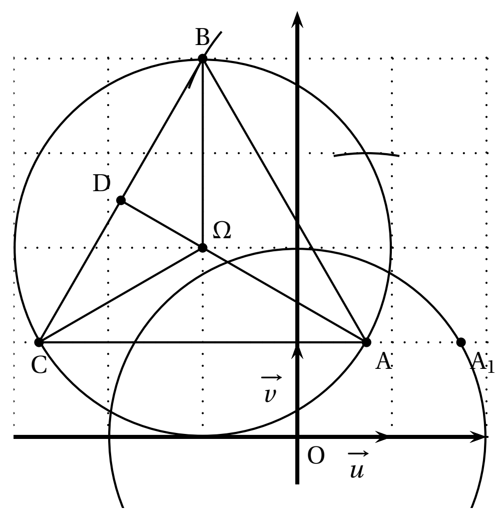
∽ Corrigé du baccalauréat Métropole S ∾ septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit A_1 le point d'affixe $a_1 = \sqrt{3} + \text{i}$.
   On a $|a_1|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, donc $|a_1| = 2$.
   On peut écrire $a_1 = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$. On peut donc placer le point A_1 d'ordonnée positive en traçant le cercle centré à l'origine de rayon 2 et la droite d'équation : $x = -1$. Le point A s'en déduit par la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.
   Le point Ω se place simplement.
   On peut placer B en reportant dans le sens direct deux rayons ΩA à partir de A, de même pour C en partant de B.
   Le point D s'obtient en construisant d'abord le milieu de [AΩ].



   L'écriture complexe de la rotation est $z' - (-1+2\text{i}) = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}\left[z - (-1+2\text{i})\right] \iff z' = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} z + (-1+2\text{i})\left(1 - \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}\right) \iff z' = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2} + \text{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\right)$.
   Avec cette formule on obtient $b = -1 + 4\text{i}$, puis $c = -1 - \sqrt{3} + \text{i}$
   Pour l'homothétie, on a $\overrightarrow{\Omega D} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\Omega A}$. Or $\overrightarrow{\Omega A}$ $(-1+\sqrt{3}+\text{i}+1-2\text{i}$, soit $\overrightarrow{\Omega A}$ $(\sqrt{3}-\text{i})$, donc $\overrightarrow{\Omega D}$ $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right)$.
   D'où D() $-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}\text{i}$.
2. On note b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

1.

$\lvert a-\omega\rvert$	2	4	$\sqrt{3}-\text{i}$
	VRAI	FAUX	FAUX

On a : $|a - \omega| = |-1 + \sqrt{3} + \text{i} + 1 - 2\text{i}| = |\sqrt{3} - \text{i}| = \sqrt{3+1} = 2$. Seule la première réponse est vraie.

2.	$\arg(a-\omega)$	$-\dfrac{5\pi}{6}$ FAUX	$\dfrac{47\pi}{6}$ VRAI	$\dfrac{\pi}{6}$ FAUX

$a-\omega=\sqrt{3}-\text{i}=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}\right)=2\text{e}^{-\frac{\pi}{6}}$.

Donc $\arg(a-\omega)=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$. Avec $k=24$, on a bien un argument de $\dfrac{47\pi}{6}$. Seule la deuxième réponse est vraie.

3.	$\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\Omega\text{C}}\right)=$	$\arg[(\omega-c)\text{i}]$ VRAI	$-\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\text{C}\Omega}\right)$ VRAI	$\dfrac{2\pi}{3}$ VRAI

On a vu que B et Ω ont la même abscisse, donc (BΩ) est parallèle à l'axe des ordonnées : l'angle cherché est donc celui de la rotation soit $\dfrac{2\pi}{3}$.

On peut calculer $\omega-c=-1+\text{i}\sqrt{3}$ qui a pour module $\dfrac{2\pi}{3}$ modulo 2π ou dire que $\arg[(\omega-c)\text{i}]=\arg(\omega-c)+\arg(\text{i})=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\pi}{3}$.

On a aussi $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\Omega\text{C}}\right)=\left(-\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\text{C}\Omega}\right)$ car ils sont opposés par le sommet.

