Corrigé olympiades 4é 2018 2019

Exercice 1 La persistance d'un nombre

1. ***a.*** $77 \to 49 \to 36 \to 18 \to 8$; la persistance de 77 est 4.

b. $28\,534 \to 960 \to 0$; la persistance de 28 534 est 2.

c. $6\,785\,791 \to 105\,840 \to 0$; la persistance de 6 785 791 est 2.

2. Si l'un des chiffres est 0, le produit est nul. La suite des produits s'arrête dès qu'il y a un 0 parmi les chiffres.

3. Le produit par 1 n'a pas d'effet. La persistance d'un nombre dont l'écriture est déduite de cette d'un autre en insérant un 1 est la même que celle du nombre dont il est issu.

4. Le nombre 77 111 111 111 111 111 111 s'écrit avec 20 chiffres. Sa persistance est 4, comme celle de 77.

5. Le produit de 5 par un nombre (en l'occurrence un chiffre) pair a 0 pour chiffre des unités. La persistance d'un nombre dont l'écriture comporte un 5 et un chiffre pair est donc au plus 2 (elle est égale à 1 dans le cas où l'écriture comporte aussi un 0).

Exercice 2 La mosaïque de Penthée

1. L'ovale est constitué de l'arc de cercle de centre M d'extrémités V et W, de l'arc de cercle de centre N d'extrémités U et V, de l'arc de centre O d'extrémités Z et U et de l'arc de centre P d'extrémités W et Z.

2. Le périmètre se compose de deux quarts de cercle de rayon 2 et deux quarts de cercles de rayon 1. Au total :

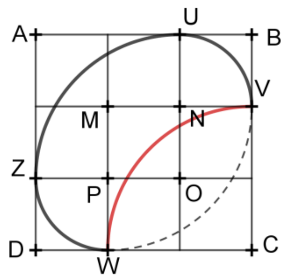
$$p = 2\pi + \pi = 3\pi.$$

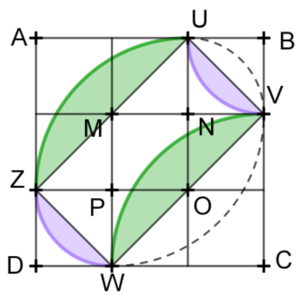
3. La surface de l'ovale peut être décomposée en deux quarts de cercles de rayon 1 et deux quarts de cercles de rayon 2 partiellement superposés (la partie commune est un carré de côté 1). Il s'ensuit que l'aire $\mathcal{A}$ s'exprime ainsi :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\pi \times 1^2 + \frac{1}{2}\pi \times 2^2 - 1^2 = \frac{5}{2}\pi - 1$$

4. Figure faite.

5. On peut, par exemple, remplacer l'arc de cercle de centre M par un arc de cercle de même rayon de centre C. On obtient la figure de droite. Le périmètre est inchangé et l'aire diminue de l'aire de la surface comprise entre les deux arcs, l'ancien et le nouveau.





6. On peut aussi remplacer l'arc de cercle de centre B par l'arc de centre N limité par U et V. On obtient encore une figure de même périmètre. Les aires des surfaces vertes et les aires des surfaces violettes se compensent. La figure créée a donc la même aire que le rectangle UVWZ. Cette aire a pour mesure 4.

Exercice 3. Code EAN

1. Pour juger de la validité du code 4971850187820, on effectue le calcul :

$$S = 4 + 7 + 8 + 0 + 8 + 8 + 3 \times (9 + 1 + 5 + 1 + 7 + 2) = 35 + 3 \times 25 = 110$$

C'est bien 0 qu'il faut ajouter à 110 pour obtenir un multiple de 10.

2. On fait la même suite d'opérations avec $978204732850C$, ce qui donne :

$S = 9 + 8 + 0 + 7 + 2 + 5 + 3 \times (7 + 2 + 4 + 3 + 8 + 0) = 31 + 3 \times 24 = 103.$

Cette fois, c'est 7 qu'il faut ajouter. $C = 7$.

3. Le calcul fait à partir de $32525x7041767$ donne

$S = 3 + 5 + 5 + 7 + 4 + 7 + 3 \times (2 + 2 + x + 0 + 1 + 6) = 31 + 3 \times (11 + x) = 64 + 3x.$

Si on additionne 7 à ce total, on doit trouver un multiple de 10, donc $71 + 3x$ est un multiple de 10.

