Cycle 4
3e année

trans math 3e

NOUVEAU PROGRAMME 2016

Livre du professeur

Nathan

Cycle 4
3e année

trans math 3e

NOUVEAU PROGRAMME 2016

Livre du professeur

Nathan

Sommaire

 ISBN : 978-209-171946-7

Indicateurs de réussite des tâches complexes transversales

Exercice 1 page 230 – La tornade

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à déterminer la classe de la tornade ; – cherché à calculer la vitesse de la tornade au bout de 5 minutes ; – cherché à calculer la durée de vie de la tornade.	2, 4
Modéliser	L'élève a : – par exemple, explicité le fait que diminuer une quantité de 10 % revient à multiplier cette quantité par 0,9 ; – mis en place une méthode (utilisation du tableur, multiplication par $0{,}9^n$...) pour calculer la vitesse de la tornade toutes les 5 minutes.	1, 2, 4
Raisonner	L'élève a : – mis en relation la donnée de l'énoncé « 340 km/h » et le document 2 pour déterminer la classe de la tornade ; – mis en relation la donnée de l'énoncé « 340 km/h » et le document 1 pour calculer la vitesse de la tornade au bout de 5 minutes ; – mis en place une méthode (utilisation du tableur, multiplication par $0{,}9^n$...) pour calculer la vitesse de la tornade toutes les 5 minutes.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – correctement calculé la vitesse de la tornade au bout de 5 minutes ; – correctement calculé la durée de vie de la tornade.	4
Communiquer	L'élève a : – expliqué la méthode qu'il a mis en œuvre pour calculer la durée de vie de la tornade ; – présenté clairement ses conclusions.	1, 3

Exercice 2 page 231 – Les objets connectés

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à calculer le nombre d'élèves de 4e qui ont 0 objet connecté, 1 objet connecté, etc. ; – cherché à calculer le nombre total d'élèves dans le collège ; – cherché à calculer le nombre moyen d'objets connectés ; – cherché à calculer le nombre médian d'objets connectés ; – cherché à comparer ses résultats aux chiffres de l'article du document 1.	2, 4

Modéliser	L'élève a : – appliqué un pourcentage (2 % de 150 élèves…) ; – calculé une moyenne pondérée.	1, 2, 4
Raisonner	L'élève a : – compris qu'il devait calculer le nombre moyen et le nombre médian d'objets connectés ; – utilisé le document 2 pour calculer le nombre d'élèves de 4e qui ont 0 objet connecté, 1 objet connecté, etc. ; – fait le lien entre les documents 2, 3 et 4 pour calculer le nombre moyen et le nombre médian d'objets connectés ; – comparé ses résultats aux chiffres de l'article du document 1.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé le nombre d'élèves de 4e qui ont 0 objet connecté, 1 objet connecté, etc. ; – calculé le nombre moyen d'objets connectés ; – calculé le nombre médian d'objets connectés.	4
Communiquer	L'élève a présenté ses calculs et il a comparé correctement ses résultats aux chiffres de l'article du document 1.	1, 3

Exercice 3 page 231 – Les groupes sanguins

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à comprendre les documents 1 et 3 ; – cherché à calculer le pourcentage de la population française qui est des groupes B^+ ou AB^+ ; – cherché à calculer la probabilité que Myriam puisse donner son sang à son amie.	2, 4
Modéliser	L'élève a reconnu une situation pour laquelle on assimile les fréquences aux probabilités.	1, 2, 4
Raisonner	L'élève a : – déduit des documents 1 et 2 que Myriam ne peut donner son sang qu'à des personnes qui sont des groupes B^+ ou AB^+ ; – compris qu'il devait calculer le pourcentage de la population française qui est des groupes B^+ ou AB^+ ; – compris qu'il s'agissait d'une situation pour laquelle on assimile les fréquences aux probabilités.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé le pourcentage de la population française qui est des groupes B^+ ou AB^+ ; – calculé la probabilité que Myriam puisse donner son sang à son amie.	4
Communiquer	L'élève a justifié ses calculs et présenté sa conclusion.	1, 3

Exercice 4 page 232 – Le programme

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à comprendre le programme ; – cherché à calculer la probabilité que le lutin dise « J'ai gagné ! » ; – cherché à modifier le programme de façon à ce que le lutin ait autant de chances de gagner que de perdre.	2, 4
Raisonner	L'élève a : – compris le programme initial ; – construit une table de multiplication pour calculer la probabilité que le lutin dise « J'ai gagné ! » ; – calculé la probabilité que le lutin dise « J'ai gagné ! » ; – modifié les valeurs de *a*, *b* et *c* de façon à ce que le lutin ait autant de chances de gagner que de perdre.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé la probabilité que le lutin dise « J'ai gagné ! » avec le programme initial ; – calculé la probabilité que le lutin dise « J'ai gagné ! » avec le nouveau programme.	4
Communiquer	L'élève a réalisé un programme avec lequel le lutin a autant de chances de gagner que de perdre.	1, 3

Exercice 5 page 232 – Le choix du film

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à déterminer si l'affirmation d'Arthur est exacte ou non ; – cherché à calculer la probabilité que Jules choisisse le film.	2, 4
Raisonner	L'élève a : – compris qu'il doit calculer la probabilité que Jules choisisse le film ; – compris que l'expérience proposée par Arthur est une expérience aléatoire à trois épreuves ; – construit, par exemple, un arbre ; – déterminé les huit issues possibles.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a calculé la probabilité que Jules choisisse le film.	4
Communiquer	L'élève a : – expliqué sa démarche ; – présenté sa conclusion.	1, 3

■ Exercice 6 page 233 – Optimiser la recette

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à calculer le nombre actuel de consoles vendues chaque semaine ; – cherché à calculer le bénéfice actuel réalisé sur la vente d'une console puis de 1 200 consoles ; – cherché à calculer le bénéfice réalisé après une augmentation de 2 € du prix de la console ; – cherché à calculer le bénéfice réalisé après une réduction de 2 € du prix de la console ; – cherché à exprimer le bénéfice réalisé en fonction du montant de l'augmentation ou de la diminution du prix de la console ; – cherché à déterminer le prix de vente de la console pour lequel le bénéfice est le plus grand.	2, 4
Raisonner	L'élève a : – utilisé le document 1 pour calculer le nombre actuel de consoles vendues chaque semaine ainsi que le bénéfice actuel réalisé ; – compris comment calculer le bénéfice réalisé après une augmentation du prix de la console ; – compris comment calculer le bénéfice réalisé après une diminution du prix de la console ; – mis en place une stratégie pour calculer le bénéfice réalisé en fonction de l'augmentation ou de la diminution du prix de la console ; – analysé ses résultats pour déterminer le prix de vente de la console pour lequel le bénéfice est le plus grand.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé le nombre actuel de consoles vendues chaque semaine ; – calculé le bénéfice actuel réalisé sur la vente d'une console puis de 1 200 consoles ; – calculé le bénéfice réalisé après une augmentation de 2 € du prix de la console ; – calculé le bénéfice réalisé après une diminution de 2 € du prix de la console ; – calculé le prix de vente de la console pour lequel le bénéfice est le plus grand.	4
Communiquer	L'élève a expliqué ses calculs et présenté sa conclusion.	1, 3

■ Exercice 7 page 233 – La cycliste

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à mesurer sur la carte la distance que Lola doit parcourir ; – cherché à exprimer des distances dans une même unité ; – cherché à calculer la distance que Lola doit parcourir dans la réalité ; – cherché à calculer la distance que Lola parcourt en un tour de roue ; – cherché à calculer la distance que Lola parcourt en un tour de pédalier ; – cherché à calculer le nombre de tours de pédalier que Lola devra effectuer ; – cherché à calculer la distance que Lola parcourt en une seconde ; – cherché à calculer la durée du trajet de Lola ; – cherché à exprimer la durée du trajet de Lola en heures et minutes ; – cherché à calculer l'heure à laquelle Lola doit partir.	2, 4
Raisonner	L'élève a : – remarqué une échelle et l'a utilisée ; – compris que lorsque Lola effectue un tour de pédalier, la roue arrière fait quatre tours ; – compris qu'en un tour de pédalier, Lola parcourt une distance qui correspond à quatre fois la longueur d'un cercle de diamètre 700 mm ; – compris qu'il devait exprimer des distances dans une même unité ; – pris en compte l'information « Lola effectue en moyenne 0,8 tour de pédalier par seconde » ; – converti des durées (1,4 h = 1 h 24 min).	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé la distance que Lola doit parcourir dans la réalité ; – calculé la distance que Lola parcourt en un tour de roue ; – calculé la distance que Lola parcourt en un tour de pédalier ; – calculé le nombre de tours de pédalier que Lola devra effectuer ; – calculé la distance que Lola parcourt en une seconde ; – calculé la durée du trajet de Lola ; – calculer l'heure à laquelle Lola doit partir.	4
Communiquer	L'élève a expliqué ses différents calculs et il a répondu par des phrases aux deux questions posées.	1, 3

Exercice 8 page 234 – La salle de sport

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à exprimer les différents tarifs en fonction du nombre de séances d'une heure ; – cherché à déterminer à partir de combien de séances l'offre de SportVitalité est plus intéressante que l'offre de SportRoom ; – cherché soit à résoudre une ou des inéquations, soit à représenter graphiquement les tarifs des salles SportVitalité et SportRoom ; – cherché à proposer, pour moins de 20 séances, une offre plus intéressante que celle de SportVitalité ; – cherché à proposer, pour plus de 20 séances, une offre plus intéressante que celle de SportRoom.	2, 4
Modéliser	L'élève a : – utilisé une variable pour désigner le nombre de séances d'une heure ; – exprimé les différents tarifs en fonction de cette variable.	1, 2, 4
Raisonner	L'élève a : – compris qu'il devait proposer, pour moins de 20 séances, une offre plus intéressante que celle de SportVitalité ; – compris qu'il devait proposer, pour plus de 20 séances, une offre plus intéressante que celle de SportRoom ; – mis en œuvre une stratégie pour proposer des tarifs qui respectent les souhaits d'Hasna.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé les prix à payer (pour plusieurs séances) avec SportRoom ; – calculé le nombre de séances (20) pour lequel le prix à payer est le même avec SportVitalité et SportRoom ; – calculé les prix à payer (pour plusieurs séances) avec la formule qu'il propose.	4
Communiquer	L'élève a : – su expliquer sa méthode ; – justifié ses choix ; – présenté ses réponses sous forme de calculs et de phrases simples.	1, 3

Exercice 9 page 234 – La vue du chalet

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à calculer les altitudes du chalet de Carmen, de l'hôtel et de la gare d'arrivée ; – cherché à mesurer des distances sur la carte ; – cherché à utiliser l'échelle de la carte ; – cherché à représenter la situation dans un plan vertical ; – cherché à calculer la hauteur maximale de l'hôtel pour laquelle Carmen pourra encore voir la gare d'arrivée.	2, 4

Modéliser	L'élève a : – représenté la situation dans un plan vertical ; – utilisé le théorème de Thalès pour calculer une longueur.	1, 2, 4
Raisonner	L'élève a : – remarqué une échelle et l'a utilisée ; – compris la signification des lignes de niveaux ; – fait le lien entre les documents 1 et 2 pour déterminer les altitudes du chalet de Carmen, de l'hôtel et de la gare d'arrivée du télésiège ; – mis en relation les documents 1, 2 et 3 pour schématiser la situation dans un plan vertical ; – proposé une méthode pour calculer les longueurs qui lui permettent de répondre à la question posée.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé les altitudes du chalet de Carmen, de l'hôtel et de la gare d'arrivée ; – à l'aide de l'échelle de la carte, calculé les distances horizontales dans la réalité ; – calculé la hauteur maximale de l'hôtel pour laquelle Carmen pourra encore voir la gare d'arrivée.	4
Communiquer	L'élève a : – présenté et expliqué ses calculs ; – présenté et justifié sa conclusion.	1, 3

Exercice 10 page 235 – Le sauvetage

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à calculer la longueur du trajet en rouge ; – cherché à calculer la longueur du trajet en vert ; – cherché à calculer les durées des deux trajets.	2, 4
Modéliser	L'élève a : – utilisé le théorème de Pythagore pour calculer une longueur ; – utilisé le théorème de Thalès pour calculer une longueur ; – utilisé une vitesse moyenne pour calculer une durée.	1, 2, 4
Raisonner	L'élève a : – utilisé les informations du document 1 pour calculer les durées des deux trajets ; – reconnu, sur le document 1, un triangle rectangle et une configuration de Thalès.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé la longueur du trajet en rouge ; – calculé la longueur du trajet en vert ; – calculé les durées des deux trajets.	4
Communiquer	L'élève a : – présenté ses différents calculs avec de courtes phrases ; – justifié son choix.	1, 3

Exercice 11 page 235 – La passerelle

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à représenter sur un schéma la situation à marée basse ; – cherché à représenter sur un schéma la situation à marée haute ; – cherché à calculer la longueur minimale de la passerelle ; – cherché à calculer la mesure de l'angle que forme la passerelle avec l'horizontale ; – cherché à calculer la longueur minimale des rails.	2, 4
Représenter	L'élève a : – représenté sur un schéma la situation à marée basse ; – représenté sur un schéma la situation à marée haute.	1, 5
Modéliser	L'élève a : – utilisé le théorème de Pythagore pour calculer une longueur ; – utilisé la trigonométrie pour calculer une longueur ; – utilisé la trigonométrie pour calculer la mesure d'un angle.	1, 2, 4
Raisonner	L'élève a : – compris le fonctionnement de la passerelle et interprété correctement ses positions à marée basse et à marée haute ; – compris qu'il devait dans un premier temps calculer la longueur de la passerelle lorsque la marée est basse ; – tenu compte de la contrainte « l'angle que forme la passerelle avec l'horizontale doit toujours être inférieur à 25° » ; – compris comment calculer la longueur des rails.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé la longueur minimale de la passerelle ; – calculé la longueur minimale des rails.	4
Communiquer	L'élève a : – présenté des schémas clairs ; – présenté et expliqué ses calculs ; – présenté et justifié ses conclusions.	1, 3

Exercice 12 page 236 – En astronomie

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – cherché à calculer les mesures des angles $\widehat{T_1ST_2}$ et $\widehat{M_1SM_2}$; – cherché à calculer la mesure de l'angle $\widehat{M_2ST_2}$; – cherché à calculer la longueur SM_2.	2, 4
Modéliser	L'élève a : – reconnu une situation de proportionnalité pour calculer les mesures des angles $\widehat{T_1ST_2}$ et $\widehat{M_1SM_2}$; – utilisé la trigonométrie pour calculer la longueur SM_2.	1, 2, 4

Raisonner	L'élève a : – compris les informations données dans le document 1 ; – tenu compte des périodes de révolution données dans le document 2 ; – utilisé le fait que $ST_2 = 149\,600\,000$ km ; – reconnu une situation de proportionnalité pour calculer les mesures des angles $\widehat{T_1ST_2}$ et $\widehat{M_1SM_2}$; – mis en œuvre un raisonnement pour calculer la mesure de l'angle $\widehat{M_2ST_2}$; – utilisé le cosinus dans le triangle ST_2M_2.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé les mesures des angles $\widehat{T_1ST_2}$ et $\widehat{M_1SM_2}$; – calculé la mesure de l'angle $\widehat{M_2ST_2}$; – calculé la longueur SM_2.	4
Communiquer	L'élève a : – présenté et expliqué ses calculs ; – présenté sa conclusion par une phrase.	1, 3

■ Exercice 13 page 236 – L'hélicoptère

Compétences	Indicateurs	Domaines du socle
Chercher	L'élève a : – construit puis testé le programme ; – cherché à décomposer 168 et 180 en produits de facteurs premiers ; – cherché à déterminer le nombre dans le cercle rouge.	2, 4
Raisonner	L'élève a : – compris le programme ; – compris que le nombre dans le cercle rouge est un diviseur commun à 168 et 180 ; – compris que le nombre dans le cercle rouge est le plus grand diviseur commun à 168 et 180 ; – compris comment calculer les deux autres nombres manquants.	2, 3, 4
Calculer	L'élève a : – calculé le nombre à inscrire dans le cercle rouge ; – calculé les deux autres nombres manquants.	4
Communiquer	L'élève a correctement complété le programme.	1, 3

Documents à photocopier

Chapitre 1 - Effectuer des calculs numériques

Exercice 51 p. 16

Mille tonnerres •	• 10^{12}
Mille millions de mille sabords •	• 10^{24}
Mille millions de mille milliards de mille tonnerres de Brest •	• 10^{3}
Mille millions de tonnerres de Brest •	• 10^{15}
Mille milliards de mille sabords •	• 10^{9}

Exercice 56 p. 16

b.

$2^4 \times 3^2 \times 7$		
$2^4 \times 7^2$	$2^3 \times 3^2 \times 49$	$(2 \times 7)^2 \times 3^4$

Exercice 62 p. 17

0,000 857 1 •	• $8,571 \times 10^1$
8 571 •	• $8,571 \times 10^{-1}$
0,857 1 •	• $8,571 \times 10^{-4}$
85,71 •	• $8,571 \times 10^3$

Exercice 98 p. 22

10^{-1}	10^2	10^{-1}	10^4	10^3	10^{-1}
10^{-1}	1	10	10^{-2}	10^2	1
10^3	10	10^2	10^{-1}	10	10^{-2}
10^2	10^{-1}	10^2	1	10^3	1
10^4	1	10^{-4}	10	10^4	10^{-1}
10^{-2}	10^{-1}	10^3	10^{-4}	10^2	10

Exercice 116 p. 24

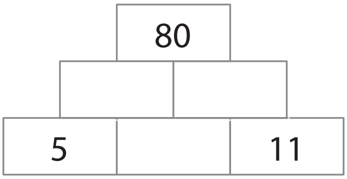
a	$2a$	a^2	$2a^2$	$(2a)^2$
2				
−3				
	$\frac{4}{3}$			

Chapitre 2 - Utiliser le calcul littéral pour résoudre ou démontrer

Exercice 39 p. 32

	Forme factorisée	Forme développée
a.	$(x + 5)^2$	
b.		$x^2 - 12x + 36$
c.		$4x^2 + 40x + 100$
d.	$(x + 10)(x - 10)$	
e.		$x^2 - 121$
f.		$49x^2 - 14x + 1$

Exercice 51 p. 32

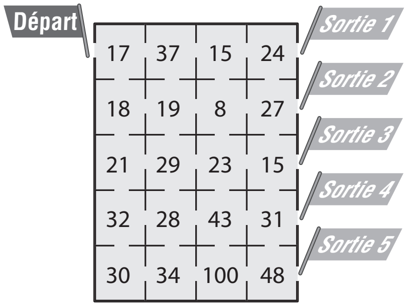


Chapitre 3 - Découvrir et utiliser les nombres premiers

Exercice 21 p. 46

30 •	• $A = 2 \times 3 \times 5$
110 •	• $B = 3^2 \times 7$
60 •	• $C = 2 \times 5 \times 11$
63 •	• $D = 2^2 \times 3 \times 5$

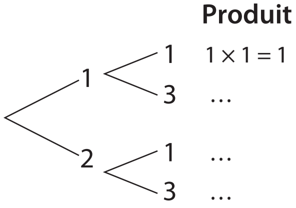
Exercice 35 p. 47



Exercice 37 p. 47

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 51 p. 48



Exercice 104 p. 55

$\times$	$5^0 \times 7^0 = 1$	$5^1 \times 7^0 = 5$	$5^0 \times 7^1 = 7$	$5^1 \times 7^1 = 35$
$2^0 = 1$				
$2^1 = 2$				
$2^2 = 4$				

Exercice 115 p. 57

Erratum : Dans les premiers manuels imprimés, ce document comportait une erreur (colonne C non renseignée). Cette erreur sera corrigée lors des réimpressions. Le document ci-dessous est correct.

	A	B	C	D
1	Impression du motif	Prix unitaire (en CFP)	Quantité	Prix total (en CFP)
2	Tiki	75	117	
3	Tipannier	80	117	
4	TOTAL			

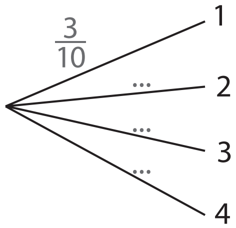
Chapitre 4 - Calculer et interpréter des caractéristiques

Exercice 18 p. 63

	Moyenne	Médiane	Étendue
Léo			
Julie			
Jordy			

Chapitre 5 - Calculer des probabilités

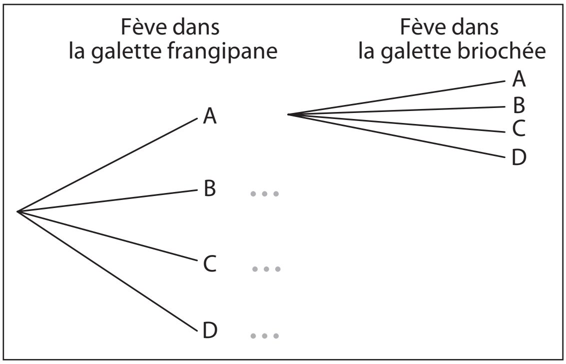
Activité 1 p. 67



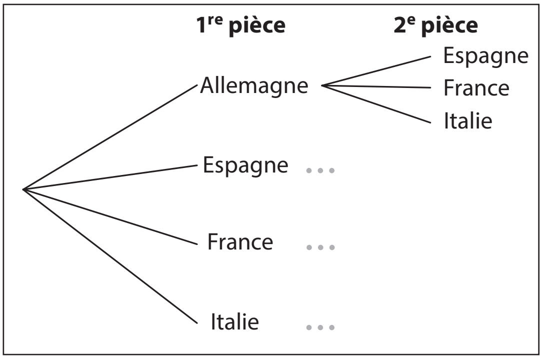
Exercice 20 p. 71

Nombre de clients	satisfaits de A	non satisfaits de A	Total
satisfaits de B			
non satisfaits de B			
Total			100

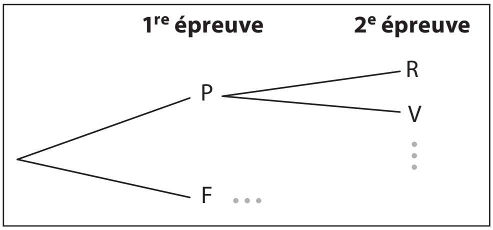
Exercice 24 p. 72



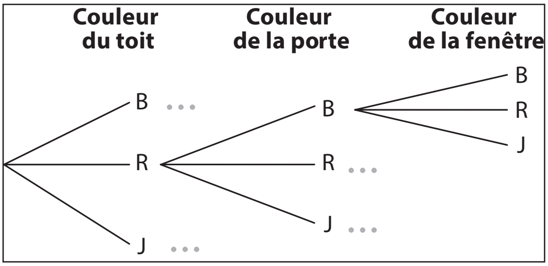
Exercice 27 p. 73



Exercice 28 p. 73



Exercice 35 p. 74



Exercice 42 p. 76

Somme		Dé rouge					
		1	2	3	4	5	6
Dé vert	1	2	3	4	5	6	7
	2	3					
	3						
	4						
	5						
	6						

Exercice 43 p. 76

n	A	B
1	6	2
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

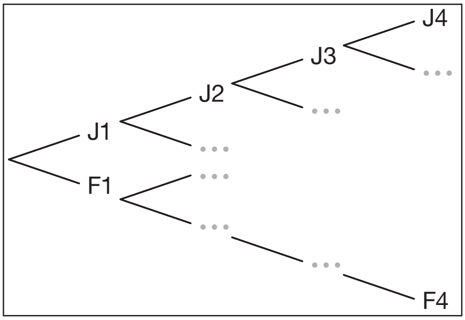
Exercice 45 p. 76

	Jeunes coureurs de moins de 25 ans	Coureurs de 25 ans ou plus	Total
Coureurs français			
Coureurs étrangers			
Total			200

Exercice 46 p. 77

Produit		Dé n° 1					
		1	2	2	3	3	3
Dé n° 2	1	1	2	2	3	3	3
	1						
	1						
	2	2	4	4			
	2						
	3						

Exercice 47 p. 77



Chapitre 6 - Comprendre et utiliser la notion de fonction

Activité 2 p. 83

a en km	0	10	20	30	50	60	80	100	140	160
T(a) en °C										

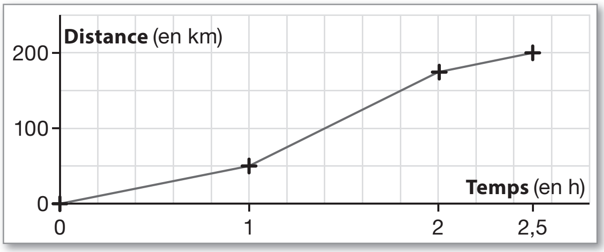
Exercice 17 p. 87

Notation mathématique	En français
$f(7) = 2$	L'image de … est … .
$f(8) = -3$	Un antécédent de … est … .
$f(\ldots) = \ldots$	4 a pour image 5.
$f(\ldots) = \ldots$	1 a pour antécédent –6.

Exercice 44 p. 90

x	–5	–1	0		5	101
$h(x)$				0		

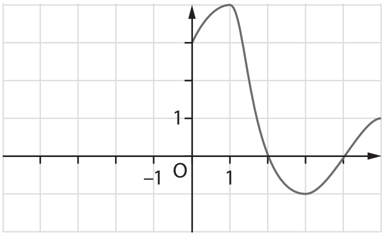
Exercice 62 p. 93



Exercice 64 p. 94

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

Exercice 68 p. 94



Chapitre 7 - Relier proportionnalité et fonction linéaire

Activité 1 p. 99

Nombre de tickets achetés	1	5	10	15	20
Prix payé (en €)					

Exercice 6 p. 101

x		–5		20
$h(x)$	4		0	

Exercice 25 p. 103

x	–3	–2	2,5			
$g(x)$				0	–14	0,7

Exercice 26 p. 103

x	–3		–1,5		0	
$h(x)$		8		2,4		–16

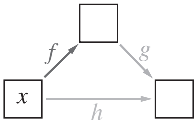
Exercice 38 p. 104

x	0	1		4,5	
$p(x)$			6		15

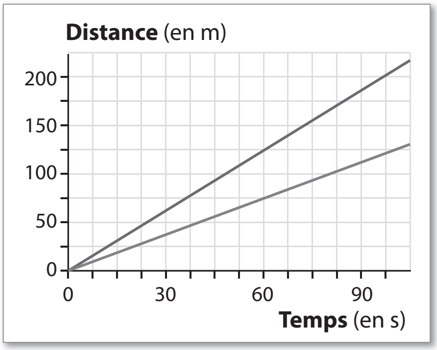
Exercice 41 p. 104

Salaire annuel (en €)	12 000	15 000	18 000	21 000
Prime (en €)				
Revenu total (en €)				

Exercice 69 p. 108



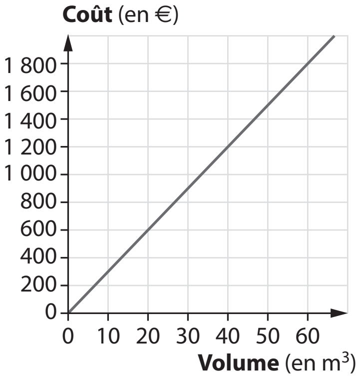
Exercice 82 p. 110



Exercice 87 p. 111

Quantité d'alcool (en dL)	0	1	5	7
Taux d'alcool (en g/L)				

Exercice 90 p. 112



Chapitre 8 - Connaître les fonctions affines

Activité 1 p. 115

	Prix (en €) **payé pour 5 séances**	**Prix** (en €) **payé pour 10 séances**	**Prix** (en €) **payé pour 15 séances**
Tarif A			
Tarif B			
Tarif C			

Activité 2 p. 115

Point	A′	B′	C′	D′	E′
Abscisse x	– 15	0	10	25	40
Ordonnée $1{,}8x + 32$					

Exercice 4 p. 117

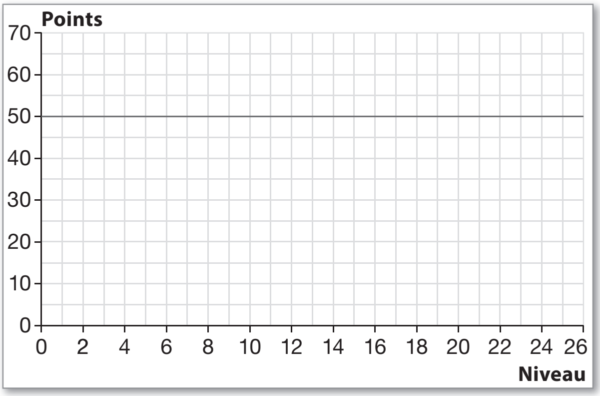
x	– 1		0		1,6	
$h(x)$		– 6,5		0		11

Exercice 82 p. 127

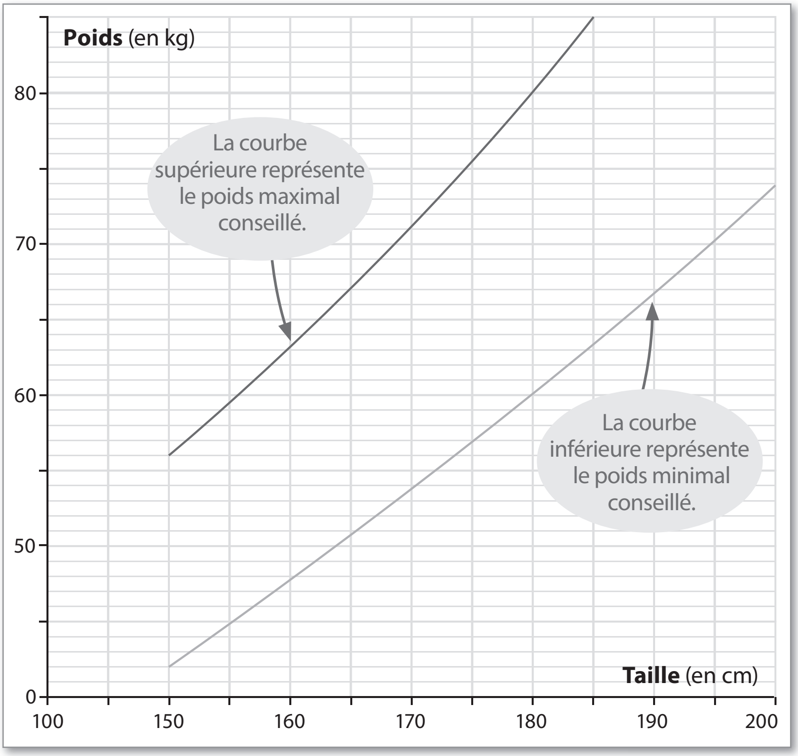
b.

Niveau	0	1	5	10	15	25
Points du guerrier	50	50				
Points du mage	0	3				
Points du chasseur	40	41				

e.



Exercice 88 p. 129



Chapitre 9 - Faire le point sur la proportionnalité

Activité 2 p. 131

Prix initial (en €)	34	60	100
Montant de la réduction (en €)	…	…	…
Prix réduit (en €)	…	…	…

Exercice 9 p. 134

Ⓐ	Hausse de 2 %	❶	$x \mapsto 0{,}98x$
Ⓑ	Hausse de 20 %	❷	$x \mapsto 2x$
Ⓒ	Baisse de 20 %	❸	$x \mapsto 1{,}02x$
Ⓓ	Hausse de 100 %	❹	$x \mapsto 1{,}20x$
Ⓔ	Baisse de 2 %	❺	$x \mapsto 0{,}8x$

Exercice 21 p. 135

x	4	…	16
V (x)	…	225	…

Exercice 22 p. 135

Nombre de départ	7	– 3	1,2
Nombre obtenu	…	…	…

Exercice 29 p. 136

	BL	UE	…	…
Trapèze BLEU	3	2	…	…
Trapèze VERT	…	…	12	6
	VE	…	KR	KE

Exercice 44 p. 138

	Terrain A	Terrain B
Surface actuelle x (en m^2)	250	…
Surface réduite $f(x)$ (en m^2)	…	550

Exercice 64 p. 142

Headset	85.00 $
Discount – 30%	……
Shipping cost	5.10 $
TOTAL COST	……

Exercice 80 p. 144

Facture 1	
Prix d'un stage	115 €
Nombre d'enfants inscrits	2
Prix total avant réduction	…
Montant de la réduction (5 % du prix total avant réduction)	…
Prix total à payer	…

Facture 2	
Prix d'un stage	115 €
Nombre d'enfants inscrits	3
Prix total avant réduction	…
Montant de la réduction (… % du prix total avant réduction)	…
Prix total à payer	310,50 €

Chapitre 10 - Étudier l'effet d'un agrandissement-réduction

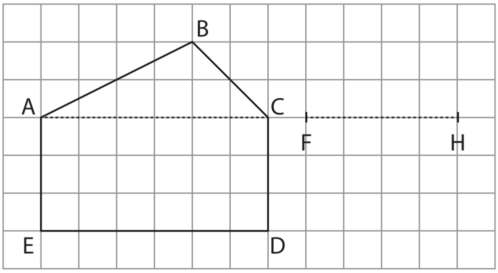
Activité 2 p. 147

	Parallélépipède rectangle			Cube supérieur
	Largeur	**Profondeur**	**Hauteur**	**Arête**
Stèle		30 cm		
Maquette				6 cm

Exercice 25 p. 151

	DE	EF	DF
Dimensions réelles	12 m	9 m	15 m
Dimensions du dessin			

Exercice 38 p. 153



Chapitre 11 - Utiliser le théorème de Thalès

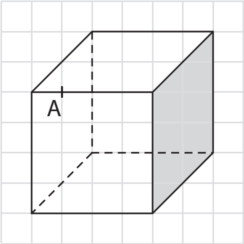
Exercice 21 p. 161

BE	BD	DE	
…	…	…	× …
…	…	…	
…	…	…	

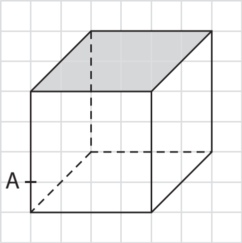
Chapitre 12 - Modéliser une situation spatiale

Exercice 19 p. 177

a.

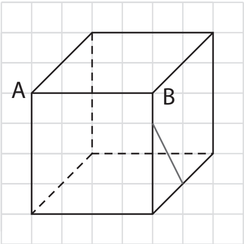


b.