Conclusion : les trois affirmations sont vraies.

4.	$\omega=$	$\dfrac{1}{3}(a+b+c)$ VRAI	$a+b+c$ FAUX	$b-2\text{i}$ VRAI

On peut faire le calcul et vérifier que $\dfrac{1}{3}(a+b+c)=\omega$, soit montrer que le triangle ABC est équilatéral en calculant $|a-b|=\left|\sqrt{3}-3\text{i}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, puis $|a-c|=\left|2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$ et enfin $|b-c|=|\sqrt{3}+3\text{i}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

D'autre part $b-2\text{i}=-1+4\text{i}-2\text{i}=-1+2\text{i}=\omega$.

Les affirmations 1 et 3 sont vraies, la 2 est fausse.

5.	$\dfrac{b-d}{a-d}=$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$ FAUX	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$ FAUX	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$ VRAI

On peut calculer $\dfrac{b-d}{a-d}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$.

Seule l'affirmation 3 est vraie.

6.	Le point D est	l'image de Ω par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{A}\Omega}$ VRAI	l'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$ VRAI	l'image de Ω par la la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ FAUX

Par définition de l'homothétie : $\overrightarrow{\Omega\text{D}}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\Omega\text{A}} \iff \overrightarrow{\Omega\text{A}}+\overrightarrow{\text{AD}}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\Omega\text{A}} \iff$ $\overrightarrow{\text{AD}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\text{A}\Omega}$.

Donc les affirmations 1 et 2 sont vraies.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Si l'on suppose que le nombre de pièces dans les caisses est assez grand pour que l'on peut puisse considérer que les 20 épreuves se déroulent dans les mêmes conditions, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,40 = \dfrac{2}{5}$.
La probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère est égale à :
$p(\mathrm{X} = 5) = \dbinom{20}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^5\left(\dfrac{3}{5}\right)^{20-5} \approx 0{,}0746 \approx 0,075.$

b. On a $p(X \geqslant 2) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) - p(\mathrm{X} = 1) = 1 - (0,6)^{20} - \dbinom{\times}{0}, 4 \times 0,6^{19} \approx 0{,}9995.$

2. **a.** Il y a trois fois plus de pièces provenant de la caisse « journaux » que de pièces provenant de la caisse « souvenirs », donc $\mathrm{P(S)} = \dfrac{1}{4}$.
Il y a 40 % de pièces étrangères dans la caisse « journaux », donc
$\mathrm{P_S(E)} = 0,4 = \dfrac{2}{5}$.
On a $\mathrm{P(S \cap E) = P(S) \times P_S(E)} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}$.

b. On a $\mathrm{P(E) = P(S \cap E) + P\left(\overline{S} \cap E\right)}$.
Or $\mathrm{P}\left(\overline{S}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.
8 % des pièces de la caisse « journaux » ont une face étrangère, donc
$\mathrm{P_{\overline{S}}(E)} = 0,08$.
On a donc $\mathrm{P(E)} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{4} \times 0,08 = 0,1 + 0,06 = 0,16$.

c. On cherche $\mathrm{P_E(S)} = \dfrac{\mathrm{P(S \cap E}}{\mathrm{P(E)}} = \dfrac{0,1}{0,16} = \dfrac{1}{16} = 0,625$.

3. On suppose encore que le nombre de pièces est assez grand pour que les évènements soient indépendants et que la probabilité de tirer une pièce étrangère est égale à 0,16.
Le nombre de pièces étrangères est une variable aléatoire de paramètres n et $p = 0,16$.
La probabilité de n'avoir aucune pièce étrangère est égale à $0,84^n$, donc la probabilité d'en avoir au moins une est égale à $1 - 0,84^n$.
On cherche donc à résoudre : $1 - 0,84^n \geqslant 0,9 \iff 0,84^n \leqslant 0,1 \iff n \ln 0,84 \leqslant \ln 0,1$(par croissance de la fonction ln) $\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,86}$ soit $n \geqslant 13,2$ (environ).
Il faut donc prélever au moins 14 pièces.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** 123 et 2 003 sont premiers entre eux ; u et v existent donc. Par divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{rcl}
2\,003 & = & 123 \times 16 + 35 \\
123 & = & 35 \times 3 + 18 \\
35 & = & 18 \times 1 + 17 \\
18 & = & 17 \times 1 + 1
\end{array}$$