Finalement $x = 3$.

4. $S = 3 + 4 + 2 + 8 + 8 + 9 + 8 + 3 \times (7 + 2 + 7 + 0 + 5 + 5) = 42 + 3 \times 26 = 120$

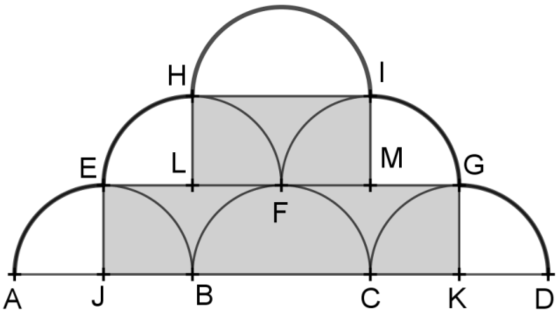
Si on remplace le premier chiffre, 3, par x, et le deuxième, 7, par y, la somme S s'écrit :

$S = 120 - 3 - 3 \times 7 + x + 3y = 96 + x + 3y.$

La somme $x + 3y$ peut donc prendre les valeurs $4, 14, 24$ ou 34.

37 peut donc être remplacé par $08, 11, 40, 24, 53, 82, 37$ (ouf, on l'a retrouvé), $66, 95, 79$.

Exercice 4 Six demi-cercles

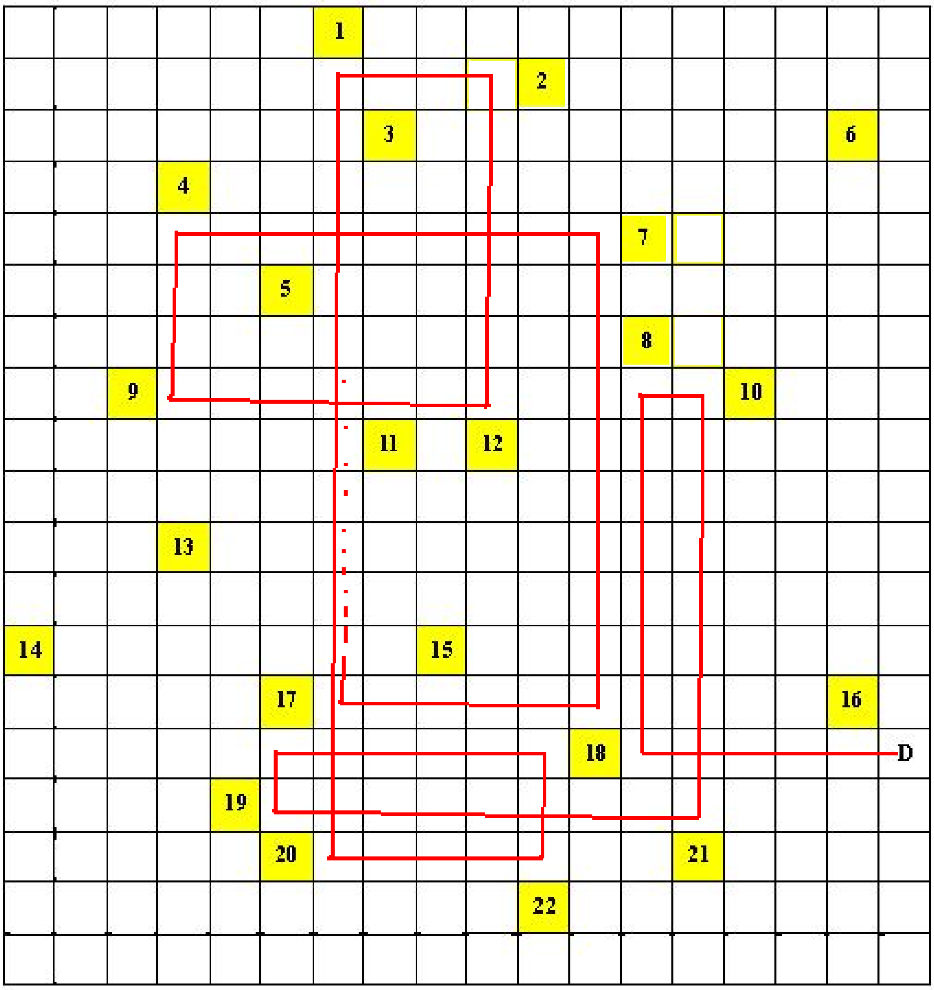


Le domaine peut être décomposé en 6 quarts de disques de rayon 1 et six carrés de côté 1 (grisés).

