LIBAN BACCALAUREAT S 2003 Retour vers l'accueil

Exercice 1 : Commun à tous les candidats

Une urne contient 4 boules noires et 2 boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des (n -1) premiers tirages et une boule blanche lors du *n-ième* tirage.

1) Calculez les probabilités p_2 , p_3 et p_4 .

2) On considère les événements suivants :
B_n : " On tire une boule blanche lors du *n-ième* tirage "
U_n : " On tire une boule blanche et une seule lors des n -1 premiers tirages "
a) Calculez la probabilité de B_n .
b) Exprimez la probabilité de l'événement U_n en fonction de n .
c) Déduisez-en l'expression de p_n en fonction de n et vérifiez l'égalité :

$$p_n = \frac{(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n}{4}$$

3) On pose $S_n = p_2 + p_3 + ... + p_n$.
a) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

b) Déterminez la limite de la suite (S_n)

Correction Exercice 1:
Sur un tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est 1/3 et d'obtenir une boule noire est 2/3.
Les tirages sont indépendants.

1. p_2 = Probabilité d'avoir 2 boules blanches = $(1/3)^2$.
   p_3 = Probabilité d'avoir une boule blanche unique dans les 2 premiers tirages puis une blanche
   = 2*(1/3)*(2/3)*(1/3) = 4/27
   p_4 = Probabilité d'avoir une boule blanche unique dans les 3 premiers tirages puis une blanche
   = $3*(1/3)*(2/3)^2*(1/3)$ = 4/27

2. a) L'événement B_n est "obtenir une boule blanche au *n-ième* tirage".
   Comme les résultats des tirages sont indépendants les uns des autres, on a: $P(B_n) = 1/3$
   b) Pour U_n , la boule blanche peut avoir n'importe quelle position dans les (n-1) premiers tirages, les boules autres dans les (n-1) premiers tirages sont noires.
   La dernière boule peut-être quelconque.
   Il y a (n-1) façons de placer la boule blanche patmi les (n-1) premières boules donc:
   $P(U_n) = (n-1)*(1/3)*(2/3)^{n-2}$.
   c) L'événement
   A_n :" exactement une blanche lors des (n -1) premiers tirages et une blanche lors du *n-ième* tirage "
   est l'intersection de U_n et de B_n .
   Ce qu'il se passe lors du dernier tirage est indépendants de ce qu'il est passe lors des (n-1) premiers tirages. Donc U_n et B_n sont indépendants. D'où $P(A_n) = P(B_n)*P(U_n)$.
   D'où $p_n = (n-1)*(1/3)*(2/3)^{n-2}*(1/3) = (n-1)*(2/3)^n/4$.

3. a) Pour $n = 2$, $S_2 = p_2 = (1/9)$ OR $1 - (2/2 + 1)(2/3)^2 = 1/9$.
   L'égalité demandée est donc vraie pour $n = 2$.
   On fait l'hypothèse de récurrence " $S_n = 1 - (n/2 + 1)(2/3)^n$. "
   On remarque alors que $S_{n+1} = S_n + p_{n+1} = 1 - (n/2 + 1)(2/3)^n + n*(2/3)^{n+1}/4$
   D'où , en mettant $(2/3)^n$ en facteur , on a:
   $S_{n+1} = 1 - (2/3)^n[(n/2 + 1) - n(2/3)/4] = 1 - (2/3)^{n+1}[(n+1)/2 + 1]$.
   On peut alors conclure par récurrence.
   b) On sait que $\lim_{x \to +\infty} x a^x = 0 \quad \text{si} \quad a \in]0;1[$. On en déduit alors que $\lim_{n \to +\infty} n(\frac{2}{3})^n = 0$.
   D'où la suite (S_n) converge vers 1

Exercice 2 : Candidat SPECIALITE

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur **N** par :

$x_0 = 3$ et $x_{n+1} = 2x_n - 1$, $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = 2y_n + 3$

1) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$

2) a) Calculez le pgcd de x_8 et x_9 puis celui de x_{2002} et x_{2003} d'autre part .

Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part?

b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3) a) Démontrez que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$

b) Exprimez y_n en fonction de n .

c) En utilisant les congruences modulo 5, étudiez suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d) On note d_n le pgcd de x_n et y_n , pour tout entier naturel n .

Démontrez que l'on a : $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.

En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Correction (indications)

1) Pour n =0 , 2^{n+1} + 1= 2+1 = 3 = x_0 donc la propriété est vraie pour n = 0.

On fait l'hyptothèse de récurrence $x_n = 2^{n+1} + 1$.

