.

Correction de l'exercice 5749 ▲

(a) Désignant par b l'inverse à gauche de a et par c l'inverse à gauche de b, on a $ab = (cb)(ab) = c(ba)b = cb = e$. L'élément b est donc l'inverse de a.

(b) découle immédiatement de (a).

Correction de l'exercice 5750 ▲

(a) Pour $x, y \in E$ quelconques, notons x' et y' leurs inverses à gauche respectifs. Si $xy = e$, on a aussi $yx = (x'x)yx = x'(xy)x = x'x = e$.

(b) Soit f un élément neutre à gauche. On a donc $fe = e$. D'après (a), on a aussi $ef = e$, c'est-à-dire $f = e$.

(c) Pour tout $x \in E$, on a $xe = x(x'x) = (xx')x = x$ puisque d'après (a), $xx' = e$.

(d) résulte alors de (a), (b) et (c).

Correction de l'exercice 5755 ▲

Pour tous $x, y \in G$, on a $xyx^{-1}y^{-1} = xyxy = (xy)(xy) = 1$ c'est-à-dire $xy = yx$. Donc G est abélien. Si G est fini, il peut être considéré comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et est alors nécessairement de dimension finie, ce qui donne G isomorphe comme espace vectoriel à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et donc $|G| = 2^n$.

Correction de l'exercice 5756 ▲

En groupant chaque élément $x \in G$ avec son inverse x^{-1}, on obtient une partition de G en sous-ensembles $\{y, y^{-1}\}$ qui ont deux éléments sauf si $y = y^{-1}$, c'est-à-dire si $y^2 = e$. L'élément neutre e est un tel élément y. Ce ne peut pas être le seul, sinon G serait d'ordre impair.

Correction de l'exercice 5759 ▲

Pour tout $h \in H$, on a $ha = k_h b$ pour un certain $k_h \in K$. En écrivant $ha = h(ea) = hk_e b$, on obtient $k_h = hk_e$, ce qui donne $h = k_h (k_e)^{-1} \in K$.

Correction de l'exercice 5761 ▲

(a) Supposons que $H \cup K$ soit un sous-groupe de G et que H ne soit pas inclus dans K, c'est-à-dire, qu'il existe $h \in H$ tel que $h \notin K$. Montrons que $K \subset H$. Soit $k \in K$ quelconque. On a $hk \in H \cup K$. Mais $hk \notin K$ car sinon $h = (hk)k^{-1} \in K$. D'où $hk \in H$ et donc $k = h^{-1}(hk) \in H$.

(b) découle immédiatement de (a).

Correction de l'exercice 5762 ▲

Soit H une partie finie non vide de G stable par la loi de composition. Pour montrer que H est un sous-groupe, il reste à voir que pour tout $x \in H$, $x^{-1} \in H$. Les puissances x^k où $k \in |||$ restant dans H, il existe $m, n \in |||$ tels que $m > n$ et $x^m = x^n$. On a alors $x^{m-n-1} \cdot x = 1$, soit $x^{-1} = x^{m-n-1}$, ce qui montre que $x^{-1} \in H$.

Si H est infini, la propriété précédente n'est pas vraie en général. Par exemple $|||$ est une partie stable de $\mathbb{Z}$ pour l'addition mais n'en est pas un sous-groupe.

Correction de l'exercice 5765 ▲

Soient $a, b \in G$ d'ordre respectifs m et n. Posons $\mu = \mathrm{ppcm}(m,n)$. On a $(ab)^\mu = a^\mu \cdot b^\mu = e \cdot e = e$ ($a^\mu = b^\mu = e$ résultant du fait que m et n divisent μ). L'ordre de ab divise donc μ.

Supposons que $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(ab)^k = 1$, soit $a^k = b^{-k}$. On en déduit que $a^{nk} = e$ et $b^{mk} = e$. D'où $m|nk$ et $n|mk$. L'hypothèse $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$ donne alors $m|k$ et $n|k$ et donc $\mathrm{ppcm}(m,n)|k$. Cela combiné à la première partie montre que ab est d'ordre $\mathrm{ppcm}(m,n) = mn$.

Correction de l'exercice 5768 ▲

Etant donné $a \in F$, soit S une partie de G contenant a et engendrant G. Si $< S - \{a\} > \neq G$, alors il existe un sous-groupe propre maximal G_i tel que $< S - \{a\} > \subset G_i$. Mais alors $< S > \subset < S - \{a\} >< a > \subset G_i$. Contradiction, donc $< S - \{a\} > \neq G$.
Inversement, supposons que $a \notin F$, c'est-à-dire, il existe $i \in I$ tel que $a \notin G_i$. Alors pour $S = G_i \cup \{a\}$, on a $< S > = G$ (par maximalité de G_i) mais $< S - \{a\} > = G_i \neq G$.

Correction de l'exercice 5771 ▲

(a) $(\Rightarrow)$ Si HK est un groupe, pour tous $h \in H$ et $k \in K$, on a $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in HK$ et donc $kh \in (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$. D'où $HK \subset KH$. L'autre inclusion s'obtient similairement.
$(\Leftarrow)$ On vérifie aisément en utilisant l'hypothèse $HK = KH$ que $(HK) \cdot (HK) \subset HK$ et que $(HK)^{-1} \subset HK$.

(b) Etant donnés $h_0, h \in H$ et $k_0, k \in K$, on a $h_0k_0 = hk$ si et seulement si $h_0^{-1}h = k_0k^{-1}$. Cet élément est nécessairement dans l'intersection $H \cap K$. On a donc $h_0k_0 = hk$ si et seulement s'il existe $u \in H \cap K$ tel que $h = h_0u$ et $k = u^{-1}k_0$. Pour chaque élément fixé $h_0k_0 \in HK$, il y a donc $|H \cap K|$ façons de l'écrire hk avec $(h,k) \in H \times K$. D'où le résultat.

Correction de l'exercice 5772 ▲

D'après le théorème de Lagrange, les sous-groupes de S_3 sont d'ordre 1, 2, 3 ou 6. Les sous-groupes d'ordre 1 et 6 sont les sous-groupes triviaux $\{1\}$ et S_3 respectivement. Comme 2 et 3 sont premiers, les sous-groupes d'ordre 2 et 3 sont cycliques. Un sous-groupe d'ordre 2 est tout sous-groupe engendré par une transposition : il y en a 3. Il existe un seul sous-groupe d'ordre 3, celui engendré par le 3-cycle $(1\,2\,3)$.

Correction de l'exercice 5773 ▲

Les éléments différents de 1 sont d'ordre 5, 7 ou 35. S'il existe un élément g d'ordre 35 (*i.e.*, si le groupe est cyclique d'ordre 35), alors g^5 est d'ordre 7 et g^7 est d'ordre 5. Supposons que le groupe n'est pas cyclique et qu'il n'existe pas d'élément d'ordre 7. Tout élément différent de 1 serait alors d'ordre 5 et le groupe serait réunion de sous-groupes d'ordre 5. Mais de tels sous-groupes sont soit égaux soit d'intersection $\{1\}$ (car 5 est premier). On aurait alors $35 = 4n+1$ avec n le nombre de sous-groupes distincts d'ordre 5, ce qui donne la contradiction cherchée. Le raisonnement est le même s'il n'existe pas d'élément d'ordre 5.

Correction de l'exercice 5774 ▲

Si $p = 2$ alors $|G|$ est d'ordre 4 : G est le groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ dont tous les éléments différents de 1 sont d'ordre 2. On peut donc supposer pour la suite que p est impair. En procédant comme dans l'exercice 5773, on montre qu'il existe forcément dans G un élément d'ordre 2. Enfin si tous les éléments différents de 1 étaient d'ordre 2, alors d'après l'exercice 5755, l'ordre de G serait une puissance de 2. Il existe donc aussi un élément d'ordre p.

Correction de l'exercice 5775 ▲

On a $2^{2^n} \equiv -1$ modulo p. On en déduit que $2^{2^{n+1}} \equiv 1$ modulo p. Ces deux conditions donnent que l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est 2^{n+1}. Cet ordre devant diviser l'ordre de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, c'est-à-dire $p-1$, on obtient le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 5776 ▲

Comme $2^n \equiv 1$ modulo 2^n-1, l'ordre de 2 modulo 2^n-1, disons m, divise n. Si $m < n$, on aurait $2^m \equiv 1$ modulo 2^n-1, c'est-à-dire 2^n-1 divise 2^m-1, ce qui n'est pas possible. L'ordre de 2 modulo 2^n-1 est donc n, et celui-ci doit diviser l'ordre de $(\mathbb{Z}/(2^n-1)\mathbb{Z})^\times$, qui vaut $\varphi(2^n-1)$.

Correction de l'exercice 5787 ▲

$HK = \{hk \,/ h \in H, k \in K\}$.

(a) Soit $\phi : H \times K \to HK$ définie par $\phi(h,k) = hk$. Montrons que ϕ est bijective : ϕ est surjective par définition de HK et si $\phi(h,k) = \phi(h',k')$ alors $hk = h'k'$ et donc $h'^{-1}h = k'k^{-1}$ or $H \cap K = \{e_G\}$ et donc $h'^{-1}h = e_G$ et donc $h = h'$, de même $k = k'$ et donc ϕ est injective.

Comme ϕ est bijective $\mathrm{Card} H \times K = \mathrm{Card} HK$ et donc $\mathrm{Card} HK = \mathrm{Card} H.\mathrm{Card} K$.

(b) Supposons qu'il existe deux sous-groupes H et K distincts et d'ordre p. Montrons d'abord que $H \cap K = \{e_G\}$. En effet $H \cap K$ est un sous-groupe de H et donc le cardinal de $H \cap K$ divise $\mathrm{Card} H = p$ avec p premier. Or comme $H \neq K$ alors $H \cap K \neq H$ et donc $\mathrm{Card} H \cap K = 1$, c'est ce que nous voulions démontrer.

Maintenant d'après la première question HK est un sous-groupe de cardinal p^2 dans le groupe G de cardinal $pq < p^2$. Donc il ne peut exister deux sous-groupe d'ordre p.

Supposons maintenant que H soit un sous-groupe d'ordre p, c'est donc l'unique sous-groupe d'ordre p d'après ce que nous venons de démontrer. Pour $g \in G$ le sous-groupe gHg^{-1} est du même ordre que H (car pour g fixé le morphisme θ_g de G dans G, $\theta_g(h) = ghg^{-1}$ est un automorphisme et en particulier un biction donc $\mathrm{Card}\theta_g(H) = \mathrm{Card} H$). Par conséquent $gHg^{-1} = H$ et donc H est un sous-groupe distingué.

Correction de l'exercice 5794 ▲

Soient $x, y \in G$ quelconques. De $(xy)^n = x^n y^n$, on déduit $(yx)^{n-1} = x^{n-1}y^{n-1}$ puis $(yx)^n = yx^n y^{n-1}$ et donc $y^n x^n = yx^n y^{n-1}$, ce qui donne $y^{n-1}x^n = x^n y^{n-1}$. Ainsi, pour tout $y \in G$, y^{n-1} commute à tous les éléments de la forme x^n avec $x \in G$, et est donc dans le centre de G, puisque l'application $x \to x^n$ est supposée surjective.

Correction de l’exercice 5795 ▲

Tout automorphisme φ du groupe $G=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ permute les trois éléments d’ordre 2, c’est-à-dire l’ensemble G^* des trois éléments non triviaux. La correspondance qui à $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ associe sa restriction à G^* induit un morphisme $\chi:\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to S_3$. Tout morphisme $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ étant déterminé par sa restriction à G^*, ce morphisme χ est injectif. De plus, tout automorphisme linéaire (pour la structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) est un automorphisme de groupes. Il y a 6 tels automorphismes (autant qu’il y a de bases). L’image de χ contient donc au moins 6 éléments. Comme c’est un sous-groupe de S_3, c’est S_3 lui-même et χ est un isomorphisme.

Correction de l’exercice 5796 ▲

Le sous-groupe H est à la fois la classe à gauche et la classe à droite modulo H de l’élément neutre. Si $[G:H]=2$, son complémentaire H^c dans G est donc l’autre classe, à droite et à gauche. Classes à droite et classes à gauche coincident donc, soit $gH=Hg$ et donc $gHg^{-1}=Hgg^{-1}=H$ pour tout $g\in G$.

Correction de l’exercice 5797 ▲

D’après l’hypothèse, pour tout $x\in G$, il existe $z\in G$ tel que $xH\cdot x^{-1}H=zH$. On en déduit $xHx^{-1}\subset zH$. Cela entraine que $1\in zH$ et donc que $z\in H$. D’où finalement $xHx^{-1}\subset H$.

Correction de l’exercice 5798 ▲

Etant donnés $y,z\in H$, on a $y\simeq 1$ et $z\simeq 1$. La compatibilité de la loi donne d’une part $yz\simeq 1$, soit $yz\in H$, et d’autre part $yy^{-1}\simeq y^{-1}$ soit $y^{-1}\in H$. Cela montre que H est un sous-groupe de G. Pour tout $x\in G$, on a aussi $xyx^{-1}\simeq x1x^{-1}=1$ et donc $xyx^{-1}\in H$. Le sous-groupe H est donc distingué.

De plus, pour $x,x'\in G$, si $x\simeq x'$, alors par compatibilité de la loi, on a $x'x^{-1}\simeq xx^{-1}=1$, c’est-à-dire $x'x^{-1}\in H$. Réciproquement, si $x'x^{-1}\in H$, alors $x'x^{-1}\simeq 1$, et donc, par compatibilité de la loi, $x\simeq x'$.

Correction de l’exercice 5799 ▲

Pour tout $g\in G$, la conjugaison $c_g:G\to G$ par g induit un automorphisme de H si H est distingué dans G. Si de plus K est caractéristique dans H, alors K est stable par c_g. D’où K est alors distingué dans G.

Le sous-ensemble V_4 du groupe symétrique S_4 consistant en l’identité et les trois produits de transpositions disjointes : $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$ et $(1\,4)(2\,3)$ est un sous-groupe (vérification immédiate) qui est distingué : cela résulte de la formule $g(i\,j)(k\,l)g^{-1}=(g(i)\,g(j))(g(k)\,g(l))$ pour $i,j,k,l\in\{1,2,3,4\}$ distincts. Le sous-groupe K (d’ordre 2) engendré par $(1\,2)(3\,4)$ est distingué dans V_4 (car V_4 est abélien). Mais K n’est pas distingué dans S_4 (comme le montre encore la formule précédente).

Correction de l’exercice 5802 ▲

Le groupe μ_{mn} a un élément d’ordre mn. En revanche tout élément $x\in\mu_m\times\mu_n$ vérifie $x^\mu=1$ avec $\mu=\mathrm{ppcm}(m,n)$ et est donc d’ordre un diviseur de μ, lequel est $<mn$ si m et n ne sont pas premiers entre eux. Les groupes μ_{mn} et $\mu_m\times\mu_n$ ne peuvent donc pas être isomorphes.

Correction de l’exercice 5806 ▲

Considérons la surjection canonique $s:G\to G/H$. D’après l’exercice 5804, $|s(K)|$ divise $\mathrm{pgcd}(|K|,|G/H|)$ qui est égal à $\mathrm{pgcd}(|H|,|G/H|)$ (puisque $|H|=|K|$) et vaut donc 1. Conclusion : $s(K)=\{1\}$, c’est-à-dire $K\subset H$. D’où $K=H$ puisqu’ils ont même ordre.

Correction de l’exercice 5807 ▲

On a $f(n) = f(1)^n$ pour tout entier $n > 0$. Mais on a aussi $f(1/n)^n = f(1)$ pour tout $n > 0$. Cela n'est pas possible car un nombre rationnel positif $\neq 0, 1$ ne peut être une puissance n-ième dans $\mathbb{Q}$ pour tout $n > 0$. (Pour ce dernier point, noter par exemple qu'être une puissance n-ième dans $\mathbb{Q}$ entraîne que tous les exposants de la décomposition en facteurs premiers sont des multiples de n). Les deux groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^\times, \times)$ ne sont donc pas isomorphes.

Correction de l'exercice 5810 ▲

On a $n = |G/H|$. Pour toute classe $aH \in G/H$, on a donc $(aH)^n = H$ c'est-à-dire, $a^n H = H$ ou encore $a^n \in H$. Cela devient faux si H n'est pas distingué dans G. Par exemple le sous-groupe H de S_3 engendré par la transposition $(1\,2)$ est d'indice 3 dans S_3 et, pour $a = (2\,3)$, on a $a^3 = a \notin H$.

Correction de l'exercice 5811 ▲

Soit H' un sous-groupe de G d'ordre n et d'indice m. Pour tout $h \in H'$, on a $h^n = 1$ et $h^m \in H$ (voir l'exercice 5810). Puisque n et m sont premiers en eux, on peut trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$. On obtient alors $h = (h^m)^u (h^n)^v \in H$. D'où $H' \subset H$ et donc $H = H'$ puisque $|H| = |H'|$.

Correction de l'exercice 5813 ▲

(a) La correspondance $x \to e^{2i\pi x}$ induit un morphisme $\mathbb{R} \to T$, surjectif et de noyau $\mathbb{Z}$. D'où $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq T$. La correspondance $z \to z/|z|$ induit l'isomorphisme $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_+^\times \simeq T$. Similairement $z \to z^2/|z|^2$ fournit l'isomorphisme $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \simeq T$. Les isomorphismes $T/\mu_n \simeq T$ et $\mathbb{C}^\times/\mu_n \simeq \mathbb{C}^\times$ s'obtiennent à partir de la correspondance $z \to z^n$.

(b) La correspondance $x \to e^{2i\pi x}$ induit un morphisme $\mathbb{Q} \to \mu_\infty$, surjectif et de noyau $\mathbb{Z}$. D'où $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \mu_\infty$. Si G est un sous-groupe fini de μ_∞, alors il existe $m \in |||$ tel que $G \subset \mu_m$. Les sous-groupes du groupe cyclique μ_m sont les μ_n où $n|m$.

(c) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Q}$ de type fini, c'est-à-dire engendré par un nombre fini de rationnels $p_1/q_1, \ldots, p_r/q_r$. On a alors $q_1 \cdots q_r G \subset \mathbb{Z}$. Soit q le plus petit entier > 0 tel que $qG \subset \mathbb{Z}$. Le sous-groupe qG est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in |||$ premier avec q (car l'existence d'un facteur commun contredirait la minimalité de q). On obtient $G = (a/q)\mathbb{Z}$. Si de plus $\mathbb{Z} \subset G$ alors $1 \in G$ et s'écrit donc $1 = ka/q$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui donne $ka = q$. Comme $\text{pgcd}(a,q) = 1$, on a nécessairement $a = 1$ et donc $G = (1/q)\mathbb{Z}$.

Soit $s : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la surjection canonique. Si $\overline{G}$ est un sous-groupe de type fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors $G = s^{-1}(\overline{G})$ est un sous-groupe de $\mathbb{Q}$, contenant $\mathbb{Z}$ et de type fini (si $p_1/q_1, \ldots, p_r/q_r$ sont des antécédents par s de générateurs de $\overline{G}$, alors $1, p_1/q_1, \ldots, p_r/q_r$ engendrent G). D'après ce qui précède, on a $G = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ et donc $\overline{G} = \frac{1}{q}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Via l'isomorphisme de la question (b), on déduit les sous-groupes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de type fini : ce sont les sous-groupes $\{e^{2ik\pi/q} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mu_q$ avec q décrivant $|||^\times$.

(d) On vérifie sans difficulté que pour tout nombre premier p, μ_{p^∞} est un sous-groupe de μ_∞. Il n'est pas de type fini : en effet le sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui lui correspond par l'isomorphisme de la question (b) est engendré par les classes de rationnels $1/p^n$ modulo $\mathbb{Z}$, n décrivant $|||$. Un tel sous-groupe G n'a pas de dénominateur commun, c'est-à-dire, il n'existe pas d'entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $qG \subset G$. En conséquence il ne peut pas être de type fini.

Correction de l'exercice 5814 ▲

Soit $z \in \mathbb{C}$ quelconque et $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine n-ième de z. Le sous-groupe G est distingué dans $\mathbb{C}$ (puisque $\mathbb{C}$ est commutatif). Si n est l'indice de G dans $\mathbb{C}$, on a donc $\zeta^n = z \in G$ (voir l'exercice 5810). D'où $\mathbb{C} \subset G$. L'inclusion inverse est triviale.

Correction de l'exercice 5817 ▲

(a) Soit $\varphi : \mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p^m$ un morphisme de groupes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ sa classe modulo p. Tout élément $\overline{x} \in \mathbb{F}_p^n$ peut s'écrire $\overline{x} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ avec $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. On a alors $\varphi(\overline{n} \cdot \overline{x}) = \varphi(\overline{nx}) = \varphi(n\overline{x}) = n\varphi(\overline{x}) = \overline{n} \cdot \varphi(\overline{x})$. Le morphisme φ est donc compatible avec les lois externes de $\mathbb{F}_p^n$ et $\mathbb{F}_p^m$. Comme il est aussi additif, c'est une application $\mathbb{F}_p$-linéaire.

(b) Considérons l'application $V : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui à tout automorphisme χ associe $\chi(1)$. Cette application est à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (si $\chi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, alors $\ker(\chi) = \{0\}$). C'est un morphisme de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ muni de la composition vers le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{F}_p^\times$: en effet si $\chi, \chi' \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et si on pose $\chi'(1) = \overline{c}$ (classe de $c \in \mathbb{Z}$ modulo p), alors $(\chi \circ \chi')(1) = \chi(\overline{c}) = c\chi(1) = \overline{c} \cdot \chi(1) = \chi'(1) \cdot \chi(1) = \chi(1) \cdot \chi'(1)$. Ce morphisme V est de plus injectif puisque tout automorphisme χ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est déterminé par $\chi(1)$. Enfin, pour tout $\overline{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non nul, la correspondance $\overline{n} \to \overline{a} \cdot \overline{n}$ induit un automorphisme χ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\chi(1) = \overline{a}$. L'image du morphisme V est donc tout $\mathbb{F}_p^\times$. Ce qui établit l'isomorphisme demandé.

(c) D'après la question (a), il s'agit de compter le nombre d'automorphismes linéaires du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathbb{F}_p^n$, qui est égal au nombre de bases de $\mathbb{F}_p^n$, c'est-à-dire $(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$.

Correction de l'exercice 5819 ▲

Soit G un groupe abélien fini tel que $pG = \{0\}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $g \in G$, l'élément ng ne dépend que de la classe de n modulo p ; on peut le noter $\overline{n} \cdot g$. La correspondance $(\overline{n}, g) \to \overline{n} \cdot g$ définit une loi externe sur le groupe additif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ et lui confère ainsi une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. Cet espace vectoriel, étant fini, est de dimension finie. Il est donc isomorphe comme espace vectoriel, et en particulier comme groupe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ pour un certain entier $n \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 5822 ▲

Le centre $Z(G)$ est ni trivial (car G est un p-groupe) ni égal à G (car G non abélien). En utilisant l'exercice 5815, on voit qu'il n'est pas non plus d'ordre p^2. Il est donc d'ordre p. Mais alors $G/Z(G)$ est d'ordre p^2 et est donc abélien (exercice 5816). D'après l'exercice 5821, on a alors $D(G) \subset Z(G)$. Comme $D(G) \neq \{1\}$ (sinon G serait abélien), on a $D(G) = Z(G)$.

Correction de l'exercice 5824 ▲

(a) On vérifie les deux formules : $(a\, b)(b\, c) = (a\, b\, c)$ pour a, b, c distincts, et $(a\, b)(c\, d) = (a\, b)(b\, c)(b\, c)(c\, d) = (a\, b\, c)(b\, c\, d)$, pour a, b, c, d distincts. On déduit que toute permutation paire, produit d'un nombre pair de transpositions, peut s'écrire comme produit de 3-cycles. Le groupe alterné A_n est donc engendré par les 3-cycles si $n \geqslant 3$.

(b) On a $(1\, 2\, j)\, (1\, 2\, i)\, (1\, 2\, j)^{-1} = (2\, j\, i)$ pour i, j distincts et différents de 1 et 2, et si en plus k est différent de $1, 2, i, j$, on a $(1\, 2\, k)\, (2\, j\, i)\, (1\, 2\, k)^{-1} = (k\, j\, i)$. Le groupe engendré par les 3-cycles $(1\, 2\, i)$ où $i \geqslant 3$ contient donc tous les 3-cycles ; d'après (a), c'est le groupe alterné A_n.

Correction de l'exercice 5826 ▲

Les cas $n = 1$ et $n = 2$ sont immédiats. On peut supposer $n \geqslant 3$. On vérifie aisément la formule $(a_1\, a_2\, \dots\, a_{n-1}\, a_n)\, (a_{n-1}\, a_n\, a_{n-2} \dots\, a_2\, a_1) = (a_1\, a_n\, a_{n-1})$ où $a_1, \dots, a_n$ sont les éléments d'un ensemble de cardinal n. On en déduit que le groupe PC_n engendré par les permutations circulaires contient les 3-cycles et donc le groupe alterné A_n (voir exercice 5824). Les permutations circulaires sont de signature $(-1)^{n-1}$. Si n est impair, elles sont donc paires d'où $PC_n \subset A_n$ et donc finalement $PC_n = A_n$ dans ce cas. Si n pair, les permutations circulaires sont impaires, donc $PC_n \neq A_n$. L'indice de PC_n dans S_n devant diviser 2 (puisque $PC_n \supset A_n$), il vaut 1, c'est-à-dire $PC_n = S_n$.

Correction de l'exercice 5827 ▲

Supposons $\sigma\tau = \tau\sigma$. Pour tout $x \notin I$, on a $\sigma(\tau(x)) = \tau(\sigma(x)) = \tau(x)$; $\tau(x)$, fixé par σ, n'appartient pas à I. Cela montre que le complémentaire de I est invariant par τ. Comme τ est injective, I l'est aussi.

Montrons que, sur I, τ est égal à une puissance de σ. Quitte à renuméroter $\{1,\ldots,n\}$, on peut supposer que $I=\{1,\ldots,m\}$ (où $m\leqslant n$) et $\sigma|_I=(1\,2\,\ldots\,m)$. L'entier $\tau(1)$ est dans I ; soit k l'unique entier entre 1 et m tel que $\tau(1)=\sigma^k(1)$. Pour tout $i\in I$, on a alors $\tau(i)=\tau\sigma^{i-1}(1)=\sigma^{i-1}\tau(1)=\sigma^{i-1}\sigma^k(1)=\sigma^k\sigma^{i-1}(1)=\sigma^k(i)$ (l'identité $\tau\sigma^{i-1}=\sigma^{i-1}\tau$ utilisée dans le calcul découle facilement de l'hypothèse $\sigma\tau=\tau\sigma$). On obtient donc $\tau|_I=(\sigma|_I)^k$. L'implication réciproque est facile.

Correction de l'exercice 5828 ▲

Un sous-groupe distingué de S_n qui contient une transposition contient toute sa classe de conjugaison, c'est-à-dire, toutes les transpositions (cf les indications de l'exercice 5825, "Rappel") et donc le groupe qu'elles engendrent, c'est-à-dire S_n.

Correction de l'exercice 5829 ▲

L'ensemble H est le sous-groupe de S_4 fixant la paire $\{1,2\}$. Tout élément de H fixe aussi la paire $\{3,4\}$. Cela fournit un morphisme $H\to S_2\times S_2$ qui est clairement bijectif. D'où $H\simeq S_2\times S_2\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On a $\sigma\in K$ si et seulement si $\sigma(1)\equiv\sigma(3)$ [mod 2] et $\sigma(2)\equiv\sigma(4)$ [mod 2], c'est-à-dire si et seulement si $\sigma(\{1,3\})$ est soit la paire $\{1,3\}$ soit la paire $\{2,4\}$ (auquel cas $\sigma(\{2,4\})$ est la paire $\{2,4\}$ ou la paire $\{1,3\}$ respectivement). Grâce à l'identité $\sigma\,(1\,3)\,(2\,4)\,\sigma^{-1}=(\sigma(1)\,\sigma(3))\,(\sigma(2)\,\sigma(4))$, on voit que la condition est également équivalente au fait que la conjugaison par σ stabilise la permutation $(1\,3)\,(2\,4)$. Autrement dit K est le sous-groupe des éléments de S_4 commutant avec $(1\,3)\,(2\,4)$. La classe de conjugaison 2-2 ayant 3 éléments, le groupe H est d'ordre $4!/3=8$. On peut dresser la liste de ses éléments : si $\omega=(1\,2\,3\,4)$ et $\tau=(1\,2)\,(3\,4)$, alors $K=\{1,\omega,\omega^2,\omega^3,\tau,\omega\tau,\omega^2\tau,\omega^3\tau\}$. On vérifie les relations $\sigma^4=1$, $\tau^2=1$ et $\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma^{-1}$. Le groupe K est égal au produit semi-direct de son sous-groupe distingué $<\omega>$ par son sous-groupe $<\tau>$ et est donc isomorphe au groupe diédral d'ordre 8.

Correction de l'exercice 5831 ▲

L'ordre d'une permutation $\omega\in S_n$ est le ppcm des longueurs des cycles de la décomposition de ω en cycles à supports disjoints. De plus, la somme des longueurs de ces cycles (ceux de longueur 1 y compris) vaut n. Pour une permutation d'ordre 10 dans S_8, il n'y a qu'un type possible : 5-2-1. La signature vaut alors $(-1)^{5-1}(-1)^{2-1}=-1$.

Correction de l'exercice 5832 ▲

(a) Un 3-cycle ω est d'ordre 3 et vérifie donc $\omega^3=1$ soit encore $\omega=(\omega^2)^2$. Le groupe engendré par tous les carrés de permutations dans S_n contient donc tous les 3-cycles, et donc aussi le groupe qu'ils engendrent, c'est-à-dire A_n. L'autre inclusion est facile puisque le carré d'une permutation est toujours une permutation paire.

(b) Si H est un sous-groupe d'indice 2 de S_n, il est distingué. On a alors $\sigma^2\in H$ pour tout $\sigma\in S_n$ (cf exercice 5810). D'après la question (a), $H=A_n$.

Correction de l'exercice 5833 ▲

Les classes de conjugaison de S_n correspondent aux types possibles d'une permutation de n éléments (cf indication exercice 3 Rappel). Pour $n=4$, on a 5 classes : 1-1-1-1, 2-1-1, 2-2, 3-1 et 4.

Soit H un sous-groupe distingué non trivial de S_4. Si H contient la classe 2-1-1 (transpositions), alors $H=S_4$. Si H contient la classe 3-1, alors $H\supset A_4$ (cf exercice 5824) et donc $H=A_4$ ou $H=S_4$. Si H contient la classe 4, alors $H=S_4$ (cf exercice 5826). Si H contient la classe 2-2, alors $H\supset V_4$ (voir la correction de l'exercice 5799 définition de V_4), ce qui donne $H=V_4$ ou bien, au vu des cas précédents, $H=A_4$ ou $H=S_4$. Les sous-groupes distingués de S_4 sont donc $\{1\}$, V_4, A_4 et S_4.

Correction de l'exercice 5835 ▲

Soit H un sous-groupe d'indice m d'un groupe G. L'action de G par translation à gauche sur l'ensemble quotient G/H des classes à gauche modulo H induit un morphisme $G \to \mathrm{Per}(G/H)$ qui est non-trivial et donc est injectif puisque le noyau, distingué dans G, ne peut être trivial si G est simple. L'ordre de G doit donc diviser l'ordre du groupe $\mathrm{Per}(G/H)$ qui vaut $m!$. Il faut nécessairement que $|G| = m!$. Mais alors le morphisme précédent est un isomorphisme et G est isomorphe au groupe symétrique S_m, ce qui contredit la simplicité de G.

Correction de l'exercice 5837 ▲

(a) L'identité $a^2b^2 = (ab)^2$, par simplification à gauche par a et à droite par b, se réécrit $ab = ba$.

(b) La correspondance $(x,y) \to (x+y,y)$ définit un automorphisme σ de $\mathbb{F}_3^2$ d'ordre 3. Identifions le groupe $< \sigma >$ au groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et considérons le produit semi-direct $\mathbb{F}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Pour tout élément $((x,y),i)$, on a $((x,y),i)^2 = ((x,y)+\sigma^i(x,y),2i)$ et $((x,y),i)^3 = ((x,y)+\sigma^i(x,y)+\sigma^{2i}(x,y),3i) = ((0,0),0)$ puisque $(\mathrm{Id}+\sigma^i+\sigma^{2i})(x,y) = (3x+iy+2iy,3y) = (0,0)$. La formule $a^3b^3 = (ab)^3$ est donc satisfaite pour tous a,b dans $\mathbb{F}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Mais ce produit semi-direct n'est pas commutatif car l'action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ n'est pas l'action triviale.

Correction de l'exercice 5838 ▲

(a) Que R soit une relation d'équivalence est immédiat. La classe d'un élément $x \in G$ est l'ensemble HxH, lequel est égal à la réunion des ensembles hxH où h décrit H. Ces derniers ensembles sont des classes à gauche modulo H et sont donc égaux ou disjoints.

(b) Pour tout $i = 1,\dots,d(x)$, hx_iH est une classe à gauche, contenue dans $h(HxH)H \subset HxH$, donc est de la forme x_jH. La formule $h * x_iH = hx_iH$ définit ainsi une permutation de l'ensemble des classes $x_1H,\dots,x_{d(x)}H$ (la permutation réciproque est celle induite par h^{-1}) et donc une action de H sur cet ensemble. Cette action est transitive : pour $i,j \in \{1,\dots,d(x)\}$, $h = x_i^{-1}x_j$ vérifie $h * x_iH = x_jH$.

Un élément $h \in H$ est dans le fixateur $H(x_iH)$ d'une classe x_iH si et seulement si $hx_iH = x_iH$ c'est-à-dire si $h \in x_iHx_i^{-1}$. D'où $H(x_iH) = H \cap x_iHx_i^{-1}$. On obtient alors $d(x) = [H : (H \cap x_iHx_i^{-1})]$ ce qui prouve que $d(x)$ divise $|H|$ et donc aussi $|G|$.

(c) Si H est distingué dans G, alors classes à droite et classes à gauche modulo H coincident d'où $HxH = xHH = xH$ et donc $d(x) = 1$ pour tout $x \in G$. Inversement, pour tout $x \in G$, si $d(x) = 1$, alors $HxH = xH$ ce qui entraine $Hx \subset xH$ et donc $x^{-1}Hx \subset H$.

(d) (i) De façon générale, on a $d(x) \leqslant [G:H]$. On a ainsi $d(x) \leqslant p$ si $[G:H] = p$. Comme $d(x)$ divise $|G|$ et que p est le plus petit premier divisant $|G|$, nécessairement $d(x) = 1$ ou $d(x) = p$.

(ii) Si H n'est pas distingué alors il existe $x \in G$ avec $d(x) \neq 1$ et donc $d(x) = p$. Mais alors $\mathrm{card}(HxH) = d(x)\,|H| = p\,|H| = [G:H]\,|H| = |G|$. C'est-à-dire, il n'existe qu'une seule classe $HxH = G$, laquelle est aussi la classe de l'élément neutre $H1H = H$, ce qui contredit l'hypothèse $[G:H] = p > 1$. Conclusion : le sous-groupe H est distingué dans G.

Correction de l'exercice 5839 ▲

Toute orbite $\mathscr{O} = \mathscr{O}_x$ d'un élément $x \in X$ est en bijection avec l'ensemble $G/\cdot G(x)$ des classes à gauche de G modulo le fixateur $G(x)$ de G. En particulier, le cardinal de $\mathscr{O}$ divise l'ordre de G. De plus la somme des longueurs des orbites est égale au cardinal de l'ensemble X.

(a) Si $|G| = 15$, $\mathrm{card}(X) = 17$ et s'il n'y a pas d'orbite à un seul élément, il n'y a qu'une seule possibilité : 4 orbites de longueur 3 et une de longueur 5.

(b) Supposons $|G| = 33$ et $\mathrm{card}(X) = 19$. Aucune somme de diviseurs $\neq 1$ de 33 n'est égale à 19 donc nécessairement il existe au moins une orbite réduite à un élément.

Correction de **l'exercice 5840 ▲**

(a) Si g'_1, g'_2 sont dans la même classe à gauche de G modulo H, c'est-à-dire, si $g'_1H = g'_2H$ ou encore si $(g'_2)^{-1}g'_1 \in H$ alors $(gg'_2)^{-1}(gg'_1) = (g'_2)^{-1}g'_1 \in H$: les classes gg'_1H et gg'_2H sont égales. Pour tous $g, g' \in H$, la classe $gg'H$ ne dépend donc pas du représentant choisi g' de la classe $g'H$; on peut la noter $g \cdot g'H$. On vérifie sans difficulté que la correspondance $(g, g'H) \to g \cdot g'H$ satisfait les autres conditions de la définition d'une action de G sur l'ensemble quotient $G/\cdot H$.

Pour $g, \gamma \in G$, on a $\gamma \cdot gH = gH$ si et seulement si $g^{-1}\gamma g \in H$ ce qui équivaut à $\gamma \in gHg^{-1}$. Le fixateur de la classe gH est le sous-groupe conjugué gHg^{-1} de H par g.

(b) Pour tout $y \in Y$ et tout $g \in G$, on a $f(g \cdot f^{-1}(y)) = g \cdot f(f^{-1}(y)) = g \cdot y$. En appliquant f^{-1}, on obtient $g \cdot f^{-1}(y) = f^{-1}(g \cdot y)$, ce qui montre que f^{-1} est compatible à l'action de G.

(c) Soit $x \in X$ fixé. Pour $g \in G$, l'élément $g \cdot x$ ne dépend que de la classe à gauche de g modulo le fixateur $G(x)$ de x. Cela permet de définir une application $G/\cdot G(x) \to X$: à chaque classe $gG(x)$ on associe $g \cdot x$. On montre sans difficulté que cette application est compatible avec l'action de G (vérification formelle), injective (par construction) et surjective (par l'hypothèse de transitivité) ; c'est donc un isomorphisme de G-ensembles.

(d) i) Supposons donnée une application $f : G/\cdot H \to G/\cdot K$ compatible avec l'action de G. Pour tout $h \in H$, on a $f(hH) = f(H) = h \cdot f(H)$. Ce qui, d'après la question (a), donne $h \in gKg^{-1}$, où g est un représentant de la classe $f(H)$ dans $G/\cdot K$.

Réciproquement, supposons $H \subset gKg^{-1}$ avec $g \in G$. Considérons l'application $\varphi : G/\cdot H \to G/\cdot K$ qui à toute classe γH associe la classe γgK. Cette application est bien définie : en effet, si $\gamma_2^{-1}\gamma_1 \in H$, alors $(\gamma_2 g)^{-1}\gamma_1 g = g^{-1}(\gamma_2^{-1}\gamma_1)g \in g^{-1}Hg \subset K$; la classe γgK ne dépend donc pas du représentant γ de la classe γH. De plus φ est compatible à l'action de G : pour tous $\gamma, \gamma' \in G$, on a $\varphi(\gamma' \cdot \gamma H) = \varphi(\gamma'\gamma H) = \gamma'\gamma gK = \gamma' \cdot \varphi(\gamma H)$.

Si $f : G/\cdot H \to G/\cdot K$ est compatible avec l'action de G, alors son image contient toute orbite dès qu'elle en contient un élément. Comme l'action de G sur sur $G/\cdot K$ ne possède qu'une orbite, l'image de f contient tout $G/\cdot K$: f est surjective.

D'après ce qui précède, les ensembles $G/\cdot H$ et $G/\cdot K$ sont isomorphes comme G-ensembles si et seulement si $H \subset gKg^{-1}$ avec $g \in G$ et $\mathrm{card}(G/\cdot H) = \mathrm{card}(G/\cdot K)$ ce qui équivaut à $H \subset gKg^{-1}$ et $|H| = |K|$ ou encore à $H = gKg^{-1}$.

ii) Il suffit de réécrire les résultats de la question précédente en remplaçant $G/\cdot H$ et $G/\cdot K$ par $G/\cdot G(x)$ et $G/\cdot G(y)$ qui, d'après la question (c) sont G-isomorphes à X et Y respectivement (où x et y sont des points fixés de X et Y respectivement).

Correction de **l'exercice 5841 ▲**

(a) Pour $1 \leqslant i, j \leqslant r$ quelconques et $x_i, x_j \in X_i \times X_j$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x_i = x_j$ (par transitivité de G). On a alors $g \cdot X_i = X_j$. En particulier $\mathrm{card}(X_i) = \mathrm{card}(g \cdot X_i) = \mathrm{card}(X_j)$.

(b) Si l'action de G sur $G/\cdot H$ est imprimitive, le sous-ensemble $K = \{g \in G \mid g \cdot X_1 = X_1\}$, où X_1 est par exemple celui des sous-ensembles $X_i \subset X$ qui contient la classe neutre H de $G/\cdot H$, est un sous-groupe propre de G ($K \neq G$ car G agissant transitivement, il existe $g \in G$ tel que $(g \cdot X_1) \cap X_2 \neq \emptyset$) et contenant strictement H (car encore par transitivité, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot H$ soit un élément de X_1 (ce qui assure que $g \in K$) mais différent de H (ce qui assure que $g \notin H$)).

Inversement, si un tel sous-groupe K de G existe, la relation "$gH \sim g'H$ si $(g')^{-1}g \in K$" est bien définie sur $G/\cdot H$ (la définition ne dépend pas des représentants dans G des classes gH et $g'H$) et est une relation d'équivalence (immédiat). La partition associée de $G/\cdot H$ en classes d'équivalence vérifie les conditions de la définition d'imprimitivité (pour l'action de G sur $G/\cdot H$) : la partition est non triviale car K est strictement contenu entre H et K ; et si $(\gamma H)K$ est une de ces classes d'équivalence et $g \in G$, alors $g\cdot(\gamma H)K$ est la classe $(g\gamma H)K$: l'action de G permute bien les classes constituant la partition de X.

(c) D'après l'exercice 5840, les ensembles X et $G/\cdot G(x)$ sont isomorphes comme G-ensembles. L'action de G sur X est primitive si et seulement si celle de G sur $G/\cdot G(x)$ l'est, ce qui, d'après la question précédente, équivaut à dire que le fixateur $G(x)$ est maximal parmi les sous-groupes de G.

(d) Soient $x\in X$ et $G(x)$ son fixateur. Le sous-groupe H étant distingué dans G, l'ensemble $HG(x)$ est un sous-groupe ; c'est le sous-groupe engendré par H et $G(x)$. De plus, l'action de H sur G n'étant pas triviale, H n'est pas contenu dans $G(x)$ et par conséquent $HG(x)$ contient strictement $G(x)$. D'après la question (c), il en résulte que $HG(x)=G$. On vérifie sans peine que l'application $H/\cdot(H\cap G(x))\to(HG(x))/\cdot G(x)$ qui à toute classe $h(H\cap G(x))$ associe la classe $hG(x)$ est une bijection (ce qui généralise le théorème d'isomorphisme $HK/K\simeq H/(H\cap K)$ qui est vrai sous l'hypothèse supplémentaire "K distingué" (qui assure que les ensembles HK/K et $H/(H\cap K)$ sont des groupes et non de simples ensembles comme ici)). On obtient donc que les ensembles $H/\cdot(H\cap G(x))$ et $G/\cdot G(x)$ sont isomorphes comme G-ensembles (la compatibilité des actions est immédiate). Or ces deux ensembles sont en bijection avec les orbites de x sous H et sous G respectivement. Conclusion : l'action de H est, comme celle de G, transitive sur l'ensemble X.

Correction de l'exercice 5842 ▲

Soit H un sous-groupe primitif de S_n contenant une transposition. On peut supposer que H contient la transposition $(1\,2)$. Le sous-groupe engendré par le fixateur $H(1)$ et $(1\,2)$ contient strictement $H(1)$. D'après l'exercice 5841 (question (c)), ce groupe est H.

Considérons l'ensemble $\mathscr{O}$ réunion de l'orbite $H(1)\cdot 2$ de 2 sous $H(1)$ et du singleton $\{1\}$. Pour montrer que $\mathscr{O}$ est l'orbite de 2 sous H, il suffit de montrer que $2\in\mathscr{O}$ (ce qui est clair) et que $\mathscr{O}$ est stable sous l'action de H, ou, ce qui est équivalent, stable sous l'action de $H(1)$ et de $(1\,2)$. L'élément 1 est envoyé sur $1\in\mathscr{O}$ par les éléments de $H(1)$ et sur $2\in\mathscr{O}$ par $(1\,2)$. L'ensemble $H(1)\cdot 2$ est invariant sous l'action de $H(1)$. Enfin, si $h\cdot 2$ désigne un élément quelconque de $H(1)\cdot 2$, alors son image par la permutation $(1\,2)$ est 2 si $h\cdot 2=1$, 1 si $h\cdot 2=2$ et $h\cdot 2$ si $h\cdot 2\neq 1,2$; dans tous les cas, l'image est dans $\mathscr{O}$.

On a donc $\mathscr{O}=H\cdot 2=H(1)\cdot 2\cup\{1\}$. L'action de H étant transitive, cet ensemble est égal à $\{1,\dots,n\}$ et donc $H(1)\cdot 2=\{2,\dots,n\}$ (puisque $1\notin H(1)\cdot 2$). Cela montre que l'action de $H(1)$ sur $\{2,\dots,n\}$ est transitive, et donc que H agit transitivement sur $\{1,\dots,n\}$ (exercice 21).

Pour i,j entiers distincts entre 1 et n, choisissons alors $g\in G$ tel que $g(1)=i$ et $g(2)=j$. On a $g(1\,2)g^{-1}=(g(1)\,g(2))=(i\,j)$. Cela montre que H contient toutes les transpositions. Conclusion : $H=S_n$.

Correction de l'exercice 5845 ▲

Notons G le groupe des isométries de l'espace euclidien de dimension 3 laissant invariant l'ensemble $\{a_1,\dots,a_4\}$ des 4 sommets d'un tétraèdre régulier. Le fixateur $G(a_4)$ agit transitivement sur $\{a_1,a_2,a_3\}$: en effet ce sous-groupe contient la rotation d'axe la droite joignant a_4 au centre de gravité du triangle de sommets a_1,a_2,a_3, laquelle agit sur ces points comme un 3-cycle. D'après l'exercice 5843, le groupe G agit 2-transitivement sur $\{a_1,\dots,a_4\}$. De plus $G(a_4)$ contient une isométrie agissant sur $\{a_1,\dots,a_4\}$ comme une transposition, par exemple la symétrie par rapport au plan médiateur P du segment $[a_1,a_2]$, laquelle échange a_1 et a_2 et fixe a_3 et a_4 qui sont dans P. D'après l'exercice 5842, on a $G\simeq S_4$.

Notons G_+ le sous-groupe de G constitué de ses isométries directes. Le groupe G_+ est le noyau du morphisme $\det : G_+\to\{1,-1\}$ qui à tout $g\in G$ vu comme matrice associe son déterminant. Comme ce morphisme est surjectif (la rotation et la symétrie considérées ci-dessus sont respectivement directe et indirecte), G_+ est d'indice 2. D'où $G\simeq A_4$ puisque A_4 est le seul sous-groupe de S_4 d'indice 2 (cf exercice 5832).

Correction de l'exercice 5856 ▲

Le sous-groupe $H \subset G$ étant distingué, G agit par conjugaison sur H. Comme G est un p-groupe, H l'est aussi et les orbites non triviales de cette action sont de longueur divisible par p. On déduit que la réunion des orbites triviales, c'est-à-dire l'ensemble $H \cap Z(G)$ des points fixes, est aussi de cardinal divisible par p. Comme il contient l'élément neutre, il contient au moins p éléments et n'est donc pas réduit à l'élément neutre.

Correction de l'exercice 5857 ▲

(a) Soit G un p-groupe d'ordre p^r. Son centre $Z(G)$ est un p-groupe non trivial. Soit $x \in Z(G) \setminus \{1\}$. Si $p^\nu > 0$ est son ordre, alors $x^{p^{\nu-1}}$ est d'ordre p et dans $Z(G)$; on peut donc supposer que x lui-même est d'ordre p. Le groupe $< x >$ est distingué dans G et le groupe quotient $G/ < x >$ est d'ordre p^{r-1}. Par hypothèse de récurrence, pour tout $k \leqslant r$, le groupe $G/ < x >$ possède un sous-groupe distingué $\mathscr{H}$ d'ordre p^{k-1}. Soit H le sous-groupe image réciproque de $\mathscr{H}$ par la surjection canonique $G \to G/ < x >$. Le sous-groupe H, image réciproque par un morphisme d'un sous-groupe distingué, est distingué dans G et $\mathscr{H} = H/ < x >$, ce qui donne $|H| = |\mathscr{H}|\,| < x > | = p^k$.

Correction de l'exercice 5858 ▲

Comme p divise $|G|$, il existe dans G un élément s d'ordre p. Le sous-groupe $H =< s >$, d'indice 2, est nécessairement distingué dans G. Il est de plus le seul sous-groupe d'ordre p (cf l'exercice 5811).

De façon générale, un automorphisme χ d'un groupe cyclique $< \zeta >$ d'ordre p est déterminé par $\chi(\zeta) = \zeta^{i_\chi}$ et cet automorphisme est d'ordre 2 si et seulement si $i_\chi^2 \equiv 1$ [mod p], c'est-à-dire si $\chi(\zeta) = \zeta$ ou $\chi(\zeta) = \zeta^{-1}$ ce qui correspond aux deux automorphismes “identité” et “passage à l'inverse” (que p soit premier n'intervient pas ici ; le résultat est valable pour tout entier $p \geqslant 1$).

Soit $t \in G$ d'ordre 2 (qui existe car 2 divise $|G|$). La conjugaison par t induit un automorphisme du sous-groupe distingué H. D'après ce qui précède, on a $tst^{-1} = s$ ou bien $tst^{-1} = s^{-1}$. Dans le premier cas, la correspondance $(s^i, t^\varepsilon) \to s^i \cdot t^\varepsilon$ ($i = 0, 1, 2$ et $\varepsilon = \pm 1$) induit un morphisme entre le produit direct $< s > \times < t >$ et G, lequel est injectif (car $< s > \cap < t >= \{1\}$) et donc est bijectif (puisque les groupes de départ et d'arrivée ont même ordre $2p$). Dans ce cas on a donc $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ cyclique. Dans l'autre cas, G est non commutatif (puisque $tst^{-1} = s^{-1} \neq s$) ; il est engendré par s et t qui vérifient les relations $s^p = 1$, $t^2 = 1$ et $tst^{-1} = s^{-1}$. Dans ce cas G est isomorphe au groupe diédral $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'ordre $2p$.

Correction de l'exercice 5859 ▲

(a) Le groupe G n'étant pas abélien n'est pas cyclique d'ordre 8 et possède au moins un élément $a \neq 1$ qui n'est pas d'ordre 2 (cf l'exercice 5755). Cet élément est nécessairement d'ordre 4. Le sous-groupe $H =< a >$ est distingué car d'indice 2.

(b) Supposons qu'il existe $b \in G \setminus H$ d'ordre 2 et posons $K =< b >$. On a $H \cap K = \{1\}$ car $b \notin H$. Le sous-groupe H étant distingué dans G, on peut écrire que $HK/H \simeq K$, ce qui donne $|HK| = |H|\,|K| = 8$ et donc $G = HK$. De plus, l'inclusion $K \subset G$ est une section de la suite exacte $1 \to H \to G \to K \to 1$. Le groupe G est donc isomorphe au produit semi-direct de H par K. L'action sur H du générateur b d'ordre 2 de K est nécessairement donnée par le passage à l'inverse (cf exercice 5858).

(c) Dans le cas contraire à (b), tous les éléments de $G \setminus H$ sont nécessairement d'ordre 4. Les éléments de G d'ordre 2 sont donc dans H, qui n'en possède qu'un : a^2, qu'on note -1.

Le centre $Z(G)$ est d'ordre différent de 1 car G est un 2-groupe et différent de 8 car G est non abélien. Il n'est pas non plus d'ordre 4 car alors on aurait $G = Z(G) \cup xZ(G)$ pour un $x \in G \setminus Z(G)$ mais alors G serait abélien. Le centre $Z(G)$ est donc d'ordre 2. D'après ce qui précède $Z(G) = \{1, -1\}$.

Soit $b \in G \setminus H$. Alors G est engendré par a et b. D'autre part b est d'ordre 4 et b^2 d'ordre 2 ce qui entraine $b^2 = -1$. La conjugaison par b induit un automorphisme du sous-groupe distingué $< a >$; on a donc $bab^{-1} = a^{-1}$, le seul autre cas $bab^{-1} = a$ étant exclu car G non abélien. On obtient ensuite aisément que si $ab = c$, on a $c^2 = -1$ ($c^2 = abab = aa^{-1}bb = b^2 = -1$) et $ba = -ab = -c$, $bc = -cb = a$, $ca = -ac = b$.

Correction de l'exercice 5861 ▲

(a) On a $\theta(g)(xH) = gxH$ $(g,x \in G)$. Le noyau de θ est l'intersection de tous les conjugués xHx^{-1} de H, c'est-à-dire, d'après les théorèmes de Sylow, l'intersection de tous les 3-Sylow de G. Comme l'intersection de deux 3-Sylow distincts est triviale, le noyau est $\neq \{1\}$ si et seulement s'il n'existe qu'un seul 3-Sylow, qui est alors automatiquement distingué dans G.

Si H est non distingué dans G, alors θ est injectif et fournit un isomorphisme entre G et un sous-groupe de S_4. Ce sous-groupe devant être d'ordre 12 comme G, c'est nécessairement A_4 (cf l'exercice 5832).

(b) Si G n'est pas isomorphe à A_4, alors nécessairement H est distingué dans G et c'est alors l'unique 3-Sylow de G. Notons $1, a, a^2$ les trois élément distincts du groupe cyclique H.

Supposons que G contienne un élément b d'ordre 4. On a $b^4 = a^3 = 1$. D'autre part, la conjugaison par b laissant invariant le sous-groupe distingué $H = < a >$, l'élément bab^{-1} doit être un générateur de $< a >$, c'est-à-dire a ou a^{-1}. Mais la première possibilité est exclue car sinon b serait dans le centre de G et G serait abélien (cf exercice 5815). La seconde possibilité existe bien : on prend par exemple pour G le produit semi direct $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ où l'action de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ se fait à travers la surjection canonique $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire, les classes de 0 et 2 modulo 4 agissent comme l'identité et celles de 1 et 3 comme le passage à l'inverse.

Supposons au contraire qu'aucun élément de $G \setminus H$ soit d'ordre 4. Les 2-Sylow sont donc isomorphes au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De plus, deux quelconques B et B' d'entre eux sont forcément d'intersection non triviale car sinon l'ensemble produit BB' (qui est en bijection avec $B \times B'$ par $(b,b') \to bb'$) serait de cardinal $|B|\,|B'| = 16 > 12$. Il y a donc strictement moins de $3 \times 3 = 9$ éléments d'ordre 2 dans G. Comme $G \setminus H$ est de cardinal 9, il existe dans G un élément c d'ordre $\neq 2$. Cet élément ne pouvant non plus être d'ordre 3 (H est le seul 3-Sylow), ni d'ordre 4 (par hypothèse) est d'ordre 6. Le groupe $< c >$ est alors d'indice 2 et donc distingué dans G. Comme $< c >$ est cyclique, il ne possède qu'un seul élément d'ordre 2. On peut donc trouver dans un 2-Sylow de G un élément $d \in G \setminus < c >$ d'ordre 2. La conjugaison par d induit un automorphisme de $< c >$ qui envoie c sur un générateur de $< c >$, c'est-à-dire ou bien c ou bien c^{-1}. Mais la première possibilité est exclue car G n'est pas abélien. On a donc $dcd^{-1} = c^{-1}$; le groupe G est dans ce cas isomorphe au groupe diédral D_6.

(c) Les groupes d'ordre 12 sont

- les groupes abéliens : $\mathbb{Z}/3Z \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et

- les groupes non abéliens : A_4, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (pour l'action donnée ci-dessus) et D_6.

Correction de l'exercice 5863 ▲

Le groupe P est un p-sous groupe maximal de G et donc aussi de HP puisque $P \subset HP$ (noter que HP est un sous-groupe car H est supposé distingué dans G) ; P est donc un p-Sylow de HP. Si $|P| = p^n$, alors $|HP| = p^n s$ avec p ne divisant pas s. On peut aussi écrire $|H| = p^m r$ avec p ne divisant pas r ; on a alors nécessairement $m \leqslant n$ et s multiple de r. On a aussi $HP/H \simeq P/(H \cap P)$ ce qui donne $|H \cap P| = |P||H|/|HP| = p^m(r/s)$. On obtient donc que $s = r$ et que $H \cap P$ est un p-Sylow du groupe H.

On a aussi $|G| = p^n t$ avec p ne divisant pas t et t multiple de s. On en déduit $|G/H| = p^{n-m}(t/r)$. Comme t/r est un entier non divisible par p et que HP/H est un sous-groupe de G/H d'ordre $|HP/H| = p^{n-m}$, le groupe HP/H est un p-Sylow de G/H.

Correction de l'exercice 5864 ▲

D'après les théorèmes de Sylow, le nombre de 5-Sylow d'un groupe d'ordre $200 = 5^2.2^3$ est $\equiv 1$ [mod 5] et divise 8. Ce ne peut être que 1. L'unique 5-Sylow est nécessairement distingué puisque ses conjugués sont des 5-Sylow et coincident donc avec lui. Le groupe ne peut pas être simple.

Correction de l'exercice 5865 ▲

Les p-Sylow de S_p sont d'ordre p puisque p, étant premier, ne divise pas $p!/p = (p-1)!$. Chaque p-Sylow est donc cyclique d'ordre p et contient $p-1$ éléments d'ordre p. Les éléments d'ordre p de S_p sont les p-cycles ; il y en a $(p-1)!$. Il y a donc $(p-2)!$ p-Sylow. (On retrouve le théorème de Wilson : $(p-2)! \equiv 1$ [mod p] (ou $(p-1)!+1 \equiv 0$ [mod p]) si p est premier).

Correction de l'exercice 5867 ▲

Le groupe alterné A_5 est d'ordre $60 = 2^2.3.5$.

Les 5-Sylow sont d'ordre 5, donc cycliques ; chacun est engendré par un 5-cycle et contient 4 5-cycles. Les 5-Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à $\{1\}$. Comme il y a 24 5-cycles dans A_5, il y a 6 5-Sylow. (On peut aussi utiliser les théorèmes de Sylow : Le nombre de 5-Sylow est $\equiv 1$ [mod 5] et divise 12 ; c'est donc 1 ou 6. Comme ce ne peut être 1 (car il y aurait alors un unique 5-Sylow qui serait distingué, ce qui est impossible car A_5 est simple), c'est 6.)

Les 3-Sylow sont d'ordre 3, donc cycliques ; chacun est engendré par un 3-cycle et contient 2 3-cycles. Les 3-Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à $\{1\}$. Comme il y a 20 3-cycles dans A_5, il y a 10 3-Sylow. (Par les théorèmes de Sylow : le nombre de 3-Sylow est $\equiv 1$ [mod 3] et divise 20 ; c'est donc 1, 4 ou 10. Comme ci-dessus, ce ne peut être 1. Si c'etait 4, la conjugaison de A_5 sur ces 3-Sylow induirait un morphisme $A_5 \to S_4$ non trivial (puisque cette action par conjugaison est transitive) et donc injectif (puisque le noyau, distingué, est forcément trivial). Or l'ordre de A_5 ne divise pas celui de S_4. Il y a donc 10 3-Sylow.)

Les 2-Sylow sont d'ordre 4, donc commutatifs. Comme il n'y a pas d'élément d'ordre 4 dans A_5, chaque 2-Sylow est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; il est engendré par deux produits de deux transpositions qui commutent et contient 3 éléments d'ordre 2. On voit ensuite que ces trois éléments d'ordre 2 sont les 3 produits de deux transpositions qui commutent qu'on peut former avec quatre éléments de $\{1,\dots,5\}$. On en déduit que les 2-Sylow sont deux à deux d'intersection réduite à $\{1\}$. Il y a 15 éléments d'ordre 2 dans A_5 et il y a 5 2-Sylow.

Tout élément de A_5 est d'ordre 1, 2, 3 ou 5 et est donc contenu dans un p-Sylow. On a bien $6.4+10.2+5.3+1 = 60$.

Correction de l'exercice 5868 ▲

(a) Le nombre de 5-Sylow dans un groupe G d'ordre $60 = 2^2.3.5$ est $\equiv 1$ [mod 5] et divise 12. Comme G est supposé simple, ce ne peut être 1 ; il y a donc 6 5-Sylow. Le morphisme $\alpha : G \to S_6$ correspondant à l'action de G par conjugaison sur les 5-Sylow (une fois une numérotation des 5-Sylow de G choisie) est forcément injectif puisque son noyau, étant un sous-groupe distingué différent de G (d'après les théorèmes de Sylow, G agit transitivement sur les 5-Sylow), est nécessairement trivial. Considérons ensuite le groupe $\alpha^{-1}(A_6)$. C'est un sous-groupe distingué de G (comme image réciproque par un morphisme du sous-groupe distingué A_6 de S_6). Si $\alpha^{-1}(A_6) = \{1\}$ alors, pour tout $g \in G$, comme $\alpha(g^2) = \alpha(g)^2 \in A_6$, on aurait $g^2 = 1$ et donc G abélien, ce qui est absurde. On a donc $\alpha^{-1}(A_6) = G$, c'est-à-dire, $\alpha(G) = H \subset A_6$.

(b) Notons $\varphi : A_6 \to S_6$ le morphisme correspondant à l'action de A_6 par translation à gauche sur $A_6/.H$ (une fois une numérotation des éléments de $A_6/.H$ choisie). En utilisant la simplicité de A_6, on montre comme ci-dessus que φ est injectif et que $\varphi(A_6) \subset A_6$. Il en découle que φ est un isomorphisme entre A_6 et $\varphi(A_6) = A_6$.

(c) Un élément $x \in A_6$ fixe la classe neutre H si et seulement si $x \in H$. On obtient que H est isomorphe, *via* φ, au fixateur d'un entier, disons 6, dans l'action de A_6 sur $\{1,\dots,6\}$, c'est-à-dire, à $A_6 \cap S_5 = A_5$.

Correction de l'exercice 5871 ▲

Le nombre de q-Sylow d'un groupe G d'ordre p^2q est $\equiv 1$ [mod q] et divise p^2. Ce ne peut être ni p ni p^2 car p^2-1 est supposé non divisible par q ; c'est donc 1. De même le nombre de p-Sylow est $\equiv 1$ [mod p] et divise q et ce ne peut être q car $q-1$ est supposé non divisible par p ; c'est donc 1. Ainsi il y a un unique p-Sylow P d'ordre p^2, et donc abélien, et un unique q-Sylow Q d'ordre q, et donc cyclique, tous deux nécessairement distingués. Il en résulte que tout élément $x \in P$ commute avec tout élément $y \in Q$: en effet le commutateur $xyx^{-1}y^{-1} = (xyx^{-1})y^{-1} = x(yx^{-1}y^{-1})$ est dans l'intersection $P \cap Q$ qui est le groupe trivial. Cela montre que le groupe PQ est abélien ; il est isomorphe au produit direct $P \times Q$ et est donc de cardinal $|P|\,|Q| = p^2q = |G|$. D'où finalement $G = PQ$ est abélien.

Correction de l'exercice 5872 ▲

Soit G un groupe d'ordre p^2q qu'on suppose simple. On distingue deux cas :

1er cas : $p > q$. Le nombre de p-Sylow de G est $\equiv 1$ [mod p] et divise q. Comme G est simple, ce ne peut être 1 (car sinon l'unique p-Sylow serait distingué). Il y a donc q p-Sylow d'ordre p^2, lesquels sont conjugués. L'action par conjugaison de G sur ces q p-Sylow définit un morphisme $G \to S_q$ non trivial (car l'action est transitive) et donc injectif puisque le noyau, distingué et $\neq G$, est forcément trivial. On en déduit que p^2q divise $q!$ et donc p divise un entier entre 1 et $q-1$, ce qui contredit l'hypothèse $p > q$.

2ème cas : $p < q$. Le nombre de q-Sylow de G est $\equiv 1$ [mod q] et divise p^2. Comme ci-dessus, G étant simple, ce ne peut être 1. Ce ne peut-être ni p ni p^2. En effet, dans le cas contraire, p serait $\equiv \pm 1$ [mod q] et donc $p \geqslant q-1$. Comme $p < q$, la seule possibilité est $p = q-1$ et donc $p = 2$ et $q = 3$. Dans ce dernier cas, il y a 4 3-Sylow d'ordre 3 qui contiennent 8 éléments d'ordre 3. Ne reste de la place que pour un seul 2-Sylow qui devrait être distingué. Ce dernier cas n'est donc lui non plus pas possible.

Conclusion : il n'existe pas de groupe G simple d'ordre p^2q.

Correction de l'exercice 5873 ▲

(a) Le nombre de 19-Sylow de G est $\equiv 1$ [mod 19] et divise 21 ; ce ne peut être que 1. Le groupe G a donc un unique 19-Sylow P qui est distingué.

(b) Comme P est distingué dans G, $N = PQ$ est un sous-groupe de G. De $P \cap Q = \{1\}$, on déduit que $PQ/P \simeq Q$ et donc que PQ est d'ordre $7.19 = 133$. D'après l'exercice 15, le groupe N est isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, lequel est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$ par le lemme chinois.

(c) Le nombre de 7-Sylow de G est $\equiv 1$ [mod 7] et divise 57. Les seules possibilités sont 1 et 57. Or ce n'est pas 1 non plus car on suppose que Q n'est pas distingué. Le groupe G admet donc 57 7-Sylow, et donc 57 sous-groupes cycliques d'ordre 133 par la question précédente. Ces 57 groupes d'ordre 133 sont bien distincts car deux 7-Sylow distincts engendrent avec P deux groupes cycliques d'ordre 133 distincts puisque le 7-Sylow est l'unique sous-groupe d'ordre 7 du groupe cyclique. Par conséquent leurs ensembles de générateurs sont deux à deux disjoints. On obtient ainsi $57 \times \phi(133) = 57 \times 6 \times 18$ éléments d'ordre 133 dans G (ϕ désigne ici la fonction indicatrice d'Euler), ce qui est manifestement absurde. On peut donc conclure que Q est distingué dans G et que l'unique sous-groupe cyclique $N = PQ$ d'ordre 133 l'est aussi.

(d) Comme N est distingué dans G, NR est un sous-groupe de G. De $N \cap R = \{1\}$, on déduit que $NR/N \simeq R$ et donc que NR est d'ordre $133.3 = 399$. Ainsi $G = NR$ et l'isomorphisme précédent $G/N \simeq R$ montre que l'inclusion $R \to G$ est une section de la suite exacte $1 \to N \to G \to R \to 1$. Le groupe G est donc isomorphe au produit semi-direct du groupe cyclique N d'ordre 133 par le groupe cyclique R d'ordre 3.

Correction de l'exercice 6011 ▲

Cours... Non, les rôles des deux opérations ne sont pas interchangeables, puisque l'une est distributive sur l'autre.

Correction de l'exercice 6012 ▲

(a) une seule solution $x = a^{-1}(c-b)$

(b) pas de solution, et deux solutions. Attention, dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, on ne peut pas inverser 2. Ecrire $2x = 3+10k$ pour obtenir que $2|3$, et $2x = 6+10k$ pour simplifier par 2... dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6013 ▲

(a) Ecrire $(0+a)a = a.a$ d'une part (0 est neutre pour $+$) et $(0+a).a = 0.a+a.a$ (distributivité).

(b) $(-1).a+a = (-1+1).a = 0.a = 0$ (distributivité, puis question précédente)

(c) Si $|A| = 1$, $1 = 0$. Si $1 = 0$, $\forall a \in A, a = 1.a = 0.a = 0$, donc $A = \{0\}$.

Correction de l'exercice 6014 ▲

(a) Si $xy \in A^\times$, soit $z \in A$, $(xy)z = 1$. Alors $x(yz) = 1$ et $(zx)y = 1$ donc x et y sont inversibles.

(b) Soit $x \in A^\times$, et $y \in A, xy = 0$. Alors $x^{-1}xy = y = 0$. Donc x n'est pas diviseur de 0.

Correction de l'exercice 6015 ▲

Soit $a \in A\setminus\{0\}$. Soit $\phi_a : A \to A, x \mapsto ax$. Si $\phi_a(x) = \phi_a(y)$, alors $ax = ay$. Mais $ax = ay$ ssi $a(x-y) = 0$, or $a \neq 0$ et A est intègre, donc $x = y$. Ainsi ϕ_a est injective de A dans A. Comme A est fini, elle est donc aussi surjective : $\exists x \in A, \phi_a(x) = 1$.

Correction de l'exercice 6016 ▲

Ce sont tous des anneaux. Montrer que A est stable par addition, par passage à l'opposé, contient 0, est stable par multiplication et contient 1. Le reste (associativité et distributivité) est automatique puisqu'il s'agit des restrictions des opérations usuelles sur $\mathbb{C}$)

(a) A est l'ensemble des nombres dont le développement décimal s'arrête ("nombre fini de chiffres après la virgule").

Stabilité par addition : Soit $x = 10^{-n}a$ et $y = 10^{-m}b$. Supposons par exemple que $n \geqslant m$. Alors $x+y = 10^{-n}(a+10^{n-m}b)$ et $a+10^{n-m}b \in \mathbb{Z}$ donc $x+y \in A$. Les autres vérifications sont analogues.

Ce n'est pas un corps : 3 n'est pas inversible, puisque si $3\cdot 10^{-n}a = 1$, alors $3a = 10^n$ donc $3|10^n$ ce qui est impossible. Un élément est inversible ssi il est de la forme $10^{-n}2^\alpha 5^\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$.

(b) Stabilité par addition : Soit $x = \frac{a}{b} \in A$ et $y = \frac{c}{d} \in A$, avec $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(c,d) = \mathrm{pgcd}(p,b) = \mathrm{pgcd}(p,d) = 1$. Alors $x+y = \frac{ad+bc}{bd}$.

Ce n'est pas un corps : p n'est pas inversible. Un élément est inversible ssi ce n'est pas un multiple de p.

(c) N'est pas un corps : 2 n'est pas inversible. Les seuls éléments inversibles sont $1,-1,i,-i$. En effet, si $z \in A^\times$, alors $|z| \geqslant 1$ et $|z^{-1}| \geqslant 1$. Donc $|z| = 1$ et $z \in \{\pm 1, \pm i\}$. Réciproquement, ces éléments sont bien tous inversibles.

Correction de l'exercice 6023 ▲

$1 \in I+J$ donc $\exists (x,y) \in I\times J, 1 = x+y$. En multipliant cette égalité par x, on obtient $x^2+xy = x$. On en déduit que $xy \in I$, donc $\forall p \in \mathbb{N}\ ; x^p y \in I^p$, et donc $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, x^p y^q \in I^p$. Par symétrie, on a aussi $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, x^p y^q \in J^q$.

