Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU VENDREDI 22 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Spécialité **Coefficient : 9**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 1 (6 points) **Commun à tous les candidats**

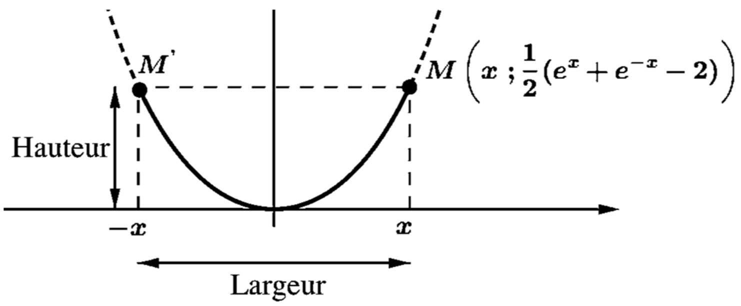
Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.
On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation (E) : $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0$.

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2.$$

   a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $(\mathrm{e}^{x})^2 - 4\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

   c. En posant $X = \mathrm{e}^{x}$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln(2 + \sqrt{5})$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1  faire :
        m ← (a+b)/2
        Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
                b ← m
        Sinon :
                a ← m
        Fin Si
Fin Tant que
```

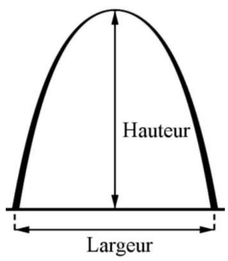
a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.
Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b-a}$
	2	**3**	**1**
$\mathbf{2,5}$			
…	…	…	…

b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

6.

La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$(E') : \ \mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch.*

EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2018]

1. Justifions mathématiquement que le problème se ramène à l'étude de l'équation $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$:

Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse $x > 0$ afin que: la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

Soient L et H la largeur et la hauteur de l'arc de chaînette.

Ici: • $L = x - (-x)$ cad: $L = 2x$;

• $H = y_M - y_O$ cad: $H = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) - 0 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$.

Ainsi: $L = H$ ssi: $2x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$

$\iff 4x = e^x + e^{-x} - 2$

$\iff e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$.

Au total, pour tout $x > 0$, nous avons bien: $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$.

2. a. Vérifions l'égalité demandée:

Pour tout $x > 0$: $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$

$= (e^x - 4x) + e^{-x} - 2$

$= x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$.

Au total, pour tout $x > 0$, nous avons bien: $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2.$

2. b. Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + \frac{1}{e^x} - 2.$$

Or, d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (Théorème des croissances comparées),

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

Et: • $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 = -2.$

Ainsi: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - 4 = +\infty,$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) = +\infty.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 - 2$

$= +\infty.$

Au total: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

3. a. Calculons f' pour $x \in [\,0\,;+\infty\,[$:

Ici: • $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$

• $Df = [\,0\,;+\infty\,[$.

Posons: $h = f_1 + f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$ et $f_3(x) = -4x - 2$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur IR comme fonctions " exponentielles ", donc dérivables sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

f_3 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme somme $(\,f_1 + f_2 + f_3\,)$ de trois fonctions dérivables sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$.

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$.

3. b. Montrons que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $(e^x)^2 - 4\,e^x - 1 = 0$:

Pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, nous avons: $f'(x) = 0 \iff e^x - e^{-x} - 4 = 0$ **(1)**.

En multiplant l'égalité **(1)** par e^x, nous obtenons:

$$e^x \times (e^x - e^{-x} - 4) = e^x \times 0$$

$$\iff e^x \times e^x - e^x \times e^{-x} - 4\,e^x = 0$$

$$\iff (e^x)^2 - 1 - 4\,e^x = 0.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, nous avons bien: $(e^x)^2 - 4\,e^x - 1 = 0$.

3. c. Déterminons la solution de l'équation $f'(x) = 0$, en posant $X = e^x$:

Soit l'équation: $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$ **(2)**.

En posant: $X = e^x$, nous avons: **(2)** $\iff$ $X^2 - 4X - 1 = 0$.

$\Delta = 16 + 4 = 20 > 0$.

D'où 2 solutions dans $\mathbb{R}$:
- $X' = \dfrac{4 - \sqrt{20}}{2}$ cad: $X' = 2 - \sqrt{5} < 0$,
- $X'' = \dfrac{4 + \sqrt{20}}{2}$ cad: $X'' = 2 + \sqrt{5} > 0$.

Comme $X = e^x$, nous avons alors: $\boldsymbol{x = \ln(X)}$.

Nous retiendrons uniquement la solution: X'' car c'est la seule qui est strictement positive.

D'où: $x = \ln(X'')$ **cad**: $x = \ln(2 + \sqrt{5})$.

Au total, $f'(x) = 0$ admet une unique solution: $x = \ln(2 + \sqrt{5})$.

4. a. Dressons le tableau de variations de la fonction f :

Nous pouvons dresser le tableau de variations de la fonction f:

x	0		$\ln(2 + \sqrt{5})$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec:
- $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,
- $b = f(\ln(2 + \sqrt{5})) \Rightarrow b = 2\sqrt{5} - 2 - 4\ln(2 + \sqrt{5})$,

• $c = \lim_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow c = +\infty$.

4. b. Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α strictement positive:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[0; +\infty[$, donc sur $]\ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(\ln(2+\sqrt{5})) = 2\sqrt{5} - 2 - 4\ln(2+\sqrt{5})$

et: $f(+\infty) = +\infty$.

• f est strictement croissante sur $]\ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]\ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$.

Au total: $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$.

5. a. Que contiennent les variables a et b à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

Pour répondre à cette question, nous allons compléter un tableau avec les différentes valeurs prises par les variables a et b, à chaque étape de l'algorithme.

Le tableau complété est le suivant:

m	a	b	b - a
	2	3	1
2, 5	2	2, 5	0, 5
2, 25	2, 25	2, 5	0, 25
2, 375	2, 375	2, 5	0, 125
2, 4375	2, 4375	2, 5	0, 0625

Au total, à la fin de l'exécution de l'algorithme, les variables a et b contiennent les valeurs: $a = 2,4375$ et $b = 2,5$.

5. b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

Les valeurs $a = 2,4375$ et $b = 2,5$ sont telles que: $2,4375 < \alpha < 2,5$.

En d'autres termes, a et b fournissent un encadrement de la valeur de α de la question 4. b., dont l'amplitude n'excède pas 0, 1:

$$\alpha \in \left] 2,4375 \,;\, 2,5 \right[.$$

Au total, les valeurs de a et b sont telles que: $a < \alpha < b$.

6. Donnons un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch:

Soit l'équation: $e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\left(\frac{t}{39}\right) - 2 = 0$ (3).

En posant $x = \frac{t}{39}$, nous avons: (3) $\iff e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$

$\iff f(x) = 0.$

Or l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\ln(2 + \sqrt{5}) ; +\infty[$.

Plus précisément α est tel que: $a < \alpha < b$.

D'où: $a < \alpha < b$.

$\iff a < \frac{t}{39} < b$, car: $x = \alpha = \frac{t}{39}$

$\iff 39 \times a < t < 39 \times b$

$\iff 39 \times 2,4375 < t < 39 \times 2,5$

$\iff 95,0625 < t < 97,5.$

Au total, un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch est:

$$(95,0625)^2 < H < (97,5)^2, \text{ avec: } H = t^2.$$

(la largeur = la hauteur = le double de la solution de l'équation $f(x) = 0$)

Ainsi, nous pouvons conclure en disant que la hauteur de la Gateway Arch est comprise entre **190, 125 mètres** et **195 mètres**.