$x_{n+1} = 2x_n - 1$ donc $x_{n+1} = 2(2^{n+1} + 1) - 1$ d'où $x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$

Ce qui est bien la propriété à l'ordre (n +1), d'où la conclusion par récurrence.

2) a) et b)

D'après la relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n , on a : $-x_{n+1} + 2x_n = 1$.

Donc, d'après le théorème de BEZOUT, x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux pour tout entier naturel n

3) a) Pour tout entier naturel n , on a:

$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n -1) - (2y_n +3) = 2(2x_n - y_n) - 5$

Donc, si $(2x_n - y_n) = 5$ alors $2x_{n+1} - y_{n+1} = 5$.

Comme $(2x_0 - y_0) = 5$, on peut conclure par une récurrence.

b) Avec la question 1), on a alors : $y_n = 2x_n - 5 = 2^{n+2} - 3$

c) $2^0 = 1$ mod 5 , $2^2 = 2$ mod 5 , $2^2 = 4$ mod 5 , $2^3 = 3$ mod 5 , $2^4 = 4$ mod 5

d'où si $p = 4k$ alors Reste = 1

si $p = 4k + 1$ alors Reste = 2

si $p = 4k + 2$ alors Reste = 4

si $p = 4k + 3$ alors Reste = 3

d) On sait que $(2x_n - y_n) = 5$ donc d divise 5. Comme 5 est premier alors d =1 ou 5.

On en déduit que d = 5 si et seulement si x_n et y_n sont tous les deux divisibles par 5.

Donc, si et seulement si $2^{n+1} + 1$ et $2^{n+2} - 3$ divisibles par 5.

En utilisant le résultat de la question précédente, cela signifie que n est de la forme $n = 4k + 1$.

PROBLEME (11 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliare g

La fonction g est définie sur **R** par : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Etudiez les limites de g en -oo et en +oo.
2. Etudiez le sens de variations de g sur **R** et dressez son tableau de variation.
3. Jusitifiez que l'équation $g(x)=0$ admet dans **R** une solution unique α telle que: $0,94 < \alpha < 0,941$.
4. Etudiez le signe de g sur **R**.

Partie B : Etude d'une fonction *f* .

La fonction *f* est défnie sur **R** par : $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$.
On note (C) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé (O; i , j) .

1. Etudiez le signe de *f* sur **R**.
2. Etudiez les limites de *f* en -oo et en +oo.
3. Calculez $f'(x)$, où *f* désigne la fonction dérivée de *f* , et vérifiez que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dressez le tableau de variations de *f*.
4. a) Démontrez l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{(2\alpha-7)}$

   b) Etudiez le sens de variation de la fonction $h : x \rightarrow \dfrac{(2x-5)^2}{(2x-7)}$ sur l'intervalle]-oo ; 2,5[

   En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie **A**, en encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
5. Démontrez que la droite (D) d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à (C) en +oo. Préciser la position de (C) par rapport à (D).
6. Tracez la droite (D) et la courbe (C) dans le repère (O ; i , j)(unité graphique 2cm)

Partie C : Calcul d'aire

A l'aide d'une intégration par parties, calculez en cm² l'aire *A* de la portion du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordoonnées et la droite d'équation $x = 2,5$.

Partie D : Etude d'une suite de rapport de distance

Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on considère les points A_n , B_n et C_n d'abscisse n appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite (D) et à la courbe (C).

Soit u_n le réel défini par : $u_n = \dfrac{C_nB_n}{A_nB_n}$

1. Démontrez que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a : $u_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5}$
2. a) Quelle est la nature de la suite (u_n)?

   b) Calculez la limite de la suite (u_n). Pouvait-on prévoir ce résultat?

<u>Correction du Problème:</u>

<u>Partie A:</u>

1. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

2. g est somme de 2 fonctions strictement croissante sur **R** donc g est strictement croissante sur **R**.
   On peut aussi calculer la dérivée de g sur **R** et voir que celle-ci est strictement positive.

3. D'après les limites de g en +oo et -oo, comme g est continue sur **R**, d'après le thèorème des valeurs intermédiaires, on peut dire qu'il existe un réel α tel que $g(\alpha)=0$.
   Comme g est strictement croissante sur **R**, cette valeur α est unique.
   De plus, pour $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et pour $x > \alpha$, $g(x) > 0$.
   Un simple calcul machine montre que $g(0,94) < 0$ et $g(0,941) > 0$ d'où $0,94 < \alpha < 0,941$.
4. Voir au-dessus.

