Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** $v_n = \dfrac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}$.

   Or $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = 1$.

   Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

   b. Pour tout naturel $\mathrm{N} > 0$, $n+1 > n \Rightarrow \dfrac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 > 1 \iff v_n > \dfrac{1}{2}$.

   c. $v_n < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{n+1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} \iff n+1 < \sqrt{\frac{3}{2}}n \iff n\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) > 1 \iff n > \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} \approx 4,44$. Il faut prendre $N = 4$.

   d. On vient de démontrer que pour $n > 4$, alors $v_n < \frac{3}{4} \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4} \iff u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

2. **a.** • *Initialisation*

   Pour $n = 5$, on a vu que $u_6 < \frac{3}{4}u_5$. La relation est vraie au rang 5.

   • *Hérédité*

   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$ on ait $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

   On a $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$ soit $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ ou encore $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5$ soit enfin $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$.

   L'hérédité est démontrée.

   La propriété est vraie au rang 5 et si elle est vraie à un rang quelconque supérieur ou égal à 5, elle est vraie au rang suivant.

   Conclusion : par le principe de la récurrence, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

   b. On a $u_5 \leqslant u_5$, $u_6 \leqslant \frac{3}{4}u_5, \ldots, u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

   En sommant toutes ces inégalités on obtient :

   $S_n \leqslant u_5 + \frac{3}{4}u_5 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ ou après factorisation :

   $S_n \leqslant u_5\left(1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right)$.

   La parenthèse est la somme des $(n-5)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{4}$.

   $S_n = u_5 \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}} = 4u_5\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right)$.

   c. Puisque $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} < 1$, on a $S_n \leqslant 4u_5$.

3. De façon évidente : $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$: la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est donc croissante. Comme elle est majorée par $4u_5$ elle converge vers une limite $\ell \leqslant 4u_5$.

EXERCICE 2 **6 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a. comprise entre 50 et 100 km;

Cette probabilité est égale à $\displaystyle\int_{50}^{100} \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\right]_{50}^{100} = -\mathrm{e}^{-\frac{100}{82}} + \mathrm{e}^{-\frac{50}{82}} \approx 0,248$

b. supérieure à 300 km.

On calcule la probabilité de parcourir moins de 300 km ou 300 km qui est $\displaystyle\int_{0}^{300} \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\right]_{0}^{300} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{300}{82}}$.

La probabilité de parcourir plus de 300 km est donc égale à $\mathrm{e}^{-\frac{300}{82}} \approx 0,026$

2. On calcule $p_{(D \geqslant 350)}(D \geqslant 375) = p(D \geqslant 25) = \mathrm{e}^{-\frac{25}{82}} \approx 0,737$.

3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.

a. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}$, d'où

$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}$.

Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$. On peut donc intégrer par parties :

$\mathrm{I}(A) = \left[-x\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A + \displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}} + 82\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A = \mathrm{e}^{-\frac{A}{82}}(-82-A)+82.$

b. On a $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{82}{\mathrm{e}^{\frac{A}{82}}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{\mathrm{e}^{\frac{A}{82}}} = 0$, donc finalement :

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{I}(A) = 82$.

La distance moyenne parcourue sans un incident est de 82 jours.

4. a. On a un schéma de Bernoulli avec comme paramètres N_0 et de probabilité $\mathrm{e}^{\frac{d}{82}}$

La variable X_d prend comme valeur le nombre de « succès » au cours des N_0 épreuves.

b. L'espérance de X_d est égale à $\mathrm{N}_0\mathrm{e}^{\frac{d}{82}}$

EXERCICE 2 **6 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Éléments de symétrie de la surface **T**.

a. Si $z = x^2y$, alors $z = (-x)^2y$.

Les points $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $(-x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont symétriques autour du plan $y\mathrm{O}z$ d'équation $x = 0$.

b. Si $z = x^2y$, alors $-z = (-x)^2(-y)$, ce qui montre que le point $(-x\ ;\ -y\ ;\ -z)$ appartient lui aussi à la surface. Le point O est donc un centre de symétrie de **T**.