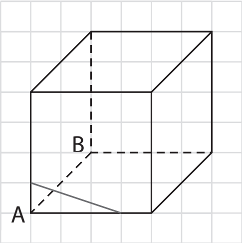


Exercice 20 p. 177

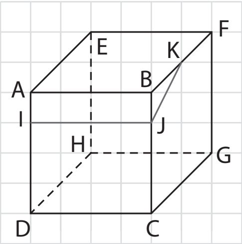
a.



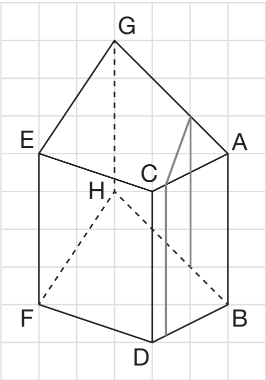
b.



Exercice 21 p. 177

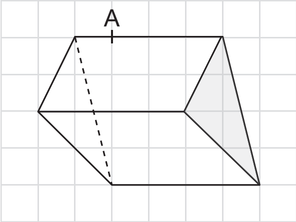


Exercice 29 p. 178

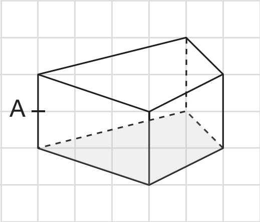


Exercice 30 p. 178

a.

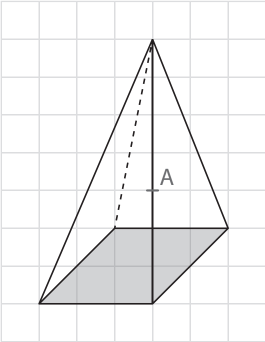


b.

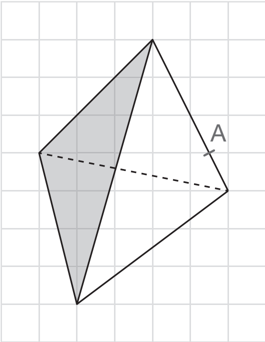


Exercice 38 p. 179

a.



b.

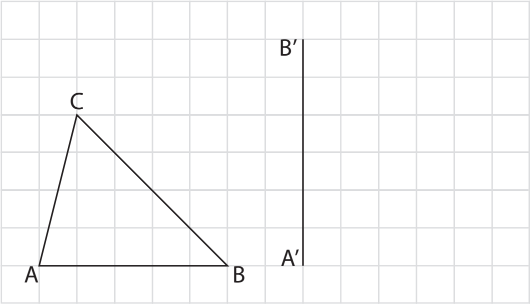


Chapitre 13 - Connaître et utiliser les triangles semblables

Exercice 15 p. 193

Angles homologues	Sommets homologues	Côtés homologues
$\widehat{ABC}$ et …	B et …	[AC] et …
$\widehat{BAC}$ et …	A et …	[BC] et …
$\widehat{ACB}$ et …	C et …	[AB] et …

Exercice 44 p. 196



Chapitre 15 - Étudier la logique algorithmique d’un programme

Activité 3 p. 223

k		1	2	…
*k*ᵉ élément de la liste T		8	4	…
Somme	0	8	12	…

Activité 5 p. 227

M	5	8	8	8	…
k	2	3	4	5	…
*k*ᵉ élément de T	8	4	1	0	…

Exercice 3 p. 226

k	1	2					
dire …	1	4					

Exercice 11 p. 229

1. a.

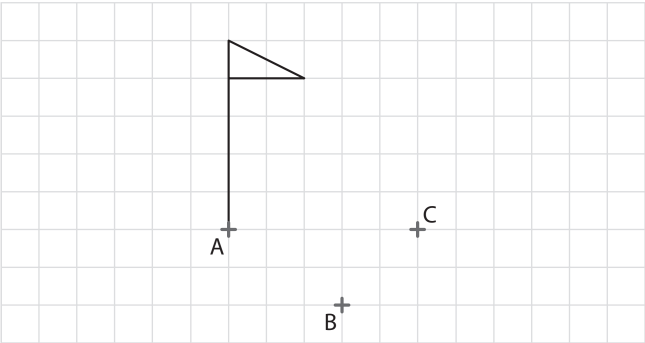
A	138	49	65	128	130
D	2	6	7	4	13
A modulo D					

2. a.

D	1	2	3	…
A modulo D	0	0	1	…
Liste des diviseurs	1	1 2	1 2	…

Formulaire

Exercice 112 p. 257



CHAPITRE 1

Effectuer des calculs numériques

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le début du cycle 4

La notion de puissance n'intervient pas au cycle 3. Il revient donc au cycle 4 d'introduire ce que le document ressource consacré aux puissances appelle « cinquième opération ». La notation a^n est introduite en milieu de cycle 4 (classe de 4e), pour une base quelconque et dans le cas particulier des puissances de dix (exposants positifs puis négatifs). Il est important que l'élève se familiarise au plus tôt avec les puissances de dix, afin de se préparer à leur usage dans les sciences appliquées et la technologie.

2 Je découvre

Activité 1

L'activité 1 se consacre aux calculs faisant intervenir des nombres écrits à l'aide d'une puissance de dix. L'élève est amené à manipuler des nombres sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal et n un entier naturel. Le contexte de l'astronomie est le lieu de calculs de distances faisant intervenir une situation de proportionnalité.

Activité 2

L'activité 2 a pour objectif d'introduire la notation scientifique d'un nombre décimal. La question **1.** permet de montrer qu'un nombre décimal (non nul) admet plusieurs écritures de la forme $a \times 10^n$ avec a décimal et n entier relatif. La question **2.** permet de dégager, parmi toutes ces écritures, l'une d'elles : la notation scientifique. La question **2. b.** montre l'utilité de cette notation pour comparer plus rapidement des nombres. La question **3.** aborde la notion d'ordre de grandeur d'un nombre. La définition choisie dans cette activité est celle de la puissance de dix d'exposant entier la plus proche de ce nombre. Dans « J'apprends le cours », une autre définition est proposée.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

- Suite à l'activité 1, on peut étudier le paragraphe 1 « Règles de calcul sur les puissances ». Ce paragraphe fait le point sur les règles de calcul découvertes plus tôt dans le cycle. Il ne s'agit pas pour l'élève de les utiliser de façon systématique. Un retour à la définition de la notation puissance permet d'effectuer tous les calculs proposés au cycle 4.
- Suite à l'activité 2, on peut étudier le paragraphe 2 « Notation scientifique ». La notion d'ordre de grandeur, également présentée dans ce paragraphe, peut donner l'occasion d'établir un lien avec les préfixes des unités multiples travaillés précédemment dans le cycle.
- Le paragraphe 3 « Priorités opératoires » intègre des nombres écrits à l'aide de la notation puissance dans des expressions numériques.

Exercice résolu

L'exercice demande aux élèves de combiner la connaissance de la notation scientifique d'un nombre décimal non nul et les effets de la multiplication par une puissance de dix.
Le contrôle des réponses à la calculatrice permet l'apprentissage de l'utilisation de la syntaxe de la calculatrice relative à la notation scientifique, pour la lecture et pour l'écriture.

4 Compléments

Règles de calcul sur les puissances

Les exercices 10 à 14 de la rubrique « À l'oral » et les exercices 28 à 37 de « Je m'entraîne » permettent de revenir sur les règles de calcul découvertes plus tôt dans le cycle. L'élève est invité à s'appuyer sur la définition de la notation puissance pour répondre aux questions.

Notation scientifique

Les exercices 18 à 20 de la rubrique « À l'oral » et les exercices 58 à 64 de « Je m'entraîne » permettent de travailler sur la notation scientifique d'un nombre décimal non nul.
L'exercice 69 permet de faire un lien avec les préfixes des unités multiples travaillés précédemment dans le cycle (nano, micro).

Priorités opératoires

Les exercices 71 à 77 de la rubrique « Je m'entraîne » permettent aux élèves de manipuler des expressions numériques où figurent des nombres écrits à l'aide d'une puissance et de respecter les priorités opératoires. L'exercice 77 fait un lien avec le calcul littéral.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. c. ; **2. b.** ; **3. b.** et **c.** ; **4. a.**, **b.** et **c.** ; **5. b.**

Je découvre

Activité 1

a. 1 min = 60 s et 1 h = 60×60 s = 3 600 s
24 h = $24 \times 3\,600$ s = 86 400 s
$365{,}25 \times 86\,400 = 31\,557\,600$
Dans 365,25 jours, il y a donc environ $3{,}156 \times 10^7$ s.

b. La lumière parcourt 3×10^5 km en 1 s. Dans une année, il y a environ $3{,}156 \times 10^7$ s. Donc, en une année, la lumière parcourt approximativement $3 \times 10^5 \times 3{,}156 \times 10^7$ km soit environ $9{,}5 \times 10^{12}$ km.

c. L'exoplanète Kepler-69c se trouve à 2 700 al de la Terre, soit à environ $2\,700 \times 9{,}5 \times 10^{12}$ km. Une valeur approchée de cette distance est $2{,}6 \times 10^{16}$ km. L'exoplanète Kepler-452b est ainsi la plus proche de la Terre.

Activité 2

❶

Organisme	**Dimension** (en m)
Cellule humaine	0,000 01
Bactérie de la salmonelle (longueur)	0,000 003
Virus de la fièvre jaune	0,000 000 02
Bacille du tétanos (longueur)	0,000 004
Staphylocoque (diamètre)	0,000 001
Globule rouge (diamètre)	0,000 007 5
Virus de la grippe (diamètre)	0,000 000 12

Par ordre croissant de dimension, on obtient :
Virus de la fièvre jaune < virus de la grippe < staphylocoque < bactérie de la salmonelle < bacille du tétanos < globule rouge < cellule humaine.

❷ **a.** $0{,}003 \times 10^{-3} = 0{,}000\,003 = 3 \times 0{,}000\,001 = 3 \times 10^{-6}$, où 3 est bien un nombre décimal avec un seul chiffre, autre que 0, avant la virgule.

b.

Organisme	Notation scientifique de la dimension en m
Cellule humaine	1×10^{-5}
Bactérie de la salmonelle	3×10^{-6}
Virus de la fièvre jaune	2×10^{-8}
Bacille du tétanos	4×10^{-6}
Staphylocoque	1×10^{-6}
Globule rouge	$7{,}5 \times 10^{-6}$
Virus de la grippe	$1{,}2 \times 10^{-7}$

Par ordre croissant de dimension, on obtient :
Virus de la fièvre jaune < virus de la grippe < staphylocoque < bactérie de la salmonelle < bacille du tétanos < globule rouge < cellule humaine.

❸ **a.**

Organisme	Ordre de grandeur
Cellule humaine	10^{-5}
Bactérie de la salmonelle	10^{-6}
Virus de la fièvre jaune	10^{-8}
Bacille du tétanos	10^{-6}
Staphylocoque	10^{-6}
Globule rouge	10^{-5}
Virus de la grippe	10^{-7}

b. Un ordre de grandeur n'aurait pas été suffisant, car des dimensions différentes ont le même ordre de grandeur (par exemple une cellule humaine et un globule rouge).

J'applique le cours

2 $149{,}597 \times 10^6 = 1{,}495\,97 \times 10^2 \times 10^6$
$= 1{,}495\,97 \times 10^8$

3 $5974 \times 10^{21} = 5{,}974 \times 10^3 \times 10^{21}$
$= 5{,}974 \times 10^{24}$

4 $0{,}000\,125 = 1{,}25 \times 10^{-4}$

5 $70 \times 10^{-3} = 7 \times 10^1 \times 10^{-3} = 7 \times 10^{-2}$

6 $66\,627\,602 = 6{,}662\,726\,02 \times 10^7$

7 **a.** La notation scientifique de 28×10^5 est $2{,}8 \times 10^6$.
b. Le nombre est en notation scientifique.
c. La notation scientifique de $0{,}861 \times 10^2$ est $8{,}61 \times 10^1$.
d. Le nombre est en notation scientifique.
e. Le nombre est en notation scientifique.
f. La notation scientifique de $8{,}4 \times 10^5 \times 10^{-2}$ est $8{,}4 \times 10^3$.

8 **a.** $2{,}5 \times 10^{-7}$ **b.** $5{,}87 \times 10^8$

9 $0{,}034 \times 10^{-5} = 3{,}4 \times 10^{-2} \times 10^{-5}$
$= 3{,}4 \times 10^{-7}$
donc William a tort.

À l'oral

10 **a.** 10^5 (lire « 10 exposant 5 »)
b. 2^{12} (lire « 2 exposant 12 »)
c. 5^3 (lire « 5 au cube »)
d. 2^8 (lire « 2 exposant 8 »)

11 **a.** 10^2 (lire « 10 au carré »)
b. 3^3 (lire « 3 au cube »)
c. 2^{-3} (lire « 2 exposant –3 »)
d. 6^2 (lire « 6 au carré »)

12 **a.** 8^2 **b.** 10^3 **c.** 21^2 **d.** $2{,}5^2 \times 4^2 = 10^2$

13 **a.** 10^7 **b.** 10^1 **c.** 10^8 **d.** 10^1 **e.** 10^{-2} **f.** 10^6

14 **a.** 10^5 **b.** 5^4 **c.** 3^0 **d.** 10^0

15 **a.** 572 000 **b.** 0,057 2

16 **a.** $7 \times 10^3 = 70 \times 10^{-1} \times 10^3 = 70 \times 10^2$

b. $7 \times 10^3 = 0{,}07 \times 10^{\mathbf{2}} \times 10^3 = 0{,}07 \times 10^{\mathbf{5}}$
c. $7 \times 10^3 = \mathbf{0{,}0007} \times 10^4 \times 10^3 = \mathbf{0{,}0007} \times 10^{\mathbf{7}}$
d. $7 \times 10^3 = \mathbf{70\,000} \times 10^{-4} \times 10^3 = \mathbf{70\,000} \times 10^{\mathbf{-1}}$

17 Les nombres B, C et E sont en notation scientifique.

18 **a.** $5{,}45 \times 10^2$ **b.** 7×10^{-1} **c.** $7{,}1 \times 10^4$
d. 8×10^{-3} **e.** $1{,}5 \times 10^{-2}$ **f.** $8{,}5 \times 10^7$
g. 7×10^{-4} **h.** 5×10^3 **i.** $4{,}5 \times 10^6$

19 **a.** 7×10^6 **b.** $3{,}43 \times 10^{11}$
c. 8×10^{-3} **d.** $8{,}9 \times 10^6$
e. $1{,}2 \times 10^{-2}$ **f.** 4×10^4

20 Nicolas a déterminé la notation scientifique du nombre $0{,}000\,65 \times 10^{-2}$.

Calcul mental

21 **a.** $10 \times 10^2 = 10^3$
b. $100 \times 10^3 = 10^2 \times 10^3 = 10^5$
c. $1\,000 \times 10^6 = 10^3 \times 10^6 = 10^9$
d. $10^4 \times 10 \times 10^7 = 10^{12}$

22 **a.** 11 000 **b.** – 32 784 **c.** 81 000

23 **a.** 3,654 **b.** 0,057 81 **c.** 0,000 38

24 **a.** 830 000 **b.** 0,45 **c.** 0,000 02

25 **a.** $50\,000 + 3\,700 = 53\,700$
b. $\dfrac{36}{12} \times \dfrac{10^7}{10^4} = 3 \times 10^3 = 3\,000$
c. $\dfrac{6}{2} \times \dfrac{10^6}{10^2} = 3 \times 10^4 = 30\,000$
d. $800\,000 + 150\,000 = 950\,000$

26 **a.** $10^2 < 489{,}03 < 10^3$
b. $10^5 < 867\,521{,}622 < 10^6$
c. $-10^2 < -45{,}17 < -10^1$

27 **a.** 10^4 **b.** 10^0 **c.** 10^8

Je m'entraîne

28 **a.** $\mathbf{10^4} \times 10^7 = \mathbf{10 \times 10 \times 10 \times 10} \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^{11}$
b. $\mathbf{10^5} \times 10^3 = \mathbf{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} \times 10 \times 10 \times 10 = 10^8$
c. $\mathbf{10^3} \times 10^2 \times 10^4 = \mathbf{10 \times 10 \times 10} \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^9$

29 **a.** $\mathbf{10^5} \times 10^{-4} = \mathbf{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} \times \dfrac{1}{10^4}$

$= \mathbf{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} \times \dfrac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10^1$

b. $\mathbf{10^{-3}} \times 10^2 = \dfrac{1}{\mathbf{10^3}} \times 10 \times 10 = \dfrac{1}{\mathbf{10 \times 10 \times 10}} \times 10 \times 10$

$= \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$

c. $\mathbf{10^6} \times 10^{-8} \times 10^3 = \mathbf{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} \times \dfrac{1}{10^8} \times 10 \times 10 \times 10 = \mathbf{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}$

$\times \dfrac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} \times 10 \times 10 \times 10$

$= 10 = 10^1$

30 **a.** $(10^5)^2 = (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)^2$
$= (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10) = 10^{10}$

b. $(10^{-3})^4 = \left(\dfrac{1}{10 \times 10 \times 10}\right) \times \left(\dfrac{1}{10 \times 10 \times 10}\right) \times \left(\dfrac{1}{10 \times 10 \times 10}\right) \times \left(\dfrac{1}{10 \times 10 \times 10}\right)$

$= \dfrac{1}{10^{12}} = 10^{-12}$

c. $(10^2)^3 \times (10^{-3})^2 = (10 \times 10)^3 \times \left(\dfrac{1}{10 \times 10 \times 10}\right)^2$
$= (10 \times 10) \times (10 \times 10) \times (10 \times 10) \times \left(\dfrac{1}{10 \times 10 \times 10}\right) \times \left(\dfrac{1}{10 \times 10 \times 10}\right) = 10^0$

31 **a.** $\dfrac{10^7}{10^4} = \dfrac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10^3$

b. $\dfrac{10^3}{10^5} = \dfrac{10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10^{-2}$

c. $\dfrac{10^2 \times 10^6}{10^8} = \dfrac{(10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}$
$= 10^0$

32 $A = \mathbf{7^5} \times 7^3 = \mathbf{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} \times 7 \times 7 \times 7 = 7^8$
$B = 7 \times \mathbf{7^6} \times 7 = 7 \times \mathbf{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} \times 7 = 7^8$
$C = \mathbf{7^4} \times 7^2 = \mathbf{7 \times 7 \times 7 \times 7} \times 7 \times 7 = 7^6$
$D = \mathbf{7^3} \times 7 \times \mathbf{7^2} \times 7^2 = \mathbf{7 \times 7 \times 7} \times 7 \times \mathbf{7 \times 7} \times 7 \times 7 = 7^8$
$E = 7^8$
Zoé a raison, seule l'expression C n'est pas égale à 7^8.

33 **a.** $7^4 \times 7^3 \times 7^{-1}$
$= (7 \times 7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) \times \dfrac{1}{7} = 7^6$

b. $3^{-2} \times 3^8 \times 3^{-10}$
$= \dfrac{1}{3 \times 3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
$\times \dfrac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$
$= \dfrac{1}{3^4} = 3^{-4}$

34 **a.** $\dfrac{6^7 \times 6^2}{6^5} = \dfrac{6^9}{6^5} = 6^4$

b. $\dfrac{11^2}{11^{-1} \times 11^3} = \dfrac{11^2}{11^2} = 11^0$

c. $\dfrac{5^6}{25} = \dfrac{5^6}{5^2} = 5^4$

35 **a.** $3^2 \times 4^2 = 3 \times 3 \times 4 \times 4 = (3 \times 4) \times (3 \times 4) = (3 \times 4)^2 = 12^2$

b. $25 \times 0{,}2^2 = 5^2 \times 0{,}2^2 = 5 \times 5 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = (5 \times 0{,}2) \times (5 \times 0{,}2) = (5 \times 0{,}2)^2 = 1^2$

c. $\dfrac{9^5}{3^6} = \dfrac{(3^2)^5}{3^6} = \dfrac{(3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3^4$

36 **a.** $5^4 \times 125 = 5^4 \times 5^3 = 5^{4+3} = 5^7$

b. $8 \times 2^5 = 2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

c. $3^5 \times 9 = 3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$

37 **a.** $27^2 \times 3^4 = (3^3)^2 \times 3^4 = 3^{3 \times 2} \times 3^4 = 3^6 \times 3^4 = 3^{6+4} = 3^{10}$

b. $(3^4)^2 \times 9^2 = (3^4)^2 \times (3^2)^2 = 3^{4 \times 2} \times 3^{2 \times 2} = 3^8 \times 3^4 = 3^{8+4} = 3^{12}$

c. $4^2 \times 0{,}25^2 = 4 \times 4 \times 0{,}25 \times 0{,}25 = (4 \times 0{,}25) \times (4 \times 0{,}25) = (4 \times 0{,}25)^2 = 1^2$

38 **a.** $36 = \mathbf{6}^2$ $\quad 49 = \mathbf{7}^2$

b. Ainsi $36 \times 49 = 6^2 \times 7^2 = 6 \times 6 \times 7 \times 7 = (6 \times 7) \times (6 \times 7) = (6 \times 7)^2 = 42^2$. Donc Aman a bien raison.

39 $B = 16^2 \times \left(\dfrac{1}{8}\right)^2 = 16 \times 16 \times \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{8} = \left(16 \times \dfrac{1}{8}\right)^2 = 2^2$.

Donc B est le carré du nombre entier 2.

40 $A = 7^5 \times 7^{-5} = 1$ car 7^{-5} est l'inverse de 7^5. Donc Justine a raison. William se trompe : $A = 7^0$.

41 $2^5 \times 3^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = (2 \times 3)^5 = 6^5$ donc Éva s'est trompée.

$\dfrac{12^3}{4^3} = \dfrac{12 \times 12 \times 12}{4 \times 4 \times 4} = \left(\dfrac{12}{4}\right) \times \left(\dfrac{12}{4}\right) \times \left(\dfrac{12}{4}\right) = \left(\dfrac{12}{4}\right)^3 = 3^3$

donc Marcus s'est également trompé.

42 **a.** $B = \dfrac{10^4 \times 10^6}{10^8} = \dfrac{10^{4+6}}{10^8} = \dfrac{10^{10}}{10^8} = 10^2$

b. $C = \dfrac{10^{12}}{10^5 \times 10^{-7}} = \dfrac{10^{12}}{10^{5+(-7)}} = \dfrac{10^{12}}{10^{-2}} = 10^{12-(-2)} = 10^{12+2} = 10^{14}$

c. $D = \dfrac{(10^3)^2}{10^{-5}} = \dfrac{10^{3 \times 2}}{10^{-5}} = \dfrac{10^6}{10^{-5}} = 10^{6-(-5)} = 10^{6+5} = 10^{11}$

43 **a.** $100 \times 10^3 = 10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$

b. $10 \times 0{,}001 = 10^1 \times 10^{-3} = 10^{1+(-3)} = 10^{-2}$

c. $10^{-2} \times 0{,}000\,1 = 10^{-2} \times 10^{-4} = 10^{-2+(-4)} = 10^{-6}$

44 **a.** $\dfrac{100}{10^5} = \dfrac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3}$

b. $\dfrac{10^{-2}}{10\,000} = \dfrac{10^{-2}}{10^4} = 10^{-2-4} = 10^{-6}$

c. $\dfrac{1}{0{,}001} = \dfrac{1}{10^{-3}} = 10^3$

d. $\dfrac{0{,}000\,1}{10^{-2}} = \dfrac{10^{-4}}{10^{-2}} = 10^{-4-(-2)} = 10^{-4+2} = 10^{-2}$

45 **a.** $10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 = 10^{3+3+3+3} = 10^{12}$

b. $(100^2)^4 = 100^{2 \times 4} = 100^8 = (10^2)^8 = 10^{2 \times 8} = 10^{16}$

46 **a.** $\dfrac{0{,}01}{10^8} = \dfrac{10^{-2}}{10^8} = 10^{-2-8} = 10^{-10}$

b. $\dfrac{10^{-5}}{0{,}001} = \dfrac{10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-5-(-3)} = 10^{-5+3} = 10^{-2}$

c. $\dfrac{100}{10^7} = \dfrac{10^2}{10^7} = 10^{2-7} = 10^{-5}$

47 **a.** $1\,000 \times 10^7 = 10^3 \times 10^7 = 10^{3+7} = 10^{10}$

b. $0{,}000\,1 \times 10^{-4} = 10^{-4} \times 10^{-4} = 10^{-4+(-4)} = 10^{-8}$

48 $A = 10^{2-7} = 10^{-5}$

$B = 0{,}01 + 0{,}001 = 0{,}011$

$C = 10^{1+(-6)} = 10^{-5}$

$D = 10^{-5}$

$E = 10^{-2} \times 10^{-3} = 10^{-2+(-3)} = 10^{-5}$

$F = 10^{-7-2} = 10^{-9}$

$G = \dfrac{10^{-3}}{10^2} = 10^{-3-2} = 10^{-5}$

$H = 10^{-8} \times 10^3 = 10^{-8+3} = 10^{-5}$

$I = 10^{-3 \times 2} = 10^{-6}$

Les expressions égales à 10^{-5} sont les expressions A, C, D, E, G et H.

49 **a.** $10^{-5} \times \dfrac{10^3 \times 10^{-8}}{10^2} = 10^{-5} \times \dfrac{10^{3+(-8)}}{10^2} = 10^{-5} \times \dfrac{10^{-5}}{10^2} = 10^{-5} \times 10^{-5-2} = 10^{-5} \times 10^{-7} = 10^{-5+(-7)} = 10^{-12} = 1 \times 10^{-12}$

b. $(10^2)^5 \times 10^{-3} = 10^{2 \times 5} \times 10^{-3} = 10^{10} \times 10^{-3} = 10^{10+(-3)} = 10^7 = 10\,000\,000$

50 $10^{-3} \times 10^{-3} = 10^{-6} = \dfrac{1}{10^6}$ donc Luna et Justine ont raison.

51

Mille tonnerres	10^{12}
Mille millions de mille sabords	10^{24}
Mille millions de mille milliards de mille tonnerres de Brest	10^3
Mille millions de tonnerres de Brest	10^{15}
Mille milliards de mille sabords	10^9

52 **a.** 1 pL $= 10^{-9}$ mL

b. Donc une cartouche de 15 mL contient 15×10^9 gouttes, soit 15 milliards de gouttes.

53 Le volume d'un globule rouge est de 90×10^{-15} L.
Dans le corps, il y a en moyenne $25 \times 10^3 \times 10^9 = 25 \times 10^{12}$ globules rouges.
Les globules rouges occupent donc $25 \times 10^{12} \times 90 \times 10^{-15}$ litres, c'est-à-dire $2\,250 \times 10^{-3}$ litres, soit 2,25 litres.

54 $\dfrac{420 \text{ TWh}}{5 \text{ GWh}} = \dfrac{420 \times 10^{12} \text{ Wh}}{5 \times 10^9 \text{ Wh}} = \dfrac{420}{5} \times 10^{12-9} = 84 \times 10^3 = 84\,000$

Il faudrait donc installer 84 000 éoliennes en France pour remplacer l'énergie nucléaire.

55 **a.** Produit de la 1^re ligne :
$10^7 \times 10^2 \times 10^9 = 10^{7+2+9} = 10^{18}$
Produit de la 2^e ligne :
$10^8 \times 10^6 \times 10^4 = 10^{8+6+4} = 10^{18}$
Produit de la 3^e ligne :
$10^3 \times 10^{10} \times 10^5 = 10^{3+10+5} = 10^{18}$
Produit de la 1^re colonne :
$10^7 \times 10^8 \times 10^3 = 10^{7+8+3} = 10^{18}$
Produit de la 2^e colonne :
$10^2 \times 10^6 \times 10^{10} = 10^{2+6+10} = 10^{18}$
Produit de la 3^e colonne :
$10^9 \times 10^4 \times 10^5 = 10^{9+4+5} = 10^{18}$
Produit d'une diagonale :
$10^7 \times 10^6 \times 10^5 = 10^{7+6+5} = 10^{18}$
Produit de l'autre diagonale :
$10^3 \times 10^6 \times 10^9 = 10^{3+6+9} = 10^{18}$
b. Produit de la 1^re ligne :
$10^{-2} \times 10^3 \times 10^2 = 10^{-2+3+2} = 10^3$
Produit de la 2^e ligne :
$10^5 \times 10^1 \times 10^{-3} = 10^{5+1+(-3)} = 10^3$
Produit de la 3^e ligne :
$10^0 \times 10^{-1} \times 10^4 = 10^{0+(-1)+4} = 10^3$
Produit de la 1^re colonne :
$10^{-2} \times 10^5 \times 10^0 = 10^{-2+5+0} = 10^3$
Produit de la 2^e colonne :
$10^3 \times 10^1 \times 10^{-1} = 10^{3+1+(-1)} = 10^3$
Produit de la 3^e colonne :
$10^2 \times 10^{-3} \times 10^4 = 10^{2+(-3)+4} = 10^3$
Produit d'une diagonale :
$10^{-2} \times 10^1 \times 10^4 = 10^{-2+1+4} = 10^3$
Produit de l'autre diagonale :
$10^0 \times 10^1 \times 10^2 = 10^{0+1+2} = 10^3$
Ce sont bien des « tableaux puissants ».

56 **a.** Produit de la 1^re ligne :
$2 \times 5 \times 2^4 \times 5^2 \times 2 = 2^6 \times 5^3$
Produit de la 2^e ligne :
$2^2 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 5)^2 = 2^4 \times 5 \times 2^2 \times 5^2 = 2^6 \times 5^3$
Produit de la 3^e ligne :
$5^2 \times 2^3 \times 1 \times 2^3 \times 5 = 2^6 \times 5^3$
Produit de la 1^re colonne :
$2 \times 5 \times 2^2 \times 5^2 \times 2^3 = 2^6 \times 5^3$
Produit de la 2^e colonne :
$2^4 \times 5^2 \times 2^2 \times 5 \times 1 = 2^6 \times 5^3$
Produit de la 3^e colonne :
$2 \times (2 \times 5)^2 \times 2^3 \times 5 = 2 \times 2^2 \times 5^2 \times 2^3 \times 5 = 2^6 \times 5^3$
Produit d'une diagonale :
$2 \times 5 \times 2^2 \times 5 \times 2^3 \times 5 = 2^6 \times 5^3$
Produit de l'autre diagonale :
$5^2 \times 2^3 \times 2^2 \times 5 \times 2 = 2^6 \times 5^3$
Il s'agit bien d'un « tableau puissant ».
b. Produit de la 2^e ligne :
$2^4 \times 7^2 \times 2^3 \times 3^2 \times 7^2 \times 2^2 \times 7^2 \times 3^4 = 2^9 \times 3^6 \times 7^6$
Produit des deux premières cases de la 1^re colonne :
$2^4 \times 3^2 \times 7 \times 2^4 \times 7^2 = 2^8 \times 3^2 \times 7^3$
En comparant avec le produit obtenu à la 2^e ligne, on trouve la dernière case de la 1^re colonne : $2 \times 3^4 \times 7^3$.
On calcule de même les produits partiels des diagonales pour compléter la 3^e colonne. Enfin, on calcule les produits partiels des deux lignes encore incomplètes. On obtient :

$2^4 \times 3^2 \times 7$	$\mathbf{3^4 \times 7^4}$	$\mathbf{2^5 \times 7}$
$2^4 \times 7^2$	$2^3 \times 3^2 \times 49$	$(2 \times 7)^2 \times 3^4$
$\mathbf{2 \times 3^4 \times 7^3}$	$\mathbf{2^6 \times 7^3}$	$\mathbf{2^2 \times 3^2 \times 7^3}$

57 **a.** $24\,000 \times 5{,}4 \times 10^{-15} = 24 \times 10^3 \times 5{,}4 \times 10^{-15}$
$= 24 \times 5{,}4 \times 10^{3+(-12)} = 129{,}6 \times 10^{-12}$
Le diamètre d'un atome de carbone est $129{,}6 \times 10^{-12}$ m.
b. $24\,000 \times 12\,742 = 305\,808\,000$
Le diamètre de l'atome serait alors 305 808 000 km.

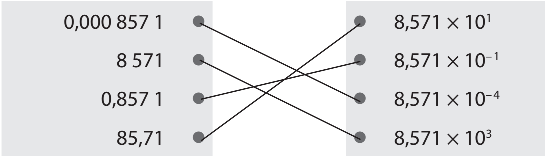
58 **a.** $8\,745 = \mathbf{8{,}745} \times 10^3$
b. $0{,}142\,5 = \mathbf{14{,}25} \times 10^{-2}$
c. $1\,485{,}6 = 14{,}856 \times 10^{\mathbf{2}}$
d. $0{,}5 = 0{,}000\,5 \times 10^{\mathbf{3}}$
e. $139 = 139\,000 \times 10^{\mathbf{-3}}$
f. $72 = \mathbf{0{,}000\,72} \times 10^5$

59 **a.** $256{,}3 = 0{,}002\,563 \times 10^5$
b. $-8\,785\,458 = -87{,}854\,58 \times 10^5$
c. $89{,}5 \times 10^8 = 89\,500 \times 10^5$
d. $47{,}85 \times 10^3 = 0{,}478\,5 \times 10^5$
e. $-0{,}025 \times 10^9 = 250 \times 10^5$
f. $47\,568 \times 10^{-2} = 0{,}004\,756\,8 \times 10^5$

60 **a.** $58\,000 = 58 \times 10^3$
b. $5\,800 \times 10^9 = 58 \times 10^{11}$
c. $0{,}058 \times 10^{-4} = 58 \times 10^{-7}$

61 **a.** $0{,}0415 = 41{,}5 \times 10^{-3} = 4\,150\,000 \times 10^{-8}$
$41{,}5 \times 10^{-4} = 0{,}004\,15 = 0{,}000\,041\,5 \times 10^2$
$4{,}15 \times 10^{-5} = 0{,}000\,041\,5 = 415 \times 10^{-7}$
b. $41\,500 \times 10^{-8} = 0{,}000\,415$ donc Ilan a raison : l'écriture $41\,500 \times 10^{-8}$ ne peut être associée à aucune autre.