Soit maintenant $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Notons $N = 2\sup(m,n)$. Alors $1 = 1^N = (x+y)^N = \sum_{p+q=N} C_N^p x^p y^q$. Comme : $(p+q = 2N) \Rightarrow (p \geqslant n \text{ ou } q \geqslant m)$, tous les termes de cette somme sont dans I^n ou dans J^m, et donc $1 \in I^n + J^m$

Correction de l'exercice 6024 ▲

(a) $3,5,7,11$ sont deux à deux premiers entre eux, donc la solution est unique modulo $1155 = 3\cdot5\cdot7\cdot11$.

$$\begin{cases} x\equiv 1 \mod 3\\ x\equiv 3 \mod 5\\ x\equiv 4 \mod 7\\ x\equiv 2 \mod 11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 13 \mod 15\\ x\equiv 4 \mod 7\\ x\equiv 2 \mod 11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 88 \mod 105\\ x\equiv 2 \mod 11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ x\equiv 508 \mod 1155 \right.$$

(b) Un diviseur commun de 2001 et 2002 divise leur différence, et donc $\mathrm{pgcd}(2001,2002) = 1$. De même, $\mathrm{pgcd}(2002,2003) = 1$, et comme $2 \not| 2001$, $\mathrm{pgcd}(2001,2003) = 1$.

$2001,2002,2003$ sont donc deux à deux premiers entre eux, et la solution est donc unique modulo $2001\cdot2002\cdot2003$.

$$\begin{cases} x\equiv 997 \mod 2001\\ x\equiv 998 \mod 2002\\ x\equiv 999 \mod 2003\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv -1004 \mod 2001\\ x\equiv -1004 \mod 2002\\ x\equiv -1004 \mod 2003\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\equiv -1004 \mod (2001\cdot2002\cdot2003)$$

Correction de l'exercice 6025 ▲

On a $72 = 8\cdot9$ et $\mathrm{pgcd}(8,9) = 1$, donc $\mathbb{Z}_{72} \simeq \mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_9$. De même, $\mathbb{Z}_{84} \simeq \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{36} \simeq \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9$ et $\mathbb{Z}_{168} \simeq \mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_7$. Donc $\mathbb{Z}_{72}\times\mathbb{Z}_{84} \simeq \mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_{36}\times\mathbb{Z}_{128}$

Correction de l'exercice 6026 ▲

(a) $11,31,61$ sont premiers donc 2 à 2 premiers entre eux. Ainsi $20^{15} \equiv 1[11\cdot31\cdot61] \Leftrightarrow \begin{cases} 20^{15}\equiv 1[11]\\ 20^{15}\equiv 1[31]\\ 20^{15}\equiv 1[61]\end{cases}$

— En utilisant le petit théorème de Fermat, on obtient que, modulo 11 : $20^{15} \equiv 20^5 \equiv -2^5 \equiv 1[11]$.

— $(20^{15})^2 = 20^{30} \equiv 1[31]$. On en déduit que $20^{15} \equiv \pm1[31]$. Comme $31 \not\equiv 1[4]$, d'après le théorème de Wilson, $x^2 = -1$ n'a pas de solution modulo 31, et donc $20^{15} \equiv 1[31]$. $20^2 \equiv -3[31]$ est premier

— $20^{15} \equiv (9^2)^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1[61]$

(b) $1155 = 11\cdot7\cdot5\cdot3$. De plus (petit théorème de Fermat) $2^{6754} \equiv 2^4 \equiv 5[11]$. De même, $2^{6754} \equiv 2^4 \equiv 2[7]$, $2^{6754} \equiv 2^2 \equiv -1[5]$, et $2^{6754} \equiv 2^0 \equiv 1[3]$. Or

$$\begin{cases} a\equiv 5[11]\\ a\equiv 2[7]\\ a\equiv 4[5]\\ a\equiv 1[3]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\equiv 5[11]\\ a\equiv 2[7]\\ a\equiv 4[15]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\equiv 5[11]\\ a\equiv -26[105]\end{cases} \Leftrightarrow a\equiv 709[1155]$$

Donc le reste de la division de 2^{6754} par 1155 est 709.

Correction de l'exercice 6027 ▲

13 est premier et $100 = 12\cdot8+4$ donc $10^{100} \equiv 10^4 \equiv (-3)^4 \equiv 3 \equiv -10[13]$. De même $10^{100} \equiv 10^{-8} \equiv 2^8 \equiv 9 \equiv -10[19]$. En utilisant le lemme chinois, on en déduit que $10^{100} \equiv -10[247]$. Comme

$\operatorname{pgcd}(10,247)=1$, on peut simplifier cette expression par 10 et on a $10^{99} \equiv -1[247]$, et donc $247|10^{99}+1$.

Correction de l'exercice 6028 ▲

$C = A\times B$.

$$\begin{aligned}(a,b)\in(A\times B)^{\times} &\Leftrightarrow \exists (c,d)\in A\times B,\ (a,b)(c,d)=(1,1)\\ &\Leftrightarrow \exists (c,d)\in A\times B,\ ac=1 \text{ et } bd=1\\ &\Leftrightarrow a\in A^{\times} \text{ et } b\in B^{\times}\end{aligned}$$

donc $(A\times B)^{\times}=A^{\times}\times B^{\times}$.
De même, on obtient que l'ensemble $\mathscr{D}_{A\times B}$ des diviseurs de 0 de $A\times B$ est

$$\mathscr{D}_{A\times B}=\mathscr{D}_A\times B\cup A\times\mathscr{D}_B\cup(A\setminus\{0\})\times\{0\}\cup\{0\}\times(B\setminus\{0\}).$$

Enfin, pour les nilpotents $Nil(A\times B)=Nil(A)\times Nil(B)$.

Correction de l'exercice 6029 ▲

(a) En posant $y=x+1$, on a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x^2+x+1)=\{0,1,x,y,x^2,y^2,xy,xy+1\}$. Les tables des opérations sont les suivantes (elles sont symétriques) :

$\oplus$	0	1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
0	0	1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
1		0	y	x	y^2	x^2	$xy+1$	xy
x			0	1	xy	$xy+1$	x^2	y^2
y				0	$xy+1$	xy	y^2	x^2
x^2					0	1	x	y
y^2						0	y	x
xy							0	1
$xy+1$								0

$\otimes$	0	1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
x			x^2	xy	$xy+1$	y^2	y	1
y				y^2	y	0	y^2	xy
x^2					1	y^2	xy	x
y^2						0	0	y^2
xy							y^2	y
$xy+1$								x^2

Pour $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1)$, $(x-1)$ et $(x+1)$ sont deux idéaux étrangers, et le lemme chinois nous donne $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1)\simeq\mathbb{Z}[x]/(x-1)\times\mathbb{Z}[x]/(x+1)$. Or $\mathbb{Z}[x]/(x+1)\simeq\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[x]/(x-1)\simeq\mathbb{Z}$ donc $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1)\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
La factorisation de (x^8-1) sur $\mathbb{Q}$ est $(x^8-1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$. En utilisant le lemme chinois, on obtient que $\mathbb{Q}[x]/(x^8-1)\simeq\mathbb{Q}[x]/(x+1)\times\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)\times\mathbb{Q}[x]/(x^4+1)$ soit :

$$\mathbb{Q}[x]/(x^8-1)\simeq\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}[i]\times\mathbb{Q}[e^{i\pi/4}].$$

Montrons en effet que $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)\simeq\mathbb{Q}[i]$: l'application $\phi:\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)\to\mathbb{Q}[i]$ définie par $\bar{P}\mapsto P(i)$ est un morphisme d'anneau.

— injectivité : Soit $\bar{P} \in \ker \phi$. Alors $P(i) = 0$. Comme P est à coefficient rationnels donc réels, $-i$ est aussi raine de P. Donc $x^2+1|P$.
— surjectivité : Soit $z = a+ib \in \mathbb{Q}[i]$. Alors $z = \phi(ax+b)$.

De même pour $\mathbb{Q}[x]/(x^4+1) \simeq \mathbb{Q}[e^{i\pi/4}]$. Considérons le morphisme $\phi\ : \mathbb{Q}[x]/(x^4+1) \to \mathbb{Q}[e^{i\pi/4}]$ défini par $\phi(\bar{P}) = P(e^{i\pi/4})$. ϕ est bien définie, c'est un morphisme d'anneau.

— injectivité : Soit $\bar{P} \in \ker \phi$. Alors $P(e^{i\pi/4}) = 0$. Par ailleurs X^4+1 est *irréductible* dans $\mathbb{Q}$: sa factorisation sur $\mathbb{R}$ est $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$, et aucun de ces deux polynômes, même à inversible réel près, n'est rationnel. On en déduit que si (x^4+1) ne divise pas P, alors $\mathrm{pgcd}(X^4+1,P) = 1$. Il existerait donc $U,V \in \mathbb{Q}[x]$, $UP+V(X^4+1) = 1$. En évaluant en $x = e^{i\pi/4}$, on obtient une contradiction. Donc $X^4+1|P$. (cf. exexercice 6070).
— surjectivité : Soit $z = a+be^{i\pi/4} \in \mathbb{Q}[e^{i\pi/4}]$. Alors $z = \phi(ax+b)$.

(b) On a $K[x]/(f^n g^m) \simeq K[x]/(f^m) \times K[x]/(g^m)$. On en déduit que les diviseurs de 0 sont les polynômes de la forme $\bar{P}$ où P satisfait l'une des conditions suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} f^n|P \text{ et } g^m\nmid P & (\{0\}\times K[x]/(g^m)\setminus\{0\}) \\ g^m|P \text{ et } f^n\nmid P & (K[x]/(f^n)\setminus\{0\}\times\{0\}) \\ f|P \text{ et } f^n\nmid P & (\mathscr{D}_{K[x]/(f^n)}\times K[x]/(g^m)) \\ g|P \text{ et } g^m\nmid P & (K[x]/(f^n)\times\mathscr{D}_{K[x]/(g^m)}) \end{array}\right.$$

Les nilpotents sont donnés par les conditions

$$\begin{cases} fg|P \\ (f^n g^m \nmid P \text{ si on veut exclure } 0) \end{cases}$$

(c) Les idéaux de $K[x]/(f^n)$ sont les idéaux engendrés par les diviseurs de f^n soit les f^k pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

La démonstration peut se faire en toute généralité exactement de la même manière que dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs de f^n (modulo K^*). Ici, $\mathscr{D} = \{f^k, 0 \leqslant k \leqslant n\}$. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble de idéaux de $K[x]/(f^n)$.

On a une flèche de $\mathscr{D} \to \mathscr{I}$, donnée par $d \mapsto (\bar{d})$.

— surjectivité Soit $I \in \mathscr{I}$. I est principal : notons $I = (\bar{h})$. Soit $d = \mathrm{pgcd}(f,h)$, et h_1 le polynôme déterminé par $h = dh_1$. Alors $\mathrm{pgcd}(f,h_1) = 0$ et h_1 est inversible dans le quotient. On en déduit que $(\bar{h}) = (\bar{d}) = I$ (or $d \in \mathscr{D}$).
— injectivité Soit $d,d' \in \mathscr{D}$ tels que $(\bar{d}) = (\bar{d}')$. On a alors $d = h_1 d' + h_2 f$ donc $d'|d$. De même, $d|d'$. On en déduit que $d \sim d'$.

Revenons à notre exercice : les idéaux de $K[x]/(f^n) \times K[x]/g^m$ sont donc de la forme $(f^\alpha) \times (g^\beta)$. En revenant à $K[x]/(f^n g^m)$, on obtient que l'ensemble des idéaux est

$$\{(f^\alpha g^\beta), 0 \leqslant \alpha,\beta \leqslant n\}$$

(d) Les inversibles de $K[x]/(f^n)$ sont les (classes des) polynômes premiers avec f. Le complémentaire est donc formé des multiples de f, il y en a donc autant que de polynômes de degré $(nd-1)-d$ où d est le degré de f, soit $p^{(n-1)d}$. Il y a donc $p^{(n-1)d}(p-1)$ inversibles dans $K[x]/(f^n)$.

On en déduit qu'il y en a $p^{(n-1)d_f+(m-1)d_g}(p-1)^2$ dans $K[x]/(f^n g^m)$, où d_f et d_g sont les degrés respectifs de f et g.

(e) Plus généralement, si les f_i sont des polynômes irréductibles distincts, dans $K[x]/(f_1^{n_1}\cdots f_k^{n_k})$ il y a $p^{\Sigma(n_i-1)d_i}(p-1)^k$ inversibles, où d_i est le degré de f_i.

Correction de l'exercice 6030 ▲

Pour obtenir les facteurs multiples, on utilise la remarque suivante : g est un facteur multiple de f ssi g est un facteur commun à f et à f' (dérivé formel de f).

Ainsi $\mathrm{pgcd}(f,f')$ est le produit de tous les facteurs multiples de f, avec exposant diminué de 1 par rapport à f. Ainsi $f/\mathrm{pgcd}(f,f')$ est le produit de tous les facteurs irréductibles de f, avec exposant 1 pour tous. Finalement, $\operatorname{pgcd}(\operatorname{pgcd}(f,f'),f/\operatorname{pgcd}(f,f'))$ est le produit de tous les facteurs multiples de f avec exposant 1.

Correction de l'exercice 6032 ▲

Soit $z=n+m\sqrt{d}, z'=n'+m'\sqrt{d}\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{(n+m\sqrt{d})(n'+m'\sqrt{d})}\\ &= \overline{(nn'+mm'd)+(nm'+n'm)\sqrt{d}}\\ &= (nn'+mm'd)-(nm'+n'm)\sqrt{d}\\ &= (n-m\sqrt{d})(n'-m'\sqrt{d})\\ &= \bar{z}\bar{z}'\end{aligned}$$

Donc $\forall z,z'\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}], \overline{zz'}=\bar{z}\bar{z}'$.
On a alors $\forall z,z'\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}],\ N(zz')=zz'\overline{zz'}=z\bar{z}z'\bar{z}'=N(z)N(z')$.

Correction de l'exercice 6033 ▲

(a) — Si $z\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est inversible :
Alors $zz^{-1}=1$, donc $N(z)N(z^{-1})=1$. Comme $N(z)\in\mathbb{Z}$ et $N(z^{-1})\in\mathbb{Z}$, on a donc $N(z)\in\{1,-1\}$.
— Si $N(z=\pm1)$:
Alors $z\bar{z}=\pm1$, donc $z(\pm\bar{z})=1$. Comme $\pm\bar{z}\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, z est inversible.

(b) Soient $z_1,z_2\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tels que $z=z_1z_2$. Alors $N(z_1)N(z_2)=\pm p$. Comme $\pm p$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$, on en déduit que $N(z_1)=\pm1$ ou $N(z_2)=\pm1$. D'après la question précédente, on a $z_1\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ ou $z_2\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$: on en déduit que z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
(Attention : p est premier donc irréductible dans $\mathbb{Z}$, mais peut être réductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$! cf. 2 dans $\mathbb{Z}[i]$.)

(c) On a $N(3)=N(2+\sqrt{-5})=9$. On peut montrer en fait que tout élément z de norme 9 est irréductible : si $z=z_1z_2$, alors $N(z_1)N(z_2)=9$. Donc $\{N(z_1),N(z_2)\}=\{1,9\}$ ou $\{3,3\}$ (dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, la norme est toujours positive). Or pour tout $(n,m)\in\mathbb{Z}^2, n^2+5m^2\neq3$. En effet, si $|m|\geqslant1, n^2+5m^2\geqslant5$ et pour $m=0$, l'équation revient à $n^2=3$, qui n'a pas de solution entière. Ainsi, $N(z_1)=1$ ou $N(z_2)=1$, donc z_1 ou z_2 est inversible. z n'a donc pas de factorisation non triviale : z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. En particulier, 3 et $2+\sqrt{-5}$ le sont.

(d) Tout élément de A de norme 9 est irréductible. Il suffit donc de trouver tous les éléments de norme 9. Soit $z=n+m\sqrt{-5}\in A$. Si $|m|\geqslant2$ ou $|n|\geqslant4$, alors $N(z)>9$. On cherche donc les éléments de norme 9 parmi les éléments $z=n+m\sqrt{-5}$ avec $|n|\leqslant3$ et $|m|\leqslant1$. Pour $m=0$, les seules solutions sont $n=\pm3$, pour $|m|=1$, les solutions sont obtenues pour $|n|=2$. Ainsi :

$$\forall z\in A:\quad N(z)=9\Leftrightarrow z\in\{\pm3,\pm(2\pm\sqrt{5})\}$$

(e) On a $N(9)=81$. Donc si $9=z_1z_2$ est une factorisation de 9 dans A, $N(z_1)N(z_2)$ est une factorisation de 81 (dans $\mathbb{Z}$), et plus précisément on a $\{N(z_1),N(z_2)\}\in\Big\{\{1,81\},\{3,27\},\{9,9\}\Big\}$.
Si $N(z_1)=1$ ou $N(z_2)=1$, la factorisation est triviale.
A n'a pas d'élément de norme 3 donc la paire $\{3,27\}$ n'est pas réalisable.
Si enfin $N(z_1)=N(z_2)=9$, alors $z_1,z_2\in\{\pm3,\pm(2\pm\sqrt{5})\}$. Comme $9=3\cdot3=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$, tous ces éléments sont diviseurs de 9.
Les diviseurs de 9 sont donc $\{\pm1,\pm3,\pm(2\pm\sqrt{-5}),\pm9\}$.

Comme $N(3(2+\sqrt{-5}))=81$, le même raisonnement montre que si $d\in A$ divise $3(2+\sqrt{-5})$, alors $d\in\{\pm1,\pm3,\pm(2\pm\sqrt{-5}),\pm3(2\pm\sqrt{-5})\}$.

Si $(2-\sqrt{-5})a = 3(2+\sqrt{-5})$, alors $N(a)=9$, donc $a=\pm 3$ ou $\pm(2\pm\sqrt{-5})$. Comme A est intègre, si $a=\pm 3$, on obtient $2-\sqrt{-5}=\pm(2+\sqrt{-5})$, ce qui est faux. Si $a=\pm(2+\sqrt{-5})$, on obtient $2-\sqrt{-5}=\pm 3$, ce qui est faux. Si enfin $a=\pm(2-\sqrt{-5})$, on obtient $\pm(-1-4\sqrt{-5})=6+3\sqrt{-5})$, ce qui est encore faux. Donc $2-\sqrt{-5}$ ne divise pas $3(2+\sqrt{-5})$ dans A. Tous les autres éléments de norme 9 divisent $3(2+\sqrt{-5})$, donc, finalement :

Les diviseurs de $3(2+\sqrt{-5})$ sont $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2+\sqrt{-5}), \pm 3(2+\sqrt{-5})\}$.

(Attention : Le seul fait que 3 et $2+\sqrt{-5}$ soient irréductibles ne permet pas de conclure ! Si l'anneau n'est pas factoriel, un produit d'irréductibles p_1p_2 peut avoir d'autres diviseurs (à association près) que p_1 et p_2... cf $3\cdot 3=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$!)

(f) On connaît la liste des diviseurs de 3 et de $2+\sqrt{-5}$. Les seuls qui soient communs sont 1 et -1. On en déduit que 1 est un pgcd de 3 et $2+\sqrt{-5}$.

9 et $3(2+\sqrt{-5})$ sont des multiples communs de 3 et $2+\sqrt{-5}$, donc si ces deux éléments admettent un ppcm m, on a $m|9$ et $m|3(2+\sqrt{-5})$. On connaît la liste des diviseurs de 9 et $3(2+\sqrt{-5})$: à association près, on en déduit que $m\in\{1,3,2+\sqrt{-5}\}$. Comme $3|m$, la seule possibilité est $m=3$, et comme $(2+\sqrt{-5})|m$, la seule possibilité est $m=2+\sqrt{-5}$. Il y a donc contradiction :

3 et $2+\sqrt{-5}$ n'ont pas de ppcm dans A.

(g) Supposons I principal : soit $a\in A$ un générateur : $I=(a)$. Alors a est un diviseur commun à 3 et $2+\sqrt{-5}$, donc $a=\pm 1$. (En particulier, $I=A$). Soient $u=u_1+u_2\sqrt{-5}$ et $v=v_1+v_2\sqrt{-5}$ deux éléments de A. On a :

$$\begin{aligned} 3u+(2+\sqrt{-5})v=1 &\Leftrightarrow (3u_1+2v_1-5v_2)+(3u_2+v_1+2v_2)\sqrt{-5}=1\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1+2v_1-5v_2 &=1\\ 3u_2+v_1+2v_2 &=0\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases} -v_1+v_2 &\equiv 1[3]\\ v_1-v_2 &\equiv 0[3]\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\forall u,v\in A,\ 3u+(2+\sqrt{-5})v\neq 1$. Donc $1\notin I$, ce qui est une contradiction : I n'est pas principal.

L'anneau A n'est pas principal puisqu'il a au moins un idéal non principal. Il n'est pas non plus factoriel, puisque $9=3\,3=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$ admet deux factorisation en irréductibles non équivalentes à association près.

(h) — Les diviseurs communs de 9 et $3(2+\sqrt{-5})$ sont $\{\pm 1,\pm 3,\pm(2+\sqrt{-5})\}$. Si 9 et $3(2+\sqrt{-5})$ admettent un pgcd d, alors d est dans cette liste, et divisible par tous les membre de cette liste. Mais 3 n'est pas divisible par $2+\sqrt{-5}$ et $2+\sqrt{-5}$ ne divise pas 3 : 9 et $2+\sqrt{-5}$ n'ont pas de pgcd.

— Supposons que 9 et $3(2+\sqrt{-5})$ admettent un ppcm M. Alors il existe des éléments $a,b\in A$ tels que $M=9a=3(2+\sqrt{-5})b$. Notons $m=3a=(2+\sqrt{-5})b$ (A est intègre).
m est un multiple commun de 3 et $2+\sqrt{-5}$.
Soit k un multiple commun de 3 et $2+\sqrt{-5}$. Alors $3k$ est un multiple commun de 9 et $3(2+\sqrt{-5})$, donc $M|3k$: $\exists c\in A, 3k=Mc=3mc$. On en déduit que $k=mc$ (A est intègre), donc $m|k$. On en déduit que m est un ppcm de 3 et $2+\sqrt{-5}$, ce qui est impossible.

Correction de **l'exercice 6034 ▲**

(a) $\bar{n}$ est inversible ssi $\mathrm{pgcd}(n,36)=1$ (Bezout !), i.e. $\bar{n}\in\{\pm 1,\pm 5,\pm 7,\pm 11,\pm 13,\pm 17\}$. Les autres éléments sont tous des diviseurs de 0 puisque $\bar{n}$ divise 0 ssi $\mathrm{pgcd}(n,36)\neq 1$. Enfin, $\bar{n}$ est nilpotent ssi $2|n$ et $3|n$, donc ssi $6|n$, soit $\bar{n}\in\{0,\pm 6,\pm 12,18\}$.

(b) Montrons que l'ensemble $\mathscr{I}$ des idéaux de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathscr{D}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ des diviseurs (positifs) de 36.

Considérons l'application $\phi:\mathscr{D}\to\mathscr{I}$ définie par $\phi(d)=(\bar{d})$.

Injectivité : Si $\phi(d)=\phi(d')$, alors $\exists a,b\in\mathbb{Z}, d=d'a+36b$. Comme $d|36$, on en déduit que $d|d'$. De même, on a $d'|d$, et donc $d=d'$.

Surjectivité :Soit $I \in \mathscr{I}$. $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ est principal, donc $\exists a \in \mathbb{Z}, I = (\bar{a})$. Soit $d = \text{pgcd}(a, 36)$. Notons $a = da'$: $\text{pgcd}(a', 36) = 1$. On en déduit que $\bar{a}'$ est inversible dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. Alors $\bar{d} \sim \bar{a}$ dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. On en déduit que $I = (\bar{d}) = \phi(d)$.

Finalement, il y a donc 9 idéaux dans $\mathbb{Z}_{36}$:
— $(\bar{1}) = \mathbb{Z}_{36}$,
— $(\bar{2}) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \pm 16, 18\}$,
— $(\bar{3}) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, 18\}$,
— $(\bar{4}) = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16\}$,
— $(\bar{6}) = \{0, \pm 6, \pm 12\}$
— $(\bar{9}) = \{0, \pm 9, 18\}$
— $(\overline{12}) = \{0, \pm 12\}$
— $(\overline{18}) = \{0, 18\}$
— $(\overline{36}) = \{0\}$,

(c) Si $a, b \in A^\times$, alors $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1$ donc $ab \in A^\times$.
Si $ab \in A^\times$, soit $c = (ab)^{-1}$. Alors $a(bc) = 1$ donc $a \in A^\times$ et $b(ac) = 1$ donc $b \in A^\times$.

(d) On a $(6x+1)(-6x+1) = 1$ dans $\mathbb{Z}_{36}[x]$, donc $18x+1$ y est inversible.

(e) Soit f un inversible de $\mathbb{Z}_{36}[x]$. Choisissons $P \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $\bar{P} = f$ et $Q \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $\bar{Q} = f^{-1}$. La projection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ se factorise par $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_2$. Ces projections sont bien définies, et sont des morphismes d'anneaux. Notons $P_{[2]}$ la réduction de P modulo 2 : on a alors $P_{[2]}Q_{[2]} = (PQ)_{[2]} = 1$, et comme $\mathbb{Z}_2$ est un corps, $P_{[2]} = 1$, $Q_{[2]} = 1$. On en déduit que 2 divise tous les coefficients de P, sauf celui de degré 0. De même, en considérant la réduction modulo 3, on obtient que 3 divise tous les coefficients de P, sauf celui de degré 0. Finalement, 6 divise tous les coefficients de P sauf celui de degré 0, qui est inversible modulo 36 : à association (dans $\mathbb{Z}_{36}$) près, f est donc de la forme :

$$f = \sum_{i=1}^{d} 6a_i x^i + 1, \qquad (a_i) \in \mathbb{Z}_{36}.$$

Réciproquement, si f est de cette forme, c'est à dire $f = 1 + 6xf_1$, avec $f_1 \in \mathbb{Z}_{36}[x]$, alors :

$$(1 + 6xf_1)(1 - 6xf_1) = 1$$

donc f est inversible.

Correction de l'exercice 6035 ▲

(a) Le critère d'Eisenstein avec 2 pour module donne directement le résultat.

(b) La réduction modulo 2 de Q est $Q_{[2]} = x^6 + x^2 + 1$, qui n'a pas de racine, et n'est pas divisible par $x^2 + x + 1$, le seul irréductible de degré 2 de $\mathbb{Z}_2[x]$. Ainsi, $Q_{[2]}$ est soit irréductible, auquel cas Q l'est aussi sur $\mathbb{Z}$, soit le produit de deux irréductibles de degré 3.
Si $Q_{[2]}$ n'est pas irréductible, on considère la réduction modulo 3 de Q : $Q_{[3]} = x^6 + 1 = (x^2+1)^3$. $x^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}_3$, car il est de degré 2 et n'a pas de racine. Soit $Q = RS$ une factorisation non triviale de Q sur $\mathbb{Z}$. On peut supposer R et S unitaires. Alors, en considérant la réduction modulo 2, on obtient que $R_{[2]}$ et $S_{[2]}$ sont deux irréductibles de degré 3 de $\mathbb{Z}_2[x]$. En particulier $\deg(R) = \deg(R_{[2]}) = 3$ (car R est unitaire) et $\deg(S) = \deg(S_{[2]}) = 3$. Cependant, la réduction modulo 3 de Q n'admet pas de factorisation suivant deux polynômes de degré 3. C'est une contradiction : on en déduit que Q n'a pas de factorisation non triviale.

Correction de l'exercice 6036 ▲

Soit p un nombre premier impair. Notons $p = 2m+1$. On a

$$(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1} [p]$$

en effet, (modulo p) :

$$\begin{aligned}
(p-1)! &= \prod_{k=1}^{2m} k = m!\prod_{k=1}^{m}(m+k) \\
&= m!\prod_{k=1}^{m}(m+k-p) = m!\prod_{k=1}^{m}(-k) \\
&= (-1)^m (m!)^2
\end{aligned}$$

Or, dans $\mathbb{Z}_p[x]$, $1^{-1}=1$ et $(p-1)^{-1}=p-1$, donc $\forall k\in\{2,\dots,p-2\}$, $k^{-1}\in\{2,\dots,p-2\}$. Ainsi, $\prod_{k=2}^{p-1} k\equiv 1[p]$, et donc $(p-1)!\equiv -1[p]$. D'où le résultat.

— Si $p\equiv 1[4]$, $(-1)^{m+1}=-1$, et donc $m!$ est une solution de $x^2\equiv -1[p]$.

— Si cette équation a une solution, alors $x^{2m}\equiv 1[p]$, et comme $x^{p-1}\equiv 1[p]$, $1\equiv(-1)^m[p]$. On en déduit que m est pair, donc $p\equiv 1[4]$.

Correction de l'exercice 6037 ▲

(a)

$$\begin{aligned}
f &= g(x^3+x+1)+(x^2+x) \\
g &= (x^2+x)x+1
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{pgcd}(f,g)=1$ et

$$1 = g-(x^2+x)x = g-(f-g(x^3+x+1))x = (x^4+x^2+x+1)g - xf$$

(b) $f=(x^4+x+1)(x^2+x+1)$ donc f n'est pas irréductible.
g est de degré 3 et n'a pas de racine, donc g est irréductible.

(c) Les éléments de A sont en bijection avec les polynômes de $\mathbb{Z}_2[x]$ de degré $<\deg(g)=3$. Il y a 8 polynômes de degré au plus 2 sur $\mathbb{Z}_2$, donc A a 8 éléments.

(d) On utilise la représentation linéaire $uf+vg=1$ de $\operatorname{pgcd}(f,g)$ obtenue plus haut. $uf=1+vg$, donc $\bar u\bar f=\bar 1+\bar 0=\bar 1$. Donc $(\bar f)^{-1}=\bar u=\bar x$.

(e) Soit $f_1=x^2+x+1$ et $f_2=x^4+x+1$. Alors $f_1f_2=f$ donc $\bar f_1\bar f_2=\bar 0$. Pourtant, f ne divise ni f_1 ni f_2, donc $\bar f_1\neq\bar 0$ et $\bar f_2\neq\bar 0$: B n'est pas intègre, donc B n'est pas un corps.

Correction de l'exercice 6062 ▲

(a) Le polynôme X n'est jamais inversible dans $A[X]$. Si A n'est pas intègre, comme $A\subset A[X]$, $A[X]$ ne l'est pas non plus et ne peut pas être un corps. Si A est intègre et si $X=PQ$, alors $\deg(P)+\deg(Q)=1$ donc P ou Q est une constante. Supposons par exemple que ce soit P. $P|X$ donc $P|1$ donc P est inversible, et $Q\sim X$.

(b) Soit $P=X+a$ un polynôme unitaire linéaire de $A[X]$. Supposons que $P=P_1P_2$. Comme A estintègre, on a $\deg(P_1)+\deg(P_2)=1$, donc P_1 ou P_2 est une constante. Supposons que ce soit P_1. Alors $P_1|1$ et $P_1|a$. En particulier, P_1 est inversible, et donc $P_2\sim P$.

(c) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 (théorème de Gauss).
Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelles. En effet, soit $P\in\mathbb{R}[X]$. P se factorise sur $\mathbb{C}[X]$ sous la forme $P=a\prod(X-\lambda_i)^{\nu_i}$ (avec $i\neq j\Rightarrow\lambda_i\neq\lambda_j$). Comme cette factorisation est unique, et que $P=\overline{P}$, on en déduit que si λ_i est racine de P avec multiplicité ν_i, alors il en va de même pour $\overline{\lambda_i}$. Ainsi, on obtient une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$: $P=a\prod_{\lambda_i\in\mathbb{R}}(X-\lambda_i)^{\nu_i}\prod(X^2-2\operatorname{Re}(\lambda_i)X+|\lambda_i|^2)^{\nu_i}$.
P est donc irréductible ssi P est de la forme $P=a(X-\lambda)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ ou $P=a(X^2-2\operatorname{Re}(\lambda_i)X+|\lambda_i|^2)$ avec $\lambda\notin\mathbb{R}$.

(d) Supposons que $K[X]$ ait un nombre fini de polynômes unitaires irréductibles $P_1,\dots,P_k$. Soit alors $P = \prod_{i=1}^k P_i + 1$.

Comme K est un corps, les irréductibles sont de degré au moins 1, et donc P n'est pas l'un des P_i. Comme P est unitaire, P n'est pas irréductible. En particulier, l'un au moins des P_i divise P. Supposons par exemple que ce soit P_1 : $\exists Q \in K[X], P = P_1 Q$. Alors $P_1(Q - \prod_{i=2}^k P_i) = 1$. Donc P_1 est inversible, ce qui est faux.

Correction de l'exercice 6063 ▲

(a) Supposons (X,n) principal dans $\mathbb{Z}[X]$: $(X,n) = (P_0)$. Alors $P_0|n$ donc $P_0 \in \mathbb{Z}$, et $P_0|X$ donc $P_0 = \pm 1$. Ainsi $(P_0) = \mathbb{Z}[X]$. Or (X,n) est l'ensemble des polynômes dont le terme constant est un multiple de n : en effet, si $P \in (X,n)$, $\exists A,B \in \mathbb{Z}[X], P = AX + Bn$ donc le terme constant de P est un multiple de n. Réciproquement, si le terme constant de $P = \sum p_i X^i$ est un multiple de n, $p_0 = p_0' n$, alors $P = X(\sum_{i\geqslant 1} p_i X^i) + p_0' n \in (X,n)$. Ainsi, $1 \notin (X,n)$. Donc (X,n) n'est pas principal.

(b) Si $A[X]$ est principal, soit $a \in A \setminus \{0\}$, et $I = (X,a)$. $A[X]$ étant principal, $\exists P_0 \in A[X], I = (P_0)$. Alors $P_0|a$ donc $P_0 \in A$, et $P_0|X$ donc $P_0|1$ et P_0 est inversible. On en déduit que $I = A[X]$. En particulier $1 \in I$: $\exists U,V \in A[X], XU + aV = 1$. Le terme constant de $XU + aV$ est multiple de a et vaut 1. a est donc inversible.

Si A est un corps, on dispose de la division euclidienne. Soit I un idéal de $A[X]$. Soit P_0 un élément de $I \setminus \{0\}$ de degré minimal. Soit $P \in I$. $\exists!(Q,R) \in A[X]^2, P = P_0 Q + R$ et $\deg(R) < \deg(P)$. Comme $R = P - P_0 Q$, on a $R \in I$, et comme $\deg(R) < \deg(P_0)$, on a $R = 0$. Ainsi $P \in (P_0)$. On a donc $I \subset (P_0) \subset I$.

Correction de l'exercice 6064 ▲

Notons $f(x^n) = P(x-1)$. Alors $f(1) = 0 \cdot P(1) = 0$ et donc $(x-1)|f$. Notons $f = Q(x-1)$. On a alors $f(x^n) = Q(x^n)(x^n - 1)$. $(x^n - 1)$ divise bien f.

Correction de l'exercice 6065 ▲

Notons (Q,R) le quotient et le reste de cette division euclidienne : $(x-2)^m + (x-1)^n - 1 = Q(x-2)(x-1) + R$ avec $\deg(R) \leqslant 1$. Notons $R = ax + b$. En évaluant en 1, on obtient $(-1)^m - 1 = a + b$, et en évaluant en 2, $2a + b = 0$. On en déduit $b = -2a$ et $a = 1 - (-1)^m$, soit $R = (1 - (-1)^m)(x-2)$.

Correction de l'exercice 6066 ▲

(a) Soit P un polynôme de degré $d = 2$ ou 3 de $K[X]$.

Si P a une racine $a \in K$, alors $(X-a)|P$, et P n'est pas irréductible.

Réciproquement, si $P = AB$ avec $A,B \in K[X]$ et $A,B \notin K[X]^\times = K \setminus \{0\}$, alors $\deg(A) \geqslant 1$, $\deg(B) \geqslant 1$, et $\deg(A) + \deg(B) = d = 2$ ou 3, donc l'un au moins des deux polynômes A et B est de degré 1. On peut supposer que c'est A. Notons $A = aX + b$. Alors $(X + a^{-1}b)|P$, et $-a^{-1}b$ est racine de P.

Finalement P a une racine ssi P n'est pas irréductible.

(b) Irréductibles de degré 2 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2. $a \neq 0$ donc $a = 1$.

$$\begin{aligned}
P \text{ irréductible} &\Leftrightarrow P \text{ n'a pas de racine}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) & \neq 0 \\ P(1) & \neq 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) & = 1 \\ P(1) & = 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} c & = 1 \\ 1+b+1 & = 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow P = X^2 + X + 1
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a un seul irréductible de degré 2, c'est $I_2 = X^2 + X + 1$.
Irréductibles de degré 3 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de degré 2. $a \neq 0$ donc $a = 1$.

$$\begin{aligned}
P \text{ irréductible} &\Leftrightarrow P \text{ n'a pas de racine}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} d & = 1 \\ 1+b+c+1 & = 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} d & = 1 \\ (b,c) & = (1,0) \text{ ou } (b,c) = (0,1) \end{cases}\\
&\Leftrightarrow P = X^3 + X + 1 \text{ ou } P = X^3 + X^2 + 1
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a deux irréductibles de degré 3 dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$: $I_3 = X^3 + X + 1$ et $I_3' = X^3 + X^2 + 1$.

(c) Soit $P = 5X^3 + 8X^2 + 3X + 15 \in \mathbb{Z}[X]$. Soient A et B deux polynômes tels que $P = AB$. L'application $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n \mapsto \bar{n}$ induit une application $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X], P = \sum a_i X^i \mapsto \bar{P} = \sum \bar{a}_i X^i$. Cette application est compatible avec les opérations : en particulier $\overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}$ (pourquoi ?). Ainsi on a : $\bar{P} = \bar{A}\bar{B}$. Or $\bar{P} = X^3 + X + 1$ est irréductible, donc (quitte à échanger les rôles de A et B on peut supposer que) $\bar{A} = 1$ et $\bar{B} = X^3 + X + 1$. On en déduit que B est au moins de degré 3, d'où $\deg(A) = 0$. $A \in \mathbb{Z}$ et $A|P$, donc $A|5$, $A|8$, $A|3$, et $A|15$. On en déduit que $A = \pm 1$. Finalement, $A = \pm 1$ et $B \sim P$. P est donc irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Soit $P = X^5 + 2X^3 + 3X^2 - 6x - 5 \in \mathbb{Z}[X]$. Soient A et B deux polynômes tels que $P = AB$. On a comme précédemment : $\bar{P} = \bar{A}\bar{B}$ où $\bar{P} = X^5 + X^2 + 1$. $\bar{P}$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc si $\bar{P}$ est réductible, il doit être le produit d'un irréductible de degré 2 et d'un irréductible de degré 3. Or $\bar{P} \neq I_2 I_3$ et $\bar{P} \neq I_2 I_3'$ (faire le calcul !), donc $\bar{P}$ est irréductible. Le même raisonnement montre alors que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

(d) Un polynôme de degré 4 est réductible ssi il a une racine ou est le produit de deux irréductibles de degré 2. Soit $P = \sum_{i=0}^{4} a_i X^i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$, avec $a_4 = 1$.

$$\begin{aligned}
P \text{ irréductible} &\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) \neq 0 \\ P(1) \neq 0 \\ P \neq I_2^2 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ 1 + a_3 + a_2 + a_1 + 1 = 1 \\ P \neq I_2^2 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow P \in \{X^4 + X^3 + 1, X^4 + X + 1, X^4 + X^3 + X^2 + X + 1\}
\end{aligned}$$

Un polynôme de degré 5 est irréductible ssi il n'a pas de racine et l'est pas le produit d'un irréductible de degré 2 et d'un irréductible de degré 3. Tous calculs fait, on obtient la liste suivante : $\{X^5 + X^2 +$

$1, X^5+X^3+1, X^5+X^4+X^3+X^2+1, X^5+X^4+X^3+X+1, X^5+X^4+X^2+X+1, X^5+X^3+X^2+X+1, \}$.

Correction de l'exercice 6067 ▲

(a) On raisonne exactement comme pour l'exercice 6066. On peut réduire un peu les discussions en remarquant que puisqu'on est sur un corps, on peut se contenter de chercher les irréductibles *unitaires* : on obtient les autres en multipliant les irréductibles unitaires par les inversibles, soit ± 1.
Les irréductibles de degré 2 sont caractérisés par $P(0) \neq 0$, $P(1) \neq 0$ et $P(-1) \neq 0$. On obtient finalement la liste suivante : $\{X^2+1, X^2-X-1, -X^2-1, -X^2+X+1\}$.

Sans commentaire, on obtient la liste suivante pour les irréductibles de degré 3 de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$: $\{\pm(X^3+X^2-X+1), \pm(X^3-X^2+X+1), \pm(X^3-X^2+1), \pm(X^3-X+1), \pm(X^3+X^2+X-1), \pm(X^3-X^2-X-1) \pm(X^3+X^2-1), \pm(X^3-X-1), \}$.

(b) $X^2+X+1 = (X-1)^2$
$X^3+X+2 = (X+1)(X^2-X+2)$
$X^4+X^3+X+1 = (X+1)(X^3+1) = (X+1)^4$

Correction de l'exercice 6068 ▲

On raisonne comme pour l'exercice 6066. Soit $P = X^5-6X^3+2X^2-4X+5$, A, B deux polynômes tels que $P = AB$. En considérant la réduction modulo 2, on a $\bar{P} = X^5+1$ donc la décomposition en facteurs irréductibles est $\bar{P} = (X+1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$. Comme P est unitaire, A et B le sont aussi, et la réduction modulo 2 préserve donc le degré de A et B. On en déduit que si $\bar{A} = X+1$, alors A est de degré 1.
La réduction modulo 3 de P devrait donc avoir une racine. Mais $P \mod 3 = X^5-X^2-X-1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On en déduit que dans la réduction modulo 2, la factorisation $\bar{P} = $ '$\bar{A}\bar{B}$ est triviale ($\bar{A} = 1$ et $\bar{B} = \bar{P}$ ou le contraire), puis que la factorisation $P = AB$ elle même est triviale ($A = \pm 1$ et $B = \mp P$ ou le contraire). Ainsi, P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Pour $P = 7X^4+8X^3+11X^2-24X-455$, on procède de la même façon. Si $P = AB$, comme 7 est premier, l'un des polynômes A ou B a pour coefficient dominant ± 7 et l'autre ∓ 1. On en déduit que les réductions modulo 2 ou 3 préservent le degré de A et de B. Les décompositions en facteurs irréductibles sont les suivantes : $P \mod 2 = (X^2+X+1)^2$ et $P \mod 3 = (X-1)(X^3-X-1)$. Si la factorisation $P = AB$ est non triviale, alors les réductions modulo 2 de A et B sont de degré 2, et donc $\deg(A) = \deg(B) = 2$. Mais la décomposition modulo 3 impose que ces degrés soient 1 et 3. La factorisation $P = AB$ est donc nécessairement triviale, et P est donc irréductible.

Correction de l'exercice 6069 ▲

Commençons par montrer que ces polynômes sont irréductibles sur $\mathbb{Z}$.

-Le cas de $f = \prod_{i=1}^n (X-a_i) - 1$ Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $f = PQ$. On peut supposer sans perte de généralité que P et Q ont des coefficients dominants positifs (i.e. sont unitaires).
On a : $\forall i, f(a_i) = P(a_i)Q(a_i) = -1$ donc

$$P(a_i) = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad Q(a_i) = \mp 1$$

Soit $I = \{i, P(a_i) = -1\}$ et $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$. On notera $|I|$ et $|J|$ le nombre d'éléments de I et J.
Supposons $I \neq \emptyset$ et $J \neq \emptyset$: Alors $\prod_{i \in I}(X-a_i) | (P+1)$ et $\prod_{i \in J}(X-a_i) | (Q+1)$. Ainsi $\deg(P+1) \geqslant |I|$ et $\deg(Q+1) \geqslant |J| = n - |I|$, et comme $\deg(P) + \deg(Q) = n$, on en déduit que $\deg(P) = |I|$ et $\deg(Q) = |J|$, puis que (puisque P et Q sont unitaires) :

$$P = \prod_{i \in I}(X-a_i) - 1 \qquad \text{et} \qquad Q = \prod_{i \in J}(X-a_i) - 1.$$

Ainsi $f=\prod_{k\in I\cup J}(X-a_k)-1=(\prod_{i\in I}(X-a_i)-1)(\prod_{j\in J}(X-a_j)-1)=f-\big(\prod_{i\in I}(X-a_i)+\prod_{j\in J}(X-a_j)-2\big)$, donc $\prod_{i\in I}(X-a_i)+\prod_{j\in J}(X-a_j)-2=0_{\mathbb{Z}[X]}$, ce qui est faux.
Ainsi $I=\emptyset$ ou $J=\emptyset$. On peut supposer sans perte de généralité que $I=\emptyset$. Alors $\forall i\in\{1,\dots,n\},Q(a_i)=-1$. Donc les a_i sont tous racine de $Q+1$. Comme $\deg(Q+1)\leqslant n$ et $Q+1\neq 0$, on en déduit que $Q=f$, et $P=1$. f est donc bien irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

-Le cas de $g=\prod_{i=1}^n(X-a_i)^2+1$. Supposons que $g=PQ$, avec $P,Q\in\mathbb{Z}[X]$.On a $g(a_i)=1=P(a_i)Q(a_i)$, donc $P(a_i)=Q(a_i)=\pm 1$.
Comme g n'a pas de racine réelle, il en va de même de P et Q, qui sont donc de signe constant (théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues sur $\mathbb{R}$!). On peut donc supposer sans perte de généralité que P et Q sont positifs.
Alors $P(a_i)=Q(a_i)=1$. Ainsi, tous les a_i sont racines de $P-1$ et de $Q-1$. On a donc $\prod_{i=1}^n(X-a_i)|P-1$ et $\prod_{i=1}^n(X-a_i)|Q-1$.
En particulier, si $P-1\neq 0$ et $Q-1\neq 0$, $\deg(P)\geqslant n$ et $\deg(Q)=2n-\deg(P)\geqslant n$. Ainsi $\deg(P)=\deg(Q)=n$. Comme en plus P et Q sont unitaires, on en déduit que

$$P-1=\prod_{i=1}^n(X-a_i)\qquad \text{et } Q-1=\prod_{i=1}^n(X-a_i).$$

On devrait donc avoir $(\prod_{i=1}^n(X-a_i)+1)^2=\prod_{i=1}^n(X-a_i)^2+1$, ce qui est faux ($\prod_{i=1}^n(X-a_i)\neq 0_{\mathbb{Z}[X]}$) !
Ainsi $P-1=0$ ou $Q-1=0$, et on en déduit bien que g est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$ On a le lemme suivant :
Si $P\in\mathbb{Z}[X]$ est unitaire et irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, alors il l'est aussi dans $\mathbb{Q}[X]$.
L'ingrédient de base de la démonstration est la notion de *contenu* d'un polynôme $P\in\mathbb{Z}[X]$: c'est le pgcd de ses coefficients, souvent noté $c(P)$. Il satisfait la relation suivante :

$$c(PQ)=c(P)c(Q).$$

Supposons que $P=QR$, avec $Q,R\in\mathbb{Q}[X]$, Q et R unitaires. En réduisant tous leurs coefficients de au même dénominateur, on peut mettre Q et R sous la forme :

$$Q=\frac{1}{a}Q_1\qquad\text{et}\qquad R=\frac{1}{b}R_1$$

avec $a,b\in\mathbb{Z}$, $Q_1,R_1\in\mathbb{Z}[X]$ et $c(Q_1)=1$, $c(R_1)=1$.
Alors $abP=Q_1R_1$, donc $c(abP)=c(Q_1)c(R_1)=1$. Comme $ab|c(abP)$, on a $ab=\pm1$, et en fait $P,Q\in\mathbb{Z}[X]$.

Correction de l'exercice 6070 ▲

f est irréductible, donc si f, ne divise pas g, alors f et g sont premiers entre eux. Ainsi,$\exists u,v\in\mathbb{Q}[X],uf+vg=1$. En évaluant en α, on obtient $u(\alpha)\cdot 0+v(\alpha)\cdot 0=1$ ce qui est impossible !

Correction de l'exercice 6071 ▲

Supposons que la fraction soit réductible. Alors, il existe $p,q,d\in\mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases}11n+2m &=pd\\ 18n+5m &=qd\end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases}19n &=5pd-2qd\\ 19m &=-18pd+1qd\end{cases}$$

En particulier, $d|19n$ et $d|19m$. Si $d\neq 19$, on a $\mathrm{pgcd}(n,m)\neq 1$. Si $d=19$, alors

$$\begin{cases} n &= 5p-2q \\ m &= -18p+1q \end{cases} \tag{41}$$

Réciproquement, si $\mathrm{pgcd}(n,m)\neq 1$ ou si n,m sont de la forme donnée par (41), alors la fraction est réductible.

Correction de l'exercice 6072 ▲

Soit $d=\mathrm{pgcd}(m,n)$. Notons $n=dn'$ et $m=dm'$. Alors $X^n-1=(X^d)^{n'}-1$. Or $(Y-1)|Y^{n'}-1$ donc $(X^d-1)|(X^n-1)$. De même, $(X^d-1)|(X^m-1)$, et donc $(X^d-1)|\,\mathrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1)$.
Par ailleurs, soit $D=\mathrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1)$. Les racines de D dans $\mathbb{C}$ sont des racines à la fois n-iéme et m-ième de 1, qui sont touts simples : elles sont donc de la forme $\omega=e^{i2\pi\alpha}$ où $\alpha=\frac{k}{n}=\frac{k'}{m}$. Ainsi $km'=k'n'$. On a $\mathrm{pgcd}(m',n')=1$, donc par le théorème de Gauss, on en déduit que k' est un multiple de m', soit $\frac{k'}{m}=\frac{k''}{d}$, et ω est donc une racine d-ième de 1. On en déduit que $D|X^d-1$, et finalement :

$$\mathrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1)=X^{\mathrm{pgcd}(m,n)}-1.$$

Correction de l'exercice 6073 ▲

Utiliser l'algorithme d'Euclide. (on travaille dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned} x^5+x^4+1 &= (x^4+x^2+1)(x+1)+x^3+x^2+x \\ x^4+x^2+1 &= (x^3+x^2+x)(x+1)+x^2+x+1 \\ x^3+x^2+x &= (x^2+x+1)x+0 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{pgcd}(x^5+x^4+1,x^4+x^2+1)=x^2+x+1$, et

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= (x^4+x^2+1)+(x^3+x^2+x)(x+1) \\ &= (x^4+x^2+1)+\big((x^5+x^4+1)+(x^4+x^2+1)(x+1)\big)(x+1) \\ &= (x^4+x^2+1)(1+(x+1)^2)+(x^5+x^4+1)(x+1) \\ &= (x^4+x^2+1)(x^2)+(x^5+x^4+1)(x+1) \end{aligned}$$

De même, $\mathrm{pgcd}(x^5+x^3+x+1,x^4+1)=x^3+1$ et $x^3+1=(x^5+x^3+x+1)+(x^4+1)x$.

Correction de l'exercice 6074 ▲

Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: $\mathrm{pgcd}(x^4+1,x^3+x+1)=x^2+x-1$.
Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $\mathrm{pgcd}(x^4+1,x^3+x+1)=1$.

Correction de l'exercice 6075 ▲

Sur $\mathbb{Z}[X]$, $\mathrm{pgcd}(x^4+x^3-3x^2-4x-1,x^3+x^2-x-1)=1$.

Correction de l'exercice 6076 ▲

(a) P est primitif, 2 divise tous les coefficients de P sauf le dominant, et 4 ne divise pas le terme constant : d'après le critère d'Eisenstein, on en déduit que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$ (puis dans $\mathbb{Q}[x]$ car il est unitaire...).

(b) On peut appliquer le même critère, avec 3 cette fois.

(c) f est primitif, et sa réduction modulo 2 est irréductible. Donc f est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$.

(d) $f(x+1) = \sum_{k=1}^{p} C_p^k x^{k-1}$. Or $p | \frac{p!}{k!(p-k)!}$ (car p apparaît au numérateur, tandis que tous les facteurs du dénominateur sont $< p$; comme p est premier, ils sont donc premiers avec p). De plus $C_p^1 = p$, donc p^2 ne divise pas le terme constant de $f(x+1)$. D'après le critère d'Eisenstein, $f(x+1)$ est irréductible, et donc f aussi.

Correction de l'exercice 6077 ▲

Soit $P = x^2 - x + 1$. Si P a une factorisation non triviale, P est divisible par un polynôme de degré 1, et comme P est unitaire, ce diviseur peut être choisi unitaire : on en déduit que P a une racine. On calcule $P(a+bi\sqrt{3}) = (a^2 - 3b^2 - a + 1) + (2ab - b)i\sqrt{3}$. Comme $1/2 \notin A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$, $2a - 1 \neq 0$, donc si $P(a+bi\sqrt{3}) = 0$, alors $b = 0$, et $P(a) = 0$. Mais $x^2 - x + 1$ est primitif et se réduction modulo 2 est irréductible, donc il est irréductible sur $\mathbb{Z}[x]$. En particulier il n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$. On en déduit que P n'a pas de racine sur A, et est donc irréductible.

Soit $K = \text{frac}(A) = \mathbb{Q}[i\sqrt{3}]$. On a $P(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$ donc P a une racine dans K, donc P est réductible sur K.

Correction de l'exercice 6078 ▲

Si P a une racine α dans $\mathbb{Z}$, alors $P(\alpha) = 0$, et en considérant la réduction modulo n, $\bar{P}(\bar{\alpha}) = 0$, donc $\bar{P}$ a une racine dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout n.

(a) Si $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs, $\bar{P}(\bar{0}) = \bar{1}$ et $\bar{P}(\bar{1}) = \bar{1}$, donc $\bar{P}$ n'a pas de racine sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc P n'a pas de racine sur $\mathbb{Z}$.

(b) Si n ne divise aucun des $P(0), \dots, P(n-1)$, alors $\bar{P}(\bar{0}) \neq 0, \dots, \bar{P}(\overline{n-1}) \neq 0$, donc $\bar{P}$ n'a pas de racine sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc P n'a pas de racine sur $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 6079 ▲

(a) $(X - \frac{a}{b})|P$ donc $\exists Q \in \mathbb{Q}[x]$, $P = (x - \frac{a}{b})Q = (bx-a)\frac{Q}{b}$. En réduisant tous les coefficients de Q au même dénominateur, on peut mettre Q sous la forme : $Q = \frac{1}{m}Q_1$, avec $Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ primitif. Alors $bdP = (bx-a)Q_1$. En considérant les contenus de ces polynômes, on a $c(bx-a) = \text{pgcd}(a,b) = 1$, $c(Q_1) = 1$ donc $c(bdP) = bd\,c(P) = 1$. Ainsi $bd = \pm 1$, et $(bx-a)|P$.

(b) On considère par exemple les cas $k = 0, \dots, 3$. (Pour $k = 2$, on constate que $P(2) = 0$: on peut diviser P par $(X-2)$ et déterminer les trois racines complexes de P...). On obtient que

$$\begin{array}{ccc} (*) & a|14 & (k=0), \\ (**) & (a-b)|4 & (k=1), \\ (***) & (a-3b)|2^3 5 & (k=3). \end{array}$$

Au passage On peut remarquer que si $\alpha \leqslant 0$, $P(\alpha) < 0$, donc on peut supposer $a > 0$ et $b > 0$.
— Si $a = 1$: $(**) \Rightarrow b \in \{2,3,5\}$. Aucune de ces possibilités n'est compatible avec $(***)$.
— Si $a = 2$: $(**) \Rightarrow b \in \{1,3,4,6\}$. Comme $\text{pgcd}(a,b) = 1$, 4et 6 sont exclus. 3 n'est pas compatible avec $(***)$. Pour 2, on vérifie que $P(2) = 0$.
— Si $a = 7$: $(**) \Rightarrow b \in \{3,5,9,11\}$. Mais aucune de ces solution ne convient.
— Si $a = 14$: $(**) \Rightarrow b \in \{10,12,16,18\}$ mais $\text{pgcd}(a,b) = 1$ exclu toutes ces possibilités.
Finalement, 2 est la seule racine rationnelle de P.

Correction de l'exercice 6080 ▲

(a) Notons $P=\sum_{i=0}^d a_iX^i$. Dans le calcul de $P(n+km)$, en développant tous les termes $(n+km)^i$ à l'aide du binôme, on obtient que $P(n+km)=\sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant d} a_iC_i^j n^j(km)^{i-j}=P(n)+mN$ où $N=\sum_{0\leqslant j<i\leqslant d} a_iC_i^j n^j(km)^{i-j}-1\in\mathbb{Z}$. Donc $m|P(n+km)$.

(b) Supposons qu'un tel polynôme existe : soit $m=P(0)$. $\forall k\in\mathbb{Z}, m|P(km)$. Comme $P(km)$ est premier, on en déduit que $P(km)=\pm m$. Ceci est en contradiction avec $\lim_{k\to+\infty}P(km)=\pm\infty$.

Correction de l'exercice 6081 ▲

(a) Soit $f=\sum_{i=0}^n a_ix^i\in\mathbb{Q}[x]$. Soit $a_i=\frac{p_i}{q_i}$ le représentant irréductible de a_i. Soit $m=\mathrm{ppcm}(q_0,\dots,q_n)$. Notons $m=q_im_i$. Alors $f=\frac{1}{m}\sum a_im_ix^i$. En mettant en facteur $d=\mathrm{pgcd}(a_0m_0,\dots,a_nm_n)$, on obtient $f=\frac{d}{m}f_0$, où $f_0\in\mathbb{Z}[x]$ est primitif.

(b) Notons $\alpha=\frac{p}{q}$, avec $\mathrm{pgcd}(p,q)=1$ et $q>0$. Soit $g_1=\alpha g$. On a $qg=pg_1$, donc $qc(g)=pc(g_1)$. On en déduit que $q|p$, et donc que $q=1$:$\alpha\in\mathbb{Z}$.

(c) Soit $g\in\mathbb{Q}[x]$ tel que $f=dg$. Soit $g=\frac{p}{q}g_0$ la décomposition de g donnée par la question 1. Alors $qf=pdg_0$ donc $qc(f)=pc(d)c(g_0)=p$. Donc $q|p$ et finalement $q=1$. On en déduit que $g=pg_1\in\mathbb{Z}[x]$.

(d) $d=\mathrm{pgcd}_{\mathbb{Q}}(f,g)=\frac{p}{q}d_0$. Alors d_0 est primitif et divise f et g sur $\mathbb{Q}$. Donc d_0 divise f et g sur $\mathbb{Z}$.
Soit h un diviseur commun de f et g dans $\mathbb{Z}[x]$. On a $c(h)|c(f)=1$ donc h est primitif. Par ailleurs, h est un diviseur commun à f et g dans $\mathbb{Q}[x]$, donc $h|d_0$ dans $\mathbb{Q}[x]$. On en déduit que $h|d_0$ dans $\mathbb{Z}[x]$. Ainsi, d_0 est bien un pgcd de f et g dans $\mathbb{Z}[x]$.

(e) Soit $d=\mathrm{pgcd}(c(f),c(g))$, $h=\mathrm{pgcd}(f,g)=c(h)h_0$, $h'=\mathrm{pgcd}(f_0,g_0)$.
On a $d|c(f)$, $d|c(g)$, $h'|f_0$ et $h'|g_0$ donc $dh'|f$ et $h'|g$, et donc $dh'|h$.
$c(h)|c(f)$ et $c(h)|c(g)$ donc $c(h)|d$. $h|f$, donc il existe $f_1\in\mathbb{Z}[x]$ tel que $f=h_0c(h)f_1$. On a alors $c(h)c(f_1)=c(f)$, et après simplification, on en déduit que $f_0=h_0f_1'$, avec $f_1'\in\mathbb{Z}[x]$: $h_0|f_0$. De même pour g : $h_0|g_0$. On en déduit que $h_0|h'$, et donc que $h|dh'$.

Correction de l'exercice 6082 ▲

Soit K un corps, A un anneau non trivial, et $K\xrightarrow{\phi}A$ un morphisme d'anneaux. Soit $x\in K\setminus\{0\}$. On a $1=\phi(1)=\phi(xx^{-1})=\phi(x)\phi(x^{-1})\neq 0$ (car A n'est pas l'anneau trivial). Donc $\phi(x)\neq 0$. Ainsi $\ker\phi=\{0\}$, donc ϕ est injectif.

Correction de l'exercice 6083 ▲

Soit $x\in R\setminus\{0\}$. Alors $(x)\supset(x^2)\supset(x^3)\supset$ est une suite décroissante d'idéaux. Elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang : $\exists k\in\mathbb{N},(x^k)=(x^{k+1})$. En particulier, $\exists a\in R, k^{k+1}=ax^k$. Comme A est intègre, on en déduit que $ax=1$, donc $x\in R^\times$.
$R^\times=R\setminus\{0\}$ donc R est un corps.

Correction de l'exercice 6084 ▲

Soit A un anneau fini, et I un idéal premier. Alors A/I est intègre, et fini (!), donc A/I est un corps (voir exercice 6015). Donc I est maximal.

Correction de l'exercice 6085 ▲

On rappelle que le produit de deux idéaux I et J est l'idéal engendré par les produits de la forme ab avec $a\in I, b\in J$:

$$I\cdot J=\{\sum_{i=0}^N a_ib_i, N\in\mathbb{N}, a_i\in I, b_i\in J\}$$

— Si I est un idéal premier : Soient J et K deux idéaux tels que $J \cdot K \subset I$. Alors si $J \not\subset I$, $\exists a \in x \setminus I$. Soit $y \in K$. On a $xy \in J \cdot K$ donc $xy \in I$. Comme I est premier, $x \in I$ ou $y \in I$. Mais $x \notin I$ donc $y \in I$. Ainsi $\forall y \in K, y \in I$: on a montré que : $J \not\subset I \Rightarrow K \subset I$. On a donc bien $J \subset I$ ou $K \subset I$.

— Si $\forall J, K$ idéaux, $(J \cdot K \subset I \Rightarrow J \subset I$ ou $K \subset I)$: Soit $a, b \in A$ avec $ab \in I$. Alors $(a) \cdot (b) = (ab)$ donc $(a) \subset I$ ou $(b) \subset I$ et donc $a \in I$ ou $b \in I$. I est donc premier.

On a $M^n = M \cdot M^{n-1}$. Donc si I est premier et contient M^n alors I contient M ou M^{n-1}, et par une récurrence finie, on obtient que I contient M. Ainsi : $M \subset I \subsetneq A$. Comme M est maximal on en déduit que $M = I$.

Correction de l'exercice 6086 ▲

— $A[X]/(X)$: X est unitaire donc on dispose de la division euclidienne par X. On vérifie (comme dans le cours) que chaque classe a un et un seul représentant de degré 0. On en déduit que $A[X]/(X)$ est en bijection avec A. Il reste alors à remarquer que cette bijection est un morphisme d'anneaux.
Une autre façon de dire la même chose est de remarquer que l'application $\phi : A[X] \to A, P \mapsto P(0)$ est un morphisme d'anneaux. $\ker \phi = (X)$ et $\operatorname{Im} \phi = A$. Comme $A/\ker \phi \sim \operatorname{Im} \phi$, on a bien $A[X]/(X) \sim A$.

— On peut considérer $\phi : A[X,Y] \to A[Y]$, $P \mapsto P(0,Y)$. C'est un morphisme d'anneaux. En séparant les termes ne dépendant que de Y des autres, on peut mettre tout polynôme P de $A[X,Y]$ sous la forme $P = P_1(Y) + XP_2(X,Y)$ où $P_1 \in A[Y]$ et $P_2 \in A[X,Y]$. Alors $\phi(P) = 0$ ssi $P_1 = 0$, ssi $P = XP_2$, c'est à dire $P \in (X)$. Ainsi $\ker \phi = (X)$. Par ailleurs, tout polynôme P de $A[Y]$ peut être vu comme un polynôme $\tilde{P}$ de $A[X,Y]$. Alors $P = \phi(\tilde{P})$, donc $\operatorname{Im} \phi = A[Y]$. Finalement : $A[X,Y]/(X) \sim A[Y]$.

— $A[X,Y]/(X,Y)$: Soit $\phi : A[X,Y] \to A$, $P \mapsto P(0,0)$. ϕ est un morphisme d'anneaux, et avec les notations précédentes, pour $P = P_1(Y) + XP_2(X,Y)$, avec $\phi(P) = 0$, on a $P_1(0) = 0$, donc $Y | P_1(Y)$. Ainsi, P est la somme de deux polynômes, l'un multiple de X, l'autre multiple de Y donc $P \in (X,Y)$. Réciproquement, si $P \in (X,Y)$, alors $P(0,0) = 0$. Donc $\ker \phi = (X,Y)$. $\forall a \in A \phi(a) = a$ donc ϕ est surjective. Finalement $A[X,Y]/(X,Y) \sim A$.

— $A[X_1, \dots, X_n]/(X_1, \dots, X_n)$: Soit ϕ : $A[X_1, \dots, X_n] \to A$, $P \mapsto P(0)$. ϕ est un morphisme d'anneaux. En regroupant tous les termes dépendant de X_n, puis tous les termes restant dépendant de X_{n-1}, et ainsi de suite jusqu'aux termes dépendant seulement de X_1, et enfin le terme constant, tout polynôme $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ peut se mettre sous la forme $P = X_nP_n + X_{n-1}P_{n-1} + \dots + X_1P_1 + p_0$, avec $P_i \in A[X_1, \dots, X_i]$ (et $p_0 \in A$). On en déduit que $\ker \phi = (X_1, \dots, X_n)$. Par ailleurs $\forall a \in A, \phi(a) = a$, donc $A[X_1, \dots, X_n]/(X_1, \dots, X_n) \sim A$.

Comme un idéal est premier (resp. maximal) ssi le quotient est intègre (resp. un corps), on en déduit que

— dans $A[X]$, (X) est premier ssi A est intègre, maximal ssi A est un corps,
— dans $A[X,Y]$, (X) est premier ssi A est intègre, et n'est jamais maximal,
— dans $A[X_1, \dots, X_n]$, $(X_1, \dots, X_n)$ est premier ssi A est intègre, maximal ssi A est un corps.

Correction de l'exercice 6087 ▲

Soit $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Soit $a = mp + a'$ la division euclidienne de a par m, et $b = mq + b'$ celle de b par m. Alors $\alpha = m(p + q\sqrt{d}) + a' + b'\sqrt{d}$. On en déduit que chaque classe du quotient $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ a un représentant dans

$$\mathscr{C} = \left\{ a + b\sqrt{d},\ (a,b) \in \{0, \dots, m-1\}^2 \right\}$$

Par ailleurs si deux éléments $a + b\sqrt{d}$ et $a' + b'\sqrt{d}$ de cet ensemble sont dans la même classe, alors $\exists c, d \in \mathbb{Z}$, $a + b\sqrt{d} = (a' + b'\sqrt{d}) + m(c + d\sqrt{d})$. On en déduit que $a = a' + mc$ et $b = b' + md$, et donc $a = a'$, $b = b'$.

Ainsi chaque classe de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ a un représentant unique dans $\mathscr{C}$. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ et $\mathscr{C}$ sont donc en bijection : en particulier, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ a m^2 éléments.

Remarque : on a

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \sim \mathbb{Z}[X]/(X^2 - d).$$

En effet l'application $\phi : \mathbb{Z}[X]/(X^2-d) \to \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $\bar{P} \mapsto P(\sqrt{d})$ est bien définie (si $\bar{(}P) = \bar{Q}$, alors $P(\sqrt{d}) = Q(\sqrt{d})$), et c'est un morphisme d'anneaux. De plus, si $\phi(P) = 0$, notons $P = Q(X^2-d) + (aX+b)$ la division euclidienne de P par X^2-d. En évaluant en $\sqrt{d}$, on a $a\sqrt{d}+b = 0$ donc $R = 0$. On en déduit que $(X^2-d)|P$, i.e. $\bar{P} = 0$. On en déduit que $\ker\phi = \{0\}$, donc ϕ est injective. Par ailleurs $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \phi(a+bX) = a+b\sqrt{d}$ donc ϕ est surjective.

Si d est pair, comme $\sqrt{d}\cdot\sqrt{d} = |d| \in (2)$ alors que $\sqrt{d} \notin (2)$, (2) n'est pas premier.
Si d est impair : $(1+\sqrt{d})(1+\sqrt{d}) = (1+d)+2\sqrt{d} \in (2)$, mais $(1+\sqrt{d}) \notin (2)$ donc (2) n'est pas premier.
Remarque : $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(2) \sim \mathbb{Z}_2[X]/(X^2+\bar{d})$. $(X^2+\bar{d})$ est X^2 ou X^2+1. Aucun de ces deux polynômes n'est irréductible. Donc le quotient ne saurait être intègre.

Correction de l'exercice 6088 ▲

— Si $x \in A$ est premier : soit $a,b \in A$ tels que $ab = x$. Alors $ab \in (x)$ donc $a \in (x)$ ou $b \in (x)$. On en déduit que $a \sim x$ ou $b \sim x$. Donc x est irréductible.
— A est supposé factoriel. Soit I un idéal premier. Soit $x \in I$ et $x = p_1 \dots p_k$ "la" factorisation de x en produit d'irréductibles. Alors $(p_1 \cdots p_{n-1})p_n \in I$ donc $(p_1 \cdots p_{n-1}) \in I$ ou $p_n \in I$. si p_n in I, I contient un irréductible. Sinon, $(p_1 \cdots p_{n-2})p_{n-1} \in I$. Par une récurrence finie, l'un au moins des $p_i \in I$, donc I contient un irréductible.
— Dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $9 \in (3)$. Pourtant $9 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$ et $(2\pm\sqrt{-5}) \notin (3)$. Donc (3) n'est pas premier.
— 2 est irréductible : $2 = z_1z_2$ avec $z_i \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, alors $|z_1|^2|z_2|^2 = 4$, donc $\{|z_1|^2, |z_2|^2\} = \{1,4\}$ ou $\{2,2\}$. Dans le premier cas, on a affaire à une factorisation triviale. Le second est impossible, puisque l'équation $a^2+5b^2 = 2$ n'a pas de solution entière (a,b).
Par ailleurs, $(1+\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5}) = 6 \in (2)$, mais $(1\pm\sqrt{-5}) \notin (2)$ donc 2 n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Correction de l'exercice 6089 ▲

(a) Soit $\mathscr{J}$ un idéal de A/I. Soit π la projection canonique $A \to A/I$, et $J = \pi^{-1}(\mathscr{J})$. J est un idéal de A qui est principal donc $\exists a \in A, J = (a)$. Montrons que $\mathscr{J} = (\pi(a))$.
On a $\pi(a) \in \mathscr{J}$ donc $(\pi(a)) \subset \mathscr{J}$. Soit $\alpha \in \mathscr{J}$, et b un représentant de α, i.e. $b \in A$ et $\pi(b) = \alpha$. Alors $b \in J = (a)$, donc $\exists k \in A, b = ka$. Alors $\pi(b) = \pi(ka) = \pi(k)\pi(a)$, donc $\pi(b) \in (\pi(a))$. Donc $\mathscr{J} \subset (\pi(a))$.
Finalement, $\mathscr{J} = (\pi(a))$. On en déduit que A/I est principal.

(b) — $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Soit I un idéal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. I est principal, donc $\exists a \in \mathbb{Z}, I = (\bar{a})$. Or $(\bar{a}) = \{\alpha\bar{a}, \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} = \{\bar{p}\bar{a}, p \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{pa}, p \in \mathbb{Z}\}$. Donc $\pi^{-1}(I) = \{pa+qn, (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est l'idéal engendré sur $\mathbb{Z}$ par a et n donc l'idéal engendré par $d = (\text{pgcd}(n,a))$. On en déduit que $I = (\bar{d})$. En particulier, I est engendré par un diviseur de n.
Soit maintenant d_1 et d_2 deux diviseurs (positifs) de n tels que $(\bar{d_1}) = (\bar{d_2})$. On a $\pi^{-1}((d_1)) = d_1\mathbb{Z} = d_2\mathbb{Z}$ donc $d_1 = d_2$.
Ainsi, les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont engendrés par les diviseurs de n, et deux diviseurs distincts engendrent deux idéaux distincts : il y a donc autant d'idéaux dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que de diviseurs de n.
— $\mathbb{Q}[X]/(f)$: On raisonne de la même manière : la remarque clef étant si $I = (\bar{g})$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]/(f)$, alors $\pi^{-1}(I) = (f,g) = (\text{pgcd}(f,g))$.