En remontant les égalités :

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & 18 - 17 \\
1 & = & 18 - (35 - 18) = 2 \times 18 - 35 \\
1 & = & 2[123 - 35 \times 3] - 35 = 2 \times 123 - 7 \times 35 \\
1 & = & 2 \times 123 - 7[2003 - 123 \times 16] = 114 \times 123 - 7 \times 2003
\end{array}$$

On a donc $u = 114$ et $v = -7$.

b. D'après la question précédente $114 \times 123 - 7 \times 2003 = 1 \iff 114 \times 123 = 7 \times 2003 + 1 \iff 114 \times 123 \equiv 1 \mod 2003$.

Donc $k_0 = 114$.

c. • Soit un entier x tel que $x \equiv 456k_0 \ [2003] \quad (1)$.
On vient de démontrer que $k_0 \times 123 \equiv 1 \mod 2003 \Rightarrow$
$k_0 \times 123 \times 456 \equiv 1 \times 456 \mod 2003 \quad (2)$
(1) et (2) entraînent par différence :
$123\,(x - 456k_0) \equiv 0 \mod 2003$; or 123 et 2003 sont premiers entre eux, donc $x - 456k_0 \equiv 0 \mod 2003 \iff x \equiv 456k_0 \mod 2003$.

• Inversement si $x \equiv 456k_0 \mod 2003$, d'après le **b.**, on a $123k_0 \equiv 1 \mod 2003 \Rightarrow 456 \times 123k_0 \equiv 456 \times 1 \mod 2003$.
Mais $x \equiv 456k_0 \mod 2003 \Rightarrow 123x \equiv 123 \times 456k_0 \mod 2003$.
Donc $123x - 466 \equiv 0 \mod 2003 \iff 123x \equiv 466 \mod 2003$.

$$\text{Conclusion : } 123x \equiv 466 \mod 2003 \iff x \equiv 456k_0 \mod 2003$$

d. D'après le résultat précédent les entiers x vérifient $x \equiv 456k_0 \mod 2003$, soit encore $x \equiv 456 \times 14 \mod 2003$.
Donc $x = 456 \times 114 + 2003k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Or $456 \times 114 = 51\,984 = 25 \times 2003 + 1\,909$, on a finalement :

$$x = 1\,909 + 2\,003k', \text{ avec } k' \in \mathbb{Z}$$

e. L'entier n tel que $123n \equiv 456 \mod 2003$ et $1 \leqslant n \leqslant 2002$ est un nombre x de la question précédente. Il est donc de la forme $n = 1\,909 + 2\,003k'$, avec $1 \leqslant 1\,909 + 2\,003k' \leqslant 2\,002$.
Les inégalités sont équivalentes à :
$-1\,908 \leqslant 2\,003k' \leqslant 93 \iff -\dfrac{1\,908}{2\,003} \leqslant k' \leqslant \dfrac{93}{2\,003}$.
La seule valeur possible de k' est 0 et par conséquent il existe un unique $n = 1\,909$.

2. **a.** 2 003 premier est premier avec tous les naturels qui lui sont inférieurs, donc ici avec a ; donc PGCD$(a,\ 2\,003) = 1$.

$$am \equiv 1 \ [2003].$$

a et 2 003 étant premiers entre eux, il existe deux entiers m et n tels que :
$am + 2003n = 1 \equiv am = 1 - 2003n \iff am \equiv 1 \mod 2003$.