62



63 **a.** $49\,000\,000 = 4{,}9 \times 10^7$
b. $320 \times 0{,}001 = 0{,}32 = 3{,}2 \times 10^{-1}$
c. $1\,400 \times 10^9 = 1{,}4 \times 10^3 \times 10^9 = 1{,}4 \times 10^{12}$
d. $0{,}08 \times 10^{-5} = 8 \times 10^{-2} \times 10^{-5} = 8 \times 10^{-7}$
e. $57 \times 100\,000 = 5{,}7 \times 10^1 \times 10^5 = 5{,}7 \times 10^6$
f. 5×10^{-9}

64 $A = 0{,}000\,28 \times 10^{-3} = 2{,}8 \times 10^{-4} \times 10^{-3} = 2{,}8 \times 10^{-7}$
$B = 1\,789 \times 10^{-2} = 1{,}789 \times 10^3 \times 10^{-2} = 1{,}789 \times 10^1$
$C = 10\,235 \times 10^9 = 1{,}023\,5 \times 10^4 \times 10^9 = 1{,}023\,5 \times 10^{13}$
$D = 0{,}57 \times 10^4 = 5{,}7 \times 10^{-1} \times 10^4 = 5{,}7 \times 10^5$
$E = 756 \times 10^4 = 7{,}56 \times 10^2 \times 10^4 = 7{,}56 \times 10^6$
$F = 54{,}3 \times 10^{-3} = 5{,}43 \times 10^1 \times 10^{-3} = 5{,}43 \times 10^{-2}$

65 **a.** $A = 8{,}743 \times 10^2 \times 10^{-5} = 8{,}743 \times 10^{-3}$
$B = 9{,}22 \times 10^{-3}$

b. Pour comparer ces deux nombres, on compare les exposants des puissances de 10. Les exposants sont égaux, on compare alors 8,743 et 9,22. Sheyma se trompe, B est supérieur à A car $9{,}22 > 8{,}743$.

66 **a.** et **b.** $K = 7{,}501\,8 \times 10^2 \times 10^{-6} = 7{,}501\,8 \times 10^{-4}$ donc $10^{-4} < K < 10^{-3}$.
$L = 9{,}163 \times 10^3 \times 10^4 = 9{,}163 \times 10^7$ donc $10^7 < L < 10^8$.

67 **a.** $M = 3{,}720\,954 \times 10^7$ $N = 6{,}17 \times 10^{-3}$

b. Un ordre de grandeur de $M \times N$ est $4 \times 10^7 \times 6 \times 10^{-3} = 24 \times 10^4 = 240\,000$ et un ordre de grandeur de $\frac{M}{N}$ est $\frac{4 \times 10^7}{6 \times 10^{-3}} = \frac{2}{3} \times 10^{10}$.

68 La notation scientifique de 4,6 milliards est $4{,}6 \times 10^9$.
La notation scientifique de 1 391 000 est $1{,}391 \times 10^6$.
La notation scientifique de 234 milliards est $2{,}34 \times 10^{11}$.
La notation scientifique de quarante mille milliards est 4×10^{13}.

69 **a.** La notation scientifique de 0,000 232 est $2{,}32 \times 10^{-4}$. Donc un ordre de grandeur de la dimension, en m, d'un grain de sable est 2×10^{-4}, ou encore 10^{-4}.

b. $6\,690 \text{ nm} = 6\,690 \times 10^{-9}$ m
$6\,690 \times 10^{-9} = 6{,}69 \times 10^3 \times 10^{-9}$
$= 6{,}69 \times 10^{-6}$
Donc un ordre de grandeur de la dimension, en m, du fil d'une toile d'araignée est 7×10^{-6} ou encore 10^{-5}.

c. $0{,}27\ \mu\text{m} = 0{,}27 \times 10^{-6}$ m
$0{,}27 \times 10^{-6} = 2{,}7 \times 10^{-1} \times 10^{-6} = 2{,}7 \times 10^{-7}$
Donc un ordre de grandeur de la dimension, en m, d'une particule de fumée de tabac est 3×10^{-7} ou encore 10^{-7}.

d. $50 \times 10^{-9} = 5 \times 10^1 \times 10^{-9} = 5 \times 10^{-8}$
Donc un ordre de grandeur de la dimension, en m, d'une nanobactérie est 5×10^{-8} ou encore 10^{-7}.

e. $1\,750 \times 10^{-10} = 1{,}75 \times 10^3 \times 10^{-10}$
$= 1{,}75 \times 10^{-7}$
Donc un ordre de grandeur de la dimension, en m, du virus de la varicelle est 2×10^{-7} ou encore 10^{-7}.

f. $0{,}07 \times 10^{-6} = 7 \times 10^{-2} \times 10^{-6} = 7 \times 10^{-8}$
Donc un ordre de grandeur de la dimension du virus de la gastro-entérite, en m, est 7×10^{-8} ou encore 10^{-7}.

70 **a.** • Longueur de l'équateur en km :
$40\,075{,}017 = 4{,}007\,501\,7 \times 10^4$
• Superficie en km² :
$510\,067\,420 = 5{,}100\,674\,2 \times 10^8$
• Masse en kg :
$5\,974 \times 10^{21} = 5{,}974 \times 10^3 \times 10^{21} = 5{,}974 \times 10^{24}$
• Volume en km³ :
$1\,083\,207 \times 10^6 = 1{,}083\,207 \times 10^6 \times 10^6 = 1{,}083\,207 \times 10^{12}$

b. $10^4 < 4{,}007\,501\,7 \times 10^4 < 10^5$
$10^8 < 5{,}100\,674\,2 \times 10^8 < 10^9$
$10^{24} < 5{,}974 \times 10^{24} < 10^{25}$
$10^{12} < 1{,}083\,207 \times 10^{12} < 10^{13}$

71 $3 + 2^4 = 3 + 16 = 19$
$10 + 3^2 = 10 + 9 = 19$
$2 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$
$-6^2 = -6 \times 6 = -36$
$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2 = 2^4$
$(-2)^4 = 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

72 $A = 3 \times 4^2 + 5 = 3 \times 16 + 5 = 48 + 5 = 53$
$B = (3 \times 4)^2 + 5 = 12^2 + 5 = 144 + 5 = 149$
$C = 3 \times (4^2 + 5) = 3 \times (16 + 5) = 3 \times 21 = 63$
$D = 3 \times (4 + 5)^2 = 3 \times 9^2 = 3 \times 81 = 243$

73 $A = 5 + 2^2 = 5 + 4 = 9$
$B = (5 + 2)^2 = 7^2 = 49$
$C = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$
$D = (5 - 2)^2 = 3^2 = 9$
$E = 5 \times 2^2 = 5 \times 4 = 20$
$F = (5 \times 2)^2 = 10^2 = 100$

74 $A = (8 - 3 \times 2)^2 = (8 - 6)^2 = 2^2 = 4$
$B = 8 - 3 \times 2^2 = 8 - 3 \times 4 = 8 - 12 = -4$
$C = (8 - 3) \times 2^2 = 5 \times 4 = 20$
$D = 8 - (3 \times 2)^2 = 8 - 6^2 = 8 - 36 = -28$

75 $A = 2 + 3 \times 5^2 = 2 + 3 \times 25 = 2 + 75 = 77$
$$B = \frac{-2^4 + 3 \times (-5)}{2^2} = \frac{-16 - 15}{4} = \frac{-31}{4} = -7{,}75$$

76 **1.** $10 \times 3 = 30$
$30 + 10^2 = 30 + 100 = 130$
$130 \times 2 = 260$
Le résultat est bien 260.

2. a. $-5 \times 3 = -15$
$-15 + (-5)^2 = -15 + 25 = 10$
$10 \times 2 = 20$
Le résultat obtenu est 20.

b. $\frac{2}{3} \times 3 = 2$
$2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 + \frac{4}{9} = \frac{18}{9} + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$
$\frac{22}{9} \times 2 = \frac{44}{9}$
Le résultat obtenu est $\frac{44}{9}$.

c. $0{,}1 \times 3 = 0{,}3$
$0{,}3 + 0{,}1^2 = 0{,}3 + 0{,}01 = 0{,}31$
$0{,}31 \times 2 = 0{,}62$
Le résultat obtenu est 0,62.

77 **a.** Pour $x = 2$, on obtient
$A = -5 \times 2^2 - 4 \times 2 + 5 = -5 \times 4 - 8 + 5 = -20 - 8 + 5 = -28 + 5 = -23$.

b. Pour $x = -3$, on obtient
$A = -5 \times (-3)^2 - 4 \times (-3) + 5 = -5 \times 9 + 12 + 5 = -45 + 17 = -28$
Donc Laura et Tom se sont tous les deux trompés.

Je m'évalue à mi-parcours

78 **b.** **79** **a.** **80** **c.** **81** **b.** **82** **a.** **83** **b.** **84** **a.**

Avec un logiciel

85 **1. a.** $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$ et $2^4 = 16$
On observe que $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$.
b. $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ et $2^6 = 64$
On observe que $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2^6 - 1$.
2. f. Il semble que $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, où n est un nombre entier positif.
3. a. $2 \times 2^0 = 2^1$
$2 \times 2^1 = 2^2$
…
$2 \times 2^n = 2^{n+1}$
b. On additionne membre à membre ces $n + 1$ égalités, on obtient :
$\mathbf{2} \times 2^0 + \mathbf{2} \times 2^1 + \dots + \mathbf{2} \times 2^n = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n+1}$
On factorise le membre de gauche par 2, alors :
$2 \times (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n+1}$
soit $2 \times S = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n+1}$.
c. Le membre de droite est égal à $S + 2^{n+1} - 2^0$ c'est-à-dire $S + 2^{n+1} - 1$.
On soustrait S aux deux membres de l'égalité obtenue en **3. b.** :
$2 \times S \mathbf{- S} = S + 2^{n+1} - 1 \mathbf{- S}$
donc $S = 2^{n+1} - 1$.
La conjecture est prouvée.

86 **1. a.** Pour la 3e case, le souverain offrira 2^2 grains de blé à Sissa, soit 4 grains de blé.
b. Pour la 5e case, le souverain offrira 2^4 grains de blé à Sissa, soit 16 grains de blé.
c. Pour la 8e case, le souverain offrira 2^7 grains de blé à Sissa, soit 128 grains de blé.
2. c. Dans la cellule B3, on doit saisir la formule `= B2*2`
3. b. La notation scientifique du nombre contenu dans la cellule B66 est $1{,}84 \times 10^{19}$.
$1{,}84 \times 10^{19}$ grains de blé ont une masse totale de $1{,}84 \times 10^{18}$ g, soit $1{,}84 \times 10^{15}$ kg ou encore $1{,}84 \times 10^{12}$ tonnes. Cette masse est supérieure à mille milliards de tonnes.
La masse de la quantité totale de blé promise à Sissa par le souverain est nettement supérieure à la production mondiale de blé de l'année 2015. La promesse du souverain ne semble pas réaliste.

J'utilise mes compétences

87 **a.** Le gain de Claire, en €, est $5 \times 5 \times 5 = 5^3$.
Le gain de Wael, en €, est 5^4.
Le gain d'Aya, en €, est 5^7.
b. $125 = 5^3$
Le gain total de Claire, en €, est alors
$5^3 \times 125 = 5^3 \times 5^3 = 5^6$.
Le gain de Wael est divisé par 5 : $\dfrac{5^4}{5} = 5^3$.
Il gagne finalement 53 €.
Le gain d'Aya est divisé par 25 :
$\dfrac{5^7}{25} = \dfrac{5^7}{5^2} = 5^5$. Elle gagne finalement 55 €.
La gagnante du jeu est donc Claire.

88 On calcule le rapport $\dfrac{\text{Masse du Soleil}}{\text{Masse de la Terre}}$:
$\dfrac{1{,}988\,4 \times 10^{30}}{5{,}973\,6 \times 10^{24}} = \dfrac{1{,}988\,4}{5{,}973\,6} \times \dfrac{10^{30}}{10^{24}} = \dfrac{1{,}988\,4}{5{,}973\,6} \times 10^6$
$\approx 0{,}33 \times 10^6$ soit environ $3{,}3 \times 10^5$.
On calcule le rapport $\dfrac{\text{Masse d'un quark top}}{\text{Masse d'un électron}}$:
$\dfrac{3{,}1 \times 10^{-25}}{9{,}1 \times 10^{-31}} = \dfrac{3{,}1}{9{,}1} \times \dfrac{10^{-25}}{10^{-31}} = \dfrac{3{,}1}{9{,}1} \times 10^{-25-(-31)} = \dfrac{3{,}1}{9{,}1} \times 10^{-25+31}$
$= \dfrac{3{,}1}{9{,}1} \times 10^6 \approx 0{,}34 \times 10^6$ soit environ $3{,}4 \times 10^5$.
Les rapports sont très proches. On peut donc estimer que l'affirmation d'Arthur est vraie.

89 **a.** Pour chacun des 4 vers, il y a 10 possibilités. Pour former la première strophe, il y a donc 10^4 possibilités.
b. 10^{14}
Chaque poème est formé de 14 vers. Pour chaque vers il y a 10 possibilités. On peut donc former 10^{14} poèmes différents.
c. « Cent mille milliards » s'écrit à l'aide d'une puissance de 10 :
$10^5 \times 10^9 = 10^{14}$.
D'où le titre du recueil.

90 **a.** $0{,}75 \text{ mm} = 0{,}75 \times 10^{-3} \text{ m} = 7{,}5 \times 10^{-1} \times 10^{-3} \text{ m} = 7{,}5 \times 10^{-4} \text{ m}$
$(7{,}5 \times 10^{-4}) \times (7{,}5 \times 10^{-4}) = 7{,}5^2 \times (10^{-4})^2 = 56{,}25 \times 10^{-4 \times 2}$
$= 56{,}25 \times 10^{-8} = 5{,}625 \times 10^1 \times 10^{-8} = 5{,}625 \times 10^{1+(-8)}$
$= 5{,}625 \times 10^{-7}$
L'aire d'une page de ce livre est $5{,}625 \times 10^{-7}$ m².
b. 21 cm = 0,21 m
29,7 cm = 0,297 m
$0{,}21 \times 0{,}297 = 0{,}062\,37 = 6{,}237 \times 10^{-2}$
L'aire d'une feuille A4 est $6{,}237 \times 10^{-2}$ m².
Pour fabriquer un livre, il faut 11 carrés d'aire $5{,}625 \times 10^{-7}$ m².
$\dfrac{6{,}237 \times 10^{-2}}{11 \times 5{,}625 \times 10^{-7}} = \dfrac{6{,}237}{11 \times 5{,}625} \times \dfrac{10^{-2}}{10^{-7}} = \dfrac{6{,}237}{11 \times 5{,}625}$
$\times 10^{-2-(-7)} = \dfrac{6{,}237}{11 \times 5{,}625} \times 10^5 = 0{,}100\,8 \times 10^5 = 10\,080$
On peut fabriquer plus de 10 000 de ces livres avec une feuille A4.

91 **a.** Superficie actuelle de cette poubelle géante :
$6{,}2 \times 55 \times 10^4 \text{ km}^2 = 341 \times 10^4$ km
$= 3{,}41 \times 10^2 \times 10^4$ km²
$= 3{,}41 \times 10^6$ km².
b. Nombre de déchets dans cette poubelle géante :
$7{,}5 \times 10^5 \times 341 \times 10^4 = 2\,557{,}5 \times 10^9$
$= 2{,}557\,5 \times 10^3 \times 10^9$
$= 2{,}557\,5 \times 10^{12}$

c. • 7×10^6 tonnes $= 7 \times 10^9 \times 10^3$ kg
$= 7 \times 10^9$ kg.

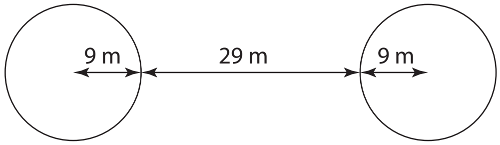
• 5 ans $= 5 \times 354$ jours $= 1\,825$ jours.

• Donc la masse de plastique récupérée chaque jour est $\dfrac{7 \times 10^9}{1\,825}$ kg soit environ $3{,}835\,616 \times 105$ kg.

92 **a.** $\dfrac{18}{165 \times 10^9} = \dfrac{18}{165} \times 10^{-9} \approx 0{,}109 \times 10^{-9}$

Un ordre de grandeur du diamètre, en m, d'un atome de cristal de fer est donc 10^{-10}.

b.

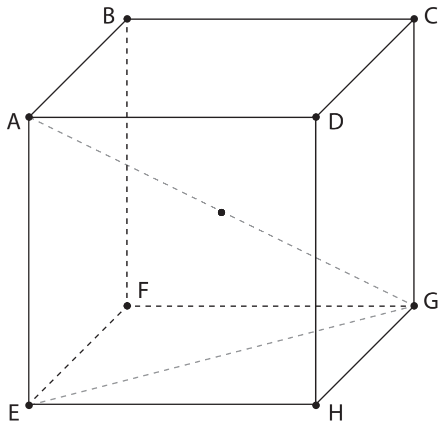


La longueur de l'arête du cube de l'Atomium est 47 m.

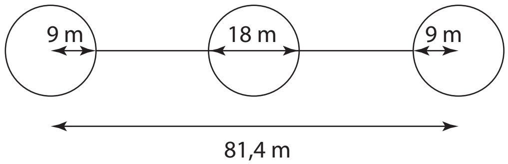
$\dfrac{47}{165 \times 10^9} = \dfrac{47}{165} \times 10^{-9} \approx 0{,}28 \times 10^{-9}$

La longueur de l'arête du cube d'un cristal de fer est proche de $0{,}28 \times 10^{-9}$ m, soit 0,28 nm. Elle n'est pas supérieure à 25 nm. Gaston a tort.

c.



Le triangle EHG est rectangle en H.
L'égalité de Pythagore s'écrit :
$EG^2 = EH^2 + HG^2$
$EG^2 = 47^2 + 47^2$
$EG^2 = 4\,418$
Le triangle AEG est rectangle en E.
L'égalité de Pythagore s'écrit :
$AG^2 = AE^2 + EG^2$
$AG^2 = 47^2 + 4\,418$
$AG^2 = 6\,627$
Avec la calculatrice, on obtient une valeur approchée de AG : 81,4 m.



$(81{,}4 - 9 - 18 - 9) : 2 = 22{,}7$

La longueur des tubes reliant la sphère centrale aux autres sphères de l'Atomium est proche de 23 m.

93 **1. a.** • Le nombre obtenu est $\dfrac{2 \times 10^{11} \times 10^{-5}}{1\,000}$.

• $\dfrac{2 \times 10^{11} \times 10^{-5}}{1\,000} = 2 \times \dfrac{10^{11+(-5)}}{10^3}$
$= 2 \times \dfrac{10^6}{10^3}$
$= 2 \times 10^{6-3}$
$= 2\,000.$

Donc si l'on choisit 2 on obtient 2 000.

b. • Le nombre obtenu est $\dfrac{0{,}35 \times 10^{11} \times 10^{-5}}{1\,000}$.

• $\dfrac{-5 \times 10^{11} \times 10^{-5}}{1\,000} = -5 \times \dfrac{10^{11+(-5)}}{10^3}$
$= -5 \times \dfrac{10^6}{10^3}$
$= -5 \times 10^{6-3}$
$= -5\,000.$

c. • Le nombre obtenu est $\dfrac{0{,}35 \times 10^{11} \times 10^{-5}}{1\,000}$.

• $\dfrac{0{,}35 \times 10^{11} \times 10^{-5}}{1\,000} = 0{,}35 \times \dfrac{10^{11+(-5)}}{10^3}$
$= 0{,}35 \times \dfrac{10^6}{10^3}$
$= 0{,}35 \times 10^{6-3}$
$= 350.$

2. Il semble que pour obtenir le résultat final on multiplie le nombre de départ par 1 000.

3. On note x le nombre choisi au départ.

• $10^{11} \times x = 10^{11}x$

• $10^{11}x \times 10^{-5} = 10^{11+(-5)}x = 10^6 x$

• $\dfrac{10^6 x}{1\,000} = \dfrac{10^6 x}{10^3} = 10^{6-3}x = 10^3 x = 1\,000x.$

La conjecture est validée.

94 Manon a effectué le calcul suivant :
$5^{25} \times 2^{25} = (5 \times 2)^{25} = 10^{25}$.

95 Le volume de sable contenu dans la fosse est :
$9 \text{ m} \times 2{,}75 \text{ m} \times 0{,}1 \text{ m} = 2{,}475 \text{ m}^3$.
$2{,}475 \text{ m}^3 = 2{,}475 \times 10^9 \text{ mm}^3$.
100 grains de sable occupent un volume de $5{,}2 \text{ mm}^3$.
$\dfrac{2{,}475 \times 10^9 \times 100}{5{,}2} \approx 4{,}8 \times 10^{10}$
donc le nombre de grains de sable contenus dans la fosse de réception est proche de 48 milliards.

96 • **Traduction**
Le volume de la chambre de Matthew est 40 m^3.
Il y a $3{,}4 \times 10^9$ particules de poussière par mètre cube.

a. Calculer le nombre de particules de poussière présentes dans la chambre de Matthew.

Donner la réponse en notation scientifique.

b. Une particule de poussière a une masse de $7{,}53 \times 10^{-10}$ g. Calculer la masse de poussière présente dans la chambre de Matthew.

● **Solution**

a. $40 \times 3{,}4 \times 10^9 = 156 \times 10^9 = 1{,}56 \times 10^{11}$.

Donc il y a $1{,}56 \times 10^{11}$ particules de poussière dans la chambre de Matthew.

b. $1{,}56 \times 10^{11} \times 7{,}53 \times 10^{-10}\text{ g} = 11{,}746\,8 \times 10^{11+(-10)}\text{ g}$

$= 11{,}746\,8 \times 10^1\text{ g}$

$= 117{,}468\text{ g}$

Donc il y a 117,468 g de poussière dans la chambre de Matthew.

97 $\dfrac{6{,}8}{100} \times 3{,}93 = 0{,}068 \times 3{,}93 = 0{,}267\,24 = 2{,}672\,4 \times 10^{-1}$

donc une pièce de 5 centimes d'euro contient $2{,}672\,4 \times 10^{-1}$ g de cuivre, soit $2{,}672\,4 \times 10^{-4}$ kg.

$$\frac{2{,}672\,4 \times 10^{-4}}{1{,}055 \times 10^{-25}} = \frac{2{,}672\,4}{1{,}055} \times \frac{10^{-4}}{10^{-25}} = \frac{2{,}672\,4}{1{,}055} \times 10^{-4-(-25)}$$

$$= \frac{2{,}672\,4}{1{,}055} \times 10^{21} \approx 2{,}5 \times 10^{21}$$

Une pièce de 5 centimes d'euro contient environ $2{,}5 \times 10^{21}$ atomes de cuivre.

98

10^{-1}	10^2	10^{-1}	10^4	10^3	10^{-1}
10^{-1}	1	10	10^{-2}	10^2	1
10^3	10	10^2	10^{-1}	10	10^{-2}
10^2	10^{-1}	10^2	1	10^3	1
10^4	1	10^{-4}	10	10^4	10^{-1}
10^{-2}	10^{-1}	10^3	10^{-4}	10^2	10

99 **1. a.** ● $2^8 = 256$ donc l'écriture décimale de 2^8 a 3 chiffres.

● $5^8 = 390\,625$ donc l'écriture décimale de 5^8 a 6 chiffres.

● $10^8 = 100\,000\,000$ donc l'écriture décimale de 10^8 a 9 chiffres.

b. ● $2^{10} = 1\,024$ donc l'écriture décimale de 2^{10} a 4 chiffres.

● $5^{10} = 9\,765\,625$ donc l'écriture décimale de 5^{10} a 7 chiffres.

● $10^{10} = 10\,000\,000\,000$ donc l'écriture décimale de 10^{10} a 11 chiffres.

c. $3 + 6 = 9$ et $4 + 7 = 11$

On peut conjecturer que le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 10^n est la somme du nombre de chiffres de l'écriture décimale de 2^n et du nombre de chiffres de l'écriture décimale de 5^n.

2. $2^{2\,016} \times 5^{2\,016} = (2 \times 5)^{2\,106} = 10^{2\,016}$

L'écriture décimale de $10^{2\,106}$ a 2017 chiffres. En utilisant la conjecture émise en **1. c.**, on conclut que $m + n = 2017$.

100 $2^4 \times 5^3 = 16 \times 125 = 2\,000$

101

Période de la vie	Nombre de battements sur la période
1re année	$140 \times 60 \times 24 \times 354 = 7{,}358\,4 \times 10^7$
De 1 à 3 ans	$2 \times 110 \times 60 \times 24 \times 365 = 1{,}156\,32 \times 10^8$
De 3 à 6 ans	$3 \times 105 \times 60 \times 24 \times 365 = 1{,}655\,64 \times 10^8$
De 6 à 13 ans	$7 \times 95 \times 60 \times 24 \times 365 = 3{,}495\,24 \times 10^8$
De 13 à 70 ans	$57 \times 70 \times 60 \times 24 \times 365 = 2{,}097\,144 \times 10^9$
De 70 à 83 ans	$13 \times 65 \times 60 \times 24 \times 365 = 4{,}441\,32 \times 10^8$
Vie entière	$3{,}245\,58 \times 10^9$

Le cœur d'une personne bat en moyenne plus de 3 milliards de fois au cours de sa vie.

102 ● $3\uparrow\uparrow 3 = 3^{(3^3)} = 3^{27}$

● Avec une calculatrice « classique », on obtient :

$3^{27} \approx 7{,}625\,597\,485 \times 10^{12}$.

3^{27} est donc proche de $7\,625\,597\,485 \times 10^3$.

Donc l'écriture décimale du nombre $3\uparrow\uparrow 3$ possède $10 + 3$ chiffres c'est-à-dire 13 chiffres.

● Avec un tableur ou la calculatrice d'un ordinateur, on obtient :

$3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$.

Donc l'écriture décimale du nombre $3\uparrow\uparrow 3$ possède 13 chiffres.

103 $256 = 2^8 = (2^8)^1 = (2^1)^8$

donc on obtient les possibilités suivantes :

a	n	p
2	1	8
2	8	1

$2^8 = (2^2)^4 = (2^4)^2$

a	n	p
2	2	4
2	4	2

$2^8 = (4^1)^4 = (4^4)^1 = (4^2)^2$

a	n	p
4	1	4
4	4	1
4	2	2

$2^8 = (16^1)^2 = (16^2)^1$

a	n	p
16	2	1
16	1	2

$2^8 = (-2)^8$ donc on obtient de nouvelles possibilités en remplaçant a par son opposé dans les tableaux ci-dessus.

D'autre part, $2^8 = (2^{-1})^{-8}$ donc, à partir de chaque possibilité (a, n, p) déjà trouvée, on peut en fabriquer une nouvelle $(a, -n, -p)$.

104 $2^{30} = (2^{15})^2$

$= (2^{10})^3$

$= (2^6)^5$

$= 1\,073\,741\,824$.

Donc le mot de passe d'Anna est 1 073 741 824.

Dossier Brevet

105 **a.** $587\,000\,000 = 5{,}87 \times 10^8$

b. $10^2 \times 21 \times 10^{-7} = 2{,}1 \times 10^1 \times 10^{-7} = 2{,}1 \times 10^{1+(-5)}$
$= 2{,}1 \times 10^{-4}$

c. $(4 \times 10^{-3})^2 = 4 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-3} = 16 \times 10^{-3+(-3)}$
$= 1{,}6 \times 10^1 \times 10^{-6} = 1{,}6 \times 10^{-5}$

d. $\dfrac{5 \times 10^4}{0{,}8 \times 10^{-2}} = \dfrac{5}{0{,}8} \times 10^{4-(-2)} = 6{,}25 \times 10^6$

106 **a.** $8 \times 10^{15} + 2 \times 10^{15} = (8+2) \times 10^{15} = 10 \times 10^{15} = 10^{16}$
$= 1 \times 10^{16}$

b. $\dfrac{8 \times 10^3 \times 28 \times 10^{-2}}{14 \times 10^{-3}} = \dfrac{8 \times \mathbf{28}}{\mathbf{14}} \times \dfrac{10^3 \times 10^{-2}}{10^{-3}} = 8 \times 2$
$\times 10^{3+(-2)-(-3)} = 16 \times 10^4 = 160\,000$

c. $\dfrac{5 \times 10^6 \times 1{,}2 \times 10^{-8}}{2{,}4 \times 10^5} = \dfrac{5 \times \mathbf{1{,}2}}{\mathbf{2{,}4}} \times \dfrac{10^6 \times 10^{-8}}{10^5} = \dfrac{5}{2}$
$\times 10^{6+(-8)-5} = 2{,}5 \times 10^{-7}$

107 **a.** $\dfrac{10^5 + 1}{10^5} = \dfrac{100\,001}{100\,000} = 1{,}000\,01$

c. Le numérateur et le dénominateur d'une fraction égale à 1 sont égaux. Mais 10^{15} et $10^{15} + 1$ ne sont pas égaux, donc le résultat affiché n'est pas exact. Noah a raison.

108 **a.** 6×10^{24} kg
b. $3{,}844 \times 10^5$ km

109 **a.** $A = \dfrac{15 - 9 \times 10^{-3}}{5 \times 10^2} = \dfrac{15 - 0{,}009}{500} = \dfrac{14{,}991}{500}$
$= 0{,}029\,982$

110 **a.** 500 mg $= 500 \times 10^{-3}$ g $= 500 \times 10^{-3} \times 10^{-3}$ kg
$= 5 \times 10^2 \times 10^{-6}$ kg $= 5 \times 10^{-4}$ kg

$\dfrac{5\,000}{5 \times 10^{-4}} = \dfrac{\mathbf{5} \times 10^3}{\mathbf{5} \times 10^{-4}} = 10^{3-(-4)} = 10^7$

L'usine peut produire 10^7 gélules, soit 10 millions de gélules.

b. Une boîte contient 16 gélules.

$\dfrac{10^7}{16} = 625\,000$

625 000 boîtes peuvent être produites avec 5 tonnes de paracétamol.

c. • Volume des deux demi-sphères, en mm³ :
$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 3{,}5^3$
• Volume du cylindre, en mm³ :
$\mathcal{V} = \pi \times 3{,}5^2 \times 14$
• Volume d'une gélule, en mm³ :
$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 3{,}5^3 + \pi \times 3{,}5^2 \times 14 \approx 718$
Le volume d'une gélule est à peu près égal à 718 mm³.

111 **a.** $2^{39} \times 2 = 2^{39} \times 2^1 = 2^{40}$
donc Anna a raison.
b. $2^{11} = 2\,048$
c. $28 \times 10^{23} - 8 \times 10^{23} = (28 - 8) \times 10^{23} = 20 \times 10^{23} = 2 \times 10^1$
$\times 10^{23} = 2 \times 10^{24}$

112 **1.** Réponse **b.** $2{,}5 \times 10^{-7}$
2. Réponse **b.** $4{,}56 \times 10^{-4}$
3. Réponse **a.** $1{,}4 \times 10^{-2}$
4. Réponse **b.** $(-8)^{18}$
5. Réponse **c.** 0,005

113 **a.** $A = \dfrac{5}{4} - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{16} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 3}{\mathbf{3} \times \mathbf{2} \times 8} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{8}$
$= \dfrac{5 \times 2}{4 \times 2} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{10}{8} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{8}$

b. $B = \dfrac{16 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^4}{24 \times 10^{-3}} = \dfrac{16 \times 3}{24} \times \dfrac{10^{-5} \times 10^4}{10^{-3}}$
$= 2 \times 10^{-5+4-(-3)} = 2 \times 10^2 = 2 \times 100 = 200$

c. La fraction obtenue par Anissa n'est pas une fraction irréductible, car 21 et 24 sont des multiples de 3.
Ben a donné la notation scientifique de B. Il ne l'a donc pas écrit sous forme d'un nombre entier.

114 $4{,}5 \times 9{,}5 \times 10^{12} = 4{,}275 \times 10^{13}$
Le vaisseau a parcouru $4{,}275 \times 10^{13}$ km en 20 ans.

$\dfrac{4{,}275 \times 10^{13}}{20} = 2{,}137\,5 \times 10^{12}$

La vitesse moyenne du vaisseau est $2{,}137\,5 \times 10^{12}$ km par an.