(c) Les idéaux maximaux sont ceux pour lesquels le quotient est un corps, (donc aussi ceux pour lesquels le quotient est intègre puisque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini). On a le diagramme suivant ($I = (\bar{d})$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[rr, bend left, "\pi_2\circ\pi_1"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_2"] & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/I \\
\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

En effet, π_1 et π_2 sont des morphismes d'anneaux, et $\ker(\pi_2 \circ \pi_1) = d\mathbb{Z}$. Donc $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/I$ est un corps ssi d est premier.
De même, $(\mathbb{Q}[X]/(f))/I$ est un corps ssi $I = (\bar{g})$ où g est un facteur premier de f.

Correction de l'exercice 6090 ▲

(a) Soit $\alpha, \beta \in \bar{J}$ et $\lambda, \mu \in A/I$. Alors $\exists a, b \in J$, $l, m \in A$, $\alpha = \pi(a), \beta = \pi(b), \lambda = \pi(l), \mu = \pi(m)$. On a donc $\lambda\alpha + \mu\beta = \pi(la + mb)$. Or $la + mb \in J$ (car J est un idéal), donc $\lambda\alpha + \mu\beta \in \bar{J}$. Donc $\bar{J}$ est un idéal de A/I.

(b) Comme dans l'exercice 6089, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[rr, bend left, "\pi_2\circ\pi_1"] \arrow[d, "\pi"] & A/I \arrow[r, "\pi_2"] & (A/I)/\bar{J} \\ A/(I+J) \arrow[urr, "\sim"'] & & \end{tikzcd}$$

En effet, si $x \in \ker(\pi_2 \circ \pi_1)$, alors $\pi_1(x) \in \ker \pi_2 = \bar{J}$, donc $\exists y \in A, \pi_1(x) = \pi_1(y)$. Alors $x - y \in \ker \pi_1 = I$, donc $\exists z \in I, x = y + z$: on a donc $x \in I + J$. Réciproquement, si $x \in I + J$, alors $\exists (x_1, x_2) \in I \times J, x = x_1 + x_2$. Alors $\pi_1(x) = \pi_1(x_2) \in \bar{J}$, donc $\pi_2 \circ \pi_1(x) = 0$.
Donc $\ker(\pi_2 \circ \pi_1) = I + J$. Donc $A/(I+J) \sim (A/I)/\bar{J}$.

Correction de l'exercice 6091 ▲

(a) Soit $J \subset B$ un idéal premier de B. Soient $a, b \in A$ tels que $ab \in f^{-1}(J)$. Alors $f(a)f(b) = f(ab) \in J$ donc $f(a) \in J$ ou $f(b) \in J$. Ainsi, $a \in f^{-1}(J)$ ou $b \in f^{-1}(J)$. On en déduit que $f^{-1}(J)$ est premier.
Cette proposition n'est pas vraie pour les idéaux maximaux. Par exemple, $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}[X]$, $f(k) = k$, et $J = (X)$. Alors $f^{-1}(J) = \{0\}$ n'est pas maximal.

(b) Prenons $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(k) = k$. $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ n'est pas un idéal de $\mathbb{Q}$ ($1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ et pourtant $1 \times \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$)
Supposons f surjectif. Soit $x, y \in f(I)$, $a, b \in B$. Il existe $x_0, y_0 \in I$ tels que $x = f(x_0)$ et $y = f(y_0)$. De plus, comme f est surjectif, $\exists a_0, b_0 \in A$ tels que $a = f(a_0)$ et $b = f(b_0)$. Alors $ax + by = f(a_0)f(x_0) + f(b_0)f(y_0) = f(a_0x_0 + b_0y_0)$ et comme I est un idéal, $(a_0x_0 + b_0y_0) \in I$, donc $(ax + by) \in f(I)$.
$f(I)$ est donc bien un idéal de B.

(c) Soit I un idéal maximal de A et $J = f(I)$. Supposons $J \neq B$. Soit K un idéal de B tel que $J \subset K$. Alors $I \subset f^{-1}(K)$, donc $f^{-1}(K) = I$ ou $f^{-1}(K) = A$. Dans le premier cas, on $K = f(f^{-1}(K)) = J$, dans le second cas, on a $K = f(f^{-1}(K)) = f(A) = B$. L'idéal J est donc maximal.

(d) $(X+2)(X+3) = X^2 + 5X$ dans $\mathbb{Z}_6[X]$, donc $(X + \bar{2})(X + \bar{3}) \in (X)$, mais $(X + \bar{2}) \notin (X)$ et $(X + \bar{3}) \notin (X)$, donc $r_6((X))$ n'est pas premier dans $\mathbb{Z}_{36}[X]$.
$(X+1)^2 = (X^2+1)$ dans $\mathbb{Z}_2[X]$, or $(X+1) \notin (X^2+1)$, donc $r_2((X^2+1))$ n'est pas premier dans $\mathbb{Z}_2[X]$.

Correction de l'exercice 6092 ▲

(a) Soit $J = B \cap I$. Soit $x, y \in J$, $a, b \in B$, alors $ax + by \in B$ puisque B est un sous-anneau de A. $ax + by \in I$ puisque I est un idéal. On en déduit que J est un idéal.
$B + I$ est stable par addition (car B et I le sont). Soit $\alpha = a + x \in B + I$ et $\beta = b + y \in B + I$. Alors $\alpha\beta = (ab) + (ay + bx + xy) \in B + I$, donc $B + I$ est stable par multiplication. $1 \in B + I$, donc $B + I$ est un sous anneau de A. $I \subset B + I$, et I est absorbant pour la multiplication dans A, donc aussi dans B : Iest un idéal de $B + I$.

(b) On a le diagramme (de morphismes d'anneaux) suivant :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\phi"] \arrow[d, "\pi_0"] & B+I \arrow[r, "\pi"] & (B+I)/I \\
B/\ker\phi \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

Or, pour $x \in B$, on a : $x \in \ker\phi \Leftrightarrow x = i(x) \in \ker\pi = I$. Donc $\ker\phi = B \cap I$, et par suite :

$$B/(B\cap I) \sim (B+I)/I.$$

Correction de l'exercice 6093 ▲

(a) Soit $P = x^3 - x + 2$. Sa réduction $\bar{P} = x^3 - x - 1$ modulo 3 est de degré 3 et n'a pas de racine, donc $\bar{P}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}_3[x]$. Comme P est primitif, on en déduit que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$, puis dans $\mathbb{Q}[x]$. Comme $\mathbb{Q}[x]$ est principal, on en déduit que (P) est maximal, et donc que $\mathbb{Q}[x]/(P)$ est un corps.

(b) Dans $\mathbb{Q}[x]/(P)$, on a $y^3 - y + 2 = 0$, donc $y(y^2-1) = -2$ et finalement $y(\frac{1}{2}(1-y^2)) = 1$. Ainsi $y^{-1} = \frac{1}{2}(1-y^2)$.

(c) $1+y+y^2 = \pi(1+x+x^2)$. On a $\mathrm{pgcd}(P, 1+x+x^2) = 1$, et plus précisément, en utilisant l'algorithme d' Euclide : $13 = (x+4)P - (x^2+3x-5)(x^2+x+1)$ donc $(y^2+y+1)^{-1} = \frac{-1}{13}(y^2+3y-5)$.

Correction de l'exercice 6094 ▲

Notons $f = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$. On a $\mathrm{pgcd}(a_0, \ldots, a_d) \sim 1$ et $\pi \nmid a_d$. Notons $\bar{f} \in A/(\pi)[X]$ la réduction de f modulo π. Soit $f = gh$ une factorisation de f dans $A[x]$. Alors $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$, et donc (quitte à échanger g et h) $\bar{g} \sim 1$ et $\bar{h} \sim \bar{f}$. Comme $\pi \nmid a_d$, on a $\deg(\bar{f}) = d$, et donc $\deg(\bar{h}) = d$ puis $\deg(h) \geqslant d$, et finalement $\deg(h) = d$. Par conséquent $\deg(g) = 0$: $g \in A$. Comme $g|f$, on a $g|c(f) \sim 1$ donc $g \sim 1$. Ainsi, toute factorisation de f dans $A[x]$ est triviale : $f$est irréductible.

Correction de l'exercice 6095 ▲

(a) Ce polynôme est unitaire donc primitif. 11 est nombre premier qui divise tous les coefficients sauf le dominant. $11^2 = 121$ ne divise pas le coefficient de degré 0, donc, d'après le critère d'Eisenstein, c'est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

(b) $f(X,Y) = (X^2+1)Y^3 + (X-1)^2Y^2 + (X-1)$. Regardons f comme un polynôme de $A[Y]$ avec $A = \mathbb{C}[X]$. Alors, f est primitif sur A, et $(X-1)$ est un irréductible de A qui divise tous les coefficients de f sauf le dominant, et dont le carré ne divise pas le terme constant. D'après le critère d'Eisenstein, on en déduit que f est irréductible dans $A[Y] = \mathbb{C}[X,Y]$.
Dans $\mathbb{Z}_2[X,Y]$, on a $(X^2+1) = (X+1)^2$ et $f = (X+1)((X+1)(Y^3+Y^2)+1)$, donc f n'est pas irréductible..

(c) $f(X,Y) = Y^7 + Y^6 + 7Y^4 + XY^3 + 3X^2Y^2 - 5Y + X^2 + X + 1$. Considérons f comme un polynôme de $A[X]$ où $A = \mathbb{Q}[Y]$. Alors f est primitif sur A. Soit $\pi = Y \in A$. π est irréductible, π ne divise pas le coefficient dominant de f, et la réduction $\bar{f}$ modulo π est $\bar{f} = X^2 + X + 1 \in A/(\pi)[X] = \mathbb{Q}[X,Y]/(Y) \simeq \mathbb{Q}[X]$. $\bar{f}$ est donc irréductible dans $A/(\pi)$, donc d'après l'exercice précédent, f est irréductible dans $\mathbb{Q}[X,Y]$.

Correction de l'exercice 6096 ▲

Soit $f = x^2 + y^2 + 1 \in A[x,y]$ ($A = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$). Soit $B = A[y]$, et regardons f comme un polynôme de $B[x]$. Le coefficient dominant de f (qui est 1) est inversible dans B, donc on peut effectuer la division euclidienne de tout polynôme par f : $\forall g \in B[y], \exists (q,r) \in B[x]^2, g = qf + r$ et $\deg_x r \leqslant 1$. Notons $r = a(y)x + b(y), a, b \in A[y]$. De plus, pour des raisons de degré, le quotient et le reste de cette division sont uniques. On peut donc identifier $A[x,y]/(x^2+y^2+1)$ à $\{a(y)x + b(y),\ a(y), b(y) \in A[y]\}$. Supposons que $\bar{y}$ soit inversible dans cet quotient. Il existe $a, b \in A[y]$ tels que $y(a(y)x + b(y)) = \bar{1}$. On a donc $ya(y) = 0$ et $yb(y) = 1$, ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 6098 ▲

Rappelons que $(a) \cdot (b) = \{\sum_{i=1}^n a_i b_i, n \in \mathbb{N}, a_i \in (a), b_i \in (b)\} = (ab)$. De plus $(ab) \subset (a) \cap (b)$ donc

$$\begin{aligned}(ab) = (a) \cap (b) &\Leftrightarrow (a) \cap (b) \subset (ab)\\ &\Leftrightarrow \forall m \in A,\ (a|m \text{ et } b|m \Rightarrow ab|m)\\ &\Leftrightarrow \text{ppcm}(a,b) \sim ab\\ &\Leftrightarrow \text{ppcm}(a,b) \sim \text{pgcd}(a,b)\text{ppcm}(a,b)\\ &\Leftrightarrow \text{pgcd}(a,b) \sim 1\end{aligned}$$

Si A est principal, alors $\exists d \in A,\ (a,b) = (d)$. Alors $a \in (d)$ et $b \in (d)$ donc d est un diviseur commun à a et b. Si de plus d' est un autre diviseur commun à a et b, alors $a \in (d')$ et $b \in (d')$ et comme (a,b) est le plus petit idéal contenant a et b, on en déduit que $(a,b) = (d) \subset (d')$, et donc que $d'|d$: finalement, $\text{pgcd}(a,b) = d$.

Correction de l'exercice 6099 ▲

(a) $I = (5, x^2+3)$. On a $\text{pgcd}(5, x^2+3) = 1$, donc si I était principal, on aurait $1 \in I$, et donc $I = \mathbb{Z}[X]$. Si $1 \in I$, il existe $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$, tels que $1 = 5P + (x^2+3)Q$. En considérant la réduction modulo 5 de ces polynômes, on obtient $(x^2 + \bar{3})\bar{Q} = \bar{1}$, ce qui est impossible pour des raisons de degré ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est intègre). Donc $1 \notin I$, et I n'est donc pas intègre.

$x^2 + 1 = (x+2)(x-2) + 5$, donc $(x^2+1, x+2) = (x+2, 5)$. Or $(x+2, 5)$ n'est pas principal pour les mêmes raisons que précédemment.

On a $(x-1) = (x^4-1) - x(x^3-1)$ donc $(x-1) \subset (x^4-1, x^3-1)$. Par ailleurs, $(x-1)|(x^4-1)$ et $(x-1)|(x^3-1)$ donc $x^4-1 \in (x-1)$ et $x^3-1 \in (x-1)$, donc $(x^4-1, x^3-1) \subset (x-1)$. Donc (x^4-1, x^3-1) est principal.

(b) $I = (x, x+1) = \mathbb{Z}$ car $1 = (x+1) - x$. Donc I n'est pas propre.

$I = (5, x^2+4)$. $\mathbb{Z}[X]/I \sim \mathbb{Z}_5/(x^2+\bar{4})$. Mais $(x^2+\bar{4}) = (x-\bar{1})(x+\bar{1})$ est réductible dans $\mathbb{Z}_5[x]$, donc $\mathbb{Z}_5/(x^2+\bar{4})$ n'est pas intègre : I n'est pas premier.

$I = (x^2+1, x+2) = (x+2, 5)$. $\mathbb{Z}[x]/I \simeq \mathbb{Z}_5[x]/(x+\bar{2})$. $x+\bar{2}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}_5[x]$, qui est principal, donc $(x+\bar{2})$ est maximal, donc le quotient est un corps, et I est maximal.

Correction de l'exercice 6100 ▲

(a) Soit $a, b \in B$, $ab \in I \cap B$. Alors $ab \in I$ donc $a \in I$ ou $b \in I$. Comme $a, b \in B$, on a $a \in I \cap B$ ou $b \in I \cap B$. Donc, si $I \cap B$ est propre, $I \cap B$ est premier.

(b) Soit J un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$. Alors $J \cap \mathbb{Z}$ est soit $\mathbb{Z}$ soit un idéal premier de $\mathbb{Z}$. Si $J \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, alors $1 \in J$, et donc $J = \mathbb{Z}[X]$, ce qui est exclu. On en déduit que $J = (0)$ ou $J = (p)$ avec p premier.

(c) On suppose $J \cap \mathbb{Z} = (0)$ et $J \neq (0)$. Soit alors f un polynôme de $J \setminus \{0\}$ de degré minimal. Notons $f = c(f) f_0$ où $f_0 \in \mathbb{Z}[x]$ est primitif. Comme J est premier, on a $c(f) \in J$ ou $f_0 \in J$. Comme $J \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, le premier cas est exclu, donc $f_0 \in J$.

Soit maintenant $g \in J$. Soit $g = f_0 q + r$ la division euclidienne de g par f_0 dans $\mathbb{Q}$ ($q, r \in \mathbb{Q}[x]$). Notons $q = \frac{a}{b} q_0$ avec $q_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitif, et $r = \frac{a'}{b'} r_0$, avec $r_0 \in \mathbb{Q}[x]$ primitif.

Alors $bb'g = ab'q_0f_0 + a'br_0$ On en déduit que $a'br_0 \in J$, et pour des raisons de degré, $r_0 = 0$. Finalement, $bb'g = ab'q_0f_0$, et en considérant les contenus, on en déduit que $bb'|ab'$, donc $b|a$, et donc $q \in \mathbb{Z}[x]$. On en déduit que $g \in (f_0)$, et finalement $J = (f_0)$.

(d) On suppose que $J \cap \mathbb{Z} = (p)$. Soit r_p la projection $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p[x]$ tels que $\alpha\beta \in r_p(J)$. Soit f, g des représentants de α et β (i.e. $r_p(f) = \alpha$, $r_p(g) = \beta$). Alors $fg \in r_p^{-1}(r_p(J)) = J + (p) = J$. Donc $f \in J$ ou $g \in J$, et donc $\alpha \in r_p(J)$ ou $\beta \in r_p(J)$: $r_p(J)$ est premier.
$\mathbb{Z}_p[x]$ est principal, donc il existe un polynôme π irréductible dans $\mathbb{Z}_p[x]$ tel que $r_p(J) = (\pi)$. Soit g un représentant de π. Alors $J = (p, g)$: en effet, on a vu que $J = r_p^{-1}((\pi))$ et $r_p^{-1}((\pi)) = (g) + (p) = (p, g)$.

(e) Supposons J maximal dans $\mathbb{Z}[x]$. J est en particulier premier, donc a une des deux formes ci dessus. Supposons $J = (f)$, avec f irréductible et primitif. Soit p un nombre premier ne divisant pas le coefficient dominant de f. Alors $J \subset (p, f) \subset \mathbb{Z}[x]$, mais $(p, f) \neq \mathbb{Z}[x]$. En effet, sinon, il existerait $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ tels que $1 = pg + fh$, et en considérant la réduction modulo p, $\bar{f}$ serait inversible dans $\mathbb{Z}_p[x]$: comme $\deg \bar{f} > 0$, c'est impossible. On en déduit que J n'est pas maximal.
J est donc de la forme (p, g), avec $r_p(g)$ irréductible dans $\mathbb{Z}_p[x]$.

Correction de l'exercice 6155 ▲

(a) Considérons $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \lambda$. Alors F est de classe C^1, $JacF(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$ et $S_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$. Si $\lambda \neq 0$, $\text{rang}(JacF(x_1, x_2, x_3)) = 1$ (le maximum possible) car sinon x_1, x_2, x_3 seraient tous nuls : impossible car $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda \neq 0$.
Comme $(0,0,0) \notin S_\lambda, \forall a \in S_\lambda$, $\text{rang} JacF(a) = 1$ et donc S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
Si $\lambda = 0$ $T_0(S_\lambda) = \{\text{vecteurs tangents à } S_n \text{ en } 0\}$. Alors T_0S_0 est un cône et donc S_0 n'est pas une sous-variété.

(b) Soientt $x, y \in \mathbb{R}^3$, $B(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ et $x \in S_\lambda$. Si $\lambda \neq 0$, $JacF(x) = (2x_1, 2x_2, -2x3)$ et donc

$$T_xS_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3 ; DF(x).u = 0\} = \{u = (u_1, u_2, u_3) ; (2x_1, 2x_2, -2x_3).\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0\} =$$

$$\{(u_1, u_2, u_3) ; 2x_1u_1 + 2x_2u_2 - 2x_3u_3 = 0\} = \{(u_1, u_2, u_3) ; 2B(x, u) = 0\}$$

d'où
$$T_xS_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3 ; B(x, u) = 0\}.$$

Correction de l'exercice 6156 ▲

Cas de $\mathbb{R}^2$.
$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse sur u implique que $u_{12} = u21$. Si $x = (x_1, x_2)$, on a
$$u(x) = \begin{pmatrix} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$< u(x), x >= \sum_{i=1}^{2} u_i(x)x_i = (u_{11}x_1 + u_{12}x_2)x_1 + (u_{21}x_1 + u_{22}x_2)x_2 = u_{11}x_1^2 + u_{12}x_1x_2 + u_{21}x_1x_2 + u_{22}x_2^2.$$

Posons $f(x) =< u(x), x > -1$ alors
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{21}x_2 = 2u_{11}x_1 + 2u_{12}x_2$$

et
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2u_{22}x_2 + u_{12}x_1 + u_{21}x_1 = 2u_{21}x_1 + 2u_{22}x_2.$$
Calculons
$$Df(x).x = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(u_{11}x_1^2 + u_{12}x_2x_1 + u_{21}x_1x_2 + u_{22}x_2^2) = 2 < u(x), x > .$$
Si $x = (x_1, x_2) \in Q$ alors $< u(x), x >= 1 \neq 0$ et donc $Df(x)$ étant non nul, il est de rang au moins 1 et donc de rang maximal. Q est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.
Déterminons le plan tangent de Q.
$$T_xQ = \{y \in \mathbb{R}^2; Df(x)(y) = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)y_i = 0\} =$$
$$\{y \in \mathbb{R}^n; 2 < u(x), y >= 0\}.$$

Correction de l'exercice 6187 ▲

(a) On a par définition $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}; |x-0| = |x| < 1\} = [-1,1]$.

(b) C'est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, $B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$ c'est le disque de centre l'origine et de rayon 1.

(c) $B_2(0,1) = \{(x,y); |x| < 1 et |y| < 1\}$. C'est un carré.

(d) $B_3(0,1) = \{(x,y); |x|+|y| < 1\}$. Dans le quart de plan $P^{++} = \{(x,y); x \geqslant 0, y \geqslant$, on a $B_3(0,1) \cap P^{++} = \{(x,y) \in p^{++}; x+y < 1\}$ c'est le triangle délimité par les droites $x = 0, y = 0$ et $x+y = 1$. En faisant de même pour les 3 autres secteurs du plan, on trouve que $B_3(0,1)$ est un losange (ou carré) dont les sommets sont les points $(0,1), (1,0), (-1,0), (0,-1)$.

Toutes ces distances étant invariantes par translation (ce sont des normes), il suffit de montrez que les normes associés $||.||_i = d_i((x,y),0)$ sont équivalentes.
On a
$$\frac{\sqrt{2}}{2}||.||_1 \leqslant ||.||_2 \leqslant ||.||_1.$$
En effet,
$$||(x,y)||_1 = \sqrt{(x^2+y^2)} \leqslant \sqrt{\sup(x^2,y^2)+\sup(x^2,y^2)}$$
$$\leqslant \sqrt{2}\sqrt{\sup(x^2,y^2)}$$
$$\leqslant \sqrt{2}\sqrt{(\sup(|x|,|y|))^2} \leqslant \sqrt{2}||(x,y)||_2$$
. De plus,
$$||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{\sup(x^2,y^2)}$$
$$\geqslant \sqrt{(\sup(|x|,|y|)^2} \geqslant \sup(|x|,|y|) \geqslant ||(x,y)||_2.$$
Les distances d_1 et d_2 sont donc équivalentes.
De même on montre que
$$||.||_2 \leqslant ||.||_3 \leqslant 2||.||_2.$$

Correction de l'exercice 6188 ▲

Il faut trouver une suite de cauchy de fonctions de E qui ne converge pas dans E. Il suffit, par exemple, de prendre une suites de fonctions $\{f_n\}$ convergeant pour $\|.\|$ vers une fonction non continue. Par exemple, prendre

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x < 1/2 \\ 1 - n(x - 1/2) \text{ si } 1/2 \leqslant x \leqslant 1/2 + 1/n \\ 0 \text{ si } x > 1/2 + 1/n \end{array} \right\}$$

et

$$f_0(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x < 1/2 \\ 0 \text{ si } x \geqslant 1/2 \end{array} \right\}$$

On a alors $\|f_n - f_0\|_1 = 1/(2n)$, la suite converge simplement et en norme $\|.\|$ vers la fonction f_0 qui n'est pas continue. Il suffit de montrer alors qu'il n'existe aucune fonction continue g telle que $\|f - g\| = 0$ ce qui interdit l'existence d'une limite à f_n dans E.

Correction de l'exercice 6190 ▲

On montre par récurrence que $f(nx) = nx$ si $n \in \mathbb{N}$. Montrer $f(-x) = -f(x)$ pour arriver à $f(nx) = nf(x)$ si $n \in \mathbb{Z}$ puis $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$ $p,q \in \mathbb{Z}$. Ainsi f est linéaire sur $\mathbb{Q}$. Il reste à montrer qu'elle l'est sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il reste à montrer que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Prenons $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$. On a alors

$$f(\lambda_x) = f(\lambda_n x + (\lambda - \lambda_n)x) = \lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x).$$

Soit $c_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$||(\lambda - \lambda_n)x||_E \leqslant c_n \leqslant 2||(\lambda - \lambda_n)x||_E.$$

Alors

$$f((\lambda - \lambda_n)x) = f(c_n \frac{\lambda - \lambda_n}{c_n} x) = c_n f(\frac{\lambda - \lambda_n}{c_n} x)$$

et

$$||\frac{\lambda - \lambda_n}{c_n} x|| \leqslant 1.$$

L'application f étant borné sur la boulle unité par une constante $M > 0$, on a

$$||f((\lambda - \lambda_n)x)|| \leqslant c_n M$$

et donc

$$||f((\lambda - \lambda_n)x)|| \leqslant c_n M \leqslant 2M||(\lambda - \lambda_n)x||_E$$

et donc

$$\lim_{n \to \infty} f((\lambda - \lambda_n)x) = 0$$

, en remarquant qu'on a aussi

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$$

on obtient

$$f(\lambda x) = \lim_{n \to \infty} [\lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x)] = \lambda f(x).$$

Correction de l'exercice 6191 ▲

Soit $X = (x,y)$, on a $M.X = (ax + by, cx + dy)$ or

$$|ax + by| \leqslant |ax| + |by| \leqslant (|a| + |b|) \sup(|x|, |y|) \leqslant (|a| + |b|)||(x,y)||_1.$$

de même,

$$|cx + dy| \leqslant (|c| + |d|)||(x,y)||_1.$$

Par conséquent

$$||M.X||_2 \leqslant \sup(|a| + |b|, |c| + |d|)||(x,y)||_1$$

et donc
$$||M|| \leqslant \sup(|a|+|b|,|c|+|d|).$$
Supposons $|a|+|b| \geqslant |c|+|d|$ (inverser l'ordre sinon) et prenons $X_0 = (a/|a|, b/|b|)$ (on suppose $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sinon vérification facile). On a alors $||X_0|| = 1$ et

$$||M.X_0||_2 = \sup(|a|+|b|, |ca/|a|+db/|b||) \geqslant |a|+|b|.1 \geqslant (|a|+|b|)||X_0||_1$$

et donc
$$||M|| \geqslant \sup(|a|+|b|,|c|+|d|)$$
et finalement
$$||M|| = \sup(|a|+|b|,|c|+|d|)$$

Correction de l'exercice 6193 ▲

(a) Soit x une suite, on a

$$||S(x)||_\infty = Max(\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{n-1}|, 0) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 1.||x||_\infty.$$

Donc $||S|| = 1$.

(b) Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$
$$||Tf||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f(x)g(x) \leqslant ||f||_\infty ||g||_\infty.$$
Donc
$$||T|| \leqslant ||g||_\infty.$$
Or
$$||T1||_\infty = ||g||_\infty = ||1||_\infty ||g||_\infty.$$
Donc
$$||T|| \geqslant ||g||_\infty$$
et finalement on a bien
$$||T|| = ||g||_\infty.$$

(c) Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$, on a

$$||u(f)|| = |\int_0^1 f(x)g(x)dx| \leqslant \int_0^1 |f(x)||g(x)|dx \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| \int_0^1 |f(x)|dx \leqslant ||g||_\infty.||f||.$$

On a donc
$$||u|| \leqslant ||g||_\infty.$$
Comme g ne s'annule qu'au point $x = 1/2$, elle ne change de signe qu'une seule fois. Soit

$$f_0 = g/|g|,$$

cette fonction n'est pas continue (ni définie) en $x = 1/2$ mais vérifie $f_0 g = |g|$. Prenons $f_n = g/|g|$ si $|x-1/2| > 1/n$, pour $|x-1/2| \leqslant 1/n$, on relie les deux segments du graphe par une ligne. Alors $1 - 1/(2n) \leqslant ||f_n|| \leqslant 1$ et

$$||u(f_n)|| = |\int_{|x-1/2|>1/n} f_n(x)g(x)dx + \int_{|x-1/2|\leqslant 1/n} f_n(x)g(x)dx| \geqslant$$

$$|(|\int_{|x-1/2|>1/n} f_n(x)g(x)dx| - |\int_{|x-1/2|\geqslant 1/n} f_n(x)g(x)dx|)|$$

$$\geqslant ||g||_\infty \int_{|x-1/2|>1/n} |f_n(x)|dx - 2/n||g||_\infty \geqslant ||g||_\infty(||f_n|| - 2/n).$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} ||u(\frac{f_n}{||f_n||})|| \geqslant ||g||_\infty(1 - \frac{1}{2n||f_n||} \geqslant ||g||_\infty(1 - \frac{1}{2n(1-1/2n)}) \geqslant ||g||_\infty(1 - \frac{1}{2n-1})$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$||u|| \geqslant ||g||_\infty(1 - \frac{1}{2n-1}),$$

en faisant tend n vers l'infini

$$||u|| \geqslant ||g||_\infty$$

ce qui montre la deuxième inégalité et on obtient $||u|| = ||g||_\infty$.

(d) si on prend $(x_n) = (a_n)$ on obtient

$$u((a_n)) = \sum a_n^2 = ||(a_n)||_2^2 = ||(a_n)||_2.||(a_n)||_2$$

et donc

$$||u|| \geqslant ||(a_n)||_2.$$

Or D'après Cauchy-Schwartz, on a

$$||u(a_n)|| = |u(a_n)| = |\sum a_n x_n| \leqslant ||(a_n)||_2||(x_n)||_2$$

et donc $||u|| \leqslant ||(a_n)||_2$ d'où l'égalité

$$||u|| = ||(a_n)||_2.$$

(e) Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $|x_j| \leqslant ||(x_n)||_\infty$ et par conséquent

$$|u((x_n))| = |\lim_{j\to\infty} x_j| \leqslant ||(x_n)||_\infty$$

et donc

$$||u|| \leqslant 1.$$

Prenons la suite (x^0) définie par $x_n^0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors

$$|u(x^0)| = |\lim_{j\to\infty} 1| = 1 = ||x^0||_\infty$$

et donc

$$||u|| \geqslant 1$$

d'où l'égalité $||u|| = 1$.

Correction de l'exercice 6195 ▲

(a) (Etude en 0). $|sin(1/x)| \leqslant 1$ par conséquent $|x^2 sin(1/x)| \leqslant x^2$. De même $|y^2 sin(1/y)| \leqslant y^2$. Par conséquent

$$|f(x,y)| \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (\sqrt{x^2+y^2})^2 \leqslant (||(x,y)||_2)^2$$

Et donc

$$\lim_{||(x,y)||\to 0} |f(x) - f(0)| = 0$$

et donc f est continue à l'origine. En remarquant que $||(x,y)||_2^2 = o(||(x,y)-(0,0)||_2)$ on a $f(x,y) = 0 + o(||(x,y)-(0,0)||_2)$ et donc f est différentiable en 0 et

$$Df(0) = 0.$$

Par conséquent f admet des dérivées partielles dans toutes les directions à l'origine qui sont nulles. La fonction f n'est pas contre par de classe C^1 à l'origine. Il suffit de remarquer que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur la droite $y = 0$ n'est pas continue en 0.

(b) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, f est continue en (x,y) et même de classe C^∞ en tant que composés sommes, produits et quotient de telles fonctions. Il reste à étudier f à l'origine. Or,

$$|f(x,y)| = \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leqslant |x| \leqslant ||(x,y)||_2.$$

Ainsi, f est continue à l'origine et y tend vers 0.

Montrons par l'absurde que f n'est pas dérivable à l'origine. Notons $Df(0)$ la (supposée) différentielle de f à l'origine. L'application linéaire $Df(0)$ s'obtient par la calcul de l'image de vecteurs de la base de $\mathbb{R}^2$. Calculons pour 'les dérivées directionnelles de f à l'origine :

$$D_{(1,0)}f(0) = [Df(0)]((1,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h(1,0))-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$D_{(0,1)}f(0) = [Df(0)]((0,1)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h(0,1))-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Par conséquent, on a nécessairement

$$Df(0) = 0$$

Or,

$$D_{(1,1)}f(0) = [Df(0)]((1,1)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h(1,1))-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{2h^2}}{h} = \frac{1}{2} \neq 0$$

ce qui donne la contradiction recherchée.

Correction de l'exercice 6197 ▲

En tout point (x_0,y_0) avec $x_0 \neq y_0$, f est continue et même de classe C^2 car composée (projections sur (0x) et (Oy)), différence et quotient de fonctions de classe C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas. Dans ces points, la différentielle de f est donnée par la matrice jacobienne :

$$Df(x_0,y_0) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & , & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{g'(x_0)(x_0-y_0)-(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2} & , & \frac{-g'(y_0)(x_0-y_0)+(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2} \end{array} \right)$$

qui est bien de classe C^1 (g étant de classe C^2, g' est de classe C^1). Montrons que F est continue aux points de la forme (a,a). Le DL de g à l'ordre 2 entre x et y donne $g(y) = g(x) + (y-x)g'(c_{x,y})$ avec $c \in [x,y]$ d'où

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} g'(c_{x,y}) = g'(a) = F(a,a)$$

car comme (x,y) tend vers (a,a), x et y tendent tous les deux vers a et donc $c_{x,y}$ aussi (et g' est continue). Pour montrer que F est C^1 (sachant que F est continue), il suffit de montrer que la différentielle de F se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^2$. Le DL de g à l'ordre 2 entre x_0 et y_0 est :

$$g(x_0) = g(y_0) + (x_0-y_0)g'(y_0) + \frac{(x_0-y_0)^2}{2} g^{(2)}(c_1) \text{ avec } c_1 \in [x_0,y_0].$$

$$g(y_0) = g(x_0) + (y_0-x_0)g'(x_0) + \frac{(y_0-x_0)^2}{2} g^{(2)}(c_2) \text{ avec } c_2 \in [x_0,y_0].$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{(x_0-y_0)^2 g^{(2)}(c_2)}{2(x_0-y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{(x_0-y_0)^2 g^{(2)}(c_1)}{2(x_0-y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_1)}{2}$$

La fonction g étant de classe C^2, on a

$$\lim_{(x_0,y_0)\to(a,a)} Df(x_0,y_0) = \left(\ g^{(2)}(a)/2 \quad , \quad g^{(2)}(a)/2 \ \right)$$

et donc Df se prolonge par continuité sur tout $\mathbb{R}^2$. F est donc bien de classe C^1.

Correction de l'exercice 6198 ▲

Soit $F_1(P) = \int_0^1 P^3 - P^2 dt$, et soit h un polynôme de degré n alors

$$F_1(P+h) - F_1(P) = \int_0^1 [(P^3 + 3P^2h + 3Ph^2 + h^3) + (P^2 + 2Ph + h^2) - P^3 - P^2]dt =$$

$$\int_0^1 h(3P^2 + 2P)dt + \int_0^1 3Ph^2 + h^3 + h^2 dt$$

Or $|\int_0^1 3Ph^2 + h^3 + h^2 dt| = o(||h||_\infty)$ donc

$$DF_1(h) = \int_0^1 (3P^2 + 2P)hdt.$$

Soit $F_2(P) = P' - P^2$ et soit h un polynôme de degré n alors

$$F_2(P+h) - F_2(P) = (P+h)' - (P+h)^2 - P' + P^2 = h' - 2Ph - h^2$$

Or $h^2 = o(||h||)$ (pour toute norme a choisir). On a donc

$$DF_2(h) = h' - 2Ph.$$

Correction de l'exercice 6199 ▲

(a) On a $g(x,y) =< f(x,y) - a, f(x,y) - a >$ où $< .,. >$ est le produit scalaire Euclidien sur $\mathbb{R}^2$. L'application g est différentiable en tant que composée et produit de fonctions différentiables. La différentielle Df est donné par la matrice Jacobienne

$$(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$$

et Dg par la matrice

$$(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial g(x,y)}{\partial y})$$

On a alors

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} < f(x,y) - a, f(x,y) - a >=$$

$$< \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - a), f(x,y) - a > + < f(x,y) - a, \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - a) >=$$

$$2 < \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, f(x) - a > .$$

De même,

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2 < \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, f(x) - a > .$$

(b) L'application f est continue (car différentiable) et tend vers l'infini quand (x,y) tend vers l'infini. Ainsi

$$\forall A > 0, \exists B > 0, ||(x,y)|| \geqslant B \Rightarrow ||f(x,y)|| \geqslant A.$$

Soit $m = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y)$, pour $A = m+1$, il existe $B > 0$ tel que

$$||(x,y)|| \geqslant B \Rightarrow g(x,y) = ||f(x,y)||^2 \geqslant A^2 \geqslant (m+1)^2 \geqslant m+1.$$

On a donc

$$m = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \inf_{||(x,y)||\leqslant B} g(x,y).$$

Or la boule $\overline{B}(0,B)$ étant compacte et g continue, l'inf y est ateint en un point $X_0 = (x_0,y_0) \in B(0,B) \subset \mathbb{R}^2$. Comme X_0 est un minimum global de g, c'est aussi un minimum de la restriction de g sur toute droite passant par X_0. Comme la dérivé d'une fonction réelle en un minimum est nulle, toute les dérivées partielles de g sont nulles et donc $Dg(X_0) = 0$ et par conséquent la matrice jacobienne de g est nulle. On a donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = 2 < \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), f(x)-a >= 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 2 < \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), f(x)-a >= 0.$$

Comme Df est injective, ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent les projections de $f(x)-a$ sur la base $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0); \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))$ sont nulles et donc

$$f(x_0,y_0) - a = 0 \Leftrightarrow f(x_0,y_0) = a$$

et donc a admet bien un antécédent. Ceci étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, on a montré que f est surjective.

Correction de l'exercice 6200 ▲

(a) Pour montrer que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leqslant 1$, il faut montrer que si $h \in \mathbb{R}^n$, on a $|Df(x).h| \leqslant ||h||$. On a

$$|Df(x).h| = |D_h f(x)| = |\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}|.$$

Or f est 1-lipschitzienne et donc $|f(x+th)-f(x)| \leqslant ||th|| = t||h||$. Par conséquent pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $|Df(x).h| \leqslant ||h||$ ce qui donne l'inégalité demandée.

(b)

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{f((1-t)x+ty)-f(x)}{t} =$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t} = Df(x).(y-x).$$

Ou encore, soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ l'application $\psi(t) = (1-t)x+ty$, on a alors $\varphi(t) = f\circ\psi$ et d'après la formule de différentielle d'une composition :

$$\varphi'(0) = Df(\psi(0)).D\psi(0) = Df(x).(y-x).$$

Or,

$$d(x,F) = d(x,y) = ||x-y|| = \frac{1}{1-t}||(1-t)(x-y)|| =$$
$$\frac{1}{1-t}||[(1-t)x+ty]-[ty+(1-t)y]|| = \frac{1}{1-t}d((1-t)x+ty,y).$$

Notons $x_t = (1-t)x+ty$, on a alors

$$d(x_t,y) = (1-t)d(x,F).$$

Or, $\varphi(t) = d(x_t, F) \leqslant d(x_t, y) \leqslant (1-t)d(x,y) \leqslant \varphi(0)$ et donc

$$|\varphi'(0)| = \lim_{t\to 0} \frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(0)-\varphi(t)}{t} \geqslant$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{d(x,y)-(1-t)d(x,y)}{t} \geqslant d(x,y) = ||x-y||.$$

Donc

$$|Df(x)(x-y)| \geqslant ||x-y||$$

d'où la deuxième inégalité.

(c) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux point y_1 et y_2 tels que $d(x,F) = d(x,y_1) = d(x,y_2)$. Alors, de la même manière que précédement, on a $Df(x).(x-y_1) = Df(x).(x-y_2) = d(x,F)$ et donc $Df(x).(x-y_1+x-y_2) = 2d(x,F)$. Or, $||x-y_1+x-y_2|| < 2d(x,F)$ car les vecteurs $x-y_1$ et $x-y_2$ ne sont pas alignés. Mais alors cela contredit le fait que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^\backslash,\mathbb{R})} = 1$.

Correction de l'exercice 6210 ▲

Montrons que f se prolonge par continuité au point b, on montrera alors que f est dérivable à gauche au point b est que cette dérivée est $\lim_{x\to b^-} f'(x)$. Pour celà montrons qu'il existe un réel k tel que toute suite $\{x_n\}$ tendant vers b vérifie $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = k$. Remarquons que la dérivée $f'(x)$ admettant une limite au point b, elle est bornée sur un petit voisinage (à gauche) de b (notons M ce majorant). Soit y_n une suite convergent vers b. Alors la suite $f(y_n)$ est de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. La suite $\{y_n\}$ étant de cauchy,

$$\exists N \in \mathbb{N}, p,q \geqslant N \Rightarrow |y_p - y_q| \leqslant \varepsilon' \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Or d'après les accroissements finis :

$$f(y_p) - f(y_q) = (y_p - y_q) f'(c_{p,q}) \text{ où } c_{p,q} \in]y_p, y_q[.$$

Par conséquent,

$$|f(y_p) - f(y_q)| \leqslant |y_p - y_q|.|f'(c_{p,q})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} M \leqslant \frac{epsilon}{2} < \varepsilon$$

et donc la suite $\{f(y_n)\}$ est de cauchy et converge vers un réel que nous noterons l. Montrons que c'est le cas pour toute autre suite $\{x_n\}$ qui tend vers b. On a

$$f(x_n) = f(x_n) - f(y_n) + f(y_n).$$

D'après les accroissements finis, $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant M.|x_n - y_n|$ et donc tend vers zero car les suites x_n et y_n tendent vers b. De plus, comme on l'a vu, $f(y_n)$ tend vers k et donc $f(x_n)$ aussi. Prolongeons f par continuité au point b en posant $f(b) = k$. On a alors le taux d'accroissement

$$T_x f = \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \frac{(b-x)f'(c_x)}{b-x} = f'(c_x) \text{ où } c_x \in]x, b[.$$

Quand x tend vers b, c_x aussi et donc $T_x f$ tend vers l.

Correction de l'exercice 6211 ▲

On a $f'(x) = ie^{ix}$ (on peut le vérifier en coordonnées). Si l'égalité des accroissement finis était vérifiée il existerait

$$c \in]0, \pi[\text{ tel que } f(\pi) - f(0) = (\pi - 0) ie^{ic}$$

ce qui est impossible car en prenant les modules on trouverait $2 = \pi$.

Correction de l'exercice 6212 ▲

(a) f est de classe C^∞ car ses coordonnées le sont (polynômes). g l'est car c'est la composée de deux fonctions C^∞.

(b) La matrice jacobienne de f est :
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$
D'apès la formule de différentielle d'une composée, on a
$$Dg(x,y) = Df(f(x,y)) \circ Df(x,y).$$
Or $f(0,0) = 0$ et
$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et donc
$$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(c) Par continuité de $Dg(x,y)$ à l'origine et en prenant $\varepsilon = 1/2$ on a :
$$\exists \rho > 0, ||(x,y)-(0,0)|| \leqslant \rho \Rightarrow ||Dg(x,y) - Dg(0,0)|| \leqslant 1/2$$
d'où le résultat demandé.

(d) D'après les accroissements finis, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^2$, on a
$$||g(X) - g(Y)|| \leqslant \sup_{Z \in \overline{B}_\rho((0,0))} ||Dg(Z)||.||X-Y|| \leqslant 1/2||X-Y||$$
et donc g est contractante. Le Boule $\overline{B}_\rho((0,0))$ la boule $\overline{B}_\rho((0,0))$ étant compacte et complète, le théorème du point fixe permet de conclure.

Correction de l'exercice 6213 ▲

(a) On a
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos y \\ \cos x & \sin y \end{pmatrix}$$
On a
$$|||Df(x,y)||| = \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{||Df(x,y).(a,b)||}{||(a,b)||} =$$
$$\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 y + 2ab\sin x\cos x + a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 y + 2ab\cos x\sin y}}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$
$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(x+y)}}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant \sqrt{1+\frac{2|a||b|}{a^2+b^2}} \leqslant \sqrt{2}$$
car
$$(|a|-|b|)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geqslant 2|a||b|.$$

(b) Soient $U_n = (x_n, y_n)$ et $G(x,y) = 1/2F(x,y)$, alors $|||G||| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $U_{n+1} = G(U_n)$. D'après les accroissements finis, G est contractante et donc le théorème du point fixe donne le résultat demandé.

Correction de l'exercice 6218 ▲

Appliquer le théorème des accroissements finis à $g(x) = f(x) - Df(a)x$ en remarquant que la matrice jacobienne de $Df(a)x$ est la matrice $Df(a)$.

Correction de l'exercice 6222 ▲

(a) Puisque $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, il est clair que φ est $\mathbb{R}$-linéaire dès qu'elle est $\mathbb{C}$-linéaire et qu'elle vérifie en particulier $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ pour tout $x \in E$.

Supposons maintenant φ $\mathbb{R}$-linéaire, vérifiant $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ pour tout $x \in E$. Par hypothèse, φ est additive et $\varphi(t.x) = t\varphi(x)$ pour tout réel t et $x \in E$. D'autre part, si $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$,

$\varphi((\alpha+i\beta)x) = \varphi(\alpha x) + \varphi(i\beta x)$ par additivité car E est un $\mathbb{C}$-ev,

$= \varphi(\alpha x) + i\varphi(\beta x)$ par hypothèse sur φ,

$= \alpha\varphi(x) + i\beta\varphi(x)$ car $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, elle se représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

De même, $\mathscr{I}$, la multiplication par i comme application linéaire de $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ se représente dans l'identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la condition $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ signifie que φ commute avec $\mathscr{I}$ ou que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ceci est réalisé si et seulement si $a = d$, et $b = -c$.

b) f $\mathbb{C}$-différentiable au point $z = x + iy \in \mathbb{C}$ signifie :

$$f(z+h) - f(z) - f'(z).h = h\varepsilon(h),$$

avec $h \in \mathbb{C}$ et $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ (l'application $\mathbb{C}$-linéaire tangente est ici la multiplication dans $\mathbb{C}$ par $f'(z)$) ; traduit en variables réelles cela signifie :

$$\begin{cases} u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) &= ah_1 - bh_2 + ||h||\varepsilon(h) \\ v(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) &= bh_1 + ah_2 + ||h||\varepsilon(h) \end{cases}$$

avec $f'(z) = a + ib$ et $h = h_1 + ih_2$; f est donc $\mathbb{R}$-différentiable au point (x,y) et sa matrice jacobienne en ce point vaut

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Réciproquement supposons f $\mathbb{R}$-différentiable en (x,y) ; ainsi

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - f'(x,y).h = ||h||\varepsilon(h),$$

avec $h \in \mathbb{R}^2$ et $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$; la matrice de $f'(x,y)$ est la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \partial_1 u(x,y) & \partial_2 u(x,y) \\ \partial_1 v(x,y) & \partial_2 v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

et f est $\mathbb{C}$-différentiable en (x,y) si et seulement si $f'(x,y)$ est $\mathbb{C}$-linéaire ou $a = d$ et $b = -c$, ce qui se traduit par les conditions de Cauchy :

$$\partial_1 u(x,y) = \partial_2 v(x,y),\ \partial_2 u(x,y) = -\partial_1 v(x,y).$$

Il est facile de voir que les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $f_1(z) = e^x,\ f_2(z) = x^2 + y^2,\ f_3(z) = e^{x-iy}$ sont $\mathbb{R}$-différentiables, et que les conditions de Cauchy ne sont jamais vérifiées pour f_1 et f_3, ne sont vérifiées qu'en 0 pour f_2.

(b) La fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut s'écrire $g_1 + ig_2$ où $g_1 = \sqrt{u^2+v^2}$ et $g_2 = 0$ si $f = u+iv$. Supposons que g soit $\mathbb{C}$-différentiable en $z = x+iy$: elle remplit donc les conditions de Cauchy en ce point et $\partial_1 g_1(x,y) = \partial_2 g_1(x,y) = 0$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x,y)\ \partial_1 u(x,y) + v(x,y)\ \partial_1 v(x,y) & = & 0, \\ u(x,y)\ \partial_2 u(x,y) + v(x,y)\ \partial_2 v(x,y) & = & 0. \end{array}\right.$$

Mais comme f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z = x+iy$, $\partial_1 u(x,y) = \partial_2 v(x,y)$, $\partial_2 u(x,y) = -\partial_1 v(x,y)$, et le système devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x,y)\ \partial_1 u(x,y) + v(x,y)\ \partial_1 v(x,y) & = & 0, \\ -u(x,y)\ \partial_1 v(x,y) + v(x,y)\ \partial_1 u(x,y) & = & 0. \end{array}\right.$$

C'est un système de Cramer puisque le déterminant $u^2(x,y)+v^2(x,y) = |f(z)|^2 \neq 0$; ainsi $\partial_1 u(x,y) = \partial_1 v(x,y) = \partial_2 u(x,y) = \partial_2 v(x,y) = 0$ et $f'(z) = 0$.

Correction de l'exercice 6231 ▲

(a) Calculons l'accroissement :

$$f(x+h) - f(x) = f(x) + f(h) - f(x) = f(h) + 0.$$

Or, par définition $f(h)$ est linéaire en h, continue et $0 = o(||h||)$. Par conséquent f est différentiable et

$$Df(x) = f, \text{ ou encore } Df(x).h = f(h).$$

On remarque que Df est l'application constante que à $x \in E$ associe l'application linéaire f. Par conséquent, Df est différentiable et sa différentielle est nulle :

$$D^2 f = 0.$$

(b) Calculons

$$f((x,y)+(h,k)) - f(x,y) = f(x+h,y+k) - f(x,y) = f(x,y+k) + f(h,y+k) - f(x,y) =$$
$$f(x,y) + f(x,k) + f(h,y) + f(h,k) - f(x,y) = f(x,k) + f(h,y) + f(h,k).$$

L'application qui à (x,y) associe l'application linéaire $Df(x,y)(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$ est donc candidate pour être la différentielle de f. Vérifions qu'elle est bien continue et que $f(h,k) = o(||(h,k)||)$. Nous rappelons qu'une application bilinéaire $f(x,y)$ est continue s'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in E^2; ||f(x,y)|| \leqslant M||x||||y||.$$

On a

$$||Df(x,y)(h,k)|| = ||f(x,k) + f(h,y)|| \leqslant ||f(x,k)|| + ||f(h,y)|| \leqslant$$
$$M||x||.||k|| + M||h||.||y|| \leqslant M(||x|| + ||y||)\max(||k||,||h||) \leqslant M(||x|| + ||y||)||(h,k)||.$$

Par conséquent, $Df(x,y)$ est continue et a une norme inférieure à $M(||x|| + ||y||)$. De plus

$$||f(h,k)|| \leqslant M||h||.||k|| \leqslant ||(h,k)||.\varepsilon(h,k)$$

où ε tend vers zero quand (h,k) tend vers zero car

$$\varepsilon(h,k) = \frac{||h||.||k||}{\sup(||h||,||k||)}$$

ce qui fini de montrer que f est différentiable et que sa différentielle est définie par

$$Df(x,y).(h,k) = f(x,k) + f(h,y).$$

En remarquant que Df est linéaire par rapport à (x,y), d'après la première question, on déduit que sa différentielle est

$$D^2 f(x,y)[(h,k),(u,v)] = f(u,k) + f(h,v).$$

(c)

$$f(A+h)-f(A)=(A+h)^2-A^2=Ah+hA+h^2$$

avec $Ah+hA$ linéaire en h (et en A) et $||h^2|| \leqslant ||h||^2 = o(||h||)$. Par conséquent f est différentiable et sa différentielle est $Df(A).h = Ah+hA$. Comme $Df(A)$ est lináire par rapport à A, sa différentielle en A est l'application bilinéaire

$$D^2f(A)[H,K]=KH+HK.$$

Correction de l'exercice 6232 ▲

Soit $f(x,y)=x^2+xy+y^2+\frac{1}{4}x^3$, calculons la jacobienne de f :

$$Df(x,y)=(2x+y+\frac{3}{4}x^2, x+2y).$$

Les points critiques de f vérifient $Df(x,y)=0$ et par conséquent vérifient les équations $2x+y+\frac{3}{4}x^2=0$ et $x+2y=0$. Par conséquent f admet deux points critiques $(0,0)$ et $(-2,1)$. Pour savoir si ces points critiques sont des extrémums de f, il faut étudier la hessienne de f :

$$Hess_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2+\frac{3}{2}x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres. Au point $(0,0)$,

$$Hess_f(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda)=(1-\lambda)(3-\lambda)$ et ses deux valeurs propres sont strictement positive. La fonction f admet donc un minimum local au point $(0,0)$. Ce minimum n'est pas globale car $f(0,0)=0$ et f prend des valeurs négatives pour $y=0$ et x qui tend vers $-\infty$.
Au point $(-2,1)$,

$$Hess_f(0,0)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda)=\lambda^2-\lambda-3$. On peut alors soit calculer les valeurs propres soit remarquer que le determinant de la hessienne est égal au produit des deux valeurs propres (ici -3) et celles-ci sont donc non nulles et de signe contraire. Par conséquent le point $(-2,1)$ est point selle de f. ce n'est pas un extremum.

Correction de l'exercice 6233 ▲

Le volume d'une boite étant invariant par rotations, on peut toujours supposer que toutes les boites sont centrées à l'origine et on des cotés parallèles aux axes de coordonnées. Par conséquent, la donnée d'un point (x,y,z) sur la sphère définit de manière unique une boite rectangulaire dont l'un des sommets est le point (x,y,z). On prendra x,y et z positifs car une telle boite a toujours un sommet dans le secteur positif de l'espace. Par conséquent, on doit maximiser la fonction volume $g(x,y,z)=8xyz$ sur la sous-variété S définie par l'équation $f=0$ avec $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$. Un point critique de g sur S vérifie

$$Dg(x,y,z)=\lambda Df(x,y,z)$$

et $f(x,y,z)=0$. On a obtient alors le système d'équations :

$$\begin{aligned} 8yz &= 2x \\ 8xz &= 2y \\ 8xy &= 2z \\ x^2+y^2+z^2 &= R^2 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}8xyz &= 2x^2\\ 8xyz &= 2y^2\\ 8xyz &= 2z^2\\ x^2+y^2+z^2 &= R^2\end{aligned}$$

et donc comme x,y et z sont positifs, on a $x=y=z=\frac{R}{\sqrt{3}}$. Or g est continue et $S^+ = S\cap\{x\geqslant 0; y\geqslant 0; z\geqslant 0\}$ est un compact. Comme g est nulle sur le bord de S^+, le maximum de g est ateint en un point critique de g dans l'intérieur de S^+. Le seul point critique de g est donc bien ce maximum recherché. Ici, il n'y a pas eu besoin de calculer la hessienne de g sur S par la formule :

$$H = D^2g - \lambda D^2 f$$

où λ est le coefficient de lagrange trouvé précédemment.

Correction de l'exercice 6248 ▲

(a) La fonction f étant dérivable, elle est continue. Montrons qu'elle est injective. Soient $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)=f(y)$. Si $x\neq y$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]x,y[$ tel que $f'(c)=0$ ce qui contredit le fait que f' ne s'annule jamais. Par conséquent $x=y$ et f est injective. Pour montrer que f^{-1} est continue, il faut montrer que l'image réciproque par f^{-1} d'un voisinage d'un point est un voisinage de la réciproque du point. Ou encore, que l'image directe par f d'un voisinage d'un point a est un voisinage de $f(a)$. Soit V un voisinage de a, il contient un intervalle du type $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, l'image de ce connexe par une fonction continue est encore connexe et est donc un intervalle $[c,d]$ (fermé car f est continue et l'intervalle de départ est compact). Si $f(a)\in]c,d[$, on la démonstration est finie. Si $f(a)=c$ ou $f(a)=d$ alors a est un extrémum local de f et donc $f'(a)=0$ ce qui contredit l'énoncé. Ainsi f est un homéormorphisme. f^{-1} est différentiable car la différentielle de f ne s'annule pas (théorème de deug...).

(b) Le taux d'accroissement

$$T_x(f) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 + x\sin\frac{\pi}{x}$$

tend vers 1 quand x tend vers zero ($\sin\frac{\pi}{x}$ est bornée) et donc f est dérivable au point 0 et $f'(0) = 1\neq 0$.

(c) Par l'absurde, supposons que f soit inversible au voisinage de 0.Soit $\varepsilon>0$ tel que $]-\varepsilon,\varepsilon[$ soit inclus dans ce voisinage. f étant continue (car dérivable), elle est strictement monotone. Or $f'(x) = 1-\pi\cos\frac{\pi}{x}+2x\sin\frac{\pi}{x}$. Prenons $k\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2k}<\varepsilon$ et $\frac{1}{1+2k}<\varepsilon$ alors $f'(\frac{1}{2k}) = 1-\pi<0$ et $f(\frac{1}{2k+1}) = 1+\pi>0$ et donc f n'est pas monotone sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ ce qui donne la contradiction recherchée. Le théorème de l'inverse local nous montre de plus que f n'est pas de classe C^1 dans aucun voisinage de 0.

Correction de l'exercice 6249 ▲

(a) L'application $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe C^∞ car ses coordonnées le sont. Pour montrer que c'est un difféormorphisme global, il suffit de montrer que c'est un difféo local (théorème de l'inverse local) et qu'elle est bijective. Calculons la matric jacobienne de φ :

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

La jacobienne de φ est $det(D\varphi(r,\theta)) = r(\sin^2 x+\cos^2 x) = r>0$ si $(x,y)\neq(0,0)$. L'application φ est donc bien un difféomorphisme local au voisinage de chacun des point de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$. La bijectivité se vérifie en explicitant par exemple la réciproque de φ (si on pose $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$, on pourra considérer les données x^2+y^2 et y/x...).

14. **Correction de** l'exercice 6250 ▲

(a) φ a des coordonnées de classe C^1, elle l'est donc aussi. On a

$$Jac(\varphi)(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2\cos(y/2) \\ 1/2\cos(x/2) & -1 \end{pmatrix}$$

On a $det(Jac(\varphi)(x,y)) = 1 - 1/4\cos(x/2)\cos(y/2) \geqslant 3/4 > 0$. Par conséquent la jacobienne est inversible et $D\varphi(x,y) \in Isom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) = GL(\mathbb{R}^2$.

(b) D'après le théorème de l'inverse local, Il suffit de montrer que φ est injective. Supposons $\varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$, alors $\sin(y_1/2)-x_1 = \sin(y_2/2)-x_2$ et $\sin(x_1/2)-y_1 = \sin(x_2/2)-y_2$. D'où $\sin(y_1/2) - \sin(y_2/2) = x_1 - x_2$ et $\sin(x_1/2)-\sin(x_2/2) = y_1 - y_2$. Or, $\forall a,b \in \mathbb{R}, |\sin a - \sin b| \leqslant |a-b|$ (conséquence des accroissements finis appliqué à $\sin x$). Donc $|x_1 - x_2| \leqslant |y_1/2 - y_2/2|$ et $|y_1 - y_2| \leqslant |x_1/2 - x_2/2|$ d'où $|x_1 - x_2| \leqslant 1/4|x_1 - x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. $\varphi : U \to F$ est injective. L'ensemble $f(U)$ est ouvert car il est réunion d'ouverts (d'après thm inverse local). C'est un difféomorphisme en U et $\varphi(U)$.

(c) Soient $(X_1,y_1),(X_2,Y_2) \in \varphi(\mathbb{R}^2)$ avec $\varphi(x_1,y_1) = (X_1,Y_1)$ et $\varphi(x_2,y_2) = (X_2,Y_2)$ ou encore $\varphi^{-1}(X_1,Y_1) = (x_1,y_1)$ et $\varphi^{-1}(X_2,Y_2) = (x_2,y_2)$. On a

$$||\varphi^{-1}(X_1,Y_1) - \varphi^{-1}(X_2,Y_2)|| = ||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|| = ||(x_1-x_2,y_1,y_2)|| = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$$

Or $\sin(y_1/2)-x_1 = X_1$, $\sin(y_2/2)-x_2 = X_2$, $\sin(x_1/2)-y_1 = Y_1$ et $\sin(x_2/2)-y_2 = Y_2$. Par conséquent

$$x_1 - x_2 = \sin(y_1/2) - X_1 - \sin(y_2/2) + X_2$$
$$y_1 - y_2 = \sin(x_1/2) - Y_1 - \sin(x_2/2) + Y_2.$$

D'où

$$|x_1-x_2| + |y_1-y_2| \leqslant |X_2 - X_1| + |\sin(y_1/2) - \sin(y_2/2)| + |Y_2 - Y_1| + |\sin(x_1/2) - \sin(x_2/2)|$$
$$\leqslant |X_2 - X_1| + 1/2|y_1 - y_2| + |Y_2 - Y_1| + 1/2|x_1 - x_2|$$

d'où

$$|x_1-x_2| + |y_1-y_2| \leqslant 2(|X_2 - X_1| + |Y_2 - Y_1|) \leqslant 2||(X_1,Y_1) - (X_2,Y_2)||.$$

Donc φ^{-1} est lipschitzienne.

(d) Soit (X_n,Y_n) une suite de cauchy dans $\varphi(\mathbb{R}^2)$, $((X_n,Y_n) = \varphi(x_n,y_n)\,;\ (x_n,y_n) = \varphi^{-1}(X_n,Y_n))$. Pour tout $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, p,q \geqslant n \Rightarrow ||(X_p,Y_p) - (X_q,Y_q)|| < \varepsilon$. Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}; p,q \geqslant n \Rightarrow ||(x_p,y_p) - (x_q,y_q)|| < 2\varepsilon$. La suite (x_n,y_n) est alors de cauchy dans $\mathbb{R}^2$, qui est complet. Par conséquent elle converge. Soit (x,y) sa limite. Comme φ est continue et que $\lim_n(x_n,y_n) = (x,y)$ alors $\lim_n \varphi(x_n,y_n) = \varphi(x,y)$. La suite (X_n,Y_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$. Elle converge. Soit (X,Y) sa limite, alors $(X,Y) = \varphi(x,y)$ car $(X_n,Y_n) \to (X,Y)$ et $\varphi(x_n,y_n) \to \varphi(x,y)$. Donc $(X,Y) \in \varphi(\mathbb{R}^2)$. $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est alors complet et donc fermé. Comme $\varphi(\mathbb{R}^2$ est un ouvert fermé et non vide (il contient $(0,0) = \varphi(0,0)$) dans le connexe $\mathbb{R}^2$, on a $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

(e) $p = (1-\pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi) = \varphi(\pi/2,\pi) = \varphi(q)$ où $q = (\pi/2,\pi)$. $\varphi : E \to F$ est un C^1-difféormorphisme donc $\varphi^{-1}\circ\varphi = Id$ et donc

$$Id = D(\varphi^{-1}\circ\varphi)(q) = D\varphi^{-1}(\varphi(q)) \circ D\varphi(q).$$

Or $D\varphi^{-1}(\varphi(q)) = (D\varphi(q))^{-1}$ et donc $Jac\varphi^{-1}(p) = (Jac\varphi(\pi/2,\pi))^{-1}$. Or

$$Jac\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2\cos(y/2) \\ 1/2\cos(x/2) & -1 \end{pmatrix}.$$

D‘où

$$Jac\varphi(\pi/2,\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2}/4 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$Jac\varphi^{-1}(p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{2}/4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l’exercice 6251 ▲

Posons $\theta(t) = a + t(b-a)$ et $\Psi(x) = \langle x, b-a\rangle$ qui est linéaire et continue (donc C^∞).

(a) f et φ sont de classe C^1 car composées d’applications de classe C^1. On a

$$D\varphi(t) = \varphi'(t) = (\Psi\circ f\circ\theta)(t)'(t) = D\Psi(f(\theta(t)))\circ Df(\theta(t))\circ D\theta(t) = \langle Df(a+t(b-a))(b-a), b-a\rangle.$$

Par conséquent :

$$\varphi'(t) \geqslant \alpha\langle b-a, b-a\rangle.$$

Or, $\varphi(1)-\varphi(0) = \langle f(b)-f(a),(b-a)\rangle$ et il existe $t\in]0,1[$ tel que $\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(t)$ d’où

$$\langle f(b)-f(a), b-a\rangle \geqslant \alpha\langle b-a, b-a\rangle.$$

Indications pour mq f est fermée : Posons $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ alors

$$\alpha\|b-a\|^2 \leqslant \langle f(b)-f(a), b-a\rangle \leqslant \|f(b)-f(a)\|.\|b-a\|.$$

D’où

$$\|b-a\| \leqslant 1/\alpha\|f(b)-f(a)\|.$$

Soit F un fermé et y_n une suite de points de $f(F)$ convergeant vers un point limite y_∞. Il faut montrer que $y_\infty \in f(F)$. Soit x_n une suite de points de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(x_n) = y_n$. Il reste à montrer que cette suite admet est de Cauchy, qu’elle converge donc et que sa limite x_∞ vérifie $f(x_\infty) = y_\infty$.

Correction de l’exercice 6262 ▲

Soit $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0,y_0,z_0) = (0,0)$ (par exemple $(1,1,1)$). f est C^1 car coordonnées polynomiales.

$$\mathrm{Mat}\,D_2 f(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_0 & 2z_0 \\ x_0 z_0 & x_0 y_0 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathrm{Mat}\,D_2 f(x_0,y_0,z_0)) = -2x_0(y_0^2+z_0^2) \neq 0$ car $x_0y_0z_0 = 1$ donc $x_0\neq 0, y_0\neq 0, z_0\neq 0$. D’après le théorème des fonctions implicites, il existe I intervalle contenant x_0 et $\varphi : I\to\mathbb{R}^2$ tel que $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour tout $x\in I$ et $\varphi(x_0) = (y_0,z_0)$.

Correction de l’exercice 6266 ▲

Posons $f(x,y) = x^4+y^3-x^2-y^2+x-y$, $f(0,0) = 0$ et $f(1,1) = 0$. $\mathbb{R}$ est un espace de Banach et f est de classe C^1 car polynomiale.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-2y-1$$

Étude au point $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$, c’est un isomorphisme de $\mathbb{R}$. Nous sommes dans les conditions d’application du théorème des fonctions implicites. Il existe I contenant 0, J contenant 0 et $g : I\to J$, C^1 tel que $g(0) = 0$ et $f(x,g(x)) = 0, \forall x\in I$. On a

$$x^4+(g(x))^3-x^2-(g(x))^2+x-g(x) = 0$$

En dérivant on obtient :

$$4x^3+3g^2(x)g'(x)-2x-2g(x)g'(x)+1-g'(x)=0$$

d'où $g'(0)=1$. On dérive encore :

$$12x^2+6g(x)g'(x)^2+3g^2(x)g''(x)-2-2g'(x)^2-2g(x)g''(x)-g''(x)=0$$

d'où

$$g''(0)=-4.$$

Étude au point $(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0$. Ce n'est plus un difféo, on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites. Dans ce cas, on prend la dérivée par rapport à la première variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x+1$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=3$. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe I contenant 1, J contenant 1 et $g:I\to J$ de classe C^1 tels que $g(1)=1$ et $f(g(x),x)=0,\forall y\in I$. On a

$$g(y)^4-g^2(y)+g(y)+y^3-y^2-y=0$$

En dérivant

$$4g^3g'-2gg'+g'+3y^2-2y-1=0$$

d'où $4g'(1)-g'(1)=0$ et donc $g'(1)=0$.

$$12g^2(g')^2+4g^3g''-2gg''-2(g')^2+g''+6y-2=0$$

d'où $g''(1)=-4/3$.

Correction de l'exercice 6318 ▲

(a) Remarque : si $x\in F$, alors clairement $\bar{x}=x$ convient.
Comme $F\neq\varnothing$, il existe un point $y_0\in F$ et posons $r=\|x-y_0\|\geqslant 0$ par hypothèse. On peut découper F en deux morceaux : $F_0=F\cap\bar{B}(x,r)$ et $F_1=F-F_0$. F_0 est non vide car il contient y_0. Quant aux points de F_1, ils sont tous à une distance de x strictement supérieure à r donc l'infimum de la distance sur F est l'infimum sur F_0 :

$$\inf_{z\in F}\|x-z\|=\inf_{z\in F_0}\|x-z\|\leqslant r$$

Or F_0 est fermé et borné, donc compact (car la dimension est finie), et la fonction $z\mapsto\|x-z\|$ étant continue, elle est bornée et atteint son minimum en un point y.
Question subsidiaire : $\bar{x}$ n'est pas unique (sauf dans certains cas, par exemple si F est convexe); contre-exemple : F est un cercle et x est son centre.

(b) i. On voit que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^4$ et que la fonction déterminant est $g:(a,b,c,d)\mapsto ad-bc$. Cette fonction est continue car polynomiale en les coordonnées donc $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})=g^{-1}(\{1\})$ est un fermé.

ii. La suite de matrices $M_n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sans être bornée ($\|M_n\|=\sqrt{2+n^2}$).

iii. A. C'est une conséquence directe du (1) en prenant pour x la matrice nulle.

B. Écrivons $f(M)=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$, alors $\nabla f(a,b,c,d)=\frac{1}{f(M)}(a,b,c,d)$, défini à condition que M ne soit pas la matrice nulle (qui n'appartient pas $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ donc il n'y a pas de problème).

C. En un extremum on doit avoir $\nabla f=\lambda\nabla g$ (extrema liés) donc

$$\frac{1}{\|M\|}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}d\\-c\\-b\\a\end{pmatrix}$$

ce qui n'est possible que si $\lambda = \varepsilon/\|M\|$ où $\varepsilon \in \{-1,+1\}$, et que $d = \varepsilon a$ et $c = -\varepsilon b$ donc $M = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$. Si l'on rajoute la contrainte $\det M = 1$, il vient que $\varepsilon = +1$ et $a^2+b^2 = 1$.

Donc les seuls extrema possibles sont de la forme $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, et pour toutes ces matrices $\|M_\theta\| = \sqrt{2}$.

Or d'après le (i) on sait que le minimum est atteint, et de plus il doit satisfaire la relation de Lagrange car les gradients sont bien définis. Il y a donc un infinité de minima (les rotations M_θ) et ils prennent la même valeur

$$\inf_{M\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \|M\| = \min_{M\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \|M\| = \sqrt{2}.$$

Correction de l'exercice 6329 ▲

(a) Soit λ_n et μ_n deux suites de points tels que $\varphi(\lambda_n) = \varphi(\mu_n) = 0$ et convergeant respectivement vers λ et μ, il reste à montrer que φ est nulle sur chaque interval $[\lambda_n,\mu_n]$. Soit c un extremum de φ sur cet interval, on a alors necessairement $\varphi'(c) = 0$ et donc $3c^{2/3} = 0$ et donc $c = 0$ et donc $\varphi(c) = \varphi(0) = 0$. Par conséquent le sup et le min de φ sur $[\lambda_n,\mu_n]$ sont nuls et donc φ est aussi nulle sur cet intervalle. En passant à la limite, on a prouvé que φ est nulle sur $]\lambda,\mu[$.