2. Intersections de la surface **T** avec des plans parallèles aux axes.

a. Soit $y = a$ l'équation d'un plan parallèle au plan $(x\mathrm{O}z)$. Les coordonnées des points communs à ce plan et à **T** vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z &=& x^2y \\ y &=& a \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z &=& ax^2 \\ y &=& a \end{array}\right.$$

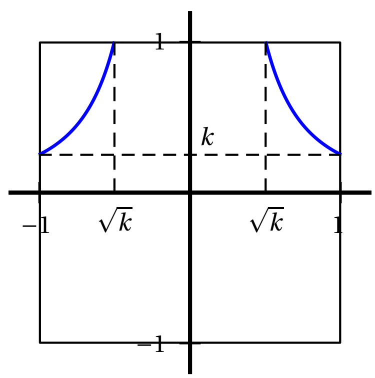
- Si $a < -1$ ou si $a > 1$, l'intersection est vide;
- Si $1 \leqslant a \leqslant 1$ ceci représente l'équation d'une parabole d'axe Oz (sauf si $a = 0$). L'intersection est l'arc de parabole limité aux points d'abscisse -1 et 1.

b. Soit $x = b$ l'équation d'un plan parallèle au plan (yOz). Les coordonnées des points communs à ce plan et à **T** vérifient :
$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & x^2 y \\ x & = & b \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & b^2 y \\ x & = & b \end{array}\right.$
Ceci représente l'équation d'une droite contenant O dans le plan parallèle au plan (yOz). L'intersection est donc un segment limité aux points d'ordonnées -1 et 1 (sauf si $b = 0$).

3. a. Les coordonnées des points communs à la surface **T** et au plan d'équation $z = 0$ vérifient :
$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & x^2 y \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & x^2 y \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & x \\ z & = & 0 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$
Ceci représente les axes Ox et Oy.

b. Les points communs à **T** et au plan d'équation $z = k$ ont des coordonnées qui vérifient :
$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & x^2 y \\ z & = & k \end{array}\right.$ soit $x^2 y = k \iff y = \dfrac{k}{x^2}$.
Comme $0 \leqslant k \leqslant 1$, cette courbe est limitée à un arc d'extrémités $(-1\ ;\ k\ ;\ k)$ et $(1\ ;\ k\ ;\ k)$.

c. Exemple de tracé avec $k = 0,25$:



4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface **T**.

$$(\mathrm{D}) = M(x,\ y,\ z) \in (E) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ ;\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 y.$$

a. L'ensemble des points et défini par :

$$\sqrt{k} \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{k}{y^2} \leqslant y \leqslant 1$$

Son aire est $S(k)v = \displaystyle\int_{\sqrt{k}}^{1} \left(1 - \frac{k}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \left[x + \frac{k}{x}\right]_{\sqrt{k}}^{1} = 1 + k - \sqrt{k} - \frac{k}{\sqrt{k}} =$
$1 + k - 2\sqrt{k} = \left(1 - \sqrt{k}\right)^2$.

b. On rappelle que $V = \displaystyle\int_0^1 S(k)\,\mathrm{d}k = \int_0^1 \left(1 + k - 2\sqrt{k}\right)\mathrm{d}k$.
Or $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$ dont une primitive est $\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}$, donc :
$V = \left[x + \frac{k^2}{2} - \frac{4}{3}k^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9-8}{6} = \dfrac{1}{6}$ (u. a.).

Problème **9 points**

$$f(x) = 1 + x\ln(x+2).$$

I. Étude de la fonction f

1. **a.** f est dérivable car somme de fonctions composées dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$;
$f''(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x+2-x}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{(x+2)^2}$.

 b. $f''(x)$ est une somme de termes positifs, donc est positive ; il s'ensuit que $f'(x)$ est croissante sur $]-2\ ;\ +\infty[$.

 c. $\lim\limits_{x\to-2} \ln(x+2) = -\infty$ et comme $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x}{x+2} = -\infty$, on a donc $\lim\limits_{x\to-2} f'(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.
Conclusion $f'(x)$ est croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc s'annule une seule fois sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

2. Étude du signe de $f'(x)$.

 a. On a $f'(-0,6) = 1 - 0,6\ln 1,4 \approx -0,09$ et $f'(-0,5) = 1 - 0,5\ln 1,5 \approx 0,07$ la fonction f' est continue car dérivable et strictement croissante sur $]-0,6\ ;\ -0,5[$: elle s'annule donc une seule fois sur cet intervalle en α avec $-0,6 < \alpha < -0,5$.

 b. On en déduit que :
 - sur $]-2\ ;\ \alpha[$, $f'(x) < 0$;
 - $f'(\alpha) = 0$;
 - sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$.