115 **a.** • Pour l'expression A :
$100\,000 = 1 \times 10^5$
$10\,000 = 1 \times 10^4$
$1\,000\,000\,000 = 1 \times 10^9$
$10 = 1 \times 10^1$
$1\,000 = 1 \times 10^3$
• Pour l'expression B :
$50\,000\,000 = 5 \times 10^7$
$0{,}000\,002 = 2 \times 10^{-6}$
• Pour l'expression C :
$30\,000 = 3 \times 10^4$
$300 = 3 \times 10^2$
• Pour l'expression D :
$0{,}000\,003 = 3 \times 10^{-6}$

b. $A = \dfrac{1 \times 10^5 \times 1 \times 10^4 \times 1 \times 10^9}{1 \times 10^1 \times 1 \times 10^3} = 10^{5+4+9-1-3} = 10^{14}$
$B = 5 \times 10^7 \times 2 \times 10^{-6} = 10 \times 10^{7+(-6)} = 10 \times 10^1 = 10^2$
$C = (3 \times 10^4 \times 3 \times 10^2)^2 = (9 \times 10^6)^2 = 9 \times 10^6 \times 9 \times 10^6$
$= 81 \times 10^{12} = 8{,}1 \times 10^{13}$
$D = 0{,}000\,003^4 = (3 \times 10^{-6})^4 = 3^4 \times 10^{-6 \times 4} = 81 \times 10^{-24}$
$= 8{,}1 \times 10^{-23}$

116

a	$2a$	a^2	$2a^2$	$(2a)^2$
2	**4**	**4**	**8**	**16**
−3	**−6**	**9**	**18**	**36**
$\mathbf{\dfrac{2}{3}}$	$\dfrac{4}{3}$	$\mathbf{\dfrac{4}{9}}$	$\mathbf{\dfrac{8}{9}}$	$\mathbf{\dfrac{16}{9}}$

117 $A = \dfrac{65}{26} \times \dfrac{10^3 \times 10^{-5}}{10^2} = 2{,}5 \times 10^{3+(-5)-2} = 2{,}5 \times 10^{-4}$

$= 0{,}000\,25$

$B = 0{,}015\,3 + 0{,}032 - 0{,}000\,16 = 0{,}047\,14 = 4{,}714 \times 10^{-2}$

$C = \dfrac{1{,}6}{4} \times \dfrac{10^{-12}}{10^{-9}} = 0{,}4 \times 10^{-12-(-9)} = 0{,}4 \times 10^{-3} = 0{,}000\,4$

$= 4 \times 10^{-4}$

$D = \dfrac{0{,}3 \times 5}{4} \times \dfrac{10^2 \times 10^{-3}}{10^{-4}} = 0{,}375 \times 10^{2+(-3)-(-4)}$

$= 0{,}375 \times 10^3 = 375 = 3{,}75 \times 10^2$

118 **a.** $\dfrac{2 + \dfrac{3}{4}}{\dfrac{3}{4} - 5} = \dfrac{\dfrac{8}{4} + \dfrac{3}{4}}{\dfrac{3}{4} - \dfrac{20}{4}} = \dfrac{\dfrac{11}{4}}{\dfrac{-17}{4}} = \dfrac{11}{\mathbf{4}} \times \left(-\dfrac{\mathbf{4}}{17}\right) = -\dfrac{11}{17}$

b. $\dfrac{35 \times 10^2 \times 2 \times (10^{-2})^6}{42 \times 10^{-10}} = \dfrac{35 \times 2}{42} \times \dfrac{10^2 \times (10^{-2})^6}{10^{-10}}$

$= \dfrac{5 \times \mathbf{7} \times \mathbf{2}}{\mathbf{2} \times 3 \times \mathbf{7}} \times 10^{2+(-2)\times 6-(-10)} = \dfrac{5}{3} \times 10^{2-12+10} = \dfrac{5}{3} \times 10^0 = \dfrac{5}{3}$

c. $\dfrac{3 \times 10^4 + 5 \times 10^{-3}}{10^{-2}} = (30\,000 + 0{,}005) \times 10^2$

$= 30\,000{,}005 \times 100 = 3\,000\,000{,}5$

119 **a.** $A = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^6$

$B = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = (5 \times 3)^4 = 15^4$

b. $C = 2 \times 3 \times 10^{-8+6} = 6 \times 10^{-2} = 0{,}06$

120 $v = \dfrac{d}{t}$ donc $t = \dfrac{d}{v}$

$\dfrac{248 \times 10^6}{300\,000} = \dfrac{248 \times 10^6}{3 \times 10^5} = \dfrac{248}{3} \times 10^{6-5} = \dfrac{248}{3} \times 10 \approx 827$

$827 = 13 \times 60 + 47$

Donc la durée du parcours du signal a été de 14 min environ.

Les premières images sont donc parvenues du centre de la Nasa approximativement à 8 h 02 min.

121 **1.** 1 ua $= 1{,}495\,978\,707 \times 10^{11}$ m

2. a. ● Pour Vénus :

$D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^{1-1}$

$D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^0$

$D = 0{,}4 + 0{,}3$

$D = 0{,}7$ ua.

● Pour la Terre :

$D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^{2-1}$

$D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^1$

$D = 0{,}4 + 0{,}6$

$D = 1$ ua (on retrouve la définition d'une unité astronomique).

● Pour Mars :

$D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^{3-1}$

$D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^2$

$D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 4$

$D = 1{,}6$ ua.

b. 1 ua $= 1{,}495\,978\,707 \times 10^8$ km

● Pour Vénus :

$D = 0{,}7 \times 1{,}495\,978\,707 \times 10^8 = 104\,718\,509{,}49$ km.

● Pour la Terre :

$D = 1$ ua $= 1{,}495\,978\,707 \times 10^8$ km.

● Pour Mars :

$D = 1{,}6 \times 1{,}495\,978\,707 \times 10^8 = 239\,356\,593{,}12$ km.

c. $0{,}4 + 0{,}3 \times 2^{4-1} = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^3 = 0{,}4 + 0{,}3 \times 8 = 2{,}8$

2,8 ua = 418 874 037,96 km.

Donc la loi de Titus-Bode n'est pas vérifiée pour Jupiter.

122 **1. a.** $8\,! = 40\,320$

$3^7 = 2\,187$

$12\,! = 479\,001\,600$

$2^{10} = 1\,024$

La notation scientifique du nombre de combinaisons possibles est $4{,}325\,200\,327 \times 10^{19}$.

b. À raison d'un milliard de combinaisons par seconde, Rebecca aura besoin de

$\dfrac{4{,}325\,200\,327 \times 10^{19}}{10^9} = 4{,}325\,200\,327 \times 10^{10}$ s.

Dans une année, il y a $365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31\,536\,000$ s.

$\dfrac{4{,}325\,200\,327 \times 10^{10}}{31\,536\,000} \approx 1\,372$

L'affirmation de Rebecca est vraie : il lui faudrait même plus de 1 300 ans pour essayer toutes les combinaisons.

2. La notation scientifique du nombre de positions différentes du Rubik's Revenge est proche de $7{,}401\,2 \times 10^{45}$.

123 La longueur en km d'un pixel est

$0{,}45 \times 10^{-6} = 4{,}5 \times 10^{-7}$.

L'aire d'un pixel en km² est

$4{,}5 \times 10^{-7} \times 4{,}5 \times 10^{-7} = 2{,}025 \times 10^{-13}$.

$\dfrac{1\,486{,}47 \times 10^5}{2{,}025 \times 10^{-13}} \approx 7 \times 10^{20}$

Il faudrait approximativement 7×10^{20} pixels pour recouvrir les terres émergées, soit 700 milliards de milliards de pixels.

124 1 L = 1 dm³ = 106 mm³

Dans 1 L de sang, il y a donc $10^6 \times 5 \times 10^6$ globules rouges.

Ces 5×10^{12} globules rouges ont un volume de 450 cm³.

1 mm $= 10^3$ µm donc 1 mm³ $= 10^9$ µm³

450 cm³ $= 450 \times 10^3$ mm³ $= 450 \times 10^3 \times 10^9$ µm³

$= 450 \times 10^{12}$ µm³

$\dfrac{450 \times 10^{12}}{5 \times 10^{12}} = 90$

Le volume d'un globule rouge est 90 µm³.

125 **a.** $1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$ donc Zoé a raison.

b. Les nombres 370 et 371 vérifient également cette propriété.

Utiliser le calcul littéral pour résoudre ou démontrer

CHAPITRE 2

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

❶ Le point sur le début du cycle 4

L'attendu de fin de cycle est « Utiliser le calcul littéral ».
Depuis le début du cycle 4, les élèves ont été amenés à acquérir des compétences qui doivent leur permettre d'atteindre cet objectif.

- En 5ᵉ, les élèves ont appris à utiliser et à produire des expressions littérales. La lettre avait alors statut de variable. Ils ont appréhendé la notion d'équation, avec un travail sur les égalités vues comme assertions dont la vérité est à examiner. Ainsi les élèves ont appris à tester si une égalité comportant un nombre indéterminé est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques. Une nouvelle signification du signe = a été mise en évidence.

- En 4ᵉ, les élèves ont renforcé leurs compétences en utilisation et production d'expressions littérales. Ils ont appris à supprimer les signes × inutiles, à utiliser la règle algébrique des signes.
Ils ont utilisé la distributivité de la multiplication sur l'addition pour développer et pour factoriser des expressions dans des cas très simples, conformément au programme. Ils ont réduit des expressions littérales. Le développement d'expressions du type $(a + b)(c + d)$ a été étudié.
Ils ont continué à calculer la valeur d'une expression littérale en donnant à la variable des valeurs numériques.

D'autre part, les élèves ont appris à interpréter des schémas, à en réaliser, afin de commencer à résoudre des problèmes du premier degré à une inconnue. Ils ont appris à modéliser une situation à l'aide d'une formule, d'une équation, d'une inégalité. La mise en équation d'un problème a été abordée, avec ses différentes étapes (l'équation obtenue étant du premier degré à une inconnue).
La résolution d'équations simples du premier degré à une inconnue a été ainsi abordée, avec une utilisation forte des deux règles mises en évidence :
– lorsqu'on additionne (ou soustrait) un même nombre à chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité ;
– lorsqu'on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul chaque membre d'une égalité, on obtient une autre égalité.
Remarque : en ce qui concerne les inéquations, les élèves ont pour seules compétences ce qu'ils ont appris précédemment (comparaison de nombres, repérage sur la droite graduée). En particulier les notions (sens, vocabulaire, symboles) « strictement inférieur à » ou « strictement supérieur à », comme celle de « supérieur ou égal à » sont nouvelles pour l'élève, qui a seulement rencontré le symbole ⩽ et sa traduction « est inférieur ou égal à » lorsqu'il a réparti des données dans des classes de même amplitude, en organisation de données.
À noter que le contenu de ce chapitre est dense. On pourra le traiter à différents moments de l'année.

❷ Je découvre

Activité 1

L'objectif de cette activité est de découvrir des identités remarquables.

- Pour introduire le développement de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, nous avons choisi un support visuel géométrique (a et b désignent ici alors des longueurs, positives).
On généralise ensuite pour le cas où a et b sont des nombres relatifs en développant l'expression $(a + b)^2$.
On pourra utiliser un tableur pour contrôler que deux colonnes, $(a + b)^2$ et $a^2 + 2ab + b^2$, affichent la même valeur pour un très grand nombre de valeurs différentes de a et b ; cela peut constituer un apport supplémentaire.
- On introduit ensuite les deux autres identités remarquables. Le support géométrique pourra, là encore, être envisagé en classe si nécessaire, l'utilisation du tableur également.
- On pourra expliquer aux élèves qu'une identité est une égalité qui est vraie quelles que soient les valeurs données aux lettres qui figurent dans l'égalité.
- On termine cette activité par une application d'une de ces identités remarquables à du calcul mental. Ce genre d'application donne du sens à ces identités remarquables.
On fera observer qu'on utilise la dernière identité obtenue en la lisant de droite à gauche. On pourra introduire l'expression « différence de deux carrés ».
On pourra compléter cette question en demandant de calculer mentalement par exemple 21^2 ou 99^2 ou…

Activité 2

L'objectif de cette activité est de résoudre un problème de la vie quotidienne après l'avoir mis en équation. Les élèves sont amenés à suivre des consignes qui permettent de résoudre ce problème par une méthode algébrique. Les différentes étapes sont mises en évidence :
❶ choix de l'inconnue ;
❷ mise en équation ;
❸ résolution de l'équation ;
❹ interprétation du résultat.
On pourra passer un peu de temps sur ces étapes.
À la question **c.**, on pourra réactiver les deux règles qui permettent d'obtenir une égalité à partir d'une première égalité.

Activité 3

Chaque question de cette activité a un objectif précis.

● L'objectif de la question **1.** est d'étudier les symboles d'inégalité (<, >, ⩽, ⩾) et d'installer leur signification.

Le vocabulaire lié aux symboles d'inégalités doit être bien expliqué et travaillé (en particulier depuis quelques années les élèves lisaient l'inégalité $a < b$: « a est inférieur à b » ; désormais, ils liront « a est strictement inférieur à b »).

Il faudra passer un peu de temps à étudier les symboles ⩽ et ⩾ ainsi que leur signification. Si le symbole ⩽ a été rencontré en organisation de données dès le début du cycle lors de la répartition de données en classes d'égale amplitude ou lors de l'interprétation ou la réalisation d'histogrammes, il faudra néanmoins y revenir et introduire le symbole ⩾.

Il sera pertinent de passer un peu de temps sur des inégalités telles que $3 \geqslant 3$ qui sont vraies.

Ces inégalités sont représentées sur une droite graduée en coloriant une demi-droite. On a fait le choix de ne pas matérialiser l'appartenance ou non de l'origine de la demi-droite à la partie coloriée par un crochet. À notre sens, ces notations relèvent de la notion d'intervalle introduite au cycle 5. On a préféré colorier ou non l'origine de la demi-droite selon le cas.

● L'objectif de la question **2.** est de découvrir les effets des opérations sur l'ordre.

À partir de situations numériques simples, les élèves sont amenés à émettre des conjectures :

– les nombres $a + c$ et $b + c$ semblent rangés dans le même ordre que les nombres a et b ;

– les nombres $a - c$ et $b - c$ semblent rangés dans le même ordre que les nombres a et b ;

– les nombres $a \times c$ et $b \times c$ sont rangés dans le même ordre que a et b si c est strictement positif, dans l'ordre inverse si c est strictement négatif.

Les règles seront admises.

● L'objectif de la question **3.** est de donner aux élèves une méthode algébrique de résolution d'une inéquation, en cohérence avec la méthode algébrique de résolution d'une équation, et en utilisant les règles étudiées à la question **2.** sur les inégalités.

❸ J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

● Suite à l'activité 1, on peut étudier le paragraphe 1 « Identités remarquables ».

On passera un peu de temps sur les propriétés de développement et de factorisation et pour étudier les trois exemples.

À noter qu'on a choisi de présenter deux exemples de développement, l'un avec un coefficient de x égal à 1, l'autre égal à 3. Il faudra certainement insister sur le fait que $(3x)^2$ est égal à $3x \times 3x$ c'est-à-dire à $9x^2$.

Le 3e exemple porte sur une factorisation. On mettra en évidence une différence de deux carrés avant de factoriser.

● Suite à l'activité 2, on peut étudier le paragraphe 2 « Résolution algébrique d'une équation du 1er degré ». On admettra qu'une équation du premier degré à une inconnue $ax + b = cx + d$, avec $a \neq c$, a une solution et une seule. Cela permet de décider que la valeur obtenue pour l'inconnue est la solution de l'équation sans avoir besoin de vérifier que les deux membres de l'égalité ont la même valeur.

Il est important de faire ressortir qu'on peut alléger l'écrit lors des étapes de la résolution en effectuant un certain nombre de calculs mentalement, mais que les règles concernant les égalités sont toujours les mêmes et bien présentes.

● Suite à l'activité 3, on peut étudier le paragraphe 3 « Inéquation du 1er degré à une inconnue ».

On étudiera le premier exemple afin d'expliquer comment tester une inéquation pour savoir si une valeur est ou non solution de l'inéquation.

On passera un peu de temps sur les règles (admises) qui sont utilisées lors de la résolution algébrique d'une inéquation, puis sur l'exemple, en insistant sur la conclusion : une inéquation n'a pas une seule solution mais elle a de nombreuses solutions qu'il convient de caractériser. La représentation de ces solutions sur une droite graduée est la suite logique de ce qui a été fait à la question **1.** de l'activité 3.

● On pourra reporter l'étude du paragraphe 4 « Désignation de nombres » à plus tard. En effet, même si son contenu a déjà été abordé dans les premières années du cycle 4, il sera préférable d'y revenir au moment de l'exercice 23 de la rubrique « À l'oral ».

On insistera sur le fait que, dans ce domaine, on travaille avec des nombres entiers.

Exercice résolu

Conformément au programme, l'objectif de cet exercice résolu est d'étudier un problème qui se ramène au premier degré, en factorisant une équation produit nul simple à l'aide d'une identité remarquable.

On pourra reporter à plus tard l'étude de cet exercice, comme les exercices « Sur le même modèle ». Les élèves devront faire leur apprentissage sur les identités remarquables avant de pouvoir aborder ces situations dans leur totalité.

❹ Compléments

Expressions littérales

Dans cette rubrique, on produit, on développe, on réduit, on factorise des expressions littérales. On a veillé à assurer une grande progressivité dans les exercices.

● On pourra commencer par les exercices 5 à 10 ainsi que 18 et 19 de la rubrique « À l'oral » afin d'utiliser les identités remarquables et de réactiver le vocabulaire « développer » et « factoriser », « forme développée » et « forme factorisée »

● Les exercices 24 à 26 permettent de renforcer les compétences sur des développements utilisant la distributivité et sur des développements de la forme $(a+b)(c+d)$.

- Les exercices 27 à 31 portent sur le développement d'expressions littérales utilisant les identités remarquables, dans des cas très simples.

Même objectif dans les exercices 34 à 36 mais cette fois l'élève doit calculer $(3x)^2$ par exemple et non plus x^2.

- Dans les exercices 32, 33 et 37, l'élève devra produire des expressions littérales avant de les développer et de les réduire.

- Les exercices 38 à 42 portent sur la factorisation utilisant la distributivité d'abord, puis les identités remarquables.

Équations

Dans cette partie, on résout des équations, du premier degré à une inconnue ou s'y ramenant et on modélise des situations par des équations que l'on résout.

- On pourra proposer les exercices 11 et 12 de la rubrique « À l'oral » pour reprendre contact avec la résolution de problèmes, puis les exercices 20 puis 13 pour réactiver les compétences en résolution d'équation du premier degré à une inconnue.

- Dans les exercices 43 à 47, on résout des équations du premier degré. On a opté pour une grande progressivité dans ces exercices afin que les élèves avancent raisonnablement dans les apprentissages. Seule la dernière équation du dernier exercice est un peu délicate, avec développement à l'aide d'une identité remarquable (on obtient une équation comportant le terme x^2 dans chaque membre, donc on peut se ramener aisément à une équation du premier degré).

- Les exercices 48 et 49 portent sur des programmes de calcul. On peut résoudre ces deux exercices soit à l'aide d'un schéma, soit à l'aide du tableur, soit en modélisant la situation et en résolvant l'équation du premier degré obtenue.

- Dans les exercices 50 à 52, basés sur une situation de la vie quotidienne ou sur un jeu, on propose à l'élève de traduire la situation par une équation et on l'aide dans la modélisation.

- Dans les exercices 53 à 55, c'est à l'élève de s'organiser pour traduire la situation par une équation. À lui ensuite de résoudre l'équation et de conclure. Deux de ces exercices sont à support géométrique.

- À partir de l'exercice 56, on résout des équations « produit nul ».

On commencera par proposer l'exercice 14 de la rubrique « À l'oral », puis l'exercice 21 de la même rubrique. On trouvera une formulation pour la rédaction dans l'exercice résolu 1.

Les élèves pourront ensuite s'exercer avec les exercices 56 à 59.

Ils auront alors la possibilité de résoudre les équations des exercices 60 à 62, dans lesquels on se ramène à une équation produit nul après avoir factorisé. Les situations envisagées sont simples.

On pourra alors exploiter avec profit l'exercice résolu 1, et proposer l'exercice 63 ainsi que les exercices 2 et 3 « Sur le même modèle ».

Inéquations du premier degré

On pourra commencer par les exercices 15 à 17 et 22 de la rubrique « À l'oral ».

Ici aussi, on a veillé à assurer une grande progressivité dans les exercices de « Je m'entraîne ».

- Après avoir utilisé les règles qui permettent de résoudre une inéquation du premier degré (exercice 64), l'élève teste des inéquations pour savoir si un nombre en est ou non une solution (exercice 65), puis il associe les solutions d'inéquations et leur représentation sur une droite graduée (exercice 66). Il est particulièrement important que les élèves comprennent qu'une inéquation a de nombreuses solutions, qui peuvent être représentées par une demi-droite.

- Dans les exercices 67 à 69, on résout des inéquations dans des cas très simples. Ces exercices doivent permettre aux élèves de s'emparer de la résolution algébrique d'une inéquation.

- Dans les exercices 70 à 72, on résout des inéquations de la forme $ax+b<cx+d$.

À noter que dans l'exercice 70, on pourra faire placer sur la représentation des solutions (question **c.**) les nombres sur lesquels le test a porté (question **a.**). Cela permet de donner du sens à ce qu'est une solution d'une inéquation.

- Les exercices 73 et 74 portent sur la résolution de problèmes de la vie quotidienne liés à une inéquation. Dans le second de ces exercices, les élèves sont guidés pas à pas. Ce n'est pas le cas du premier exercice, qui peut être résolu grâce à un raisonnement logique.

Désignation de nombres

Un seul exercice dans cette partie (exercice 75), qu'on fera précéder de l'exercice 23 de la rubrique « À l'oral ».

Par contre, on trouvera plusieurs exercices portant sur ce thème dans « J'utilise mes compétences ».

Avec un logiciel

On consacre la page 35 à l'utilisation du tableur. L'objectif de ces deux exercices est de conjecturer avec le tableur puis de démontrer la conjecture à l'aide du calcul littéral.

- L'exercice 86 propose de montrer un résultat général : la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est un nombre impair.

- L'exercice 87 propose d'étudier un programme de calcul et plus particulièrement d'observer si le résultat obtenu peut être négatif.

Ici, on modélise la situation par une inéquation.

J'utilise mes compétences

Les situations supports des exercices de ces pages sont suffisamment variées pour montrer l'impact de la résolution d'équations et d'inéquations. Les exercices sont de difficultés très variées. Ainsi, chaque élève doit pouvoir y trouver source de motivation.

● Dans les exercices 88, 89, 94 et 96 à 99, on utilise le calcul littéral pour montrer un résultat général. Dans certaines de ces situations, on procède à quelques essais qui permettent d'établir une conjecture, puis on valide cette conjecture. L'élève peut ainsi être amené à développer ou à factoriser en utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition ou une identité remarquable.

● Dans les exercices 90, 93, 100, 105 et 108 à 111, on met un problème en équation pour le résoudre, l'équation obtenue étant du premier degré.

● Dans les exercices 92 et 101, on modélise la situation par une inéquation du premier degré que l'on résout.

● Dans l'exercice 102, on invite les élèves à s'insérer dans un débat sur les solutions d'une inéquation du premier degré.

● À l'occasion de l'exercice 98, on pourra rappeler qu'il suffit d'un contre-exemple pour réfuter une affirmation.

● Dans les exercices 91, 95, 103, 104, 106 et 112, on traduit la situation par une équation du second degré, qui se ramène au premier degré, par exemple par une factorisation. On a alors à résoudre une équation « produit nul ».

● Dans l'exercice 107, on propose une situation où il sera pertinent de faire le lien entre le graphique obtenu, la formule et un tableau de valeurs.

● L'exercice 108 est un problème lié à l'histoire et à l'histoire des mathématiques. Si l'enseignant-e le souhaite, il (elle) peut travailler en collaboration avec le (la) professeur-e d'histoire.

● La narration de recherche (exercice 111) porte sur un sujet à support géométrique simple. Il est possible que certains élèves commencent par avoir envie d'essayer de faire la figure. De cet essai, peuvent naître des relations entre les longueurs des côtés des différents carrés.

Dossier Brevet

● On a choisi de proposer deux QCM, l'un sur développement et factorisation (113), l'autre sur les solutions d'une équation ou d'une inéquation (114).
On pourra insister sur les conseils (tests, recherche au brouillon, …).

● Les exercices 118 à 120 portent sur des programmes de calcul, avec trois objectifs différents : expliquer si des affirmations sont vraies ou fausses, trouver le nombre choisi au départ quand on connaît le résultat, montrer un résultat général.

● Les exercices 121 et 125 permettent de relier géométrie, grandeurs et mesures et résolution d'équation.

● Dans les exercices 122, 125 et 126, on modélise trois situations de la vie quotidienne par une inéquation que l'on résout.
On pourra passer un peu de temps lors de l'interprétation du résultat.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. c. ; **2. b.** ; **3. a.** et **b.** ; **4. a.** ; **5. a.** et **c.**

Je découvre

Activité 1

1 **a.** Aire du carré de côté $a + b$:
● $(a + b)^2$ ● $a^2 + ab + ab + b^2$
b. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2 $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
c'est-à-dire $a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$
ou $a^2 + ab + ab + b^2$ ce qui s'écrit encore, après réduction, $a^2 + (1 + 1)ab + b^2$ soit $a^2 + 2ab + b^2$.

3 **a.** $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$
c'est-à-dire $a \times a - a \times b - b \times a + b \times b$
ou $a^2 - ab - ab + b^2$ ce qui s'écrit encore, après réduction, $a^2 + (-1 - 1)ab + b^2$ soit $a^2 - 2ab + b^2$.
b. $(a + b)(a - b) = a \times a - a \times b + b \times a - b \times b$
ou $a^2 - ab + ab - b^2$ ce qui s'écrit encore, après réduction, $a^2 + (-1 + 1)ab + b^2$ soit $a^2 - b^2$.

4 $18,5^2 - 11,5^2 = (18,5 + 11,5)(18,5 - 11,5)$
En effet $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
c'est-à-dire $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec ici $a = 18,5$ et $b = 11,5$.
$18,5^2 - 11,5^2 = 30 \times 7 = 210$.

Activité 2

a. On note x le prix d'un poster.
Le prix des trois posters est $x \times 3$ c'est-à-dire $3x$.
Il reste 7,98 € à Noé, donc avant son achat Noé possédait, en €, $3x + 7,98$.

b. Mardi, le prix des posters a baissé de 2 €, donc chaque poster coûte désormais, en €, $x - 2$.
Noé aurait pu acheter 5 posters exactement, donc Noé possédait, en €, $(x - 2) \times 5$ c'est-à-dire $5(x - 2)$.

c. Les deux expressions de la somme d'argent de Noé sont égales donc $3x + 7,98 = 5(x - 2)$.
On résout cette équation.
On développe le membre de droite :
$5(x - 2) = 5 \times x - 5 \times 2$ soit $5x - 10$.
On résout l'équation $3x + 7,98 = 5x - 10$.

$$3x + 7,98 - 3x = 5x - 10 - 3x$$
$$7,98 = 2x - 10$$
$$7,98 + 10 = 2x - 10 + 10$$
$$17,98 = 2x$$
$$\frac{17,98}{2} = \frac{2x}{2}$$
$$x = 8,99$$

On vérifie que 8,99 est solution :
$3 \times 8,99 + 7,98 = 26,97 + 7,98 = 34,95$
$5 \times (8,99 - 2) = 5 \times 6,99 = 34,95$
On trouve le même résultat, donc 8,99 est la solution de l'équation $3x + 7,98 = 5(x - 2)$.

d. Lundi, Noé a acheté ses posters au prix de 8,99 € l'un. Le montant de ses économies était 34,95 €.

Activité 3

1 b.

Phrase	Inégalité	Représentation
t est inférieur ou égal à 2.	$t \leqslant 2$	−2 −1 0 1 2 3 4
u est strictement supérieur à 4.	$u > 4$	3 4 5 6 7 8 9

Remarque : ci-dessus, ce qui est en noir gras équivaut à ce qui est en rouge sur le manuel.

2 a. Exemple de réponse :
On choisit les nombres $a = 5$ et $b = 3$.
On a $a > b$ (5 > 3).

- Pour $c = 4$:
$a + c = 5 + 4 = 9$ et $b + c = 3 + 4 = 7$.
$9 > 7$ donc $a + c > b + c$.
$a - c = 5 - 4 = 1$ et $b - c = 3 - 4 = -1$.
$1 > -1$ donc $a - c > b - c$.
- Pour $c = 0{,}5$:
$a + c = 5 + 0{,}5 = 5{,}5$ et $b + c = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$.
$5{,}5 > 3{,}5$ donc $a + c > b + c$.
$a - c = 5 - 0{,}5 = 4{,}5$ et $b - c = 3 - 0{,}5 = 2{,}5$.
$4{,}5 > 2{,}5$ donc $a - c > b - c$.

b. Exemple de réponse :
On choisit les nombres $a = 7$ et $b = 4$.
On a $a > b$ (7 > 4).

- Pour $c = 3$:
$a \times c = 7 \times 3 = 21$ et $b \times c = 4 \times 3 = 12$.
$21 > 12$ donc $a \times c > b \times c$.
- Pour $c = -7$.
$a \times c = 7 \times (-7) = -49$ et $b \times c = 4 \times (-7) = -28$.
$-49 < -28$ donc $a \times c < b \times c$.
- Pour $c = 8$:
$a \times c = 7 \times 8 = 56$ et $b \times c = 4 \times 8 = 32$.
$56 > 32$ donc $a \times c > b \times c$.
- Pour $c = -12$:
$a \times c = 7 \times (-12) = -84$ et $b \times c = 4 \times (-12) = -48$.
$-84 < -48$ donc $a \times c < b \times c$.

c. • Conjecture : il semble que si les nombres a et b sont tels que $a > b$, alors les nombres $a + c$ et $b + c$ sont rangés dans le même ordre c'est-à-dire $a + c > b + c$.

• Conjecture : il semble que si les nombres a et b sont tels que $a > b$, alors les nombres $a - c$ et $b - c$ sont rangés dans le même ordre c'est-à-dire $a - c > b - c$.

• Conjecture : il semble que si les nombres a et b sont tels que $a > b$, alors les nombres $a \times c$ et $b \times c$ sont rangés dans le même ordre c'est-à-dire $a \times c > b \times c$ si le nombre c est strictement positif, mais ils sont rangés dans l'ordre inverse c'est-à-dire $a \times c < b \times c$ si le nombre c est strictement négatif.

3 a. et **b.**

$-3x + 4 > 1 - 2x$ On ajoute $2x$ à chaque membre.
$-x + 4 > 1$ On soustrait 4 à chaque membre.
$-x > -3$
$x < 3$ On divise chaque membre par − 1.

Les solutions de l'inéquation sont les nombres strictement inférieurs à 3.

J'applique le cours

2 a. On écrit les étapes successives du programme de calcul :

$$-4 \quad -2 \quad 4 \quad -21$$

Si l'on choisit −4, le résultat est −21.

b. On note n le nombre choisi au départ.

$$n \quad n+2 \quad (n+2)^2 \quad (n+2)^2 - 25$$

Le programme donne 0 comme résultat, donc on cherche pour quelles valeurs de n, $(n + 2)^2 - 25 = 0$.
On factorise le membre de gauche à l'aide d'une identité remarquable.
$(n + 2)^2 - 25 = (n + 2)^2 - 5^2$
$(n + 2)^2 - 25 = (n + 2 + 5)(n + 2 - 5)$
$(n + 2)^2 - 25 = (n + 7)(n - 3)$
Résoudre l'équation $(n + 2)^2 - 25 = 0$ revient à résoudre l'équation :

$$(n + 7)(n - 3) = 0.$$

Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$n + 7 = 0$ ou $n - 3 = 0$
$n = -7$ ou $n = 3$

−7 et 3 sont les solutions de l'équation.
Donc le programme donne 0 si l'on choisit −7 ou 3 comme nombre de départ.

3 On note n le nombre choisi au départ.
Voici les étapes successives du programme de calcul d'Inès.

$$n \quad n^2 \quad n^2 - 36$$

Le programme donne 0 comme résultat, donc on cherche pour quelles valeurs de n, $n^2 - 36 = 0$.
On factorise le membre de gauche à l'aide d'une identité remarquable.
$n^2 - 36 = n^2 - 6^2$
$n^2 - 36 = (n + 6)(n - 6)$
Résoudre l'équation $n^2 - 36 = 0$ revient à résoudre l'équation $(n + 6)(n - 6) = 0$.
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$n + 6 = 0$ ou $n - 6 = 0$
$n = -6$ ou $n = 6$

−6 et 6 sont les solutions de l'équation.
Donc le programme donne 0 si on choisit −6 ou 6 comme nombre de départ.
Inès n'a pas choisi le nombre 6, donc elle a choisi −6 comme nombre de départ.

4 a. $n^2 - 6n + 9 = 0$
Je reconnais une identité remarquable.
Je factorise : $n^2 - 6n + 9 = (n - 3)^2$
Résoudre l'équation $n^2 - 6n + 9 = 0$ revient à résoudre l'équation $(n - 3)^2 = 0$.

Seul le carré de 0 est égal à 0, donc $n - 3 = 0$ c'est-à-dire $n = 3$.
3 est la solution de l'équation.

b. 3 est un entier positif. Donc l'affirmation de Lou est fausse. En effet, lorsque $n = 3$, $n^2 - 6n + 9 = 0$.

À l'oral

5 Carré d'une somme

$A = (t + 3)^2$	$B = (x + 10)^2$
$A = t^2 + 2 \times t \times 3 + 3^2$	$B = x^2 + 2 \times x \times 10 + 10^2$
$A = t^2 + 6t + 9$	$B = x^2 + 20x + 100$
$C = (x + 0{,}5)^2$	$D = (8 + y)^2$
$C = x^2 + 2 \times x \times 0{,}5 + 0{,}5^2$	$D = 8^2 + 2 \times 8 \times y + y^2$
$C = x^2 + x + 0{,}25$	$D = 64 + 16y + y^2$

Carré d'une différence

$E = (x - 4)^2$	$F = (y - 6)^2$
$E = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$	$F = y^2 - 2 \times y \times 6 + 6^2$
$E = x^2 - 8x + 16$	$F = y^2 - 12y + 36$
$G = (t - 1)^2$	$H = (7 - y)^2$
$G = t^2 - 2 \times t \times 1 + 1^2$	$H = 7^2 - 2 \times 7 \times y + y^2$
$G = t^2 - 2t + 1$	$H = 49 - 14y + y^2$

6

$I = (x + 8)(x - 8)$	$J = (t - 5)(t + 5)$
$I = x^2 - 8^2$	$J = t^2 - 5^2$
$I = x^2 - 64$	$J = t^2 - 25$

7 On associe A et ❷, B et ❸, C et ❶.
En effet :
$A = 4x + 20 = 4 \times x + 4 \times 5 = 4 \times (x + 5)$
$B = 7x - 35 = 7 \times x - 7 \times 5 = 7 \times (x - 5)$
$C = x^2 - 5x = x \times x - 5 \times x = x \times (x - 5)$

8 a. $1 = 1^2$ et $2 = 2 \times 1 \times 1$
On reconnaît l'identité $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 1$.
Donc $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.
b. $25 = 5^2$ et $10 = 2 \times 1 \times 5$
On reconnaît l'identité $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec $a = x$ et $b = 5$.
Donc $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$.
c. $36 = 6^2$ et $12 = 2 \times 1 \times 6$
On reconnaît l'identité $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 6$.
Donc $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

9 a. $81 = 9^2$
On reconnaît l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = x$ et $b = 9$.
Donc $x^2 - 81 = x^2 - 9^2 = (x + 9)(x - 9)$.
b. $1 = 1^2$
On reconnaît l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = x$ et $b = 1$.
Donc $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1)$.
c. $9x^2 = (3x)^2$ et $4 = 2^2$
On reconnaît l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 3x$ et $b = 2$.
Donc $9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x + 2)(3x - 2)$.

10 • Louise se trompe. En effet, elle a oublié le 3e terme de l'expression E.
$4x^2 - 4x + 1 = 4x \times x - 4x \times 1 + 1 = 4x \times (x - 1) + 1$
Mais cette forme de E n'est pas une forme factorisée.
• $4x^2 = (2x)^2$; $4x = 2 \times 2x \times 1$ et $1 = 1^2$.
Louise aurait dû reconnaître l'identité $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 1$.
Donc $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2$ soit $(2x - 1)^2$.