(b) On vérifie que les solutions proposées vérifient l'équation différentielle (1). La fonction $x^{2/3}$ est lipschitzienne par rapport à x dès que $x \neq 0$. Si φ_2 est une solution maximale sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi_2(0) = 0$, il existe alors nécessairement λ,μ (définis précédement) tels que φ_2 est nulle sur $]\lambda,\mu[$. Par continuité de la solution elle vérifie $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) = 0$. Mais alors $\varphi_2' - \varphi = 0$ est donc $\varphi_2 = \varphi + K$ où K est une constante donnée. Du fait que $\varphi_2(\lambda) = \varphi(\lambda)+K = 0+K = 0$, on a $K = 0$ ce qui termine la démonstration.

Correction de l'exercice 6330 ▲

(a) Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t,x) = |x|+|t|$. f est continue et Lipschitzienne par rapport à la seconde variable. En effet,

$$|f(t,x)-f(t,y)| = ||x|-|y|| \leqslant |x-y|.$$

Remarquons que $x' \geqslant 0$ pour tout t et que pour tout point $(0,x_0$ passe une solution maximale unique (φ,J).

(b) Prenons $x_0 = 1$, lorque $t \geqslant 0$; l'équation devient

$$x't() = x(t)+t$$

car $|t| = t$ et $x(t) \geqslant x(0) > 0, x(0) = 1$. Elle admet comme solution sur $[0,+\infty[$ avec $\varphi(0) = 1$

$$\varphi(t) = 2e^t - t - 1.$$

Lorsque $t < 0$, on distingue deux cas : premier cas $x(t) \geqslant 0$; $x' = -t + x(t)$ et alors $x(t) = ce^t + t + 1$ avec $x(0) = 1$ d'où $c = 0$ et $\varphi(t) = t+1$. Cela n'est valable que lorsque $\varphi(t) \geqslant 0$, c'est à dire $t \geqslant 1$. Donc $\varphi(t) = t+1$ sur $[-1,1]$. Deuxième cas : $x(t) \leqslant 0$, ceci a lieu lorsque $t \leqslant -1$ car φ croissante et $\varphi(-1) = 0$. Nous avons alors $\varphi'(t) = -t - \varphi(t)$. D'où $\varphi(t) = ce^{-t} - t + 1$ or $\varphi(-1) = ce + 2 = 0$ d'où $c = -2e^{-1}$ et $\varphi(t) = -2e^{-t+1} - t + 1$ sur $]-\infty,-1]$. La solution maximale vérifiant $\varphi(0) = 1$ est la suivante :

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - t - 1 \text{ sur } [0,+\infty[\\ t+1 \text{ sur } [-1,0] \\ -2e^{-(t+1)} - t + 1 \text{ sur }]-\infty,-1] \end{pmatrix}$$

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - 1 \text{ sur }]0,+\infty[\\ 1 \text{ sur }]-1,0[\\ 2e^{-(t+1)} - 1 \text{ sur }]-\infty,-1[\end{pmatrix}$$

En étudiant les limites de φ' aux point 0 et -1, on voit que φ' est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\varphi''(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \text{ sur }]0,+\infty[\\ 0 \text{ sur }]-1,0[\\ -2e^{-(t+1)} \text{ sur }]-\infty,-1[\end{pmatrix}$$

φ n'est donc pas deux fois dérivable en 0 et -1.

Correction de l'exercice 6331 ▲

$f(t,x) = \frac{4t^3x}{t^4+x^2}$ (si $(t,x) \neq (0,0)$) est de classe C^∞ en tant que quotient, somme et produit de fonctions C^∞.

(a) $|f(t,x)| = |2t|.|\frac{2t^2x=}{(t^2)^2+x^2}| \leqslant 2|t| \to_{(t,x)\to 0} 0 = f(0,0)$. f est donc continue en $(0,0)$. f n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $(0,0)$ car sinon il existerait $k,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $t \in]-\alpha,\alpha[$, $x \in]-\beta,\beta[$ et

$$|f(t,x) - f(t,0)| \leqslant k|x-0|$$

D'où $\frac{4t^3x}{t^4+x^2} \leqslant kx \Rightarrow \frac{4t^3}{t^4+x^2} \leqslant k \to \frac{4}{t} \leqslant k, \forall t \in]0,\alpha[$ ce qui est absurde. Nous ne pouvons pas appliquer Cauchy-Lipschitz.

(b) (φ, I) solution de (2) avec $0 \notin I$,

$$\psi(t) = t^{-2}\varphi(t) \Rightarrow \psi'(t) = t^{-2}\varphi'(t) - 2t^{-3}\varphi(t)$$

$$\psi'(t) = 4t^{-2}\frac{t^3\varphi(t)}{t^4+\varphi^2(t)} - 2t^{-1}\psi(t)$$

d'où en exprimant tout en fonction de ψ :

$$\frac{\psi'(t)(1+\psi^2(t))}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{2}{t}$$

Or $\frac{1+\psi^2(t)}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)}$ d'où

$$\psi'(t)(\frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)}) = \frac{2}{t}$$

En intégrant par rapport à t on obtient :

$$ln|\frac{\psi(t)}{1-\psi^2(t)}| = ln(t^2) + c$$

d'où

$$\frac{\psi(t)}{1-\psi(t)} = ct^2.$$

$\psi(t)$ vérifie est donc une racine de l'équation

$$ct^2\psi^2(t) + \psi(t) - ct^2 = 0$$

et donc

$$\psi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2ct^2}$$

d'où $\varphi = \frac{-1\pm\sqrt{1+4c^2t^4}}{2c}$.

Correction de l'exercice 6332 ▲

(a) Posons $y_1 = x$, $y_2 = x' = y_1'$, $y_3 = x'' = y_2'$. L'équation devient $y_3' - y_1y_3 = 0$ et donc en posant $f(t,y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1y_3 \end{pmatrix}$ l'équation s'écrit

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = f(t,y_1,y_2,y_3).$$

(b) f étant de classe C^∞, elle est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable (y_1,y_2,y_3) et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de conclure.

(c) La dérivée de la fonction donnée est nulle. Par conséquent, elle est constante et donc, l'exponentielle étant strictement positive, le signe de φ'' est constant. Si cette constante est strictement positive, φ est convexe, si elle est strictement négative, φ est concave. Si elle est nulle $\varphi'' = 0$ et donc $\varphi(t) = at+b$ qui est bien une solution de l'équation différentielle et vérifie $\varphi''(t_0) = 0$. L'unicité montre que toutes les solutions qui vérifient $\varphi''(t_0) = 0$ sont bien de la forme $at+b$.

Correction de l'exercice 6409 ▲

(a) Montrons que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a,b] \subset]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$. Donc $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$.
— Soit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} (a-\frac{1}{n}) \leqslant x \leqslant \lim_{n\to+\infty} (b+\frac{1}{n}),$$

c'est-à-dire $x \in [a,b]$. Donc $\bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[\subset [a,b]$ et on a démontré l'égalité entre ces deux ensembles.

(b) Montrons que $]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \subset]a,b[$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \subset]a,b[$.
— Soit $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$. Ainsi $x \in]a,b[$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \subset]a,b[$, d'où l'égalité de ces deux ensembles.

Correction de l'exercice 6410 ▲

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Montrons que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si} \quad f(x) < -A \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leqslant A \\ A & \text{si} \quad f(x) > A \end{cases}$$

est mesurable. Notons

$$E_1 := \{x \in \Omega \mid f(x) < -A\} = f^{-1}(]-\infty,-A[),$$
$$E_2 := \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leqslant A\} = f^{-1}([-A,A]),$$
$$E_3 := \{x \in \Omega \mid f(x) > A\} = f^{-1}(]A,+\infty[).$$

Comme $]-\infty,-A[$, $[-A,A]$, $]A,+\infty[$ appartiennent à la tribu borélienne et f est $(\Sigma$-$\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, les ensembles E_1, E_2, et E_3 appartiennent à Σ. Alors $f_A = f\cdot\mathbf{1}_{E_2} - A\cdot\mathbf{1}_{E_1} + A\cdot\mathbf{1}_{E_3}$ est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables.

Correction de l'exercice 6411 ▲

Soit $\Omega=\mathbb{N}$, $\Sigma=\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E)=\sharp E=\sum_{k\in E}1,$$

où $E\in\Sigma$. Soit $f\;:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Pour tout borélien E, $f^{-1}(E)$ appartient à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, donc f est $(\Sigma$-$\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Par définition de l'intégrale,

$$\int_\Omega f\,d\mu=\int_0^\infty \mu\left(S_f(t)\right)dt,$$

où $S_f(t)=\{n\in\Sigma,\,f(n)>t\}$. Pour tout $y\in[0,+\infty[$, posons $A_y:=\{n\in\mathbb{N},\,f(n)=y\}$. Alors

$$S_f(t)=\cup_{y>t}A_y$$

où l'union est disjointe et où A_y est vide sauf pour un ensemble dénombrable $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de valeurs de y. Par σ-additivité de la mesure μ,

$$\mu\left(S_f(t)\right)=\mu\left(\cup_{y_i>t}A_{y_i}\right)=\sum_{y_i>t}\mu\left(A_{y_i}\right)=\sum_{y_i>t}\mu\left(\{f=y_i\}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\,d\mu &= \int_0^\infty\sum_{y_i>t}\mu\left(\{f=y_i\}\right)dt=\sum_{i=0}^\infty\int_{0\leqslant t<y_i}\mu\left(\{f=y_i\}\right)dt\\ &= \sum_{i=0}^\infty y_i\cdot\mu\left(\{f=y_i\}\right)=\sum_{i=0}^\infty y_i\cdot\sharp\{n\in\mathbb{N},f(n)=y_i\}=\sum_{n=0}^\infty f(n).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6412 ▲

Soit φ une fonction simple positive :

$$\varphi=\sum_{j\in J}c_j\mathbf{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i\neq j$, $c_i\neq c_j$ et $E_i\cap E_j=\emptyset$.

(a) On a

$$\int_\Omega\varphi\,d\mu=\int_0^\infty\mu\left(S_\varphi(t)\right)dt,$$

où $S_\varphi(t)=\{x\in\Omega,\varphi(x)>t\}=\cup_{c_j>t}E_j$ et où $\mu\left(S_\varphi(t)\right)=\sum_{c_j>t}\mu\left(E_j\right)$. Ainsi

$$\int_\Omega\varphi\,d\mu=\int_0^\infty\sum_{c_j>t}\mu\left(E_j\right)dt=\sum_{j\in J}\int_0^{c_j}\mu\left(E_j\right)dt=\sum_{j\in J}c_j\mu(E_j).$$

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons

$$\begin{aligned}E_{k,n} &:= \{x\in\Omega,\;k2^{-n}\leqslant f(x)<(k+1)2^{-n}\}\quad\text{pour}\quad k=0,\dots,n2^n-1,\\ E_{n,n} &:= \{x\in\Omega,\;f(x)\geqslant n\}\quad\text{pour}\quad k=n2^n.\end{aligned}$$

Puisque f est mesurable, les ensembles $E_{k,n}$ appartiennent à Σ. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ fixé, les ensembles $E_{k,n}$, $0\leqslant k\leqslant n2^n-1$ sont deux à deux disjoints et $\cup_kE_{k,n}=\Omega$. Posons

$$\varphi_n=\sum_{k=0}^{n2^{-n}-1}k2^{-n}\mathbf{1}_{E_{k,n}}.$$

Alors φ_n est une fonction simple positive vérifiant $\varphi_n\leqslant f$. En outre $0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x\in\Omega$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$. De plus, $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=f(x)$ pour tout $x\in\Omega$.

Correction de l'exercice 6413 ▲

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$. Pour tout $E \in \Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A \cdot f\,d\mu.$$

Montrons que λ définit une mesure sur (Ω, Σ).

$1^{ère}$ *méthode :* On montre d'abord que l'affirmation est vraie pour les fonctions simples. D'après l'exercice 6412, toute fonction $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$ s'écrit $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$, où les φ_n sont des fonctions simples. Puisque le supremum d'une famille quelconque de mesure est une mesure, on conclut que λ est une mesure.

2^{de} *méthode :* On a clairement $\lambda(\emptyset) = 0$. Il suffit donc de vérifier la σ-additivité de λ. Soit $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ une suite d'éléments deux à deux disjoints. On a

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f\,d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f\,d\mu \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^\infty \mathbf{1}_{E_i}\right) f\,d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^\infty (\mathbf{1}_{E_i} f)\,d\mu \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega (\mathbf{1}_{E_i} f)\,d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f\,d\mu \\
&= \sum_{i=1}^\infty \lambda(E_i).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6414 ▲

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

(i) On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x)\,dx = \int_{|x|<1} |x|^{-p}\,dx = \int_{r=0}^1 \int_{\sigma \in \mathscr{S}_{n-1}} r^{n-p-1} dr d\sigma \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 r^{n-p-1}\,dr.
\end{aligned}$$

Pour $n \leqslant p$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = +\infty.$$

Pour $p < n$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[\frac{r^{n-p}}{(n-p)}\right]_0^1 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

(ii) Pour $a \in [0, +\infty[$,

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p} \mathbf{1}_{|x|<1} > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p} > a\} \cap \mathscr{B}(0,1),$$

où $\mathscr{B}(0,1)$ est la boule de centre 0 et de rayon 1. Ainsi

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, a^{-\frac{1}{p}} > |x|\} \cap \mathscr{B}(0,1).$$

On en déduit que $S_f(a) = \mathscr{B}(0,1)$ si $a^{-\frac{1}{p}} > 1$, i.e. si $a < 1$ et que $S_f(a)$ est égale à la boule $\mathscr{B}(0,a^{-\frac{1}{p}})$ de centre 0 et de rayon $a^{-\frac{1}{p}}$ lorsque $a \geqslant 1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \mu\left(S_f(a)\right) da = \int_0^1 \mu\left(\mathscr{B}(0,1)\right) da + \int_1^{+\infty} \mu\left(\mathscr{B}(0,a^{-\frac{1}{p}})\right) da \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_1^{+\infty} a^{-\frac{n}{p}}\,da.\end{aligned}$$

Si $p \geqslant n$, on obtient $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = +\infty$ et pour $p < n$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \left[\frac{a^{-\frac{n}{p}+1}}{-\frac{n}{p}+1}\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \left(1 + \frac{p}{n-p}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6415 ▲

cf Proposition 5.1. du polycopié de Marc Troyanov.

Correction de l'exercice 6416 ▲

Découle directement des définitions.

Correction de l'exercice 6417 ▲

(a) Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Alors $f_k = \sum_{n=1}^k g_n$ est une suite croissante de $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. D'après le théorème de convergence monotone

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n\,d\mu.$$

(b) Posons $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}$. Les g_n appartiennent à $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n\,d\mu.$$

Or d'une part,

$$\int_\Omega g_n\,d\mu = \int_\Omega x^{s-1}e^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}\,dx = \frac{1}{n^s}\int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-y}\,dy = \frac{1}{n^s}\Gamma(s),$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\Gamma(s) = \zeta(s)\Gamma(s).$$

D'autre part,

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx,$$

d'où l'égalité cherchée.

Correction de l'exercice 6418 ▲

Oui, le théorème de convergence monotone ne dit pas que l'intégrale de f est finie. On a bien

$$+\infty = \int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} n.$$

Correction de l'exercice 6419 ▲

Non, le théorème de convergence monotone ne s'applique pas à une suite décroissante de fonctions positives.

Correction de l'exercice 6420 ▲

Non, la suite de fonctions n'est pas même monotone.

Correction de l'exercice 6421 ▲

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ tel que $\forall n \geqslant N_\varepsilon$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

i.e. f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\inf \int_\Omega f_n\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\inf \; -\int_0^n \frac{1}{n}\,d\mu = -1.$$

D'autre part $\int_\Omega f\,d\mu = 0$. Le lemme de Fatou ne s'applique pas car les fonctions f_n ne sont pas à valeurs dans $[0,+\infty]$.

Correction de l'exercice 6422 ▲

(a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+\frac{x}{n})^n$ est une suite croissante et que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n a_{n,k}\frac{x^k}{k!},$$

où $\quad a_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$.

Les assertions suivantes sont vraies :

i) $a_{n+1,k} \geqslant a_{n,k}$. En effet, $\frac{n+1-l}{n+1} \geqslant \frac{n-l}{n}$ pour $l\in\mathbb{N}$ car $n^2+n-l\cdot n \geqslant n^2+n-l\cdot n-l$,

ii) $a_{n,k} < 1$ (évident) ;

iii) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1$.

Comme $a_{n+1,n+1} > 0$, $\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}\dfrac{x^k}{k!} > \sum_{k=0}^{n} a_{n+1,k}\dfrac{x^k}{k!}$. Il s'ensuit donc de (i) que la suite $\left\{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right\}$ est croissante. Les assertions (ii) et (iii) impliquent que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n a_{n,k}\frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} = e^x$$

et que, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^m \dfrac{x^k}{k!}$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

(b) Par le théorème de convergence monotone, on a pour $b > 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+}\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n e^{-bx}d\lambda(x)$$
$$= \int_0^\infty e^{(1-b)x}d\lambda(x) = \tfrac{1}{b-1}.$$

Correction de l'exercice 6423 ▲

On a

$$\mu(f=+\infty) = \mu\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{f\geqslant n\}\right).$$

Puisque les ensembles $A_n := \{f \geqslant n\}$ vérifient $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ et $\mu(A_i) < +\infty$ ($i = 1,2,\ldots$), par continuité de la mesure, on a :

$$\mu(f=+\infty) = \lim_{n\to+\infty}\mu(f\geqslant n).$$

Or, comme f est à valeurs positives, les fonctions f_n définies par $f_n = n\mathbf{1}_{\{f\geqslant n\}}$ vérifient $f_n \leqslant f$. Ainsi

$$\int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega n\mathbf{1}_{\{f\geqslant n\}}\,d\mu = n\mu(f\geqslant n) \leqslant \int_\Omega f\,d\mu < +\infty.$$

On en déduit que

$$\mu(f\geqslant n) \leqslant \frac{1}{n}\int_\Omega f\,d\mu \to 0,$$

donc

$$\mu(f=+\infty) = 0.$$

Correction de l'exercice 6424 ▲

Puisque $\mu(\Omega) < +\infty$, la fonction constante égale à C est intégrable, d'intégrale $C\mu(\Omega)$. Une application directe du théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu.$$

Correction de l'exercice 6425 ▲

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Comme $\cos(\pi x) < 1$ si $x \notin \mathbb{Z}$, $\cos^n(\pi x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ presque partout (pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$). Notons $f_n(x) = f(x)\cos^n(\pi x)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$ et comme $|f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\mathbb{R} f(x)\cos^n(\pi x)d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty}\int_\mathbb{R} f_n(x)d\lambda(x) = \int_\mathbb{R}\lim_{n\to\infty} f_n(x)d\lambda(x) = 0.$$

Correction de l'exercice 6426 ▲

(a) Par définition, $f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ si et seulement si f_+ et f_- sont intégrables. On note que $|f| = f_+ + f_-$. Donc $f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu) \Rightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. Réciproquement, on a $0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$, donc $|f| \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu) \Rightarrow f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. D'autre part :

$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| = \left|\int_\Omega f_+\,d\mu - \int_\Omega f_-\,d\mu\right| \leqslant \int_\Omega f_+\,d\mu + \int_\Omega f_-\,d\mu = \int_\Omega |f|\,d\mu.$$

(b) Par monotonie de l'intégrale, on a

$$\int_\Omega |f|\,d\mu \;\leqslant\; \int_\Omega |g|\,d\mu < +\infty.$$

D'après la question (a), il en découle que f est intégrable.

(c) Définissons $z = \int_\Omega f\,d\mu$. Comme z est un nombre complexe, il s'écrit $z = |z|e^{i\theta}$. Soit u la partie réelle de $e^{-i\theta}f$. On a $u \leqslant |e^{-i\theta}f| = |f|$. Donc

$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \;=\; e^{-i\theta}\int_\Omega f\,d\mu \;=\; \int_\Omega e^{-i\theta}f\,d\mu \;=\; \int_\Omega u\,d\mu \;\leqslant\; \int_\Omega |f|\,d\mu,$$

où la troisième égalité découle du fait que le nombre $\int_\Omega e^{-i\theta}f\,d\mu$ est réel donc est l'intégrale de la partie réelle de $e^{-i\theta}f$ c'est-à-dire de u.

Correction de l'exercice 6427 ▲

On cherche une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour μ-presque tout $x \in \Omega$, étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ (dépendant à priori de x) vérifiant $j \geqslant k \Rightarrow |f_{n_j}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Il suffit de montrer que pour μ-presque tout x, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $j \geqslant k \Rightarrow |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^j} \leqslant \frac{1}{2^k}$. Cela revient à montrer que le complémentaire de l'ensemble

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j\geqslant k} \left\{ |f_{n_j} - f| < \frac{1}{2^j} \right\}$$

est de mesure nulle. Or

$$A^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j\geqslant k} \left\{ |f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{2^j} \right\}.$$

Posons $B_k := \bigcup_{j\geqslant k} \left\{ |f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{2^j} \right\}$. On a $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \ldots$ avec B_1 de mesure fini ; donc par continuité de la mesure, il vient :

$$\mu(A^c) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k).$$

Par σ-additivité, on a :

$$\mu(B_k) \;\leqslant\; \sum_{j\geqslant k} \mu\left(\left\{ |f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{2^j} \right\} \right).$$

On définit alors la sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. Puisque f_n converge vers f en mesure, il existe un indice n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$,

$$\mu\left(\left\{ |f_n - f| \geqslant \frac{1}{2} \right\} \right) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Il existe un indice $n_2 > n_1$ tel que pour $n \geqslant n_2$,

$$\mu\left(\left\{ |f_n - f| \geqslant \frac{1}{2^2} \right\} \right) \leqslant \frac{1}{2^2},$$

et ainsi de suite : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $n_k > n_{k-1}$, tel que pour $n \geqslant n_k$

$$\mu\left(\left\{ |f_n - f| \geqslant \frac{1}{2^k} \right\} \right) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Pour cette sous-suite on a alors :

$$\mu(B_k) \;\leqslant\; \sum_{j\geqslant k} \mu\left(\left\{ |f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{2^j} \right\} \right) \;\leqslant\; \sum_{j\geqslant k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

On a bien
$$\mu(A^c) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = 0.$$

Correction de l'exercice 6428 ▲

La fonction de Dirichlet restreint à l'intervalle $[a,b]$, $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\big|_{[a,b]}(x)$, est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue vaut 0. Mais elle n'est pas intégrable au sens de Riemann : $\underline{S}(f,\tau) = 0$ et $\overline{S}(f,\tau) = b-a$ pour toute subdivision τ de l'intervalle $[a,b]$.

Correction de l'exercice 6429 ▲

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}.$$
En effet, comme $\ln y \leqslant y-1$ pour $y>0$, on a $\ln y^{-\frac{1}{n}} \leqslant y^{-\frac{1}{n}}-1$, c'est-à-dire $\left(1-\frac{\ln y}{n}\right)^n \leqslant y^{-1}$. Ainsi, en posant $x=\ln y$, il vient $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$. De plus,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right)},$$
où $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.
Posons $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m \mathbf{1}_{[0,n]}$. Alors en utilisant le théorème de convergence dominée et sachant que $\Gamma(m+1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^m dx = m!$, on obtient le résultat.

(b) Soit $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,n]}$. Comme la suite $\{f_n(x)\}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, on obtient le résultat en appliquant le théorème de convergence monotone.

Correction de l'exercice 6430 ▲

Cf le théorème 24.2 dans le polycopié de Marc Troyanov.

Correction de l'exercice 6431 ▲

(a) Notons $g(x,y) = e^{-ixy}f(x)$. Alors,
   i.) pour tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto g(x,y)$ est mesurable ;
   ii.) pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ (pour tout les $x\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est finie) la fonction $y\mapsto g(x,y)$ est continue pour tout $y\in\mathbb{R}$;
   iii.) $|g(x,y)| = |e^{-ixy}f(x)| \leqslant |f(x)|$ et $|f|\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$.

On doit montrer que pour tout suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y, on a $\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(y_n) = \hat{f}(y)$. Posons $g_n(x) = g(x,y_n)$. D'après le théorème de convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(y_n) := \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)dx =: \hat{f}(y).$$
Ainsi $\hat{f}$ est continue.

(b) Pour tout $y\in\mathbb{R}$, $|\hat{f}(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |e^{-ixy}f(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \|f\|_{L_1}$ et donc
$$\sup|\hat{f}| \leqslant \|f\|_{L_1}.$$

(c) Soit $g(x,y) = e^{-ixy}f(x)$. Alors, on a
   i.) pour tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto g(x,y)$ est intégrable ;

ii.) pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est dérivable pour tout $y \in \mathbb{R}$;

iii.) $|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}| = |-ixe^{-ixy}f(x)| \leqslant |xf(x)|$ avec $x \mapsto xf(x)$ intégrable.

Ainsi, d'après l'exercice 6430 (le théorème de dérivation sous le signe $\int$), on a

$$\frac{d}{dy}\hat{f} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}(-ixf(x))dx = \widehat{-iyf(y)}.$$

Correction de l'exercice 6432 ▲

On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy &= \int_{-1}^{1}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dy \\ &= -\int_{-1}^{1}\frac{2}{(1+y^2)}dy = -2\arctan y\Big|_{-1}^{1} = -\pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{y}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\frac{2}{(x^2+1)}dx = 2\arctan x\Big|_{-1}^{1} = \pi.\end{aligned}$$

Il n'y a pas de contradiction avec le théorème de Fubini car la fonction f n'appartient pas à $\mathscr{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$. En effet, soit $S_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$. On a

$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]}|f|d\mu \geqslant \int_{S_\varepsilon}|f|d\mu = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta = -4\log\varepsilon \to \infty$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, et donc $f \notin \mathscr{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$.

Correction de l'exercice 6433 ▲

Le théorème de Tonelli donne :

$$\int_{[0,1]\times(0,+\infty)}|e^{-y}\sin 2xy|\,dxdy \leqslant \int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy = 1 < +\infty,$$

ce qui prouve que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}\sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times(0,+\infty)$.

Le théorème de Fubini donne alors la valeur I de l'intégrale de cette fonction :

$$I = \int_0^1 dx\int_0^{+\infty}e^{-y}\sin 2xy\,dy \overset{\text{(IPP)}}{=} \int_0^1(2x)(1+4x^2)^{-1}\,dx = \frac{\log 5}{4}$$

$$I = \int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy\int_0^1\sin 2xy\,dx = \int_0^{+\infty}e^{-y}\,\frac{\sin^2 y}{y}\,dy.$$

Correction de l'exercice 6434 ▲

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue. L'identité $f*g(x) = g*f(x)$ s'obtient par changement de variable. En ce qui converne l'inégalité $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1\,\|g\|_p$, on distingue les cas en fonction de la valeur de p.

(a) Pour $p = +\infty$, c'est clair.

(b) Supposons que $p=1$ et posons $F(x,y)=f(x-y)g(y)$. Pour presque tout $y\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dx=|g(y)|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,dx=|g(y)|\cdot\|f\|_1,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n}dy\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dx=\|f\|_1\,\|g\|_1.$$

D'après le théorème de Tonelli, $F\in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dy<+\infty \qquad \text{pour presque tout } x\in\mathbb{R}^n,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n}dx\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dy\leqslant\|f\|_1\,\|g\|_1.$$

Ainsi,

$$\|f*g\|_1=\int_{\mathbb{R}^n}dx|f*g(x)|=\int_{\mathbb{R}^n}dx\left|\int_{\mathbb{R}^n}F(x,y)\,dy\right|\leqslant\|f\|_1\,\|g\|_1.$$

(c) Supposons que $1<p<+\infty$. Utilisons le cas précédent, en faisant jouer ici à g^p le rôle alors joué par g. Alors pour presque tout $x\in\mathbb{R}^n$ fixé, la fonction $y\mapsto|f(x-y)||g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, i.e. la fonction $y\mapsto|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit p' tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. La fonction $y\mapsto|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$ appartient à $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ car $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ et la mesure de Lebesgue est invariante par translation. D'après l'inégalité de Hölder,

$$|f(x-y)|\,|g(y)|=|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|\cdot|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}\in L^1(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,|g(y)|\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,|g(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\|f\|_1^{\frac{1}{p'}},$$

ainsi

$$|(f*g)(x)|^p\leqslant(|f|*|g|^p)(x)\cdot\|f\|_1^{\frac{p}{p'}}.$$

D'après le cas précédent, on voit que

$$f*g\in L^p(\mathbb{R}^n)\quad\text{et}\quad\|f*g\|_p^p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p^p\cdot\|f\|_1^{\frac{p}{p'}},$$

c'est-à-dire

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\cdot\|g\|_p.$$

Correction de l'exercice 6435 ▲

Soient $a,b>0$, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x)=e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x)=e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. On a

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\,g(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\left(\frac{a|x-y|^2+b|y|^2}{2}\right)}\,dy$$

Or

$$\begin{aligned}
a|x-y|^2+b|y|^2 &= \sum_{i=1}^n ax_i^2+(a+b)y_i^2-2ax_iy_i\\
&= \sum_{i=1}^n ax_i^2+(a+b)\left(y_i-\frac{a}{a+b}x_i\right)^2-(a+b)\left(\frac{ax_i}{a+b}\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^n\left(a-\frac{a^2}{a+b}\right)x_i^2+(a+b)\left(y_i-\frac{a}{a+b}x_i\right)^2\\
&= \frac{ab}{a+b}|x|^2+(a+b)\left|y-\frac{a}{a+b}x\right|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f*g(x) \quad = \quad e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(a+b)}{2}\left|y-\frac{a}{a+b}x\right|^2}dy = e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(a+b)}{2}|z|^2}dz$$

car la mesure de Lebesgue est invariante par translation. En utilisant $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, on obtient alors :

$$f*g(x) = \left(\frac{2\pi}{a+b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}.$$

Correction de l'exercice 6436 ▲

(a) Pour tout $t>0$, on pose :

$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

i. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}}\,dx_i.\end{aligned}$$

Sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1.$$

ii. Soit $\varepsilon>0$. Puisque f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, il existe un $R>0$ tel que

$$\int_{\mathscr{B}(0,R)^c} f_1(x)\,dx < \varepsilon.$$

On remarque que $f_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(x)\,dx &= \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} t^{-\frac{n}{2}} f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)dx = t^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathscr{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\,t^{\frac{n}{2}}\,dz \\ &= \int_{\mathscr{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\,dz \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

dès que $t<\frac{\delta^2}{R^2}$.

(b) Soit g une fonction continue bornée. Alors il existe $M>0$ tel que $|g|<M$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_t(x-y)\,g(y)|\,dy \leqslant M\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x-y)\,dy = M < +\infty,$$

ainsi $y\mapsto f_t(x-y)\,g(y)$ est intégrable et f_t*g est bien définie. Puisque $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1$, on a

$$\begin{aligned}|f_t*g(x)-g(x)| &= \left|\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)g(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)g(x)\,dy\right| \\ &\leqslant \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. Puisque g est continue en $x\in\mathbb{R}^n$, il existe $\delta>0$ tel que $|y|<\delta \Rightarrow |g(x-y)-g(x)|<\varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}|f_t*g(x)-g(x)| &\leqslant \int_{\mathscr{B}(0,\delta)} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy \\ &\quad + \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy \\ &\leqslant \varepsilon\int_{\mathscr{B}(0,\delta)} f_t(y)\,dy + 2M\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy \\ &\leqslant \varepsilon + 2M\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy.\end{aligned}$$

D'après la question 1.(b), il existe $t_0 > 0$ tel que pour $t < t_0$, $\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$. Ainsi pour $t < t_0$,

$$|f_t * g(x) - g(x)| < 2\varepsilon,$$

i.e.

$$\lim_{t\to 0} f_t * g(x) = g(x).$$

Correction de l'exercice 6437 ▲

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i (y,x)}\, dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

(a) On a $\|\hat{g}\|_\infty \leqslant \|g\|_1$, ce qui implique que $f\hat{g}$ est intégrable. De même $\hat{f}g$ est intégrable. De plus $F(x,y) = f(x)g(y)e^{-2\pi i(x,y)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} dx\, f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i(x,y)}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy\, g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x,y)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) g(y)\,dx.\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f*g(y)\, e^{-2\pi i(x,y)}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy\, e^{-2\pi i(x,y)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\,g(z)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,y-z)} e^{-2\pi i(x,z)} f(y-z)\,g(z)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,u)} f(u)\,du \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,z)}\,g(z)\,dz \\ &= \hat{f}(x)\,\hat{g}(x).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6438 ▲

Supposons tout d'abord $n = 1$. Soit la gaussienne définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}$, où $a > 0$. Posons

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i t x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi i t x}\,dx.$$

D'après le théorème de convergence dominée, h est dérivable et

$$\begin{aligned}h'(t) &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi i t x}\,dx = \left[2\pi i \frac{1}{a} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi i t x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + (2\pi i)^2 t \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi i t x}\,dx \\ &= -(2\pi)^2 \frac{1}{a} t \cdot h(t).\end{aligned}$$

De plus,

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,du \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.$$

La solution de l'équation différentielle $h'(t) = -(2\pi)^2 \frac{1}{a} t \cdot h(t)$ avec condition initiale $h(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}$ est

$$h(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{t^2}{2}}.$$

Pour $n>1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(t,x)}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{a|x|^2}{2}}e^{-2\pi i(t,x)}\,dx\\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax_i^2}{2}}e^{-2\pi i t_i x_i}\,dx_i = \prod_{i=1}^n h(t_i) = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)^n e^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{|t|^2}{2}}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6439 ▲

- Si K est le support de f, $f*g(x)=\int_K f(t)g(x-t)\,dt$ est bien défini. De plus, $|f*g(x)-f*g(y)|\leqslant \int_K |f(t)||g(x-t)-g(y-t)|\,dt \leqslant C\|f\|_{L^1}|x-y|^\alpha$, d'où le résultat. Si g est dérivable, alors $f*g$ aussi et $(f*g)'=f*(g')$. Donc si $g\in C^{k,\alpha}$, $f*g\in C^k$ et sa dérivée k-ième étant $f*(g^{(k)})$, elle est höldérienne par le même argument.
- Même argument ; les produits de convolution sont bien définis et bornés car $f\in L^1$ et les dérivées de g sont dans L^∞.

Correction de l'exercice 6440 ▲

(a) Soit $a,b\geqslant 0$ et soit $p,q\in(1,+\infty)$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. La fonction $\theta\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définit par $\theta(a)=\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q-ab$ est dérivable et :

$$\theta'(a)=a^{p-1}-b.$$

Cette dérivée s'annule lorsque $a=b^{\frac{1}{p-1}}$, est négative pour $a<b^{\frac{1}{p-1}}$ et positive pour $a>b^{\frac{1}{p-1}}$. On a

$$\theta(b^{\frac{1}{p-1}})=\frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{q}b^q-b^{1+\frac{1}{p-1}}=0.$$

Ainsi $\theta(a)\geqslant 0$, i.e.

$$ab\leqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

(b) Soit $f\in L^p(\mu)$ et $g\in L^q(\mu)$. D'après la question précédente, pour tout $\lambda>0$ et pour μ-presque tout x :

$$|fg|(x)=|\lambda f(x)\cdot\frac{g(x)}{\lambda}|\leqslant \frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p+\frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q.$$

Ainsi

$$\int_\Omega |fg|\,d\mu\leqslant \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu+\frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$

Posons

$$\Phi(\lambda)=\frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu+\frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$

La fonction Φ est dérivable et :

$$\Phi'(\lambda)=\lambda^{p-1}\|f\|_p^p-\lambda^{-q-1}\|g\|_q^q.$$

Cette dérivée s'annule pour $\lambda_1:=\left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$, est négative pour $\lambda\leqslant\lambda_1$ et positive pour $\lambda\geqslant\lambda_1$. Ainsi le minimum de Φ vaut :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_1) &= \tfrac{1}{p}\left(\tfrac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{p}{p+q}}\|f\|_p^p+\tfrac{1}{q}\left(\tfrac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{-\frac{q}{p+q}}\|g\|_q^q\\ &= \tfrac{1}{p}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}}+\tfrac{1}{q}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}}=\|f\|_p\|g\|_q.\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité de Hölder :

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Si $f \in L^1(\mu)$ et $g \in L^\infty(\mu)$, alors $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ pour presque tout $x \in \Omega$ et

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leqslant \|g\|_\infty \int_\Omega |f| \, d\mu,$$

i.e. $\|fg\|_1 \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1$.

(c) Soient $p, p' \in [1, +\infty)$. On suppose $p < p'$. Soit $p < r < p'$. On a

$$|f|^r = |f|^r \mathbf{1}_{|f|>1} + |f|^r \mathbf{1}_{|f|<1} \;\leqslant\; |f|^{p'} \mathbf{1}_{|f|>1} + |f|^p \mathbf{1}_{|f|<1}.$$

On en déduit que

$$\int_\Omega |f|^r \, d\mu \;\leqslant\; \int_\Omega |f|^{p'} \, d\mu + \int_\Omega |f|^p \, d\mu \;< +\infty,$$

donc f appartient à $L^r(\mu)$.

(d) Supposons que μ soit une mesure finie et soit $f \in L^\infty(\mu)$. Alors

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Ainsi pour tout p

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \;\leqslant\; \|f\|_\infty^p \int_\Omega 1 \, d\mu \;=\; \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) \;<\; +\infty,$$

ce qui implique que $f \in L^p(\mu)$. En particulier, f appartient à l'intersection $\bigcap_{p \geqslant 1} L^p(\mu)$. De plus, pour tout p, on a :

$$\|f\|_p \;\leqslant\; \|f\|_\infty \, \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui implique que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \;\leqslant\; \|f\|_\infty.$$

D'autre part, pour tout $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, on a

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \;\geqslant\; \int_{|f|>(\|f\|_\infty - \varepsilon)} |f|^p \, d\mu \;\geqslant\; (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \, \mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\Big).$$

Ainsi pour tout p, il vient

$$\|f\|_p \;\geqslant\; (\|f\|_\infty - \varepsilon) \, \mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque $\lim_{p \to +\infty} \mu \left(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\right)^{\frac{1}{p}} = 1$, il en découle que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \;\geqslant\; \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \;\geqslant\; \|f\|_\infty,$$

donc finalement $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(e) Posons $f_1 := f^r$ et $g_1 := g^r$. On a $f_1 \in L^{\frac{p}{r}}(\mu)$ et $g_1 \in L^{\frac{q}{r}}(\mu)$. Notons que l'identité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ entraîne que $\frac{p}{r}, \frac{q}{r} > 1$ et que les nombres $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ sont conjugués au sens de Young. Par l'inégalité de Hölder on a donc

$$\int_\Omega (fg)^r d\mu = \int_\Omega f_1 g_1 \, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega f_1^{\frac{p}{r}} d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega g_1^{\frac{q}{r}} d\mu \right)^{\frac{r}{q}} = \left(\int_\Omega f^p d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega g^q d\mu \right)^{\frac{r}{q}}.$$

D'où, finalement,

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Correction de l'exercice 6441 ▲

(a) *Cas de $L^\infty(\mu)$.*

i. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Pour $k,m,n\geqslant 1$, soient les ensembles

$$A_k := \{x\in\Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}\ ;\quad B_{m,n} := \{x\in\Omega, |f_m(x)-f_n(x)| > \|f_m-f_n\|_\infty\},$$

et $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$. Par définition de la norme infinie, les ensembles A_k et $B_{n,m}$ sont de mesure nulle. Par σ-sous-additivité de μ, on a

$$\mu(E) \leqslant \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

ii. Sur $\Omega\setminus E$, on a :

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n - f_m| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty,$$

i.e. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy uniforme sur $\Omega\setminus E$. En particulier, pour tout $x\in\Omega\setminus E$, la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy réelle, donc est convergeante car $\mathbb{R}$ est complet. Notons f la limite ponctuelle de f_n sur $\Omega\setminus E$. Montrons que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le complémentaire de E. On a

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un rang N_ε tel que pour $n,m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Alors pour $n > N_\varepsilon$,

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Il est découle que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\Omega\setminus E$.

iii. Étendons la fonction f à Ω en posant $f=0$ sur E. Il reste à montrer que la fonction f appartient à $L^\infty(\mu)$. Pour $n > N_\varepsilon$, et $x\in\Omega\setminus E$, on a

$$|f(x)| < |f_n(x)| + \varepsilon \leqslant \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leqslant \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon < +\infty$. Ainsi $L^\infty(\mu)$ est complet.

(b) *Cas de $L^p(\mu)$.*

i. Soit $1\leqslant p < +\infty$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Il existe n_1 tel que pour $n,m\geqslant n_1$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-1}$. On prend ensuite $n_2 > n_1$ tel que pour $n,m\geqslant n_2$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-2}$, et ainsi de suite, pour tout k, il existe un $n_k > n_{k-1}$ tel que $n,m\geqslant n_k \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < 2^{-k}$.

ii. Posons

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

où g est à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Pour tout $k\geqslant 1$, on a

$$\|g_k\|_p = \|\sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|\ \|_p.$$

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|g_k\|_p \leqslant \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} < 1.$$

D'après le lemme de Fatou, on en déduit que $\|g\|_p \leqslant 1$.

iii. Comme $\int_\Omega |g|^p \, d\mu < +\infty$, nécessairement $|g| < +\infty$ μ-pp, i.e. pour presque tout $x \in \Omega$ la série

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

est absolument convergente. Notons $f(x)$ sa somme lorsque celle-ci est finie et posons $f(x) = 0$ sinon. On a :

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = f_{n_k}$$

et $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k} \quad \mu - \text{pp}$.

iv. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\mu)$, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que pour $n, m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Pour $m > N_\varepsilon$ on a par le lemme de Fatou :

$$\int_\Omega |f - f_m|^p \, d\mu = \int_\Omega |\lim_{k\to+\infty} f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leqslant \lim \inf_{k\to+\infty} \int_\Omega |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon^p.$$

Ainsi $f - f_m \in L^p(\mu)$ et $\|f - f_m\|_p \to 0$ quand $m \to +\infty$. De plus, d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|f\|_p = \|(f - f_m) + f_m\|_p \leqslant \|(f - f_m)\|_p + \|f_m\|_p < +\infty,$$

c'est-à-dire $f \in L^p(\mu)$. En conclusion $L^p(\mu)$ est complet.

Correction de l'exercice 6442 ▲

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. La fonction $\varphi(t) = |f(x) + \tan(x)|^p$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x) + \tan(x) + hg(x)|^p - |f(x) + \tan(x)|^p}{h} = p|f(x) + \tan(x)|^{p-2}(f(x) + \tan(x))g(x),$$

lorsque $f(x)$ et $g(x)$ ont un sens, c'est-à-dire pour presque tout x. De plus, d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\frac{|f(x) + \tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t} = \varphi'(t_0) = p|f(x) + t_0 g(x)|^{p-2}(f(x) + t_0 g(x))g(x),$$

pour un certain t_0 compris entre 0 et t. Ainsi pour $|t| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{|f(x)+\tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t}\right| &= p|f(x) + t_0 g(x)|^{p-1}|g(x)| \\
&\leqslant p\left(|f(x)| + |g(x)|\right)^p \\
&\leqslant 2^{p-1} p\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right),
\end{aligned}$$

où la première inégalité découle de l'inégalité triangulaire et de la majoration $|g(x)| \leqslant (|f(x)| + |g(x)|)$, et où la deuxième inégalité provient de la convexité de la fonction $x \mapsto x^p$ pour $p > 1$ impliquant en particulier : $\left(\frac{u+v}{2}\right)^p \leqslant \frac{u^p}{2} + \frac{v^p}{2}$. Il en découle que $t \mapsto \frac{|f(x)+\tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t}$ est uniformément bornée par une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée permet alors de dériver sous le signe somme et

$$\frac{dN}{dt}_{t=0} = p \int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) \, d\mu.$$

Correction de l'exercice 6443 ▲

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, notons $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p(x) \, dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0 \ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

(a) Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p(x)\,dx \leqslant \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$

ainsi $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ pour tout p et $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$. Montrons que si $q \leqslant p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$, on a par exemple :

$$\begin{aligned}
\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx &= \int_{\{|f|\geqslant 1\}} |f|^q(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} |f|^q(x)\,dx \\
&\leqslant \int_{\{|f|\geqslant 1\}} |f|^p(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} 1\,dx \\
&\leqslant \|f\|_p^p + \mu(\Omega) < +\infty.
\end{aligned}$$

Ou encore, en utilisant l'inégalité de Hölder pour les réels conjugués $r = \frac{p}{q} > 1$ et $r' = \frac{p}{p-q}$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx &= \left(\int_\Omega |f|^{q\cdot\frac{p}{q}}(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}}(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&= \|f\|_p^q\, \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}},
\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{qp}}.$$

En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$:

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

(b) Montrons que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathscr{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ est stricte. La fonction f_α appartient à $L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$ si et seulement $\alpha \leqslant 0$, et à $L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$ avec $p < +\infty$ si et seulement si

$$p\alpha - n + 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p}$$

Soit $1 \leqslant q < p$, alors $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ appartient à $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$. En particulier, $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ appartient à $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$.

Correction de l'exercice 6444 ▲

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞.

(a) Montrons que si $q \leqslant p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Comme

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty,$$

il existe un rang N tel que pour $n > N$, $|u_n|^q < 1$. En particulier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^∞ et

$$\|u\|_\infty \leqslant \max\{u_0, \dots, u_N, 1\}.$$

De plus, pour $n > N$, on a $|u_n|^p \leqslant |u_n|^q$ et

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^p \leqslant \sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^q \leqslant \|u\|_q^q < +\infty,$$

ce qui implique que $\|u\|_p < +\infty$. En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$, on a :

$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$

(b) La suite $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$ appartient à ℓ^∞ pour tout $\alpha \geqslant 0$ et à ℓ^p avec $1 \leqslant p < +\infty$ si et seulement si $\alpha p > 1$, i.e $\alpha > \frac{1}{p}$. En particulier la suite constante égale à 1 appartient à ℓ^∞ mais n'appartient à aucun ℓ^p pour $p < +\infty$. Soit $1 < q < p < +\infty$. Pour tout α tel que $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$, la suite $u^{(\alpha)}$ appartient à $\ell^p \setminus \ell^q$. C'est le cas en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$. Ainsi l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte lorsque $q < p$.

Correction de l'exercice 6445 ▲

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(a) — La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $2\alpha p > n$.

— La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p\beta < n$.

— Soit $1 \leqslant q < p \leqslant +\infty$. La fonction

$$f(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{n}{p+q}}$$

vérifient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$. La fonction

$$g(x) = |x|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

vérifient $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) — Soit $1 \leqslant q < p < +\infty$ et f_n une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$. Comme $\|\cdot\|_p \leqslant \|\cdot\|_{p,q}$, f_n est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, donc elle converge vers une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$. De même, $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_{p,q}$, donc f_n converge vers une fonction $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_q$. De plus, il existe une sous-suite de f_{n_k} qui converge vers f presque-partout et il existe une sous-suite de f_{n_k} qui converge vers g presque-partout. Ainsi $f = g$ μ-p.p. et f_n converge vers $f = g$ dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$.

— Soit r tel que $q < r < p$. Montrons que

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. Puisque $1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha)r}{q}$, les réels $p' = \frac{p}{\alpha r}$ et $q' = \frac{q}{(1-\alpha)r}$ sont conjugués. D'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{r\alpha}(x)\cdot|f|^{(1-\alpha)r}(x)\,dx \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\alpha r p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(1-\alpha)rq'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x)\,dx\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} \\
&\leqslant \|f\|_p^{\alpha r}\|f\|_q^{(1-\alpha)r},
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{(1-\alpha)}$. On peut également écrire $r = \beta q + (1-\beta)p$ avec $\beta \in]0,1[$ et appliquer Hölder avec les réels conjugués $\frac{1}{\beta}$ et $\frac{1}{1-\beta}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\beta q}(x)\cdot|f|^{(1-\beta)p}(x)\,dx \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x)\,dx\right)^{\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)^{(1-\beta)},
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_q^{\frac{q\beta}{r}} \|f\|_p^{\frac{p(1-\beta)}{r}}$$

qui est l'inégalité cherchée car $\alpha = \frac{p\beta}{r}$ vérifie bien $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

— Si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^q(\mathbb{R}^n)$, donc dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ d'après l'inégalité précédente. En conclusion, $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ donc un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.

(c) Soit $f\in L^p([0,+\infty[)\cap L^q([0,+\infty[)$ et h la fonction définie par $h(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}f(r)$. On notera p' le conjugué de p et q' le conjugué de q. Montrons que h appartient à $L^1([0,+\infty[)$. On a :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr=\int_0^R\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr+\int_R^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr$$
$$\leqslant\left(\int_0^R r^{-\frac{p'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^R|f(r)|^p\,dr\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_R^{+\infty}r^{-\frac{q'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_R^{+\infty}|f(r)|^q\,dr\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{1-\frac{p'}{2}}\right)^{\frac{1}{p'}}R^{\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_p+\left(\frac{1}{\frac{q'}{2}-1}\right)^{\frac{1}{q'}}R^{\left(\frac{1}{q'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_q.$$

En optimisant par rapport à R, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr\quad\leqslant\quad C_{p,q}\|f\|_p^{1-\gamma}\|f\|_q^{\gamma},$$

où, en posant $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$ et $\beta=\frac{1}{q}-\frac{1}{2}$, on a $\gamma=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, et $C_{p,q}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha^\gamma\beta^{1-\gamma}}\left(1-\frac{p'}{2}\right)^{-\frac{1-\gamma}{p'}}\left(\frac{q'}{2}-1\right)^{-\frac{\gamma}{q'}}$.

Correction de l'exercice 6446 ▲

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{[n,2n]}(x).$$

(a) Quelque soit g continue à support compact,

$$\int_{[0,+\infty[}f_n(x)g(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{2n}g(x)\,dx\to 0$$

quand $n\to+\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, f_n converge faiblement vers 0. D'autre part, f_n converge presque partout vers 0. Supposons que f_n converge fortement vers une fonction f dans $L^2([0,+\infty[)$. Alors il existe une sous-suite de f_n qui converge presque-partout vers f, ce qui implique que $f=0$ est la seule limite possible. Or :

$$\|f_n\|_2=1$$

pour tout n, donc $\|f_n\|_2$ ne tend pas vers $\|f\|_2=0$ ce qui contredit le fait que f_n converge vers f dans $L^2([0,+\infty[)$.

(b) Pour $p>2$, on a :

$$\int_{[0,+\infty[}|f_n(x)|^p\,dx=\int_n^{2n}n^{-\frac{p}{2}}\,dx=n^{1-\frac{p}{2}}\to 0,$$

quand $n\to+\infty$ donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.

Correction de l'exercice 6447 ▲

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x)=\sqrt{n}\mathbf{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

(a) Quelque soit g continue à support compact,

$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)g(x)\,dx = \sqrt{n}\int_n^{n+\frac{1}{n}} g(x)\,dx \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, f_n converge faiblement vers 0. Comme f_n converge presque partout vers 0 on conclut comme précédemment que f_n ne converge pas fortement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ car

$$\|f_n\|_2 = 1.$$

(b) Pour $p < 2$, on a :

$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)|\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{2}}\,dx = n^{\frac{p}{2}-1} \to 0,$$

donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.

Correction de l'exercice 6448 ▲

cf E. Lieb et M. Loss, *Analysis*, p.118, American Mathematical Society (2001). (Pour la question 6, on peut utiliser la continuité du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.)

Correction de l'exercice 6449 ▲

A l'aide des coordonnées sphériques, on a

$$\begin{array}{rcl}
\hat{f}(k) & = & \int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-2\pi i(x,k)}\,dx \\
 & = & \\
 & = & \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} h(r)e^{-2\pi ir|k|\cos\theta}r^2\sin\theta\,d\theta dr d\varphi \\
 & = & \\
 & = & 2\pi\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi} h(r)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2\pi ir|k|}e^{-2\pi ir|k|\cos\theta}\right)r^2\,d\theta dr \\
 & = & \\
 & = & \frac{1}{|k|}\int_0^{\infty} h(r)r\frac{1}{i}\left[e^{+2\pi ir|k|} - e^{-2\pi ir|k|}\right]dr \\
 & = & \\
 & = & \frac{2}{|k|}\int_0^{+\infty} h(r)r\sin(2\pi|k|r)\,dr.
\end{array}$$

Correction de l'exercice 6450 ▲

(a) i. cf cours.

ii. clair.

iii. Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ un suite quelconque d'ensembles m_*-mesurables. On pose $B_1 = \emptyset$, $B_2 = A_1$ et $B_j = \cup_{i=1}^{j-1}A_i$, pour $j \geqslant 2$. Soit Q un sous-ensemble de Ω. Montrons par récurrence que l'assertion (P_k) suivante est vérifiée pour tout $k \geqslant 1$:

$$(P_k) \qquad m_*(Q) = m_*(Q\cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j).$$

— Pour $k = 1$, (P_1) dit simplement que $m_*(Q) = m_*(Q\cap A_1^c) + m_*(Q\cap A_1)$. Ceci est une conséquence de la m_*-mesurabilité de A_1 et de fait que

$$m_*(Q) \leqslant m_*(Q\cap A_1^c) + m_*(Q\cap A_1)$$

(on applique la σ-sous-additivité de m_* à $C_1 = Q\cap A_1^c$, $C_2 = Q\cap A_1$ et $C_i = \emptyset$ pour $i \geqslant 3$.)

— Montrons que $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$:
Puisque A_{k+1} est m_*-mesurable, on a :

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c) + m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}).$$

Or $B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c = (B_{k+1} \cup A_{k+1})^c = B_{k+2}^c$. Ainsi :

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) = m_*(Q \cap B_{k+2}^c) + m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}). \tag{42}$$

Supposons que l'assertion (P_k) soit vérifiée, alors

$$m_*(Q) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j),$$

et d'après (42)

$$\begin{aligned} m_*(Q) &= m_*(Q \cap B_{k+2}^c) + m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j) \\ &= m_*(Q \cap B_{k+2}^c) + \sum_{j=1}^{k+1} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j), \end{aligned}$$

qui n'est autre que (P_{k+1}).

— En conclusion, comme (P_1) est vrai et $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$, il en découle que l'assertion (P_k) est vraie pour tout $k \geqslant 1$.

iv. Comme $B_{k+1} \subset A$, on a $Q \cap B_{k+1}^c \supset Q \cap A^c$ et, par monotonie de m_*,

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) \geqslant m_*(Q \cap A^c).$$

La condition (P_k) entraîne alors que pour tout k :

$$m_*(Q) \geqslant m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

Donc, en faisant tendre k vers $+\infty$:

$$m_*(Q) \geqslant m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

v. On a : $Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q \cap B_j^c \cap A_j)$ et par σ-sous-additivité de m_* :

$$\begin{aligned} m_*(Q \cap A^c) + m_*(Q \cap A) &= m_*(Q \cap A^c) + m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (Q \cap B_j^c \cap A_j\right) \\ &\leqslant m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j) \\ &\leqslant m_*(Q). \end{aligned}$$

On en conclut que $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ est m_*-mesurable.

(b) i. cf cours.

ii. Soit $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments m_*-mesurables, deux à deux disjoints. Choisissons $Q = A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, alors $Q \cap A^c = \emptyset$ et $Q \cap B_j^c \cap A_j = A_j$ pour tout j. D'après la question 1.d),

$$m_*(Q) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

D'après la σ-sous-additivité de m_*, il vient :

$$m_*(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

(c) Soit E un ensemble m_*-mesurable tel que $m_*(E) = 0$ et B un sous-ensemble de E. Comme $Q \cap B^c \subset Q$, on a par monotonie de m_* l'inégalité $m_*(Q \cap B^c) \leqslant m_*(Q)$. Comme $Q \cap B \subset E$, on a aussi $m_*(Q \cap B) = 0$. On en déduit que

$$m_*(Q) \geqslant m_*(Q \cap B^c) + m_*(Q \cap B).$$

Ainsi B est m_*-mesurable et m est complète.

Correction de l'exercice 6451 ▲

Il est clair que $m_*(\emptyset) = 0$ et que si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, alors $m_*(A) \leqslant m_*(B)$, il faut donc uniquement démontrer que m_* est σ-sous-additive.

Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$, fixons $\varepsilon > 0$ et notons $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Par définition de l'infimum, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite $\{(a_i^n, b_i^n)\}$ telle que $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i^n, b_i^n[$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i^n - a_i^n) \leqslant m_*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Comme $A \subset \bigcup_{i,n}]a_i^n, b_i^n[$, on a

$$m_*(A) \leqslant \sum_{n,i} (b_i^n - a_i^n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (b_i^n - a_i^n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (m_*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n).$$

On a donc la σ-sous-additivité $m_*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n)$ puisque ε est arbitraire.

Correction de l'exercice 6452 ▲

(a) Il est clair que $m_*(\emptyset) = 0$ et que m_* est monotone.
Soit maintenant $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Si parmi les A_i il existe au moins un ensemble A_j non vide, on a

$$m_*(\bigcup_i A_i) = 1 = m_*(A_j) \leqslant \sum_i m_*(A_i).$$

Si tous les A_i sont vides, alors $\bigcup_i A_i = \emptyset$, et donc

$$m_*(\bigcup_i A_i) = 0 = \sum_i m_*(A_i).$$

Ainsi m_* est σ-sous-aditive et par consequent m_* est une mesure extérieure.

(b) Les seuls ensembles mesurables sont $\emptyset$ et Ω, puisque si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$, alors, pour tout $Q \in \mathscr{P}(\Omega)$ non vide et non inclus dans A, on a $A \cap Q \neq \emptyset$ et $A^c \cap Q \neq \emptyset$, et donc

$$m_*(A \cap Q) + m_*(A^c \cap Q) = 1 + 1 = 2 \neq m_*(Q) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. .$$

(c) Il est clair que l'ensemble des parties m_*-mesurables de Ω, $\mathscr{M}_{m_*} = \{\emptyset, \Omega\}$, est une σ-algèbre.
Il est facile de voir aussi que

$$\mu = m_*|_{\mathscr{M}_{m_*}}, \mu(\emptyset) = 0, \ \ \mu(\Omega) = 1,$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathscr{M}_{m_*})$.

Correction de l'exercice 6453 ▲

(a) Soit $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. On a :

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

L'application $\Phi\ : \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \geqslant 0\}$ définie par :

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),x\geqslant 0\}} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

car l'ensemble $\{(x,0), x \geqslant 0\}$ est négligeable. On en déduit que :

$$I^2 = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,drd\theta = 2\pi\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

Ainsi $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

(b) *Calcul de l'aire de la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{S}_{n-1} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{A}_{n-1}$ son aire. D'après la question précédente, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\,dx_1\dots dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

D'autre part, puisque l'aire de la sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ vaut $r^{n-1}\mathscr{A}_{n-1}$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\,dx_1\dots dx_n = \mathscr{A}_{n-1}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1}\,dr.$$

En posant le changement de variable $x = r^2$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\,dx_1\dots dx_n = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{n-1}\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1}\,dx,$$

d'où :

$$\mathscr{A}_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

(c) *Calcul du volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{B}_n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 1\}$ la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{V}_n$ son volume. On a :

$$\mathscr{V}_n = \int_0^1 r^{n-1}\mathscr{A}_{n-1}\,dr = \mathscr{A}_{n-1}\left[\frac{r^n}{n}\right]_0^1 = \frac{\mathscr{A}_{n-1}}{n}.$$

On en déduit que :

$$\mathscr{V}_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Ce qui se réduit à :

$$\mathscr{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

en utilisant l'identité : $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

(d) *Application :* L'aire de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^2$ vaut

$$\mathscr{A}_1 R = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} R = 2\pi R,$$

qui est bien le périmètre du cercle de rayon R dans le plan.
Sachant $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, l'aire de la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$ vaut

$$\mathscr{A}_2 R^2 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} R^2 = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} R^2 = 4\pi R^2$$

qui est bien l'aire de la sphère S^2.
Le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}$ vaut

$$\mathscr{V}_1 R = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} R = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} R = 2R,$$

qui est bien la longueur du segment $[-R, R]$.
Le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^2$ vaut

$$\mathscr{V}_2 R^2 = \frac{2\pi}{2\Gamma(1)} R^2 = \pi R^2,$$

qui est bien l'aire du disque de rayon R.
Le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^3$ vaut

$$\mathscr{V}_3 R^3 = \frac{\mathscr{A}_2}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Correction de l'exercice 6454 ▲

(a) On a

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_n &= \int_{\mathscr{B}_n} dx_1 \ldots dx_n = \int_{-1}^{1} dx_1 \int_{\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant 1 - x_1^2} dx_2 \ldots dx_n \\ &= \mathscr{V}_{n-1} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - x_1^2}\right)^{n-1} dx_1\end{aligned}$$

Posons $x_1 = \cos\theta$, pour $\theta \in [0, \pi]$. Alors $\sqrt{1 - x_1^2} = |\sin\theta| = \sin\theta$ et $dx_1 = -\sin\theta \, d\theta$. On a donc

$$\mathscr{V}_n = -\mathscr{V}_{n-1} \int_{\pi}^{0} (\sin\theta)^n d\theta = \mathscr{V}_{n-1} \int_{0}^{\pi} (\sin\theta)^n d\theta = I_n \cdot \mathscr{V}_{n-1}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\pi} (\sin\theta)^n d\theta = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-1} \sin\theta \, d\theta = \\ &= \left[-\cos\theta (\sin\theta)^{n-1}\right]_0^{\pi} + (n-1) \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-2} (\cos\theta)^2 \, d\theta = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-2} (1 - (\sin\theta)^2) \, d\theta = (n-1)(I_{n-2} - I_n).\end{aligned}$$

Donc $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$.

(c) On a $I_0 = \pi$, $I_1 = 2$. Donc $I_2 = \frac{\pi}{2}$, $I_3 = \frac{4}{3}$, $I_4 = \frac{3\pi}{8}$, $I_5 = \frac{16}{15}$, $I_6 = \frac{15\pi}{48}$, $I_7 = \frac{32}{35}$.
Comme $\mathscr{V}_1 = 2$ on trouve :

$$\mathscr{V}_2 = \pi,\ \mathscr{V}_3 = \frac{4\pi}{3},\ \mathscr{V}_4 = \frac{\pi^2}{2},\ \mathscr{V}_5 = \frac{8\pi^2}{15},\ \mathscr{V}_6 = \frac{\pi^3}{6},\ \mathscr{V}_7 = \frac{16}{105}\pi^3.$$

(d) On a $\mathscr{V}_n = \int_0^1 \int_{\mathscr{S}_{n-1}} r^{n-1} dr d\sigma = \frac{1}{n}\mathscr{A}_{n-1}$, d'où $\mathscr{A}_{n-1} = n\mathscr{V}_n$. Donc on a

$$\mathscr{A}_1 = 2\pi,\ \mathscr{A}_2 = 4\pi,\ \mathscr{A}_3 = 2\pi^2,\ \mathscr{A}_4 = \frac{8}{3}\pi^2,\ \mathscr{A}_5 = \pi^3,\ \mathscr{A}_6 = \frac{16}{15}\pi^3.$$

Correction de l'exercice 6455 ▲

Voir le lemme 2.17 p.61 dans *Analysis* de E. Lieb et M. Loss, American Mathematical Society (2001).

Correction de l'exercice 6456 ▲

(a) Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ telle que
— Pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E.
— $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
— I n'est pas dénombrable.
Supposons que E est séparable. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E. Grâce à (a), pour chaque $i \in I$, $O_i \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. On choisit $n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in O_i$. On a $n(i) = n(j) \Rightarrow u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \cap O_j$ donc $i = j$ par (b). Ainsi l'application $i \mapsto n(i)$ est injective. Par suite I est dénombrable ce qui contredit (c).

(b) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $f_a = \mathbf{1}_{\mathscr{B}(a,1)}$ où $\mathscr{B}(a,1)$ est la boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon 1 centrée en a. Soit la famille

$$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f - f_a\|_\infty < \frac{1}{2}\},$$

où a parcourt les points de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ n'est pas dénombrable, donc (c) est vérifié. L'ensemble O_a est la boule ouverte de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de rayon $\frac{1}{2}$ centrée en f_a. En particulier (a) est vérifié. Remarquons que lorsque $a \neq b$, on a $\|f_a - f_b\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe $f \in O_a \cap O_b$ avec $a \neq b$. Alors

$$\|f_a - f_b\|_\infty \leqslant \|f_a - f\|_\infty + \|f - f_b\|_\infty < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ce qui n'est pas possible. Donc (b) est vérifié. On en conclut que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.

Correction de l'exercice 6457 ▲

cf M.E. Taylor, *Measure Theory and Integration*, graduate studies in mathematics, vol. 76, AMS, 2001, pages 50–51.

- Les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ sont introduits pour montrer que les ensembles $\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$ et $\{x \in \Omega, g(x) > 2\}$ sont de μ-mesure nulle (voir plus bas). En conséquence, la fonction $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ peut être choisie telle que $\frac{1}{2} \leqslant g \leqslant 2$. (On rappelle que $L^2(\Omega, \alpha)$ désigne l'ensemble des fonctions de carré-intégrables définies modulo les ensembles de mesure nulle.) Cela implique que la fonction h définie dans la question 3 est positive comme quotient de deux fonctions positives.
- Pour montrer que $\mu\left(\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}\right) = 0$, on peut utiliser par exemple la continuité de la mesure : on a $S_{11} \subset S_{12} \subset S_{13} \subset \cdots$ et $\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{1l} = \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$, ainsi

$$\mu\left(\left\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\right\}\right) = \mu\left(\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{1l}\right) = \lim_{l\to+\infty} \mu\left(S_{1l}\right) = 0.$$

De même, $S_{21} \subset S_{22} \subset S_{23} \subset \cdots$ et $\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{2l} = \{x \in \Omega, g > 2\}$, d'où $\mu\left(\{x \in \Omega, g > 2\}\right) = 0$.

- Pour montrer que l'on a l'égalité (13) du théorème pour toute fonction positive mesurable, on utilise le fait que les fonctions essentiellement bornées appartiennent à $L^2(\Omega,\alpha)$ (pour une mesure finie on a en effet $L^\infty(\Omega,\alpha)\subset L^2(\Omega,\alpha)$), donc l'égalité
$$\int_\Omega f(2g-1)\,d\nu=\int_\Omega f(2-g)\,d\mu.$$
de la question 2 est en particulier vérifiée pour toute fonction mesurable positive bornée. Soit maintenant une fonction f mesurable positive (non nécessairement bornée). Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite de fonctions $f_n=f\,\mathbf{1}_{\{f\leqslant n\}}$ donne :
$$\begin{array}{rcl}\int_\Omega f(2g-1)\,d\nu &=& \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(2g-1)\,d\nu\\ &=& \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(2g-1)\,d\nu=\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(2-g)\,d\mu\\ &=& \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(2-g)\,d\mu\\ &=& \int_\Omega f(2-g)\,d\mu.\end{array}$$
On en déduit que l'égalité (1) du théorème est vérifiée pour toute fonction F de la forme $F=f(2g-1)$, où $f\in\mathscr{M}^+$. Puisque $(2g-1)>0$, l'ensemble des fonctions F de cette forme est également $\mathscr{M}^+$.

Correction de l'exercice 6458 ▲

(a) On définit la fonction Bêta par $B(a,b):=\int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1}ds$, montrons que
$$B\left(1+\frac{d}{2},\frac{m}{2}\right)=2\int_0^1\left(1-r^2\right)^{d/2}r^{m-1}dr$$
En utilisant le changement de variable $1-r^2\to s$, on a
$$\begin{array}{rl}\int_0^1(1-r^2)^{d/2}r^{m-1}dr &= -\frac{1}{2}\int_1^0 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m-2}{2}}ds\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m}{2}-1}ds=\frac{1}{2}B\left(1+\frac{d}{2},\frac{m}{2}\right).\end{array}$$

(b) Par le changement de variables $t\to t^2$ et $u\to u^2$ on a
$$\begin{array}{rl}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \left(\int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-u}u^{b-1}\,du\right)\\ &=4\left(\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2a-1}\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2b-1}\,du\right)\end{array}$$
En utilisant le théorème de Fubini et l'intégration en polaires on a
$$\begin{array}{rl}\Gamma(a)\Gamma(b) &=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t^2+u^2)}t^{2a-1}u^{2b-1}\,dt\,du\\ &=4\left(\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2a-1}r^{2b-1}r\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2a-1}(\sin\varphi)^{2b-1}\,d\varphi\right).\end{array}$$

Or, par le changement de variable $r^2\to r$,
$$2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(a+b)-1}\,dr=\int_0^\infty e^{-r}r^{a+b-1}\,dr=\Gamma(a+b);$$
et par le changement de variable $u=\cos^2\varphi$,
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2a-1}(\sin\varphi)^{2b-1}\,d\varphi=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du=B(a,b).$$
Les trois dernières identités entraînent
$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\Gamma(a+b)\cdot B(a,b).$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha} dx &= \int_0^{+\infty} \mu\left(\left(1+|x|^2\right)^{-\alpha} > t\right) dt = \int_0^1 \mathrm{Vol}\left(\mathscr{B}\left(0, \left(t^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) dt \\ &= \mathscr{V}_n \int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{\frac{n}{2}} dt = \mathscr{V}_n \int_0^1 \left(1 - t^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2\alpha}} dt \\ &= \alpha \mathscr{V}_n \int_0^1 (1-s)^{\frac{n}{2}} s^{\alpha - \frac{n}{2} - 1} ds = \alpha \mathscr{V}_n B\left(\alpha - \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6459 ▲

(a) Posons $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1} \geqslant 0\}$. Comme $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$, l'image de Ω' par S est incluse dans Ω. Réciproquement, soit x un élément de Ω. Posons $r = |x|$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, on peut définir par récurrence $\theta_i \in (0, \pi)$ grâce à son cosinus :

$$\cos \theta_i = \frac{x_i}{r \sin \theta_1 \ldots \sin \theta_{i-1}}.$$

Quant à θ_{n-1}, il est déterminé par son sinus et son cosinus. Comme $x_n \neq 0$ ou $x_{n-1} < 0$, nécessairement $\theta_{n-1} \neq 0(\text{modulo } 2\pi)$.

L'application S est continûment différentiable, car chacune de ses composantes l'est. La matrice jacobienne a ses vecteurs colonnes orthogonaux, et de norme respectivement 1, r, $r\sin\theta_1$, ..., $r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2}$. Son déterminant vaut alors $r^{n-1} (\sin\theta_1)^{n-2} \ldots \sin\theta_{n-2}$. Comme ce déterminant ne s'annule jamais, S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω.

(b) C'est la formule du changement de variable.

(c) On a :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_4 &= \int_{r=0}^1 \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} r^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left(\int_0^\pi \sin^2\theta_1 d\theta_1\right) \left(\int_0^\pi \sin\theta_2 d\theta_2\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta_1}{2} d\theta_1\right) [-\cos\theta_2]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \\ \mathscr{A}_3 &= \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= 2\pi^2.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6460 ▲

Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(|x|)$.