b. On vient de voir que $am \equiv 1 \mod 2003$ d'où par produit par b, $bam \equiv b \mod 2\,003$.
Si $ax \equiv b \mod 2003$ avec $0 \leqslant x \leqslant 2002$ on obtient par différence :
$ax - abm \equiv 0 \mod 2003$ ou encore $a(x - bm) \equiv 0 \mod 2003$, avec $0 \leqslant x \leqslant 2002$.
On en déduit que $a(x - bm)$ est divisible par 2 003, mais comme a ne divise pas 2 003, c'est $x - bm$ qui le divise, donc finalement :
$x - bm \equiv 0 \mod 2003 \iff x \equiv bm \mod 2003$.
Par division euclidienne $bm = 2003q + r$, avec $r < 2003$, donc $x \equiv r \mod 2003$.
L'entier r est un des nombres cherchés. Est-ce le seul ?
Supposons qu'il existe un autre entier r' tel que $ar' \equiv b \mod 2003$ et $0 \leqslant r' \leqslant 2002$. Comme $ar \equiv b \mod 2003$, on obtient par différence :
$a(r - r') \equiv 0 \mod 2003$ et donc toujours d'après le théorème de Gauss, $r - r'$ divise 2 003.
Or $0 \leqslant r' \leqslant 2002 \iff -2002 \leqslant -r' \leqslant 0$ et en ajoutant membres à membres avec $0 \leqslant r \leqslant 2002$ on obtient $-2002 \leqslant r - r' \leqslant 2002$. Le seul nombre multiple de 2 003 dans cet intervalle est 0 ; on en déduit que $r - r' = 0 \iff r = r'$.
Conclusion, l'entier r est bien unique.

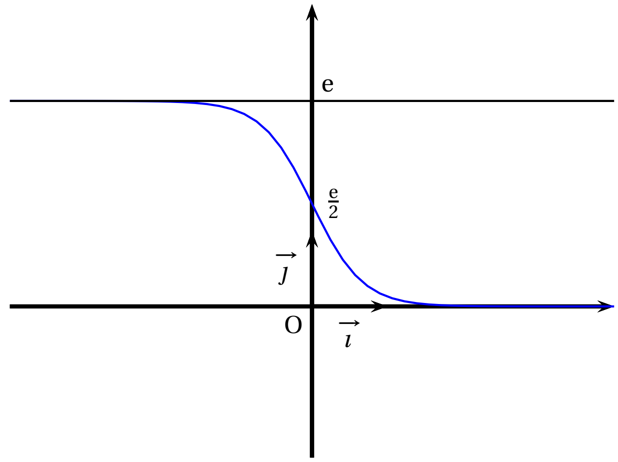
PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : Une équation différentielle

1. $f(x) = \text{e}^{-3x}\varphi(x) \iff \varphi(x) = f(x)\text{e}^{3x}$.
   La fonction φ est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $\varphi'(x) = f'(x)\text{e}^{3x} + 3f(x)\text{e}^{3x}$.
   Donc $\varphi'(x) - 3\varphi(x) = f'(x)\text{e}^{3x} + 3f(x)\text{e}^{3x} - 3(f(x)\text{e}^{3x}) = f'(x)\text{e}^{3x}$.
2. φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\varphi'(x) - 3\varphi(x) = \dfrac{-3\text{e}}{\left(1+\text{e}^{-3x}\right)^2}$ et d'après la question précédente si et seulement si $f'(x)\text{e}^{3x} = \dfrac{-3\text{e}}{\left(1+\text{e}^{-3x}\right)^2} \iff$ $f'(x) = \dfrac{-3\text{e}\text{e}^{-3x}}{\left(1+\text{e}^{-3x}\right)^2}$.
   En posant $u(x) = 1 + \text{e}^{-3x}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $u'(x) = -3\text{e}^{-3x}$.
   Donc $f'(x) = \text{e}\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$ qui est la fonction dérivée de la fonction $f(x) = -\text{e}\dfrac{1}{u(x)} + K = -\text{e}\dfrac{1}{1+\text{e}^{-3x}} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$.
   Si on a $\varphi(0) = \dfrac{\text{e}}{2}$, alors $f(0) = \text{e}^{-3\times 0}\varphi(0) = -\text{e}\dfrac{1}{1+\text{e}^{-3\times 0}} + K \iff \dfrac{\text{e}}{2} = -\dfrac{\text{e}}{2} + K \iff K = \text{e}$.
   Donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = -\text{e}\dfrac{1}{1+\text{e}^{-3x}} + \text{e} = \dfrac{-\text{e}+\text{e}\left(1+\text{e}^{-3x}\right)}{1+\text{e}^{-3x}} = \dfrac{\text{e}^{1-3x}}{1+\text{e}^{-3x}}$.