11 50 € – 3 € = 47 €
Yaël a payé ses achats 47 €.
47 € – 15 € = 32 €
32 € : 4 = 8 €
Chaque roue coûte 8 €.

12 60 € – 10 € = 50 €
50 € = 25 € × 2
Donc Hugo a loué sa planche pour 2 h.

13 a. $x - 3 = -1$ On ajoute 3 à chaque membre.
$x = -1 + 3$
$x = 2$
2 est la solution de l'équation.
b. $2y = 5$ On divise chaque membre par 2.
$y = 2{,}5$
2,5 est la solution de l'équation.
c. $5x = 2x + 9$ On soustrait $2x$ à chaque membre.
$3x = 9$ On divise chaque membre par 3.
$x = 3$
3 est la solution de l'équation.

14 a. Le produit $5 \times x$ est nul lorsque x est égal à 0.
En effet $5 \times 0 = 0$.
b. Le produit $5 \times (x - 2)$ est nul lorsque x est égal à 2.
En effet $5 \times (2 - 2) = 5 \times 0 = 0$.
c. « a et b désignent deux nombres relatifs.
• Si $a = 0$ ou si $b = 0$, alors le produit $a \times b = 0$.
• Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$. »

15 a. $x > 5$: « x est strictement supérieur à 5. »
Deux valeurs de x : 7 et 12.
b. $x \leqslant -3$: « x est inférieur ou égal à –3. »
Deux valeurs de x : –5 et –3.
c. $x \geqslant 7$: « x est supérieur ou égal à 7. »
Deux valeurs de x : 10,5 et 7.
d. $x < -4$: « x est strictement inférieur à –4. »
Deux valeurs de x : –10 et –4,7.

16 a. $4x - 9 \mathbf{+ 9} \geqslant 1 \mathbf{+ 9}$
On obtient une nouvelle inégalité : $4x \geqslant 10$
b. On divise chaque membre de l'inégalité par 4 qui est un nombre positif, donc on conserve le sens de l'inégalité.
$$\frac{4x}{\mathbf{4}} \geqslant \frac{10}{\mathbf{4}}$$
On obtient une nouvelle inéquation : $x \geqslant 2{,}5$.

17 $-2x - 9 \mathbf{+ 9} \geqslant -3 \mathbf{+ 9}$
On obtient une nouvelle inégalité : $-2x \geqslant 6$

On divise chaque membre de l'inégalité par – 2 qui est un nombre négatif, donc on change le sens de l'inégalité.

$$\frac{-2x}{\mathbf{-2}} \leqslant \frac{6}{\mathbf{-2}}$$

On obtient une nouvelle inéquation : $x \leqslant -3$.

Calcul mental

18 $105 = 100 + 5$ donc $105^2 = (100 + 5)^2$.
On développe avec l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 100$ et $b = 5$.
$(100 + 5)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2$
$(100 + 5)^2 = 10\,000 + 1\,000 + 25$
donc $105^2 = 11\,025$.

19 • $99 = 100 - 1$, donc $99^2 = (100 - 1)^2$
On utilise l'identité remarquable :
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 100$ et $b = 1$.
$(100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$
$(100 - 1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.
Donc $99^2 = 9\,801$.

• $102 = 100 + 2$ et $98 = 100 - 2$
donc $102 \times 98 = (100 + 2) \times (100 - 2)$.
On utilise l'identité remarquable :
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 100$ et $b = 2$.
$(100 + 2) \times (100 - 2) = 100^2 - 2^2$
$(100 + 2) \times (100 - 2) = 10\,000 - 4 = 9\,996$
Donc $102 \times 98 = 9\,996$.

• $31 = 30 + 1$, donc $31^2 = (30 + 1)^2$
On utilise l'identité remarquable :
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 30$ et $b = 1$.
$(30 + 1)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 1 + 1^2$
$(30 + 1)^2 = 900 + 60 + 1 = 961$
Donc $31^2 = 961$.

20 On teste chaque équation pour $x = -2$.
a. • $2 \times (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$
• $3 \times (-2) + 5 = -6 + 5 = -1$
On trouve le même résultat donc – 2 est solution de l'équation.
b. • $-2 + 4 = 2$
• $2 \times (-2) - 2 = -4 - 2 = -6$
$2 \neq -6$ donc – 2 n'est pas solution de l'équation.
c. • $6 - 3 \times (-2) = 6 - (-6) = 6 + 6 = 12$
$12 \neq 0$ donc – 2 n'est pas solution de l'équation.

21 **a.** $(x + 1)(x - 5) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$x + 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$
$x = -1$ ou $x = 5$
– 1 et 5 sont les solutions de l'équation.
b. $(x - 6)^2 = 0$
Le carré d'un nombre est nul dans le seul cas où ce nombre est nul, c'est-à-dire :
$x - 6 = 0$
$x = 6$
6 est la solution de l'équation.
c. $(y + 3)^2 = 0$
Le carré d'un nombre est nul dans le seul cas où ce nombre est nul, c'est-à-dire :
$y + 3 = 0$
$y = -3$
– 3 est la solution de l'équation.

22 On teste chaque inéquation pour $x = -3$.
a. • $3 - 4 \times (-3) = 3 - (-12) = 3 + 12 = 15$
$15 \leqslant 15$ donc – 3 est solution de l'inéquation.
b. • $2 \times (-3) + 1 = -6 + 1 = -5$
• $3 \times (-3) = -9$
$-5 > -9$ donc – 3 est solution de l'inéquation.
c. • $-3 + 3 = 0$
• $2 \times (-3) = -6$
$0 \geqslant -6$ donc – 3 est solution de l'inéquation.

23 Le nombre entier qui suit le nombre entier n est $n + 1$.
Celui qui le précède est $n - 1$.

Je m'entraîne

24 On développe à l'aide de la propriété :
$$k(a + b) = ka + kb.$$
• $A = 3(5 - 4x)$
$A = 3 \times 5 - 3 \times 4x$ soit $A = 15 - 12x$.
• $B = -2(3y - 8)$
$B = -2 \times 3y - (-2) \times 8$ soit $B = -6y + 16$.
• $C = -4(a + 4)$
$C = -4 \times a + (-4) \times 4$ soit $C = -4a - 16$.
• $D = x(3 - x)$
$D = x \times 3 - x \times x$ soit $D = 3x - x^2$.
• $E = t(2t + 5)$
$E = t \times 2t + t \times 5$ soit $E = 2t^2 + 5t$.
• $F = 3y(y - 2)$
$F = 3y \times y - 3y \times 2$ soit $F = 3y^2 - 6y$.

25 On développe à l'aide de la propriété :
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$
• $G = (x + 7)(x + 3)$
$G = x \times x + x \times 3 + 7 \times x + 7 \times 3$
$G = x^2 + 3x + 7x + 21$
On réduit : $3x + 7x = (3 + 7) \times x = 10x$
Donc $G = x^2 + 10x + 21$.
• $H = (x - 5)(x + 2)$
$H = x \times x + x \times 2 + (-5) \times x + (-5) \times 2$
$H = x^2 + 2x - 5x - 10$.
On réduit : $2x - 5x = (2 - 5) \times x = -3x$
Donc $H = x^2 - 3x - 10$
• $I = (2x + 1)(x - 4)$
$I = 2x \times x + 2x \times (-4) + 1 \times x + 1 \times (-4)$
$I = 2x^2 - 8x + x - 4$
On réduit : $-8x + x = (-8 + 1) \times x = -7x$
Donc $I = 2x^2 - 7x - 4$.
• $J = (x - 3)(3x - 2)$
$J = x \times 3x + x \times (-2) + (-3) \times 3x + (-3) \times (-2)$
$J = 3x^2 - 2x - 9x + 6$
On réduit : $-2x - 9x = (-2 - 9) \times x = -11x$
Donc $J = 3x^2 - 11x + 6$.

26 **a.** La variable l représente la longueur du côté le plus court du rectangle et la variable L représente la longueur du côté le plus long du rectangle.

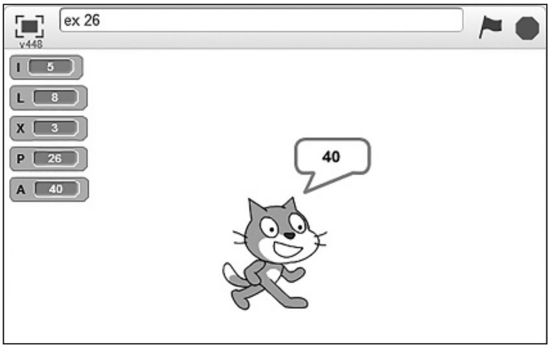
b. Le rôle du programme de Léa est de calculer le périmètre du rectangle puis son aire.

c. ● P = 2 × (l + L) donc $P = 2 \times (x + 2 + x + 5)$
$P = 2 \times (x + x + 2 + 5)$
$P = 2 \times ((1 + 1) \times x + 7)$
$P = 2 \times (2 \times x + 7)$
$P = 2 \times 2 \times x + 2 \times 7$
$P = 4 \times x + 14$ c'est-à-dire $P = 4x + 14$.

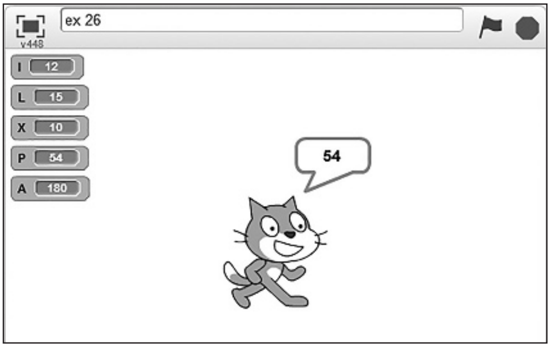
● A = l × L donc $A = (x + 2) \times (x + 5)$.
On développe.
$A = x \times x + x \times 5 + 2 \times x + 2 \times 5$
$A = x^2 + (5 + 2) \times x + 10$ c'est-à-dire $A = x^2 + 7x + 10$.

● Léa s'est trompée en calculant le périmètre du rectangle mais sa réponse pour l'aire est exacte.

d. ● Pour $x = 3$, le lutin annonce 26 pour P et 40 pour A.



● Pour $x = 10$, le lutin annonce 54 pour P et 180 pour A.



27 On développe à l'aide de l'identité remarquable :
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
● $A = (x + 3)^2$ $\quad a = x$ et $b = 3$
$A = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ soit $A = x^2 + 6x + 9$
● $B = (x + 8)^2$ $\quad a = x$ et $b = 8$
$B = x^2 + 2 \times x \times 8 + 8^2$ soit $B = x^2 + 16x + 64$
● $C = (x + 12)^2$ $\quad a = x$ et $b = 12$
$C = x^2 + 2 \times x \times 12 + 12^2$ soit $c = x^2 + 24x + 144$

28 On développe à l'aide de l'identité remarquable :
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
● $D = (x - 5)^2$ $\quad a = x$ et $b = 5$
$D = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2$ soit $D = x^2 - 10x + 25$
● $E = (x - 2)^2$ $\quad a = x$ et $b = 2$
$E = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2$ soit $E = x^2 - 4x + 4$
● $F = (x - 9)^2$ $\quad a = x$ et $b = 9$
$F = x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2$ soit $F = x^2 - 18x + 81$

29 On développe à l'aide de l'identité remarquable :
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$
● $G = (x + 7)(x - 7)$ $\quad a = x$ et $b = 7$
$G = x^2 - 7^2$ soit $G = x^2 - 49$.
● $H = (x - 6)(x + 6)$ $\quad a = x$ et $b = 6$
$H = x^2 - 6^2$ soit $H = x^2 - 36$

30 ● $A = (x + 1)^2$
$A = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2$ soit $A = x^2 + 2x + 1$
● $B = (x + 5)(x - 5)$
$B = x^2 - 5^2$ soit $B = x^2 - 25$
● $C = (4 - x)^2$
$C = 4^2 - 2 \times 4 \times x + x^2$ soit $c = 16 - 8x + x^2$

31 ● $D = (x - 2{,}5)^2$
$D = x^2 - 2 \times x \times 2{,}5 + 2{,}5^2$ soit $D = x^2 - 5x + 6{,}25$
● $E = (1 - x)(1 + x)$
$E = 1^2 - x^2$ soit $E = 1 - x^2$
● $F = (6 + x)^2$
$F = 6^2 + 2 \times 6 \times x + x^2$ soit $F = 36 + 12x + x^2$
● $G = (x - 3)(x + 3)$
$G = x^2 - 3^2$ soit $G = x^2 - 9$

32 **a.** Voici les étapes successives de calcul.

Programme A	**Programme B**
● 3 → 2 → 4 → 3	● 3 → 1 → 3
● 10 → 9 → 81 → 80	● 10 → 8 → 80
● –5 → –6 → 36 → 35	● –5 → –7 → 35
● 12 → 11 → 121 → 120	● 12 → 10 → 120

Si l'on choisit 3 au début, on obtient 3 avec chaque programme.
Si l'on choisit 10, on obtient 80 avec chaque programme.
Si l'on choisit –5, on obtient 35 avec chaque programme.
Si l'on choisit 12, on obtient 120 avec chaque programme.
On constate que les résultats sont les mêmes avec le programme A et le programme B. On peut émettre la conjecture que les deux programmes permettent d'obtenir le même résultat si l'on choisit le même nombre au départ.

b. On note n le nombre choisi au départ.
Voici les étapes successives de calcul.

Programme A

$$n \rightarrow n - 1 \rightarrow (n - 1)^2 \rightarrow (n - 1)^2 - 1$$

Programme B

$$n \rightarrow n - 2 \rightarrow (n - 2) \times n$$

Avec le programme A, on obtient le résultat P :
$$P = (n - 1)^2 - 1$$

Avec le programme B, on obtient le résultat R :

$$R = (n - 2) \times n$$

On développe chaque résultat.

● $P = (n - 1)^2 - 1$
$P = n^2 - 2 \times n \times 1 + 1^2 - 1$
$P = n^2 - 2n + 1 - 1$
$P = n^2 - 2n$

● $R = (n - 2) \times n$
$R = n \times n - 2 \times n$
$R = n^2 - 2n$

● On trouve que les deux résultats sont les mêmes. Donc quel que soit le nombre choisi au départ, on obtient le même résultat avec chaque programme de calcul.

33 **a.** Le volume d'une pyramide est $(\mathcal{A} \times h) : 3$ où $\mathcal{A}$ désigne l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.
Ici, la base de chaque pyramide est un carré de côté $x + 1$, en cm, et la hauteur est 6 cm.
Donc le volume d'une pyramide est $((x + 1)^2 \times 6) : 3$.
Les deux pyramides sont identiques, donc :
$V = 2 \times ((x + 1)^2 \times 6) : 3$ c'est-à-dire $V = 4 \times (x + 1)^2$.
On développe et on réduit V.
$V = 4 \times (x + 1)^2$
$V = 4 \times (x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2)$
$V = 4 \times (x^2 + 2x + 1)$
$V = 4 \times x^2 + 4 \times 2x + 4 \times 1$
$V = 4x^2 + 8x + 4$

b. On réalise la feuille de calcul.
En cellule B2, on saisit la formule =4*A2^2+8*A2+4 ou la formule =4*A2*A2+8*A2+4 avant de la recopier vers le bas.

	A	B
1	x	V
2	0	4
3	1	16
4	2	36
5	3	64
6	4	100
7	5	144
8	6	196
9	7	256
10	8	324
11	9	400
12	10	484
13	11	576
14	12	676
15	13	784
16	14	900
17	15	1024

On lit que le volume V est égal à 900 cm³ en cellule B16.
Cette valeur est obtenue pour $x = 14$.

34 On développe à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

● $A = (2x + 1)^2$ $\quad a = 2x$ et $b = 1$
$A = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2$
$A = 2x \times 2x + 4x + 1$ soit $A = 4x^2 + 4x + 1$

● $B = (3x + 7)^2$ $\quad a = 3x$ et $b = 7$
$B = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2$
$B = 3x \times 3x + 42x + 49$
soit $B = 9x^2 + 42x + 49$.

● $C = (5x + 9)^2$ $\quad a = 5x$ et $b = 9$
$C = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 9 + 9^2$
$C = 5x \times 5x + 90x + 81$
soit $C = 25x^2 + 90x + 81$.

35 On développe à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

● $D = (3x - 5)^2$ $\quad a = 3x$ et $b = 5$
$D = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$
$D = 3x \times 3x - 30x + 25$ soit $D = 9x^2 - 30x + 25$

● $E = (4x - 3)^2$ $\quad a = 4x$ et $b = 3$
$E = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2$
$E = 4x \times 4x - 24x + 9$ soit $E = 16x^2 - 24x + 9$

● $F = (2x - 0{,}5)^2$ $\quad a = 2x$ et $b = 0{,}5$
$F = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 0{,}5 + 0{,}5^2$
$F = 2x \times 2x - 2x + 0{,}25$ soit $F = 4x^2 - 2x + 0{,}25$.

36 On développe à l'aide de l'identité remarquable :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

● $G = (4x + 5)(4x - 5)$ $\quad a = 4x$ et $b = 5$
$G = (4x)^2 - 5^2$
$G = 4x \times 4x - 25$ soit $G = 16x^2 - 25$

● $H = (3x - 1)(3x + 1)$ $\quad a = 3x$ et $b = 1$
$H = (3x)^2 - 1^2$
$H = 3x \times 3x - 1$ soit $H = 9x^2 - 1$.

37 **1. a.** Le point F appartient au segment [AD] donc AD = AF + FD.
$AD = x + 3 + x - 2$
$AD = x + x + 3 - 2$ c'est-à-dire $AD = 2x + 1$.

b. Aire du carré ABCD :
$\mathcal{A} = AD^2$ donc $\mathcal{A} = (2x + 1)^2$.

c. Aire du rectangle ABEF :
$\mathcal{B} = AF \times AB$ et $AB = AD$ donc $\mathcal{B} = (x + 3)(2x + 1)$.

d. Aire du rectangle ECDF :
$\mathcal{C} = FD \times CD$ et $CD = AD$ donc $\mathcal{C} = (x - 2)(2x + 1)$.

2. a. On développe et on réduit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

● $\mathcal{B} = x \times 2x + x \times 1 + 3 \times 2x + 3 \times 1$
$\mathcal{B} = 2x^2 + x + 6x + 3$
$\mathcal{B} = 2x^2 + 7x + 3$

● $\mathcal{C} = x \times 2x + x \times 1 - 2 \times 2x - 2 \times 1$
$\mathcal{C} = 2x^2 + x - 4x - 2$
$\mathcal{C} = 2x^2 - 3x - 2$

b. ● $\mathcal{B} + \mathcal{C} = 2x^2 + 7x + 3 + 2x^2 - 3x - 2$
On réduit :
$\mathcal{B} + \mathcal{C} = 2x^2 + 2x^2 + 7x - 3x + 3 - 2$
$\mathcal{B} + \mathcal{C} = (2 + 2) \times x^2 + (7 - 3) \times x + 1$
$\mathcal{B} + \mathcal{C} = 4x^2 + 4x + 1$.

● On développe $\mathcal{A}$ à l'aide d'une identité remarquable.
$\mathcal{A} = (2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2$
$\mathcal{A} = 2x \times 2x + 4x + 1$ soit $\mathcal{A} = 4x^2 + 4x + 1$

● On a bien $\mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{A}$.

38 On factorise à l'aide de la propriété :

$$ka + kb = k(a + b)$$

- $A = 3x - 3$

$A = 3 \times x - 3 \times 1$

(3 est un facteur commun)

$A = 3 \times (x - 1)$ soit $A = 3(x - 1)$

- $B = 4y + 6$

$B = 2 \times 2y + 2 \times 3$

(2 est un facteur commun)

$B = 2 \times (2y + 3)$ soit $B = 2(2y + 3)$

- $C = 8 + 2n$

$C = 2 \times 4 + 2 \times n$

(2 est un facteur commun)

$C = 2 \times (4 + n)$ soit $C = 2(4 + n)$

- $D = 7x^2 - 5x$

$D = 7x \times x - 5 \times x$

(x est un facteur commun)

$D = x \times (7x - 5)$ soit $D = x(7x - 5)$

- $E = 30a + 36a^2$

$E = 6a \times 5 + 6a \times a$

($6a$ est un facteur commun)

$E = 6a \times (5 + a)$ soit $E = 6a(5 + a)$

- $F = -2x^2 - 2$

$F = -2 \times x^2 + (-2) \times 1$

(-2 est un facteur commun)

$F = -2 \times (x^2 + 1)$ soit $F = -2(x^2 + 1)$

39

	Forme factorisée	Forme développée
a.	$(x + 5)^2$	$\mathbf{x^2 + 10x + 25}$
b.	$\mathbf{(x - 6)^2}$	$x^2 - 12x + 36$
c.	$\mathbf{(2x + 10)^2}$	$4x^2 + 40x + 100$
d.	$(x + 10)(x - 10)$	$\mathbf{x^2 - 100}$
e.	$\mathbf{(x + 11)(x - 11)}$	$x^2 - 121$
f.	$\mathbf{(7x - 1)^2}$	$49x^2 - 14x + 1$

40 On factorise à l'aide d'une identité remarquable.

a. Ici on utilise $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$.

$a = 2x$ et $b = 3$ donc

$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$

b. Ici on utilise $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$16x^2 - 40x + 25 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 5 + 5^2$.

$a = 4x$ et $b = 5$ donc

$16x^2 - 40x + 25 = (4x - 5)^2$

c. Ici on utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$9x^2 - 64 = (3x)^2 - 8^2$.

$a = 3x$ et $b = 8$ donc

$9x^2 - 64 = (3x + 8)(3x - 8)$

d. Ici on utilise $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$49 - 70x + 25x^2 = 7^2 - 2 \times 5x \times 7 + (5x)^2$.

$a = 7$ et $b = 5x$ donc

$49 - 70x + 25x^2 = (7 - 5x)^2$

41 • $A = x^2 - 16 = x^2 - 4^2$

donc $A = (x + 4)(x - 4)$.

- $B = 9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2$

donc $B = (3x - 4)^2$.

- $C = x^2 + 20x + 100 = x^2 + 2 \times x \times 10 + 10^2$

donc $C = (x + 10)^2$.

42 On utilise l'identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- $D = (x + 1)^2 - 4 = (x + 1)^2 - 2^2$ $\quad a = x + 1$ et $b = 2$

donc $D = (x + 1 + 2)(x + 1 - 2)$

$D = (x + 3)(x - 1)$.

- $E = (x - 2)^2 - 9 = (x - 2)^2 - 3^2$ $\quad a = x - 2$ et $b = 3$

donc $E = (x - 2 + 3)(x - 2 - 3)$

$E = (x + 1)(x - 5)$.

- $F = (3x - 1)^2 - 1 = (3x - 1)^2 - 1^2$ $\quad a = 3x - 1$ et $b = 1$

donc $F = (3x - 1 + 1)(3x - 1 - 1)$

$F = 3x(3x - 2)$.

43 **a.** $5x + 7 = 2x - 2$

On regroupe les termes « en x » dans un membre et les termes « sans x » dans l'autre membre.

$5x + 7 - 2x = 2x - 2 - 2x$

$3x + 7 = -2$

$3x + 7 - 7 = -2 - 7$

$3x = -9$

$\dfrac{3x}{3} = \dfrac{-9}{3}$ soit $x = -3$

-3 est la solution de l'équation.

b. $3x + 2 = x - 10$

$3x + 2 - x = x - 10 - x$

$2x + 2 = -10$

$2x + 2 - 2 = -10 - 2$

$2x = -12$

$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{-12}{2}$ soit $x = -6$

-6 est la solution de l'équation.

44 **a.** $2x - 5 = 5x + 1$

$-5 = 5x + 1 - 2x$

$-5 = 3x + 1$

$-5 - 1 = 3x$

$-6 = 3x$

$x = -2$

-2 est la solution de l'équation.

b. $3 - 7x = 3x + 2$

$3 = 3x + 2 + 7x$

$3 = 10x + 2$

$3 - 2 = 10x$

$1 = 10x$

$x = \dfrac{1}{10}$ soit $x = 0{,}1$

0,1 est la solution de l'équation.

45 **a.** $5x - 6 = -x + 3$

$5x - 6 + x = 3$

$6x - 6 = 3$

$6x = 3 + 6$

$6x = 9$

$x = \dfrac{9}{6}$ soit $x = 1{,}5$

1,5 est la solution de l'équation.

b. $2x - \dfrac{1}{3} = 1$

$$2x = 1 + \frac{1}{3}$$
$$2x = \frac{3}{3} + \frac{1}{3}$$
$$2x = \frac{4}{3}$$
$$x = \frac{4}{3} : 2$$
$$x = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4 \times 1}{3 \times 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\dfrac{2}{3}$ est la solution de l'équation.

46 Plusieurs démarches sont possibles.
Exemple de réponse :

- Équation ❶

$$4(x + 2) = x - 1$$

On développe le membre de gauche.

$$4 \times x + 4 \times 2 = x - 1$$
$$4x + 8 = x - 1$$
$$4x + 8 - x = -1$$
$$3x + 8 = -1$$
$$3x = -1 - 8$$
$$3x = -9$$
$$x = -3$$

-3 est la solution de cette équation.

- Équation ❷

$$5y + 1 = 3(y - 1) - 2$$

On développe le membre de droite.

$$5y + 1 = 3 \times y - 3 \times 1 - 2$$
$$5y + 1 = 3y - 3 - 2$$
$$5y + 1 = 3y - 5$$
$$5y + 1 - 3y = -5$$
$$2y + 1 = -5$$
$$2y = -5 - 1$$
$$2y = -6$$
$$y = -3$$

-3 est aussi la solution de cette équation.

- On teste si -3 est solution de l'équation ❸.

$3 \times (-3) - 1 = -9 - 1 = -10$
$2 \times (-3 + 1) = 2 \times (-2) = -4$
$-10 \neq -4$ donc -3 n'est pas solution de l'équation ❸.

- On teste si -3 est solution de l'équation ❹.

$4 \times (-3 + 1) - 5 = 4 \times (-2) - 5 = -8 - 5 = -13$
$6 \times (-3) + 5 = -18 + 5 = -13$
On trouve le même résultat donc -3 est solution de l'équation ❹.

- Conclusion : les équations ❶, ❷ et ❹ ont la même solution (-3).

47 On résout chaque équation.

a. $2(4x - 5) = 4 + x$
On développe le membre de gauche.

$$2 \times 4x - 2 \times 5 = 4 + x$$
$$8x - 10 = 4 + x$$
$$8x - 10 - x = 4$$
$$7x - 10 = 4$$
$$7x = 4 + 10$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

Donc 2 est la solution de l'équation.
2 est un entier relatif.

b. $2(x + 8) + 3 = 4 - 3x$
On développe le membre de gauche.

$$2 \times x + 2 \times 8 + 3 = 4 - 3x$$
$$2x + 16 + 3 = 4 - 3x$$
$$2x + 19 = 4 - 3x$$
$$2x + 19 + 3x = 4$$
$$5x + 19 = 4$$
$$5x = 4 - 19$$
$$5x = -15$$
$$x = -3$$

Donc -3 est la solution de l'équation.
-3 est un entier relatif.

c. $12x - 1 = 2(5x - 2) + 1$
On développe le membre de droite.

$$12x - 1 = 2 \times 5x - 2 \times 2 + 1$$
$$12x - 1 = 10x - 4 + 1$$
$$12x - 1 = 10x - 3$$
$$12x - 1 - 10x = -3$$
$$2x - 1 = -3$$
$$2x = -3 + 1$$
$$2x = -2$$
$$x = -1$$

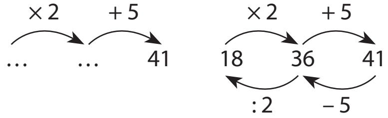
Donc -1 est la solution de l'équation.
-1 est un entier relatif.

d. $(x - 3)^2 = x(x - 5)$
On développe chaque membre.

$$x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x \times x - x \times 5$$
$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 5x$$
$$x^2 - 6x + 9 - x^2 = x^2 - 5x - x^2$$
$$-6x + 9 = -5x$$
$$9 = -5x + 6x$$
$$9 = x$$

Donc 9 est la solution de l'équation.
9 est un entier relatif.
Les quatre équations ont toutes un nombre entier relatif pour solution. Donc Elias a raison.

48 a. • On peut résoudre cet exercice à l'aide d'un schéma.



- On peut aussi résoudre ce problème en modélisant la situation.

❶ On note n le nombre cherché.
❷ On cherche la valeur de n telle que $5 + 2n = 41$.
❸ On résout cette équation.

$$5 + 2n = 41$$
$$2n = 41 - 5$$
$$2n = 36$$
$$n = 18$$

18 est la solution de l'équation.

❹ Le nombre cherché est 18.

b. ● On peut résoudre cet exercice à l'aide d'un schéma.

$$\dots \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{-5} 9 \qquad \frac{14}{3} \xrightarrow{\times 3} 14 \xrightarrow{-5} 9$$

$$\frac{14}{3} \xleftarrow{:3} 14 \xleftarrow{+5} 9$$

● On peut aussi résoudre ce problème en modélisant la situation.

❶ On note n le nombre cherché.

❷ On cherche la valeur de n telle que $3n - 5 = 9$.

❸ On résout cette équation.

$$3n - 5 = 9$$
$$3n = 9 + 5$$
$$3n = 14$$
$$n = \frac{14}{3}$$

$\frac{14}{3}$ est la solution de l'équation.

❹ Le nombre cherché est $\frac{14}{3}$.

49 ● On peut résoudre ce problème en traduisant la siuation par une équation.

❶ On note n le nombre cherché.

❷ Voici les étapes successives du programme de calcul de Maud.

$$n \xrightarrow{\times 8} n \times 8 \xrightarrow{-5} n \times 8 - 5$$

Maud obtient comme résultat $8n - 5$.

Voici les étapes successives du programme de calcul de Victor.

$$n \xrightarrow{\times 10} n \times 10 \xrightarrow{+2} n \times 10 + 2$$

Victor obtient $10n + 2$ comme résultat.

Maud et Victor obtiennent le même résultat donc

$$8n - 5 = 10n + 2.$$

❸ On résout cette équation.

$$8n - 5 = 10n + 2$$
$$-5 = 10n + 2 - 8n$$
$$-5 = 2n + 2$$
$$-5 - 2 = 2n$$
$$-7 = 2n$$
$$n = \frac{-7}{2} \text{ soit } n = -3{,}5$$

$-3{,}5$ est la solution de l'équation.

❹ Maud et Victor ont choisi le nombre $-3{,}5$.

● Remarque : on peut résoudre ce problème à l'aide du tableur.

Exemple de réponse.

	A	B	C
1	**n**	**8n – 5**	**10n + 2**
2	-8	-69	-78
3	-7	-61	-68
4	-6	-53	-58
5	-5	-45	-48
6	-4	-37	-38
7	-3	-29	-28
8	-2	-21	-18
9	-1	-13	-8
10	0	-5	2
11	1	3	12
12	2	11	22

On a saisi en cellule B2 la formule =8*A2–5 et en cellule C2 la formule =10*A2+2 avant de les recopier vers le bas.

On peut observer qu'il y a une solution comprise entre -4 et -3 car on lit : $-37 > -38$ et $-29 < -28$.

On poursuit avec les nombres -4 ; $-3{,}9$; $-3{,}8$; … ; -3.

	A	B	C
1	**n**	**8n – 5**	**10n + 2**
2	-4	-37	-38
3	-3,9	-36,2	-37
4	-3,8	-35,4	-36
5	-3,7	-34,6	-35
6	-3,6	-33,8	-34
7	-3,5	-33	-33
8	-3,4	-32,2	-32
9	-3,3	-31,4	-31
10	-3,2	-30,6	-30
11	-3,1	-29,8	-29
12	-3	-29	-28

On observe que s'ils choisissent $-3{,}5$ comme nombre de départ, Maud et Victor trouvent le même résultat : -33.

50 **a.** 1 h = 60 min et 60 min = 15 min × 4

Zoran fera 4 séances de 15 min par mois.

$4 \times 10 = 40$

Zoran envisage de faire 40 séances de karting.

8 € × 40 = 320 €

320 € + 20 € = 340 €

Zoran paiera 340 €.

b. 300 € < 340 € donc Zoran fera moins de 40 séances.

300 € – 20 € = 280 €

Zoran peut consacrer 280 € aux séances de karting.

280 € : 8 € = 35

Zoran pourra faire 35 séances de karting dans l'année.

51 ❶ On note x le nombre manquant sur la ligne du bas.

❷ On complète les deux autres cases vides en fonction de x.

	80	
5 + x		**x + 11**
5	**x**	11

Donc dans la case du haut, on a $5 + x + x + 11$.
On réduit : $5 + x + x + 11 = 2x + 16$
Dans la case du haut, on doit trouver 80 donc
$$2x + 16 = 80.$$
❸ On résout cette équation.
$$\begin{aligned} 2x + 16 &= 80 \\ 2x &= 80 - 16 \\ 2x &= 64 \\ x &= 32 \end{aligned}$$
32 est la solution de l'équation.
❹ Le nombre manquant dans la ligne du bas est 32.
On obtient alors :

	80	
37		**43**
5	**32**	11

52 **a.** On peut s'aider d'un tableau tel que celui-ci.

	Âge d'Ugo	**Âge d'Anna**
Aujourd'hui	14	40
Dans n années	$14 + n$	$40 + n$

« L'âge d'Anna sera le double de l'âge d'Ugo » donc c'est l'équation ❸ qui traduit cette situation.

b. On résout cette équation.
$$40 + n = 2 \times (14 + n)$$
On développe le membre de droite.
$$\begin{aligned} 40 + n &= 2 \times 14 + 2 \times n \\ 40 + n &= 28 + 2n \\ 40 &= 28 + 2n - n \\ 40 &= 28 + n \\ 40 - 28 &= n \\ n &= 12 \end{aligned}$$
12 est la solution de l'équation.
Conclusion : dans 12 ans, Anna aura le double de l'âge d'Ugo.
On peut vérifier : $40 + 12 = 52$ et $14 + 12 = 26$
52 est bien le double de 26.