(a) Posons

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(|y|)}{|x-y|} dy,$$

et $r = |x|$, $s = |y|$. Alors $|x-y| = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}$ où θ est l'angle entre l'axe (Ox) et l'axe (Oy). On considére les coordonnées sphériques de centre O et d'axe (Ox) suivantes :

$$\begin{aligned} y_1 &= s\cos\theta \\ y_2 &= s\sin\theta\cos\varphi \\ y_3 &= s\sin\theta\sin\varphi \end{aligned}$$

On a

$$I = \int_{s=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{g(s)}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}} s^2 \sin\theta \, ds d\theta d\varphi.$$

On note que

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}} = \frac{d}{d\theta} \frac{1}{rs} \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_{s=0}^{+\infty} \left[\tfrac{1}{rs}\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\pi} g(s)s^2\,ds \\ &= 2\pi \int_{s=0}^{+\infty} \tfrac{1}{rs}\left(\sqrt{(r+s)^2}-\sqrt{(r-s)^2}\right) g(s)s^2\,ds. \end{aligned}$$

Lorsque $s \leqslant r$, on a

$$\sqrt{(r+s)^2}-\sqrt{(r-s)^2} = (r+s)-(r-s) = 2s,$$

et lorsque $s > r$, il vient

$$\sqrt{(r+s)^2}-\sqrt{(r-s)^2} = (r+s)-(s-r) = 2r.$$

On en déduit alors :

$$I = \frac{4\pi}{r}\int_0^r g(s)s^2\,ds + 4\pi\int_r^{+\infty} g(s)s\,ds.$$

(b) Lorsque g est à support dans $[0,R]$, le potentiel newtonien créé par la distribution de masse $f(y) = g(|y|)$ en un point $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $|x| > R$, est identique au potentiel créé par une masse totale égale concentrée à l'origine.

Correction de l'exercice 6461 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 1,2$ et $r = |x|$. On considère $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}.$$

(a) La fonction h atteint son maximum en $r = 1$ et $h(1) = \frac{1}{4}$. Pour un réel positif $t \leqslant \frac{1}{4}$ donné, on cherche à résoudre $t = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}$. On obtient deux solutions

$$\begin{aligned} r_+ &= \left(\tfrac{1-2t}{2t} + \tfrac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ r_- &= \left(\tfrac{1-2t}{2t} - \tfrac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi $\mu(f > t) = \mathscr{V}_d\left(r_+^d - r_-^d\right)$. De plus, par définition, f^* vérifie $\mu(f^* > t) = \mu(f > t)$ et $\mu(f^* > t) = \mathscr{V}_d r^d$ où r et t sont liés par $t = f^*(r)$. Pour $d = 1$, on a donc $r = r_+ - r_-$ et t est donné par :

$$\begin{aligned} r^2 &= r_+^2 + r_-^2 - 2r_+r_- = \tfrac{1-2t}{t} - 2\sqrt{\tfrac{(1-2t)^2}{4t^2} - \tfrac{1-4t}{4t^2}} \\ &= \tfrac{1-4t}{t}. \end{aligned}$$

Il en découle que $t = f^*(r) = (4+r^2)^{-1}$.

(b) Pour $d = 2$, on a

$$r^2 = r_+^2 - r_-^2 = \frac{\sqrt{1-4t}}{t},$$

ce qui implique que

$$t = f^*(r) = r^{-4}\left(\sqrt{4+r^4}-2\right).$$

(c) Calculons $\|f\|_2^2$ pour $d = 1$. On a

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|f^*\|_2^2 \\ &= 2\int_0^{+\infty}(4+r^2)^{-2}\,dr \\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-2}\,ds \\ &= \tfrac{1}{8}\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx = \tfrac{\pi}{16}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 6458 (question 3.) sur la fonction Bêta, car :

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx = 2\mathscr{V}_1 B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = 4\frac{\Gamma(3/2)^2}{\Gamma(3)} = 4\frac{(1/2\Gamma(1/2))^2}{2!} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $d=2$, on a

$$\|f\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^2} f(x)^2\,dx=\int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} h(r)^2\,r dr d\theta=2\pi\int_0^{+\infty} r^5(1+r^2)^{-4}\,dr=\frac{\pi}{3},$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 6458 sur la fonction Bêta, car :

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^2)^{-4}\,dx=4\mathscr{V}_6 B\left(4-\frac{6}{2},\frac{6}{2}+1\right)=4\mathscr{V}_6 B(1,4),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^2)^{-4}\,dx=\int_{r=0}^{+\infty}\int_{\mathscr{S}^5}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr d\sigma=\mathscr{A}_5\int_0^{+\infty}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr$$

d'où :

$$\textstyle\int_0^{+\infty}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr \;=\; 4\frac{\mathscr{V}_6}{\mathscr{A}_5}B(1,4)=\frac{4}{6}\frac{\Gamma(1)\Gamma(4)}{\Gamma(5)},=\frac{2}{3}\frac{3!}{4!}=\frac{1}{6}$$

Correction de l'exercice 6462 ▲

Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x)=e^{-x^2+ax}$, où $a\in\mathbb{R}$. Par translation, le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f est donné par

$$f^*(x)=e^{\frac{a^2}{4}}e^{-x^2}.$$

Correction de l'exercice 6463 ▲

Soit $1\leqslant p<+\infty$.

(a) Si f est continue à support compact dans la boule $\mathscr{B}(0,M)$ centrée en 0 et de rayon M, et si $|h|\leqslant 1$, alors

$$|f(x-h)-f(x)|^p \;\leqslant\; (|f(x-h)|+|f(x)|)^p\leqslant\left(2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{\mathscr{B}(0,M+1)}\right)^p=\mathbf{1}_{B(0,M+1)}2^p\|f\|_\infty^p.$$

où $\mathscr{B}(0,M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.

(b) Pour f continue, on a $\lim_{h\to 0}|f(x-h)-f(x)|=0$. Puisque la fonction $g(x)=2^p\|f\|_\infty^p\mathbf{1}_{B(0,M+1)}(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, le théorème de convergence dominée permet d'intervertir limite et intégrale, et il vient :

$$\lim_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_p^p=\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-h)-f(x)|^p\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{h\to 0}|f(x-h)-f(x)|^p\,dx=0.$$

(c) Soit f une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<+\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe f_ε continue à support compact telle que $\|f-f_\varepsilon\|_p\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\|\tau_h f-f\|_p &= \|\tau_h(f-f_\varepsilon)-(f-f_\varepsilon)+\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p\\ &\leqslant \|\tau_h(f-f_\varepsilon)\|_p+\|f-f_\varepsilon\|_p+\|\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p\\ &= 2\|f-f_\varepsilon\|_p+\|\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p\\ &= \tfrac{2}{3}\varepsilon+\|\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p.\end{aligned}$$

Puisque f_ε est continue à support compact, d'après la question précédente, il existe $\delta>0$ tel que pour $|h|<\delta$, $\|\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, pour $|h|<\delta$, on a $\|\tau_h f-f\|_p<\varepsilon$. En d'autre termes $\lim_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_p=0$.

(d) Pour $p=\infty$, les fonctions continues à support compact ne sont pas denses dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce qui fait que la démonstration précédente ne peut pas s'appliquer dans ce cas. De plus, on vérifie que, pour $f=\mathbf{1}_{B(0,1)}$ et $h\neq 0$, on a

$$\|\tau_h f-f\|_\infty=1.$$

Alors que pour $h=0$, on a $\|\tau_h f-f\|_\infty=0$. On peut également vérifier que $\lim_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_\infty=0$ si et seulement si la fonction f possède un représentant uniformément continu.

Correction de l'exercice 6464 ▲

Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème, et soit $1 \leqslant p < +\infty$.

(a) En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), on a

$$\begin{aligned} |\varphi_n * f - f|^p(x) &= |\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_n(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_n(y)\,dy|^p \\ &\leqslant (\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)||\varphi_n(y)|\,dy)^p. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x) = |\varphi_n|(x)\,dx$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi_n * f - f|^p(x) &\leqslant (\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} 1^q\,d\nu(y))^{\frac{p}{q}}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,d\nu(y))^{\frac{p}{p}} \\ &\leqslant (\textstyle\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_n|(y)\,dy)^{\frac{p}{q}}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy) \\ &\leqslant K^{\frac{p}{q}}(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy). \end{aligned}$$

(b) On en déduit que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leqslant K^{\frac{p}{q}}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{y\in\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right)dx$$

D'après le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n * f - f\|_p^p &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\textstyle\int_{y\in\mathbb{R}^n}(\int_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx)\,|\varphi_n|(y)\,dy \\ &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\textstyle\int_{\mathbb{R}^n}\|\tau_y f - f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy. \end{aligned}$$

(c) Soit $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} &\|\varphi_n * f - f\|_p^p \\ \leqslant\ & K^{\frac{p}{q}}\left(\textstyle\int_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy\right) \\ \leqslant\ & K^{\frac{p}{q}}\left(\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p\textstyle\int_{|y|\leqslant\delta}|\varphi_n(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta}(\|\tau_y f\|_p + \|f\|_p)^p\,|\varphi_n(y)|\,dy\right) \\ \leqslant\ & K^{\frac{p}{q}}\left(K\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p + (2\|f\|_p)^p\textstyle\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy\right) \\ \leqslant\ & K^{\frac{p}{q}}\left(K\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p\|f\|_p^p\textstyle\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy\right). \end{aligned}$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (cf l'exercice précédent), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|y| \leqslant \delta \quad \Rightarrow \|\tau_y f - f\|_p^p < \frac{K^{-(\frac{p}{q}+1)}}{2}\,\varepsilon.$$

D'après l'hypothèse (iii), il existe un $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n > N$, on a

$$\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy < \frac{K^{-\frac{p}{q}}}{2^{p+1}\|f\|_p^p}\,\varepsilon.$$

Ainsi pour tout $n > N$,

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p < \varepsilon,$$

i.e. $\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Correction de l'exercice 6465 ▲

Voir E. Lieb et M. Loss, *Analysis*, p.123, American Mathematical Society (2001).

Correction de l'exercice 6468 ▲

(a) A une partie non vide de $\mathbb{R}$, un *majorant* de A est un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A \qquad x \leqslant M.$$

Si A est un partie non vide et majorée, alors par définition $\sup A$ est le plus petit des majorants. On a les propriétés suivantes :

i. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;

ii. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;

iii. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;

iv. $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;

v. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;

Prouvons les deux premières égalités,

i. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$: pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$ donc $a+b \leqslant \sup A + \sup B$, donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$ et comme $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$ alors $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$. Réciproquement, il existe une suite (a_n) d'éléments de A tel que cette suite converge vers $\sup A$, de même il existe une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $\sup B$, la suite $(a_n + b_n)$ est une suite d'éléments de $A+B$ qui converge vers $\sup A + \sup B$, donc la borne supérieure de $A+B$ est plus grande que $\sup A + \sup B$, soit $\sup(A+B) \geqslant \sup A + \sup B$. D'où l'égalité.

ii. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$: Remarquons d'abord que si $P \subset Q$ alors $\sup P \leqslant \sup Q$: en effet $\sup Q$ est un majorant de Q donc de P (par l'inclusion $P \subset Q$), donc le plus petit des majorants, $\sup P$, pour P est plus petit que le majorant particulier $\sup Q$. Appliquons ceci à $A \subset A \cup B$ donc $\sup A \leqslant \sup(A \cup B)$ et pour $B \subset A \cup B$ on obtient $\sup B \leqslant \sup(A \cup B)$. On vient de prouver $\sup(A \cup B) \geqslant \max(\sup A, \sup B)$. Pour l'autre inégalité : soit $M = \max(\sup A, \sup B)$. Pour $x \in A \cup B$ alors soit $x \in A$ et alors $x \leqslant \sup A \leqslant M$, ou soit $x \in B$ et alors $x \leqslant \sup B \leqslant M$; donc quelque soit $x \in A \cup B$, $x \leqslant M$ donc M est un majorant de $A \cup B$, donc $\sup(A \cup B) \leqslant M = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) i. $d(0, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$, regarder des éléments du type $\frac{\sqrt{2}}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

ii. $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 0$, c'est la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ou alors regarder la suite définie par $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}), n \in \mathbb{N}$, qui est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$.

iii. On suppose que $\mathscr{D}$ passe par l'origine, alors $d(M, \mathscr{D}) = x^2 + y^2 + z^2 - (ax + by + cz)^2$.

(c) $d(A, B) = 0$.

(d) $\mathrm{diam}(]0,1[\cap \mathbb{Q}) = 1 =$
$mathrmdiam([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

Correction de **l'exercice 6469 ▲**

(a) J_x est un ouvert non vide car c'est une union d'ouverts contenant x. De plus J_x est un intervalle car c'est une union d'intervalles contenant tous le point x. Donc J_x est un intervalle ouvert. On peut donc écrire $\mathscr{O} = \cup_{x \in \mathscr{O}} J_x$. Mais cette union n'est pas nécessairement dénombrable.

Tout d'abord si $z \in J_x$ alors $J_x = J_z$. En effet soit I un intervalle inclus dans $\mathscr{O}$ contenant x et z. Si $x' \in J_x$, soit J un intervalle inclus dans $\mathscr{O}$ contenant x et x'. Alors $I \cup J$ est un intervalle (car x est dans les deux intervalles I et J), $I \cup J$ est inclus dans $\mathscr{O}$ et contient x' et z. Donc $x' \in J_z$. Donc $J_x \subset J_z$. Enfin comme $z \in J_x$ on a aussi $x \in J_z$, donc on montrerait de même $J_z \subset J_x$. Donc $J_x = J_z$.

Pour $x, y \in \mathscr{O}$ alors $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \varnothing$. En effet supposons que $J_x \cap J_y \neq \varnothing$ et soit $z \in J_x \cap J_y$. Comme $z \in J_x$ alors $J_x = J_z$, comme $z \in J_y$ alors $J_y = J_z$. Donc $J_x = J_y$.

Pour chaque intervalle ouvert J_x il existe $q \in \mathbb{Q} \cap J_x$, avec bien sûr $J_x = J_q$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable $\mathscr{O} \cap \mathbb{Q}$ l'est aussi. On a ainsi écrit

$$\mathscr{O} = \bigcup_{q \in \mathscr{O} \cap \mathbb{Q}} J_q,$$

ce qui était demandé.

(b) Pour $\mathbb{R}^n$ on peut montrer le résultat suivant : tout ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme l'union dénombrable de boules ouverte. On considére J_x l'union des boules ouvertes de rayon rationnel centrées en x, ensuite on regarde seulement les x appartenant à $\mathscr{O} \cap \mathbb{Q}^n$. Par contrer on autorise deux boules à s'intersecter.

Correction de l'exercice 6470 ▲

(a) Soient $d = p+q\sqrt{2}$ et $d' = p'+q'\sqrt{2}$ deux éléments de D. Alors $d+d' = (p+p')+(q+q')\sqrt{2}$ est un élément de D et $dd' = (pp'+2qq')+(pq'+p'q)\sqrt{2}$ aussi.

(b) On a $u < 1$ donc u^k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Donc pour $\varepsilon = b-a$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geqslant n$ on a $u^k < \varepsilon = b-a$. En particulier $u^n < b-a$. Si on cherchait un réel alors $r = \frac{a}{u^n}+1$ conviendrait, mais on cherche un entier, posons $m = E(\frac{a}{u^n})+1$. Alors $m-1 \leqslant \frac{a}{u^n} < m$. L'inégalité de droite donne $a < mu^n$. L'inégalité de gauche s'écrit aussi $mu^n - u^n \leqslant a$ soit $mu^n \leqslant a+u^n < a+b-a = b$ donc $a < mu^n < b$.

Déduisons de cela que D est dense dans $\mathbb{R}$: pour tout intervalle $[a,b]$, $a<b$ il existe m,n des entiers tels que $mu^n \in [a,b]$. Or mu^n est dans D car $u \in D$ donc par multiplication $u^n \in D$.

Correction de l'exercice 6471 ▲

(a) Cette exercice justifie la terminologie "boule fermée". Il s'agit de montrer que le complémentaire d'une boule fermée est un ensemble ouvert. Il est vivement conseillé de faire un dessin. Soit $C = E \setminus B'(a,r)$. Soit $x \in C$, on cherche une boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ contenue dans C. Comme $x \in C$, $x \notin B'(a,r)$ donc $d(a,x) > r$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < d(a,x)-r$. Montrons que $B(x,\varepsilon) \subset C$: pour $y \in B(x,\varepsilon)$, l'inégalité triangulaire $d(a,x) \leqslant d(a,y)+d(y,x)$ donc $d(a,y) \geqslant d(a,x)-d(y,x) \geqslant d(a,x)-\varepsilon > r$. Comme $d(a,y) > r$ alors $y \notin B'(a,r)$ donc $y \in C$. Comme la preuve est valable quelque soit $y \in B(x,\varepsilon)$, donc $B(x,\varepsilon) \subset C$. Et donc C est un ouvert.

(b) Pour $a = (\frac{1}{2},0)$ et $r = \frac{1}{2}$ on a $B'(a,r) = [0,1]\times\{0\} \cup \{0\}\times[0,\frac{1}{2}]$, $B(a,r) =]0,1[\times\{0\}$ et $\overline{B(a,r)} = [0,1]\times\{0\}$.

Correction de l'exercice 6472 ▲

(a) On note $B = B(a,r)$, $B' = B'(a,r)$, $\bar{B} = \overline{B(a,r)}$. Il faut montrer $B' = \bar{B}$. B' est une boule fermée, donc un fermé contenant B, alors que $\bar{B}$ est le plus petit fermé contenant B, donc $\bar{B} \subset B'$.

Étudions l'inclusion inverse : soit $x \in B'$, il faut montrer $x \in \bar{B}$. Si $x \in B$ alors $x \in \bar{B}$, supposons donc que $x \notin B$, alors $\|x-a\| = r$. Soit $B(x,\varepsilon)$ un boule centrée en x. x est adhérent à B si $B(x,\varepsilon) \cap B$ est non vide quelque soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit le point

$$y = x - \frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}.$$

Faire un dessin et placer y sur ce dessin. D'une part $y \in B(x,\varepsilon)$ car $\|y-x\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. D'autre part $y \in B = B(a,r)$ car $\|y-a\| = \|x-a-\frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}\| = \|x-a\|(1-\frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}) = r-\frac{\varepsilon}{2} < r$. Donc $y \in B \cap B(x,\varepsilon)$, ce qui prouve que $B' \cap \bar{B}$. Donc $B' = \bar{B}$.

(b) Pour le sens $\Leftarrow$. Soit $x \in \bar{B}(a,r)$ alors $\|x-b\| = \|x-a+a-b\| \leqslant \|x-a\|+\|a-b\| \leqslant r+R-r \leqslant R$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$.

Pour le sens $\Rightarrow$. Soit

$$x = a + r\frac{a-b}{\|a-b\|},$$

alors $\|x-a\| = r$ donc $x \in \bar{B}(a,r)$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$, donc $\|x-b\| \leqslant R$ or $\|x-b\| = \|a-b\|+r$ (c'est le même calcul que pour la question précédente). Donc $\|a-b\|+r \leqslant R$, soit $0 \leqslant \|a-b\| \leqslant R-r$ et en particulier $r \leqslant R$.

Correction de l'exercice 6473 ▲

(a) i. Si $||(x,y)|| = 0$ alors $\max(|x+y|,|x-2y|) = 0$ donc $x+y = 0$ et $x-2y = 0$ donc $x = 0$ et $y = 0$. Réciproquement $\|(0,0)\| = 0$.

ii. $||\lambda.(x,y)|| = ||(\lambda x,\lambda y)|| = \max(|\lambda x+\lambda y|,|\lambda x-2\lambda y|) = |\lambda|\max(|x+y|,|x-2y|) = |\lambda|.||(x,y)||$.

iii. $\|(x,y)+(x',y')\| = \|(x+x',y+y')\| = \max(|x+x'+y+y'|,|x+x'-2y-2y'|) \leqslant \max(|x+y|+|x'+y'|,|x-2y|+|x'-2y'|) \leqslant \max(|x+y|,|x-2y|)+\max(|x'+y'|,|x'-2y'|) \leqslant ||(x,y)||+||(x',y')||$.

La boule unité fermée centrée à l'origine est la région du plan comprise entre les droites d'équations $x+y = +1$, $x+y = -1$, $x-2y = +1$, $x-2y = -1$.

(b) Sens $\Leftarrow$: Si $x \in B_q$ alors $q(x) \leqslant 1$ donc $p(x) \leqslant 1$ donc $x \in B_p$. Sens $\Rightarrow$: Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors $q(\frac{x}{q(x)}) = 1$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_q$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_p$ donc $p(\frac{x}{q(x)}) \leqslant 1$ soit $p(x) \leqslant q(x)$. Ceci étant aussi valable pour $x = 0$.

$B_q \subset 2B_p$ est équivalent à $p(x) \leqslant 2q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (attention au sens !). Et $\frac{1}{2}B_p \subset B_q$ est équivalent à $\frac{1}{2}q(x) \leqslant p(x)$. Si les deux inclusions sont vraies alors $\frac{1}{2}p \leqslant q \leqslant 2p$ et en particulier les normes p et q sont équivalentes.

Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ On a

$$B_1 \subset B_2 \subset B_\infty \subset 2B_1 \subset 2B_2 \subset \cdots$$

Correction de l'exercice 6474 ▲

(a) Une suite de l^∞ est notée $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, pour chaque $p \geqslant 0$, x^p est elle même une suite $x^p = (x^p(0),x^p(1),x^p(2),\dots)$. (Il convient de garder la tête froide : on regarde des suites de suites !) Il faut montrer que Y est fermé dans X. Soit donc (x^p) une suite de Y qui converge vers $x \in X$. Il faut donc montrer qu'en fait $x \in Y$, c'est-à-dire que $x = (x(0),x(1),\dots)$ est une suite tendant vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ comme $x^p \to x$ alors il existe P tel que si $p \geqslant P$ on ait $d(x^p,x) < \varepsilon$. Par la définition de d on a pour $p \geqslant P$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^p(n)-x(n)| < \varepsilon$. Fixons $p = P$, alors $x^P \in Y$ donc x^P est une suite tendant vers 0, donc il existe N tel que si $n \geqslant N$ alors $|x^P(n)| < \varepsilon$. Réunissons tout cela, pour $n \geqslant N$:

$$|x(n)| = |x(n)-x^P(n)+x^P(n)| \leqslant |x(n)-x^P(n)|+|x^P(n)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc la suite x tend vers 0, donc $x \in Y$ et Y est fermé.

(b) Notons Z l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Pour $y = (y(0),y(1),y(2),\dots) \in Y$, définissons la suite $y^0 = (y(0),0,0,\dots)$, $y^1 = (y(0),y(1),0,0,\dots)$,... $y^p = (y(0),\dots,y(p-1),y(p),0,0,0,\dots)$. La suite (y^p) est bien une suite d'éléments de Z. De plus $d(y^p,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|y^p(n)-y(n)| = \sup_{n>p}|y(n)|$ or la suite $y(n)$ tend vers 0 donc $d(y^p,y)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

On montre facilement (par l'absurde) que l'élément $x = (1,1,1,\dots) \in X$ n'est limite d'aucune suite d'éléments de Z, (ni d'ailleurs de Y).

Correction de l'exercice 6475 ▲

Par l'inégalité triangulaire $|f(x)+f'(x)| \leqslant |f(x)|+|f'(x)|$ on obtient $\|f\| \leqslant N(f)$. Pour une inégalité dans l'autre sens décomposons le travail :

— $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|$: en effet par l'inégalité triangulaire $|f'(x)| \leqslant |f(x)|+|f'(x)+f(x)|$.

— $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$: en effet f est continue sur $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Soit $x_0 \in [0,1]$ ce point du maximum. Si $x_0 \in]0,1[$ alors $f'(x_0) = 0$ donc $\|f\|_\infty = |f(x_0)| = |f(x_0)+f'(x_0)| \leqslant \|f\|$. Si $x_0 = 1$ alors f et f' ont même signe sur un intervalle $[1-\varepsilon,1]$ donc sur cet intervalle $|f(x)| \leqslant |f(x)+f'(x)|$ et donc $\|f\|_\infty = |f(1)| \leqslant \|f\|$. (Enfin $f(0) = 0$ donc si $x_0 = 0$ alors f est nulle et l'inégalité est triviale.)

— Il reste à rassembler les expressions :

$$N(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\| + \|f\|_\infty \leqslant 3\|f\|.$$

(La première inégalité vient du premier point et la deuxième du second.)

Les normes $\|f\|$ et $N(f)$ sont équivalentes :

$$\frac{1}{3}N(f) \leqslant \|f\| \leqslant N(f).$$

Correction de l'exercice 6477 ▲

(a) $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leqslant \|f\|_\infty$. Donc $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ Par contre il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f. Pour montrer ceci par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f de $C([0,1],\mathbb{R})$. Regardons les fonctions f_k définies par $f_k(x) = 2k(1-kx)$ si $x \in [0, \frac{1}{k}]$ et $f_k(x) = 0$ si $x > \frac{1}{k}$. Alors $f_k \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $\|f_k\|_\infty = 2k$ alors que $\|f_k\|_1 = 1$. On obtient $2k \leqslant C.1$ ce qui est contradicoire pour k assez grand. Cela prouve que les normes ne sont pas équivalentes.

(b) Comme les métriques sont définies par des normes et que les normes ne sont pas équivalentes alors les métriques ne définissent pas la même topologie.

Correction de l'exercice 6478 ▲

(a) On montre facilement

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_4 \leqslant 2N_3.$$

(b) Par contre il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_4$ ou $N_2 \leqslant CN_4$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_4$ on regarde f_k définie par $f_k(x) = x^k$, après calcul on obtient $N_3(f_k) = k+1$ et $N_4(f_k) = 2$, pour k suffisament grand on obtient une contradiction. Comme N_1 et N_2 sont équivalentes on va prouver qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_1$. On prend g_k, définie par $g_k(x) = 1 + \sin(2\pi kx)$. Alors $N_1(g_k) = 2$ et $N_3(g_k) = 4k$, ce qui prouve le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 6479 ▲

(a) i. Par exemple une suite constante $x_n = a$ pour tout n.

ii. Par exemple $x_n = \frac{1}{n}$ et $a = 0$.

iii. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable on peut trouver une suite x_n telle que $A = \{x_1, x_2, \ldots\} = \mathbb{Q}$. On prend $a = \sqrt{2}$ alors $a \in \bar{A} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) C'est juste les définitions : un point d'accumulation de A est toujours une valeur d'adhérence de A.

Correction de l'exercice 6480 ▲

(a) (Correction pour $n = 1$, pour $n > 1$ remplacer les intervalles par des boules.) Comme 0 est isolé soit $I =]-\varepsilon, +\varepsilon[$ un voisinage de 0 tel que $I \cap G = \{0\}$. Soit $g \in G$ et considérons $I_g = g + I =]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$. Supposons, par l'absurde, que $I_g \cap G$ ne soit pas réduit à g. Alors il existe $g' \in I_g \cap G$, $g' \neq g$. Mais $g - \varepsilon < g' < g + \varepsilon$ et donc $g - g' \in I$ comme G est un groupe on a $g - g' \in G$ et on a $g - g' \neq 0$. On a donc trouvé un élément $g - g' \in G \cap I$ qui n'est pas 0. Ce qui est une contradiction.

Pour montrer que G est discret (c'est-à-dire G est dénombrable et ses points sont isolés) on remarque que la distance entre deux éléments de G est au moins ε donc pour $J_g =]g - \frac{\varepsilon}{2}, g + \frac{\varepsilon}{2}[$ on a $g \neq g'$

implique $J_g \cap J_{g'} = \varnothing$. Pour chaque $g \in G$ on choisit $q(g) \in \mathbb{Q} \cap J_g$, ce qui donne une application : $\Phi : G \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $\Phi(g) = q(g)$, et Φ est injective, donc G est dénombrable.

Montrons que G est fermé : soit (g_n) une suite de G qui converge vers $g \in \mathbb{R}$. Pour N assez grand et pour tout $n \geqslant N$ on a $|g_n - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Pour $n \geqslant N$ on a $|g_n - g_N| \leqslant |g_n - g| + |g - g_N| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Donc comme $g_N \in J_{g_N}$ alors $g_n \in J_{g_N}$ également, or J_{g_N} ne contient qu'un seul élément de G donc $g_n = g_N$ pour tout $n \geqslant N$. La suite est donc stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang) donc la limite g vaut g_N et en particulier $g \in G$.

(b) Supposons $G \neq \{0\}$. Soit $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$. Comme 0 est isolé alors $a > 0$. Comme G est fermé alors $a \in G$. Soit $g \in G$. Soit $k = E(\frac{g}{a})$ alors $k \leqslant \frac{g}{a} < k+1$. Donc $0 \leqslant g - ka < a$. Or $g - ka$ est dans G et dans $\mathbb{R}_+$, comme il est plus petit que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ alors nécessairement $g - ka = 0$, soit $g = ka \in a\mathbb{Z}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on cherche $g \in G \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Comme 0 est un point d'accumulation de G il existe $h \in G$ tel que $0 < h < \varepsilon$ pour $k = E(\frac{x}{h})$, on a $kh \leqslant x < kh + h$, donc $g = kh \in G \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

Pour un groupe G quelconque soit 0 est isolé, soit 0 est un point d'accumulation. Si en plus G est fermé alors soit $G = a\mathbb{Z}$ ou $G = \{0\}$, soit $\bar{G} = \mathbb{R}$ donc $G = \mathbb{R}$. Les sous-groupes fermés de $(\mathbb{R}, +)$ sont donc 0, $\mathbb{R}$ et les $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

(d) Soit $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Si G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ alors, par les questions précédentes, il existe $a > 0$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. En particulier $1 \in G$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = ka$ de même $\alpha \in G$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = k'a$. Par division $\alpha = \frac{k'}{k}$. Ce qui contredit $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Donc $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définissons $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ par $t \mapsto e^{2i\pi t}$ (S^1 est le cercle de $\mathbb{C}$ des nombre complexes de module 1). Alors Φ est continue et surjective. Comme Φ est continue alors pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ on $\Phi(\bar{A}) \subset \overline{\Phi(A)}$. Appliqué à l'ensemble $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, on a $\bar{G} = \mathbb{R}$ donc $\Phi(\bar{G}) = S^1$ car Φ est surjective ; d'autre part $\Phi(G) = \{e^{2i\pi k\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Donc $S^1 = \Phi(\bar{G}) \subset \overline{\Phi(G)} = \overline{\{e^{2i\pi k\alpha}\}}$. L'adhérence de $\{e^{2i\pi k\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est donc le cercle S^1 tout entier.

Correction de l'exercice 6481 ▲

(a) définit une topologie.

(b) ne définit pas une topologie, car $\{a\} \cup \{b,d\} = \{a,b,d\}$ n'est pas dans la collection.

(c) ne définit pas une topologie, car $\{a,c,d\} \cap \{b,c,d\} = \{c,d\}$ n'est pas dans la collection.

Correction de l'exercice 6482 ▲

Il faut donc démontrer que la collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ contenant $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et tous les ensembles finis vérifie les propriétés d'une collection d'ensembles fermés :

— toute intérsection d'ensembles fermés est fermé ;

— toute réunion finie d'ensembles fermés est fermé ;

— $\emptyset$ et tout l'espace sont des fermés.

Les trois propriétés sont évidemment vérifiées dans ce cas.

La topologie ainsi définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas séparée. En effet deux ouverts non-vides Ω et Ω' sont sous la forme $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ et $\Omega' = \mathbb{R} \setminus F'$, où F, F' sont ou bien finis ou bien vides. Alors $\Omega \cap \Omega' = \mathbb{R} \setminus (F \cup F')$ n'est pas vide, car sinon ceci impliquerait que $\mathbb{R} = F \cup F'$ est finie ou vide, ce qui est faux.

Correction de l'exercice 6483 ▲

(a) Supposons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{T}$, et soit $\mathscr{O}$ un ouvert arbitraire dans $\mathscr{T}$ et x un point de $\mathscr{O}$. L'ouvert $\mathscr{O}$ s'écrit comme $\mathscr{O} = \bigcup_{i \in I} B_i$, où $B_i \in \mathscr{B}$ pour tout $i \in I$. En particulier il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in B_{i_0}$.

(b) Réciproquement, si $\mathscr{O}$ est un ouvert arbitraire, pour tout point $x \in \mathscr{O}$ il existe un $B_x \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B_x \subset \mathscr{O}$. Par conséquent $\mathscr{O} = \bigcup_{x\in\mathscr{O}} B_x$.

(c) Il suffit de montrer la propriété énoncée dans (1). Soit $\mathscr{O} \in \mathscr{T}_n$ et soit x un point arbitraire de $\mathscr{O}$. D'après le cours, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathscr{O}$. *Remarque.* Une autre manière de formuler ceci est de dire que l'ensemble des boules ouvertes euclidiennes forme une base de la topologie $\mathscr{T}_n$.
Puisque l'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, il s'ensuit que $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ contient un vecteur $q \in \mathbb{Q}^n$. En particulier $\mathrm{dist}(x,q) < \frac{r}{2}$, d'où $B\left(q, \frac{r}{2}\right) \subset B(x,r) \subset \mathscr{O}$.
L'intervalle $]\mathrm{dist}(x,q), \frac{r}{2}[$ est non-vide, donc il contient un nombre rationnel R. Ainsi $x \in B(q,R) \subset B\left(q, \frac{r}{2}\right) \subset \mathscr{O}$.

(d) Puisque $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}_n$, ce qu'il reste à démontrer est à nouveau la propriété énoncée dans (1). Soit $\mathscr{O}$ un ouvert et $x \in \mathscr{O}$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathscr{O}$.
D'après le cours
$$\mathrm{dist}(y,x) = \|y-x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|y-x\|_\infty .$$
Il s'ensuit que
$$B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) = \left\{y \,;\, \|y-x\|_\infty < \frac{r}{\sqrt{n}}\right\} \subset B(x,r) \subset \mathscr{O}. \tag{43}$$
Or $B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ n'est rien d'autre que le cube de centre de symétrie x et de longueur des arêtes $\frac{2r}{\sqrt{n}}$. En particulier $B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \in \mathscr{B}'$.
On conclut que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{T}_n$.

(e) Soit $]0,1[\in \mathscr{T}_1$. Il n'existe pas d'intervalle de la forme $]-\infty,a[$, $a\in\mathbb{R}$, ou $]b,+\infty[$, $b\in\mathbb{R}$, contenu dans $]0,1[$. Donc $\mathscr{B}''$ n'est pas une base pour $\mathscr{T}_1$.

(f) Supposons que $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. En particulier $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}$.
Pour tout $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, où $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in |||^*$, p.g.c.d. $(m,n) = 1$, on choisit M_a, N_a deux points sur la droite δ_a tels que $O \in]M_a,N_a[$ et $\mathrm{dist}(O,M_a) = \mathrm{dist}(O,N_a) = \frac{1}{n}$. Pour $a = 0$ on choisit $M_0 = (1,0)$, $N_0 = (-1,0)$. Soit
$$\mathscr{C} = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}}]M_a,N_a[.$$
Par hypothèse $\mathscr{C} \in \mathscr{B}' \subset \mathscr{T}$. En particulier, puisque O est un point de $\mathscr{C}$, il existe $r > 0$ tel que $Y \cap B(O,r) \subset \mathscr{C}$. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$ on a donc $\delta_a \cap B(O,r) \subset]M_a,N_a[$, d'où $r < \mathrm{dist}(O,M_a) = \frac{1}{n}$. Comme ceci est vérifié pour tout $n \in |||^*$, il s'ensuit que $r \leqslant 0$, ce qui contredit le choix de r.
On a obtenu une contradiction. Donc on ne peut pas avoir $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$.

Correction de l'exercice 6484 ▲

(a) On vérifie facilement les trois propriétés de métrique.

(b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$. On a que $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. L'inégalité $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ pour $x,y \in \mathbb{R}_+$ est équivalente à
$$\frac{1}{x+y+1} \geqslant \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+1} + 1 \geqslant \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \Leftrightarrow 1+x+y \leqslant (1+x)(1+y).$$
La dernière égalité est évidemment vérifiée pour $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

(c) D'après le cours, la métrique dist et la métrique $\mathrm{dist}_2 = \min(\mathrm{dist}, 1)$ sont topologiquement équivalentes. Ainsi il suffit de montrer que dist_1 et dist_2 sont topologiquement équivalentes.
Puisque $1 + \mathrm{dist} \geqslant 1$, on a que $\mathrm{dist}_1 \leqslant \mathrm{dist}$. Aussi $\mathrm{dist}_1 \leqslant 1$, d'où $\mathrm{dist}_1 \leqslant \mathrm{dist}_2$.
La fonction f étant croissante, pour tout x,y on a que $\mathrm{dist}_1(x,y) = f(\mathrm{dist}(x,y)) \geqslant f(\mathrm{dist}_2(x,y))$. D'autre part, $\mathrm{dist}_2(x,y) \leqslant 1$ implique $f(\mathrm{dist}_2(x,y)) = \frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{1+\mathrm{dist}_2(x,y)} \geqslant \frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{2}$.

On a obtenu que pour tout x,y,

$$\frac{\text{dist}_2(x,y)}{2} \leqslant \text{dist}_1(x,y) \leqslant \text{dist}_2(x,y)\,.$$

Ainsi, les métriques dist_1 et dist_2 sont équivalentes.

Correction de l'exercice 6485 ▲

(a) Comme $d(x,y) = 1$, si $x \neq y$, on a donc que $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. De plus, comme la relation $x \neq y$ est symétrique, on $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in E$. Soient $x,y,z \in E$, supposons $x = z$; ou bien $y = x$ ou bien y est distinct de x. Dans le premier cas, $d(x,z) = d(x,y) = d(y,z) = 0$ et $d(x,z) = \sup(d(x,y),d(y,z))$. Dans le second cas, $d(x,y) = 1$, d'où

$$0 = d(x,x) = d(x,z) < \sup(d(x,y),d(x,y)) = 1.$$

Supposons $x \neq z$; ou y est distinct de x et de z, ou alors on a l'une des possibilités : $y = x$ ou $y = z$. Si les trois éléments sont deux à deux distincts, l'inégalité est trivialement vérifée ($1 = 1$!). Sinon, $d(x,y) = 1$ ou $d(y,z) = 1$, d'où

$$1 = d(x,z) \leqslant \sup(d(x,y),d(y,z)).$$

(b) On suppose que $d(x,y) \neq d(y,z)$. Supposons alors que $d(x,z) < \sup(d(x,y),d(y,z))$ et pour fixer les idées que $d(x,y) = \sup(d(x,y),d(y,z))$. Alors $d(y,z) < d(x,y)$ et $d(x,z) < d(x,y)$, d'où on déduit que $\sup(d(x,z),d(z,y)) < d(x,y)$. Par ailleurs, $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,z),d(z,y))$. Les deux dernières inégalités sont contradictoires.

(c) Soit $B_d(a,r)$ une boule ouverte; montrons qu'elle est fermée. Soit $y \in E \setminus B_d(a,r)$; montrons qu'il existe une boule ouverte $B_d(y,\eta)$, contenue dans $E \setminus B_d(a,r)$. Si on choisit $\eta = r/2$ ou plus généralement $\eta < r$, on obtient que, pour tout $z \in B_d(y,\eta)$,

$$d(a,z) \leqslant \sup(d(a,y),d(y,z)) \leqslant \sup(d(a,y),\eta)).$$

Comme $d(a,y) \geqslant r$ et $d(y,z) < \eta < r$, on a , (d'après la deuxième question), $d(a,z) = d(a,y) \geqslant r$. On en déduit que $B_d(y,\eta) \subset E \setminus B_d(a,r)$ et par suite la boule ouverte $B_d(a,r)$ est aussi fermée.
La preuve du fait que la boule fermée $B'_d(a,r)$ est aussi ouverte est analogue.

(d) Soient $B_d(a,r)$ et $B_d(b,s)$ deux boules ouvertes ayant une intersection non vide et soit $z_0 \in B_d(a,r) \cap B_d(b,s)$. supposons que $r \leqslant s$ et montrons qu'alors $B_d(a,r) \subset B_d(b,s)$. On regarde la distance à b de tout $z \in B_d(a,r)$:

$$d(b,z) \leqslant \sup(d(b,z_0),d(z_0,z)) < \sup(s,d(z_0,z))$$

puisque z_0 est dans $B_d(b,s)$. Par ailleurs, on a : $d(z_0,z) \leqslant \sup(d(z_0,a),d(a,z)) < r$. On obtient une majoration de $d(b,z)$: $d(b,z) < \sup(r,s) = s$, d'où une inclusion de $B_d(a,r)$ dans $B_d(b,s)$.
Conséquence : deux boules ouvertes de même rayon r qui se rencontrent sont confondues.

(e) Soient $A = B_d(a,r)$ et $B = B_d(b,r)$ deux boules ouvertes de rayon r contenues dans une boule fermée $C = B'_d(c,r)$ de même rayon. Montrons que :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \qquad r \leqslant d(a,b) \leqslant r.$$

L'inégalié ultramétrique montre que $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,c),d(c,y))$ et ce sup est inférieure à r puisque chacune des boules A et B est incluse dans C. Donc $d(x,y) \leqslant r$.
Par ailleurs, introduisons dans l'estimation de $d(x,y)$ le centre des boules respectives auxquelles ils appartiennent : $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,a),d(a,y))$. Si $d(x,a) = d(a,y)$, on aurait $d(a,y) < r$ et y serait dans A, ce qui est impossible, A et B étant disjoints d'après la quatrième question. Donc $d(a,y) \neq d(x,a)$, et en fait $d(a,y) > d(x,a)$ et

$$d(x,y) = d(a,y).$$

On voit donc que dans le calcul de la distance $d(x,y)$ on peut remplacer x ou y par le centre de la boule ouverte à laquelle il appartient. Par suite

$$d(x,y) = d(a,b) \geqslant r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

Et finalement

$$r \leqslant d(x,y) \leqslant r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

d'où $d(A,B) = r$.

Correction de [l'exercice 6486 ▲]

(a) Soit $x = \pm\frac{a}{b} = \pm\frac{a'}{b'}$. On écrit $a = p^{\alpha}a_1$, $b = p^{\beta}b_1$,... Alors l'équation $ab' = a'b$ devient $p^{\alpha+\beta'}a_1b'_1 = p^{\alpha'+\beta}a'_1b_1$. Donc $\alpha+\beta' = \alpha'+\beta$ ou encore $\alpha-\beta = \alpha'-\beta'$. Donc $\nu(\pm\frac{a}{b}) = \nu(\frac{a'}{b'})$.

(b) Soit $x = p^{\alpha}x_1$, $y = p^{\beta}y_1$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ et les numérateurs et dénominateurs de $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$ non divisibles par p. Alors $xy = p^{\alpha+\beta}x_1y_1$. Donc $\nu(xy) = \alpha+\beta = \nu(x)+\nu(y)$.

(c) Soit $x,y \in \mathbb{Z}$, $x = p^{\alpha}x_1$, $y = p^{\beta}y_1$. Supposons par exemple $\alpha \leqslant \beta$, alors $x+y = p^{\alpha}(x_1+p^{\beta-\alpha}y_1)$, avec $x_1+p^{\beta-\alpha}y_1 \in \mathbb{Z}$. Donc $\nu(x+y) \geqslant \alpha = \min(\nu(x),\nu(y))$.
Soit maintenant $x = \frac{a}{b}, y = \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$. Alors

$$\begin{aligned}
\nu(x+y) &= \nu(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}) \\
&= \nu(\frac{ab'+a'b}{bb'}) \\
&= \nu(ab'+a'b) - \nu(bb') \\
&\geqslant \min(\nu(ab'),\nu(a'b)) - \nu(bb') \qquad \text{(grâce à l'inégalité sur les entiers),} \\
&\geqslant \min(\nu(a)+\nu(b'),\nu(a')+\nu(b)) - \nu(b) - \nu(b') \\
&\geqslant \min(\nu(a)+\nu(b')-\nu(b)-\nu(b'),\nu(a')+\nu(b)-\nu(b)-\nu(b')) \\
&\geqslant \min(\nu(a)-\nu(b),\nu(a')-\nu(b')) \\
&\geqslant \min(\nu(x),\nu(y)).
\end{aligned}$$

(d) Il est clair que $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et que $d(x,y) = d(y,x)$. Pour un triplet (x,y,z) on a

$$\begin{aligned}
d(x,z) &= p^{-\nu(x-z)} \\
&= p^{-\nu(x-y+y-z)} \\
&\leqslant p^{-\min(\nu(x-y),\nu(y-z))} \\
&\leqslant \max(p^{-\nu(x-y)},p^{-\nu(y-z)}) \\
&\leqslant \max(d(x,y),d(y,z)).
\end{aligned}$$

Correction de [l'exercice 6487 ▲]

(a) i. Si $x \in \mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{E\setminus A}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la boule $B(x,\frac{1}{n})$ rencontre nécessairement A (respectivement $E\setminus A$). Soit donc (axiome du choix) x_n (respectivement y_n) dans $B(x,\frac{1}{n}) \cap A$ (respectivement y_n dans $B(x,\frac{1}{n}) \cap (E\setminus A)$. Alors les suites x_n et y_n répondent clairement à la question : On a une suite (x_n) d'éléments de A et une suite (y_n) d'éléments du complémentaire $E\setminus A$ de A dans E, qui convergent l'une et l'autre vers x.

ii. On voit, qu'en posant pour $n \geqslant 1$, d'une part $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ et d'autre part, $y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$, on obtient, respectivement comme plus haut, une suite de points dans A et une autre dans $E \setminus A$ qui convergent vers le même point $\frac{1}{2} \in A$ qui, adhérent à A comme à son complémentaire dans E est donc dans la frontière de A dans E. Par contre, si $x \in A$ est différent de $+\frac{1}{2}$, on voit que la boule (dans E) de centre x et de rayon $\frac{1}{2} - x > 0$ ne rencontre pas le complémentaire de A et qu'en conséquence $[0, \frac{1}{2}[$ est l'intérieur de A *dans* E.

A contrario une boule de centre 0 et de rayon strictement positif rencontre toujours le complémentaire de A *dans* $\mathbb{R}$ ce qui permet aisément de voir que la frontière de A *dans* $\mathbb{R}$ est $\{0, \frac{1}{2}\}$.

(b) Soient E et F deux espaces métriques respectivement au moyen des distances d et d'.

i. Pour abréger les notations posons : $\delta = \sup(d, d')$. C'est sur $E \times F$, la distance donnée par la formule :

$$\delta\big((x,x'),(y,y')\big) = \sup\big(d(x,y), d'(x',y')\big)$$

Une boule pour δ n'est donc rien d'autre que le produit cartésien d'une boule pour d avec une boule pour d'. Or ces produits cartésiens forment précisément une base d'ouverts qui définie la topologie produit qui est donc aussi la topologie associée à la métrique δ.

ii. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $(x,x') \in A \times B \setminus \mathrm{Fr}(A \times B)$ dans l'intérieur de $A \times B$ dans $E \times F$. Cet intérieur est un ouvert pour la topologie produit. La définition de cette topologie produit d'être engendrée par la base des produits cartésiens d'ouverts de E avec des ouverts de F a comme conséquence l'existence d'un ouvert U_x de E qui contient x et d'un autre $U_{x'}$ de F qui contient x' tels que $U_x \times U_{x'}$ soient entièrement contenus dans cet intérieur de $A \times B$ et donc à fortiori dans $A \times B$ lui même. Mais celà n'est possible que si U_x et $U_{x'}$ sont respectivement entièrement inclus dans A et B ce qui implique que x et x' sont respectivement intérieurs dans A et B. Réciproquement si x est intérieur à A et x' intérieurs à B et que U_x et $U_{x'}$ soient alors des ouverts pour lesquels $x \in U_x \subset A$ et $x' \in U_{x'} \subset B$, on voit que $U_x \times U_{x'} \subset A \times B$ est un ouvert pour la topologie qui contient (x,x') qui est donc intérieur à $A \times B$. $A \setminus \mathrm{Fr}(A)$ de A dans E avec l'intérieur $B \setminus \mathrm{Fr}(B)$ de B dans F.

(c) E et F sont toujours comme dans la deuxième question çi dessus.

i. Si (ξ_n, ξ'_n) est une suite de points dans le complémentaire $E \times F \setminus A \times B$ de $A \times B$ dans $E \times F$, désignons par N_1 (respectivement N_2) l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $\xi_n \notin A$ (respectivement $\xi'_n \notin B$.) L'hypothèse montre que : $\mathbb{N} = N_1 \cup N_2$. $\mathbb{N}$ étant un ensemble infini, il faut bien qu'au moins l'une des deux parties N_1 ou N_2 le soit aussi. Si par exemple N_1 est infini, on peut ranger ses éléments en ordre croissant

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

mais alors, par définition, la suite extraite ξ_{n_k} a tous ses termes dans $E \setminus A$. Mutatis mutandis lorsque N_2 est infini, ce qui est assuré dès lors que N_1 ne le serait pas.

ii. Commençons par montrer, par exemple, que : $\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B} \subset \mathrm{Fr}(A \times B)$. En effet si $(x,x') \in \mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}$, il existe une suite b_n dans B qui converge vers $x' \in \bar{B}$. De la même manière, on trouve une suite a_n d'éléments de A qui converge vers $x \in \mathrm{Fr}(A) \subset \bar{A}$. Mais aussi, comme on l'a vu plus haut, une suite d'éléments c_n dans le complémentaire $E \setminus A$ de A dans E qui converge aussi vers x. Mais alors (a_n, b_n) est une suite de points de $A \times B$ qui converge vers (x,x') et (c_n, b_n) est une suite de points du complémentaire de $A \times B$ qui converge aussi vers (x,x') qui se trouve donc à la fois dans l'adhérence de $A \times B$ et de son complémentaire cqfd. En renversant les rôles de A et B, on voit comment montrer que : $\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B) \subset \mathrm{Fr}(A \times B)$. Ne reste donc plus qu'à montrer l'inclusion : $\mathrm{Fr}(A \times B) \subset \big(\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)\big)$. Or, $(x,x') \in \mathrm{Fr}(A \times B)$, est la limite d'une suite de points (ξ_n, ξ'_n) dans le complémentaire $E \times F \setminus A \times B$ de $A \times B$ dans $E \times F$, comme aussi la limite d'une suite de points (η_n, η'_n) de $A \times B$, deuxième observation qui montre immédiatement que $x \in \bar{A}$ et $x' \in \bar{B}$. Enfin on a vu en a) immédiatement plus haut, qu'on pouvait extraire ξ_{n_k} dans $E \setminus A$ de la suite x_n ou $\xi'_{n'_k}$ dans $E \setminus B$ de la suite x'_n qui assure que x est dans l'adhérence de $E \setminus A$ ou que x' est dans celle de $F \setminus B$ ce qui assure que $x \in \mathrm{Fr}(A)$ ou $x' \in \mathrm{Fr}(B)$, et démontre la dernière inclusion recherchée.

(d) i. L'hypothèse $(x,x') \notin A \times B$ et $x \in A$ implique que $x' \notin B$, si bien que $E \times \{x'\}$ est entièrement contenu dans le complémentaire de $A \times B$. Evidemment $y \notin A$ implique que $\{y\} \times F$ est aussi entièrement contenu dans ce même complémentaire de $A \times B$.

Mais alors la partie $E \times \{x'\} \cup \{y\} \times F$ est connexe pour la raison que $E \times \{x'\}$ et $\{y\} \times F$ respectivement homéomorphes à E et F sont connexes et que leur intersection qui est le point (y,x') est non vide. Cette partie répond donc à la question.

ii. Prenons $(x,x') \notin A \times B$ et $(y,y') \notin A \times B$. exactement comme ci-dessus et qui sont dans la même composante connexe de $(E \times F) \setminus (A \times B)$. Soit maintenant $(z,z') \in (E \times F) \setminus (A \times B)$; si $z \notin A$, le raisonnement du a) se répète pour voir que (z,z') est raccordé à (x,x') par une partie connexe. Mais si $z \in A$, le a) montre que (z,z') est raccordé à (y,y') par une partie connexe, et donc aussi à (x,x') qui a donc $(E \times F) \setminus (A \times B)$ tout entier comme composante connexe.

Correction de l'exercice 6510 ▲

(a) L'ensemble $\emptyset$ est réunion vide de demi-droites. Il est clair que $\mathbb{C}$ est dans $\mathscr{T}$ si, lorsque $z_0 = 0$, toute demi-droite $[0, \rightarrow [$ est admissible (ce qui aurait dû être précisé dans l'énoncé...Excuses !) ; par ailleurs cette famille d'ensembles est bien stable par réunion quelconque. Remarquons que si $U \in \mathscr{T}, z \in U \iff [z, \rightarrow [\subset U$ (c'est-à-dire les demi-droites forment une base d'ouverts). En effet si $z \in U$ il existe z' tel que $z \in [z', \rightarrow [\subset U$ et a fortiori $[z, \rightarrow [\subset U$. Ainsi la famille est stable par intersection finie : si $z \in U \cap U'$, $[z, \rightarrow [\subset U \cap U'$ et $U \cap U' \in \mathscr{T}$. On a bien une topologie.

Cette topologie n'est pas séparée puisque, si $z \in [z', \rightarrow [$, tout voisinage de z' contient z.

(b) La topologie n'étant pas même quasi-séparée, un singleton peut ne pas être fermé. Soit z_0 ; $z \in \overline{\{z_0\}}$ si et seulement si tout voisinage de z rencontre z_0 ; puisque tout voisinage de z contient $[z, \rightarrow [$, c'est équivalent à $z_0 \in [z, \rightarrow [$ ou encore $z \in [0, z_0]$.

$\{0\}$ est le seul singleton fermé.

(c) On déduit de ce qui précède que si $A \subset X$, $\overline{A} = \cup_{z \in A} [0,z]$. En effet si $z \in A$, $\overline{A}$ contient $\overline{\{z\}}$ et donc le segment $[0,z]$; réciproquement, si $z' \in [0,z]$ avec $z \in A$, $[z', \rightarrow [$, et donc tout voisinage de z', rencontre A ; ainsi $z' \in \overline{A}$.

Supposons A étoilé par rapport à 0 ; A contient $\cup_{z \in A} [0,z] = \overline{A}$ et A est fermé.

Réciproquement supposons A fermé ; $A = \cup_{z \in A} [0,z]$ et en particulier A est étoilé par rapport à 0.

Correction de l'exercice 6554 ▲

(a) i. Si A est compact et $B = \{b\}$ avec $b \notin A$. Soit $a \in A$ alors $a \neq b$ donc il existe un voisinage ouvert de a, U_a et un voisinage ouvert de b, V_a tels que $U_a \cap V_a = \varnothing$. Bien évidemment $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$. Comme A est compact on peut extraire un ensemble fini $\mathscr{A} \subset A$ tel que $A \subset \bigcup_{a \in \mathscr{A}} U_a =: U^b$. Notons alors $V^b := \bigcap_{a \in \mathscr{A}} V_a$. U^b est ouvert comme union d'ouverts et V^b est ouvert comme intersection *finie* d'ouverts. De plus $U^b \cap V^b = \varnothing$.

ii. Maintenant B est compact. Pour chaque $b \in B$ le point précédent nous fournit U^b et V^b disjoints qui sont des voisinages ouverts respectifs de A et b. On a $B \subset \bigcup_{b \in B} V^b$. On extrait un ensemble fini $\mathscr{B}$ de telle sorte que $B \subset \bigcup_{b \in \mathscr{B}} V^b =: V'$. V' est un voisinage ouvert de B. Et si $U' := \bigcap_{b \in \mathscr{B}} U^b$ alors U' est un ouvert contenant A, et $U' \cap V' = \varnothing$.

(b) Supposons que ce ne soit pas vrai alors

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in X \qquad (d(x,K) < r) \text{ et } x \notin U.$$

En prenant $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nous obtenons une suite (x_n) tel que $d(x_n,K) < \frac{1}{n}$ et $x_n \notin U$. Comme $d(x_n,K) < \frac{1}{n}$ alors il existe $y_n \in K$ tel que $d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$. Nous avons une suite (y_n) dans K compact donc on peut en extraire une sous-suite $y_{\phi(n)}$ qui converge ; notons ℓ sa limite, alors $\ell \in K$ car K est compact.

Regardons la suite extraite $(x_{\phi(n)})$, montrons quelle converge également vers ℓ :

$$d(x_{\phi(n)},\ell) \leqslant d(x_{\phi(n)},y_{\phi(n)}) + d(y_{\phi(n)},\ell)$$

Les deux termes à droite de l'inégalité tendent vers 0, donc $(x_{\phi(n)})$ tend vers ℓ. Soit $F = X \setminus U$ alors F est une fermé (car U est ouvert) et $(x_{\phi(n)}) \in F$ donc la limite ℓ est dans F également. Donc $\ell \notin U$ et comme $K \subset U$ alors $\ell \notin K$. Nous avons montrer deux choses contradictoires $\ell \in K$ et $\ell \notin K$ ce qui prouve le résultat demandé.

Correction de l'exercice 6555 ▲

Nous allons utiliser le fait qu'un ensemble K est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et soit ℓ sa limite. Notons

$$K = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}.$$

Soit (v_n) une suite d'éléments de K. Si (v_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut extraire une sous-suite constante, donc convergente. Sinon (v_n) prend une infinité de valeurs. Nous allons construire une suite convergente(w_n) extraite de (v_n). Soit w_0 le premier des $(v_0,v_1,v_2,\dots)$ qui appartient à $\{u_0,u_1,\dots\}$. Soit w_1 le premier des $(v_1,v_2,\dots)$ qui appartient à $\{u_1,u_2,\dots\}$... Soit w_n le premier des $(v_n,v_{n+1},\dots)$ qui appartient à $\{u_n,u_{n+1},\dots\}$. Alors (w_n) est une suite-extraite de (v_n) et par construction (w_n) converge vers la limite de (u_n), donc vers $\ell \in K$.

Correction de l'exercice 6556 ▲

(a) Notons $\ell = \mathrm{dist}(K,F)$. Alors il existe (x_n) suite d'éléments de K et (y_n) suite d'éléments de F telles que $\|x_n - y_n\| \to \ell$. Comme K est compact alors on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge dans K. Notons $a \in K$ cette limite Alors la suite extraite $(y_{\phi(n)})$ est bornée car

$$\|y_{\phi(n)}\| \leqslant \|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)}\|.$$

La suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge est donc bornée, et la suite $(\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\|)$ qui converge dans $\mathbb{R}$ (vers ℓ) est bornée également. Donc la suite $(y_{\phi(n)})$ est bornée on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(y_{\phi\circ\psi(n)})$. De plus comme F est fermé alors cette suite converge vers $b \in F$. La suite $(x_{\phi\circ\psi(n)})$ extraite de $(x_{\phi(n)})$ converge vers $a \in K$. Et comme nous avons extrait deux suites (x_n) et (y_n) on a toujours $\|x_{\phi\circ\psi(n)} - y_{\phi\circ\psi(n)}\| \to \ell$. A la limite nous obtenons $\|a-b\| = \ell$ avec $a \in K$ et $b \in F$.

(b) Remarque : si K était supposé fermé mais pas compact alors le résultat précédent pourrait être faux. Par exemple pour $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 0\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0\}$ nous avons $d(K,F) = 0$ mais $K \cap F = \varnothing$.

Correction de l'exercice 6557 ▲

Comme E est compact et $E \subset \bigcup_{y\in E} V_y$ il existe un ensemble fini $\mathscr{Y} \subset E$ tel que $E \subset \bigcup_{y\in\mathscr{Y}} V_y$. Sur chaque voisinage V_y, f est bornée par une constante M_y. Notons $M = \max_{y\in\mathscr{Y}} M_y$. Alors f est bornée sur E par M. En effet pour un élément quelconque $x \in E$, il existe $y \in \mathscr{Y}$ tel que $y \subset V_y$ donc $f(x)$ est bornée par M_y donc par M.

Correction de l'exercice 6558 ▲

(a) Soit $x = \lim x_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$; montrons que x est dans F_N. On a $x_N \in F_N$, $x_{N+1} \in F_{N+1} \subset F_N$, $x_{N+2} \in F_{N+2} \subset F_{N+1} \subset F_N$, etc. Donc pour tout $n \geqslant N$ alors $x_n \in F_N$. Comme F_N est fermé, alors la limite x est aussi dans F_N. Ceci étant vrai quelque soit N, alors $x \in \bigcap_N F_N$.
Pour construire un exemple comme demandé il est nécessaire que de toute suite on ne puisse pas extraire de sous-suite convergente. Prenons par exemple dans $\mathbb{R}$, $F_n = [n,+\infty[$, alors $\bigcap_n F_n = \varnothing$.

(b) i. Pour chaque n on prend $x_n \in K_n$, alors pour tout n, $x_n \in K_0$ qui est compact donc on peut extraire une sous-suite convergente. Si x est la limite de cette sous-suite alors $x \in K$. Donc K est non vide.

ii. Par l'absurde supposons que c'est faux, alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \quad \exists x_n \in K_n \text{ tel que } x_n \notin \Omega.$$

De la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers $x \in K$. Or $x_n \in X \setminus \Omega$ qui est fermé donc $x \in X \setminus \Omega$. Comme $K \subset \Omega$ alors $x \notin K$ ce qui est contradictoire.

Correction de l'exercice 6559 ▲

Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

(a) Pour tout $y \in [0,1]$ f est continue en (x,y) donc il existe un $U(y)$ voisinage de x et $[a(y),b(y)]$ voisinage de y tel que pour $(x',y') \in U(y) \times [a(y),b(y)]$ on ait $|f(x,y) - f(x',y')| \leqslant \varepsilon$.

(b) Comme $[0,1] \subset \bigcup_{y\in[0,1]} [a(y),b(y)]$ et que $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ il existe un ensemble fini $\mathscr{Y}$ tel que $[0,1] \subset \bigcup_{y\in\mathscr{Y}} [a(y),b(y)]$. De plus quitte à réduire les intervalles ont peut supposer qu'il sont disjoints et quitte à les réordonner on peut supposer que ce recouvrement s'écrit :

$$[0,1] = [0,t_1] \cup [t_1,t_2] \cup \ldots [t_k,1].$$

(c) Notons $U = \bigcap_{y\in\mathscr{Y}} U(y)$, c'est un voisinage de x car l'intersection est finie. Pour $x' \in U$ nous avons

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(x')| &= \left| \int_0^1 f(x,y)dy - \int_0^1 f(x',y)dy \right| \\
&\leqslant \int_0^1 |f(x,y) - f(x',y)|dy \\
&\leqslant \int_0^{t_1} |f(x,y) - f(x',y)|dy + \int_{t_1}^{t_2} \cdots + \int_{t_k}^1 |f(x,y) - f(x',y)|dy \\
&\leqslant \varepsilon(t_1 - 0) + \varepsilon(t_2 - t_1) + \cdots + \varepsilon(1 - t_k) \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc g est continue.

Correction de l'exercice 6560 ▲

(a) Pour montrer que $A+B$ est fermé, nous allons montrer que toute suite de $A+B$ qui converge, converge vers un élément de $A+B$. Soit (x_n) un suite de $A+B$ qui converge vers $x \in E$. Alors il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. Comme A est compact on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. Alors $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$ est convergente vers $x - a$. Notons $b = x - a$ comme B est fermé alors $b \in B$. Maintenant $x = a + b$ donc $x \in A + B$.

(b) Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0\}$, soit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0\}$. Alors $F + G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \cup \{0\} \times [0,+\infty[$ qui n'est pas un fermé (ni un ouvert).

Correction de l'exercice 6561 ▲

(a) Supposons f propre et soit F un fermé. Montrons que $f(F)$ est un fermé. Soit (y_n) une suite de $f(F)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Notons K l'union de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et de $\{y\}$. Alors K est compact. Comme $y_n \in f(F)$, il existe $x_n \in F$ tel que $f(x_n) = y_n$. En fait $x_n \in f^{-1}(K)$ qui est compact car f est propre. Donc de (x_n) on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$, on note x la limite de cette sous-suite. Comme $x_{\phi(n)} \in F$ et que F est fermé alors $x \in F$. Comme f est continue alors $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)})$ tend vers $f(x)$, or $y_{\phi(n)}$ tend aussi vers y. Par unicité de la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(F)$ et $f(F)$ est fermé.

(b) Dire $\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ est équivalent à

$$\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).$$

i. Supposons f propre, soit $M > 0$. Alors $B(0,M)$ est un compact (nous sommes dans $\mathbb{R}^n$) donc $f^{-1}(B(0,M))$ est compact donc borné, c'est-à-dire qu'il existe $m > 0$ tel que $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Donc si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$.

ii. Réciproquement, soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue et que K est fermé alors $f^{-1}(K)$ est un fermé. Reste à montrer que $f^{-1}(K)$ est borné. Comme K est compact alors il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$, par hypothèse il existe $m > 0$ tel que si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$, ce qui s'écrit aussi par contraposition : "si $f(x) \in B(0,M)$ alors $x \in B(0,m)$", donc $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Or $K \subset B(0,M)$ donc $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Donc $f^{-1}(K)$ est borné donc compact.

Correction de l'exercice 6562 ▲

(a) Soit f_n la fonction affine suivante $f_n(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{n+1}]$ et pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$. Sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ on définit une "dent" qui vaut 0 aux extrémités et 1 au milieu du segment. Alors si B dénote la boule unité fermée (centrée en la fonction nulle), nous avons $d_\infty(f_n, 0) = \sup |f_n(t)| = 1$ donc $f_n \in B$. Par contre si $p \neq q$ alors $d(f_p, f_q) = 1$ donc la suite (f_n) et toute sous-suite ne sont pas de Cauchy. Si B était compact alors on pourrait extraire une sous-suite convergente donc de Cauchy. Contradiction.

(b) Notons $x^n = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$ la suite de l^∞ (le 1 est à la n-ième place). Alors x^n est dans la boule unité fermée B centrée en 0. De plus si $p \neq q$, alors $d_\infty(x^p, x^q) = 1$. Donc toute sous-suite extraite de (x_n) n'est pas de Cauchy donc ne peut pas converger. Donc B n'est pas compact.

Correction de l'exercice 6564 ▲

(a) Si f a deux points fixes $x \neq y$, alors $d(x,y) = d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Ce qui est absurde. Donc f a au plus un point fixe.

(b) f est continue et X compact donc $X_1 = f(X)$ est compact, par récurrence si X_{n-1} est compact alors $X_n = f(X_{n-1})$ est compact. De plus $f : X \to X$, donc $f(X) \subset X$ soit $X_1 \subset X$, puis $f(X_1) \subset f(X)$ soit $X_2 \subset X_1$, etc. Par récurrence $X_n \subset X_{n-1} \subset \cdots \subset X_1 \subset X$. Comme chaque X_n est non vide alors Y n'est pas vide (voir l'exercice 6557).

(c) Montrons d'abord que $f(Y) \subset Y$. Si $y \in Y$, alors pour tout $n \geqslant 0$ on a $y \in X_n$ donc $f(y) \in f(X_n) = X_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Donc pour tout $n > 0$, $f(y) \in X_n$, or $f(y) \in X_0 = X$. Donc $f(y) \in Y$.

Réciproquement montrons $Y \subset f(Y)$. Soit $y \in Y$, pour chaque $n \geqslant 0$, $y \in X_{n+1} = f(X_n)$. Donc il existe $x_n \in X_n$ tel que $y = f(x_n)$. Nous avons construit (x_n) une suite d'élément de X compact, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$. Notons x la limite, par l'exercice 6557, $x \in Y$. Alors $y = f(x_{\phi(n)})$ pour tout n et f est continue donc à la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(Y)$.

Soit $y \neq y' \in Y$ tel que $d(y,y') = \operatorname{diam} Y > 0$. Comme $Y = f(Y)$ alors il existe $x, x' \in Y$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Or $d(y,y') = d(f(x), f(x')) < d(x,x')$. On a trouvé deux élements de Y tel $d(x,x')$ est strictement plus grand que le diamètre de Y ce qui est absurde. Donc $y = y'$ et le diamètre est zéro.

(d) Comme le diamètre est zéro alors Y est composé d'un seul point $\{p\}$ et comme $f(Y) = Y$ alors $f(p) = p$. Donc p a un point fixe et nous savons que c'est le seul. Par la construction de Y pour tout point $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers p.

Correction de l'exercice 6565 ▲

(a) Comme $E\times E$ est compact alors de la suite (a_n,b_n) on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)},b_{\phi(n)})$ qui converge vers (a_∞,b_∞). Soit $\varepsilon>0$ il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que si $k\geqslant n$ alors $d(a_{\phi(k)},a_\infty)<\frac{\varepsilon}{2}$ et $d(b_{\phi(k)},b_\infty)<\frac{\varepsilon}{2}$. Donc en particulier $d(a_{\phi(n+1)},a_{\phi(n)})\leqslant d(a_{\phi(n+1)},a_\infty)+d(a_\infty,a_{\phi(n)})<\varepsilon$. La propriété pour f s'écrit ici $d(a_k,b_{k'})\leqslant d(a_{k+1},b_{k'+1})\geqslant$. Donc $d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)},a_0)\leqslant d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)+1},a_1)\leqslant\ldots\leqslant d(a_{\phi(n+1)-1},a_{\phi(n)-1})\leqslant d(a_{\phi(n+1)},a_{\phi(n)})<\varepsilon$. Donc pour $k=\phi(n+1)-\phi(n)$, sachant que $a_0=a$ alors $d(a_k,a)<\varepsilon$. Même chose avec (b_n).

(b) i. Soit $a\in E$ et $\varepsilon>0$ alors il existe $k\geqslant 1$ tel que $a_k=f^k(a)\in f(E)$ avec $d(a,a_k)<\varepsilon$. Donc $f(E)$ est dense dans E.

ii. Soit $u_n=d(a_n,b_n)$. Alors par la propriété pour f, (u_n) est une suite croissante de $\mathbb{R}$. Comme E est compact alors son diamètre est borné, donc (u_n) est majorée. La suite (u_n) est croissante et majorée donc converge vers u.

Maintenant $u_n-u_0\geqslant 0$ et

$$0\leqslant u_n-u_0=d(a_n,b_n)-d(a,b)\leqslant d(a_n,a)+d(a,b)+d(b,b_n)-d(a,b)=d(a_n,a)+d(b_n,b).$$

Donc u_n tend vers u_0. Comme (u_n) est croissante alors $u_n=u_0$ pour tout n. En particulier $u_1=u_0$ donc $d(a_1,b_1)=d(a_0,b_0)$ soit $d(f(a),f(b))=d(a,b)$. Donc f est une isométrie.

iii. f est une isométrie donc continue (elle est 1 lipschitziènne !). E est compact donc $f(E)$ est compact donc fermé or $f(E)$ est dense donc $f(E)=E$. Donc f est surjective

---

Correction de l'exercice 6566 ▲

Dire que $i:(X,|.|)\to(X,d)$ est continue c'est exactement dire que tout ensemble U ouvert pour d est ouvert pour $|.|$ (car $i^{-1}(U)=U$).

(a) Soit K un compact pour $|.|$. Soit U_i, $i\in I$ tels que $K\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ et tels que U_i soient des ouverts pour d. Alors les U_i sont aussi des ouverts pour la topologie définie par $|.|$. Comme K est compact pour $|.|$ alors on peut extraire un ensemble fini $J\subset I$ tel que $K\subset\bigcup_{i\in J}U_i$. Donc K est aussi compact pour d.

Si F est un fermé pour $|.|$ alors $F\subset[0,1]$ est compact pour $|.|$ Donc compact pour d, donc fermé pour d.

(b) Si U est un ouvert pour d alors U est un ouvert pour $|.|$. Car i est continue. Réciproquement si U est un ouvert pour $|.|$ alors $F=X\setminus U$ est un fermé pour $|.|$ donc F est un fermé pour d par la question précédente, donc $U=X\setminus F$ est un ouvert pour d. Conclusion les ouverts pour $|.|$ et d sont les mêmes donc $|.|$ et d définissent la même topologie.

Correction de l'exercice 6614 ▲

(a) Sens direct. Si f est continue alors $\{x\mid f(x)<\lambda\}=f^{-1}(]-\infty,\lambda[)$ est un ouvert comme image réciproque par une application continue de l'intervalle ouvert $]-\infty,\lambda[$. De même avec $]\lambda,+\infty[$.