Partie B : étude d'une fonction

1. • Au voisinage de moins l'infini : on peut écrire
   $f(x) = \text{e}\dfrac{\text{e}^{-3x}}{1+\text{e}^{-3x}} = \text{e}\dfrac{\text{e}^{-3x}\times 1}{\text{e}^{-3x}\left(\text{e}^{3x}+1\right)} = \dfrac{\text{e}}{\text{e}^{3x}+1}$.
   Donc comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{e}^{3x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \text{e}$.
   • Au voisinage de plus l'infini : $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{-3x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}\text{e}^{-3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \text{e}^{-3x} = 1$ et finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   • Variations de f : f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; comme le dénominateur est supérieur ou égal à 1, il ne s'annule pas et la fonction f est dérivable.
   $f'(x) = \dfrac{-3\text{e}^{1-3x}\left(1+\text{e}^{-3x}\right) - (-3)\text{e}^{1-3x}\text{e}^{-3x}}{\left(1+\text{e}^{-3x}\right)^2} = \dfrac{\text{e}^{1-3x}\left(-3-3\text{e}^{-3x}+3\text{e}^{-3x}\right)}{\left(1+\text{e}^{-3x}\right)^2} = \dfrac{-3\text{e}^{1-3x}}{\left(1+\text{e}^{-3x}\right)^2}$.
   Comme le dénominateur est positif, que $\text{e}^{1-3x} > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est donc décroissante de e à 0.
2.



3. **a.** Comme $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, I_α est égale à l'aire en unités d'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. C'est donc un nombre positif.

   b. $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}\,dx = e\int_0^\alpha \frac{e^{-3x}}{1+e^{-3x}}\,dx =$
   $-\dfrac{e}{3}\displaystyle\int_0^\alpha \frac{-3e^{-3x}}{1+e^{-3x}} = -\frac{e}{3}\left[\ln\left|1+e^{-3x}\right|\right]_0^\alpha$
   $= -\dfrac{e}{3}\left[\ln\left|1+e^{-3\alpha}\right| - \ln|1+1|\right] = -\dfrac{e}{3}\ln\left(\dfrac{1+e^{-3\alpha}}{2}\right)$.

   c. Comme $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} e^{-3\alpha} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = \frac{e\ln 2}{3} \approx 0,628$ (u. a.)

Partie C : étude d'une suite

1. **a.** u_n est l'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$: c'est donc un nombre positif pour tout n de $\mathbb{N}$.

   b. Quel que soit n, $u_{n+1}-u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n+1}}\,dx - \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}\,dx = \int_0^1 f(x)\left[e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}\right]dx$ (par linéarité de l'intégration).
   Or $n < n+1 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \Rightarrow \frac{x}{n+1} < \frac{x}{n}$ (car $x \geqslant 0$) $\Rightarrow e^{\frac{x}{n+1}} < e^{\frac{x}{n}}$ (par croissance de la fonction exponentielle).
   Finalement $e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}} < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

   c. La suite est décroissante et minorée par 0 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

2. **a.** On a $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.
   $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{0}{n} \leqslant \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} \Rightarrow ê^0 \leqslant e^{\frac{x}{n}} \leqslant e^{\frac{1}{n}}$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\Rightarrow f(x) \leqslant f(x)e^{\frac{x}{n}} \leqslant f(x)e^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)e^{\frac{1}{n}}\,dx \iff \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}\,dx \leqslant e^{\frac{1}{n}}\int_0^1 f(x)\,dx \iff$
   $I_1 \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{1}{n}} I_1$.

   b. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$.
   Par application du théorème des « gendarmes », on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = I_1$.
   $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$.

On a vu que $I_\alpha = -\dfrac{\text{e}}{3}\ln\left(\dfrac{1+\text{e}^{-3\alpha}}{2}\right)$, alors $I_1 = -\dfrac{\text{e}}{3}\ln\left(\dfrac{1+\text{e}^{-3}}{2}\right) \approx 0{,}5840$.