53 On note a l'âge de Cléa aujourd'hui.
On peut s'aider d'un tableau tel que celui-ci.

	Âge de Cléa	**Âge de son père**
Aujourd'hui	a	$a + 25$
Dans 11 ans	$a + 11$	$a + 25 + 11$

Dans 11 ans, l'âge du père de Cléa sera $a + 36$.
Il sera aussi le triple de l'âge de Cléa aujourd'hui, donc on obtient $a + 36 = 3a$.

b. On résout cette équation.
$$\begin{aligned} a + 36 &= 3a \\ 36 &= 3a - a \\ 36 &= 2a \\ a &= 18 \end{aligned}$$
18 est la solution de l'équation.
Conclusion : Cléa a 18 ans aujourd'hui.
On peut vérifier : $18 + 25 = 43$ et $43 + 11 = 54$
Dans 11 ans, le père de Cléa aura 54 ans et 54 est bien le triple de 18.

54 **a.** 56 cm : 4 = 14 cm donc AE = 14 cm.
b. Le périmètre du pentagone PENTA est, en cm,
$AP \times 2 + 14 \times 3$ c'est-à-dire $2 \times AP + 42$.
Ce périmètre est égal à 60 cm donc :
$2 \times AP + 42 = 60$.
On résout cette équation.
$2 \times AP + 42 = 60$
$2 \times AP = 60 - 42$
$2 \times AP = 18$
$AP = 9$
Le périmètre du pentagone PENTA est 60 cm si le segment [AP] mesure 9 cm.

55 **a.** Le périmètre du quadrilatère QUAD est
QU + UA + AD + DQ c'est-à-dire, en cm,
$3x - 1 + 2x + 2 + 4x - 4 + x + 5$.
On réduit cette expression.
$3x + 2x + 4x + x - 1 + 2 - 4 + 5$ soit $10x + 2$.
Ce périmètre est égal à 32 cm donc $10x + 2 = 32$.
On résout cette équation.
$$\begin{aligned} 10x + 2 &= 32 \\ 10x &= 32 - 2 \\ 10x &= 30 \\ x &= 3 \end{aligned}$$
3 est la solution de l'équation.
Le périmètre du quadrilatère QUAD est égal à 32 cm lorsque x vaut 3 cm.
b. Pour $x = 3$:
$QU = 3 \times 3 - 1 = 9 - 1 = 8$
$UA = 2 \times 3 + 2 = 6 + 2 = 8$
$AD = 4 \times 3 - 4 = 12 - 4 = 8$
$DQ = 3 + 5 = 8$
Le quadrilatère QUAD a tous ses côtés de la même longueur, donc c'est un losange.

56 **a.** $(x + 8)(x - 5) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$$x + 8 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0$$
$$x = -8 \quad \text{ou} \quad x = 5$$
-8 et 5 sont les solutions de l'équation.
b. $5x(4 - x) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$$5x = 0 \quad \text{ou} \quad 4 - x = 0$$
$$x = \frac{0}{5} = 0 \quad \text{ou} \quad 4 = x$$
0 et 4 sont les solutions de l'équation.

c. $(x+3)^2 = 0$
Le carré d'un nombre est nul dans le seul cas où ce nombre est nul, c'est-à-dire :
$x + 3 = 0$
$x = -3$
-3 est la solution de l'équation.

57 **a.** $(2x + 7)(3x - 12) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$2x + 7 = 0$ ou $3x - 12 = 0$
$2x = -7$ ou $3x = 12$
$x = \dfrac{-7}{2}$ ou $x = \dfrac{12}{3}$
$x = -3{,}5$ ou $x = 4$
$-3{,}5$ et 4 sont les solutions de l'équation.
b. $(5y - 2)(6y + 9) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$5y - 2 = 0$ ou $6y + 9 = 0$
$5y = 2$ ou $6y = -9$
$y = \dfrac{2}{5}$ ou $y = \dfrac{-9}{6}$
$y = 0{,}4$ ou $y = -1{,}5$
0,4 et $-1{,}5$ sont les solutions de l'équation.

58 **a.** $2x(4x - 5) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$2x = 0$ ou $4x - 5 = 0$
$x = \dfrac{0}{2} = 0$ ou $4x = 5$
$x = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$
0 et 1,25 sont les solutions de l'équation.
b. $(3 - 2n)(n + 4) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$3 - 2n = 0$ ou $n + 4 = 0$
$3 = 2n$ ou $n = -4$
$\dfrac{3}{2} = n$
$n = 1{,}5$
1,5 et -4 sont les solutions de l'équation.

59 **a.** $(2x + 1)(3x - 5) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$2x + 1 = 0$ ou $3x - 5 = 0$
$2x = -1$ ou $3x = 5$
$x = \dfrac{-1}{2} = -0{,}5$ ou $x = \dfrac{5}{3}$
$-0{,}5$ et $\dfrac{5}{3}$ sont les solutions de l'équation.
b. $2(4y - 3)(6y + 1) = 0$
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul.
Le facteur 2 ne peut pas être nul donc :
$4y - 3 = 0$ ou $6y + 1 = 0$
$4y = 3$ ou $6y = -1$
$y = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$ ou $y = \dfrac{-1}{6}$
0,75 et $-\dfrac{1}{6}$ sont les solutions de l'équation.
Nick a raison, les solutions de ces équations sont toutes des nombres rationnels.

60 **a.** $x^2 - 5x = 0$
On factorise le membre de gauche.
$x^2 - 5x = x \times x - x \times 5$ (x est un facteur commun).
$x^2 - 5x = x \times (x - 5)$
Résoudre l'équation $x^2 - 5x = 0$ revient à résoudre l'équation $x(x - 5) = 0$.
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$x = 0$ ou $x - 5 = 0$
$x = 5$
0 et 5 sont les solutions de l'équation.
b. $6x^2 - 18x = 0$
On factorise le membre de gauche.
$6x^2 - 18x = 6x \times x - 6x \times 3$ ($6x$ est un facteur commun).
$6x^2 - 18x = 6x \times (x - 3)$
Résoudre l'équation $6x^2 - 18x = 0$ revient à résoudre l'équation $6x(x - 3) = 0$.
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$6x = 0$ ou $x - 3 = 0$
$x = 0$ $x = 3$
0 et 3 sont les solutions de l'équation.

61 **a.** $x^2 - 4 = 0$
On factorise le membre de gauche.
$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$
On reconnaît une différence de deux carrés.
Donc $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$
Résoudre l'équation $x^2 - 4 = 0$ revient à résoudre l'équation $(x + 2)(x - 2) = 0$.
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$
$x = -2$ ou $x = 2$
-2 et 2 sont les solutions de l'équation.
b. $x^2 - 6x + 9 = 0$
On factorise le membre de gauche à l'aide d'une identité remarquable.
$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$
Donc $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
Résoudre l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$ revient à résoudre l'équation $(x - 3)^2 = 0$.
Le carré d'un nombre est nul dans le seul cas où ce nombre est nul, c'est-à-dire :
$x - 3 = 0$
$x = 3$
3 est la solution de l'équation.

62 **a.** $4x^2 - 1 = 0$
On factorise le membre de gauche.
$4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2$
On reconnaît une différence de deux carrés.
Donc $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$
Résoudre l'équation $4x^2 - 1 = 0$ revient à résoudre l'équation $(2x + 1)(2x - 1) = 0$.
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ccc} 2x + 1 = 0 & \text{ou} & 2x - 1 = 0 \\ 2x = -1 & \text{ou} & 2x = 1 \\ x = \dfrac{-1}{2} = -0{,}5 & \text{ou} & x = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{array}$$

$-0{,}5$ et $0{,}5$ sont les solutions de l'équation.
b. $(x - 3)^2 - 4 = 0$
On factorise le membre de gauche.
$(x - 3)^2 - 4 = (x - 3)^2 - 2^2$
On reconnaît une différence de deux carrés.
Donc $(x - 3)^2 - 4 = (x - 3 + 2)(x - 3 - 2)$ soit
$(x - 3)^2 - 4 = (x - 1)(x - 5)$
Résoudre l'équation $(x - 3)^2 - 4 = 0$ revient à résoudre l'équation $(x - 1)(x - 5) = 0$.
Un produit est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ccc} x - 1 = 0 & \text{ou} & x - 5 = 0 \\ x = 1 & \text{ou} & x = 5 \end{array}$$

1 et 5 sont les solutions de l'équation.

63 **a.** Voici les étapes successives du programme de calcul.

● $4 \rightarrow 8 \rightarrow 13 \rightarrow 169$
Si on choisit 4 comme nombre de départ, on obtient 169.

● $0 \rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow 25$
Si on choisit 0 comme nombre de départ, on obtient 25.

● $-6 \rightarrow -12 \rightarrow -7 \rightarrow 49$
Si on choisit -6 comme nombre de départ, on obtient 49.
b. On note n le nombre choisi au départ.

● $n \rightarrow n \times 2 \rightarrow n \times 2 + 5 \rightarrow (n \times 2 + 5)^2$
Le résultat est $(2n + 5)^2$.
On obtient 0 comme résultat, donc $(2n + 5)^2 = 0$.
Le carré d'un nombre est nul dans le seul cas où ce nombre est nul, c'est-à-dire :

$$2n + 5 = 0$$
$$2n = -5$$
$$n = \frac{-5}{2} = -2{,}5$$

$-2{,}5$ est la solution de l'équation.
Si l'on choisit $-2{,}5$ comme nombre de départ, on obtient 0 comme résultat.

64 **a.** On utilise la règle R'_1 :
On soustrait 3 aux deux membres de l'inégalité.
b. On utilise la règle R'_1 :
On ajoute 4 aux deux membres de l'inégalité.
c. On utilise la règle R'_1 :
On soustrait $2x$ aux deux membres de l'inégalité.
d. On utilise la règle R'_2 :
On divise les deux membres de l'inégalité par 3, qui est un nombre strictement positif. On conserve le sens de l'inégalité.
e. On utilise la règle R'_2 :
On divise les deux membres de l'inégalité par -2, qui est un nombre strictement négatif. On change le sens de l'inégalité.
f. On utilise la règle R'_2 :
On divise les deux membres de l'inégalité par -3, qui est un nombre strictement négatif. On change le sens de l'inégalité.

65 On remplace l'inconnue par -2.
a. Pour $x = -2$:
$1 - 2x = 1 - 2 \times (-2) = 1 + 4 = 5$
$5 > 2$ donc -2 n'est pas solution de l'inéquation.
b. Pour $t = -2$:
● $2t - 3 = 2 \times (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$
● $t - 5 = -2 - 5 = -7$
On trouve le même résultat pour les deux membres ; or le symbole d'inégalité de l'inéquation se lit « est strictement supérieur à » donc -2 n'est pas solution de l'inéquation.
c. Pour $x = -2$:
● $4x + 2 = 4 \times (-2) + 2 = -8 + 2 = -6$
● $2x - 3 = 2 \times (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$
$-6 > -7$ donc -2 est une solution de l'inéquation.

66 On peut associer :
a. et ❸ **b.** et ❹ **c.** et ❷ **d.** et ❶

67 **a.** $x - 3 > 2$
On regroupe les termes « en x » dans un membre et les termes « sans x » dans l'autre membre.

$$x - 3 + 3 > 2 + 3$$
$$x > 5$$

Les nombres strictement supérieurs à 5 sont les solutions de l'inéquation.
b. $y + 4 \leqslant 1$
$y + 4 - 4 \leqslant 1 - 4$
$y \leqslant -3$
Les nombres inférieurs ou égaux à -3 sont les solutions de l'inéquation.
c. $2 - x < 5$
$2 - x - 2 < 5 - 2$
$-x < 3$
On multiplie chaque membre par -1, qui est un nombre négatif, donc on change le sens de l'inégalité.
$-x \times (-1) > 3 \times (-1)$
$x > -3$
Les nombres strictement supérieurs à -3 sont les solutions de l'inéquation.

68 **a.** $4t \geqslant -20$
On divise chaque membre par 4, qui est un nombre strictement positif, donc on conserve le sens de l'inégalité.

$\dfrac{4t}{4} \geqslant \dfrac{-20}{4}$

$t \geqslant -5$

Les nombres supérieurs ou égaux à -5 sont les solutions de l'inéquation.

b. $-5x > 2$

On divise chaque membre par -5, qui est un nombre strictement négatif, donc on change le sens de l'inégalité.

$\dfrac{-5x}{-5} < \dfrac{2}{-5}$

$x < \dfrac{-2}{5}$ soit $x < -0{,}4$

Les nombres strictement inférieurs à $-0{,}4$ sont les solutions de l'inéquation.

c. $\dfrac{x}{3} \leqslant 2$

On multiplie chaque membre par 3, qui est un nombre strictement positif, donc on conserve le sens de l'inégalité.

$\dfrac{x}{3} \times 3 \leqslant 2 \times 3$

$x \leqslant 6$

Les nombres inférieurs ou égaux à 6 sont les solutions de l'inéquation.

69 **a.** $5x + 3 > 8$

$5x > 8 - 3$

$5x > 5$

$x > 1$

Les nombres strictement supérieurs à 1 sont les solutions de l'inéquation.

b. $2a - 5 \leqslant -4$

$2a \leqslant -4 + 5$

$2a \leqslant 1$

$a \leqslant \dfrac{1}{2}$ soit $a \leqslant 0{,}5$

Les nombres inférieurs ou égaux à 0,5 sont les solutions de l'inéquation.

c. $1 - 2x \geqslant -3$

$-2x \geqslant -3 - 1$

$-2x \geqslant -4$

On divise chaque membre par -2, qui est un nombre strictement négatif, donc on change le sens de l'inégalité.

$\dfrac{-2x}{-2} \leqslant \dfrac{-4}{-2}$

$x \leqslant 2$

Les nombres inférieurs ou égaux à 2 sont les solutions de l'inéquation.

70 **a.** On teste l'inéquation pour chaque valeur.

- Pour $x = -5$:

$4x - 5 = 4 \times (-5) - 5 = -20 - 5 = -25$

$x + 7 = -5 + 7 = 2$

$-25 < 2$ donc -5 est solution de l'inéquation.

- Pour $x = 0$:

$4x - 5 = 4 \times 0 - 5 = 0 - 5 = -5$

$x + 7 = 0 + 7 = 7$

$-5 < 7$ donc 0 est solution de l'inéquation.

- Pour $x = 4$:

$4x - 5 = 4 \times 4 - 5 = 16 - 5 = 11$

$x + 7 = 4 + 7 = 11$

$11 \leqslant 11$ donc 4 est solution de l'inéquation.

- Pour $x = 10$:

$4x - 5 = 4 \times 10 - 5 = 40 - 5 = 35$

$x + 7 = 10 + 7 = 17$

$35 > 17$ donc 10 n'est pas solution de l'inéquation.

b. On résout l'inéquation.

$4x - 5 \leqslant x + 7$

$4x \leqslant x + 7 + 5$

$4x \leqslant x + 12$

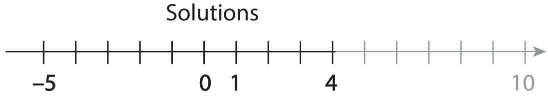
$4x - x \leqslant 12$

$3x \leqslant 12$

$x \leqslant 4$

Les nombres inférieurs ou égaux à 4 sont les solutions de l'inéquation.

c. On représente les solutions sur une droite graduée.



71 **a.** $5x + 3 > 2x - 9$

$5x + 3 - 2x > -9$

$3x + 3 > -9$

$3x > -9 - 3$

$3x > -12$

$x > -4$

Les nombres strictement supérieurs à -4 sont les solutions de l'inéquation.

b. $4x + 1 \geqslant 6x - 2$

$1 \geqslant 6x - 2 - 4x$

$1 \geqslant 2x - 2$

$1 + 2 \geqslant 2x$

$3 \geqslant 2x$

$\dfrac{3}{2} \geqslant \dfrac{2x}{2}$

$1{,}5 \geqslant x$ c'est-à-dire $x \leqslant 1{,}5$

Les nombres inférieurs ou égaux à 1,5 sont les solutions de l'inéquation.

72 **a.** $2x + 3 \leqslant 3x + 1$

$3 \leqslant 3x + 1 - 2x$

$3 \leqslant x + 1$

$3 - 1 \leqslant x$

$2 \leqslant x$ c'est-à-dire $x \geqslant 2$

Les nombres supérieurs ou égaux à 2 sont les solutions de l'inéquation.

b. $5x + 4 < 2 - 3x$

$5x + 4 + 3x < 2$

$8x + 4 < 2$

$8x < 2 - 4$

$8x < -2$

$\dfrac{8x}{8} < \dfrac{-2}{8}$

$x < -0{,}25$

Les nombres strictement inférieurs à – 0,25 sont les solutions de l'inéquation.

73 ● Une première démarche :
$250 \times 3 = 750$ et $250 \times 4 = 1\,000$
$750 < 910 < 1\,000$ donc les économies pourront compenser l'achat de la citerne au bout de 4 ans.
● Une autre démarche :
On traduit cette situation par une inéquation.
❶ On appelle n le nombre d'années cherché.
❷ Les économies de la famille s'élèvent à $250 \times n$.
Elles compenseront l'achat de la citerne si on a :
$$250 \times n \geqslant 910.$$
❸ On résout cette inéquation.
$$250 \times n \geqslant 910.$$
$$n \geqslant \frac{910}{250}$$
$$n \geqslant 3{,}64$$
Les nombres supérieurs ou égaux à 3,64 sont les solutions de l'inéquation.
❹ Les économies réalisées compensent l'achat de la citerne au bout d'un peu plus de 3 ans et demi.

74 **1. a.** Avec le tarif A, le montant de la dépense, en €, est $5{,}50 \times n$ soit $5{,}5n$.
b. Avec le tarif B, le montant de la dépense, en €, est $40 + 4 \times n$ soit $40 + 4n$.
2. a. $4n + 40 \leqslant 5{,}5n$
$$40 \leqslant 5{,}5n - 4n$$
$$40 \leqslant 1{,}5n$$
$$\frac{40}{1{,}5} \leqslant \frac{1{,}5n}{1{,}5}$$
$$\frac{40}{1{,}5} \leqslant n$$
$\frac{40}{1{,}5} = \frac{40 \times 2}{1{,}5 \times 2} = \frac{80}{3}$ donc $\frac{80}{3} \leqslant n$ soit $n \geqslant \frac{80}{3}$
Les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{80}{3}$ sont les solutions de l'inéquation.
b. $\frac{80}{3} \approx 26{,}7$
Les nombres entiers qui sont solutions de cette inéquation, c'est-à-dire les nombres 27, 28, 29, etc. sont les nombres de séances pour lesquelles Maïa a intérêt à choisir le tarif B. En effet à partir de 27 séances par an, Maïa paiera moins cher avec le tarif B qu'avec le tarif A.

75 **a.** Les nombres cherchés sont des entiers consécutifs, donc ils se suivent.
● Laura choisit comme inconnue le plus grand des trois nombres. On le note n.
Le nombre entier qui précède le nombre entier n est $n - 1$ et le nombre entier qui précède le nombre entier $n - 1$ est $n - 1 - 1$ c'est-à-dire $n - 2$.
● Enzo choisit comme inconnue le plus petit des trois nombres. On le note b.
Le nombre entier qui suit le nombre entier b est $b + 1$ et le nombre entier qui suit le nombre entier $b + 1$ est $b + 1 + 1$ c'est-à-dire $b + 2$.

● On peut en déduire que l'équation ❶ a Enzo pour auteur et que l'équation ❷ a Laura pour auteur.
b. On note n le « nombre du milieu ».
Le nombre entier qui précède ce nombre entier n est $n - 1$ et le nombre entier qui le suit est $n + 1$.
La somme de ces trois nombres est 2 016 donc on obtient l'équation ❸ : $n - 1 + n + n + 1 = 2\,016$.
c. On résout une des trois équations, par exemple l'équation ❸ : $n - 1 + n + n + 1 = 2\,016$.
On réduit le membre de gauche.
$$3n = 2016$$
$$n = 672$$
672 est la solution de l'équation.
Le nombre entier qui précède 672 est 671 et celui qui le suit est 673. Les trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 2016 sont donc 671, 672 et 673.

Je m'évalue à mi-parcours

76 **b.** **77** **c.** **78** **b.** **79** **a.** **80** **c.**
81 **c.** **82** **a.** **83** **b.** **84** **c.** **85** **b.**

Avec un logiciel

86 **1. a.** et **b.**

	A	B	C
1	Nombre entier	Entier suivant	Différence des carrés
2	0	1	1
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	4	7
6	4	5	9
7	5	6	11
8	6	7	13
9	7	8	15
10	8	9	17
11	9	10	19
12	10	11	21
13	11	12	23
14	12	13	25
15	13	14	27
16	14	15	29
17	15	16	31

Conjecture : les résultats affichés dans la colonne C semblent être des nombres impairs.
2. a. La différence des carrés de ces deux nombres entiers consécutifs est $(n + 1)^2 - n^2$.
b. ● Une première démarche : on développe $(n + 1)^2 - n^2$ à l'aide d'une identité remarquable.
$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 - n^2$
soit $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2$
c'est-à-dire $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$.
● Une autre démarche : on factorise $(n + 1)^2 - n^2$, qui est une différence de deux carrés.
$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 + n)(n + 1 - n)$
soit $(n + 1)^2 - n^2 = (2n + 1) \times 1$
c'est-à-dire $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

• n est un nombre entier, donc $2n$ est son double ; il s'agit donc d'un nombre entier pair.
$2n + 1$ est le nombre entier qui suit le nombre pair $2n$, donc il s'agit d'un nombre entier impair.
Par conséquent la conjecture établie à la question **1. b.** est vraie : la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est un nombre impair.

87 **1. a.** On note x le nombre choisi au départ du programme de calcul.
Le résultat de ce programme est la différence entre le produit $(x-1)(x-2)$ et le carré de x.
b. On saisit les formules :
=A2–1 en cellule B2 ;
=A2–2 en cellule C2 ;
=B2*C2 en cellule D2 ;
=A2*A2 ou =A2^2 en cellule E2 ;
=D2-E2 en cellule F2.
c. Voici la feuille de calcul.

	A	B	C	D	E	F
1	x	$x-1$	$x-2$	$(x-1)(x-2)$	x^2	Résultat
2	-10	-11	-12	132	100	32
3	-9	-10	-11	110	81	29
4	-8	-9	-10	90	64	26
5	-7	-8	-9	72	49	23
6	-6	-7	-8	56	36	20
7	-5	-6	-7	42	25	17
8	-4	-5	-6	30	16	14
9	-3	-4	-5	20	9	11
10	-2	-3	-4	12	4	8
11	-1	-2	-3	6	1	5
12	0	-1	-2	2	0	2
13	1	0	-1	-0	1	-1
14	2	1	0	0	4	-4
15	3	2	1	2	9	-7
16	4	3	2	6	16	-10
17	5	4	3	12	25	-13
18	6	5	4	20	36	-16
19	7	6	5	30	49	-19

d. On remarque que le résultat change de signe pour une valeur de x comprise entre 0 et 1.
Conjecture : Le programme de calcul permet d'obtenir un résultat négatif si l'on choisit comme nombre de départ un nombre supérieur ou égal à une valeur comprise entre 0 et 1.
2. a. Le résultat du programme de calcul est

$$(x-1)(x-2)-x^2.$$

b. On peut traduire la situation par l'inéquation

$$(x-1)(x-2)-x^2 \leqslant 0.$$

c. On résout l'inéquation $(x-1)(x-2)-x^2 \leqslant 0$.
On développe et on réduit le membre de gauche.
$(x-1)(x-2)-x^2 = x \times x - x \times 2 - 1 \times x + 1 \times 2 - x^2$
$(x-1)(x-2)-x^2 = x^2 - 2x - x + 2 - x^2$
Donc $(x-1)(x-2)-x^2 = -3x+2$

Résoudre l'inéquation $(x-1)(x-2)-x^2 \leqslant 0$ revient à résoudre l'inéquation $-3x+2 \leqslant 0$.
$-3x+2 \leqslant 0$
$-3x \leqslant -2$
On divise chaque membre de l'inéquation par le nombre -3 qui est strictement négatif, donc on change le sens de l'inégalité.

$$\frac{-3x}{-3} \geqslant \frac{-2}{-3}$$

$$x \geqslant \frac{2}{3}$$

Les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{2}{3}$ sont les solutions de l'inéquation.
d. $\frac{2}{3}$ est compris entre 0 et 1. Il y a donc bien cohérence avec la conjecture établie à la question **1. d.**
Le résultat du programme de calcul est un nombre négatif si on choisit comme nombre de départ un nombre supérieur ou égal à $\frac{2}{3}$.

J'utilise mes compétences

88 Un multiple de 3 s'écrit sous la forme $3n$ (n étant un nombre entier).
x et y sont deux multiples de 3 donc $x = 3n$ et $y = 3k$.
$x + y = 3n + 3k$
On factorise.
$x + y = 3 \times n + 3 \times k$
$x + y = 3 \times (n+k)$ c'est-à-dire $x + y = 3(n+k)$.
n et k sont deux nombres entiers, donc $n + k$ est aussi un nombre entier. Par conséquent $x + y$ est un multiple de 3.

89 **a.** Voici les étapes successives du programme de calcul.
• $-2 \to 2 \to -4 \to 0$
Si on choisit – 2 comme nombre de départ, on obtient 0.
• $5 \to 9 \to 45 \to 49$
Si on choisit 5 comme nombre de départ, on obtient 49.
• $10 \to 14 \to 140 \to 144$
Si on choisit 10 comme nombre de départ, on obtient 144.
b. On note n le nombre choisi au départ.
On applique le programme de calcul.
• $n \to n+4 \to (n+4) \times n \to (n+4) \times n + 4$
Le résultat obtenu est $R = (n+4) \times n + 4$ c'est-à-dire $R = n(n+4) + 4 = n \times n + n \times 4 + 4$ soit $R = n^2 + 4n + 4$.
On utilise une identité remarquable pour factoriser $n^2 + 4n + 4$.
$n^2 + 4n + 4 = n^2 + 2 \times n \times 2 + 2^2$
donc $n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$
Le résultat du programme de calcul est bien le carré d'un nombre. Si n est le nombre choisi au départ, le résultat est le carré de $n + 2$.

Remarque : dans la question **a.**, on a trouvé que :
- pour $n = -2$, le résultat est le carré de 0 et $0 = -2 + 2$;
- pour $n = 5$, le résultat est le carré de 7 et $7 = 5 + 2$;
- pour $n = 10$, le résultat est le carré de 12 et $12 = 10 + 2$.

90 ❶ On note e le tarif enfant.
❷ Le tarif enfant vaut 4 € de moins que le tarif adulte, donc le tarif adulte vaut 4 € de plus que le tarif enfant.
Le tarif adulte est donc, en €, $e + 4$.
Le montant de la recette est $100 \times (e + 4) + 50 \times e$ c'est-à-dire $100(e + 4) + 50e$.
On sait que la recette s'élève à 1 300 € donc
$100(e + 4) + 50e = 1\,300$.
❸ On résout cette équation : $100(e + 4) + 50e = 1\,300$.
On développe et on réduit le membre de gauche.
$$100 \times e + 100 \times 4 + 50e = 1\,300$$
$$150e + 400 = 1\,300$$
$$150e = 1\,300 - 400$$
$$150e = 900$$
$$e = 6$$
6 est la solution de l'équation.
❹ Le tarif enfant est 6 €.

91 ❶ On note x la longueur, en cm, du côté du carré ABCD.
❷ L'aire du carré ABCD est x^2.
L'aire du triangle rectangle AED est $5 \times x : 2$ c'est-à-dire $2{,}5x$.
Le carré ABCD et le triangle rectangle AED ont la même aire, donc : $x^2 = 2{,}5x$.
❸ On résout cette équation :
$$x^2 = 2{,}5x$$
$$x^2 - 2{,}5x = 2{,}5x - 2{,}5x$$
$$x^2 - 2{,}5x = 0.$$
Il s'agit d'une équation du second degré. On factorise le membre de gauche.
$x^2 - 2{,}5x = x \times x - 2{,}5 \times x = x \times (x - 2{,}5)$
Résoudre l'équation $x^2 = 2{,}5x$ revient à résoudre l'équation $x(x - 2{,}5) = 0$.
Un produit de facteurs est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2{,}5 = 0$$
$$\text{ou} \quad x = 2{,}5$$
0 et 2,5 sont les solutions de l'équation.
❹ Si $x = 0$, ni le carré ABCD ni le triangle AED n'existent. On ne retient pas cette solution.
Si $x = 2{,}5$, le carré ABCD et le triangle rectangle AED ont la même aire.

92 ❶ On note x le nombre d'ingénieurs embauchés. C'est aussi le nombre de techniciens embauchés.
❷ Le nombre d'ingénieurs devient $19 + x$.
Le nombre de techniciens devient $28 + x$.
« Le nombre d'ingénieurs est au moins égal aux trois quarts du nombre de techniciens » se traduit par l'inégalité $19 + x \geqslant \dfrac{3}{4} \times (28 + x)$.
❸ On résout cette inéquation.
$$19 + x \geqslant \frac{3}{4} \times (28 + x)$$
$$19 + x \geqslant 0{,}75 \times (28 + x)$$
$$19 + x \geqslant 0{,}75 \times 28 + 0{,}75 \times x$$
$$19 + x \geqslant 21 + 0{,}75x$$
$$19 + x - 0{,}75x \geqslant 21$$
$$19 + 0{,}25x \geqslant 21$$
$$0{,}25x \geqslant 21 - 19$$
$$0{,}25x \geqslant 2$$
$$\frac{0{,}25x}{0{,}25} \geqslant \frac{2}{0{,}25}$$
$$x \geqslant 8$$
Les nombres supérieurs ou égaux à 8 sont les solutions de l'inéquation.
❹ Il faut embaucher au moins 8 ingénieurs et 8 techniciens pour que le nombre d'ingénieurs soit au moins égal aux trois quarts du nombre de techniciens.

93 **a.** ❶ On note n la longueur, en cm, du côté le plus court du rectangle.
❷ La longueur, en cm, du côté le plus long du rectangle est $n + 1$.
Le périmètre du rectangle, en cm, est donc
$n + n + 1 + n + n + 1$ c'est-à-dire $4n + 2$.
Ce périmètre est égal à 106 cm donc $4n + 2 = 106$.
❸ On résout cette équation.
$$4n + 2 = 106$$
$$4n = 106 - 2$$
$$4n = 104$$
$$n = 26$$
26 est la solution de l'équation.
❹ Le rectangle a un périmètre de 106 cm si son côté le plus court mesure 26 cm.
$26 + 1 = 27$
Son plus long côté mesure 27 cm.
$26 \text{ cm} \times 27 \text{ cm} = 702 \text{ cm}^2$
L'aire du rectangle est alors 702 cm².
b. On reprend la question **a.** pour un périmètre de 124 cm.
L'équation à résoudre est alors $4n + 2 = 124$.
$$4n + 2 = 124$$
$$4n = 124 - 2$$
$$4n = 122$$
$$n = 30{,}5$$
30,5 est la solution de l'équation.
Toutefois 30,5 n'est pas un nombre entier, donc on ne peut pas accepter cette solution.
Le périmètre d'un rectangle ne peut pas être égal à 124 cm si les deux côtés ont pour dimensions deux nombres entiers consécutifs.

94 **a.** • On peut commencer par quelques essais :
• $2 + 5 = 7$ • $34 + 57 = 91$ • $10 + 25 = 35$
Conjecture : il semble que le résultat soit impair.
• On se place dans le cas général.
Un nombre pair s'écrit sous la forme $2n$ où n désigne un nombre entier.

Un nombre impair s'écrit sous la forme du suivant d'un nombre pair, donc sous la forme $2k + 1$, où k désigne un nombre entier.
En additionnant ces deux nombres, on obtient

$$2n + 2k + 1.$$

On factorise $2n + 2k$:
$2n + 2k + 1 = 2(n + k) + 1$.
n et k étant deux nombres entiers, leur somme est un nombre entier, donc la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est le suivant d'un nombre pair, c'est-à-dire qu'il est un nombre impair.
La conjecture émise précédemment est vraie.

b. ● On peut commencer par quelques essais.

● $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ ● $10^2 + 11^2 = 100 + 121 = 221$
● $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ ● $17^2 + 18^2 = 289 + 324 = 613$

Conjecture : il semble que le résultat soit impair.

● On se place dans le cas général.
On note n le plus petit des deux nombres entiers.
Le nombre entier qui le suit est $n + 1$.
En additionnant les carrés de ces deux nombres, on obtient $n^2 + (n + 1)^2$.
On développe en utilisant une identité remarquable et on réduit.
$n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2$
$n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1$
On factorise $2n^2 + 2n$ en mettant 2 en facteur.
$2n^2 + 2n + 1 = 2(n^2 + n) + 1$
n est un nombre entier, donc $n^2 + n$ est un nombre entier.
La somme des deux carrés est donc le nombre entier qui suit un multiple de 2. Il s'agit donc d'un nombre impair.
La conjecture émise précédemment est vraie.

95 ❶ On note n un de ces nombres.

❷ Le carré de la somme de ce nombre et de 5 est égal à 25 se traduit par l'égalité $(n + 5)^2 = 25$.

❸ On résout cette équation.
On développe le membre de gauche en utilisant une identité remarquable.

$$(n + 5)^2 = 25$$
$$n^2 + 2 \times n \times 5 + 5^2 = 25$$
$$n^2 + 10n + 25 = 25$$
$$n^2 + 10n + 25 - 25 = 25 - 25$$
$$n^2 + 10n = 0$$

On factorise le membre de gauche.
$n \times n + 10 \times n = 0$
$n(n + 10) = 0$
Un produit de facteurs est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$n = 0$ ou $n + 10 = 0$
ou $n = -10$

0 et – 10 sont les solutions de l'équation.

❹ Deux nombres répondent à la question du problème : 0 et – 10.

96 ● On peut commencer par quelques essais.

● $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ et $20 = 4 \times 5$
● $34 + 35 + 36 + 37 + 38 = 180$ et $180 = 36 \times 5$
● $17 + 18 + 19 + 20 + 21 = 95$ et $95 = 19 \times 5$
● $85 + 86 + 87 + 88 + 89 = 435$ et $435 = 87 \times 5$

Conjecture : il semble que l'affirmation de Zoé soit vraie.