Réciproque. Tout d'abord, tout intervalle ouvert $]a,b[$, $(a<b)$ peut s'écrire

$$]a,b[=]-\infty,b[\cap]a,+\infty[.$$

Donc

$$f^{-1}(]a,b[)=f^{-1}(]-\infty,b[)\cap f^{-1}(]a,+\infty[)$$

est une intersection de deux ouverts donc un ouvert de X. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O peut s'écrire comme l'union dénombrables d'intervalles ouverts :

$$O=\bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[.$$

Donc

$$f^{-1}(O)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(]a_i,b_i[)$$

est une union d'ouvert donc un ouvert de X .

(b) Nous le faisons d'abord pour un intervalle ouvert $]a,b[$.

$$]a,b[=\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}].$$

Donc

$$f^{-1}(]a,b[)=\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}f^{-1}([a+\frac{1}{j},b-\frac{1}{j}]),$$

est une union dénombrable de fermés. Maintenant comme pour la première question, tout ouvert O de $\mathbb{R}$ s'écrit $O=\bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[$, avec I dénombrable. Donc on peut écrire

$$f^{-1}(O)=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}f^{-1}([a_i+\frac{1}{j},b_i-\frac{1}{j}]),$$

qui est une union dénombrable de fermés (mais c'est un ouvert !).

Correction de l'exercice 6615 ▲

(a) Soit F l'application définie par $F(f)=\int_0^1|f|$. Alors

$$|F(f)-F(g)|=|\int_0^1|f|-|g||\leqslant\int_0^1|f-g|=d_1(f,g)\leqslant d_\infty(f,g).$$

Donc pour les deux distances d_1 et d_∞, F est lipschitzienne de rapport 1.

(b) Soit $\varepsilon>0$ alors en posant $\eta=\varepsilon$ on obtient la continuité : si $d(x,y)<\varepsilon$ alors

$$|\ell(x)-\ell(y)|\leqslant\varepsilon.$$

Donc ℓ est continue, et $c_0=\ell-1(\{0\})$ est un fermé , car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue ℓ.

Correction de l'exercice 6616 ▲

Soit $A=\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$. Alors soit $C=X\setminus A=\{x\in X\mid f(x)\neq g(x)\}$. Soit $x\in C$ comme $f(x)\neq g(x)$ et que Y est séparé, il existe un voisinage ouvert V_1 de $f(x)$ et V_2 de $g(x)$ tel que $V_1\cap V_2=\varnothing$. Notons $U=f^{-1}(V_1)\cap g^{-1}(V_2)$. Alors U est un ouvert de X contenant x. Maintenant pour $x'\in U$, alors $f(x')\in V_1$, $g(x')\in V_2$ donc $f(x')\neq g(x')$, donc $x'\in C$. Bilan U est inclus dans C. Donc C est ouvert.

Application : si A est dense dans X alors $\bar{A}=X$, mais comme A est fermé $A=\bar{A}$. Donc $A=X$, c'est-à-dire f et g sont égales partout.

Correction de l'exercice 6617 ▲

(a) Soit P un polynôme, et F un fermé de $\mathbb{R}$. Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $P(F)$, et $y\in\mathbb{R}$ sa limite. Il existe $x_n\in F$ tel que $y_n=P(x_n)$. Comme (y_n) est bornée (car convergente) alors (x_n) aussi est bornée, en effet un polynôme n'a une limite infini qu'en $\pm\infty$. Comme (x_n) est une suite bornée de $\mathbb{R}$ on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$ de limite x. Comme F est fermé, $x\in F$. Comme P est continue (c'est un polynôme) alors $y_{\phi(n)}=P(x_{\phi(n)})\to P(x)$, mais $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y. Par unicité de la limite $y=P(x)\in P(F)$. Donc $P(F)$ est fermé.

(b) Soit $X=Y=\mathbb{R}$ et $H=(xy=1)$ est un fermé de $X\times Y$, mais si $\pi(x,y)=x$ alors $\pi(H)=\mathbb{R}^*$ n'est pas un fermé de $X=\mathbb{R}$.

(c) A vérifier...

Correction de l'exercice 6618 ▲

(a) $\Rightarrow$. Soit f continue et $y \in f(\bar{A})$. Il existe $x \in \bar{A}$ tel que $y = f(x)$. Soit $x_n \in A$ tel que (x_n) converge vers x. Alors $y_n = f(x_n) \in A$. Comme f est continue alors (y_n) converge vers $f(x) = y$. Donc y est adhérent à $f(A)$. Conclusion $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$. Soit $f : X \to Y$ et soit F un fermé de Y. Notons $A = f^{-1}(F)$. Alors $f(A) \subset F$ donc l'équation $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ devient $f(\bar{A}) \subset \bar{F} = F$ car F est fermé. Donc $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Donc $\bar{A} \subset A$, d'où $\bar{A} = A$. Donc A est fermé. Bilan l'image réciproque de tout fermé F est un fermé, donc f est continue.

Application : si A est dense, alors $\bar{A} = X$, et sous les hypothèses précédentes alors $f(A)$ est dense dans l'image de X par f : en effet $\overline{f(A)}$ contient $f(\bar{A}) = f(X)$

(b) $\Rightarrow$. Soit f fermé et soit $A \subset X$. Alors $A \subset \bar{A}$ donc $f(A) \subset f(\bar{A})$, donc comme $\bar{A}$ est un fermé et f est fermée alors $f(\bar{A})$ est un fermé contenant $f(A)$. Mais comme $\overline{f(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$ alors $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

$\Leftarrow$. La relation pour un fermé F donne $\overline{f(F)} \subset f(\bar{F}) = f(F)$. Donc $\overline{f(F)} = f(F)$. Donc $f(F)$ est fermé. Donc f est fermée.

Même type de raisonnement avec f ouverte.

Correction de l'exercice 6621 ▲

(a) Supposons que f ne tende pas vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour tout $n \geqslant 0$, il existe $x_n \geqslant n$ tel que $|f(x_n)| > \varepsilon$. Sans perte de généralité nous supposons $f(x_n) > \varepsilon$. Appliquons l'uniforme continuité : soit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, Il existe η tel que pour $|x_n - y| \leqslant \eta$ on ait $|f(x_n) - f(y)| < \varepsilon'$. Donc pour un tel y, $f(y) > \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Donc f est strictement positive sur $[x_n - \eta, x_n + \eta]$. Notons alors (p_n) définie par $p_{2n} = x_n - \eta$, $p_{2n+1} = x_n + \eta$. Soit $I(x) = \int_0^x f$. Alors $I(p_{2n+1}) - I(p_{2n}) = \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} f(t)dt \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\eta = \varepsilon\eta$. Donc la suite $(I(p_n))$ n'est pas de une suite de Cauchy, donc ne converge pas, donc la fonction $x \mapsto I(x)$ ne converge pas non plus, et donc $\int_0^\infty f(t)dt$ diverge.

(b) Par le changement de variable $u = t^2$ puis une intégration par partie, on montre que l'intégrale $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ converge, mais comme $f(x) = \sin(x^2)$ ne tend pas vers 0 alors f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6669 ▲

Pour $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on définit $\|x\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$.

(a) Sens $\Leftarrow$. Soit $M > 0$ tel que $\|B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\|$. Montrons que B en continue au point $x = (x_1, x_2)$ fixé. Soit $y = (y_1, y_2)$ alors

$$B(x+y) - B(x) = B(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - B(x_1, x_2) = B(x_1, y_2) + B(x_2, y_1) + B(y_1, y_2).$$

Donc

$$\|B(x+y) - B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|y_2\| + M\|x_2\|\|y_1\| + M\|y_1\|\|y_2\|.$$

Pour $\|y_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M\|x_1\|}$ on a $M\|x_1\|\|y_2\| \leqslant \varepsilon$ (si $x_1 = 0$ il n'y a rien à choisir ici). Pour $\|y_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M\|x_2\|}$ on a $M\|x_2\|\|y_1\| \leqslant \varepsilon$ (si $x_2 = 0$ il n'y a rien à choisir ici). Enfin pour $\|y_1\| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ et $\|y_2\| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ on a $M\|y_1\|\|y_2\| \leqslant \varepsilon$. Donc en prenant $\eta = \min(\frac{\varepsilon}{M\|x_1\|}, \frac{\varepsilon}{M\|x_2\|}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}})$, on obtient que pour $\|y\| = \max(\|y_1\|, \|y_2\|) \leqslant \eta$ on a $\|B(x+y) - B(x)\| \leqslant 3\varepsilon$. Ce qui prouve la continuité. Donc B est continue sur $E_1 \times E_2$.

(b) Sens $\Rightarrow$. Si B est continue partout, en particulier elle est continue en 0. Je choisis $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \eta$ alors $\|B(x)\| \leqslant 1$. Donc pour $\|x_1\| \leqslant \eta$ et $\|x_2\| \leqslant \eta$ on a $\|B(x_1, x_2)\| \leqslant 1$. Soit maintenant $y = (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$, $(y_1 \neq 0, y_2 \neq 0)$ on a $(\eta \frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta \frac{y_2}{\|y_2\|})$ de norme $\leqslant \eta$ donc $B(\eta \frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta \frac{y_2}{\|y_2\|}) \leqslant 1$ et par bilinéarité cela fournit : $B(y_1, y_2) \leqslant \frac{1}{\eta^2}\|y_1\|\|y_2\|$, et ce pour tout (y_1, y_2). La constante cherchée étant $\frac{1}{\eta^2}$.

Correction de l'exercice 6670 ▲

Comme L est linéaire il suffit de montrer que L est continue en 0. Supposons que cela ne soit pas vrai, alors il faut nier la continuité de L en 0 qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in E \qquad (\|x\| < \eta \Rightarrow \|L(x)\| < \varepsilon).$$

La négation s'écrit alors :

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall \eta > 0 \qquad \exists x \in E \qquad (\|x\| < \eta \text{ et } \|L(x)\| \geqslant \varepsilon).$$

Soit donc un tel $\varepsilon > 0$ de la négation, pour η de la forme $\eta = \frac{1}{n}$, on obtient y_n tel que $\|y_n\| < \frac{1}{n}$ et $\|L(y_n)\| \geqslant \varepsilon$. On pose $x_n = \sqrt{n} y_n$, alors $\|x_n\| = \sqrt{n}\|y_n\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc (x_n) est une suite de E qui tend vers 0. Par contre $\|L(x_n)\| = \sqrt{n}\|L(y_n)\| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}$, donc la suite $(L(x_n))$ n'est pas bornée. Par contraposition nous avons obtenu le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 6671 ▲

(a) Si f est linéaire et bornée sur la boule unité alors elle est continue (voir le cours ou refaire la démonstration).

(b) Il reste à montrer que f est linéaire : on a déjà $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout x,y reste donc à prouver $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

- Pour $\lambda \in \mathbb{Z}$, c'est une récurrence, $f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$. Puis $f(3x) = f(2x + x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x)$ etc. Donc $f(nx) = nf(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. De plus $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ donc $f(-x) = -f(x)$. Ensuite on a $f(-nx) = -nf(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Bilan : pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, soit $\lambda = \frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{Z}$.
$$f(\frac{p}{q}x) = pf(\frac{1}{q}x) = \frac{p}{q}qf(\frac{x}{q}) = \frac{p}{q}f(q\frac{x}{q}) = \frac{p}{q}f(x).$$
Nous avons utilisé intensivement le premier point.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors il existe une suite (λ_n) d'élément de $\mathbb{Q}$ qui converge vers λ. Fixons $x \in E$.
$$f(\lambda x) - \lambda f(x) = f(\lambda x) - f(\lambda_n x) + f(\lambda_n x) - \lambda f(x) = f((\lambda - \lambda_n)x) + (\lambda_n - \lambda)f(x).$$
Nous avons utilisé le second point. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Pour n assez grand on a $\|(\lambda - \lambda_n)x\| < \varepsilon$. Donc $\|\frac{1}{\varepsilon}(\lambda - \lambda_n)x\| \in B(0,1)$ or f est bornée sur la boule unité donc il existe $M > 0$ tel que $f(\frac{1}{\varepsilon}(\lambda - \lambda_n)x) \leqslant M$ (quelque soit n). Donc $f(\lambda - \lambda_n)x) \leqslant M\varepsilon$ (ε est rationnel donc on peut le "sortir"). De même pour n assez grand on a $(\lambda_n - \lambda)f(x) < \varepsilon$. Maintenant
$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\| \leqslant \|f((\lambda - \lambda_n)x)\| + \|(\lambda_n - \lambda)f(x)\| < M\varepsilon + \varepsilon.$$
Donc pour x, λ fixés, $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|$ est aussi petit que l'on veut, donc est nul ! D'où $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6672 ▲

(a) Pour tout x, $\|S(x)\| = \|x\|$ donc $\|S\| = 1$.

(b) $\|T(f)\|_\infty = \|f \times g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\|g\|_\infty$. Donc pour $f \neq 0$, $\frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leqslant \|g\|_\infty$. De plus en g, on obtient $\frac{\|T(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \frac{\|g^2\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \|g\|_\infty$. Donc $\|T\| = \|g\|_\infty$.

(c) On a $|u(f)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)|dx$ donc $\|u\| \leqslant \int_0^1 |g(x)|dx$. Si g ne change pas de signe sur $[0,1]$ alors pour f la fonction constant égale à 1, on obtient $|u(f)| = \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)|dx$ donc $\|u\| = \int_0^1 |g(x)|dx$. Si g change de signe alors il ne le fait qu'une fois et en $\frac{1}{2}$. Soit h_n la fonction définie par $h_n(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, $h_n(x) = -1$ si $x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ et h_n est affine sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et continue sur $[0,1]$. Cette fonction est construite de telle sorte que si g est positive puis négative alors $h_n \times g$ est une fonction continue qui converge uniformément vers $|g|$: $\|h_n g - |g|\|_\infty \to 0$. Donc $|u(h_n)| = \int_0^1 h_n \times g$ et par la convergence uniforme alors $|u(h_n)|$ converge vers $\int_0^1 |g|$. Donc $\|u\| = \int_0^1 |g|$.

(d) $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leqslant \|a_n\|_2 \|x_n\|_2$ (c'est Cauchy-Schwartz) donc $\|u\| \leqslant \|a_n\|_2$. Pour la suite $x = a$ on a égalité d'où $\|u\| = \|a_n\|_2$.

(e) $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leqslant \sum |a_n x_n| \leqslant \|a\|_\infty \sum |x_n| = \|a\|_\infty \|x_n\|_1$, donc $\|u\| \leqslant \|a\|_\infty$. Soit p fixé, soit $i(p)$ un indice tel que $|a_{i(p)}| = \max_{j=1,\dots,p} |a_j|$. On construit une suite x^p de la manière suivante : $x^p = (0,0,\dots,0,a_{i(p)},0,0,0\dots)$ (des zéros partout sauf $a_{i(p)}$ à la place $i(p)$). Alors $\|x^p\|_1 = |a_{i(p)}|$ et $|u(x^p)| = a_{i(p)}^2$. Donc $\frac{|u(x^p)|}{\|x^p\|_1} = |a_{i(p)}|$. Lorsque p tend vers $+\infty$, $|a_{i(p)}| \to \|a\|_\infty$. Donc $\|u\| = \|a\|_\infty$.

(f) $|u(x)| = |\lim x_n| \leqslant \|x\|_\infty$, donc $\|u\| \leqslant 1$. Pour $x = (1,1,1,\dots)$ on obtient l'égalité $\|u\| = 1$.

Correction de l'exercice 6673 ▲

(a) Il suffit de l'écrire...

(b) Calculons la norme de U : $\|U(P)\| = \sup_k |\frac{1}{k} a_k\| \leqslant \sup_k |a_k| \leqslant \|P\|$. Donc pour tout P, $\frac{\|U(P)\|}{\|P\|} \leqslant 1$. Et pour $P(x) = x$ on a égalité donc $\|U\| = 1$.

(c) Pour V, prenons $P_k(x) = x^k$, alors $\|P_k\| = 1$, mais $\|V(P_k)\| = k$. Donc V n'est pas bornée sur la boule unité donc V n'est pas continue.

Correction de l'exercice 6674 ▲

(a) A injective : Si $A(x_1, x_2, \dots) = A(y_1, y_2, \dots)$ alors $(x_1, x_2/2, ..., x_n/n, ...) = (y_1, y_2/2, ..., y_n/n, ...)$ donc $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$,..., $x_n = y_n$,... Donc A est injective.

A continue : $\|A(x)\|_\infty = \sup_n \frac{x_n}{n} \leqslant \sup_n x_n \leqslant \|x\|_\infty$. Donc $\|A\| \leqslant 1$ donc A est continue.

Norme de A : Pour $x = (1,0,0,\dots)$. On a $\|x\|_\infty = 1$ et $\|A(x)\|_\infty = 1$ Donc la norme de A est exactement 1.

A n'est pas surjective : posons $y = (1,1,1,\dots) \in l^\infty$. Soit x une suite telle que $A(x) = y$ alors $x = (1,2,3,4,\dots)$. Mais $\|x\|_\infty = +\infty$ donc $x \notin l^\infty$. En conséquence $A : l^\infty \to l^\infty$ n'est pas surjective.

(b) L'inverse à gauche de A est B définie par

$$B(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, 2x_2, ..., nx_n, ...)$$

de sorte que pour $x \in l^\infty$ on ait $B \circ A(x) = x$. Posons la suite $x^p = (0,0,\dots,0,1,0,0\dots) \in l^\infty$ (des zéros partout et le 1 à la p-ième place). Alors $\|x^p\|_\infty = 1$ et $\|B(x^p)\|_\infty = p$. Donc $\frac{\|B(x^p)\|_\infty}{\|x^p\|_\infty} = k$, donc la norme de B n'est pas finie et B n'est pas continue.

Correction de l'exercice 6675 ▲

(a) Si $L(a) = 0$ alors $a \in H$ donc $\mathrm{dist}(a, H) = 0$ donc la relation est vraie. Supposons que $L(a) \neq 0$. Alors on a $X = H + \mathbb{R}.a$. En effet pour $x \in X$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $L(x) = \lambda L(a)$. Donc $L(x - \lambda a) = 0$. Posons $h = x - \lambda a$, alors $h \in H$ et $x = h + \lambda a$ est la décomposition suivant $H + \mathbb{R}.a$.

Si L est continue alors $\|L\|$ est finie.

$$\begin{aligned}
\|L\| &= \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} \\
&= \sup_{h\in H, \lambda\in\mathbb{R}, h+\lambda a\neq 0} \frac{\|L(h+\lambda a)\|}{\|h+\lambda a\|} \\
&= |L(a)| \sup_{h\in H, \lambda\in\mathbb{R}, h+\lambda a\neq 0} \frac{|\lambda|}{\|h+\lambda a\|} \\
&= |L(a)| \sup_{h\in H} \frac{1}{\|h+a\|} \\
&= |L(a)| \frac{1}{\inf_{h\in H}\|h+a\|} \\
&= |L(a)| \frac{1}{\operatorname{dist}(a,H)}
\end{aligned}$$

Ce qui était l'égalité demandée.

(b) Si H est fermé alors $\operatorname{dist}(a,H) > 0$ si $a \notin H$ (voir les exercices sur les compacts), par l'égalité démontrée ci-dessus on a $\|L\|$ finie donc L est continue.

(c) Soit $X = \mathbb{R}[x]$. Pour $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$, et $V(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k$. Alors $\operatorname{Ker} V = \{0\}$ est fermé mais V n'est pas continue (voir l'exercice 6673).

Correction de l'exercice 6676 ▲

Notons $L : X \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $L(f) = f(0)$. Prenons f_n définie par $f_n(t) = 2n(1 - nt)$ pour $t \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f(t) = 0$ si $t > \frac{1}{n}$. Alors $\|f_n\| = 1$ alors que $L(f_n) = 2n$. Donc le rapport $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|} = 2n$ n'est pas borné, donc L n'est pas continue. Si $H = \{f \mid f(0) = 0\}$ alors $H = \operatorname{Ker} L = L^{-1}(0)$. Comme L n'est pas continue alors H n'est pas fermé (voir l'exercice 6675).

Correction de l'exercice 6677 ▲

N est bien une norme. Et on a pour tout x, $(1+x^2)|f(x)| \leqslant N(f)$.

$$|L(f)| = |\int_{\mathbb{R}} f| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{N(f)}{1+x^2} dx \leqslant N(f) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = N(f)[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = N(f)\pi.$$

Donc pour tout f on a

$$\frac{\int f}{N(f)} \leqslant \pi.$$

De plus pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on obtient l'égalité. Donc la norme $\|L\|$ de l'application L est π.

Correction de l'exercice 6681 ▲

(a) Remarquons tout d'abord que si $0 \in K$, l'application u (linéaire) admet 0 comme point fixe dans K. On suppose donc $0 \notin K$. Si $x \in K$, $u^j(x) \in K$ pout tout $0 \leqslant j \leqslant n-1$ et $S_n(x) \in K$ comme combinaison convexe de ces n points de K.

(b) Soit $x \in K$. Par 1., $S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}(x) \in K$ et s'écrit $S_{n_1}(S_{n_2} \circ \cdots \circ S_{n_k})(x)$: il appartient donc à $S_{n_1}(K)$. Par ailleurs, comme les applications linéaires S_{n_j} commutent entre elles (ce sont des polynômes en u), il en va de même pour $S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}$ d'où l'inclusion.

Chaque S_n étant continue et K compact, les ensembles $S_n(K)$ sont eux aussi compacts et inclus dans K ; si $A = \cap_{n\geqslant 1} S_n(K)$ était vide, par la propriété de l'intersection finie, on pourrait trouver des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ en nombre fini tels que $S_{n_1}(K) \cap S_{n_2}(K) \cap \cdots \cap S_{n_k}(K) = \emptyset$. Or cette intersection contient l'image de K par $S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}$ et ne peut être vide.

(c) Soit $a \in A$; pour tout n il existe $x_n \in K$ tel que $a = S_n(x_n)$. On va montrer que $u(a) = a$:

$$\begin{aligned} u(a) - a &= u(S_n(x_n)) - S_n(x_n) \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n)}{n} - \frac{x_n}{n} - S_n(x_n) \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n) - nS_n(x_n) - x_n}{n} \\ &= \frac{u^n(x_n) - x_n}{n} \end{aligned}$$

Mais $||u^n(x_n) - x_n|| \leqslant \mathrm{diam} K = d < +\infty$ puisque K compact est borné, et $||u(a) - a|| \leqslant \frac{d}{n}$ pour tout n est donc nul.

Correction de l'exercice 6716 ▲

I

(a) Soit $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales. Supposons $\mathscr{P}$ de dimension finie n. Notons f_k la fonction $x \mapsto x^k$. Alors la famille $\{f_0, \cdots, f_n\}$ qui compte $n+1$ éléments est liée, donc il existe $a_0, \cdots, a_n$ des scalaires non tous nuls tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n = 0$. Il en résulte que le polynôme non nul à coefficients réels $a_0 + a_1 X + \cdots a_n X^n$ a une infinité de racines, ce qui est absurde.

(b) Posons $M = \sup(\bar{X})$. On doit vérifier que, *i)* pour tout $x \in X, x \leqslant M$ et *ii)* pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in X$ tel que $M - \varepsilon \leqslant x$. Comme $X \subset \bar{X}$ et, pour tout $x \in \bar{X}, x \leqslant M$ la propriété *i)* est vérifiée par M. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in \bar{X}$ tel que $M - \dfrac{\varepsilon}{2} < x$. Comme $x \in \bar{X}$, il existe aussi $y \in X$ tel que $|x - y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc $M - \varepsilon < y$ et M satisfait à *ii)*.

Remarque : on note également que $\sup(X) \in \bar{X}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un élément $x_n \in X$ tel que $x_n \geqslant \sup(x) - \dfrac{1}{n}$. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée d'éléments de X converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sup(X)$ qui appartient donc à $\bar{X}$. On peut bien sûr en déduire la propriété *ii)* de M.

II

(a) Il est clair $\mathscr{L}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{C}^1$ et $x, y \in [0,1]$, avec $x < y$. Par le théoréme des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c_x)(y - x)$. Or f' est continue, donc bornée sur $[0,1]$. Soit $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. On a l'inégalité $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$ qui montre que $f \in \mathscr{L}$. Il en résulte que $\mathscr{L}$ contient $\mathscr{P}$ donc est de dimension infinie.

(b) i. Il suffit de vérifier que si $N_1(f) = 0$ et $N_2(g) = 0$, alors $f = g = 0$, les autres propriétés étant claires. Or si $N_1(f) = 0$, alors f est constante et $f(0) = 0$, donc $f = 0$. Il en va de même pour N_2.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$. Posons $X_n = \{\dfrac{|f_n(x) - f_n(0)|}{|x|}, x \neq 0\}$. Comme $f_n(0) = 0$, on voit que $N_1(f_n) = \sup(X_n)$. Or $|f_n'(0)| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|f_n(x) - f_n(0)|}{|x|}$, appartient à $\bar{X}_n$ donc, en appliquant I 2) on constate que $|f_n'(0)| \leqslant \sup(\bar{X}_n) = \sup(X_n)$. Enfin $f_n'(0) = 2\pi n$ donc $N_2(f_n) \geqslant 2\pi n$. Il n'exite donc pas $K > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_2(f_n) < K\|f_n\|_\infty$ soit N_2 et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Remarques : a) on peut obtenir ce résultat (et le préciser) en remarquant que la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(2\pi nx)}{x}$ définie sur $]0,1]$ se prolonge en une fonction continue en 0 en posant $f_n(0) = 2\pi n$. Puis noter (en fait c'est un cas particulier de I 2)) que $\sup\limits_{]0,1]} |f_n| = \sup\limits_{[0,1]} |f_n|$ et montrer (par une étude classique de fonction) que cette dernière quantité est $2\pi n$.

b) Ce qui fait l'intérêt pour ce problème des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est qu'elles sont bornées par 1 mais que leur pente en l'origine peut-être rendue arbitrairement grande avec n. On peut donc obtenir le même résultat avec la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $k_n(x) = nx$ si $x \leqslant \dfrac{1}{n}$ et 1 sinon, pour laquelle un calcul direct donne $N_1(k_n) = n$ et $\|k_n\|_\infty = 1$.

iii. Comme, pour tout $f \in \mathscr{L}$, $N_1(f) \geqslant N_2(f)$, on déduit de ce qui précéde que N_1 n'est pas équivalente ni à $\| \, \|_\infty$. Posons $g_n(x) = x^n$, pour $n \geqslant 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, $N_2(g_n) = 1$. De plus $g_n'(1) = n$, donc, par un raisonnement identique à celui qui précéde, $N_1(g_n) \geqslant n$ ce qui montre que N_1 n'est pas équivalente à N_2.

Remarque : ce qui fait l'intérêt pour ce problème des fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est qu'elles sont bornées par 1 mais que leur pente en 1 peut-être rendue arbitrairement grande avec n. On peut donc obtenir le même résultat avec la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $l_n(x) = 0$ si $x \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$ et $nx - (n-1)$ sinon.

iv. On pose $g_n(x) = x$ si $x \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n}$ sinon. Il est clair que $g_n \in \mathscr{L}$, $\|g_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ et $N_2(g_n) = 1$. Il n'existe donc pas de constante $K' \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_\infty \geqslant K' N_2(g_n)$ donc N_2 n'est pas équivalente à $\| \, \|_\infty$. Enfin $N_2(g_n) = N_1(g_n)$, ce qui établit le même résultat pour N_1.

v. Il est clair que pour tout $f \in \mathscr{L}$, que $\lambda(f) \geqslant N_1(f)$. Soit $x \in]0,1]$. De l'identité $f(x) = f(0) + x\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ on déduit que $|f(x)| \leqslant |f(0)| + |\dfrac{f(x)-f(0)}{x}|$ (car $|x| \leqslant 1$) soit $|f(x)\| \leqslant N_1(f)$. L'application $x \mapsto f(x)$ étant continue sur $[0,1]$ (ou en appliquant I 2)) on en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$ on a également $|f(x)\| \leqslant N_1(f)$. En d'autre termes $\|f|_\infty \leqslant N_1(f)$ et $\lambda(f) \leqslant 2N_1(f)$. Les normes λ et N_1 sont donc équivalentes.

(c) On pose, pour tout $f \in \mathbb{C}^1$: $\nu_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $\nu(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

i. On constate aisément que si $\nu_1(f) = 0$, alors f est constante et, comme de plus $f(0) = 0$, elle est nulle. Les autre propriétés sont immédiates, donc ν et ν_1 sont des normes sur $\mathbb{C}^1$.

ii. Soit $f \in \mathbb{C}^1$, notons $X = \{\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}; (x,y) \in [0,1]^2, x \neq y\}$. Pour montrer que $\nu_1(f) = N_1(f)$, il suffit de vérifier que $\sup(X) = \|f'\|_\infty$. Soient $x, y \in [0,1], x \neq y$. Par le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre x et y tel que $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = f'(c) \leqslant \|f'\|_\infty$, donc $\sup(X) \leqslant \|f'\|_\infty$. Comme f' est continue, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f'(x_0) = \|f'\|_\infty$. Alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ appartient à $\bar{X}$, donc, en appliquant I 2), $\|f'\|_\infty \leqslant \sup(\bar{X}) = \sup(X)$.

Remarque : on peut formuler ce raisonnement de la manière suivante : soit $Y = \{f'(x); x \in [0,1]\}$. Par le théorème des accroissements finis, $X \subset Y$. On a ensuite, par définition de la dérivée, $Y \subset \bar{X}$. Donc $\sup(X) \leqslant \sup(Y) \leqslant \sup(\bar{X})$, puis on applique I 2).

iii. Les normes ν et ν_1 sont équivalentes. En effet, il est clair que $\nu_1(f) \leqslant \nu(f)$ pour tout $f \in \mathbb{C}^1$. Soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(t_0)|$. Si $t_0 = 0$ alors $\nu_1(f) \leqslant \nu(f)$. Sinon, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, t_0[$ tel que $f(t_0) = f(0) + f'(c)t_0$ ce dont on déduit que $\|f\|_\infty \leqslant \nu_1(f)$, puis que $\nu(f) \leqslant 2\nu_1(f)$.

(d) i. Soit $x \in [0,1]$. La suite de nombres réel $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, elle est convergente. On pose $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (f_n) étant de Cauchy, il existe N tel que, si $m, n \geqslant N$ alors $\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Soient $x \in [0,1]$ et $m, n \geqslant N$. On a $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$ et, ceci étant vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$, on en déduit, par passage à la limite suivant m, que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, soit $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Ainsi f est la limite, pour la convergence uniforme, d'une suite de fonctions continues donc est continue.

ii. Par définition de ν, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy pour ν est de Cauchy pour $\|\ \|_\infty$, donc (uniformément) convergente par la question qui précéde. De même $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|\ \|_\infty$, donc converge uniformèment vers une fonction continue g. Il en résulte que f est dérivable et a pour dérivée la fonction continue g. Enfin $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour ν donc $(\mathbb{C}^1,\nu)$ est complet.

   Soit maintenant $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{C}^1,\nu_1)$. Comme ν_1 est équivalente à ν, elle est de Cauchy pour ν donc convergente. Il existe donc $h\in\mathbb{C}^1$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(h-g_n)=0$. Mais puisque ν_1 est équivalente à ν, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_1(h-g_n)=0$ donc $(\mathbb{C}^1,\nu_1)$ est complet.

iii. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathscr{L},\lambda)$. Comme $\lambda(f_n)\geqslant\|f_n\|_\infty$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy dans $(\mathbb{C}^0,\|\ \|_\infty)$. Comme $(\mathbb{C}^0,\|\ \|_\infty)$ est complet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue qu'on notera f.

iv. Soit $\varepsilon>0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe N tel que, pour $m,n\geqslant N$ on ait, pour tout x,y et $z\in[0,1]$, avec $x\neq y$:

$$|f_n(z)-f_m(z)|+\left|\frac{(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(y)-f_m(y))}{x-y}\right|<\varepsilon.$$

   En faisant tendre m vers l'infini, on en déduit :

$$|f_n(z)-f(z)|+\left|\frac{(f_n(x)-f(x))-(f_n(y)-f(y))}{x-y}\right|<\varepsilon,$$

   donc

$$\sup_{z\in[0,1]}|f_n(z)-f(z)|+\sup_{x,y\in[0,1],x\neq y}\left|\frac{(f_n(x)-f(x))-(f_n(y)-f(y))}{x-y}\right|\leqslant\varepsilon.$$

   Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme λ. Par ailleurs, on déduit de la seconde inégalité que, pour tout $x,y\in[0,1]$, avec $x\neq y$: $|(f_n-f)(x)-(f_n-f)(y)|<\varepsilon|x-y|$, donc que pour n assez grand $f-f_n$ appartient à $\mathscr{L}$. Or $\mathscr{L}$ est un espace vectoriel et $f_n\in\mathscr{L}$ donc f appartient à $\mathscr{L}$.

v. Toute suite de Cauchy de $\mathscr{L}$ admet une limite dans $\mathscr{L}$ qui est donc complet.

Correction de l'exercice 6717 ▲

(a)) La nécessité des conditions (i), (ii), (iii) résulte des propriétés d'une norme. En effet, si $x\in K$, $||-x||=||x||\leqslant 1$ et $-x\in K$ ce qui prouve (i).

   K est fermé car plus généralement toute boule fermée d'un espace métrique est fermée; et K est borné par définition (un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est borné s'il est contenu dans une boule fermée). Enfin, K est convexe car, si $x,y\in K$ et $\lambda\in[0,1]$, $||(1-\lambda)x+\lambda y||\leqslant(1-\lambda)||x||+\lambda||y||\leqslant 1$ et $(1-\lambda)x+\lambda y\in K$.

   0 est un point intérieur à K : par exemple $B(0,\frac{1}{2})\subset K$ et K contient un voisinage de 0 (toute boule fermée de rayon >0 est un voisinage de son centre).

(b) Soit K vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii). Il nous faut montrer que $p(x)$ est bien définie pour tout x; que p est une norme et que K est la boule unité fermée qui lui est associée.

   Si $x=0$, $\frac{x}{a}\in K$ pour tout $a>0$ et $p(0)=0$. Si $x\neq 0$, l'ensemble $\{a>0\ ;\ \frac{x}{a}\in K\}$ est minoré; s'il est non vide il admettra une borne inférieure. Or 0 est point intérieur à K; il existe donc $\varepsilon>0$ tel que $B(0,\varepsilon)\subset K$ et pour a assez grand, $\frac{||x||}{a}\leqslant\varepsilon$, en particulier $\frac{x}{a}\in K$, et l'ensemble est non vide.

   Vérifions les trois axiomes d'une norme.

   • Par définition d'une borne inférieure, $p(x)=0\Longrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\ 0<a<\varepsilon$ tel que $\frac{x}{a}\in K$. K étant borné, on peut supposer que $K\subset\overline{B}(0,R)$, de sorte que $||\frac{x}{a}||\leqslant R$ ou $||x||\leqslant\varepsilon R$, ceci pour tout $\varepsilon>0$, ce qui implique $x=0$.

   • Soit $\lambda>0$; $p(\lambda x)=\inf\{a>0\ ;\ \frac{\lambda x}{a}\in K\}=\inf\{\lambda b>0\ ;\ \frac{x}{b}\in K\}$ en posant $a=\lambda b$, et $p(\lambda x)=\lambda p(x)$.

Il suffit de montrer que $p(-x) = p(x)$ pour avoir la propriété d'homogénéité. Mais $p(-x) = \inf\{a > 0\ ;\ -\frac{x}{a} \in K\} = \inf\{a > 0\ ;\ \frac{x}{a} \in -K\} = p(x)$ car K est symétrique.

• En utilisant la définition d'une borne inférieure, on va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$ ce qui donnera le résultat.

Donc, fixons $\varepsilon > 0$; on peut trouver $a > 0$ tel que $p(x) \leqslant a < p(x) + \varepsilon$ et $\frac{x}{a} \in K$, puis $b > 0$ tel que $p(y) \leqslant b < p(y) + \varepsilon$ et $\frac{y}{b} \in K$. Si $\frac{x+y}{a+b} \in K$, alors $p(x+y) \leqslant a+b$ par propriété de la borne inf et on aura prouvé $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$.

Mais $\frac{x+y}{a+b}$ s'écrit $\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$, combinaison convexe de $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$, et K est supposé convexe. La preuve de l'inégalité triangulaire est ainsi achevée.

Il nous reste à établir $K = \{x\ ;\ p(x) \leqslant 1\}$.

Si $x \in K$ et $a = 1$, $\frac{x}{a} \in K$ ce qui implique $p(x) \leqslant 1$. Réciproquement supposons $p(x) \leqslant 1$; on peut supposer $x \neq 0$. Si $p(x) < 1$, il existe $p(x) \leqslant a < 1$ tel que $\frac{x}{a} \in K$; mais $x = a\frac{x}{a} + (1-a)0$ est encore dans K.

Si $p(x) = 1$ il existe (a_n) suite de nombres positifs tels que $\frac{x}{a_n} \in K$ pour tout n et tendant vers 1. Mais K étant fermé, $x = \lim \frac{x}{a_n} \in K$.

Correction de l'exercice 6724 ▲

(a) Soit (u_n) une suite de Cauchy pour d. Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geqslant N \quad d(u_p, u_q) = |u_p^3 - u_q^3| \leqslant \varepsilon.$$

Donc la suite (u_n^3) est une suite de Cauchy pour la distance usuelle $|.|$. Comme $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet alors (u_n^3) converge pour la valeur absolue, notons v la limite, nous avons $|u_n^3 - v|$ qui tend vers 0. Donc pour $u = v^{\frac{1}{3}}$ nous avons $d(u_n, u) = |u_n^3 - u^3| = |u_n^3 - v|$ qui tend vers 0, donc u_n converge vers u pour la distance d. Donc $\mathbb{R}$ est complet pour d.

(b) Montrons que d ne définit pas une distance complète. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $d(u_p, u_q) = |e^{-p} - e^{-q}|$. Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit N tel que $e^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$, alors pour $p, q \geqslant N$ on a $d(u_p, u_q) = |e^{-p} - e^{-q}| \leqslant e^{-p} + e^{-q} \leqslant 2e^{-N} \leqslant \varepsilon$. Donc (u_n) est de Cauchy. Supposons que (u_n) converge, notons $u \in \mathbb{R}$ sa limite. Alors $d(u_n, u) = |e^{-n} - e^u|$ tend vers 0 d'une part et vers e^u d'autre part. Donc $e^u = 0$ ce qui est absurde pour $u \in \mathbb{R}$.

(c) La fonction $\ln(1+u)$ est continue et ne s'annule qu'en $u = 0$. Donc pour $\ln(1+u)$ suffisamment petit nous avons u suffisamment petit et donc (par la relation $\ln(1+u) = u + o(u)$) nous avons

$$\frac{1}{2}u \leqslant \ln(1+u) \leqslant 2u.$$

Donc pour (u_n) une suite de Cauchy pour d, la première inégalité prouve que (u_n) est une suite de Cauchy pour $|.|$. Donc elle converge pour $|.|$ La deuxième inégalité montre que (u_n) converge pour d. Donc d définit une distance complète.

Correction de l'exercice 6725 ▲

f est injective afin que d soit bien une distance. On pose $F = f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$.

(a) $\Rightarrow$ Supposons que la distance d soit complète. Soit (y_n) une suite de F qui converge vers $y \in \mathbb{R}^2$. Il faut montrer que $y \in F$. Il existe $x_n \in \mathbb{R}$, tel que $y_n = f(x_n)$. Comme (y_n) est une suite convergente, c'est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$, or $d(x_p, x_q) = \|f(x_p) - f(x_q)\| = \|y_p - y_q\|$. Donc (x_n) est une suite de Cauchy pour d. Comme d est complète alors (x_n) converge x, comme $x_n \to x$ (pour d) alors $f(x_n) \to f(x)$ (pour $\|.\|$). (Remarquons que par définition de d, l'application $f : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|.\|)$ est continue.) Donc (y_n) converge vers $f(x)$ et par unicité de la limite $f(x) = y$. Donc $y \in f(\mathbb{R}) = F$. Donc F est fermé.

(b) $\Leftarrow$ On suppose que F est fermé. Soit (u_n) une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R},d)$. Notons $y_n = f(x_n)$. Comme $d(u_p,u_q) = \|f(u_p)-f(u_q)\| = \|y_p - y_q\|$. Donc (y_n) est une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$. Comme cet espace est complet alors (y_n) converge vers y. Comme $y_n \in F$ et F est fermé alors $y \in F$, donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. Il reste à montrer que (x_n) tend vers x. En effet $d(x_n,x) = \|f(x_n)-f(x)\| = \|y_n - y\|$ tend vers 0. Donc (x_n) tend vers x pour d. Donc d est complète.

Correction de l'exercice 6726 ▲

(a) i. Montrons que (X,d_ω) est complet. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy pour cet distance. Alors pour chaque $t \in [a,b]$, $(f_n(t))_n$ est une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R},|.|)$. Comme $\mathbb{R}$ est complet alors cette suite converge, notons $f(t)$ sa limite.

Il faut montrer deux choses : premièrement que (f_n) converge vers f pour la distance considérée, deuxièmement que f est bien dans l'espace X.

ii. Comme (f_n) est une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon > 0$. Il existe $n \geqslant 0$ tel que pour tout $p \geqslant 0$: $d_\omega(f_n, f_{n+p}) < \varepsilon$. Donc

$$\sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)(f_n(t)-f_{n+p}(t))| < \varepsilon.$$

On fait tendre p vers $+\infty$ et on obtient : $\sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)(f_n(t)-f(t))| < \varepsilon$. Donc (f_n) converge vers f pour la distance d_ω.

iii. ω est une fonction non nulle sur le compact $[a,b]$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\omega(t) > \alpha$ pour tout $t \in [a,b]$. On en déduit que

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\alpha} d_\omega(f_n, f).$$

Comme $d_\omega(f_n,f)$ tend vers 0 alors f_n converge vers f pour la norme infini. Donc f est continue. Conclusion : (X,d_ω) est complet.

(b) On définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = 1$ pour $t \in [0,\frac{1}{2}]$, $f_n(t) = (1-n(t-\frac{1}{2}))$ pour $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}]$ et $f(t) = 0$ si $t \geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{n}$. En effet (f_n) converge (au sens de la convergence simple) vers la fonction f, où f est définie par $f(t) = 1$ sur $[0,\frac{1}{2}]$ et $f(t) = 0$ sur $]\frac{1}{2},1]$.

On montre facilement que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_1$ en prouvant que pour $p,q \geqslant n$ on a $\|f_p - f_q\|_1 \leqslant \frac{1}{n}$. Par contre (f_n) ne converge pas dans X car f n'est pas continue, donc n'appartient pas à l'espace X. Donc X n'est pas complet.

Correction de l'exercice 6727 ▲

(a) On reprend l'exemple de l'exercice 6726. Et on définit g_n sur $[0,1]$ par $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$. Alors g_n est $\mathscr{C}^1$, et converge (donc en particulier (g_n) est de Cauchy). Elle converge vers g qui n'est pas une fonction $\mathscr{C}^1$. Donc ce n'est pas un espace complet.

(b) Soit (f_n) une suite de Cauchy pour la norme N. Pour chaque $t \in [a,b]$, $(f_n(t))_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge. Notons $f(t)$ sa limite. De même $(f_n'(t))_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge vers $g(t)$. Nous allons montrer que f est dans X et que f_n converge vers f pour N et que $f' = g$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que Pour tout $p \geqslant 0$,

$$N(f_n - f_{n+p}) < \varepsilon.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, f_{n+p} converge (simplement) vers f. On obtient que $\|f_n - f\|_\infty$ et que $\|f_n' - g\|_\infty$ tendent vers 0. Donc f_n converge uniformément vers f. Comme les f_n sont continues alors f est continue. De même f_n' converge uniformément vers g donc g est continue. De plus cela implique que $g = f'$.(Rappel : si (f_n) est une suite de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f, et tel que (f_n') converge uniformément vers g, alors f est $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est $f' = g$.) Nous avons donc montrer que $N(f_n - f)$ tend vers 0 et que f est dans X. Donc (X,N) est complet.

Correction de l'exercice 6728 ▲

(a) Notons x^p la suite
$$x^p = (1,1,\dots,1,1,0,0,0,\dots).$$
(des 0 à partir de la $p+1$-ième place et de 1 avant. Si Y est l'espace de toute les suite, notons
$$x^\infty = (1,1,1,1,\dots).$$
La suite x^∞ n'est pas dans X. Par contre $x^p \to x^\infty$ pour la distance ρ. En effet
$$\rho(x^p,x) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{p+1}} \to 0.$$
La suite (x^p) est de Cauchy, mais ne converge pas dans X, donc X n'est pas complet.

(b) i. Soit Y l'espace de toutes les suites. Alors X est dense dans dans Y (pour la topologie définie par ρ), car toute suite $y = (y_1,y_2,\dots)$ de Y s'approche par une suite de suite (x^p) obtenue en tronquant la suite y : $x^1 = (y(1),0,0,\dots)$, $x^2 = (y(1),y(2),0,0,\dots)$,... En effet
$$\rho(x^p,y) = \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|} \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^p}$$
qui tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

ii. Soit $(x^n)_n$ une suite de Cauchy de Y. Montrons que pour k fixé alors $(x_k^n)_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon > 0$, alors il existe N tel que pour $p,q \geqslant N$ on ait $\rho(x^p,x^q) \leqslant \varepsilon$.
$$\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^p - x_k^q|}{1+|x_k^p - x_k^q|} \leqslant \rho(x^p,x^q) \leqslant \varepsilon.$$
Posons la fonction $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, f est inversible pour $\alpha \geqslant 0$, d'inverse $f^{-1}(\beta) = \frac{\beta}{1-\beta}$. Une étude de f et de son inverse montre que si $f(\alpha) \leqslant \varepsilon' \leqslant 1$ alors $\alpha \leqslant 2\varepsilon'$. Comme k est fixé, posons $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2^k}$ et $\alpha = |x_k^p - x_k^q|$ on a montrer : $f(\alpha) \leqslant \varepsilon'$. Donc $\alpha \leqslant 2\varepsilon'$. Récapitulons :
$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geqslant N \quad |x_k^p - x_k^q| < 2\varepsilon',$$
donc la suite $(x_k^n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge, nous notons x_k^∞ sa limite.

iii. Nous avons construit une suite $x^\infty = (x_1^\infty, x_2^\infty, \dots)$. Comme (x^n) est de Cauchy alors
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geqslant N \quad \rho(x^p,x^q) < \varepsilon,$$
Lorsque l'on fixe p et que l'on fait tendre q vers $+\infty$ on a
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant N \quad \rho(x^p,x^\infty) < \varepsilon,$$
donc (x^n) converge vers x^∞ pour la distance ρ.

iv. Bien évidemment $x^\infty \in Y$ donc (x^n) converge vers $x^\infty \in Y$ pour ρ. Donc (Y,ρ) est un espace complet.

(c) $(X,\|.\|_\infty)$ n'est pas un espace complet. Par exemple regardez la suite $x^p = (1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{p},0,0,\dots)$ alors (x^p) est une suite de Cauchy, qui ne converge pas dans X, mais dans Y sa limite est $x^\infty = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots)$. Notons Z l'espace des suites qui tendent vers 0. L'adhérence de X pour la topologie définie par $\|.\|_\infty$ est Z. Et $(Z,\|.\|_\infty)$ est complet.

Correction de l'exercice 6729 ▲

(a) Soit (x_n) une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall q \geqslant n_0 \qquad \|x_{n_0} - x_q\| < 1.$$
Puis pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $n_1 > n_0$ tel que
$$\forall q \geqslant n_1 \qquad \|x_{n_1} - x_q\| < \frac{1}{2}.$$
Puis par récurrence pour $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, on pose $n_k > n_{k-1}$ tel que
$$\forall q \geqslant n_k \qquad \|x_{n_k} - x_q\| < \frac{1}{2^k}.$$
Donc en particulier à chaque étape on a
$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$
Posons $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ Alors $\|u_k\| \leqslant \frac{1}{2^k}$ donc
$$\sum_{k\geqslant 0} \|u_k\| \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k} = 2.$$
Donc la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est normalement convergente. Si cette série converge notons $T = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme, C'est-à-dire la limite de $T_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$. Mais alors $T_N = x_{n_{N+1}} - x_{n_0}$ converge vers T. Donc la suite extraite $(x_{n_k})_k$ converge (vers $T + x_{n_0}$). Conséquence : si toute série normalement convergente est convergente, alors on peut extraire de toute suite de Cauchy une sous-suite convergente donc E est complet.

(b) Soit $p \leqslant q$.
$$\|S_q - S_p\| = \|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\|$$
Or la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est normalement convergente donc le reste $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\|$ tend vers 0 quand $p \to +\infty$. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geqslant N$ on a $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\| \leqslant \varepsilon$, donc pour tout $p,q \geqslant N$ on a aussi $\|S_q - S_p\| \leqslant \varepsilon$. Donc la suite (S_n) est de Cauchy. Si E est complet alors (S_n) converge, notons S sa limite. Donc $\|S_n - S\|$ tend vers 0. Dons la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est convergente (de somme S).

Correction de l'exercice 6730 ▲

(a) (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons que A_n converge vers A dans $\mathscr{L}(E,F)$. Soit $M \subset E$ une partie bornée, notons M sa borne (c'est-à-dire pour tout $x \in M$, $\|x\| \leqslant B$). Alors
$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|A_n - A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{B} \\
\Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in M \quad \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon\|x\|}{B} \\
\Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in M \quad \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$
Ce qui exactement la confergence uniforme de A_n vers A sur M.

(b) (2) $\Rightarrow$ (1). Par définition de la norme d'un opérateur nous avons $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n(x) - A(x)\|$. Prenons comme partie bornée la sphère unité : $M = S(0,1) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Alors :
$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in S(0,1) \in \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \varepsilon \\
\Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|A_n - A\| \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$
Donc $\|A_n - A\|$ tend vers 0.

Correction de l'exercice 6731 ▲

C'est du cours, mais il est important de savoir rédiger ceci correctement. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathscr{L}(E,F)$.

(a) Trouvons d'abord le candidat à la limite. Par définition d'une suite de Cauchy, nous avons :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geqslant N \quad \|f_p - f_q\| < \varepsilon.$$

Fixons $x \in E$, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geqslant N \quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon \|x\|_E.$$

Quitte à poser $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\|x\|}$ (x est fixé !, si $x = 0$ c'est trivial) alors on a montrer :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geqslant N \quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon'.$$

Donc la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de F. Comme F est complet alors cette suite converge, notons $f(x)$ sa limite.

(b) Nous avons construit une fonction $f : E \longrightarrow F$. Montrons que f est dans l'espace $\mathscr{L}(E,F)$, c'est-à-dire que f est linéaire. Comme pour tout n, f_n est linéaire alors, pour tout $x,y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y).$$

À la limite ($n \to +\infty$) nous avons

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

donc f est dans $\mathscr{L}(E,F)$.

(c) Il reste à montrer que (f_n) converge bien vers f (ce qui à priori n'est pas évident). Revenons à la définition d'une suite de Cauchy (écrit d'une façon un peu différente) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant N \quad \forall k \geqslant 0 \quad \|f_p - f_{p+k}\| < \varepsilon.$$

Lorsque l'on fixe p et que l'on fait tendre k vers $+\infty$ alors $f_p - f_{p+k}$ tend vers $f_p - f$. Donc en passant à la limite nous avons :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant N \quad \|f_p - f\| < \varepsilon.$$

Donc (f_n) converge vers f pour la norme $\|.\|$ sur $\mathscr{L}(E,F)$.

Remarque : dans certains exercices il peut être utile de d'abord montrer le troisième point avant le deuxième.

Correction de l'exercice 6759 ▲

(a) Commençons par l'unicité, si x,y sont deux points fixes alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$ donc la relation pour f s'écrit

$$d(x,y) \leqslant \alpha_n d(x,y) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ converge alors (α_n) tend vers 0, donc il existe n_0 assez grand avec $\alpha_{n_0} < 1$, la relation devient

$$d(x,y) \leqslant \alpha_{n_0} d(x,y) < d(x,y),$$

ce qui est contradictoire.

(b) Soit $x_0 \in X$, notons $x_n = f^n(x_0)$. Alors

$$d(x_{n+1},x_n) \leqslant \alpha_n d(x_1,x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On va montrer que (x_n) est une suite de Cauchy, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \geqslant 0 \qquad d(x_{n+p},x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Pour n,p fixés, évaluons $d(x_{n+p},x_n)$.

$$\begin{aligned} d(x_{n+p},x_n) &\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{k+1},x_k) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k d(x_1,x_0) \\ &= d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k \end{aligned}$$

De plus la série $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ converge donc la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ est de Cauchy et donc il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $p \geqslant 0$ on a

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k = S_{n+p-1} - S_{n-1} \leqslant \varepsilon.$$

Donc pour tout $n \geqslant N$ et tout $p \geqslant 0$ on $d(x_{n+p},x_n) \leqslant d(x_1,x_0)\varepsilon$. Quitte à poser $\varepsilon' = d(x_1,x_0)\varepsilon$, ceci prouve que (x_n) est une suite de Cauchy. Comme l'espace est complet alors cette suite converge, notons x sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

À la limite, la suite (x_{n+1}) tend vers x, et comme f est continue (elle est α_1-lipschitziènne : $d(f(x),f(y)) \leqslant \alpha_1 d(x,y)$) alors $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Par unicité de la limite nous obtenons

$$x = f(x).$$

Donc f possède un point fixe, qui est unique et est obtenu en partant d'un point quelconque $x_0 \in X$ comme limite de $(f^n(x_0))_n$.

(c) Il reste à estimer la vitesse de convergence, nous avons vu

$$d(x_{n+p},x_n) \leqslant d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k,$$

On fait tendre p vers $+\infty$ dans cette inégalité alors

$$d(x,x_n) \leqslant d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k.$$

Ce qui était l'estimation recherchée.

Correction de l'exercice 6760 ▲

Notons $g = f^n$. Alors g est une application strictement contractante dans X complet donc g possède un unique point fixe que nous notons x. Montrons l'unicité d'un point fixe pour f. Soit $y \in X$ tel que $f(y) = y$ alors $g(y) = f^n(y) = y$. Donc y est aussi un point fixe pour g, donc $y = x$.

Il reste à montrer que f possède effectivement bien un tel point fixe. Nous avons

$$\begin{aligned} & f^n(x) = x \\ \Rightarrow \quad & f(f^n(x)) = f(x) \\ \Rightarrow \quad & f^n(f(x)) = f(x) \\ \Rightarrow \quad & g(f(x)) = f(x) \end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $f(x)$ est un point fixe de g. Comme g possède un unique point fixe x alors $f(x) = x$! ! Donc x est bien un point fixe pour f.

Correction de l'exercice 6761 ▲

(a) $(T \circ Tf)(x) = 1 + \int_0^x Tf(t-t^2)dt = 1 + \int_0^x (1 + \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)du)dt = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)dudt$. De plus $(T \circ Tf)'(x) = 1 + \int_0^{x-x^2} f(u-u^2)du$. En remarquant que pour $t \in [0,1]$, $t - t^2 \leqslant \frac{1}{4}$, on montre que $|T \circ Tf(x) - T \circ Tg(x)| \leqslant \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty$ et que $|(T \circ Tf)'(x) - (T \circ Tg)'(x)| \leqslant \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty$ Donc $N(T \circ Tf - T \circ Tg) \leqslant \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}N(f-g)$. Donc $T \circ T$ est une contraction et X est complet donc $T \circ T$ admet un unique point fixe, par l'exercice 6760, T admet un unique point fixe.

(b) Remarquons que $Tf = f$ est équivalent à $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x-x^2)$. Donc l'existence et l'unicité du point fixe pour T donne l'existence et l'unicité de la solution au problème posé.

Correction de l'exercice 6762 ▲

(a) ! !

(b)

$$\begin{aligned} \|Ax_1 - Ax_2\|_\infty &= \| \int_a^b k(s,t)(x_1(t) - x_2(t))dt\|_\infty \\ &\leqslant \int_a^b \|k(s,t)\|_\infty \|x_1(t) - x_2(t)\|_\infty dt \\ &\leqslant \|x_1(t) - x_2(t)\|_\infty \times \lambda \\ &< \|x_1(t) - x_2(t)\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc A est contractante et l'espace ambiant $\mathscr{C}([a,b])$ est complet, par le théorème du point fixe, A admet un unique point fixe, x. De plus, pour tout fonction $x_0 \in \mathscr{C}([a,b])$, la suite $(A^n x_0)$ converge vers x, mais ici la norme est la norme uniforme donc $\|A^n x_0 - x\|_\infty$ tend vers 0. Donc $(A^n x_0)$ converge uniformément vers x.

(c)

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|_\infty &= \|A_1 x_1 - A_2 x_2\|_\infty \quad \text{car } A_i x_i = x_1, \\ &= \| \int_a^b k_1(s,t)x_1(t)dt + y_1(s) + \int_a^b k_2(s,t)x_2(t)\,dt + y_2(s)\|_\infty \\ &\leqslant \| \int_a^b k(s,t)(x_1(t) - x_2(t))dt\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &\leqslant \lambda \|x_1 - x_2\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty \end{aligned}$$

Donc

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\lambda}\|y_1 - y_2\|_\infty,$$

ce qui exprime la dépendance continue de la solution par rapport à la fonction y.

Correction de l'exercice 6775 ▲

(a) Par l'absurde supposons que X n'a aucun point isolé. Comme $\{x\}$ est un fermé alors $\omega_x = X \setminus \{x\}$ est un ouvert (de X). De plus comme le point x n'est pas isolé alors ω_x est dense dans X.

Maintenant on peut appliquer le théorème de Baire à X qui est un fermé de l'espace complet $\mathbb{R}$. Donc une intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est encore dense. Mais ici nous obtenons une contradiction car les ω_x sont des ouverts denses, X est dénombrable mais

$$\bigcap_{x\in X} \omega_x = \varnothing.$$

Et l'ensemble vide n'est pas dense dans X ! !

(b) Pour l'ensemble de Cantor aucun point n'est isolé, donc par la question précédente l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable.

Correction de l'exercice 6776 ▲

(a) Par l'absurde supposons que sur aucun ouvert f n'est majorée. $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \qquad \text{est un ouvert.}$$

De plus O_λ est dense, en effet pour $x \in X$ et pour V_x un voisinage ouvert de x, alors par hypothèse f n'est pas majorée sur V_x donc en particulier il existe $y \in V_x$ tel que $f(y) > \lambda$ donc $y \in V_x \cap O_\lambda$. Ceci prouve que O_λ est dense dans X (V_x étant aussi petit que l'on veut).

Maintenant pour $n = 0,1,2,\ldots$, les O_n sont un ensemble dénombrable d'ouverts denses. Comme X est complet il vérifie le théorème de Baire donc l'intersection des O_n est encore un ensemble dense. Mais il est facile de voir par la définition des O_n que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \varnothing.$$

Ce qui donne la contradiction cherchée.

(b) On note $\phi : B \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Il n'est pas difficile de montrer que ϕ est semi-continue inférieurement : en effet soit $F_\lambda := \{x \in X \mid \phi(x) \leqslant \lambda\}$. Soit λ fixé et soit (x_k) une suite d'éléments de F_λ. Pour n fixé et pour tout k on a $f_n(x_k) \leqslant k$, donc par continuité de f_n, on a $f_n(x) \leqslant k$, ceci étant vrai pour tout n on a $x \in F_\lambda$. Donc F_λ est un fermé donc $O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$ est un ouvert. Donc ϕ est semi-continue inférieurement.

Par la première question il existe un ouvert non vide O et une constante $M > 0$ tel que ϕ soit majorée par M sur O. C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in O \quad |f_n(x)| \leqslant M.$$

Par translation on peut supposer que l'origine o est inclus dans O. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\bar{B}(o,\varepsilon) \subset O$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \bar{B}(o,\varepsilon) \quad |f_n(x)| \leqslant M$$

ce qui est équivalent à

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \bar{B}(o,1) \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{M}{\varepsilon}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\| \leqslant \frac{M}{\varepsilon}.$$

Correction de l'exercice 6788 ▲

(a) C'est du cours.

(b) Si $f : B \longrightarrow \{0,1\}$ est continue alors elle induit une application restreinte $f_{|A} : A \longrightarrow \{0,1\}$ continue. Donc f est constante sur A. Soit $b \in B$ et soit (a_n) une suite d'éléments de A qui tendent vers b (c'est possible car $B \subset \bar{A}$), alors $f(a_n)$ est constante, par exemple égal à 1, car A est connexe. Mais f est continue sur B, donc $f(b) = \lim f(a_n) = 1$. On montre ainsi que f est constante sur B. Donc B est connexe. (Au passage on a montrer que $\bar{A}$ était connexe.)

(c) Soit $f : A \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction continue, où $A = \bigcup A_n$. A_0 est connexe donc f est constante sur A_0 et vaut v_0, de même A_1 est connexe donc f est constante sur A_1 et vaut v_1. Mais pour $a \in A_0 \cap A_1 \neq \varnothing$, on a $f(a) = v_0$ car $a \in A_0$ et $f(a) = v_1$ car $a \in A_1$. Donc $v_0 = v_1$. Donc f est constante sur $A_0 \cup A_1$. Par récurrence f est constante sur A.

Correction de l'exercice 6789 ▲

(a) Dans $\mathbb{R}^2$ il y a deux composantes connexes : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x > y\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x < y\}$.

(b) Dans $\mathbb{C}^2$ il n'y en a qu'une seule : $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,; z \neq w\}$

Correction de l'exercice 6790 ▲

Notons la frontière $\mathrm{Fr}A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$. Nous avons la partition $X = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}A \cup (X \setminus \bar{A})$. Si $B \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$ alors $B \subset \mathring{A} \cup (X \setminus \bar{A})$.

De plus, par hypothèses, $B \cap A \neq \varnothing$ et $B \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$ or $\mathring{A} = A \setminus \mathrm{Fr}A$ donc $B \cap \mathring{A} \neq \varnothing$. Comme $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$ on a $B \cap \mathrm{Fr}(X \setminus A) = \varnothing$. Par hypothèse $B \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ donc $B \cap (X \setminus \bar{A}) = (B \cap (X \setminus A)) \setminus (B \cap \mathrm{Fr}(X \setminus A)) \neq \varnothing$.

Nous avons montrer que B est inclus dans l'union de deux ouverts disjoints $\mathring{A}$ et $X \setminus \bar{A}$, d'intersection non vide avec B, donc B n'est pas connexe. Par contraposition, si B est connexe alors B ne rencontre pas la frontière de A.

Correction de l'exercice 6791 ▲

(a) T est compact car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

Soit $g : T \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Par connexité du segment $[-1,1]$, g est constante sur $\{0\} \times [-1,1]$ (et vaut v) ; g est aussi constante sur $[-1,1] \times \{0\}$ et vaut v'. Mais alors $v = g(0,0) = v'$ donc g est constante sur T. Donc T est connexe.

Pour $f : T \to \mathbb{R}$ une fonction continue. T est compact donc $f(T)$ est compact. T est connexe donc $f(T)$ est connexe. Donc $f(T)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$ c'est donc un segment compact.

(b) Ce sont les quatre points cardinaux $N = (0,1)$, $S = (0,-1)$, $E = (1,0)$, $W = (-1,0)$.

(c) Par l'absurde, supposons que T soit homéomorphe à une partie I de $\mathbb{R}$, alors il existe un homéomorphisme $f : T \longrightarrow I$. Par le premier point I est un segment compact $I = [a,b]$. $T \setminus \{N\}$ est connexe donc sont image par f, $f(T \setminus \{N\})$ est connexe, mais c'est aussi le segment I privé d'un point. I privé d'un point étant connexe, le point retiré est nécessairement une extrémité. Donc $f(N) = a$ ou $f(N) = b$. Supposons par exemple $f(N) = a$. On refait le même raisonnement avec S, qui s'envoie aussi sur une extrémité, comme f est bijective cela ne peut être a, donc $f(S) = b$. Maintenant $f(E)$ est aussi une extrémité donc $f(E) \in \{a,b\}$. Mais alors f n'est plus injective car on a $f(E) = f(N)$ ou $f(E) = f(S)$. Contradiction.

Correction de l'exercice 6792 ▲

(a) i. $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\phi(t) = e^{it}$ est une surjection continue.

ii. $\mathbb{S}^1$ est un compact connexe donc, par l'absurde, si $\psi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une injection continue alors $\psi(\mathbb{S}^1)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$ donc un segment compact I. Soit $y \in \mathring{I}$, comme I est l'image de $\mathbb{S}^1$ alors il existe un unique $x \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(x) = y$. L'application f induit alors une bijection continue $f : \mathbb{S}^1 \setminus \{x\} \longrightarrow I \setminus \{y\}$. Mais $\mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$ est connexe alors que son image par f, qui est $I \setminus \{y\}$ ne l'est pas (car $y \in \mathring{I}$). L'image d'un connexe par une application continue doit être un connexe, donc nous avons une contradiction.

(b) Si $\chi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une injection continue. Comme $\mathbb{R}^2$ est connexe $f(\mathbb{R}^2) = I$ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un segment (non réduit à un point !). Prenons y un élément de $\mathring{I}$, soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = y$. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ est connexe, $I \setminus \{y\}$ ne l'est pas, et f est une bijection continue entre ces deux ensembles, d'où une contradiction.

Correction de l'exercice 6793 ▲

L'ensemble B est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : B \to \{0,1\}$ est constante. Soit alors $f : B \to \{0,1\}$ une fonction continue et montrons qu'elle est constante. Remarquons que la restriction de f à tout ensemble B_a est constante (B_a est connexe).

On définit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tel que $g(x)$ prend la valeur qu'a f sur B_x. Nous allons montrer que g est localement constante (on ne sait pas si g est continue).

— Soit $a \notin \mathbb{Q}$ alors on a $(a,0) \in B$, f est une fonction continue et $\{f(a,0)\}$ est un ouvert de $\{0,1\}$, donc $f^{-1}(\{f(a,0)\})$ est un ouvert de B. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $(x,y) \in (]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon[) \times B$ alors $f(x,y) = f(a,0)$. Alors pour $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ on a $g(x) = g(a)$: si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $g(x) = f(x,0) = f(a,0) = g(a)$; et si $x \in \mathbb{Q}$ alors $g(x) = f(x, \frac{\varepsilon}{2}) = f(a,0) = g(a)$. Donc g est localement constante au voisinage des point irrationnels.

— Si $a \in \mathbb{Q}$ et soit $b \in]0,1]$ alors f est continue en (a,b) donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,b) = f(a,b) = g(a)$. Si maintenant $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, on prend une suite (x_n) de rationnels qui tendent vers x. Comme f est continue alors $g(a) = g(x_n) = f(x_n, b)$ tend vers $f(x,b) = g(x)$. Donc $g(a) = g(x)$. Nous avons montrer que g est localement constante au voisinage des point rationnels.

— Bilan : g est localement constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{R}$ est connexe, alors g est constante sur $\mathbb{R}$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 6794 ▲

(a) A est connexe car connexe par arcs.

(b) Si $z \in g(A)$ alors il existe $(x,y) \in A$ tel que $g(x,y) = z$. Donc $z = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ par le théorème des accroissements finis il existe $t \in]x,y[\subset I$ tel que $z = f'(t)$ donc $z \in f'(I)$. Donc $g(A) \subset f'(I)$.

Si maintenant $z \in f'(I)$, il existe $y \in I$ tel que $z = f'(y)$, mais par définition de la dérivée $f'(y)$ est la limite de $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ quand x tend vers y (et on peut même dire que c'est la limite à gauche, i.e. $x < y$). Donc $f'(y)$ est limite de points de $g(x,y)$ avec $x < y$, donc de points de A. Conclusion $z = f'(y)$ est dans $\overline{g(A)}$, et donc $f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

(c) A est connexe, g est continue sur A donc $g(A)$ est un connexe de $\mathbb{R}$. Par l'exercice 6788 comme on a

$$g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$$

avec $g(A)$ connexe alors $f'(I)$ est connexe. Comme $f'(I)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ c'est un intervalle.

Correction de l'exercice 6795 ▲

Soit $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$; soit $x, y \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Il existe i_1 tel que $x \in A_{i_1}$ on a aussi $a \in A_{i_1}$ donc il existe une chemin γ_1 qui relie x à a. De même il existe i_2 tel que $x \in A_{i_2}$ et on a également $a \in A_{i_2}$ donc il existe une chemin γ_2 qui relie a à y. Le chemin $\gamma_2 \circ \gamma_1$ relie x à y. Ceci étant valable quelque soient x et y, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction de l'exercice 6796 ▲

(a) Si $(x_1, \sin\frac{1}{x_1})$ et $(x_2, \sin\frac{1}{x_2})$ sont deux points de A alors le graphe au dessus de $[x_1, x_2]$ définie un chemin reliant ces deux points. Plus précisément le chemin est l'application $\gamma : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, \sin\frac{1}{t})$. Donc A est connexe par arcs donc connexe.

(b) $\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. On peut utiliser l'exercice 6788 pour montrer que $\bar{A}$ est connexe. Ici nous allons le montrer directement. Supposons, par l'absurde, que $\bar{A} \subset U \cup V$ avec U et V des ouverts de $\mathbb{R}^2$ disjoints, d'intersection non vide avec A. Comme $\{0\} \times [-1, 1]$ est connexe il est entièrement inclus dans un des ouverts, supposons qu'il soit inclus dans U. Comme A est connexe alors il est inclus dans un des ouverts, donc il est inclus dans V (car s'il était inclus dans U, tout $\bar{A}$ serait contenu dans U). Trouvons une contradiction en prouvant qu'en fait $U \cap A \neq \varnothing$. En effet U est un ouvert et $(0,0) \in U$, soit $B((0,0), \varepsilon)$ une boule contenue dans U. Pour n suffisamment grand on a $x_n = \frac{1}{2\pi n} < \varepsilon$ avec $\sin\frac{1}{x_n} = \sin 2\pi n = 0$ donc $(x_n, \sin\frac{1}{x_n}) = (x_n, 0)$ est un élément de A et de U. Comme V contient A alors $U \cap V \neq \varnothing$. Ce qui fournit la contradiction.

(c) Montrons que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs. Soit $O = (0,0)$ et $P = (\frac{1}{2\pi}, 0)$ deux points de $\bar{A}$, par l'absurde supposons qu'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow \bar{A}$ tel que $\gamma(0) = O$ et $\gamma(1) = P$. On décompose en coordonnées $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. $\gamma_1^{-1}(\{0\})$ est un fermé car γ_1 est continue et de plus il est non vide car $\gamma_1(0) = 0$. Soit $t_0 = \sup \gamma_1^{-1}(\{0\})$, comme l'ensemble est fermé alors $\gamma_1(t_0) = 0$ et de plus $t_0 < 1$ car $\gamma_1(1) = \frac{1}{2\pi}$.
On regarde ce qui se passe au temps t_0, c'est l'instant ou notre chemin "quitte" l'ensemble $\{0\} \times [-1, 1]$. Notons $y_0 = \gamma_2(t_0)$. Comme γ_2 est continue en y_0 et pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $\eta > 0$ tel que $(|t - t_0| < \eta \Rightarrow |\gamma_2(t) - y_0| < \frac{1}{2})$. Choisissons $t_1 \in]t_0, t_0 + \eta[$. Alors $t_1 > t_0$ donc $\gamma_1(t_1) > 0$. Donc le point $\gamma(t_1) = (\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_1))$ est dans A (et plus seulement dans $\bar{A}$).
Supposons par exemple $y_0 \leqslant 0$, alors quand x parcourt $]\gamma_1(t_0), \gamma_1(t_1)[$, $\sin\frac{1}{x}$ atteint la valeur 1 une infinité de fois. Donc il existe $t_2 \in]t_0, t_1[$ tel que $\gamma_2(t_2) = 1$. Donc $\gamma(t_2) = (\gamma_1(t_2), 1)$. Mais comme $|t_2 - t_0| < \eta$ alors $|\gamma_2(t_2) - y_0| = |1 - y_0| > \frac{1}{2}$. Ce qui contredit la continuité de γ_2. Nous avons obtenu une contradiction donc $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs.