3. Étude des variations de f

 a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$. Le résultat précédent montre que :
 - sur $]-2\ ;\ \alpha[$, f est décroissante
 - $f(\alpha) = 1$ est le minimum de la fonction
 - sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, f est croissante.

 b. • On a $\lim\limits_{x\to-2} \ln(x+2) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = +\infty$ (par produit par -2 ;
 • On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x+2) = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

 c. On a donc le tableau de variations suivant :

x	-2		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

II. Position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à ses tangentes

1. Étude des variations de d.

 a. $d(x) = f(x) - \left[f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\right]$; d est une somme de fonctions dérivables sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$d'(x) = f'(x) - 1f'(x_0) = f'(x) - f'(x_0)$.

b. On a vu que f' est croissante sur $]-2\ ;\ +\infty[$, donc :

- si $x < x_0$, $f'(x) < f'(x_0) \iff d'(x) < 0$;
- si $x > x_0$, $f'(x) > f'(x_0) \iff d'(x) > 0$.

d est donc décroissante sur $]-2\ ;\ x_0[$ et croissante sur $]x_0\ ;\ +\infty[$ avec bien entendu $d(x_0) = 0$ qui est le minimum de la fonction. Par conséquent $d(x) \geqslant 0$ sur $]-2\ ;\ +\infty[$.

2. Le résultat précédent signifie géométriquement que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est au dessus de la tangente T_{x_0}, quel que soit x_0 : la courbe est donc au dessus de ses tangentes.

III. Tracés dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$

1. Déterminer une équation de la droite T_0, tangente On sait qu'une équation de la tangente à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse x_0 est

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; donc pour $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 1$ (on sait que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$) et $f'(x_0) = \ln 2$:

$M(x\ ;\ y) \in T_0 \iff y = \ln 2\,(x - 0) + 1 \iff y = x \ln 2 + 1$.

2. T_{x_0} d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ contient l'origine si pour $x = 0$, $y = 0$, soit

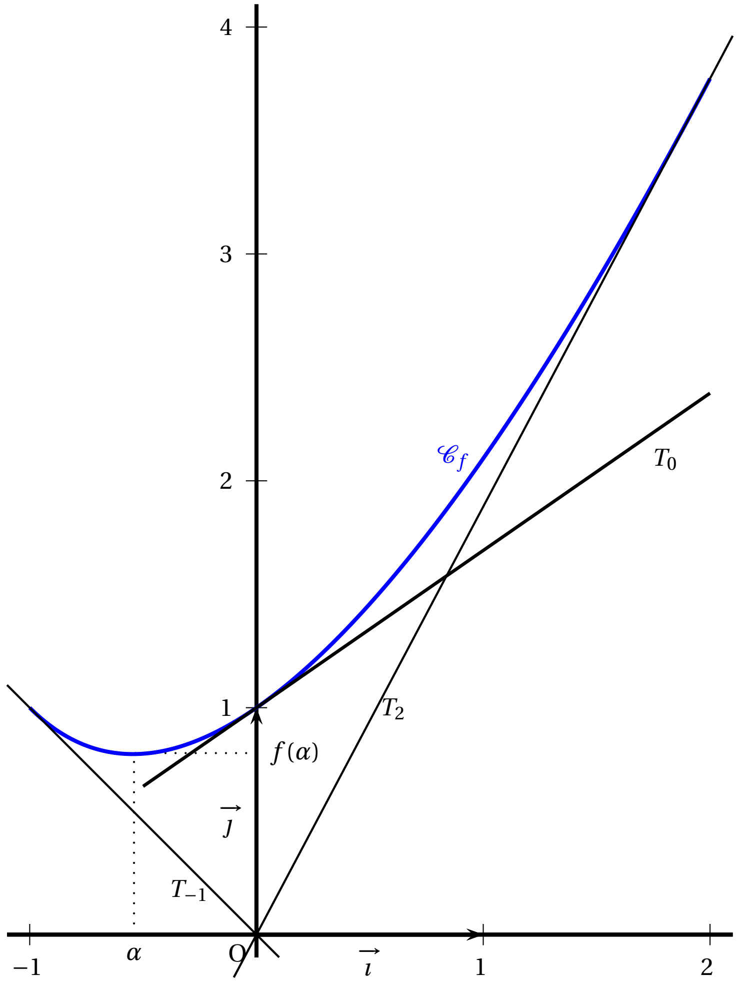
$0 = -x_0 f'(x_0) + f(x_0) \iff -x_0\left[\ln(x_0 + 2) + \dfrac{x_0}{x_0 + 2}\right] + 1 + x_0 \ln(x_0 + 2) \iff -\dfrac{x_0^2}{x_0 + 2} + 1 = 0 \iff -x_0^2 + x_0 + 2 = 0$.

Une solution évidente de cette équation est -1, l'autre, un peu moins, est 2.

Il y a donc deux tangentes contenant O ; celle au point d'abscisse -1 d'équation $y = -x$ et celle au point d'abscisse 2 d'équation

$y = \left(\ln 4 + \dfrac{1}{2}\right)x$.

3.



4
3
2
1
$\mathscr{C}_f$
T_0
T_2
$f(\alpha)$
$\overrightarrow{\jmath}$
T_{-1}
−1
α
O
$\overrightarrow{\imath}$
1
2