● On se place dans le cas général.
On note n le 3e nombre entier.
Le 2e nombre est $n - 1$, le 1er est $n - 1 - 1$ soit $n - 2$.
Le 4e nombre est $n + 1$, le 5e est $n + 1 + 1$ soit $n + 2$.
On additionne ces cinq nombres. On obtient :
$n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2$.
En réduisant cette somme, on obtient $5n$, ce qui est bien le produit du 3e nombre par 5, c'est-à-dire son quintuple.
L'affirmation de Zoé est vraie.
Remarque : on peut noter n un autre des cinq nombres ; on obtient alors une expression un peu plus complexe, mais on peut néanmoins, après factorisation, prouver que l'affirmation est vraie (cf. ex. 75).

97 **a.** ● $3 \times 4 + 0{,}25 = 12 + 0{,}25 = 12{,}25$
● $3{,}5^2 = 12{,}25$
Le résultat du calcul proposé par Mariam est bien le carré de 3,5.

b. Avec le procédé de Mariam, on peut effectuer :
$7 \times 8 + 0{,}25 = 56 + 0{,}25 = 56{,}25$
au lieu de calculer $7{,}5^2$.

c. On développe chaque membre.
● $(n + 0{,}5)^2 = n^2 + 2 \times n \times 0{,}5 + 0{,}5^2$
$(n + 0{,}5)^2 = n^2 + n + 0{,}25$
● $n(n + 1) + 0{,}25 = n \times n + n \times 1 + 0{,}25$
$n(n + 1) + 0{,}25 = n^2 + n + 0{,}25$
● On obtient la même expression littérale, donc l'égalité proposée par Mariam est vraie quel que soit le nombre n. Sa conjecture est donc vraie.
C'est cette conjecture qu'elle a utilisée pour expliquer à Gabriel comment calculer mentalement $3{,}5^2$.
En effet $3{,}5^2 = (3 + 0{,}5)^2$.
Il suffit de donner à n la valeur 3 ; $n + 1$ est alors bien égal à 4.

98 On peut tester cette égalité pour des valeurs de x.
Par exemple, pour $x = 2$:
$(2x + 3)^2 = (2 \times 2 + 3)^2 = (4 + 3)^2 = 7^2 = 49$
$2x(2x + 3) + 9 = 2 \times 2 \times (2 \times 2 + 3) + 9 = 4 \times 7 + 9$
$= 28 + 9 = 37$
$49 \neq 37$ donc l'affirmation est fausse.
On a utilisé un contre-exemple.

99 **a.** ● $2 \times 4 - 3^2 = 8 - 9 = -1$
● $7 \times 9 - 8^2 = 63 - 64 = -1$
● $11 \times 13 - 12^2 = 143 - 144 = -1$

b. On obtient – 1 dans ces trois cas.
On peut émettre une conjecture : si n est un nombre entier, il semble que la différence $(n - 1)(n + 1) - n^2$ soit égale à – 1.

c. On développe et on réduit cette différence.
On utilise une identité remarquable.
$(n - 1)(n + 1) - n^2 = n^2 - 1^2 - n^2 = n^2 - 1 - n^2 = -1$.
La différence est bien égale à – 1 donc la conjecture est vraie.

100 Le triangle ABC peut être isocèle en A, en B ou en C. On étudie ces trois cas.

● Si le triangle $\widehat{ABC}$ est isocèle en A, alors $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, ses angles à la base, ont la même mesure.

On a alors : $x = 3x$.

On résout cette équation.

$$0 = 2x$$
$$\frac{0}{2} = \frac{2x}{2}$$
$$0 = x$$

0 est la solution de l'équation.

On ne peut pas accepter cette solution, car dans ce cas le triangle ABC n'existe pas (il aurait deux angles mesurant 0°).

● Si le triangle ABC est isocèle en B, alors $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$, ses angles à la base, ont la même mesure.

– On détermine la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en fonction de x.

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, donc $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$.

$$\widehat{BAC} + x + 3x = 180°$$
$$\widehat{BAC} + 4x = 180°$$
$$\widehat{BAC} = 180° - 4x$$

– Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ont la même mesure.

Alors $180° - 4x = 3x$.

On résout cette équation.

$$180 - 4x = 3x$$
$$180 = 3x + 4x$$
$$180 = 7x$$
$$\frac{180}{7} = \frac{7x}{7}$$
$$\frac{180}{7} = x$$

$\frac{180}{7}$ est la solution de l'équation.

● Si le triangle ABC est isocèle en C, alors $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$, ses angles à la base, ont la même mesure.

– On a déterminé précédemment la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$: $\widehat{BAC} = 180° - 4x$

– Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ont la même mesure.

Alors $180° - 4x = x$.

On résout cette équation.

$$180 - 4x = x$$
$$180 = x + 4x$$
$$180 = 5x$$
$$\frac{180}{5} = \frac{5x}{5}$$
$$36 = x$$

36 est la solution de l'équation.

● *Conclusion*

– Le triangle ABC peut être isocèle en B.

Dans ce cas $x = \frac{180}{7}$.

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ont la même mesure $\left(\frac{540}{7}^{\circ}\right)$.

– Le triangle ABC peut être isocèle en C.

Dans ce cas $x = 36$.

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ont la même mesure (36°).

101 ❶ On note c la consommation de cette famille, en kWh, en un mois.

❷ ● Avec le tarif 1, le montant de la dépense par mois, en €, est $8{,}10 + 0{,}150\,3 \times c$.

● Avec le tarif 2, le montant de la dépense par mois, en €, est $9{,}48 + 0{,}147\,9 \times c$.

Si le tarif 1 est le plus avantageux, alors le montant de la dépense avec ce tarif est strictement inférieur au montant de la dépense avec le tarif 2, c'est-à-dire :

$$8{,}10 + 0{,}150\,3 \times c < 9{,}48 + 0{,}147\,9 \times c.$$

❸ On résout cette inéquation.

$$8{,}10 + 0{,}150\,3 \times c - 0{,}147\,9 \times c < 9{,}48$$
$$8{,}10 + 0{,}002\,4 \times c < 9{,}48$$
$$0{,}002\,4 \times c < 9{,}48 - 8{,}10$$
$$0{,}002\,4\,c < 1{,}38$$
$$\frac{0{,}002\,4c}{0{,}002\,4} < \frac{1{,}38}{0{,}002\,4}$$
$$c < 575$$

Les nombres strictement inférieurs à 575 sont les solutions de l'inéquation.

❹ ● Le tarif 1 est le plus avantageux si la famille consomme moins de 575 kWh par mois.

● Le tarif 2 est le plus avantageux si elle consomme plus de 575 kWh par mois.

● Pour une consommation de 575 kWh par mois, le montant de la dépense est le même quel que soit le tarif.

102 ● On peut tester si 0 est une solution, si – 1 est une solution, mais ensuite le nombre infini de nombres à tester pose problème.

On peut alors penser à résoudre l'inéquation :

$$-5x + 1 \leqslant 6$$
$$-5x \leqslant 6 - 1$$
$$-5x \leqslant 5$$

On divise chaque membre par –5, qui est un nombre strictement négatif, donc on change le sens de l'inéquation.

$$\frac{-5x}{-5} \geqslant \frac{5}{-5}$$
$$x \geqslant -1$$

Les nombres supérieurs ou égaux à – 1 sont les solutions de l'inéquation.

● Donc seuls Anatole et Loubna ont raison.

En effet :

● Anatole a raison car $0 \geqslant -1$.

● Loubna a raison car les nombres positifs sont tous supérieurs ou égaux à – 1.

● Capucine se trompe car – 1 est une solution et pas la solution.

● Esteban se trompe car les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à – 1 et non inférieurs ou égaux à – 1.

● Max se trompe car les nombres négatifs supérieurs ou égaux à – 1 et strictement inférieurs à 0 sont des solutions de l'inéquation, par exemple – 0,4.

103 **1.** L'affirmation de Sacha est vraie. En effet :

$x^2 = 25$

$x^2 - 25 = 25 - 25$

$x^2 - 25 = 0$

On factorise le membre de gauche, après avoir reconnu une différence de deux carrés.

$x^2 - 25 = x^2 - 5^2$ donc $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

Résoudre l'équation $x^2 = 25$ revient à résoudre l'équation $(x + 5)(x - 5) = 0$.

Un produit de facteurs est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$x + 5 = 0$ ou $x - 5 = 0$

$x = -5$ ou $x = 5$

– 5 et 5 sont les solutions de l'équation.

● L'affirmation de Ninon est vraie également. En effet : $(-5)^2 = 25$ et $5^2 = 25$.

2. a. On utilise la démarche de Sacha.

$4x^2 = 9$

$4x^2 - 9 = 9 - 9$

$4x^2 - 9 = 0$

On factorise le membre de gauche, après avoir reconnu une différence de deux carrés.

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$ donc $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$

Résoudre l'équation $4x^2 = 9$ revient à résoudre l'équation $(2x + 3)(2x - 3) = 0$.

Un produit de facteurs est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$2x + 3 = 0$ ou $2x - 3 = 0$

$2x = -3$ ou $2x = 3$

$x = -1,5$ ou $x = 1,5$

– 1,5 et 1,5 sont les solutions de l'équation.

b. Ici, on peut utiliser la démarche de Ninon.

49 est le carré de 7 et de – 7. Il y a deux solutions : 7 et – 7.

c. On utilise la démarche de Sacha.

$(x - 1)^2 = 4$

$(x - 1)^2 - 4 = 4 - 4$

$(x - 1)^2 - 4 = 0$

On factorise le membre de gauche, après avoir reconnu une différence de deux carrés.

$(x - 1)^2 - 4 = (x - 1)^2 - 2^2$

$(x - 1)^2 - 4 = (x - 1 + 2)(x - 1 - 2)$ soit $(x + 1)(x - 3)$.

Résoudre l'équation $(x - 1)^2 = 4$ revient à résoudre l'équation $(x + 1)(x - 3) = 0$.

Un produit de facteurs est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$x = -1$ ou $x = 3$

– 1 et 3 sont les solutions de l'équation.

d. Ici, on peut utiliser la démarche de Ninon.

1 est le carré de 1 et de – 1. Il y a deux solutions : 1 et – 1.

104 Pour construire ce triangle, on a besoin de connaître la longueur du côté [AC] ou du côté [BC].

❶ On note a la longueur du côté [AC], en cm.

❷ La longueur du côté [BC], en cm, est donc $a + 3$.

Le triangle ABC est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ c'est-à-dire $6^2 + a^2 = (a + 3)^2$.

❸ On résout cette équation.

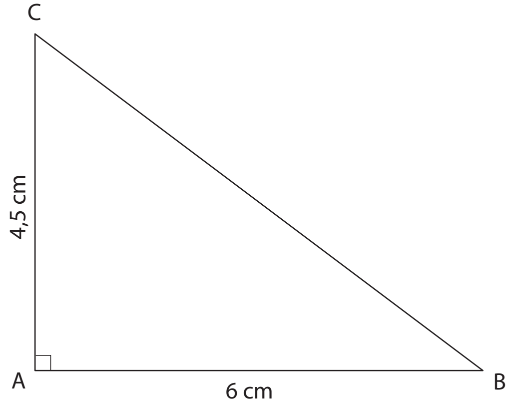
On développe le membre de droite en utilisant une identité remarquable.

$$6^2 + a^2 = (a + 3)^2$$
$$36 + a^2 = a^2 + 2 \times a \times 3 + 3^2$$
$$36 + a^2 = a^2 + 6a + 9$$
$$36 + a^2 - a^2 = a^2 + 6a + 9 - a^2$$
$$36 = 6a + 9$$
$$36 - 9 = 6a$$
$$27 = 6a$$
$$a = 4,5$$

4,5 est la solution de l'équation.

❹ Alors AC = 4,5 cm (et BC = 7,5 cm).

On peut alors construire le triangle ABC.



105 ● **Traduction**

Les trois angles d'un triangle mesurent a°, $(a + 10)$°, $(a + 20)$°.

Trouver la valeur de a.

● **Solution**

On sait que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

Donc $a + a + 10 + a + 20 = 180$.

On résout cette équation.

On réduit le membre de gauche.

$3a + 30 = 180$

$3a = 180 - 30$

$3a = 150$

$a = 50$

50 est la solution de l'équation.

$50 + 10 = 60$ et $50 + 20 = 70$

Les trois angles du triangle mesurent 50°, 60° et 70°.

106 **1. a.** $11 \times 18 = 198$

$10^2 + 2 = 100 + 2 = 102$

Lila a trouvé 198 et John 102.

b. $11 \times 18 = 11 \times (2 \times 9)$

Fatou avait choisi les nombres 9 ; 10 et 11.

2. a. • Si Fatou a choisi 6 comme 2e nombre, le 1er nombre est 5 et le 3e est 7.
$7 \times (2 \times 5) = 7 \times 10 = 70$ donc Lila obtient 70.
$6^2 + 2 = 36 + 2 = 38$ donc John obtient 38.
Ils n'obtiennent pas le même résultat.

• Si Fatou a choisi -7 comme 2e nombre, le 1er nombre est -8 et le 3e est -6.
$-6 \times (2 \times (-8)) = -6 \times (-16) = 96$ donc Lila obtient 96.
$(-7)^2 + 2 = 49 + 2 = 51$ donc John obtient 51.
Ils n'obtiennent pas le même résultat.

• Fatou n'a choisi ni 6 ni -7 comme 2e nombre.

b. Si l'on prend pour inconnue le 2e nombre entier et qu'on l'appelle n, alors le résultat de Lila est $(n + 1) \times (2 \times (n - 1))$ et celui de John est $n^2 + 2$.
Ils obtiennent le même résultat donc :
$(n + 1) \times (2 \times (n - 1)) = n^2 + 2$.
On résout cette équation.
On développe et on réduit le membre de gauche.
$(n + 1) \times (2 \times (n - 1)) = (n + 1) \times (2 \times n - 2 \times 1)$
$(n + 1) \times (2 \times (n - 1)) = (n + 1) \times (2n - 2)$
$(n + 1) \times (2 \times (n - 1)) = n \times 2n - n \times 2 + 1 \times 2n - 1 \times 2$
$(n + 1) \times (2 \times (n - 1)) = 2n^2 - 2n + 2n - 2$ soit $2n^2 - 2$.
Résoudre l'équation $(n + 1) \times (2 \times (n - 1)) = n^2 + 2$ revient à résoudre l'équation $2n^2 - 2 = n^2 + 2$.

$$2n^2 - 2 = n^2 + 2$$
$$2n^2 - 2 - n^2 = 2$$
$$n^2 - 2 = 2$$
$$n^2 - 2 - 2 = 0$$
$$n^2 - 4 = 0$$

Fatou a raison.
On factorise le membre de gauche, qui est une différence de deux carrés.

$$n^2 - 2^2 = 0$$
$$(n + 2)(n - 2) = 0$$

Un produit de facteurs est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$n + 2 = 0$ ou $n - 2 = 0$
$n = -2$ ou $n = 2$

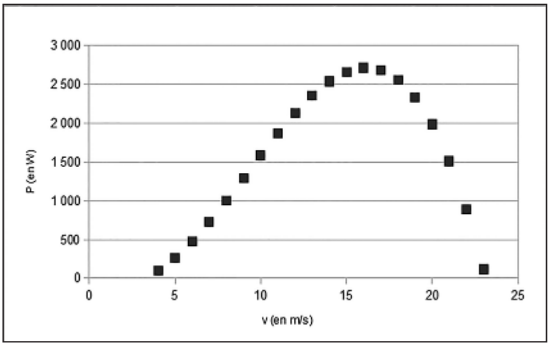
-2 et 2 sont les solutions de cette équation.
Si Fatou a choisi -2 ou 2 comme 2e nombre, Lila et John trouvent le même résultat, ce qui se traduit par :
• $3 \times (2 \times 1) = 6$ et $2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$.
Si Fatou a choisi les nombres 1 ; 2 et 3 alors Lila et John trouvent 6 comme résultat.
• $-3 \times (2 \times (-1)) = 6$ et $(-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$.
Si Fatou a choisi les nombres -3 ; -2 et -1 alors Lila et John trouvent 6 également.

107 **1. a.** Pour $v = 5$:
$P = -2 \times 5^3 + 55 \times 5^2 - 210 \times 5 + 186$
$P = -2 \times 5 \times 5 \times 5 + 55 \times 5 \times 5 - 1\,050 + 186$
$P = -2 \times 125 + 55 \times 25 - 1\,050 + 186$
$P = -250 + 1\,375 - 1\,050 + 186$
$P = 261$
Pour un vent de 5 m/s, la puissance P est 261 W.
b. Pour $v = 10$:
$P = -2 \times 10^3 + 55 \times 10^2 - 210 \times 10 + 186$
$P = -2 \times 10 \times 10 \times 10 + 55 \times 10 \times 10 - 2\,100 + 186$
$P = -2 \times 1\,000 + 55 \times 100 - 2\,100 + 186$
$P = -2\,000 + 5\,500 - 2\,100 + 186$
$P = 1\,586$
Pour un vent de 10 m/s, la puissance P est 1 586 W.
c. Pour $v = 20$:
$P = -2 \times 20^3 + 55 \times 20^2 - 210 \times 20 + 186$
$P = -2 \times 20 \times 20 \times 20 + 55 \times 20 \times 20 - 4\,200 + 186$
$P = -2 \times 8\,000 + 55 \times 400 - 4\,200 + 186$
$P = -16\,000 + 22\,000 - 4\,200 + 186$
$P = 1\,986$
Pour un vent de 20 m/s, la puissance P est 1 986 W.

2. a. et **b.** On réalise la feuille de calcul.

	A	B
1	v (en m/s)	P (en W)
2	4	98
3	5	261
4	6	474
5	7	725
6	8	1 002
7	9	1 293
8	10	1 586
9	11	1 869
10	12	2 130
11	13	2 357
12	14	2 538
13	15	2 661
14	16	2 714
15	17	2 685
16	18	2 562
17	19	2 333
18	20	1 986
19	21	1 509
20	22	890
21	23	117

c. Voici le graphique que l'on obtient.



d. En utilisant le graphique et le tableau, on peut dire que la puissance développée par l'éolienne est maximale lorsque la vitesse du vent est environ 16 m/s.

108 ❶ On note x la somme d'argent que le marchand possède au départ (unité le gros).

❷ On écrit jour après jour les différentes étapes.

Jour	Somme en bourse	Somme dépensée	Reste
1	$2x$	1	$2x - 1$
2	$3(2x - 1)$ soit $6x - 3$	2	$6x - 5$
3	$4(6x - 5)$ soit $24x - 20$	3	$24x - 23$

Le 3e jour, il lui reste 3 gros, donc $24x - 23 = 3$.

❸ On résout cette équation.

$$\begin{aligned} 24x - 23 &= 3 \\ 24x &= 3 + 23 \\ 24x &= 26 \\ \frac{24x}{24} &= \frac{26}{24} \\ x &= \frac{26}{24} = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

$\frac{13}{12}$ est la solution de l'équation.

❹ Le marchand avait $\frac{13}{12}$ de gros au début.

Note : En France, au début du XIIIe siècle, à cause de l'inflation, on ne peut plus se contenter d'un moyen de paiement aussi faible qu'un denier qui ne comporte que 0,35 g d'argent fin. Par exemple, la solde journalière des troupes engagées par le roi de France se monte à 27 370 livres soit 7,3 tonnes de numéraire comprenant 230 kg d'argent fin.
On imagine donc de créer de grosses monnaies ; ainsi c'est en 1266 qu'a été créé le « gros » (aussi appelé « sou ») par Saint Louis, pour une valeur de douze deniers.
Dans la première moitié du XVe siècle, la France dispose de trois types d'espèces : le denier, le gros (qui vaut de 15 à 24 deniers selon les moments) et la pièce d'or.

109 ❶ On note x le nombre inconnu.

❷ La moyenne des six nombres est :

$\frac{1+7+11+19+30+x}{6}$ c'est-à-dire $\frac{68+x}{6}$.

Cette moyenne est le triple du nombre inconnu. On peut donc écrire : $\frac{68+x}{6} = 3 \times x$.

❸ On résout cette équation.
On peut utiliser l'égalité des produits en croix.

$$\begin{aligned} 68 + x &= 6 \times 3 \times x \\ 68 + x &= 18x \\ 68 &= 18x - x \\ 68 &= 17x \\ 4 &= x \end{aligned}$$

4 est la solution de l'équation.

❹ Le nombre inconnu est 4.

La moyenne des six nombres est $\frac{72}{6}$ soit 12 et 12 est bien le triple de 4.

110 ❶ On note x le nombre cherché.

❷ Si on soustrait 6 à ce nombre, on obtient $x - 6$.

Si on divise ce nombre par 6, on obtient $\frac{x}{6}$.

Ces deux résultats sont égaux, donc $x - 6 = \frac{x}{6}$.

❸ On résout cette équation.

$$\begin{aligned} x - 6 &= \frac{x}{6} \\ x - 6 - \frac{x}{6} &= 0 \\ x - \frac{x}{6} &= 6 \\ \frac{6x}{6} - \frac{x}{6} &= 6 \\ \frac{6x - x}{6} &= 6 \\ \frac{5x}{6} &= 6 \\ \frac{5x}{6} \times \frac{6}{5} &= 6 \times \frac{6}{5} \\ x &= 6 \times \frac{6}{5} \\ x &= \frac{36}{5} = 7{,}2 \end{aligned}$$

7,2 est la solution de l'équation.

❹ Le nombre cherché est 7,2.
Si on lui soustrait 6, on obtient 1,2.
Si on le divise par 6, on obtient également 1,2.

111 ● Une première démarche :
Si on s'intéresse à ce qui se passe :
– « verticalement », on remarque que la longueur du côté du carré blanc est égale au triple de celle du côté du carré vert ;
– « horizontalement », la somme des longueurs d'un côté du carré vert et d'un côté du carré blanc est égale à la somme des longueurs des côtés des cinq carrés bleus (soit 50 cm).
Donc 50 cm est la longueur de l'équivalent du côté de 4 carrés verts.
50 : 4 = 12,5 ainsi un carré vert a pour côté 12,5 cm.
$3 \times 12{,}5 = 37{,}5$ donc le côté du grand carré blanc est 37,5 cm.

● Une autre démarche, en modélisant la situation :

❶ On note c la longueur, en cm, d'un côté d'un carré vert.

❷ Alors le côté du grand carré blanc est $3c$.
Le côté d'un carré bleu mesure 10 cm, donc une des dimensions du rectangle est 50 cm, mais cette dimension est aussi égale à $3c + c$, c'est-à-dire $4c$.
Donc $4c = 50$.

❸ On résout cette équation.

$$\begin{aligned} 4c &= 50 \\ c &= 12{,}5 \end{aligned}$$

12,5 est la solution de l'équation.

❹ Le côté d'un carré vert mesure 12,5 cm.
$12{,}5 \text{ cm} \times 3 = 37{,}5 \text{ cm}$
Le côté du grand carré blanc mesure 37,5 cm.

112 ❶ On note n le plus petit des deux nombres entiers.

❷ L'autre nombre est $n + 1$.
Le produit des deux nombres est $n(n + 1)$.
La somme des deux nombres est $n + n + 1$ c'est-à-dire $2n + 1$.
Le produit des deux nombres est égal à leur somme diminuée de 1, donc $n(n + 1) = 2n + 1 - 1$.

❸ On résout cette équation.

$$n(n+1) = 2n + 1 - 1$$
$$n(n+1) = 2n$$

On développe le membre de gauche.

$$n \times n + n \times 1 = 2n$$
$$n^2 + n = 2n$$
$$n^2 + n - 2n = 0$$
$$n^2 - n = 0$$

On factorise le membre de gauche.

$$n \times n - n \times 1 = 0$$
$$n \times (n - 1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$$n = 0 \quad \text{ou} \quad n - 1 = 0$$
$$\text{ou} \quad n = 1$$

0 et 1 sont les solutions de cette équation.

❹ Il y a deux solutions.
- Si n est égal à 0, l'autre nombre est 1 ;
Les deux nombres entiers cherchés sont 0 et 1.
- Si n est égal à 1, l'autre nombre est 2 ;
Les deux nombres entiers cherchés sont 1 et 2.

Dossier Brevet

113 **a.** $3x^2 + 5x - 2$
b. $x^2 - 2x + 1$
c. $(x + 3)(x - 5)$
d. $(x - 6)(x + 6)$

114 **a.** -2
b. -1 et 2
c. $x \leqslant \dfrac{-4}{3}$
d. tous les nombres supérieurs ou égaux à 1

115 On résout l'équation $5x - 2 = 3x + 7$.

$$5x - 2 = 3x + 7$$
$$5x - 2 - 3x = 7$$
$$2x - 2 = 7$$
$$2x = 7 + 2$$
$$2x = 9$$
$$x = 4{,}5$$

On vérifie si 4,5 est bien solution de l'équation initiale.
$5 \times 4{,}5 - 2 = 22{,}5 - 2 = 20{,}5$
$3 \times 4{,}5 + 7 = 13{,}5 + 7 = 20{,}5$
On trouve le même résultat, donc 4,5 est bien la solution de l'équation $5x - 2 = 3x + 7$.

116 **a.** On teste l'équation pour la valeur 3.
$3^2 + 2 \times 3 - 15 = 9 + 6 - 15 = 15 - 15 = 0$
On trouve bien 0, donc 3 est solution de l'équation $x^2 + 2x - 15 = 0$.
L'affirmation est vraie.
b. La somme de x et de 5 s'écrit $x + 5$.
La différence entre $2x$ et 1 s'écrit $2x - 1$.
Le produit de ces deux nombres est $(x + 5)(2x - 1)$.
On développe cette expression.
$(x + 5)(2x - 1) = x \times 2x - x \times 1 + 5 \times 2x - 5 \times 1$
$(x + 5)(2x - 1) = 2x^2 - x + 10x - 5$
$(x + 5)(2x - 1) = 2x^2 + (-1 + 10) \times x - 5$
$(x + 5)(2x - 1) = 2x^2 + 9x - 5$
$2x^2 + 9x - 5 \neq 2x^2 + 9x + 5$ donc l'affirmation est fausse.

117 **a.** $(2n + 5)(2n - 5) = (2n)^2 - 5^2$
$(2n + 5)(2n - 5) = 2n \times 2n - 25 = 4n^2 - 25$
b. On utilise l'identité remarquable :
$(2n + 5)(2n - 5) = 4n^2 - 25$ pour $n = 100$.
En effet $205 = 2 \times 100 + 5$ et $195 = 2 \times 100 - 5$.
Alors $205 \times 195 = 4 \times 100^2 - 25 = 4 \times 10\,000 - 25$
$205 \times 195 = 40\,000 - 25 = 39\,975$.

118 • On écrit les étapes successives du programme pour le nombre choisi par Sophie.

$$4 \rightarrow 12 \rightarrow 36 \rightarrow 12 \rightarrow 8$$

Sophie a donc raison.
• On écrit les étapes successives du programme pour le nombre choisi par Martin.

$$0 \rightarrow 8 \rightarrow 24 \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

Martin a donc raison.
• On écrit les étapes successives du programme pour le nombre choisi par Gabriel.

$$-3 \rightarrow 5 \rightarrow 15 \rightarrow -9 \rightarrow -6$$

$-6 \neq -9$ donc l'affirmation de Gabriel est fausse. Il a tort.
• On note n le nombre choisi au départ. On obtient alors successivement :

$$n \rightarrow n+8 \rightarrow 3(n+8) \rightarrow 3(n+8)-24 \rightarrow 3(n+8)-24-n$$

On développe et on réduit le résultat :
$R = 3(n + 8) - 24 - n$
$R = 3 \times n + 3 \times 8 - 24 - n = 3n + 24 - 24 - n = 2n$
$2n$ est le double du nombre choisi au départ, donc Faïza a raison.

119 • On peut commencer par faire quelques essais pour comprendre le programme.

$$5 \rightarrow -5 \rightarrow 25 \rightarrow 0$$
$$3 \rightarrow -7 \rightarrow 49 \rightarrow 40$$

• On note x le nombre choisi au départ. On obtient alors successivement :

$$x \rightarrow x - 10 \rightarrow (x - 10)^2 \rightarrow (x - 10)^2 - x^2$$

Le résultat obtenu est $R = (x - 10)^2 - x^2$.
On développe et on réduit R en utilisant une identité remarquable.

$R = (x-10)^2 - x^2 = x^2 - 2 \times x \times 10 + 10^2 - x^2$
$R = x^2 - 20x + 100 - x^2$ soit $R = -20x + 100$.
On cherche pour quelle valeur de x ce résultat est – 340.
Pour cela, on résout l'équation $-20x + 100 = -340$.

$$-20x + 100 = -340$$
$$-20x = -340 - 100$$
$$-20x = -440$$
$$x = 22$$

22 est la solution de l'équation.
Donc le nombre auquel je pense est 22.

120 ● On peut commencer par faire quelques essais.

$5 \rightarrow 8 \rightarrow 56 \rightarrow 71 \rightarrow 50$

$12 \rightarrow 15 \rightarrow 105 \rightarrow 141 \rightarrow 120$

$28 \rightarrow 31 \rightarrow 217 \rightarrow 301 \rightarrow 280$

Si on choisit 5 comme nombre de départ, on obtient 50. Si on choisit 12, on obtient 120. Si on choisit 28, on obtient 280.
On peut émettre une conjecture : il semble que le résultat soit le produit par 10 du nombre choisi au départ.
● On note x le nombre choisi au départ. On obtient alors successivement :

$x \rightarrow x+3 \rightarrow 7(x+3) \rightarrow 7(x+3)+3x \rightarrow R$

Le résultat obtenu est $R = 7(x+3) + 3x - 21$.
On développe et on réduit R.
$R = 7(x+3) + 3x - 21$
$R = 7 \times x + 7 \times 3 + 3x - 21$
$R = 7x + 21 + 3x - 21$
$R = 10x$
Manon obtient donc bien le produit de 10 par le nombre qu'elle a choisi au départ. La conjecture est vraie.
Un multiple de 10 s'écrit sous la forme $10n$, où n est un nombre entier, donc Manon obtient bien un multiple de 10 comme résultat. Elle a raison.

121 On note x la longueur, en cm, du côté d'un petit triangle équilatéral.
Alors le périmètre d'un de ces triangles est $3x$.
La longueur de chaque côté de l'hexagone est $6 - x - x$ c'est à dire $6 - 2x$.
Le périmètre de l'hexagone vert est donc
$3 \times (6 - 2x) + 3 \times x$ c'est-à-dire $3(6 - 2x) + 3x$.
La somme des périmètres des trois petits triangles est égale au périmètre de l'hexagone vert donc :

$$3 \times 3x = 3(6 - 2x) + 3x.$$

On résout cette équation.
On réduit le membre de gauche, on développe et on réduit le membre de droite.

$$9x = 3 \times 6 - 3 \times 2x + 3x$$
$$9x = 18 - 6x + 3x$$
$$9x = 18 - 3x$$
$$9x + 3x = 18$$
$$12x = 18$$
$$x = 1{,}5$$

1,5 est la solution de l'équation.

On conclut :
● 1,5 cm × 3 = 4,5 cm
4,5 cm × 3 = 13,5 cm
● 6 cm – 1,5 cm × 2 = 6 cm – 3 cm = 3 cm
3 cm × 3 + 1,5 cm × 3 = 9 cm + 4,5 cm = 13,5 cm
● Le côté d'un petit triangle équilatéral mesure 1,5 cm.

122 ● On note n le nombre d'allers-retours qu'Anissa envisage de faire entre Toulouse et Bordeaux pendant l'année.
● Si Anissa ne prend pas d'abonnement, le montant de sa dépense, en €, sera $80n$.
● 80 € : 2 = 40 €
Si elle prend un abonnement, sa dépense, en €, sera $442 + 40n$.
● On résout l'inéquation $80n \leqslant 442 + 40n$.

$$80n - 40n \leqslant 442$$
$$40n \leqslant 442$$
$$\frac{40n}{40} \leqslant \frac{442}{40}$$
$$n \leqslant 11{,}05$$

Les nombres inférieurs ou égaux à 11,05 sont les solutions de l'inéquation.
● On conclut.
– Si Anissa envisage de faire 11 voyages allers-retours au maximum dans l'année, elle peut choisir le premier tarif et payer chaque voyage 80 €.
– Si elle envisage de faire au moins 12 voyages allers-retours dans l'année, elle a intérêt à prendre un abonnement.

123 **a.** On observe dans la colonne E que pour $x = 0$, $3x^2 - 9x - 7$ et $5x - 7$ prennent la même valeur : – 7, donc 0 est une solution de l'équation

$$3x^2 - 9x - 7 = 5x - 7.$$

b. On résout l'équation.

$$3x^2 - 9x - 7 + 7 = 5x - 7 + 7$$
$$3x^2 - 9x = 5x$$
$$3x^2 - 9x - 5x = 0$$
$$3x^2 - 14x = 0$$

On factorise le membre de gauche.

$$x \times 3x - x \times 14 = 0$$
$$x \times (3x - 14) = 0$$

Un produit de facteurs est nul dans le seul cas où l'un de ses facteurs est nul, c'est-à-dire :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 14 = 0$$
$$3x = 14$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{14}{3}$$
$$x = \frac{14}{3}$$

0 et $\frac{14}{3}$ sont les solutions de cette équation.
On retrouve la solution 0 identifiée grâce au tableur.
L'équation a donc une autre solution : $\frac{14}{3}$.

124 **1.** $5 \times 7 + 1 = 35 + 1 = 36$
$36 = 4 \times 9$ donc 36 est bien un multiple de 4.

Léo a raison dans ce cas.

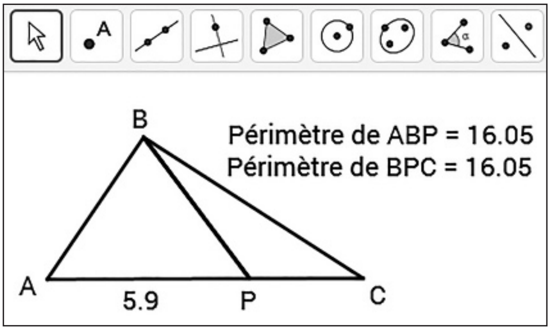
2. a. On développe et on réduit.
$(2x+1)(2x+3)+1 = 2x \times 2x + 2x \times 3 + 1 \times 2x + 1 \times 3 + 1$
$(2x+1)(2x+3)+1 = 4x^2 + 6x + 2x + 3 + 1$
$(2x+1)(2x+3)+1 = 4x^2 + 8x + 4$

b. On peut factoriser le résultat obtenu à la question **a.** en mettant le nombre 4 en facteur.
$4x^2 + 8x + 4 = 4 \times x^2 + 4 \times 2x + 4 \times 1$
$4x^2 + 8x + 4 = 4 \times (x^2 + 2x + 1)$
x est un nombre entier, donc $x^2 + 2x + 1$ est un nombre entier.
Un multiple de 4 s'écrit sous la forme $4n$, où n est un nombre entier, donc $4x^2 + 8x + 4$ est un multiple de 4.