Correction de l'exercice 6825 ▲

Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ alors par linéarité de l'intégrale et grâce à la relation de l'énoncé :

$$\int_a^b f(t) \cdot P(t)\, dt = 0.$$

La fonction f est continue sur le compact $[a, b]$ donc par le théorème de Weierstrass il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit P tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}
|\int_a^b f(t)^2 dt| &= \left| \int_a^b f(t)^2 dt - \int_a^b f(t) \cdot P(t) dt \right| \\
&= \left| \int_a^b f(t) \cdot (f(t) - P(t)) dt \right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)| \cdot \|f - P\|_\infty dt \\
&\leqslant \varepsilon \int_a^b |f|
\end{aligned}$$

.

Mais $C = \int_a^b |f|$ est une constante (indépendante de ε et P). Donc on vient de montrer que $|\int_a^b f(t)^2 dt| \leqslant \varepsilon C$ avec pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\int_a^b f^2 = 0$, or f^2 est une fonction continue et positive, son intégrale est nulle donc f est la fonction nulle.

Correction de l'exercice 6827 ▲

Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi = (f_1, \dots, f_n)$ alors Φ est continue car les f_i sont continues. Φ est injective : en effet si $x \neq y$ alors comme $\{f_i\}$ sépare les points on a $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, par contraposition Φ est injective. Notons $F = \Phi(E)$ l'image directe de E. Alors $\Phi : E \to F$ est continue et bijective. Comme E est compact alors Φ est un homéomorphisme. Donc E est homéomorphe à F qui est une partie de $\mathbb{R}^n$.

Rappel : Si $\Phi : E \to F$ est continue et bijective et E est un espace compact alors Φ est un homéomorphisme.

La preuve est simple : soit K un ensemble fermé de E, comme E est compact alors K l'est aussi. Comme Φ est continue alors $\Phi(K)$ est un compact de F donc un fermé. Mais en écrivant ceci à l'aide de l'application Φ^{-1} nous venons de montrer que pour tout fermé K de E, l'image réciproque de K par Φ^{-1} (qui est $(\Phi^{-1})^{-1}(K) = \Phi(K)$) est un fermé. Donc Φ^{-1} est continue. Donc Φ est un homéomorphisme.

Correction de l'exercice 6828 ▲

On cherche à vérifier les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass.

— Tout d'abord $X \times Y$ est compact, car c'est un produit d'espaces compacts.

— Ensuite $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{R})$: en effet pour $f, g \in \mathscr{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$f + g \in \mathscr{A}, \quad \lambda \cdot f \in \mathscr{A} \quad \text{ et } f \times g \in \mathscr{A}.$$

— $\mathscr{A}$ sépare les points : soient $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Supposons que $x_1 \neq x_2$, soit $u \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ tel que $u(x_1) \neq u(x_2)$ (clairement une telle fonction existe !), soit v la fonction sur Y constante égale à 1. Alors f définie par $f(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ est dans $\mathscr{A}$ et $f(x_1, y_1) = u(x_1) \neq u(x_2) = f(x_2, y_2)$. Si $x_1 = x_2$ alors nécessairement $y_1 \neq y_2$ et on fait un raisonnement similaire.

— Pour tout $(x, y) \in X \times Y$ il existe une fonction $f \in \mathscr{A}$ telle que $f(x) \neq 0$: prendre la fonction f constante égale à 1 qui est bien dans $\mathscr{A}$.

Par le théorème de Stone-Weierstrass $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Correction de l'exercice 6829 ▲

(a) Pour $f \in \mathscr{F}$, par le théorème des accroissements finis, pour tout $t_0, t \in [a, b]$ il existe $c \in]t_0, t[$ tel que $|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)||t - t_0|$. Donc $|f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0|$. Fixons $t_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ alors

$$\forall t \in [a, b] \qquad |t - t_0| \leqslant \eta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0| \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui est exactement l'équicontinuité de $\mathscr{F}$ en t_0. Comme nous pouvons prendre pour t_0 n'importe quel point de $[a, b]$ alors $\mathscr{F}$ est équicontinue.

(b) i. Notons $\mathscr{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour $x_0, x \in \mathbb{R}^n$, $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| \leqslant L\|x - x_0\|$. Donc en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{L}$ comme ci-dessus on prouve l'équicontinuité de $\mathscr{H}$ en x_0, puis partout.

ii. Notons $\mathscr{H}(x) = \{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors par hypothèse, $\mathscr{H}(0) \subset \bar{B}(0, \sqrt{2})$. Donc $\bar{\mathscr{H}}(0)$ est un fermé de $\bar{B}(0, \sqrt{2})$ qui est compact (nous somme dans $\mathbb{R}^n$), donc $\bar{\mathscr{H}}(0)$ est aussi compact, d'où $\mathscr{H}(0)$ relativement compact. Maintenant nous avons $\|f_n(x) - f_n(0)\| \leqslant L\|x - 0\|$. Donc $\|f_n(x)\| \leqslant L\|x\| + \sqrt{2}$. Donc pour x fixé, $f_n(x) \in \bar{B}(0, L\|x\| + \sqrt{2})$ ce qui implique que $\mathscr{H}(x)$ est relativement compact.

iii. Comme $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact on ne peut pas appliquer directement le théorème d'Ascoli. Soit $B_R = \bar{B}(0, R)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathscr{H}_R = \{f_{n|B_R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ la restriction de $\mathscr{H}$ à B_R. Alors par le théorème d'Ascoli, $\mathscr{H}_R$ est relativement compact. Donc de la suite $(f_{n|B_R})_n$ on peut extraire une sous-suite convergente (sur B_R).

iv. Pour $R = 1$ nous extrayons de $(f_n)_n$ une sous-suite $(f_{\phi_1(n)})_n$ qui converge sur B_1. Pour $R = 2$, nous extrayons de $(f_{\phi_1(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_2(n)})_n$ qui converge sur B_2. Puis par récurrence pour $R = N$, nous extrayons de $(f_{\phi_{N-1}(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_N(n)})_n$ qui converge sur B_N. Alors la suite $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge sur $\mathbb{R}^n$. C'est le procédé diagonal de Cantor. En effet soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $N \geqslant \|x\|$. Alors $x \in B_N$ donc $(f_{\phi_N(n)}(x))_n$ converge vers $f(x)$, mais $(f_{\phi_n(n)})_{n\geqslant N}$ est extraite de $(f_{\phi_N(n)})_n$ donc $(f_{\phi_n(n)}(x))_n$ converge également vers $f(x)$. Nous venons de montrer que $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge simplement vers f sur tout $\mathbb{R}^n$.

Correction de l'exercice 6830 ▲

(a) i. Soit (x_n) une suite convergeant vers a, alors

$$|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b|.$$

ii. Soit $\varepsilon > 0$, il existe N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$ on ait $|f_n(a) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

iii. (f_n) est équicontinue en a, donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $(|x-a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2})$.

iv. Comme $x_n \to a$ alors il existe N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$ on ait $|x_n - a| < \eta$.

v. Donc pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a $|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $(f_n(x_n))$ converge vers b.

(b) Soit des fonctions réelles définies par $f_n(x) = (1+x)^n$. Prenons $x_n = \frac{1}{n}$, alors $x_n \to a = 0$. Par contre $f_n(a) = f_n(0) = 1$ pour tout n. Mais $f_n(x_n) = f_n(\frac{1}{n}) = (1+\frac{1}{n})^n$ converge vers e. L'équicontinuité est donc bien nécessaire.

Correction de l'exercice 6831 ▲

Notons G l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F. Soit (x_n) une suite d'éléments de G qui converge vers $x \in E$. Il faut montrer $x \in G$, c'est-à-dire que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de F. Écrivons pour $p, q, n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \|f_p(x) - f_p(x_n)\| + \|f_p(x_n) - f_q(x_n)\| + \|f_q(x_n) - f_q(x)\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme (f_n) est équicontinue en x, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in E \quad \|x - y\| < \eta \quad \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme $x_n \to x$ il existe $N \geqslant 0$ tel que $\|x_N - x\| < \eta$. Donc

$$\forall p, q \geqslant N \quad \|f_p(x_N) - f_p(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \|f_q(x_N) - f_q(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Enfin N étant fixé, $x_N \in G$, la suite $(f_n(x_N))_n$ est une suite de Cauchy, donc il existe $N' \geqslant N$ tel que pour $p, q \geqslant N'$ on a,

$$\|f_p(x_N) - f_q(x_N)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le bilan de toute ces inégalités est donc

$$\forall p, q \geqslant N' \quad \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon.$$

Donc $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy, donc $x \in G$ et G est fermé.

Correction de l'exercice 6832 ▲

(a) i. Montrons que A est ouvert. Soit $x \in A$, alors $\mathscr{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathscr{H}\}$ est bornée, notons M une borne. Écrivons l'équicontinuité pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathscr{H} \quad \forall y \in E \quad (\|x-y\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1).$$

Or si $|f(x) - f(y)| < 1$ alors $|f(y)| < |f(x)| + 1 \leqslant M + 1$. On a donc montré

$$\forall f \in \mathscr{H} \quad \forall y \in E \quad (y \in B(x, \eta) \Rightarrow |f(y)| < M + 1).$$

Donc $B(x, \eta) \subset A$. Donc A est ouvert.

ii. Montrons que A est fermé. Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in E$. On reprend $\varepsilon = 1$ et on obtient un η par équicontinuité. Comme $x_n \to x$ alors il existe N tel que $\|x_N - x\| < \eta$. Donc pour tout f dans $\mathscr{H}$, $|f(x) - f(x_N)| < 1$; donc $|f(x)| < |f(x_N)| + 1$. Or $x_N \in A$, il existe M tel $|f(x_N)|$ soit bornée par M pour tout f dans $\mathscr{H}$. Donc pour tout $f \in \mathscr{H}$, $|f(x)| < M + 1$. Donc $x \in A$. Donc A est fermé.

(b) $x_0 \in A$ donc A est non vide, comme A est ouvert et fermé et E est connexe alors $A = E$. donc pour tout $x \in E$, $\mathscr{H}(x)$ est borné dans $\mathbb{R}$, donc $\overline{\mathscr{H}(x)}$ est un compact de $\mathbb{R}$. Par le théorème d'Ascoli, $\mathscr{H}$ étant équicontinue et E étant compact alors $\bar{\mathscr{H}}$ est compact.

Correction de l'exercice 6833 ▲

(a) i. Pour $t \geqslant 0$ fixé, alors

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sin\sqrt{t + 4(n\pi)^2} \\ &= \sin 2n\pi\sqrt{1 + \frac{t}{4n^2\pi^2}} \\ &= \sin 2n\pi(1 + \frac{1}{2}\frac{t}{4n^2\pi^2} + o(\frac{1}{n^2})) \\ &= \sin(2n\pi + \frac{t}{4n\pi} + o(\frac{1}{n})) \\ &= \sin(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n}) \end{aligned}$$

Donc quand $n \to +\infty$ alors $f_n(t) \to 0$. Donc (f_n) converge simplement vers 0.

ii. Pour $n \geqslant 1$,

$$|f_n'(t)| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t + 4n^2\pi^2}}\cos\sqrt{t + 4n^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t + 4\pi^2}} \leqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Pour $t \geqslant 0$ fixé et $\varepsilon > 0$ donné, on pose $\eta = 4\pi\varepsilon$, alors par l'inégalité des accroissement finis

$$\forall n \geqslant 1 \quad |t - t'| < \eta \Rightarrow |f_n(t) - f_n(t')| \leqslant \frac{1}{4\pi}|t - t'| < \varepsilon.$$

Donc (f_n) est une famille équicontinue.

(b) Notons $\mathscr{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathscr{H}(t) = \{f_n(t) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, alors d'après la convergence simple, $\overline{\mathscr{H}(t)} = \mathscr{H}(t) \cup \{0\}$. Mais (f_n) ne converge pas uniformément (i.e. pour la norme $\|.\|_\infty$) vers $f = 0$. En effet pour n impair, posons $t_n = 5n^2\pi^2$, alors $f_n(t_n) = \sin\sqrt{9n^2\pi^2} = \sin(3n\pi) = 0$. Pour n pair, on pose $t_n = \frac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2$ alors

$$f_n(t_n) = \sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2 + 4n^2\pi^2} = \sin\sqrt{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^2} = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1.$$

Donc pour tout n, $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Supposons que $\mathscr{H}$ soit relativement compact alors de la suite (f_n) on peut extraire une sous-suite qui converge, nécessairement la limite est $f = 0$, mais comme pour tout n, $\|f_n - f\|_\infty = 1$, nous obtenons une contradiction.

Bien sûr le théorème d'Ascoli n'est pas mis en défaut, car toutes les hypothèses sont vérifiées sauf $E = [0, +\infty[$ qui n'est pas compact.

Correction de l'exercice 6834 ▲

(a) k est continue sur le compact $[a,b]\times[a,b]$ donc est uniformément continue. Écrivons cette continuité uniforme dans le cas particulier où les secondes coordonnées sont égales :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x,y,t \in [a,b] \qquad |x-y| < \eta \Rightarrow |k(x,t)-k(y,t)| < \varepsilon'.$$

(b) Comme (f_n) est bornée il existe $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$. Fixons $x\in[a,b]$. Soit $\varepsilon>0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, par l'uniforme continuité de k, on obtient un $\eta>0$ avec pour $|x-y|<\eta$, $|k(x,t)-k(y,t)| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$.
Donc pour $|x-y|<\eta$,

$$\begin{aligned}|Kf_n(x)-Kf_n(y)| &\leqslant \int_a^b |k(x,t)-k(y,t)|\|f_n\|_\infty dt\\ &\leqslant M\int_a^b |k(x,t)-k(y,t)|dt\\ &\leqslant M\int_a^b \frac{\varepsilon}{M(b-a)}dt\\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Ce qui est l'équicontinuité de (Kf_n) en x. Comme ceci est valable quelque soit $x\in[a,b]$ alors (Kf_n) est équicontinue.

(c) Notons $\mathscr{H} = (Kf_n)_n$. Alors pour x donné $\mathscr{H}(x)$ est borné car $|\int_a^b k(x,t)f_n(t)dt| \leqslant M\int_a^b |k(x,t)|dt$ est bornée indépendamment de $n\in\mathbb{N}$. Donc $\overline{\mathscr{H}(x)}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc un compact.
Nous avons toutes les hypothèses pour appliquer le théorème d'Ascoli, donc $\mathscr{H} = (Kf_n)_n$ est relativement compact. Donc de la suite (Kf_n) on peut extraire une sous-suite convergente. (Attention la limite de cette sous-suite est dans $\overline{\mathscr{H}} \subset X$ et pas nécessairement dans $\mathscr{H}$.)

Correction de l'exercice 6838 ▲

En utilisant les relations de Cauchy, on trouve aisément

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

Ces conditions sont vérifiées par la fonction log. Sa dérivée est $1/z$.

Correction de l'exercice 6839 ▲

La fonction f est méromorphe comme composée de fonctions méromorphes. Son unique pôle est -1. Le contour étant entièrement inclus dans le domaine Ω, on a

$$\int_C f(z)\,dz = 2i\pi \mathrm{Res}(f,-1) = 2i\pi\left[\exp((a-1)\log z\right]_{z=-1} = 2i\pi e^{i(a-1)\pi} = -2i\pi e^{ia\pi}$$

Notons γ le petit cercle (orienté négativement), Γ le grand cercle (orienté positivement) dans C, et remarquons que sur le segment $[\varepsilon,R]+0i$, l'argument de z doit être pris nul, tandis qu'il faut le prendre égal à 2π sur le segment opposé $[R,\varepsilon]-0i$. On obtient

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x}dx + \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_R^\varepsilon \frac{x^{a-1}e^{i2\pi(a-1)}}{1+x}dx + \int_\gamma f(z)\,dz$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$ et $R \to 0$, $\int_\gamma f \to 0$ et $\int_\Gamma f \to 0$ d'après les lemmes de Jordan, car $|zf(z)| \to 0$ quand $|z| \to 0$ ou $+\infty$. Finalement
$$\int_C f(z)\,dz \to (1-e^{i2\pi a})I$$
et donc
$$I = \frac{-2i\pi e^{ia\pi}}{1-e^{i2\pi a}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Correction de l'exercice 6840 ▲

Il suffit de vérifier que f est dérivable au sens complexe. Pour tout $z \neq 0$:
$$\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim_{w\to z} \frac{\frac{1}{w}-\frac{1}{z}}{w-z} = \lim_{w\to z} \frac{1}{w-z}\left(\frac{z-w}{wz}\right) = -\frac{1}{z^2}\,.$$
La fonction f est bien holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ avec $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Correction de l'exercice 6841 ▲

Considérons le produit fg. En utilisant la définition même de la dérivée, on a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(f(z+h)g(z+h)-f(z)g(z)\right) &= f(z+h)\frac{g(z+h)-g(z)}{h} + g(z)\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\ &\longrightarrow f(z)g'(z)+g(z)f'(z) \quad \text{lorsque } \ h\to 0\,.\end{aligned}$$
Autre manière :
$$\begin{aligned}f(z+h)g(z+h) &= (f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h))(g(z)+g'(z)h+h\varepsilon(h))\\ &= f(z)g(z)+(f(z)g'(z)+f'(z)g(z))h+h\varepsilon(h)\,.\end{aligned}$$
D'où $(fg)'(z) = f(z)g'(z)+f'(z)g(z)$.

Correction de l'exercice 6842 ▲

De la même façon que pour la correction de l'exercice 6841 on a
$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)}{g(z+h)} &= \frac{f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h)}{g(z)\left(1+\frac{g'(z)}{g(z)}h+h\varepsilon(h)\right)}\\ &= (f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h))\frac{1}{g(z)}\left(1-\frac{g'(z)}{g(z)}h+h\varepsilon(h)\right)\\ &= \frac{f(z)}{g(z)}+\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}h+h\varepsilon(h)\end{aligned}$$
si $g(z)\neq 0$.

Correction de l'exercice 6843 ▲

On utilise de nouveau la définition de la dérivée, d'abord pour f en z puis pour g au point $f(z)$:
$$f(z+h) = f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h).$$
Notons $w_h = f'(z)h+h\varepsilon(h)$. Alors (et comme dans les exercices précédents on utilise « epsilon » pour n'importe quelle fonction tendant vers zéro lorsque sa variable tend vers zéro) :
$$g(f(z+h)) = g(f(z)+w_h) = g(f(z))+g'(f(z))w_h+w_h\varepsilon(w_h).$$

Ainsi :

$$\frac{1}{h}\big(g(f(z+h))-g(f(z))\big)=\big(g'(f(z))+\varepsilon(w_h)\big)\frac{w_h}{h}.$$

Lorsque $h\to 0$, on a $w_h\to 0$, donc $\varepsilon(w_h)\to 0$ et par ailleurs $\frac{w_h}{h}\to f'(z)$. Au final

$$(g\circ f)'(z)=\lim_{h\to 0}\big(g'(f(z))+\varepsilon(w_h)\big)\frac{w_h}{h}=g'(f(z))f'(z).$$

Correction de l'exercice 6844 ▲

La formule de Leibniz se montre par récurrence. Le cas $n=1$, c'est-à-dire $(fg)'=fg'+f'g$, a été démontré dans l'exercice 6841. Supposons alors que cette formule soit vraie au rang $n\geqslant 1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(z)&=\frac{d}{dz}\left((fg)^{(n)}\right)(z)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left\{f^{(j+1)}(z)g^{(n-j)}(z)+f^{(j)}(z)g^{(n-j+1)}(z)\right\}\\&=\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}f^{(j)}(z)g^{(n+1-j)}(z)+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(j)}(z)g^{(n+1-j)}(z).\end{aligned}$$

La conclusion vient du fait : $\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}=\binom{n+1}{j}$ qui est simple à vérifier.

Correction de l'exercice 6845 ▲

Prenons $r<\min(R_1,R_2)$. Alors, il existe $C>0$ et $0<\lambda<1$ tels que $|a_n|r^n\leqslant C\lambda^n$ et $|b_n|r^n\leqslant C\lambda^n$ (vérifiez-le !). D'où

$$\sum_{j=0}^{n}|a_j|r^j|b_{n-j}|r^{n-j}\leqslant(n+1)C^2\lambda^n\ ,$$

ce qui permet d'affirmer, pour tout z avec $|z|=r$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}|a_jz^j||b_{n-j}z^{n-j}|\Big)<\infty\,.$$

Par le théorème du cours sur les séries doubles (voir le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol, Annexe 8.2), ceci signifie que la série double

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a_jz^jb_kz^k)$$

est absolument convergente. On peut donc d'après ce théorème affirmer :

$$f(z)g(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}(a_jz^j)(b_{n-j}z^{n-j})\Big)\,.$$

Or, la série de droite est $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ avec $c_n=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$. Au passage on obtient que le rayon de convergence de cette série est au moins égal à r. Comme $r<\min(R_1,R_2)$ est arbitraire, le rayon de convergence est en fait au moins égal à $\min(R_1,R_2)$ (il peut être plus grand comme on le voit par exemple avec $f(z)=\frac{1}{1-z}$ et $g(z)=1-z$, ou encore avec $f(z)=\frac{2-z}{(1-z)(3-z)}$ et $g(z)=\frac{1-z}{(2-z)(3-z)}$).

Correction de l'exercice 6846 ▲

Il suffit d'utiliser la formule de Leibniz de l'exercice 6844 et le fait que le coefficient a_n du développement de f à l'origine est $a_n=f^{(n)}(0)/n!$.

Correction de l'exercice 6847 ▲

La fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est nulle part dérivable au sens complexe (et donc nulle part holomorphe) : car

$$\frac{1}{h}(f(z+h) - f(z)) = \frac{\bar{h}}{h}$$

et la limite de cette expression n'existe pas lorsque $h \to 0$. *Remarque.* Plus généralement, une application $\mathbb{R}$–linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est de la forme

$$w \mapsto \alpha w + \beta \bar{w} \tag{44}$$

(ce n'est qu'une écriture complexe des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) ; une telle application est holomorphe si et seulement si $\beta = 0$. C'est exactement la différence entre différentiabilité (donc réelle) et holomorphie (dérivabilité au sens complexe). En effet, les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'équation $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0$ où $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. C'est une réécriture complexe des équations de Cauchy-Riemann. Si vous avez une fonction f différentiable, alors sa différentielle $Df(z)$ est une application linéaire de la forme (44). Un calcul simple montre que dans ce cas

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \quad et \quad \alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. De nouveau, f est complexe différentiable en z si et seulement si $\beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$. Dans ce cas $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$. Revenons à l'exercice. Si vous êtes d'accord avec ma remarque, alors nous sommes aussi d'accord sur le fait que :

$$z \mapsto x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

n'est pas holomorphe. Ce raisonnement s'applique aussi à $z \mapsto y$. Nous reviendrons à ce genre d'applications dans l'exercice 6849.

Correction de l'exercice 6848 ▲

Pour éviter des raisonnements topologiques, supposons dans un premier temps que Ω soit un disque, par exemple le disque unité $\Omega = D = D(0,1)$, et montrons que f est constante et égale à $f(0)$. Si $z \in D$, alors le segment $[0,z] \subset D$ (et c'est pour cette raison que l'on a pris $\Omega = D$). On peut écrire

$$f(z) - f(0) = \int_0^z f'(z)\,dz = 0.$$

Seulement, ici il faut expliquer le sens de cette intégrale (non connue pour l'instant). Soit $\gamma : [0,1] \to [0,z]$, $\gamma(t) = tz$, une paramérisation du segment $[0,z]$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^z f'(w)\,dw &= \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 f'(tz)z\,dt \\ &= \int_0^1 \mathrm{Re}\left(f'(tz)z\right)dt + i\int_0^1 \mathrm{Im}\left(f'(tz)z\right)dt = 0. \end{aligned}$$

Pour le cas d'un ouvert connexe Ω quelconque le précédent raisonnement montre qu'au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$ la fonction f est constante. C'est donc une propriété ouverte. Autrement dit, si $z_0 \in \Omega$ est un point quelconque, l'ensemble

$$\mathscr{E} = \{z \in \Omega;\ f(z) = f(z_0)\}$$

est un ouvert. Pour conclure il faut établir que $\mathscr{E}$ est aussi un fermé de Ω (topologie induite ! !). Or ceci est évident puisque $\mathscr{E} = f^{-1}(\{f(z_0)\})$ et f est continue. Notons que $\mathscr{E} \neq \emptyset$ puisque $z_0 \in \mathscr{E}$. Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés du connexe Ω étant l'ensemble vide et Ω, on a $\Omega = \mathscr{E}$. La fonction f est constante sur Ω. Si Ω n'est pas connexe, f peut prendre différentes valeurs sur les différentes composantes connexes de Ω.

Correction de l’exercice 6849 ▲

Soit $f(z) = u(z) + iv(z)$ pour $z \in U$. Si f ne prend que des valeurs réelles, alors $v \equiv 0$. On tire des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0.$$

La dérivée de f est alors identiquement nulle sur l’ouvert connexe Ω ce qui implique que f est constante (voir l’exercice 6848).

Correction de l’exercice 6850 ▲

(a) La formule de Taylor avec reste intégral est

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + \ldots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt$$

puis on remplace avec $a = 0$ et $b = 1$.

(b) Si $f' = f$ et si f est n–fois dérivable au sens complexe, alors $\lim_{h\to 0}(f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z))/h = \lim_{h\to 0}(f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z))/h = f^{(n)}(z)$. Par récurrence on en déduit, d’une part, que f est infiniment dérivable et, d’autre part, que $f^{(n)}(z) = f(z)$ pour tout $n \geqslant 0$. En particulier, $f^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. En utilisant la formule de Taylor de la question précédente on a donc

$$\begin{aligned}\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| &\leqslant |z|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} |f^{(n+1)}(uz)|\,du \\ &\leqslant |z|^{n+1} \sup_{|w|\leqslant|z|} |f^{(n+1)}(w)| \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,du \leqslant \sup_{|w|\leqslant|z|} |f(w)| \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. D’où $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

(c) Fixons $z \in \mathbb{C}$ et notons $a_k = \frac{z^k}{k!}$. Alors :

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |z| \frac{1}{k+1} \to 0$$

lorsque $k \to \infty$. On en déduit que le rayon de convergence de cette série est ∞ (d’Alembert) et que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus :

$$F'(z) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{kz^{k-1}}{k!} = F(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par le théorème sur les séries doubles (en fait l’exercice 6845)

$$\begin{aligned}F(z)F(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} z^j w^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z+w)^k = F(z+w).\end{aligned}$$

Correction de l’exercice 6851 ▲

Non $\limsup_{n\to\infty}|a_nz^n| = +\infty$ mais il n'y a pas de raison pour que $\liminf_{n\to\infty}|a_nz^n| = +\infty$. Prenez par exemple la série : $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$, de rayon de convergence $R = 1$, mais $(|a_nz^n|)$ n'a pas de limite (la valeur est 0 pour n impair et $|z|^n$ pour n pair, qui tend vers l'infini lorsque $|z| > 1$).

Correction de l'exercice 6852 ▲

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad |z| < 1.$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

etc.

Correction de l'exercice 6853 ▲

Discutons d'abord le rayon de convergence. D'ailleurs, ce qui suit s'applique également aux exercices suivants. Donc, d'après le théorème d'analycité des fonctions holomoephes (voir le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol : théorème 10 du chapitre 6), si f est holomorphe dans $U \subset \mathbb{C}$, si $z_0 \in U$ et si $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$, alors la série de Taylor de f en z_0 converge et sa somme vaut f dans ce disque $D(z_0, r)$. Ici $f(z) = \frac{1}{z-1}$. Cette fonction est holomorphe dans $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Par conséquent, si $z_0 \in U$, alors la série de Taylor de f en z_0 vaut f dans le disque $D(z_0, R_1)$ si $R_1 = |z_0 - 1|$. Le calcul de la série est classique :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-z_0+z_0-1} = \frac{1}{z_0-1}\frac{1}{1-\left(\frac{z_0-z}{z_0-1}\right)} = \frac{1}{z_0-1}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z_0-z}{z_0-1}\right)^k$$

pour $|z - z_0| < |z_0 - 1| = R_1$.

Correction de l'exercice 6854 ▲

La fonction $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ est holomorphe dans $U = \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$. Par ce que l'on vient de dire à l'exercice précédent, le rayon de convergence demandé est $R = \min\{|z_0 - 1|, |z_0 - 2|\}$, où $z_0 \in U$ est un point quelconque fixé. On a $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ et :

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-z_0+z_0-2} = \frac{1}{z_0-2}\frac{1}{1-\left(\frac{z_0-z}{z_0-2}\right)} = \frac{1}{z_0-2}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z_0-z}{z_0-2}\right)^k$$

pour $|z-z_0| < |z_0-2| = R_2$. La série demandée est alors la différence entre celle-ci et celle de l'exercice précédent. Notons aussi que le rayon de convergence est exactement le minimum des rayons R_1 et R_2.

Correction de l'exercice 6856 ▲

Le rayon de convergence est $R = 1$. Soit $0 < t < 1$ et étudions $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2^k}$. Il s'agit d'une série de termes positifs. D'où

$$f(t) \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} t^{2^k} \quad \text{pour tout} \quad N \in |||.$$

Il en résulte $\liminf_{t\to 1} f(t) \geqslant N$ or N est arbitraire, donc $\lim_{t\to 1} f(t) = \infty$. Soit maintenant w un nombre complexe du cercle unité vérifiant $w^{2^N} = 1$ pour un $N \in |||$. Dans ce cas $w^{2^k} = 1$ pour tout $k \geqslant N$. Si de nouveau $0 < t < 1$, alors

$$f(tw) = \sum_{k=0}^{N-1}(tw)^{2^k} + \sum_{k\geqslant N} t^{2^k}.$$

Lorsque $t \to 1$, alors la première somme tend vers un nombre complexe (fini, en fait de module au plus N) et la deuxième vers ∞. Les nombres complexes w ayant la propriété $w^{2^N} = 1$ pour un certain $N \in |||$

sont denses dans le cercle unité $\{|z|=1\}$. Ceci, et le principe de prolongement analytique, interdit l'existence de la fonction g holomorphe sur U comme décrit dans l'exercice. Si $z_0 \in D(0,1)$, alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est $R = 1-|z_0|$.

Correction de l'exercice 6859 ▲

Il s'agit de formules bien connues lorsque les arguments z, w sont réels. La vérification à partir des définitions des fonctions trigonométriques données dans l'énoncé de l'exercice est laissée au lecteur. Voici comment obtenir la formule :

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \qquad pour \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{45}$$

Fixons $w \in \mathbb{R}$. Soit $f_w(z) = \cos(z+w) - \big(\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\big)$. La formule (45) étant vraie pour $z, w \in \mathbb{R}$, $f_w(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Il résulte du principe des zéros isolés que f_w est identiquement nulle. Autrement dit, on vient d'établir la formule (45) pour $(z,w) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Il suffit maintenant de refaire le même argument en fixant d'abord $z \in \mathbb{C}$ arbitrairement et en observant que la fonction holomorphe

$$g_z(w) = \cos(z+w) - (\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w))$$

est nulle pour tout $w \in \mathbb{R}$. De nouveau $g_z \equiv 0$ par le principe des zéros isolés, d'où la formule (45) pour tout $z, w \in \mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 6860 ▲

$$\begin{aligned}\sin(a)ch(b) + i\cos(a)\operatorname{sh}(b) &= \frac{1}{4i}\big\{(e^{ia}-e^{-ia})(e^b+e^{-b}) - (e^{ia}+e^{-ia})(e^b-e^{-b})\big\}\\ &= \frac{1}{2i}\big(e^{ia-b}-e^{-ia+b}\big) = \sin(a+ib).\end{aligned}$$

Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}|\sin(a+ib)|^2 &= (\sin(a)\operatorname{ch}(b))^2 + (\cos(a)\operatorname{sh}(b))^2\\ &= \sin^2(a)(1+\operatorname{sh}^2(b)) + (1-\sin^2(a))\operatorname{sh}^2(b)\\ &= \sin^2(a) + \operatorname{sh}^2(b).\end{aligned}$$

Cette somme de carrés de nombres réels ne peut être nulle que si $\sin(a) = 0$ et $\operatorname{sh}(b) = 0$, c'est-à-dire $a \in \pi\mathbb{Z}$ et $b = 0$. Donc $\sin(z) = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 6924 ▲

On a les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. D'où :

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

par le théorème de Schwarz. On procède de la même façon pour v pour en déduire qu'une fonction holomorphe est harmonique.

Correction de l'exercice 6925 ▲

Cet exercice et les suivants concernent des changements de variables. Rappelons que, si $\Phi : U \to V$ est un difféomorphisme entre ouverts U, V de $\mathbb{R}^n$ et si on note $y = \Phi(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}$$

pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. On a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Donc

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

On peut réécrire ceci en :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = (Jac(f))^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} \\ \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

Pour retrouver les $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ il suffit d'inverser cette matrice M. Le reste est clair.

Correction de l'exercice 6926 ▲

On a $w = g(z)$ avec $g(z) = a(z) + ib(z)$ une fonction holomorphe et avec $z = x + iy$. Utilisons de nouveau le changement de coordonnées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial a(z)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b(z)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial b} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial a(z)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b(z)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial b}.
\end{aligned}$$

En utilisant les équations de Cauchy-Riemann on en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} &= \left(\frac{\partial a(z)}{\partial x} + i\frac{\partial a(z)}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial a} + \left(\frac{\partial b(z)}{\partial x} + i\frac{\partial b(z)}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial b} \\
&= \left(\frac{\partial a(z)}{\partial x} - i\frac{\partial b(z)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial a} + \left(\frac{\partial b(z)}{\partial x} + i\frac{\partial a(z)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial b} \\
&= \left(\frac{\partial a(z)}{\partial x} - i\frac{\partial b(z)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b}\right).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6928 ▲

Soit Q le carré dont le bord est $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_4$ où

$$\gamma_1(t) = A + 2it, \quad \gamma_2(t) = B - 2t, \quad \gamma_3(t) = C - 2it, \quad et \quad \gamma_4(t) = D + 2t, \quad t \in [0,1].$$

Notons aussi $\gamma_{j,x} = \mathrm{Re}(\gamma_j)$ et $\gamma_{j,y} = \mathrm{Im}(\gamma_j)$, $j = 1, \ldots, 4$. Alors :

$$\int_\gamma dx = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} dx = \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma'_{j,x}(t)\,dt = 0$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\gamma x\,dx &= \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} x\,dx = \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma_{j,x}(t)\gamma'_{j,x}(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (1-2t)(-2)dt + \int_0^1 (-1+2t)2dt = 0.
\end{aligned}$$

Passons à la correction de la question 3. Alors

$$\int_\gamma dz = \int_\gamma z\,dz = 0$$

puisque dans les deux cas on intègre une fonction holomorphe ($f(z) \equiv 1$ et $f(z) = z$) dans le carré Q. On a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma x\,dz &= \sum_{j=1}^{4}\int_0^1 \gamma_{j,x}(t)d\gamma_j(t) = \sum_{j=1}^{4}\int_0^1 \gamma_{j,x}(t)\gamma_j'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 2idt + \int_0^1 (1-2t)(-2)dt + \int_0^1 (-1)(-2i)dt + \int_0^1 (-1+2t)2dt \\ &= 2i+2i = 4i.\end{aligned}$$

En ce qui concerne la question 4., on y intègre la fonction $f_n(z) = z^n$ le long du chemin fermé γ. Mais attention, cette fonction admet une primitive seulement si $n \neq -1$. D'où

$$\int_\gamma z^n dz = 0 \quad \text{pour } \; n \neq -1.$$

Dans le cas restant $n = -1$ on trouve :

$$\int_\gamma f_{-1}(z)dz = 2i\pi.$$

D'ailleurs, et là on rejoint l'exercice 6930, on a :

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_C f_n(z)\,dz$$

où $C = \{|z| = 1\}$. Ce cercle se paramétrise par $\sigma(\theta) = e^{2i\pi\theta}$. D'où :

$$\int_C f_n(z)\,dz = \int_0^1 e^{2i\pi n\theta} 2i\pi e^{2i\pi\theta}\,d\theta = 2i\pi \int_0^1 e^{2i\pi(n+1)\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } \; n = -1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

De manière analogue on a

$$\int_C \bar{z}^n\,dz = \int_0^1 e^{-2i\pi n\theta} 2i\pi e^{2i\pi\theta}\,d\theta = 2i\pi \int_0^1 e^{2i\pi(1-n)\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } \; n = 1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Correction de l'exercice 6929 ▲

Pour toute fonction $f = u + iv$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\int_\gamma \overline{f(z)}dz = \int_0^1 (u-iv)(\gamma_1' + i\gamma_2')dt = \overline{\int_0^1 (u+iv)(\gamma_1' - i\gamma_2')dt} = \overline{\int_\gamma f(z)\overline{dz}}.$$

Voir la correction de l'exercice 6928.

Correction de l'exercice 6930 ▲

Voir la correction de l'exercice 6928.

Correction de l'exercice 6931 ▲

Dans le cas où C n'encercle pas l'origine la fonction $z \mapsto z^n$ est holomorphe au voisinage du disque bordé par C et ceci pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, $\int_C z^n dz = 0$. Sinon on retrouve les valeurs obtenues précédemment. On rappelle également que :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z}dz$$

est l'indice $\mathrm{Ind}(C,0)$ de la courbe C par rapport à l'origine. Cet indice est 1 lorsque C encercle l'origine et 0 sinon.

Correction de l'exercice 6932 ▲

On a

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = 2i\pi \mathrm{Ind}(C,a).$$

Or, $\mathrm{Ind}(C,a) = 0$ si $r < a$ et $\mathrm{Ind}(C,a) = 1$ si $r > a$. Le même raisonnement s'applique à $\int_C \frac{1}{z-b}dz$, d'où le résultat annoncé.

Correction de l'exercice 6933 ▲

Comme

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k z^{k-n}$$

on a

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{2k-n-1}.$$

Or $\int_C z^j\,dz \neq 0$ si et seulement si $j=-1$. Le seul terme de la somme précédente qui donne une contribution non nulle à l'intégrale est lorsque k vérifie $2k-n-1=-1$. Notons que ceci est possible seulement si n est un nombre pair ! D'où :

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Sinon, si $n = 2k$ est pair, on a :

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2k} \frac{dz}{z} = 2i\pi\binom{2k}{k}.$$

Comme $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n t\,dt = \frac{1}{2^n}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{it}+e^{-it})^n \frac{ie^{it}dt}{ie^{it}} = \frac{-i}{2^n}\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}.$$

D'où $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt = 0$ si n est impair et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2k} t\,dt = \frac{\pi}{2^{2k-1}}\binom{2k}{k}.$$

Par périodicité du cosinus ceci donne :

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} t\,dt = \frac{1}{4}\frac{\pi}{2^{2k-1}}\binom{2k}{k} = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2k}.$$

Correction de l'exercice 6989 ▲

On pose $f(z) = e^{xz}$. Alors $f^{(n)}(0) = x^n$, donc

$$x^n = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{e^{xz}}{z^{n+1}}dz$$

d'où la formule demandée par multiplication par $x^n/(n!)^2$.

Sur C, on a $|z|=1$, et donc la série $\sum x^n/(n!z^n)$ est uniformément convergente par rapport à z (et sa limite est bien sûr égale à $e^{x/z}$). Donc on peut inverser les signes $\sum$ et $\int$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_C \frac{e^{xz}}{z}\left(\frac{x^n}{n!z^n}\right)dz\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z}e^{xz}e^{\frac{x}{z}}\,dz\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}e^{x(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}\,ie^{i\theta}\,d\theta \quad (z=e^{i\theta})\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}\,d\theta.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7001 ▲

On pose $\theta=2\varphi$, et on obtient

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{a\,d\theta}{2a^2+1-\cos\theta}=\int_C f(z)\,dz$$

où c est le cercle trigonométrique, $z=e^{i\theta}$ et

$$f(z)=\frac{2ia}{z^2-2(2a^2+1)z+1}=\frac{2ia}{P(z)}$$

qui a deux pôles simples (racines du dénominateur P), dont une seule est intérieure au cercle, soit

$$\alpha=2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}$$

Donc

$$I=2\pi i\mathrm{Res}(f,\alpha)=2\pi i\frac{2ia}{P'(\alpha)}=\frac{-4\pi a}{2\alpha-2(2a^2+1)}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Correction de l'exercice 7002 ▲

Le polynôme $P(z)=z^4+z^2+1$ a pour racines les racines carrées de j et j^2, soit $\pm j^2$ et $\pm j$. Seuls j et $-j^2$ ont une partie imaginaire positive, donc

$$I=2i\pi(\mathrm{Res}(1/P,j)+\mathrm{Res}(1/P,-j^2))=2i\pi\left(\frac{1}{P'(j)}+\frac{1}{P'(-j^2)}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Puis on a

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^4+x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^4+x^2+1}\,dx=(I-K)/2$$

On a par la même méthode

$$K=2i\pi\left(\frac{e^{2ij}}{P'(j)}+\frac{e^{2i(-j^2)}}{P'(-j^2)}\right)$$

Or

$$e^{2ij}=\exp\left(2i\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right)=e^{-\sqrt{3}-i}$$

et de même $e^{2i(-j^2)}=e^{-\sqrt{3}+i}$. Finalement

$$J=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[1-e^{-\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sin 1+\cos 1\right)\right].$$

Correction de l'exercice 7003 ▲

On a, sachant que $2\cos\theta = e^{i\theta}+e^{-i\theta}$:

$$W_n = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,d\theta = \frac{1}{2^{2n+2}}\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{iz}$$

où C est le cercle trigonométrique et $z=e^{i\theta}$. En posant

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}$$

on a immédiatement

$$W_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\mathrm{Res}(f,0)$$

car 0 est le seul pôle de f. Le résidu est en fait le coefficient en $1/z$ dans le développement de f, c'est-à-dire le coefficient constant dans $(z+1/z)^{2n}$, soit par la formule du binôme, C_{2n}^n. Donc

$$W_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Correction de l'exercice 7004 ▲

La fonction est paire, donc ses coefficients b_n sont nuls et on calcule ici ses coefficients a_n.
Pour $n\geqslant 1$, on a :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nt)}{2-\cos(t)}dt$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} a_n &= \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt \\ &= \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_{\mathscr{C}}\frac{z^n}{2-\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz} \\ &= \mathrm{Re}\,\frac{1}{i\pi}\int_{\mathscr{C}}\frac{2z^n}{4z-z^2-1}dz \\ &= 4\,\mathrm{Re}\sum_\alpha Res\left(\frac{z^n}{4z-z^2-1},\alpha\right) \end{aligned}$$

Comme $n\geqslant 1$, il n'y a qu'un seul pôle dans le disque : le pôle simple $2-\sqrt{3}$. Le résidu en ce pôle vaut $\frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ qui est déjà un nombre réel.

On en déduit que

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n.$$

Le coefficient a_0 est obtenu de la même façon, mais il faut diviser par deux, vu la définition particulière lorsque $a=0$. On obtient donc $a_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Finalement, on a donc :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1+2\sum_{n=0}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n\cos nx\right].$$

Correction de l'exercice 7005 ▲

On utilise

$$\cos(x+iy)=\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$$

Ici on doit avoir $\cos x \cosh y = a$ et $\sin x \sinh y = 0$. La dernière équation implique $x = 0$ ou π, ou $y = 0$. La solution $y = 0$ ne convient pas, car aucun réel n'a pour cosinus $a > 1$. Donc il faut $x = 0$, et $\cosh y = a$ ou bien $x = \pi$ et $\cosh y = -a$. Cette dernière équation est sans solutions ($\cosh y \geqslant 1$ pour tout y). Les solutions sont donc $z = \pm i \operatorname{arg}\cosh a$. Leur sinus est $\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = i \sinh y$ ici, soit $\pm i\sqrt{a^2-1}$ (car $\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$).
On a donc, en posant $f(z) = 1/[(1+z^2)(2-\cos z)]$ (fonction paire) :

$$I_a = i\pi \operatorname{Res}(f,i) + i\pi \operatorname{Res}(f, i \operatorname{arg}\cosh a)$$

car i et $i \operatorname{arg}\cosh a$ sont les deux seuls pôles de f de partie imaginaire > 0. Puis

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f,i) &= \left(\frac{1}{2z(a-\cos z)}\right)_{z=i} = \frac{1}{2i(a-\cosh 1)} \\ \operatorname{Res}(f, i\operatorname{arg}\cosh a) &= \left(\frac{1}{(1+z^2)\sin z}\right)_{z=i\operatorname{arg}\cosh a} = \frac{1}{i(1-\operatorname{arg}\cosh^2 a)\sqrt{a^2-1}} \end{aligned}$$

Donc

$$I_a = \frac{\pi}{(1-\operatorname{arg}\cosh^2 a)\sqrt{a^2-1}} + \frac{\pi}{2(a-\cosh 1)}.$$

Correction de l'exercice 7006 ▲

Sur le côté $[R, R+i\pi]$, la fonction $f(z) = e^{az}/\cosh z$ est majorée en module par

$$\frac{e^{aR}}{|\cosh(R+iy)|} = \frac{e^{aR}}{\cosh^2 R - \sin^2 y} < \frac{e^{aR}}{\cosh^2 R - 1} \to 0 \text{ quand } R \to \infty$$

De même sur l'autre côté. L'intégrale sur le côté $[R+i\pi, -R+i\pi]$ vaut $e^{ia\pi}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$.
La fonction f n'a qu'un pôle dans le rectangle, qui est $i\pi/2$. Donc à la limite

$$(1+e^{ia\pi})I = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i\pi/2) = 2i\pi \frac{e^{ia\pi}}{i} = 2\pi e^{ia\pi}$$

et le résultat en divisant.

Correction de l'exercice 7007 ▲

On intègre $f(z) = e^{2iaz-z^2}$ sur le rectangle. Il n'y a aucun pôle, donc l'intégrale sur le rectangle est nulle ; l'intégrale sur le côté $[R, R+ia]$ tend vers zéro. On a donc

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^{+\infty} e^{2iax-x^2}\,dx &= \textstyle\int_{[0,ia]} f(z)\,dz + \int_{[ia,ia+\infty]} f(z)\,dz \\ &= \textstyle\int_0^a e^{-2ay+y^2}\,i\,dy + \int_0^{+\infty} e^{(ia-x)(ia+x)}\,dx \\ &= \textstyle i\int_0^a e^{y^2-2ay}\,dy + e^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

d'où le résultat en ne conservant que la partie réelle.

Correction de l'exercice 7008 ▲

— Le bord du quart de disque est formé de trois parties : le segment $[0,a]$, le quart de cercle, et le segment $[ia, 0]$. L'intégrale sur le quart de cercle tend vers zéro quand $a \to \infty$ (lemme de Jordan), et en posant $z = iy$, on voit que

$$\int_{[ia,0]} zR(z^4)\,dz = \int_0^a yR(y^4)\,dy$$

donc l'intégrale sur le contour tend vers $2I$. Donc I est égal à $i\pi$ fois la somme des résidus de $zR(z^4)$ dans le quart de plan $\{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

— Les pôles sont $e^{i\pi/8}$ et $e^{i3\pi/8}$. On trouve $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

— On intègre de même sur le contour formé du bord de $\{0<\arg z<\frac{2\pi}{p}, 0<|z|<a\}$. On obtient

$$\left(1-e^{i2\pi\frac{n+1}{p}}\right)I=2\pi i\sum_{\substack{\text{pôles } z_k\\ 0<\arg z_k<\frac{2\pi}{p}}}\operatorname{Res}\left(z^nR(z^p),z_k\right)$$

La formule n'est intéressante que si le membre de gauche est non nul, c'est-à-dire si $n+1$ n'est pas un multiple de p.

— Dans ce cas, il faut donc $p\geqslant 2$. On est forcé de prendre une puissance paire, car on a supposé R sans racines réelles : ici $R(x)=1/(1+x^2)$, et $n=1$. Il y a deux pôles dans l'angle concerné, soit $e^{i\pi/2p}$ et $e^{i3\pi/2p}$. Le calcul est semblable au cas *(b)*, et donne

$$I_p=\frac{\pi}{2p\sin\dfrac{\pi}{p}}.$$

Correction de l'exercice 7009 ▲

Soit $f(z)=\operatorname{Log}(z)$. Alors

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{z}=\frac{1}{z_0-(z_0-z)}=\frac{1}{z_0}\frac{1}{1-\frac{z_0-z}{z_0}}\\ &= \frac{1}{z_0}\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{z_0^k}(z_0-z)^k \quad \text{pour} \quad |z-z_0|<|z_0|. \end{aligned}$$

Notons que $\{z\in\mathbb{C};\ |z-z_0|<|z_0|\}=D(z_0,|z_0|)$ est optimal car on ne peut prolonger $\operatorname{Log}(z)$ en 0. Le développement est :

$$f(z)=\operatorname{Log}(z_0)-\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^k}{kz_0^k}(z-z_0)^k.$$

En ce qui concerne la deuxième question, la réponse est NON. D'après le cours f coincide avec sa série de Taylor *si* $D(z_0,R)\subset\Omega$. Or, si $\operatorname{Re}(z_0)<0$, ce n'est pas le cas et $D(z_0,|z_0|)\cap]-\infty,0[\neq\emptyset$. Le Log et la série de Taylor ne coincident pas dans $D(z_0,|z_0|)\cap\Omega$ puisque le Log ne peut être prolongé de manière continu dans aucun point de $]-\infty,0[$. Remarquons qu'ici $D(z_0,|z_0|)\cap\Omega$ n'est pas connexe ce qui est cruciale dans l'exercice 7012.

Correction de l'exercice 7010 ▲

On a $\sin(z)=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=0$ si et seulement si $e^{2i\pi z}=1$ ce qui est le cas si et seulement si $z\in\pi\mathbb{Z}$. Soit $z_0\in U=\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Alors, le rayon de convergence de la séries de Taylor de f est

$$R=\operatorname{dist}(z_0,\pi\mathbb{Z})=\min_{n\in\mathbb{Z}}|z_0-\pi n|.$$

Correction de l'exercice 7011 ▲

Si $f(z)g(z)=0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, alors au moins une des fonctions f,g a un zéro non isolé.

Correction de l'exercice 7012 ▲

Commençons donc par le contre-exemple en prenant $U=\Omega$, c'est à dire $U=\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$, et $f=\operatorname{Log}$. Il suffit alors de choisir $z_1=-1+i$ et $z_2=-1-i$ et d'appliquer l'exercice 7009. Supposons maintenant U convexe, notons $D_i=D(z_i,R_i)$, $i=1,2$, et supposons que $V=D_1\cap D_2\neq\emptyset$. Les conséquences immédiates de la convexité de U sont : (a) $U\cap D_1$ et $U\cap D_2$ sont connexes (et même convexes). (b) $[z_1,z_2]\subset U$ et donc $V\cap U$ est un ouvert non vide. Considérons g_1. Si $r>0$ est suffisamment petit pour que $D(z_1,r)\subset U$, alors $f=g_1$ dans $D(z_1,r)$. Par le principe du prolongement analytique (ou celui des zéros isolés) on a $f=g_1$ dans le connexe $U\cap D_1$. C'est donc aussi vrai dans $V\cap U\subset D_1\cap U$. Le même raisonnement s'applique à g_2 et donc $g_1=g_2$ dans $V\cap U$. Encore une fois le principe du prolongement analytique assure donc que $g_1=g_2$ dans V (qui est connexe).

Correction de l'exercice 7013 ▲

(a) Soit $\phi(t,z)=\frac{z-1}{1+t(z-1)}$ et notons $D=\{|z-1|<1\}$. Pour tout $t\in[0,1]$ et tout $z\in D$ on a

$$\phi(t,z)=(z-1)\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k t^k (z-1)^k.$$

Or $|(-1)^k t^k (z-1)^k|\leqslant |z-1|^k$. Si $0<r<1$, alors la série précédente converge normalement dans $D(1,r)$ ce qui permet d'avoir (cf. le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol, chapitre 15, théorème 29)

$$\int_0^1 \phi(t,z)dt=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k(z-1)^{k+1}\int_0^1 t^k dt=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\frac{(z-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Cette série est la série de Taylor de $\mathrm{Log}(z)$ en 1 qui coincide avec $\mathrm{Log}(z)$ dans le disque D. Par conséquent, $z\mapsto\int_0^1\phi(t,z)dt$ et $z\mapsto\mathrm{Log}(z)$ coincident dans D. On conclut par prolongement analytique et en remarquant que $z\mapsto\int_0^1\phi(t,z)dt$ est une fonction holomorphe dans Ω (cf. le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol, chapitre 14, théorème 26). En ce qui concerne le reste R_N voici le calcul :

$$\begin{aligned}
R_N(z) &= \int_0^1\sum_{k\geqslant N}(-1)^k(z-1)^{k+1}t^k dt\\
&= (-1)^N\int_0^1 (z-1)^{N+1}t^N\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k(z-1)^k t^k dt\\
&= (-1)^N(z-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^N}{1+t(z-1)}dt.
\end{aligned}$$

(b) Si $\mathrm{Re}(z)\geqslant\delta$, alors

$$|1+t(z-1)|\geqslant|\mathrm{Re}(1+t(z-1))|=|1+t\,\mathrm{Re}(z-1)|\geqslant\delta.$$

Par conséquent,

$$|R_N(z)|\leqslant|z-1|^{N+1}\int_0^1\frac{t^N dt}{|1+t(z-1)|}\leqslant\frac{1}{\delta}\frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}.$$

D'où la convergence uniforme.

(c) Voir ci-dessus.

(d) On a $z=1+e^{i\phi}=(e^{i\frac{\phi}{2}}+e^{-i\frac{\phi}{2}})e^{i\frac{\phi}{2}}=2\cos\frac{\phi}{2}e^{i\frac{\phi}{2}}$. D'où $\mathrm{Arg}(z)=\frac{\phi}{2}$ et $r=|z|=2|\cos\frac{\phi}{2}|=2\cos\frac{\phi}{2}$. Comme :

$$\begin{aligned}
\log(2\cos\frac{\phi}{2})+i\frac{\phi}{2} &= \mathrm{Log}(z)=\sum_{k\geqslant 1}(-)^{k-1}\frac{(z-1)^k}{k}=\\
&= \sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cos(k\phi)+i\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin(k\phi)
\end{aligned}$$

il suffit d'identifier les parties réelles et imaginaires pour en déduire les égalités demandées. La convergence uniforme résulte de la question 3 puisque

$$\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(1+e^{i\phi})=1+\cos\phi\geqslant 1+\cos(\pi-\varepsilon)=\delta>0.$$

Correction de l'exercice 7014 ▲

(a) C'est le principe du maximum.

(b) La fonction $g(z) = f(z)f(-z)$ est nulle sur le cercle de rayon 1.

Correction de l'exercice 7015 ▲

Soit $z = e^{i\theta}$. Alors $|4z+3| = |e^{i\theta}(4+3e^{-i\theta})| = |\overline{4+3e^{i\theta}}| = |4+3z|$. Par le principe du maximum

$$|\Phi(z)| < 1 = \sup_{\theta} |\Phi(e^{i\theta})| \quad \text{pour tout} \quad z \in D.$$

Correction de l'exercice 7016 ▲

Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ avec $F(z) \neq 0$ et notons $\alpha = |F(z)| > 0$. Si $n > 1$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$, alors le principe du maximum affirme que

$$|F(z)| < \frac{1}{n} < \alpha \quad \text{pour tout} \ |z| < n.$$

Contradiction.

Correction de l'exercice 7018 ▲

Soit $g(z) = e^{f(z)}$. On a $|g(z)| = e^{\mathrm{Re}(f(z))}$. Par conséquent g est une fonction entière bornée. Elle est donc constante par d'Alembert-Liouville.

Correction de l'exercice 7019 ▲

La formule de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$ est

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi$$

où $C_R = \{|\xi| = R\}$. Pour les estimations suivantes, prenons $R > \min(2|z|, 1)$. Comme $|\xi - z| \geqslant |\xi| - |z| = R - |z| \geqslant R/2$,

$$\frac{|f(\xi)|}{|(\xi - z)^{n+2}|} \leqslant M \frac{(1+R)^n}{(R/2)^{n+2}} \leqslant M \frac{(2R)^n}{(R/2)^{n+2}} = 2^{2n+2} M \frac{1}{R^2}.$$

Ensemble avec la formule de Cauchy on a donc

$$\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} 2^{2n+2} M \frac{1}{R^2} |d\xi| = 2^{2n+2} M \frac{1}{R}$$

pour n'importe quel $R > 2|z|$. On vient de montrer que $f^{n+1}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Utilisons maintenant $g(z) = \frac{f(z) - P(z)}{z^{n+1}}$ où P est le polynôme de Taylor de f à l'origine à l'ordre n. On remarque d'abord que l'origine est zéro d'ordre $n+1$ de $f(z) - P(z)$ ce qui explique que g se prolonge holomorphiquement à l'origine. C'est donc une fonction entière pour laquelle on a

$$|g(z)| \leqslant \frac{C|z|^n}{|z|^{n+1}} = C \frac{1}{|z|}$$

pour un certain $C > 0$ et pour z de module suffisamment grand. De nouveau, g est une fonction entière bornée, elle est donc constante (notre estimation donne même $g \equiv 0$ et donc $f = P$).

Correction de l'exercice 7020 ▲

Soit $z = Re^{i\theta}$. Alors $|e^z| = e^{R\mathrm{Re}(e^{i\theta})} = e^{R\cos(\theta)}$. Pour $f(z) = z + e^z$, on a, pour θ tel que $\cos(\theta) \leqslant 0$, $|f(z)| \geqslant R - e^{R\cos(\theta)} \geqslant R - 1$. Si par contre $\cos(\theta) > 0$ alors $|f(z)| \geqslant e^{R\cos\theta} - R$. Dans les deux cas

$$|f(Re^{i\theta})| \to \infty \quad \text{pour } R \to \infty.$$

Nos calculs n'impliquent pas $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$! Comme en fait e^z n'est PAS un polynôme, on peut même affirmer que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ est FAUX.

Correction de l'exercice 7021 ▲

(a) Le résidu est $a_{-1} = 1$.

(b) $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}$ pour $|z| < 1$. C'est une série entière car f est holomorphe dans le disque unité et $\mathrm{Res}(f,0) = 0$.

(c) $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k-1} = \frac{1}{z} - z + z^3$.....et $\mathrm{Res}(f,0) = 0$

Correction de l'exercice 7022 ▲

Comme $e^w = \sum_{n\geqslant 0} \frac{w^n}{n!}$,

$$\exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n.$$

Par conséquent, $\mathrm{Res}(f,0) = 1$. Sinon, si $z_0 \neq 0$, alors $\mathrm{Res}(f,z_0) = 0$ par holomorphie de f dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Correction de l'exercice 7023 ▲

(a) Comme $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots = z(1 + o(z))$,

$$f(-z) = \frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z}(1+o(z))^{-1} = \frac{1}{z}(1+o(z)) = \frac{1}{z} + o(1).$$

Par conséquent f possède un pôle simple à l'origine (ce qui est évident puisque $\sin(z)$ possède un zéro simple à l'origine) et $\mathrm{Res}(f,0) = 1$. On l'obtient aussi par la formule de l'exercice 7029 et le fait que l'origine est un pôle simple :

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1.$$

La partie singulière de la série de Laurent est $\frac{1}{z}$ et le terme constant est 0.

(b) On a $\sin(z) - \mathrm{sh}(z) = (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)) - (z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)) = -\frac{z^3}{3} + O(z^7)$. D'où

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z) - \mathrm{sh}(z)} = -\frac{3}{z^3}(1 + O(z^4)) = -\frac{3}{z^3} + O(z).$$

(c) On obtient de manière analogue que

$$f(z) = \frac{1}{z\sin(z)\,\mathrm{sh}(z)} = \frac{1}{z^3} + O(z).$$

Correction de l'exercice 7024 ▲

Observons tout d'abord que :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z}.$$

On a
$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geqslant 0} z^n \quad \text{pour } |z|<1$$
$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n\geqslant 0} z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \quad \text{pour } |z|>1.$$
De la même manière
$$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \quad \text{si } |z|<2 \text{ et } \frac{1}{z-2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \quad \text{si } |z|>2.$$
On en déduit les expressions des séries de Laurent en 0 dans les trois couronnes centrées à l'origine. En $z=1$ et $z=2$, f a des pôles simples. D'où
$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=-1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Res}(f,2)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=1.$$
Déterminons encore la série de Laurent f en 1 :
$$f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}(-1)\sum_{n\geqslant 0}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$
pour $|z-1|<1$.

Correction de l'exercice 7025 ▲

Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un lacet quelconque. Posons
$$H(t,u)=u\gamma(t) \quad \text{pour} \quad t\in I \quad \text{et} \quad u\in[0,1].$$
C'est clairement une homotopie de lacets (voir la définition du cours !) telle que $H(t,1)=\gamma(t)$ et $H(t,0)=0$ pour tout $t\in I$.

Correction de l'exercice 7026 ▲

Soit γ un lacet dans $\mathbb{C}$. Alors $\sup_{t\in I}|\gamma(t)|=R/2<\infty$. Si $|z|>R$, la fonction $\xi\mapsto\frac{1}{\xi-z}$ est holomorphe dans le disque $D(0,R)$. Par conséquent,
$$\operatorname{Ind}(\gamma,z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{d\xi}{\xi-z}=0.$$
Remarquons que ceci implique que $\operatorname{Ind}(\gamma,z)=0$ pour tout z dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

Correction de l'exercice 7027 ▲

(a) Le calcul de l'indice de c_N est évident. L'affirmation sur l'existence de g continue telle que $\gamma=e^g$ et $g(1)-g(0)=2\pi iN$ est le contenu du polycopié de J.-F. Burnol 2005/2006, chapitre 30. Le reste est laissé au lecteur.

Correction de l'exercice 7029 ▲

Si f a un pôle d'ordre N en z_0, on a, avec $a_{-N}\neq 0$,
$$f(z)=\sum_{n=-N}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+\ldots$$
D'où
$$(z-z_0)^N f(z)=a_{-N}+\ldots+a_{-1}(z-z_0)^{N-1}+a_0(z-z_0)^N+\ldots.$$

ce qui donne
$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1}\left[(z-z_0)^N f(z)\right] = (N-1)!a_{-1} + o(z-z_0).$$
La formule en résulte en faisant tendre z vers z_0. Le cas $N=1$ est important pour la pratique. Notons que, si f a un pôle simple en z_0, cette fonction s'écrit $f = h/g$ au voisinage de z_0 où h, g sont des fonctions holomorphes au voisinage de z_0 telles que h ne s'annule pas en z_0 et g a un zéro simple en z_0, i.e. $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$. Comme

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = h(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{g(z)-g(z_0)}$$

on a aussi la formule utile
$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{46}$$

Correction de l'exercice 7031 ▲

La fonction $f(z) = 1/(z-a)(z-b)(z-c)$ est holomorphe dans le disque $D(0,a)$. Par conséquent l'intégrale est nulle si $r < a$. Par le théorème des résidus,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}dz &= \mathrm{Res}(f,a) \quad , \quad \mathrm{Res}(f,a)+\mathrm{Res}(f,b) \quad ou \\ & \quad \mathrm{Res}(f,a)+\mathrm{Res}(f,b)+\mathrm{Res}(f,c)\end{aligned}$$

si $a < r < b$, $b < r < c$ ou $c < r$. Le calcul de ces résidus se fait par la formule de l'exercice 7029 puisque tous les pôles sont simples :

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(a-b)(a-c)} \quad &, \quad \mathrm{Res}(f,b) = \frac{1}{(b-a)(b-c)} \\ et \quad &\mathrm{Res}(f,c) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}.\end{aligned}$$

On en déduit façilement la valeur de l'intégrale dans les trois cas. En ce qui concerne le calcul de cette intégrale via la décomposition en éléments simples remarquons juste que

$$\int_C \frac{1}{z-d}dz$$

vaut $2i\pi$ si d est à l'intérieur de C et 0 si d est à l'extérieur.

Correction de l'exercice 7033 ▲

On a

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} &= \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} - \sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} \\ &= 2i\pi\Big(\mathrm{Res}(f,z_1)+\mathrm{Res}(f,z_2)\Big) = 2i\pi\Big(\frac{f(z_1)}{z_1-z_2}+\frac{f(z_2)}{z_2-z_1}\Big).\end{aligned}$$

D'où
$$\lim_{z_2\to z_1}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2i\pi f'(z_1).$$

Correction de l'exercice 7034 ▲

Analogue à l'exercice 7031

Correction de l'exercice 7036 ▲

Comme $\tan(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$ cette fonction est une fonction méromorphe de $\mathbb{C}$ ayant que des pôles simples en $1/2 \bmod 1$. En effet, $\cos(w) = 0$ si et seulement si $w = \pi/2 \bmod \pi$ et $\cos'(\pi/2 + k\pi) \neq 0$. Notons $z_k = 1/2 + k$, $k \in \mathbb{Z}$. La formule (46) s'applique et donne

$$\operatorname{Res}(\tan(\pi z), z_k) = \frac{\sin(\pi z_k)}{-\pi \sin(\pi z_k)} = -\frac{1}{\pi}.$$

Par conséquent :

$$\int_{|z|=N} \tan(\pi z)\, dz = 2i\pi 2N\left(-\frac{1}{\pi}\right) = -4iN.$$

Correction de l'exercice 7037 ▲

Si $A = R\cos(\Phi)$ et $B = R\sin(\Phi)$ on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B\sin(\theta) + C\cos(\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + R\sin(\theta + \Phi)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + R\sin(\alpha)}.$$

Pour trouver la valeur de cette dernière intégrale posons $z = e^{i\alpha}$. Alors $d\alpha = -i\frac{dz}{z}$ et

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + R\sin(\alpha)} = \int_{|z|=1} \frac{-i\,dz}{z(A + R\frac{z-\bar{z}}{2i})} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{Rz^2 + 2iAz - R}.$$

Le dénominateur de cette dernière expression s'annule en

$$z^{\pm} = \frac{-2iA \pm \sqrt{-4A^2 + 4R^2}}{2R} = -i\left(\frac{A}{R} \mp \sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}\right)$$

Un calcul élémentaire montre que seulement la racine $z^+ = -i\left(\frac{A}{R} - \sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}\right)$ est dans le disque unité ouvert pourvu que $A > 0$ (le cas $A < 0$ est similaire). Il s'ensuit par le théorème du résidu que

$$\frac{1}{2\pi} I = i\frac{2}{R}\frac{1}{z^+ - z^-} = \frac{1}{R\sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - R^2}}.$$

Correction de l'exercice 7040 ▲

Si $z = e^{i\theta}$, alors $\sin\theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ et $dz = ie^{i\theta}d\theta$. D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + \sin\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{z - \bar{z}}{2ia + z - \bar{z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 2iaz - 1} \frac{dz}{z}.$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème des résidus.

Correction de l'exercice 7044 ▲

Rappelons la formule de Cauchy pour f holomorphe sur $\overline{\Omega}$ (donc sans singularités) :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Il s'agit ici d'obtenir une version généralisée pour des fonctions f ayant des singularités $z_1,\dots,z_N \in \Omega$. Fixons $z \in \Omega \setminus \{z_1,\dots,z_N\}$ et considérons $G(w) = \frac{f(w)}{w-z}$. Cette fonction a un pôle simple en $w = z$ et :

$$\mathrm{Res}(G,z) = \lim_{w\to z}(w-z)G(w) = f(z).$$

Les autres singularités de G dans Ω sont $z_1,\dots,z_N$. Par définition, le résidu de G en z_j est le « coefficient a_{-1} » de la série de Laurent de G en z_j. Or

$$G(w) = \frac{1}{w-z}f(w) = \sum_{k\geqslant 0} b_k(w-z_j)^k \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(w-z_j)^l$$

puisque $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ est holomorphe au voisinage de z_j (et bien sûr on peut calculer les b_k, mais ce n'est pas utile). On remarque que pour calculer a_{-1} interviennent seulement les indices (k,l) qui vérifient $k+l = -1$. Comme $k \geqslant 0$ on a $l = -1-k < 0$. D'où :

$$\mathrm{Res}(G,z_j) = \mathrm{Res}\left(\frac{g_j(w)}{w-z}, z_j\right).$$

On peut maintenant utiliser l'exercice 7043 ou alors conclure directement : si $R_0 = 2\max\{|z|,|z_j|\}$, alors pour tout $R > R_0$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=R}\frac{g_j(w)}{w-z}dw = \sum_{\xi\in\{z,z_j\}}\mathrm{Res}\left(\frac{g_j(w)}{w-z},\xi\right).$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_{|w|=R}\frac{g_j(w)}{w-z}dw$ ne dépend pas de $R > R_0$. Or, il existe $C > 0$ tel que

$$\left|\frac{g_j(w)}{w-z}\right| \leqslant \frac{C}{|w|^2} \quad , \quad |w| > R_0\,,$$

ce qui entraîne

$$\left|\int_{|w|=R_0}\frac{g_j(w)}{w-z}dw\right| \leqslant \lim_{|w|=R}\int_{|w|=R_0}\frac{C}{|w|^2}|dw| = 0.$$

D'où

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=R_0}\frac{g_j(w)}{w-z}dw = \mathrm{Res}\left(\frac{g_j(w)}{w-z},z_j\right) + g_j(z).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des résidus à G pour conclure :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega}G(w)\,dw = f(z) - g_1(z) - \dots - g_N(z).$$

Correction de l'exercice 7045 ▲

Dans le calcul des intégrales on est souvent confronté à des passages à la limite (du genre $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz$ ou $\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,dz$ dans le cas ou 0 est une singularité que l'on contourne, C_R un morceaux de cercle comme dans les exercices ici). Cet exercice et le suivant donnent des outils très pratiques pour ce genre de calculs.

Si f a z_0 comme pôle simple, sa série de Laurent en z_0 est de la forme

$$f(z) = a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots. = \sum_{k\geqslant -1} a_k(z-z_0)^k.$$

Par convergence normale de cette série

$$\begin{aligned}\int_{C_r(\alpha,\beta)} f(z)\,dz &= \sum_{k\geqslant -1} a_k \int_{C_r(\alpha,\beta)}(z-z_0)^k\,dz = \sum_{k\geqslant -1} a_k\int_\alpha^\beta (re^{i\theta})^k ire^{i\theta}\,d\theta \\ &= ia_{-1}(\beta-\alpha) + r\sum_{k\geqslant 0}\left(r^k a_k\frac{e^{i(k+1)\beta}-e^{i(k+1)\alpha}}{(k+1)}\right).\end{aligned}$$

On en déduit l'enoncé de l'exercice en observant que $\left|\frac{e^{i(k+1)\beta}-e^{i(k+1)\alpha}}{(k+1)}\right| \leqslant \frac{2}{k+1}$ et en faisant tendre $r \to 0$.