L'aire totale peut s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{A} = \frac{6}{4}\pi + 6 = \frac{3}{2}\pi + 6$$

Exercice 3 bis Gimkana-le robot



1. Les dix premiers obstacles rencontrés sont :

18 – 8 – 10 – 21 - 19 – 17 – 18 – 22 – 20 – $\boxed{1}$

2. A partir de ce dixième obstacle (donc après les 9 premiers), le robot va faire une boucle de 8 obstacles.
$\boxed{1 – 2 \ - 12 – 9 – 4 – 7 – 18 – 17 –}$ 1 – 2 – etc …

50 = 9 + (8 x 5) + **1**
Le 50$^{\text{ème}}$ obstacle rencontré sera donc le **1**

3. 2019 = 9 + (8 x 251) + **2**
Le 2019$^{\text{ème}}$ obstacle rencontré est le **2** .

Exercice 4 bis

Qu a : l'ordonnée est augmentée de 15

Qu b : 55 est un multiple de 11 (mais pas de 7) donc les points sont multipliés par 3

Qu c : 100 n'est un multiple ni de 11 ni de 7 donc le nombre de points sera augmenté de 10

Qu d-e :

Ordonnée		-155	-140	-125	-110	-95	-80	-65	-50	-35	-20	-5	10	25
Modification des points		+10	x2	+10	x3	+10	+10	+10	+10	x2	+10	+10	+10	+10
Score	0	10	20	30	90	100	110	120	130	260	270	280	290	300
Couleur ballon	BLEU	BLEU	VIOLET	BLEU	**JAUNE**	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU	VIOLET	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU

Ordonnée	40	55	70	85	100	115	130	145
Modification des points	+10	x3	x2	+10	+10	+10	+10	+10
Score	310	930	1860	1870	1880	1890	1900	**1910**
Couleur ballon	BLEU	**JAUNE**	VIOLET	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU

Qu f : l'expérimentation avec scratch donne facilement 5.

Ordonnée		-155	-140	-125	-110	-95	-80	-65	-50	-35	-20	-5	10	25
Modification des points		+a	x2	+a	x3	+a	+a	+a	+a	x2	+a	+a	+a	+a
Score	0	a	2a	3a	9a				13a	26a				
Couleur ballon	BLEU	BLEU	VIOLET	BLEU	JAUNE	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU	VIOLET	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU

Ordonnée	40	55	70	85	100	115	130	145
Modification des points	+a	x3	x2	+a	+a	+a	+a	+a
Score	31a	93a	186a	187a	188a	189a	190a	191a
Couleur ballon	BLEU	JAUNE	VIOLET	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU

la mise en équation donne 191a = 955 soit a = 5

Qu g : l'expérimentation avec scratch permet d'obtenir facilement (en tenant compte de la croissance du nombre de points si on fait varier cette variable) la valeur multiplicative 5.

Ordonnée		-155	-140	-125	-110	-95	-80	-65	-50	-35	-20	-5	10	25
Modification des points		+10	xa	+10	x3	+10	+10	+10	+10	xa	+10	+10	+10	+10
Score	0	10	10a	10a+10	30a+30				30a+70	$30a^2$+70a				
Couleur ballon	BLEU	BLEU	VIOLET	BLEU	JAUNE	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU	VIOLET	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU

Ordonnée	40	55	70	85	100	115	130	145
Modification des points	+10	x3	xa	+10	+10	+10	+10	+10
Score	$30a^2+70a+50$	$90a^2+210a+150$	$90a^3+210a^2+150a$					$90a^3+210a^2+150a+50$
Couleur ballon	BLEU	JAUNE	VIOLET	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU	BLEU

La mise en équation donne $9a^3 + 21a^2 + 15a + 5 = 1730$ soit $(a - 5)(9a^2 + 66a + 345) = 0$ qui n'a qu'une solution réelle (et entière) **a = 5.**

A ce niveau, la recherche au moins par essai erreur peut être entreprise et aboutie mais nécessitera du temps ; cette recherche peut être facilitée par l'utilisation d'un tableur.