<u>Partie B.</u>

1. $f(x) < 0$ sur]0 ; 2,5[et $f(x) \geq 0$ sur]-oo;0] ∪ [2,5 ; +oo[.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3. $f'(x) = 2(1-e^{-x}) + (2x-5)(e^{-x}) = 2-7e^{-x}+2xe^{-x} = e^{-x}(2e^{x} + 2x - 7) = e^{-x}g(x)$.
   Comme $e^{-x} > 0$ sur **R**, on en déduit que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.
   On connait le tableau de signes de $g(x)$ (voir partie **A**), donc celui de f', donc le tableau de variations de f sur **R** .

4. a) α vérifie $g(\alpha) = 0$ donc on a : $e^{-\alpha} = -\dfrac{2}{2\alpha - 7}$.

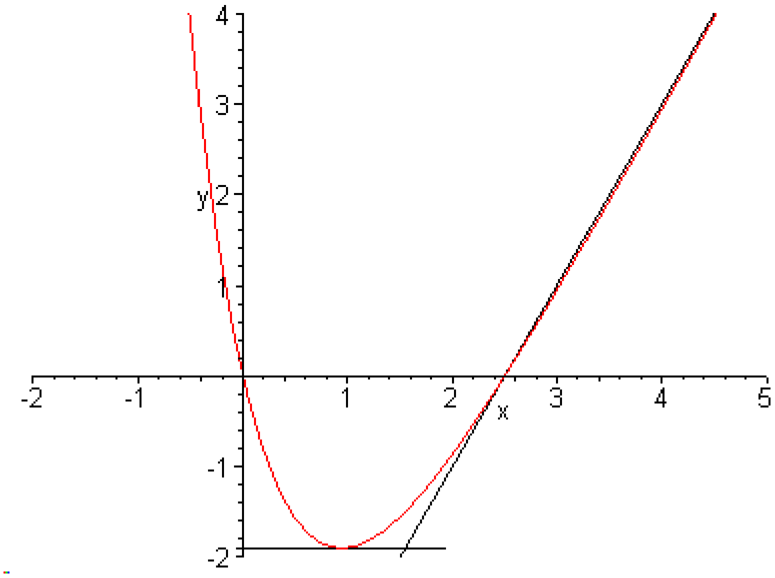
   D'où, $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha}) = (2\alpha - 5)(1 + \dfrac{2}{2\alpha - 7}) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{(2\alpha - 7)}$

   b) On vérifie sans peine que la dérivée de h est définie par : $h'(x) = 2\dfrac{(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$

   D'où $h'(x) > 0$ sur]-oo ; 2,5 [d'où h est strictement croissante sur cet intervalle.
   Comme $0,94 < \alpha < 0,941$, on a $h(0,94) < h(\alpha) < h(0,941)$ d'où, par exemple,
   $-1.905 < h(\alpha) < -1,895$.

5. $f(x) - (2x-5) = -(2x-5)e^{-x} = -2xe^{-x} + 5e^{-x}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$
   on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-5)] = 0$. Donc la droite (D) est bien asymptote à (C) en +oo.
   De plus, $f(x) - (2x-5) >$ 0 sur]-oo ; 2,5[et < 0 sur]2,5 ; +oo[donc
   (D) est en-dessous de (C) sur]-oo ; 2,5[et au-dessus de (C) sur]2,5 ; +oo[.

6.



Partie C.

L'aire demandée est : $A = -4\left(\int_0^{2,5} f(x)dx\right)$ cm ^{2}. Pour calculer l'intégrale qui intervient ici, on effectue une intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^{2,5}(2x-5)(1-\mathrm{e}^{-x})dx &= [(2x-5)(x+e^{-x})]_0^{2,5} - \int_0^{2,5} 2(x+\mathrm{e}^{-x})dx \\ &= [(2x-5)(x+\mathrm{e}^{-x})]_0^{2,5} - [x^2 - 2\,\mathrm{e}^{-x}]_0^{2,5} \\ &= -\frac{13}{4} + 2\,\mathrm{e}^{-2,5}\end{aligned}$$

D'où l'aire : $A = (13 - 8e^{-2,5})$cm² .

Partie D.

1. Question sans difficulté, il suffit de connaître les coorodnnées des points considérés et de faire le calcul!

2. a) Après simplication de l'expression de u_n , on a : $u_n = e^{-n}$.

   b) Cette suite donc géométrique de raison e^{-1} . Elle converge donc vers 0 car $|e^{-1}| < 1$.
   Comme (D) est asymptote à (C)........