Correction de l'exercice 7046 ▲

Pour $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $|z| \geqslant R$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Si C_R est le demi-cercle supérieur orienté alors

$$\begin{aligned}|\int_{C_R} f(z)e^{iz}\,dz| &= |\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{i(Re^{i\theta})} iRe^{i\theta}\,d\theta| \leqslant \varepsilon \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} R\,d\theta \\ &= 2\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-R\sin\theta}\,d\theta \leqslant 2\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-R\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 4\varepsilon(1-e^{-R\frac{\pi}{4}}) \leqslant 8\varepsilon.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7047 ▲

Utiliser les exercices 7045 et 7046.

Correction de l'exercice 7048 ▲

Par holomorphie de $z \mapsto e^{-z^2}$,

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{C_R} e^{-z^2} dz + \int_{Re^{i\pi/4}}^0 e^{-z^2} dz = 0.$$

Notons $I_{1,R}$ la première intégrale ci-dessus, $I_{2,R}$ la deuxième et $I_{3,R}$ la troisième. Alors,

$$\lim_{R\to\infty} I_{1,R} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2}\sqrt{\pi}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Comme $e^{-z^2} = e^{-\left(e^{i\pi/4}t\right)^2} = e^{-it^2} = \cos(t^2) - i\sin(t^2)$ pour $z = e^{i\pi/4}t$ on a

$$\begin{aligned}I_{3,R} &= -\int_0^R \left(\cos(t^2) - i\sin(t^2)\right) e^{i\pi/4} dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int_0^R \cos(t^2) + \sin(t^2) dt + i\int_0^R \cos(t^2) - \sin(t^2) dt\right).\end{aligned}$$

Il suffit alors de déterminer $\lim_{R\to\infty} I_{2,R}$ pour en déduire les intégrales de Fresnel. Si on pose $z = Re^{i\theta}$, alors

$$\int_{C_R} e^{-z^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta$$

ce qui implique

$$|I_{2,R}| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos(2\theta)} d\theta = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos(\alpha)} d\alpha.$$

Du changement de variables $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et du fait que $\sin\beta \geqslant \frac{\beta}{2}$ pour $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on déduit que :

$$|I_{2,R}| \leqslant -\frac{R}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R^2\sin(\beta)} d\beta \leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\frac{\beta}{2}} d\beta = -\frac{R}{2}e^{-R^2\frac{\beta}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \leqslant \frac{2}{R} \to 0$$

lorsque $R \to \infty$. Conclusion $\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

Correction de l'exercice 7057 ▲

(a) Soit $C_R = \{Re^{i\theta}\,;\, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n}\}$. La fonction

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}$$

a un seul pôle $z_0 = e^{i\pi/n}$ dans le secteur. C'est un pôle simple et le résidu est

$$\operatorname{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = -\frac{z_0}{n} = -\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi}{n}}.$$

D'où

$$-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} + \int_{Re^{i\pi/n}}^0 \frac{dz}{1+z^n}$$

pour tout $R > 1$. Puisque $n > 1$, on a :

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} \right| \leqslant \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{R^n - 1} \int_{C_R} |dz| \right) = 0.$$

D'autre part,

$$\int_{Re^{2i\pi/n}}^0 \frac{dz}{1+z^n} = -\int_0^R \frac{1}{1+x^n} e^{2i\pi/n} dx = -e^{2i\pi/n} \int_0^R \frac{dx}{1+x^n}.$$

Il en résulte que

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^n} = \frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n} - \int_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}}{1-e^{2i\pi/n}} \longrightarrow \frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n}}{1-e^{2i\pi/n}} = \frac{2i\pi}{n}\frac{1}{2i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

lorsque $R \to \infty$.

(b) La fonction $z^a = \exp\left(a(\log r + i\alpha)\right)$ n'est pas définie au voisinage de l'origine. C'est la raison pourquoi on est amené de considérer le petit morceau de cercle $\gamma_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta}\,;\, \frac{2\pi}{a} \geqslant \theta \geqslant 0\}$. On va de nouveau noter $C_R = \{Re^{i\theta}\,;\, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n}\}$ et

$$\Omega = \left\{ z = re^{i\alpha}\,;\, 0 < r < \infty\ ,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2\pi}{a} \right\}.$$

Pour $z = re^{i\alpha} \in \Omega$ on a

$$\begin{aligned} & z^a = -1 \\ \iff\ & a(\log r + i\alpha) = i\pi\ (\mathrm{mod} 2i\pi) \\ \iff\ & r = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $f(z) = \frac{1}{1+z^a}$ a une seule singularité $z_0 = e^{i\frac{\pi}{a}}$ dans Ω. Comme $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ avec $h(z_0) = 1 + z_0^a = 0$ et

$$h'(z_0) = \left(\exp(a\log z)\right)'_{|z=z_0} = \frac{a}{z_0}z_0^a \neq 0$$

le point z_0 est un pôle simple et on a

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{h'(z_0)} = -\frac{z_0}{a} = -\frac{1}{a}e^{i\frac{\pi}{a}}.$$

Il suffit alors de procéder comme dans la question 1. pour établir

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\frac{\pi}{a}}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)} \quad \text{pour} \quad a > 1\,.$$

(c) Soit $x \in (0, \infty)$ et $a = u + iv$ avec $u > 1$. Alors

$$|x^a| = |x^{iv}||x^u| = |\exp\left(i(v\log x)\right)|x^u = x^u.$$

Par conséquent on a, pour tout $x > 1$,

$$\left|\frac{1}{1+x^a}\right| \leqslant \frac{1}{x^u - 1}$$

ce qui implique la convergence de l'intégrale $J(a)$. Montrons que l'application $a \mapsto J(a)$ est holomorphe dans $\Omega = \{\mathrm{Re}\, a > 1\}$. Pour ce faire on utilise des critères d'holomorphie des intégrales avec paramètres (voir le chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol). Considérons d'abord $J_1(a) = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^a}$. On a (1) $(a,x) \mapsto g(a,x) = \frac{1}{1+x^a}$ est continue. (2) $\forall x \in [0,2]$: $a \mapsto g(a,x)$ est holomorphe dans Ω. Par un critère d'holomorphie des intégrales avec paramètres (théorème 26 du chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol) $a \mapsto J_1(a)$ est holomorphe dans Ω. Pour $J_2(a) = \int_2^\infty \frac{dx}{1+x^a}$ il faut en plus de (1) et (2) majorer $g(a,x) = \frac{1}{1+x^a}$ par une fonction intégrable k (dépendant que de la variable x). Pour ce faire il faut travailler dans un domaine plus petit

$$\Omega_T = \{\mathrm{Re}\, a > T\} \subset \Omega \quad , \quad T > 1\,.$$

Dans ce cas

$$|g(a,x)| = \left|\frac{1}{1+x^a}\right| \leqslant \frac{1}{x^T - 1} \quad \forall x \geqslant 2 \text{ et } a \in \Omega_T.$$

Comme $T > 1$, $k(x) = \frac{1}{x^T-1}$ est intégrable : $\int_2^\infty k(x)\,dx < \infty$. Par un critère d'holomorphie des intégrales avec paramètres (ici le théorème 27 du chapitre 14 du polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol), $a \in \Omega_T \mapsto J_2(a)$ est holomorphe. Ceci étant vrai pour tout $T > 1$, J_2 est holomorphe dans Ω. En conclusion,

$$a \mapsto J(a) = J_1(a) + J_2(a)$$

est holomorphe sur Ω. L'affirmation $J(a) = \frac{\frac{\pi}{a}}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)}$, $a \in \Omega$, est une conséquence du principe des zéros isolés et du fait que nous avons déja établi cette relation pour tout réel $a > 1$.

(d) Évident.

(e) On peut procéder comme dans la question 3. Notons que

$$|h(p,t)| = \left|\frac{e^{pt}}{1+e^t}\right| = \frac{e^{\mathrm{Re}(p)t}}{1+e^t}.$$

Par conséquent, $|h(p,t)| \sim e^{(\mathrm{Re}(p)-1)t}$ pour $t \to \infty$ et $|h(p,t)| \sim e^{\mathrm{Re}(p)t}$ pour $t \to -\infty$. L'intégrale $K(p)$ est donc convergente. Pour établir l'holomorphie de cette fonction il faut travailler u©ì

$$U_\varepsilon = \{0 < \mathrm{Re}(p) < 1 - \varepsilon\} \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0 \text{ petit}.$$

(f) Nous avons vu dans la question précédente que la fonction $h(p,t) = \frac{e^{pt}}{1+e^t}$ décroit exponentiellement pour $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$ lorsque $t \to \pm\infty$. On en déduit "facilement" (faire les détails !) que

$$\lim_{R\to\infty} \int_R^{R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R+2i\pi}^{-R} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz = 0$$

Par le théorème des résidus il en résulte que :

$$2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt + \int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz\right].$$

Or $\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz = -e^{2i\pi p} \int_{-R}^{R} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$. D'où :

$$2i\pi\left(-e^{i\pi p}\right) = 2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) = \left(1 - e^{2i\pi p}\right) K(p).$$

Finalement on a

$$K(p) = \pi \frac{2i}{e^{i\pi p} - e^{-i\pi p}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Correction de l'exercice 7124 ▲

$|Q(z)| = |z^{50}(z^{61}+3)| = |z^{61}+3| \geqslant 2$ pour $|z| = 1$. D'où

$$|P(z) - Q(z)| = 1 < |Q(z)| \quad \text{dans} \quad \{|z| = 1\}.$$

Par le théorème de Rouché, P, Q ont le même nombre de zéros dans $D(0,1)$. Le reste en découle en observant que $P' = Q'$ et $P(0) \neq 0$.

Correction de l'exercice 7125 ▲

L'application $\Phi(z) = \frac{3z+5}{z+2}$ est une homographie. L'image d'un cercle est alors de nouveau un cercle ou une droite. De plus on remarque que (1) $\Phi(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel $x \neq -2$. (2) $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$. Comme $\Phi(-1) = 2$ et $\Phi(1) = \frac{8}{3}$, l'image du cercle unité est un cercle symétrique par rapport à l'axe réel (cf. (2)) avec centre $\left(\frac{8}{3}+2\right)\frac{1}{2} = \frac{7}{3}$ et de rayon $\frac{8}{3} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$. Le cercle de rayon 2 centré à l'origine contient -2. C'est l'unique point dont l'image est $\Phi(-2) = \infty$. L'image de ce cercle est alors une droite et c'est

$$\Phi(2) + i\mathbb{R} = \frac{11}{4} + i\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 7127 ▲

On a $\Phi_\alpha(0) = \alpha$ et $\Phi_\alpha(\alpha) = 0$. Remarquons que $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ fixe l'origine. Par l'exercice 7126, l'automorphisme $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ de $D(0,1)$ est une rotation $z \mapsto e^{i\alpha} z$. Un calcul explicite montre que $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha = \mathrm{Id}$, c'est à dire $\Phi_\alpha^{-1} = \Phi_\alpha$. Soit Ψ un automorphisme du disque unité $D(0,1)$ tel que $\Psi(z_1) = z_2$. Alors

$$\Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = \Phi_{z_2}(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = 0$$

et donc $A = \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}$ est un automorphisme du disque unité fixant l'origine. On en déduit de nouveau que A est une rotation : $A(z) = e^{i\alpha} z$. Par conséquent,

$$\Psi = \Phi_{z_2} \circ A \circ \Phi_{z_1}^{-1}. \tag{47}$$

On vient de déterminer la forme générale d'un automorphisme Ψ du disque unité vérifiant $\Psi(z_1) = z_2$. Remarquons qu'il est unique "à une rotation près"; Ψ est déterminé par (47) où A est une rotation quelconque.

Correction de l'exercice 7177 ▲

(a) VA remplace la ligne i par sa somme avec la ligne j multipliée par λ.
AV remplace la colonne j par sa somme avec la colonne i multipliée par λ.

(b) $V_{ij}(\lambda)V_{kj}) = I + \lambda E_{ij} + \lambda' E_{kj}$

(c) Il suffit de montrer que $(I + l_i e_i^T)(I - l_i e_i^T) = I$.

(d) $L(l_i) = V_{i+1,i}(l_{i+1,i}) \cdots V_{n,i}(l_{n,i})$

(e) $L^{-1} = L(-l_{n-1})L(-l_{n-2}) \cdots L(-l_1) \neq I - l_1 e_1^T - \cdots - l_{n-1} e_{n-1}^T$

(f) (a) algorithme en utilisant l'expression de L^{-1}

Pour $i = 1$ à $n-1$

calcul de $L(-l_i)b$

Pour $j = i+1$ à n

$b_j \leftarrow b_j - l_{ji} b_i$

(b) algorithme en résolvant le système triangulaire

$x_1 = b_1$
Pour $i = 2$ à n
$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j$
conclusion : le nombre de calculs et l'espace mémoire utilisés sont les mêmes.

Correction de l'exercice 7178 ▲

Pour démontrer l'égalité il suffit de multiplier le membre de droite par $5A+UBV)$ et montrer que l'on obtient l'identité.

Domaine de validité :$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ inversible, $U \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$, $V \in \mathcal{M}_{q\times n}$, $I + BVA^{-1}U$ inversible.

(a) On obtient la formule de Shermann-Morrisson :

$$(A+\beta uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{\beta}{1+\beta v^T A^{-1} u} A^{-1}uv^T A^{-1}$$

qui permet le calcul de l'inverse d'une matrice qui apparait comme perturbation de rang 1 d'une matrice dont on connait l'inverse.

(b)
$$B\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (A+uv^T)x + yu = 0 \\ v^T x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -yA^{-1}u \\ v^T x = -yv^T A^{-1} u = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $x = 0, y = 0$ et donc B est inversible.

(c) En appliquant la formule générale on obtient

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}uv^T A^{-1} & A^{-1}u \\ v^T A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

(d) En appliquant la même formule on obtient

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} + P^{-1}Q\Delta^{-1}RP^{-1} & -P^{-1}Q\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}RP^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $\Delta = S - RP^{-1}Q$.

(e) Calcul récursif de l'inverse : on dispose de A_{n-1}^{-1} de taille $(n-1)\times(n-1)$ et on veut calculer l'inverse de

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & s \end{pmatrix} \text{ avec } u, v \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R}$$

en utilisant la formule précédente on obtient

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + \frac{1}{\delta} A_{n-1}^{-1} vu^T A_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1}\frac{v}{\delta} \\ -u^T A_{n-1}^{-1}/\delta & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}$$

avec $\delta = s - u^T A_{n-1}^{-1} v$.
et on en déduit facilement l'algorithme.

Correction de l'exercice 7179 ▲

(a) $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A)$ rayon spectral de la matrice A^*A. D'un autre coté on a :

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^*A) \begin{cases} \geqslant \rho(A^*A) \\ \leqslant n\rho(A^*A) \end{cases}$$

où tr est la trace de la matrice et λ_i ses valeurs propres.

(b)

$$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \leqslant (mn \max_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2} = \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Soit x tel que : si $\max |a_{ij}| = |a_{i_0 j_0}|$ alors on pose $x = e_{j_0}$, $\|x\|_2 = 1$. Alors
$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|^2 \geqslant \max |a_{ij}|^2 \Rightarrow \sup \|Ax\|_2^2 \geqslant \max |a_{ij}|^2$

(c) On rappelle que $\|A\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|$ pour un certain i_0. Alors
$\|A\|_2^2 \leqslant \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leqslant m \times \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leqslant m \max \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)^2 = m\|A\|_\infty$
Choisissons maintenant $x = (x_i)$ avec $x_i =$signe$(a_{i_0 i})$. Alors

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \|A\|_\infty$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{n} \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right)^2 \geqslant \|A\|_\infty^2 \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geqslant \frac{\|A\|_\infty}{\sqrt{n}}$$

ce qui implique $\|A\|_2 \geqslant \|A\|_\infty / \sqrt{n}$

(d) Même démonstration que précédemment ou alors constater que $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$.

(e) $\|E\|_F^2 = \sum_{i,j} u_i^2 v_j^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i^2 v_j^2 = \|u\|_2^2 \|v\|_2^2$

$$\|E\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |u_i v_j|\right) = \max_i \left(|u_i| \sum_{j=1}^n |v_j|\right) = \|v\|_1 \|u\|_\infty$$

$\|Ex\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(u_i \sum_{j=1}^n v_j x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2 \times (x,x)^2 = \|u\|_2^2 (x,v)^2$

$$\frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \frac{(x,v)}{\|x\|_2} \|u\|_2 \Rightarrow \sup_x \frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \|v\|_2 \|u\|_2$$

Correction de l'exercice 7180 ▲

$\rho(A) < 1 \Rightarrow 1$ n'est pas valeur propre de $A \Rightarrow 0$ n'est pas valeur propre de $I - A \Rightarrow I - A$ inversible

$$(I-A)C_k = (I-A)(I + A + \cdots + A^k) = I - A^{k+1}$$

$C_k = (I-A)^{-1}(I - A^{k+1}) \Rightarrow (I-A)^{-1} - C_k = (I-A)^{-1} A^{k+1}$ et conc

$$\|(I-A)^{-1} - C_k\| \leqslant \|(I-A)^{-1}\| \|A^{k+1}\| \leqslant \|(I-A)^{-1}\| \|A\|^{k+1}$$

Comme $\|A\| < 1$ pour au moins une norme subordonnée on obtient finalement

$$\lim_{k \to \infty} \|(I-A)^{-1} - C_k\| = 0$$

Correction de l'exercice 7181 ▲

$AB = I - X \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = (I-X)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = B(I-X)^{-1} = B(I + X + X^2 + \cdots)$

$$\|A^{-1} - B\| \leqslant \|BX\| \|I + X + \cdots\| \leqslant \|BX\| (1 + \|X\| + \|X\|^2 + \cdots) \leqslant \frac{\|BX\|}{1 - \|X\|}.$$

pour $\|X\| < 1$

Correction de l'exercice 7183 ▲

4.On calcule

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 7 = \mu_1^2, \lambda_2 = 2 = \mu_2^2$$

On calcule ensuite les vecteurs propres associés à ces valeurs propres

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et la matrice V est la matrice dont les colonnes sont

$$v_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T, \quad v_2 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})^T$$

les colonnes de U sont alors données par

$$u_1 = Av_1/\mu_1 = 1/(\sqrt{7}\sqrt{5})(3,5,-1)^T, \quad u_2 = Av_2/\mu_2 = 1/(\sqrt{2}\sqrt{5})(-1,0,-3)^T$$

quant à u_3 il est choisi orthogonal à u_1 et u_2 et de norme 1.

Correction de l'exercice 7184 ▲

(a) $\Sigma^\dagger \Sigma e_i = e_i, i = 1, \cdots, r$ c'est l'application identité

(b) $AA^\dagger = U\Sigma V^* V \Sigma^\dagger U = U\Sigma\Sigma^\dagger U^* = I$

On a donc obtenu une généralisation de l'inverse.

(c) $U^* \sum_{i=1}^m \varepsilon_i u_i^*$ avec$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m\}$ base canonique de $\mathbb{R}^m$. Comme $\Sigma^\dagger \varepsilon_i = 0$ pour $r+1 \leqslant i \leqslant m$ on a

$$\Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} e_i u_i^* \Rightarrow A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1}(Ve_i)u_i^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} v_i u_i^*$$

(d) On a

$$AA^\dagger = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i v_i^* \sum_{j=1}^r \mu_j^{-1} v_j u_j^* = \sum_{j=1}^r \mu_j \mu_j^{-1} u_j u_j^*$$

Comme Im(A) =span$\{u_1, \cdots, u_r\}$ le résultat suit.

(e) soit $y \in \text{Im}A^* \Leftrightarrow u = \sum_{i=1}^r x_i v_i$. Alors

$$A^*A = V\Sigma^* U^* U \Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 v_i v_i^* \Rightarrow A^*Ay = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 x_i v_i$$

et finalement

$$(\sum_{i=1}^r \mu_i^{-2} v_i v_i^*)(A^*Ay) = \sum_{i=1}^r x_i v_i$$

Correction de l'exercice 7185 ▲

(a) $\|A\|_2 = \|U\Sigma V^*\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \max|\sigma_j| = \sigma_1$

(b) $\|A\|_F^2$ =tr(A^*A) =tr$(U^*A^*AU) = \|AU\|_F^2$ =tr$(A^*U^*UA) = \|UA\|_F^2$ et donc

$$\|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}$$

(c) $A^*A = (V\Sigma^*U^*)(U\Sigma V^*) = V(\Sigma^*\Sigma)V^*$ et donc A^*A est semblable à $\Sigma^*\Sigma$, les deux matrices ont donc les mêmes valeurs propres. Les valeurs propres de $\Sigma^*\Sigma$ sont $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_r^2$ plus $n-r$ valeurs propres nulles si $n > r$.

(d) $|\det A| = |\det(U\Sigma V^*)| = |\det U|\det|\Sigma||\det V^*| = |\det \Sigma| = \prod_{i=1}^r \sigma_i$

(e) Une matrice hermitienne étant diagonalisable a une base orthonormale de vecteurs propres

$$A = Q\Lambda Q^* = Q|\Lambda|\mathrm{sign}(\Lambda)Q^*$$

or $U = \mathrm{sign}(\Lambda)Q^*$ est une matrice unitaire : $U^*U = Q\mathrm{sign}(\Lambda)\mathrm{sign}(\Lambda)Q^* = QQ^* = I$. Donc $Q|\Lambda|U$ est une décomposition en valeurs singulières de A, les valeurs singulières étant $|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|$.

Correction de l'exercice 7186 ▲

(a) $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \max_i \lambda_i(A^*A) = \mu_1^2(A)$ la plus grande valeur singulière de A
$\|A^{-1}\|_2^2 = \rho(A^{-1}(A^{-1})^*) = \max_i \lambda_i((A^*A)^{-1} = \frac{1}{\mu_n(A)^2}$ avec $\mu_n(A)$ la plus petite valeur singulière de A. Donc

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \mu_n(A)/\mu_1(A)$$

(b) Si A est normale alors $\|A\|_2 = \rho(A)$ rayon spectral. Donc

$$A^{-1} = UD^{-1}U^* \Rightarrow (A^{-1})^*A^{-1} = U(D^{-1})^*D^{-1}U^* \Rightarrow \rho((A^{-1})^*A^{-1}) = 1/\min_i |\lambda_i(A)|^2$$

$$\mathrm{cond}_2(A) = \max|\lambda_i(A)|/\min|\lambda_i(A)|$$

(c) $\mathrm{cond}_2(QA) = \|QA\|_2\|A^{-1}Q^*\|_2 = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \mathrm{cond}_2(A)$.

Correction de l'exercice 7188 ▲

$B = A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$ matrice inversible si $\|A^{-1}\delta A\| < 1$
$B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A-B)B^{-1} \Rightarrow \|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\|\|A-B\|\|B^{-1}\| \Rightarrow$

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leqslant \|A^{-1}\|\|A-B\| = \|A^{-1}\|\|\delta A\| = \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Correction de l'exercice 7189 ▲

(a) A la k-ème étape de l'élimination de Gauss, l'élément a_{ij}^{k+1} est donné par

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{kj}^k a_{ik}^k}{a_{kk}^k} \quad k+1 \leqslant i,j \leqslant n$$

et on remarque immédiatement par récurrence que toutes les matrices $\tilde{A}_k$ sont symétriques. On a
$(\tilde{A}_{k+1}v', v') = \sum_{i=k+1}^n v_i(\sum_{j=k+1}^n a_{ij}^{(k)}v_j) - \frac{1}{a_{kk}^k}(\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i)^2$
$(\tilde{A}_k v, v) = \sum_{i=k+1}^n v_i(\sum_{j=k+1}^n a_{ij}^k v_j) + \sum_{i=k+1}^n (a_{ik}^k + a_{ki}^k)v_i v_k + a_{kk}^k v_k^2$
Par symétrie $a_{ik}^k = a_{ki}^k$ et donc
$(\tilde{A}_k v, v) = (\tilde{A}_{k+1}v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k}[(\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i)^2 + 2v_k\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i a_{kk}^k + (a_{kk}^k)^2 v_k^2] =$

$$(\tilde{A}_{k+1}v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k}[a_k k^k v_k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i]^2$$

(b) Faisons un raisonnement par récurrence
— $\tilde{A}_1$ est symétrique définie positive;

— Par hypothèse supposons que $\tilde{A}_k$ est définie positive ;

— Supposons par absurde que $\tilde{A}_{k+1}$ ne soit pas définie positive : alors $\exists v' \neq 0 : \quad (\tilde{A}_{k+1}v', v') \leqslant 0$. On définit le vecteur $v \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ par :

  — $v_i = v'_i, \quad k+1 \leqslant i \leqslant n$

  — v_k est solution de $a_{kk}^k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i = 0$

  Alors $(\tilde{A}_k v, v) = 0$ et $v \neq 0$; donc $\tilde{A}_k$ n'est pas définie positive, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

(c) Première inégalité : en utilisant la relation d'élimination on obtient : $a_{ii}^{k+1} = a_{ii}^k - \frac{|a_{ki}^k|^2}{a_{kk}^2}$

— une matrice définie positive a tous ses éléments diagonaux strictement positifs, donc $a_{ii}^{k+1} > 0$

— $|a_{ki}^k|^2 / |a_{kk}^k|^2 \geqslant 0, \quad k+1 \leqslant i \leqslant n$

donc $a_{ii}^{k+1} \leqslant a_{ii}^k, k+1 \geqslant i$

Deuxième inégalité : supposons qu'il existe un élément $a_{ij}^k, i < J$ tel que $\left|a_{ij}^k\right| \geqslant \max_{k \leqslant l \leqslant n} a_{ll}^k$. On considère le vecteur $v \neq 0$ défini par

$$v_i = 1, v_j = -\text{sign}(a_{ij}^k), v_l = 0 \quad l \neq i, j$$

Alors

$$(\tilde{A}_k v, v) = (a_{ii}^k - |a_{ij}^k|) - (|a_{ij}^k| - a_{jj}^k) \leqslant 0$$

ce qui est impossible. Donc

$$\max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}^k| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_{ii}^k|$$

Correction de l'exercice 7191 ▲

Montrons par récurrence que $A_n = U$ est une matrice bande.

$A_1 = A, \quad A_{k+1} = L_k A_k = L_k L_{k-1} \cdots L_1 A, \quad k = 1, \cdots, n-1$.

Supposons que A_k est une matrice bande i.e., $a_{ij}^k = 0$ pour $|i-j| \geqslant p$ et montrons que A_{k+1} est une matrice bande.

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^k a_{kj}^k}{a_{kk}^k}$$

Soit $|i-j| \geqslant p \Leftrightarrow |(i-k)-(j-k)| \geqslant p$. On considère deux cas :

— $k+1 \leqslant i \leqslant n$ et $k \leqslant j \leqslant n$. Alors $i-k \geqslant p$ ou $j-k \geqslant p \Rightarrow a_{ik}^k a_{kj}^k = 0 \Rightarrow a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k = 0$

— $i \leqslant k$ ou $j \leqslant k-1$ alors $a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k = 0$

donc A_{k+1} est une matrice bande et U est une matrice bande. On a $A = LU$ et la matrice triangulaire inférieure L a pour éléments $l_{ij} = a_{ij}^j / a_{jj}^j, \quad j \leqslant i \leqslant n$. Toutes les matrices A_j étant des matrices bandes on a $a_{ij}^j = 0$ pour $i - j \geqslant p \Rightarrow l_{ij} = 0$ pour $i - j \geqslant p$.

Correction de l'exercice 7192 ▲

Soit LU la factorisation LU de A. On va intercaler dans cette factorisation la matrice réelle $\Lambda = \text{diag}(\sqrt{|u_{ii}|})$.

$A = (L\Lambda)(\Lambda^{-1}U) = BC$. La symétrie de A entraine $BC = C^T B^T$. On a

$C(B^T)^{-1}$ matrice triangulaire supérieure, $B^{-1}C^T$ matrice triangulaire inférieure et $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T$ et donc

$C(B^T)^{-1} = B^{-1}C = \text{diag}(\text{sign}(u_{ii})) = S \Rightarrow C(B^T)^{-1}S^{-1} = I = S^{-1}B^{-1}C^T \Leftrightarrow C^T = BS = \tilde{B}$. Donc A peut être mise sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T \text{ avec } \tilde{B} = BS$$

i.e. la i-ème colonne de $\tilde{B}$ est égale à la i-ème colonne de B affectée du signe de u_{ii}

Application numérique :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & -1 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 7195 ▲

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ v & B_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = (b_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$$

A^T étant à diagonale strictement dominante on a :

$$|\alpha| > \sum_{i=1}^{n-1} |v_i|, \quad |u_i| + \sum_{j\neq i} |b_{ji}| < |b_{ii}|$$

Il suffit de montrer que
— la première colonne de L vérifie $|l_{11}| > \sum_{i\neq 1} |l_{i1}|$
— B_2 est telle que

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = B_2 = B_1 - \frac{1}{\alpha} v u^T$$

vérifie $|c_{ii}| > \sum_{j\neq i} |c_{ji}|$ avec $C_{ij} = B_{ij} - \frac{1}{\alpha} v_i u_j$ et itérer.
— première colonne de L : $l_{i1} = v_i/\alpha \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} |l_{i1}| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|v_i|}{\alpha} < 1$
— $\sum_{i\neq j} |c_{ij}| = \sum_{i\neq j} \left|b_{ij} - \frac{1}{\alpha} v_i w_j\right| \leqslant \sum_{i\neq j} |b_{ij}| + \frac{1}{|\alpha|} |w_j| \sum_{i\neq j} |v_i|$

$$\leqslant |b_{jj}| - |u_j| + \frac{1}{|\alpha|} |u_j| (|\alpha| - |v_j|) \leqslant \left| b_{jj} - \frac{1}{\alpha} u_j v_j \right| = |c_{jj}|$$

donc B_2^T est de diagonale strictement dominante. La démonstration se finit par récurrence.

Correction de l'exercice 7196 ▲

(a) Soit P l'opérateur de projection dans le sous-espace U de dimension 1 généré par v. Alors $Q = I - P$ est l'opérateur de projection sur l'hyperplan $U^\perp$ orthogonal à U. On a déjà vu que $Pw = vv^T w \quad \forall w$, et donc $Qw = w - vv^T w$. On obtient
$P(H(v)w) = P(w_(2v^T w)v) = (v^T w)v - 2v^T wvv^T v = -(v^T w)v = -Pw$
$Q(H(v)w) = H(v)w - P(H(v)w) = w - 2vv^T w + v^T wv = w - v^T wv = Qw.$
La matrice $H(v)$ représente donc une symétrie par rapport à l'hyperplan $U^\perp$. On conclut que les vecteurs de $U^\perp$ sont invariants par $H(v)$.
$V(v)w = w \quad \forall w \in U^\perp, \quad \dim U^\perp = n-1 \Rightarrow \lambda = 1$ est valeur propre de $H(v)$ avec multiplicité $n-1$.
$H(v)v = -v \mp \lambda = -1$ est valeur propre de multiplicité 1. Donc

$$\det H(v) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(H(v)) = -1$$

(b) On sait qu'il exite des matrices de Householder $H_1, H_1, \ldots, H_{n-1}$ telles que $H_{n-1} \cdots H_1 A = A_n$ matrice triangulaire supérieure. Comme A est orthogonale on conclut que A_n est orthogonale. Mais une matrice triangulaire supérieure orthogonale est forcément diagonale $\Rightarrow A_n =$diag(± 1). On peut s'arranger pour que $(A_n)_{ii} > 0 \quad i = 1, \ldots, n-1$. Donc soit $A_n = I$ soit $A_n =$diag$(1, 1, \ldots, 1, -1) = H(e_n)$ et finalement la matrice orthogonale A s'écrit

$$A = H_1 \cdots H_{n-1} H(e_n)$$

Correction de l'exercice 7197 ▲

(a) Pour $k = 1, \cdots, n \quad a_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik} q_i$ avec $r_{ik} = q_i^T a_k$ par orthonormalité des q_i.
(b) Découle immédiatement de la question précédente.

(c) Algorithme de Gram-Schmidt :

Pour $k = 1, \cdots, n$ faire

$r_{ik} = q_i^T a_k \quad$ pour $i = 1, \cdots, k-1$

$z_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i$

$r_{kk} = (z_k^T z_k)^{1/2}$

$q_k = z_k / r_{kk}$

(d) i.

$$\sum_{i=k}^{n} q_i r_i^T = [q_k \cdots q_n] \begin{pmatrix} r_k^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{pmatrix} = q_k \cdots q_n] \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & r_{kk} & \cdots & \cdots & r_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & r_{k+1,k+1} & \cdots & r_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{(k)} e_k = z = [q_k \cdots q_n] \begin{pmatrix} r_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = r_{kk} q_k \Rightarrow r_{kk} = \|z\|_2, q_k = z / r_{kk}$$

ii.

$$q_k^T A^{(k)} = [q_k^T z, q_k^T B] = [1, 0, \cdots, 0] \begin{pmatrix} r_k^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{pmatrix} = r_k^T$$

et donc

$$[r_{k,k+1}, \cdots, r_{kn}] = q_k^T B$$

iii.

$$[0, \cdots, 0, A^{(k+1)}] = \sum_{i=k+1}^{n} q_i r_i^T = [0, \cdots, 0, A^{(k)}] - q_k r_k^T = [0, \cdots, 0, A^{(k)} - q_k (r_{kk}, \cdots, r_{kn})]$$

$$[0, \cdots, 0, z - q_k r_{kk}, B - q_k (r_{k,k+1}, \cdots, r_{kn})] \Rightarrow A^{(k+1)} = B - q_k (r_{k,k+1}, \cdots, r_{kn})$$

iv. Données : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\operatorname{rank}(A) = n$

On calcule la factorisation $A = Q_1 R_1$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ orthonormale, $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangulaire supérieure. Le calcul de Q_1 se fait sur place.

Pour $k = 1, \cdots, n$

$r_{kk} = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}^2 \right)^{1/2}$

pour $i = 1, \cdots, m$

$a_{ik} \leftarrow a_{ik} / r_{kk}$

pour $j = k+1, \cdots, n$

$r_{kj} \leftarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ik} a_{ij}$

pour $i = 1, \cdots, m$

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} r_{kj}$

v. complexité : mn^2 flops.

Correction de l'exercice 7198 ▲

(a) $G_{p,q}(c,s) = I + (c-1) e_p e_p^T + s e_q e_p^T - s e_q e_q^T + (c-1) e_p e_q^T$ avec e_i les vecteurs de la base canonique.

(b) On montre que $e_i^T G^T G e_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \cdots, n$ et donc $G^T G = I$ ce qui permet de conclure que G est inversible d'inverse G^T et donc orthogonale.

(c) $e_i^T GA = e_i^T A = a_i^T$ pour $i \neq p,q$
$e_p^T GA = ca_p^T - sa_q^T$, $e_q^T GA = sa_p^T + ca_q^T$, et donc G change seulement les lignes p et q

(d) On pose $\alpha = a_{pj}$ et $\beta = a_{qj}$. On a donc à résoudre dans le premier cas le système

$$\begin{cases} c\alpha - s\beta = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \pm\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ s = \pm\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$$

ce qui nous donne deux matrices G. Pour le deuxième cas et en procédant de la même façon on obtient

$$\begin{cases} c = \pm\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ s = \mp\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 7201 ▲

Méthode de Givens rapide

(a) $MM^T = \text{diag}(d_1, \cdots, d_m) = \Delta^2$ avec $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \cdots, \sqrt{d_m})$
$\Delta^{-1}MM^T\Delta^{-1} = (\Delta^{-1}M)(\Delta^{-1}M)^T = I \Rightarrow \Delta^{-1}M$ est une matrice orthogonale
$A = M^{-1}S = (M^{-1}Delta\Delta^{-1}S = (\Delta^{-1}M)^{-1}(\Delta^{-1}S) = (\Delta^{-1}M)^T(\Delta^{-1}S) = (M^T\Delta^{-1})(\Delta^{-1}S)$
Comme $\Delta^{-1}S$ est triangulaire supérieure ona $A = QR$ avec $Q = M^T\Delta^{-1}, R = \Delta^{-1}S$

(b) i.

$$M_1 x = \begin{pmatrix} \beta_1 x_1 + x_2 \\ x_1 + \alpha_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 D M_1^T = \begin{pmatrix} d_2 + \beta_1^2 d_1 & d_1\beta_1 + d_2\alpha_1 \\ d_1\beta_1 + d_2\alpha_1 & d_1 + \alpha_1^2 d_2 \end{pmatrix}$$

Alors
— $x_1 + \alpha_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -x_1/x_2$
— $d_1\beta_1 + d_2(-x_1/x_2) = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = -\alpha_1 d_2/d_1 = x_1 d_2/(x_2 d_1)$

Pour le choix précédent on veut déterminer γ_1 tel que
$x_2(1+\gamma_1) = \beta_1 x_1 + x_2 = x_2(\beta_1 x_1/x_2 + 1) \Rightarrow \gamma_1 = (d_2/d_1)(x_1/x_2)^2$ c'est-à-dire

$$\gamma_1 = -\alpha_1\beta_1$$

pour cette valeur on a
$d_2 + \beta_1^2 d_1 = d_2(1 + \alpha_1^2 d_2/d_1) = d_2(1+\gamma_1)$ $d_1 + \alpha_1^2 d_2 = d_1(1 + \alpha_1^2 d_2/d_1) = d_2(1+\gamma_1)$

ii. le même type de calcul nous donne

$$\beta_2 = -x_2/x_1, \quad \alpha_2 = -(d_1/d_2)\beta_2, \quad \gamma_2 = -\alpha_2\beta_2 = (d_1/d_2)(x_2/x_1)^2$$

iii. on remarque que $\gamma_1\gamma_2 = 1$ et donc soit $\gamma_1 \leqslant 1$, soit $\gamma_2 \leqslant 1$

(c)

$$\begin{pmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

avec les α_i, β_i définis comme précédemment.

(d) *algorithme*
$d_i = 1$ pour $i = 1, \cdots, m$
Pour $p = 1, \cdots, \min\{n, m-1\}$
Pour $q = p+1, \cdots, m$
si $a_{qp} \neq 0$ alors
$\alpha = -a_{pp}/a_{qp}, \quad \beta = -\alpha d_q/d_p, \quad \gamma = -\alpha\beta$
si $\gamma \leqslant 1$ alors

$$\begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix}$$

échanger d_p et d_q

$d_p \leftarrow (1+\gamma d_p)$

$d_q \leftarrow (1+\gamma d_q)$

sinon

échanger α et β

$\alpha = 1/\alpha$, $\beta = 1/\beta$, $\gamma = 1/\gamma$

$\begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix}$

$d_p \leftarrow (1+\gamma d_p)$

$d_q \leftarrow (1+\gamma d_q)$

le coût de cet algorithme est de $n^2(m-n/3)$ flops.

(e) i. on a $MA = R = \begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec S_1 triangulaire supérieure et $MM^T = D$ =diag$(d_1,\cdots,d_n)$. Donc la matrice $D^{-1/2}M$ est une matrice orthogonale

$$\|Ax-b\|_2^2 = \|D^{-1/2}MAx - D^{-1/2}Mb\|_2^2 = \left\| D^{-1/2}\left[\begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} x - Mb\right]\right\|_2^2 =$$

$$= \left\| D^{-1/2}\left[\begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right]\right\|_2^2 = \left\| D^{-1/2}\begin{pmatrix} S_1x-c \\ d \end{pmatrix}\right\|_2^2$$

La solution est obtenue en résolvant le système triangulaire supérieure $S_1x = c$ de taille $n\times n$.

ii. — mise à jour de b pour le calcul de Mb en même temps que la mise à jour de A

pour $p = 1,\cdots,\min\{n,m-1\}$

pour $q = p+1,\cdots,m$ faire

$\begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix}$ ou

$\begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix}$

— résolution du système triangulaire sup. $S_1x = c$

$x_n \leftarrow b_n/a_{nn}$

Pour $i = n-1,\cdots,1$ faire

$x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j)$

(f) Application numérique :

$$M = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 16 & 24 \\ 40 & 10 & -20 \\ 15 & -30 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \mathrm{diag}(14/9, 175/48, 75/32)$$

$$M[A,b] = \begin{pmatrix} 14/3 & 32/3 & 50/3 \\ 0 & 15/4 & 15/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{ls} = (-1,2)^T$$

(g) on a

$$MD^{-2}M^T = \tilde{D} \Leftrightarrow (\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1})(\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1})^T = I$$

donc $(\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1})$ est une matrice orthogonale et on obtient

$$\|D(Ax-b)\|_2 = \|\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1}D(Ax-b)\|_2 = \|\tilde{D}^{-1/2}(MAx-Mb)\|_2 =$$

$$= \left|\tilde{D}^{-1/2}\begin{pmatrix} Sx-c \\ e \end{pmatrix}\right|_2$$

Donc le min est atteint pour $Sx = c$ avec $Mb = (C,e)^T$

La modification dans l'algorithme précédent consiste à initialiser la matrice diagonale D avec D^{-2} (au lieu de l'identité).

Correction de l'exercice 7203 ▲

(a) Pour le membre de gauche on obtient

$$(x,Ax)-(y,Ay)=(x,AM^{-1}Mx)+(M^{-1}Ax,Ax)-(M^{-1}Ax,AM^{-1}Ax)$$

Pour le membre de droite on obtient $y=Bx=x-M^{-1}Ax \Rightarrow x-y=M^{-1}Ax$ et donc

$$(x-y,(M+M^*-A)(x-y))=(M^{-1}Ax,(M+M^*-A)M^{-1}Ax)=$$

$$(M^{-1}Ax,Ax)+(M^{-1}Ax,M^*M^{-1}Ax)-(M^{-1}Ax,AM^{-1}Ax)$$

Mais

$$(M^{-1}Ax,M^*M^{-1}Ax)=(x,(M^{-1}A)^*M^*M^{-1}Ax)=(x,AM^{-1}Ax)$$

ce qui fini la démonstration.

(b) $y=Bx=\lambda x \Rightarrow x-y=(1-\lambda)x$. En utilisant l'égalité précédente
$(x,Ax)-(y,Ay)=(x,Ax)-(\lambda x,A(\lambda x))=(1-|\lambda|^2)(x,Ax)$
$(x-y,(M+M^*-A)(x-y))=((1-\lambda)x,(M+M^*-A)((1-\lambda)x))=|1-\lambda|^2(x,(M+M^*-A)x)$
et donc

$$(1-|\lambda|^2)(x,Ax)=|1-\lambda|^2(x,(M+M^*-A)x)$$

λ ne peut pas être $=1$ car sinon $y=Bx=x \Leftrightarrow x-M^{-1}Ax=x \Leftrightarrow M^{-1}Ax=0 \Leftrightarrow x=0$. Donc $\lambda\neq 1$, $M+M^*-A$ définie positive, $|1-\lambda|^2>0$, A définie positive impliquent que $1-|\lambda|^2>0 \Leftrightarrow |\lambda|<1$. Donc $\rho(B)<1$ et la méthode itérative converge.

(c) Démonstration par absurde. Supposons que ce n'est pas vrai : $\exists x_0\neq 0 \quad \alpha_0=(x_0,Ax_0)\leqslant 0$. Alors la suite $x_n=Bx_{n-1}=B^n x_0$ tend vers 0 et $\lim \alpha_n=\lim (x_n,Ax_n)=0$
On utilise maintenant la relation de la question 1 avec $x=x_{n-1}$ et $y=Bx_{n-1}=x_n$ et on obtient

$$\alpha_{n-1}-\alpha_n=(x_{n-1}-x_n,(M+M^*-A)(x_{n-1}-x_n))>0$$

si $x_{n-1}-x_n\neq 0$ (ce qui est vrai car sinon $x_{n-1}=x_n=Bx_{n-1}$ et B a une valeur propre $=1$)
Donc $(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$ est une suite strictement décroissante convergeant vers 0 avec $\alpha_0<0$. Ceci est impossible et donc A est définie positive

(d) Soit $A=D-E-F$ la décomposition usuelle de A. Comme A est hermitienne, $D=D^*$ et $F=E^*$. Pour la méthode de relaxation on a $M=D/w-E$ et donc

$$M^*+M-A=D/w-F+D/w-E-D+E+F=\frac{2-w}{w}D$$

qui est hermitienne. Pour $0<w<2$, M^*+M-A est définie positive, alors des deux questions précédentes on conclut que la méthode converge ssi A est définie positive.

Correction de l'exercice 7204 ▲

(a) On a $x_{2k+1}=(I-E)^{-1}E^*x_{2k}+(I-E)^{-1}b$ et donc

$$x_{2k+2}=(I-E^*)^{-1}E(I-E)^{-1}E^*x_{2k}+(I-E^*)^{-1}E(I-E)^{-1}b+(I-E^*)^{-1}b$$

Mais $E(I-E)^{-1}=(I-E)^{-1}E$ et alors

$$x_{2k+2}=(I-E^*)^{-1}(I-E)^{-1}EE^*x_{2k}+(I-E^*)^{-1}(I-E)^{-1}(E+I-E)b=M^{-1}Nx_{2k}+M^{-1}b$$

avec

$$M=(I-E)(I-E^*),\quad N=EE^*,\quad M-N=I-E-E^*=A$$

(b) $M^*+N = I-E-E^*+2EE^*$ et donc
$v^*(M^*+N)v = \|v\|_2^2 - v^*Ev - v^*E^*v + 2v^*EE^*v = \|E^*v\|_2^2 + (\|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(v,E^*v))$ On a l'inégalité

$$-2\|v\|\|E^*v\| \leqslant -2|(v,E^*v)| \leqslant -2|\mathrm{Re}(v,E^*v)|$$

et donc

$$(\|v\|_2 - \|E^*v\|_2)^2 \leqslant \|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(v,E^*v) \Rightarrow$$

$v^*(M^*+N)v \geqslant \|E^*v\|_2^2 + (\|v\| - \|E^*v\|_2)^2$ implique que

$$v^*(M^*+N)b = 0 \Leftrightarrow \|E^*v\|_2 = 0 \text{ et } \|v\|_2 = \|E^*v\|_2 \Leftrightarrow \|v\|_2 = 0$$

Donc M^*+N est définie positive et en appliquant un résultat d'un exercice précédent on conclut que la méthode converge ssi A est définie positive.

Correction de l'exercice 7205 ▲

(a) C'est facile à voir que si (x_k) converge vers x^* et (y_k) converge vers y^*, alors x^* et y^* sont solution des systèmes $(I-BA)x^* = Bb+a$ et $(I-AB)y^* = Aa+b$. On a :

$$\begin{cases} x_{k+1} = B(Ax_{k-1}+b)+a = BAx_{k-1}+Bb+a \\ y_{k+1} = A(By_{k-1}+a)+b = ABy_{k-1}+Aa+b \end{cases}$$

et donc (x_k) converge ssi $\rho(BA) < 1$ et (y_k) converge ssi $\rho(AB) < 1$.

(b) $z_{k+1} = Cz_k + c$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

(c) Soit λ valeur propre non nulle de C et $z = (x,y)^T$ vecteur propre associé

$$Cz = \lambda z \Leftrightarrow \begin{cases} By = \lambda x \\ Ax = \lambda y \end{cases} \Rightarrow ABy = \lambda Ax = \lambda^2 y \Rightarrow$$

λ^2 est valeur propre de AB.
Soit maintenant α valeur propre de $AB \Leftrightarrow \exists u \neq 0 : \quad ABu = \alpha u$. On pose $\beta^2 = \alpha$ et $x = Bu$, $y = \beta u$

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ ABu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ \beta^2 u \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et donc $\rho^2(C) = \rho(AB)$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} a \\ Aa+b \end{pmatrix}$. La démonstration de $\rho(D) = \rho(AB)$ se fait comme dans la question précédente.

(e) i. $e^k = M^k e^0 \Rightarrow \frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leqslant \|M^k\| \leqslant \varepsilon$. Il suffit donc d'avoir $\|M^k\|^{1/k} \leqslant \varepsilon^{1/k} \Rightarrow \log(\|M^k\|^{1/k}) \leqslant \frac{1}{k}\log\varepsilon$ c'est- à dire $k \geqslant \frac{\log\varepsilon}{\log(\|M^k\|^{1/k})}$ Mais comme $\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k}$ on obtient finalement

$$k \geqslant -\log\varepsilon / R(M)$$

ii. nous avons $\rho^2(C) = \rho(AB) \Rightarrow \rho(C) = \sqrt{\rho(AB)}$ et $\rho(D) = \rho(AB)$. Donc $\rho(D) < \rho(C) \Rightarrow R(D) > R(C)$. Donc on atteint la même réduction d'erreur avec un plus petit nombre d'itérations de la méthode 2)

Correction de l'exercice 7206 ▲

(a)

(b) Itération de Gauss-Seidel : $(D-E)X_{n+1} = FX_n + b$ avec

$$D-E = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 0 & 2 & 3 & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $e_n = X_n - X^*, \quad ,X_{n+1} = (D-E)^{-1}FX_n + (D-E)^{-1}b, \quad X^* = (D-E)^{-1}FX^* + (D-E)^{-1}b \Rightarrow$ $e_{n+1} = (D-E)^{-1}Fe_n$

On obtient alors $(D-E)e_{n+1} = (D-E)^{-1}Fe_n$ et si on écrit composante à composante on obtient

$3e^1_{n+1} = -e^2_n \Rightarrow |e^1_{n+1}| \leqslant \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty$

$e^1_{n+1} + 2e^2_{n+1} = -e^3_n \Rightarrow |e^2_{n+1}| \leqslant \frac{1}{6}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{2}\|e_n\|_\infty = \frac{2}{3}\|e_n\|_\infty$

$2e^2_{n+1} + 3e^3_{n+1} = -e^4_n \Rightarrow |e^3_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}\frac{2}{3}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty = \frac{7}{9}\|e_n\|_\infty$

$e_{n+1}32 + 4e^4_{n+1} = -3e^5_n \Rightarrow |e^4_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}\frac{7}{9}\|e_n\|_\infty + \frac{3}{4}\|e_n\|_\infty = \frac{34}{16}\|e_n\|_\infty$

$e^4_{n+1} + e^5_{n+1} = 0 \Rightarrow |e^5_{n+1}| \leqslant \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$

et donc

$$\|e_n\|_\infty \leqslant \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$$

(d)

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

et donc $\|L_1\|_\infty = \max(\frac{1}{3}, \frac{4}{6}, \frac{17}{18}, \frac{32}{36}, \frac{32}{36}) = \frac{17}{18}$.

On en déduit donc la convergence de (X_n) vers X^*.

Correction de l'exercice 7218 ▲

Soit f la densité de X et g la densité de Y. X est indépendante de Y donc X est indépendante de $-Y$.

$$\begin{aligned} P(-Y \in [a,b]) &= P(Y \in [-b,-a]) = \int_{-b}^{-a} g(t)\,dt \\ &= \int_a^b g(-u)\,du \text{ (changement de variable } u = -t) \end{aligned}$$

donc la densité de $-Y$ est $h(t) = g(-t)$. Par indépendance, $X + (-Y)$ a une loi continue de densité $f * h$, donc $P(X = Y) = P(X - Y = 0) = \int_0^0 f * h(x)\,dx = 0$.

Correction de l'exercice 7220 ▲

(a) $P(Z \leqslant t) = 0$ si $t < 0$ et $P(Z \leqslant t) = P(-\sqrt{t} \leqslant X \leqslant \sqrt{t})$ si $t \geqslant 0$. Donc, pour $t \geqslant 0$, $F_Z(t) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$. $F_X(t)$ est dérivable de dérivée $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, donc F_Z est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $F'_Z(t)$ est la densité de Z.

$F'_Z(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(F'_X(\sqrt{t}) + F'_X(-\sqrt{t}))$. Donc la densité de Z est $f_Z(t) = 1\!\!1_{\mathbb{R}^*_+}(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-t/2}$.

(b) $F_{Y^3}(t) = P(Y^3 \leqslant t) = P(Y \leqslant \sqrt[3]{t}) = F_Y(\sqrt[3]{t})$. On a $F_Y(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et $F_Y(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-\lambda t}$ si $t > 0$. Donc $F_{Y^3}(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et $F_{Y^3}(t) = 1 - e^{-\lambda \sqrt[3]{t}}$ si $t > 0$. La fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux donc on peut dériver pour trouver la densité de X^3, qui est $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\frac{\lambda}{3}t^{-2/3}e^{-\lambda\sqrt[3]{t}}$.

Correction de l'exercice 7221 ▲

$1 - F(t) = P(X > t) = P_X(]t, +\infty[) = \int_{]t,+\infty[} 1\, dP_X(x)$. Donc

$$\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_{]t,+\infty[} 1\, dP_X(x) \right) dt.$$

On applique Fubini-Tonelli, le domaine d'intégration étant $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant t < x\}$:

$$\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt = \int_{]0,+\infty[} \left(\int_{[0,x[} 1\, dt \right) dP_X(x) = \int_{]0,+\infty[} x dP_X(x).$$

Par ailleurs, comme X est positive,

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\, dP_X(x), \quad \text{donc} \quad E(X) = 0 \times P_X(\{0\}) + \int_{]0,+\infty[} x\, dP_X(x).$$

On en déduit que $E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt$.

Remarque : si la loi de X est continue, on n'a pas à se préoccuper si les intervalles sont ouverts ou fermés puisque $P(X > a) = P(X \geqslant a)$.

Correction de l'exercice 7222 ▲

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ et cette union est disjointe, donc $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$. Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ donc $P(A \cap B^c) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$, autrement dit $A \perp B^c$. On applique le résultat à $A' = B, B' = A$ et on trouve $A^c \perp B$. On réapplique le résultat à A^c et B pour trouver $A^c \perp B^c$.

Correction de l'exercice 7223 ▲

(a) $P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ donc $P(X > t + s \mid X > t) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)}$. Or $P(X > y) = \int_y^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda y}$ si $y \geqslant 0$. Donc $P(X > t + s \mid X > t) = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$.

(b) Soit $H(t) = 1 - F_X(t) = P(X > t)$. Par hypothèse, on a $H(t + s) = H(t)H(s)$. Comme la densité de X est continue sur $\mathbb{R}_+$, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc H aussi. Si on dérive par rapport à s, on trouve : $H'(t + s) = H(t)H'(s)$. Si $s = 0$, on a $H'(t) = H(t)H'(0)$. Posons $\lambda = -H'(0)$. La fonction H est solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation $y' + \lambda y = 0$, donc il existe K tel que $H(t) = Ke^{-\lambda t}$, et $F_X(t) = 1 - Ke^{-\lambda t}$ pour tout $t \geqslant 0$. Le cas $K = 0$ est exclu, sinon $P_X = \delta_0$, ce qui est impossible car X est une variable aléatoire à densité. On a

$$\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1 \quad \text{et} \quad F_X(0) = 0 \quad \text{car} \quad X \text{ est une variable aléatoire positive,}$$

donc nécessairement $\lambda > 0$ et $K = 1$. En dérivant $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, on trouve que la densité de X sur $\mathbb{R}_+$ est $\lambda e^{-\lambda t}$, c'est-à-dire que X est de loi exponentielle de paramètre λ.

Correction de l'exercice 7224 ▲

(a) $\{\omega \mid T_1(\omega) = +\infty\} = \{\omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ pour tout } n \geqslant 1\} \subset \{\omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant n \leqslant N\}$. Donc $P(T_1 = +\infty) \leqslant P(X_n = 0 \text{ pour } 1 \leqslant n \leqslant N) = \prod_{n=1}^{N} P(X_n = 0)$ par indépendance d'où $P(T_1 = +\infty) \leqslant (1-p)^N$. Or $1-p \in]0,1[$ et N est arbitrairement grand, donc $P(T_1 = +\infty) = 0$, autrement dit T_1 est fini presque sûrement.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\{T_1 = k\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\}$ donc par indépendance $P(T_1 = k) = p(1-p)^{k-1}$.
$E(T_1) = \sum_{k\geqslant 1} kP(T_1 = k) = p\sum_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$. On reconnaît une série dérivée. Si on introduit la série $f(x) = \sum_{k\geqslant 0} x^k$ (bien définie si $|x| < 1$), alors $E(T_1) = pf'(1-p)$. Or $f(x) = \frac{1}{1-x}$, donc $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
D'où $E(T_1) = pf'(1-p) = \frac{1}{p}$.

(c) Montrons par récurrence que T_n est finie presque sûrement (hypothèse vérifiée par T_1 par a) et que les variables aléatoires $T_1, (T_2 - T_1), \ldots (T_n - T_{n-1}), \ldots$ ont la même loi que T_1 (hypothèse évidemment vérifiée par T_1).
Supposons que T_{n-1} est finie presque sûrement et montrons que $T_n - T_{n-1}$ a la même loi que T_1 et que T_n est finie presque sûrement Si $T_{n-1} = j$ alors $\{T_n = j+k\} = \{X_{j+1} = 0, \ldots, X_{j+k-1} = 0, X_{j+k} = 1\}$.
Comme T_{n-1} est finie presque sûrement, la formule des probabilités conditionnelles s'applique et donne :

$$\begin{aligned}
P(T_n - T_{n-1} = k) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} P(T_n - T_{n-1} = k \mid T_{n-1} = j)P(T_{n-1} = j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} P(X_{j+1} = 0, \ldots, X_{j+k-1} = 0, X_{j+k} = 1)P(T_{n-1} = j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} p(1-p)^{k-1}P(T_{n-1} = j) \text{ par indépendance} \\
&= p(1-p)^{k-1}\sum_{j\in\mathbb{N}} P(T_{n-1} = j)
\end{aligned}$$

Or $\sum_{j\in\mathbb{N}} P(T_{n-1} = j) = P(T_{n-1} < +\infty) = 1$ (hypothèse de récurrence pour $n-1$), donc $P(T_n - T_{n-1} = k) = (1-p)^{k-1}p$. On vérifie que $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(T_n - T_{n-1} = k) = 1$, donc $T_n - T_{n-1} < +\infty$ presque sûrement, et par conséquent $T_n < +\infty$ presque sûrement (on peut aussi calculer directement $P(T_n - T_{n-1} = +\infty) = 0$, comme pour T_1). On vient de montrer que $T_n - T_{n-1}$ a la même loi que T_1. Ceci termine la récurrence.

Pour montrer l'indépendance, on regarde $\{T_1 = k_1, T_2 - T_1 = k_2, \ldots, T_n - T_{n-1} = k_n\}$, ce qui décrit exactement les valeurs de X_i pour $0 \leqslant i \leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. C'est un peu lourd à écrire :

$$\begin{aligned}
\{T_1 = k_1, T_2 - T_1 = k_2, \ldots, T_n - T_{n-1} = k_n\} = \{\ & X_0 = \cdots = X_{k_1-1} = 0, X_{k_1} = 1, \\
& X_{k_1+1} = \cdots = X_{k_1+k_2-1} = 0, X_{k_1+k_2} = 1, \\
& \ldots \\
& X_{k_1+\cdots+k_{n-1}+1} = \cdots = X_{k_1+\cdots+k_n-1} = 0, X_{k_1+\cdots+k_n} = 1\ \}
\end{aligned}$$

D'où par indépendance des X_i :

$$\begin{aligned}
P(T_1 = k_1, T_2 - T_1 = k_2, \ldots, T_n - T_{n-1} = k_n) &= p^n(1-p)^{(k_1-1)+\cdots+(k_n-1)} \\
&= P(T_1 = k_1)P(T_2 - T_1 = k_2)\cdots P(T_n - T_{n-1} = k_n)
\end{aligned}$$

Conclusion : les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes.

(d) Ce qui précède permet de voir que, pour avoir $T_n = k$, d'une part il faut que $X_k = 1$, et d'autre part parmi les $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant k-1}$ il faut que $n-1$ soient égaux à 1 et les autres soient égaux à 0. Il y a C_{k-1}^{n-1} façons de choisir les 1 (à condition bien sûr que $k \leqslant n$), et chaque combinaison a la même probabilité, qui est $p^n(1-p)^{k-n}$. On peut en déduire que la loi de T_n est $P(T_n = k) = C_{k-1}^{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ si $k \geqslant n$ et $P(T_n = k) = 0$ si $k < n$.

Correction de l'exercice 7225 ▲

(a) $G_X(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k (1-p)^{n-k}$ donc $G_X(z) = (pz+1-p)^n$.

(b) $G_Y(z) = (pz+1-p)^m$ par a). Par indépendance, $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) = (pz+1-p)^{n+m}$. C'est la fonction génératrice de la loi binomiale $\mathscr{B}(n+m,p)$. Or la loi de $X+Y$ est $\mathscr{B}(n,p) * \mathscr{B}(m,p)$, donc $\mathscr{B}(n,p) * \mathscr{B}(m,p) = \mathscr{B}(n+m,p)$.

Correction de l'exercice 7226 ▲

Soit G la fonction génératrice de X_1. Comme les X_n ont la même loi que X_1, $G_{X_n} = G$. Par indépendance, la fonction génératrice de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est $G_{S_n} = G_{X_1} G_{X_2} \dots G_{X_n} = G^n$.

$$\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = k\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n,\ X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega) = k\}$$

et cette union d'ensembles est disjointe, donc $P(Y=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n,\ X_1+\cdots+X_n = k)$.

De plus, pour n fixé, les variables aléatoires N et $X_1+\cdots+X_n$ sont indépendantes, donc

$$P(Y=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) P(X_1+\cdots+X_n = k).$$

Les séries génératrices convergent pour $|x| \leqslant 1$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} G_Y(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P(X_1+\cdots+X_n=k)x^k = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k)x^k \\ &\quad \text{(tous les termes sont positifs donc on peut inverser les sommes par Fubini-Tonelli)} \\ G_Y(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) G_{S_n}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)(G(x))^k = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)(G(x))^k = G_N(G(x)) \end{aligned}$$

(on peut commencer la somme à $n=0$ car $P(N=0)=0$). Conclusion : $G_Y = G_N \circ G$ (l'égalité des séries pour $x \geqslant 0$ entraîne l'égalité des séries partout par identifications des coefficients).

Les fonctions génératrices sont toujours définies sur $[-1,1]$. Comme X_1 et N sont intégrables, G_N et G sont dérivables et $G_N'(1) = E(N), G'(1) = E(X_1)$ (G_N et G n'étant définies a priori que sur $[-1,1]$, $G_N'(1)$ et $G'(1)$ sont en fait des dérivée à gauche en 1, les dérivées à droite ne sont peut-être pas définies).

Donc $G_Y = G_N \circ G$ est dérivable par composition (remarquons que $|G(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k) = 1$ – c'est le cas pour toute fonction génératrice – donc $G([-1,1]) \subset [-1,1]$ et la composition est bien définie). Comme $G(1) = 1$, on a $G_Y'(1) = G'(1)G_N'(1)$. Conclusion : Y est intégrable et $E(Y) = E(X_1)E(N)$.

Correction de l'exercice 7227 ▲

(a) $G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

(b) $E(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$

(c) $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) = e^{(\lambda+\lambda')(z-1)}$. D'où $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\lambda')$, et donc $\mathscr{P}(\lambda) * \mathscr{P}(\lambda') = \mathscr{P}(\lambda+\lambda')$.

Correction de l'exercice 7228 ▲

La densité de X étant $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\lambda e^{-\lambda x}$, on doit calculer $\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx$. On a

$$\int_0^M e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\left[\frac{1}{it-\lambda}e^{(it-\lambda)x}\right]_0^M = \frac{\lambda}{it-\lambda}\left(e^{(it-\lambda)M}-1\right)$$

(remarquer que $it-\lambda \neq 0$ car $t\in\mathbb{R}$ et $\lambda>0$).

On a $|e^{(it-\lambda)M}| = |e^{it}|e^{-\lambda M} = e^{-\lambda M} \to 0$ quand $M\to+\infty$ donc l'intégrale est bien convergente et $\varphi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$.

Correction de l'exercice 7229 ▲

(a) $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}\exp(\lambda e^{it})$, donc $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$.

(b) $\varphi_Y(t) = \exp(\lambda'(e^{it}-1))$ par 1. Par indépendance, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \exp((\lambda+\lambda')(e^{it}-1))$. C'est la fonction caractéristique de la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda+\lambda')$. Donc $\mathscr{P}(\lambda)*\mathscr{P}(\lambda') = \mathscr{P}(\lambda+\lambda')$.

Correction de l'exercice 7230 ▲

(a) $E(X) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \dfrac{1}{\lambda}$ par intégration par parties.

(b) $E(X) = \sum_{k\geqslant 0} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}k = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$.

$E(X^2) = \sum_{k\geqslant 0} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}k$. On écrit $k=(k-1)+1$:

$E(X^2) = \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k\geqslant 2}\dfrac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k\geqslant 2}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+1\right) = \lambda e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda}) = \lambda^2+\lambda$.

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2)-E(X)^2$, donc $\mathrm{Var}(X)=\lambda$.

Correction de l'exercice 7231 ▲

Soit $g(t) = E((X-t)^2) = E(X^2)-2tE(X)+t^2$. C'est une parabole dont le minimum est en $t=E(X)$ (on peut aussi dériver g et trouver le minimum de cette manière).

Correction de l'exercice 7232 ▲

(a) On pose $A_n(\alpha) = \{X_n > \alpha\ln n\}$ et $A(\alpha) = \limsup A_n(\alpha)$. Les $(A_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ sont des événements indépendants. Si $\alpha\geqslant 0$ alors $\alpha\ln n\geqslant 0$ et $P(A_n(\alpha)) = \int_{\alpha\ln n}^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-\alpha\ln n} = \dfrac{1}{n^\alpha}$, donc $\sum P(A_n(\alpha)) = \sum\dfrac{1}{n^\alpha}$. C'est une série de Riemann. Si $\alpha>1$ la série converge et le lemme de Borel-Cantelli implique que $P(A(\alpha))=0$. Si $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ la série diverge et le lemme de Borel-Cantelli implique que $P(A(\alpha))=1$. Si $\alpha<0$ alors $P(A_n(\alpha))=1$ pour tout n parce que X_n est positive presque sûrement, donc on a $P(A(\alpha))=1$. Ce qui répond à la question 1.

(b) Pour tout $\varepsilon>0$, on a $P(A(1-\varepsilon))=1$. Or $A(1-\varepsilon) = \left\{\frac{X_n}{\ln n} > 1-\varepsilon \text{ pour une infinité de } n\right\}$, donc si ω appartient à $A(1-\varepsilon)$ alors $\limsup_{n\to+\infty}\dfrac{X_n(\omega)}{n}\geqslant 1-\varepsilon$. Soit N_k le complémentaire de $A(1-1/k)$ et

$N=\bigcup_{k\geqslant 1} N_k$. On a $P(N_k)=0$ donc $P(N)\leqslant \sum_{k\geqslant 1} P(N_k)=0$ (somme dénombrable d'ensembles de mesures nulles). Si $\omega\notin N$ alors $\forall k\geqslant 1$, $\omega\notin N_k$ donc $\limsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{X_n(\omega)}{n}\geqslant 1-1/k$, et comme $1/k$ tend vers 0 alors $\limsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{X_n(\omega)}{n}\geqslant 1\ \forall\omega\notin N$.

$\forall\varepsilon>0$, on a $P(A(1+\varepsilon))=0$ donc $P((A(1+\varepsilon))^c)=1$. Or

$$(A(1+\varepsilon))^c=\liminf(A_n(1+\varepsilon))^c=\left\{\frac{X_n}{n}\leqslant\alpha \text{ à partir d'un certain rang}\right\},$$

donc si $\omega\in(A(1+\varepsilon))^c$ alors $\limsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{X_n}{\ln n}\leqslant 1+\varepsilon$. Soit $N'=\bigcup\limits_{k\geqslant 1}A(1+1/k)$. On a $P(A(1+1/k))=0$ pour tout $k\geqslant 1$ donc $P(N')=0$. Si $\omega\notin N'$ alors pour tout $k\geqslant 1$, $\omega\in(A(1+1/k))^c$ donc

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n(\omega)}{n}\leqslant 1+1/k,$$

et comme $1/k$ tend vers 0 alors $\limsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{X_n(\omega)}{n}\leqslant 1$.

Conclusion : $\forall\omega\notin N\cup N'$ alors $\limsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{X_n(\omega)}{\ln n}=1$. Autrement dit $\limsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{X_n}{\ln n}=1$ presque sûrement, puisque $P(N\cup N')\leqslant P(N)+P(N')=0$.

Correction de **l'exercice 7233 ▲**

(a) Intégration par parties : $u=1/t, v'=te^{-t^2/2}, u'=-1/t^2, v=-e^{-t^2/2}$:
$\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{x}e^{-x^2/2}-\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt\leqslant\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$ car l'intégrale de droite est positive.
On fait une nouvelle intégration par parties : $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{x^3}e^{-x^2/2}-\int_x^{+\infty}\frac{3}{t^4}e^{-t^2/2}dt\leqslant\frac{1}{x^3}e^{-x^2/2}$,
donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t^2/2}dt\geqslant\frac{1}{x}e^{-x^2/2}-\frac{1}{x^3}e^{-x^2/2}$.

(b) Soit $Y_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$. On a $P(Y_n\leqslant t)=\prod\limits_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant t)=P(X_1\leqslant t)^n$ et de même $P(Y_n\geqslant t)=P(X_1\geqslant t)^n$.
On veut montrer que

$$\forall\varepsilon>0,\ P(|\frac{Y_n}{\sqrt{2\ln n}}-1|\geqslant\varepsilon)\to 0\quad\text{quand}\quad n\to+\infty\quad\text{(convergence en probabilité).}$$

On peut écrire

$$\{|\frac{Y_n}{\sqrt{2\ln n}}-1|\geqslant\varepsilon\}=\{|Y_n-\sqrt{2\ln n}|\geqslant\varepsilon\sqrt{2\ln n}\}=\{Y_n\geqslant(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\}\cup\{Y_n\leqslant(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\}$$

et cette union est disjointe donc

$$P(|\frac{Y_n}{\sqrt{2\ln n}}-1|\geqslant\varepsilon)=P(Y_n\geqslant(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n})+P(Y_n\leqslant(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}).$$

On va montrer que ces 2 probabilités tendent vers 0.

$$\begin{aligned}P(Y_n\leqslant(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}) &= P(X_1\leqslant(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})^n=\left(1-P(X_1>(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})\right)^n\\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}^{+\infty}e^{-t^2/2}\,dt\right)^n\\ &\leqslant \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln n)(1-\varepsilon)^2}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}-\frac{1}{((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})^3}\right)\right)^n \text{ par 1.}\end{aligned}$$

Comme $e^{-(\ln n)(1-\varepsilon)^2} = n^{-(1-\varepsilon)^2}$, la quantité

$$n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln n)(1-\varepsilon)^2}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}-\frac{1}{((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})^3}\right)\right)$$

est équivalent à

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}-\frac{1}{((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})^3}\right), \quad \text{donc à} \quad -\frac{n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}}{\sqrt{2\pi}(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}.$$

Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $\alpha = 2\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$, donc $\dfrac{n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}}{\sqrt{\ln n}} \to +\infty$.
En reprenant l'exponentielle, on obtient que $P(Y_n \leqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

$$P(Y_n \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}) = (P(X_1 \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}))^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt\right)^n.$$

Donc par 1., $\ln(P(Y_n \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}))$ est inférieur ou égal à

$$n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln n)(1+\varepsilon)^2}\frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}\right) = -n(\ln n)(1+\varepsilon)^2 - n\ln(\sqrt{2\pi}(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}) \to -\infty$$

donc $P(Y_n \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n})$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Conclusion : $\dfrac{Y_n}{\sqrt{2\ln n}} \xrightarrow{P} 1$.