125 ● On note x la longueur, en cm, du segment [AP].
Comme le point P appartient au segment [AC],
$AC = AP + PC$ c'est-à-dire $9{,}2 = x + PC$.
Ainsi $PC = 9{,}2 - x$.

● Le périmètre du triangle APB est AP + PB + BA c'est-à-dire $x + PB + 5$.
Le périmètre du triangle BPC est BP + PC + CB c'est-à-dire $PB + 9{,}2 - x + 7{,}6$ soit $PB + 16{,}8 - x$.
On cherche la valeur de x pour laquelle ces deux périmètres sont égaux, c'est-à-dire telle que :
$$x + PB + 5 = PB + 16{,}8 - x.$$
● On résout cette équation.
$$\begin{aligned} x + PB + 5 - PB &= PB + 16{,}8 - x - PB \\ x + 5 &= 16{,}8 - x \\ x + 5 + x &= 16{,}8 \\ 2x + 5 &= 16{,}8 \\ 2x &= 16{,}8 - 5 \\ 2x &= 11{,}8 \\ x &= 5{,}9 \end{aligned}$$
5,9 est la solution de l'équation.

● Si on place le point P à 5,9 cm de A sur le segment [AC], alors les triangles ABP et BPC ont le même périmètre.



126 On évalue les frais liés à la maison en 2016.

● À l'aide du diagramme du document 2, on peut calculer le montant D des dépenses pour l'année 2015.
D = 250 € × 4 + 450 € + 550 € × 4 + 300 € + 150 € × 2
D = 1 000 € + 450 € +2 200 € + 300 € + 300 €
D = 4 250 €

● En 2016, le montant des dépenses est 6 % plus élevé qu'en 2015.
$\frac{6}{100} \times 4\,250$ € $= 0{,}06 \times 4\,250$ € = 255 €
4 250 € + 255 € = 4 505 €
En 2016, le montant des dépenses liées à la maison est 4 505 €.

● 700 € × 12 = 8 400 €
Le remboursement de l'emprunt s'élève à 8 400 € pour l'année.

● 4 505 € + 8 400 € = 12 905 €
En 2016, les frais s'élèvent à 12 905 €.

On évalue les recettes liées à la location de la maison, en 2016.

● On note x le prix, en €, de la location par semaine entre le 2 juillet et le 20 août.
À l'aide du document 3, on obtient le montant R des recettes.
4 + 5 = 9
La location a rapporté de 750 € pendant 9 semaines.
$R = 750 \times 9 + 7x$ soit $R = 6\,750 + 7x$.

● Les recettes doivent couvrir les frais. On peut traduire cette situation par : $6\,750 + 7x \geqslant 12\,905$.
On résout cette inéquation.
$$\begin{aligned} 6\,750 + 7x &\geqslant 12\,905 \\ 7x &\geqslant 12\,905 - 6\,750 \\ 7x &\geqslant 6\,155 \\ \frac{7x}{7} &\geqslant \frac{6\,155}{7} \\ x &\geqslant \frac{6\,155}{7} \end{aligned}$$
Les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{6\,155}{7}$ sont les solutions de l'inéquation.

On conclut.
$\frac{6\,155}{7} \approx 879{,}29$
Le tarif minimal de la location par semaine du 2 juillet au 20 août peut être 880 €.

127 a. ● On évalue les frais F de l'association pour l'achat des lots de la tombola, à l'aide du document 2.
F = 300 € + 25 € × 10 + 5 € × 20 = 300 € + 250 € + 100 €
F = 650 €
Les frais s'élèvent à 650 €.

● On lit le nombre de tickets de tombolas vendus à l'aide du diagramme du document 3.
350 + 225 + 400 + 125 + 325 + 475 = 1 900
1 900 tickets ont été vendus.
On lit le prix d'un ticket sur le document 1 : 2 € par ticket.
2 € × 1 900 = 3 800 €
La recette s'élève à 3 800 €.

● 3 800 € – 650 € = 3 150 €
Le bénéfice est de 3 150 €.
3 150 € > 2 660 € donc l'association peut financer la sortie.

b. ● On note p le prix d'un ticket, en €.
La recette est $1\,900p$.
On traduit la situation par l'inéquation :
$$1\,900p \geqslant 10\,000 + 650$$

On résout cette inéquation.

$$1\,900p \geqslant 10\,650$$

$$\frac{1900p}{1900} \geqslant \frac{10\,650}{1900}$$

$$p \geqslant \frac{10\,650}{1900}$$

Les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{10\,650}{1900}$ sont les solutions de l'inéquation.

- On conclut.

$\frac{10\,650}{1900} \approx 5{,}61$

On pourrait choisir 5,61 € comme prix minimal d'un ticket, mais ce n'est pas réaliste.

On peut proposer 5,70 € ou 5,80 € voire 6 € comme prix du ticket.

Découvrir et utiliser les nombres premiers

CHAPITRE 3

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le cycle 3 et le début du cycle 4

En classe de 6^e, les élèves apprennent à établir des égalités entre des fractions simples. Ils utilisent les critères de divisibilité (par 2, 3, 4, 5, 9, 10), lesquels sont réactivés au cycle 4, en 4^e, où les élèves apprennent à reconnaître un multiple ou un diviseur. La simplification de fraction est étudiée au début du cycle 4, sans formaliser la notion de fraction irréductible.

2 Je découvre

Activité 1

Cette activité a pour objectifs :
– d'utiliser les connaissances des élèves sur les diviseurs d'un nombre pour introduire la notion de nombre premier. Les nombres choisis sont volontairement plus petits que 100 et permettent d'utiliser les critères de divisibilité.
– de comprendre ce qu'est une décomposition en produit de facteurs premiers à partir d'un exemple et d'essayer de trouver celle du nombre 180.
Aucune méthode n'est proposée pour laisser l'élève autonome face à cette tâche et obtenir plusieurs procédures. On pourra montrer que chaque proposition d'élève aboutit à la même décomposition en produit de facteurs premiers.

Activité 2

L'objectif est d'apprendre à rendre irréductible une fraction. Deux méthodes sont proposées. La première utilise les critères de divisibilité et demande à l'élève de simplifier au fur et à mesure et la deuxième utilise les décompositions en produit de facteurs premiers.
Cette deuxième méthode est plus technique et nécessite notamment d'utiliser les propriétés de calcul sur les puissances, si elles ont été formalisées avant.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

Suite à l'activité 1, on peut étudier les paragraphes 1 « Nombres premiers » et 2 « Décomposition en produit de facteurs premiers ». Deux méthodes sont proposées dans l'exemple 1.
Suite à l'activité 2, on peut étudier le paragraphe 3 « Fraction irréductible ».

Exercice résolu

Cet exercice permet de travailler la notion de plus petit multiple commun sans la définir mais à travers la résolution de problèmes. Les problèmes sont des exemples proposés dans les programmes officiels (« Étudier des problèmes d'engrenages (par exemple braquets d'un vélo, rapports de transmission d'une boîte de vitesses, horloge) »).

4 Compléments

Les nombres premiers

L'exercice 37 est fondamental. Il utilise la méthode du crible d'Ératosthène. Cet exercice est repris pour en résoudre d'autres.

- L'exercice 79 propose une méthode avec un tableur. Cette méthode n'est pas optimale et pourra donner lieu à la recherche d'une méthode plus efficace en fonction des propositions des élèves.
- Les exercices 84, 97 et 99 ont pour objectif de chercher des formules qui permettraient d'écrire les nombres premiers. Ces exercices permettent de travailler le raisonnement et peuvent être l'occasion de parler d'histoire des mathématiques et de cryptographie.

Décomposer en produit de facteurs premiers

Les exercices 42 à 48 demandent à l'élève de réfléchir à des stratégies plus efficaces en fonction des nombres proposés et des produits déjà donnés.

Rendre irréductible une fraction

Les exercices 54 à 60 demandent à l'élève de rendre irréductibles des fractions. À cette occasion, deux méthodes sont envisagées. Suivant les exercices, il pourra être profitable de montrer l'intérêt d'une méthode.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. a. et **c.** ; **2. a.**, **b.** et **c.** ; **3. b.** ; **4. a.** et **c.** ; **5. a.** ; **6. a.**

Je découvre

Activité 1

1 a. Les diviseurs de 11 sont 1 et 11.
Les diviseurs de 13 sont 1 et 13.
Les diviseurs de 5 sont 1 et 5.
Le nombre 1 n'a que 1 comme diviseur.

b. Les nombres précédents (11, 13 et 5) sont des nombres premiers. Ils ont exactement deux diviseurs. Le nombre 1 n'est pas premier.
Les nombres premiers parmi les nombres de 0 à 30 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

c. 32 et 72 sont divisibles par 2 : ils ne sont pas premiers.
45 et 81 sont divisibles par 9 : ils ne sont pas premiers.

51 est divisible par 3, il n'est pas premier.

❷ **a.** Les deux produits qui sont des décompositions en produit de facteurs premiers de 40 sont :
$2 \times 2 \times 2 \times 5$ et $2^3 \times 5$.

b. On peut diviser successivement 180 par des nombres premiers en partant de 2 :
$180 : 2 = 90$
$90 : 2 = 45$
$45 : 3 = 15$
$15 : 3 = 5$
$5 : 5 = 1$
Ce qui donne $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

Activité 2

❶ **a.** 360 et 840 sont divisibles par 10, on obtient :
$$\frac{360}{840} = \frac{360 : 10}{840 : 10} = \frac{36}{84}$$

b. 36 et 84 sont divisibles par 4. On obtient :
$$\frac{36}{84} = \frac{36 : 4}{84 : 4} = \frac{9}{21}$$

c. 9 et 21 sont divisibles par 3. On obtient :
$$\frac{9}{21} = \frac{9 : 3}{21 : 3} = \frac{3}{7}$$

d. 3 et 7 n'ont pas de diviseurs communs.
On dit qu'ils sont premiers entre eux.
La fraction $\frac{3}{7}$ ne peut pas être simplifiée.

❷ **a.** $2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$
$2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 8 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$

b. On obtient :
$$\frac{360}{840} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 5}{2^3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{3}{7}$$
On a simplifié par le produit : $2^3 \times 3 \times 5$.

J'applique le cours

2 La roue A a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 12 et B a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 8.
On décompose 12 et 8 en produit de facteurs premiers :
$12 = 2^2 \times 3$ et $8 = 2^3$
On observe que le premier multiple commun non nul à 12 et 8 est obtenu en multipliant 12 par 2 et 8 par 3. Ce multiple commun est donc $2^3 \times 3$.
Ainsi, les roues A et B occuperont à nouveau la même position pour la première fois lorsque A aura fait 2 tours et B, 3 tours.

3 La roue A a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 15 et B a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 25.
On décompose 15 et 25 en produit de facteurs premiers :
$15 = 3 \times 5$ et $25 = 5^2$
On observe que le premier multiple commun non nul à 15 et 25 est obtenu en multipliant 15 par 5 et 25 par 3.
Ce multiple commun est donc 3×5^2.
Ainsi, les roues A et B occuperont à nouveau la même position pour la première fois lorsque A aura fait 5 tours et B, 3 tours.

4 **a.** $24 : 4 = 6$ et $36 : 4 = 9$
S'il fait 4 paquets, il y aura 6 pommes et 9 poires dans chaque paquet.
b. $24 = 2^3 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$
c. On observe que dans la décomposition en facteurs premiers de 24 et 36, il y a le produit en commun $2^2 \times 3$.
Il pourra donc faire au maximum 12 paquets identiques.

5 Le bus A part toutes les 36 min et le bus B part toutes les 24 min.
On décompose 36 et 24 en produit de facteurs premiers :
$36 = 2^2 \times 3^2$ et $24 = 2^3 \times 3$
On observe que le premier multiple commun non nul à 36 et 24 est obtenu en multipliant 36 par 2 et 24 par 3. Ce multiple commun est donc $2^3 \times 3^2 = 72$.
a. Ainsi, les bus A et B partiront de nouveau en même temps pour la première fois 72 min plus tard, à 8 h 12.
b. Toutes les 72 min, les deux bus partent en même temps. La deuxième fois sera à 9 h 24.
c. 5×72 min = 360 min, soit 6 h.
La cinquième fois sera à 13 h.

6 **a.** $16 = 2^4$ et $14 = 2 \times 7$
b. On observe que le premier multiple commun non nul à 16 et 14 est obtenu en multipliant 16 par 7 et 14 par 2^3.
Ce multiple commun est donc $2^4 \times 7 = 112$.
Le plus petit carré aura pour côté 112 cm.

À l'oral

7 Jian a raison. 2 est le seul nombre premier et pair.
Tous les autres nombres pairs ont aussi 2 comme diviseur autre que 1 et eux-mêmes. Ils ne sont donc pas premiers.

8 Kelly a raison. Si un nombre a 0 comme chiffre des unités, alors il est divisible par 10. Il n'est donc pas premier.

9 Tom a raison. 63 est par exemple divisible par 7. Il n'est donc pas premier.

10 Tous les nombres premiers sont impairs, sauf 2.
Mais cela ne veut pas dire que tous les nombres impairs sont des nombres premiers. En effet, 9 est un nombre impair mais divisible par 3. Il n'est donc pas premier.

11 C'est 17 le seul nombre premier.

12 Un nombre premier n'a que 1 et lui-même comme diviseurs. Il ne pourra les partager équitablement avec ses amis que s'ils sont autant que le nombre de macarons. Chaque ami aura alors un macaron.

13 **a.** 2 ; **b.** 5 ; **c.** 3 ; **d.** 7 ; **e.** 3

14 Marie a tort : 15 et 12 ne sont pas des nombres premiers.

On peut partir du produit proposé par Marie :
$180 = 15 \times 12$
$180 = 3 \times 5 \times 3 \times 4$
Donc $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de 180.

15 20 est divisible par 2 et par 5.
Les nombres 2 et 5 sont premiers et des facteurs de la décomposition en produit de facteurs premiers de 20.

16 On part de Giulia : $24 = 6 \times 4$
$24 = 2 \times 3 \times 2^2$ donc $24 = 2^3 \times 3$
On part de Tarik : $24 = 8 \times 3$
Donc $24 = 2^3 \times 3$
On part de Mathis : $24 = 2 \times 12$
$24 = 2 \times 3 \times 2^2$ donc $24 = 2^3 \times 3$
On trouve dans les 3 cas la même décomposition en produit de facteurs premiers de 24.

17 35 est divisible par les nombres premiers 5 et 7.
Seul 5 divise aussi 20.
Ce nombre premier est donc 5.

18 $\dfrac{286}{308} = \dfrac{2\times11\times13}{2^2\times7\times11} = \dfrac{13}{2\times7} = \dfrac{13}{14}$

Calcul mental

19 **a.** 8 ; **b.** 12 ; **c.** 50 ; **d.** 81.

20 Il suffit de vérifier si 3 est un diviseur en regardant la somme des chiffres de chaque nombre.
a. Non. **b.** Oui. **c.** Oui. **d.** Oui.

21 A = 30
B = 63
C = 110
D = 60

22 **a.** $2^2 \times 5^2 = 4 \times 25 = 100$
b. • $100 = 2^2 \times 5^2$ • $200 = 2^3 \times 5^2$
• $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ • $400 = 2^4 \times 5^2$
• $500 = 2^2 \times 5^3$

23 **a.** $\dfrac{35}{55} = \dfrac{7}{11}$; **b.** $\dfrac{24}{50} = \dfrac{12}{25}$
c. $\dfrac{63}{27} = \dfrac{7}{3}$; **d.** $\dfrac{200}{40} = 5$; **e.** $\dfrac{25}{50} = \dfrac{1}{2}$

24 **a.** $15 = 3 \times 5$ et $35 = 5 \times 7$
b. Le nombre premier 5.
c. $\dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$

Je m'entraîne

25 **a.** 145 est divisible par 5
b. 381 est divisible par 3 (3 + 8 + 1 = 12)
c. 372 est divisible par 2 (par 3 également)
d. 156 est divisible par 2 (par 4 également)
e. 240 est divisible par 10
f. 175 est divisible par 5

26 **a.** 13 est premier, ses diviseurs sont 1 et 13
b. 18 n'est pas premier : il est divisible par 2
c. 23 est premier, ses diviseurs sont 1 et 23
d. 27 n'est pas premier : il est divisible par 3
e. 51 n'est pas premier : il est divisible par 3
f. 123 n'est pas premier : il est divisible par 3

27 Non. En effet, la somme de 5 et 11, deux nombres impairs, est 16. La somme de deux nombres impairs est toujours pair et n'est donc jamais un nombre premier, sauf pour la somme de 1 et 1 qui est 2, et 2 est un nombre premier.

28 Arthur a tort. Le produit de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier. Ce produit a un nombre premier comme diviseur.

29 Myriam a raison. La somme de deux nombres premiers peut-être un nombre premier. Par exemple : la somme de 2 et 3 est 5. Ces nombres sont premiers.
Cela est aussi vrai pour 2 et 11.
Pour aller plus loin : il faut obligatoirement choisir 2 comme terme puisque la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

30 Laura a tort.
On insère la formule =2*A2+3 dans la cellule B2.
Puis on effectue un copier-glisser vers le bas.

	A	B
1	n	2n+3
2	0	3
3	1	5
4	2	7
5	3	9
6	4	11
7	5	13
8	6	15
9	7	17
10	8	19
11	9	21
12	10	23

À la ligne 5, si on choisit le nombre $n = 3$,
alors $2n + 3 = 9$. 9 n'est pas un nombre premier.
À la ligne 8, on obtient avec cette formule pour $n = 6$, le nombre 15 qui n'est pas premier.
Par contre, les autres nombres inscrits ici sont premiers.

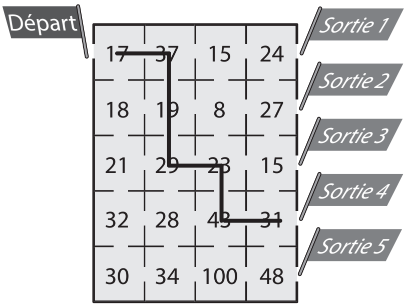
31 **a.** 7 ; **b.** 19 ; **c.** 31 ; **d.** 41.

32 Le couple 7 et 13 est un couple de nombres premiers sexy ainsi que 5 et 11 ; 11 et 17.

33 **a.** Les diviseurs de 24 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24
b. Les diviseurs premiers de 24 sont 2 et 3.

34 **a.** A n'est pas un nombre premier car 3 est facteur de $2 \times 9 \times 5$ et de 3.
b. A n'est pas un nombre premier car 9 est facteur de $36 \times 5 \times 7$ et de 27.

35



C'est la sortie 4.

36 **a.** Elle peut les disposer en réalisant :
1 ligne de 24 ou 24 lignes de 1
2 lignes de 12 ou 12 lignes de 2
3 lignes de 8 ou 8 lignes de 3
4 lignes de 6 ou 6 lignes de 4

b. Léo n'a que deux possibilités : le nombre de pions de Léo est premier. Les nombres premiers ont exactement deux diviseurs 1 et eux-mêmes.

37 Les nombres en gras sont les nombres premiers inférieurs à 100.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

38 On utilise le crible d'Erathostène pour connaître les nombres premiers plus petits que 100.
Il y a 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79 et 97 qui sont des nombres premiers palindromes.

39 La date est un nombre premier plus grand que 10 et plus petit que 31.
Les possibilités sont 11, 13, 17, 19, 23 et 29.
La somme des chiffres est 11, donc c'est 29.
Le jour de son anniversaire est donc le 29.

40 On teste, par ordre croissant, si les nombres premiers sont diviseurs de 391. Le premier nombre premier diviseur de 391 est 17.
$391 = 17 \times 23$, 17 et 23 sont premiers.

41 $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$ et $102 = 2 \times 17 \times 3$

42 **a.** Ce n'est pas la décomposition en produit de facteurs premiers, car 8 et 4 ne sont pas premiers.
b. On part de $224 = 7 \times 8 \times 4$
$224 = 7 \times 2^3 \times 2^2$
$224 = 2^5 \times 7$

43 On part de $256 = 16 \times 16$
$256 = 2^4 \times 2^4$
$256 = 2^8$

44 **a.** On utilise le fait que $45 = 5 \times 9$ et donc $45 = 5 \times 3^2$
b. On utilise le fait que 65 est divisible par 5.
$65 = 5 \times 13$
c. $34 = 2 \times 17$
d. $48 = 2 \times 24 = 2 \times 3 \times 8 = 2^4 \times 3$

45 **a.** $56 = 7 \times 8 = 7 \times 2^3$
b. $42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$
c. $93 = 3 \times 31$
d. $110 = 10 \times 11 = 2 \times 5 \times 11$

46 **a.** $550 = 5 \times 11 \times 10 = 5 \times 11 \times 2 \times 5 = 2 \times 5^2 \times 11$
b. $320 = 32 \times 10 = 2^5 \times 2 \times 5 = 2^6 \times 5$
c. $425 = 5 \times 85 = 5 \times 5 \times 17 = 5^2 \times 17$
d. $1\,000 = 10 \times 10 \times 10 = 2^3 \times 5^3$

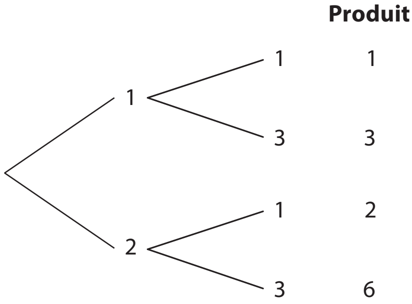
47 **a.** $27 \times 24 = 3^3 \times 3 \times 2^3 = 2^3 \times 3^4$
b. $26 \times 28 = 2 \times 13 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^3 \times 7 \times 13$
c. $63 \times 23 = 7 \times 3^2 \times 23$

48 **a.** $64 \times 15 \times 10 = 2^6 \times 3 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^7 \times 3 \times 5^2$
b. $28^2 \times 49 = (7 \times 2^2)^2 \times 7^2 = 7^4 \times 2^4$
c. $21^2 \times 35^4 = (3 \times 7)^2 \times (7 \times 5)^4 = 3^2 \times 7^2 \times 7^4 \times 5^4 = 3^2 \times 5^4 \times 7^6$

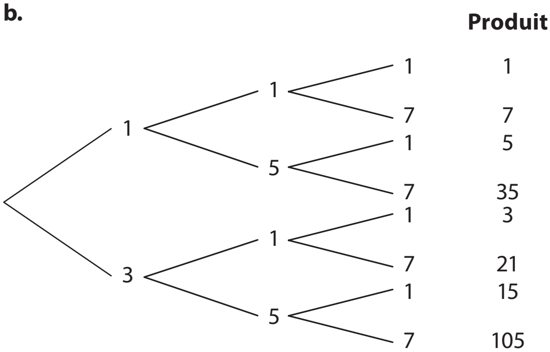
49 On décompose 30 en produit de facteurs premiers : $30 = 2 \times 3 \times 5$. Il y a donc 5 desserts différents.

50 **a.** $56 = 2^3 \times 7$ $\qquad 49 = 7^2$
b. Le seul diviseur premier de 56 et 49 est 7.

51 **1. a.** Les diviseurs de 6 sont : 1, 6, 2 et 3.
b.



2. a. $105 = 3 \times 5 \times 7$
b.



Les diviseurs de 105 sont donc :
1, 7, 5, 35, 3, 21, 15 et 105.

52 **1.** Sachant que : $8\,712 = 88 \times 99$
$8\,712 = 8 \times 11 \times 9 \times 11$
$8\,712 = 2^3 \times 11 \times 3^2 \times 11$
D'où $8\,712 = 2^3 \times 3^2 \times 11^2$.

2. a. 6 est un diviseur de 8 712, on le retrouve dans la décomposition en facteurs premiers de 8 712.

b. 33 est un diviseur de 8 712.

c. 8 un diviseur de 8 712.

d. $22 \times 3 \times 11$ est un diviseur de 8 712.

e. 32×112 est un diviseur de 8 712.

f. 22×7 n'est pas un diviseur de 8 712, car 7 n'est pas un facteur premier de la décomposition en produit de facteurs premiers.

53 **1.** $45 = 5 \times 9 = 5 \times 3^2$
$150 = 5 \times 30 = 5 \times 5 \times 6 = 5^2 \times 2 \times 3$

2. a. 3 est un diviseur de 45 et de 150.
b. $3^2 \times 5$ est un diviseur de 45 mais n'est pas un diviseur de 150.
c. 2×5^2 n'est pas un diviseur de 45 mais est un diviseur de 150.
d. 3×5^2 n'est pas un diviseur de 45 mais est un diviseur de 150.
e. 5×7 n'est ni un diviseur de 45 ni un diviseur de 150.
f. $2 \times 3 \times 11$ n'est ni un diviseur de 45 ni un diviseur de 150.
3. Comme $45 = 5 \times 3^2$ et $150 = 5^2 \times 2 \times 3$, on remarque que 45 et 150 ont comme facteurs communs 5 et 3.
5 et 3 sont les nombres premiers.
45 et 150 sont divisibles par 15, qui est le plus grand diviseur commun à 45 et 150.
54 On utilise les critères de divisibilité pour simplifier les fractions :

a. $\frac{60}{40} = \frac{6}{4} = \frac{2}{3}$

b. $\frac{126}{180} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$

c. $\frac{105}{90} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$

55 **a.** On cherche les facteurs communs au numérateur et au dénominateur
$$\frac{2^3 \times 5 \times 11}{2 \times 3 \times 5^2} = \frac{2^2 \times 11}{3 \times 5} = \frac{44}{15}$$
b. $\frac{2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7}{2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2} = \frac{3^2}{2^2 \times 7} = \frac{9}{28}$

56 **a.** $\frac{520}{390} = \frac{2^3 \times 5 \times 13}{2 \times 3 \times 5 \times 13} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$

b. $52 = 520 : 10 = 2^2 \times 13$
$$\frac{52}{390} = \frac{2^2 \times 13}{2 \times 3 \times 5 \times 13} = \frac{2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$$
c. $26 = 52 : 2 = 2 \times 13$ et $39 = 390 : 10 = 3 \times 13$
$$\frac{26}{39} = \frac{2 \times 13}{3 \times 13} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
On pouvait aussi simplifier par 13.
d. $1\,040 = 520 \times 2 = 2^4 \times 5 \times 13$ et
$780 = 390 \times 2 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$.
$$\frac{1\,040}{780} = \frac{2^4 \times 5 \times 13}{2^2 \times 3 \times 5 \times 13} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$$
On pouvait aussi écrire plus simplement :
$$\frac{1\,040}{780} = \frac{52}{390} = \frac{4}{3}$$

57 On décompose 224 et 280 en produit de facteurs premiers :
$224 = 4 \times 56 = 4 \times 8 \times 7 = 2^2 \times 2^3 \times 7 = 2^5 \times 7$
$280 = 4 \times 70 = 4 \times 2 \times 35 = 2^3 \times 5 \times 7$
$$\frac{224}{280} = \frac{2^5 \times 7}{2^3 \times 5 \times 7} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$$

58 **1. a.** $68 = 2 \times 34 = 2 \times 2 \times 17 = 2^2 \times 17$
b. $96 = 2 \times 48 = 2 \times 4 \times 12 = 2 \times 4 \times 4 \times 3 = 2^5 \times 3$
c. $180 = 2 \times 90 = 2 \times 9 \times 10 = 2 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

2. a. $\frac{96}{68} = \frac{2^5 \times 3}{2^2 \times 17} = \frac{2^3 \times 3}{17} = \frac{24}{17}$

b. $\frac{180}{96} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2^5 \times 3} = \frac{3 \times 5}{2^3} = \frac{15}{8}$

c. $\frac{68}{180} = \frac{2^2 \times 17}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{17}{3^2 \times 5} = \frac{17}{45}$

59 **a.** $\frac{48}{75} = \frac{2^4 \times 3}{3 \times 5^2} = \frac{2^4}{5^2} = \frac{16}{25}$

b. $\frac{126}{180} = \frac{2 \times 3^2 \times 7}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10}$

c. $\frac{360}{252} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$

d. $\frac{220}{100} = \frac{2^2 \times 5 \times 11}{2^2 \times 5^2} = \frac{11}{5}$

60 **a.** 16 et 28 sont divisibles par 4 :
$$\frac{16}{28} = \frac{16 : 4}{28 : 4} = \frac{4}{7}$$
b. 250 et 100 sont divisibles par 25 :
$$\frac{250}{100} = \frac{250 : 25}{100 : 25} = \frac{10}{4} = \frac{10 : 2}{4 : 2} = \frac{5}{2}$$
c. 180 et 190 sont divisibles par 10 :
$$\frac{180}{190} = \frac{180 : 10}{190 : 10} = \frac{18}{19}$$
d. 245 et 65 sont divisibles par 5 :
$$\frac{245}{65} = \frac{245 : 5}{65 : 5} = \frac{49}{13}$$
Pour cet exercice, décomposer en produit de facteurs premiers est plus long.

61 On décompose 495 et 528 en produit de facteurs premiers :
$495 = 3^2 \times 5 \times 11$
$528 = 2^4 \times 3 \times 11$
$$\frac{495}{528} = \frac{3^2 \times 5 \times 11}{2^4 \times 3 \times 11} = \frac{3 \times 5}{2^4} = \frac{15}{16}$$

$\frac{15}{16}$ est la fraction simplifiée de $\frac{495}{528}$.

62 **a.** $\frac{125}{75} = \frac{125:25}{75:25} = \frac{5}{3}$

b. On peut utiliser **a**.

$\frac{125}{75} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$

63 11 est un nombre premier. Il n'a que 1 et lui-même comme diviseurs. Mais 220 est divisible par 11. Donc la fraction est réductible.

$\frac{220}{11} = 20$. William a tort.

64 Margot a tort.

Voici un contre-exemple : $\frac{7}{14}$.

Le numérateur est un nombre premier.
14 est un multiple de 7, cette fraction est donc simplifiable par 7.

$\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

Par contre, si le dénominateur n'est pas un multiple de 7, alors la fraction ne peut pas être simplifiée.

65 $\frac{8}{12} + \frac{16}{30} = \frac{2}{3} + \frac{8}{15}$

Après simplifications, les deux fractions n'ont pas le même dénominateur.

Or, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

D'où, $\frac{2}{3} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15} + \frac{8}{15} = \frac{18}{15}$.

Enfin, $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$.

66 **a.** $\frac{49}{140} = \frac{49:7}{140:7} = \frac{7}{20}$ et $\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0{,}35$.

b. $\frac{15}{54} = \frac{15:3}{54:3} = \frac{5}{18}$ et $\frac{5}{18}$ n'est pas un nombre décimal.

c. $\frac{25}{40} = \frac{25:5}{40:5} = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

d. $\frac{72}{320} = \frac{72:8}{320:8} = \frac{9}{40}$ et $\frac{9}{40} = \frac{225}{1\,000} = 0{,}225$.

67 **a.** $120 + 150 = 270$

$\frac{120}{270} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

La proportion de bonbons au chocolat noir dans la boîte est $\frac{4}{9}$.

b. $120 - 3 = 117$
$150 - 3 = 147$
$117 + 147 = 264$

$\frac{117}{264} = \frac{3^2 \times 13}{2^3 \times 3 \times 11} = \frac{3 \times 13}{2^3 \times 11} = \frac{39}{88}$

La proportion de bonbons au chocolat noir dans la boîte change. Elle est maintenant de $\frac{39}{88}$.

68 **a.** Format du rectangle 1 : $\frac{32}{18} = \frac{2\times16}{2\times9} = \frac{16}{9}$

Format du rectangle 2 : $\frac{36}{27} = \frac{9\times4}{9\times3} = \frac{4}{3}$

Format du rectangle 3 : $\frac{60}{45} = \frac{15\times4}{15\times3} = \frac{4}{3}$

Format du rectangle 4 : $\frac{80}{45} = \frac{5\times16}{5\times9} = \frac{16}{9}$

Format du rectangle 5 : $\frac{128}{72} = \frac{8\times16}{8\times9} = \frac{16}{9}$

b. La longueur L vérifie $\frac{L}{54} = \frac{16}{9}$

donc $L = \frac{16}{9} \times 54 = \frac{16\times6\times9}{9} = 96$

La longueur du rectangle est 96 mm.

69 La proportion de supporters de l'équipe française est $\frac{33\,291}{59\,535}$.

$\frac{33\,291}{59\,535} = \frac{3^5\times137}{3^5\times5\times7^2} = \frac{137}{5\times7^2} = \frac{137}{245}$.

La fraction irréductible représentant cette proportion est donc $\frac{137}{245}$.

70 **a.** 545 TWh = 545 000 MWh.

Or, $\frac{85}{545\,000} = \frac{85:5}{545\,000:5} = \frac{17}{109\,000}$

17 est un nombre premier et 109 000 n'est pas un multiple de 17, donc cette fraction est irréductible.

b. 20 éoliennes permettent de produire 85 MWh d'électricité.

$\frac{20\times545\,000}{85} \approx 128\,235$.

Au moins 128 235 éoliennes seraient nécessaires pour couvrir la production électrique française de 2015.

71 **1.** $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $273 = 3 \times 7 \times 13$.

$\frac{105}{273} = \frac{3\times5\times7}{3\times7\times13} = \frac{5}{13}$

2. a. On cherche le dénominateur x tel que $\frac{-85}{x} = \frac{5}{13}$

Deux méthodes sont possibles :

- Avec le produit en croix :

$\frac{-85\times13}{5} = -221$

- $-85 : 5 = -17$ et $13 \times -17 = -221$

Donc : $\frac{-85}{-221} = \frac{5}{13}$

b. On cherche le numérateur y tel que $\frac{y}{247} = \frac{5}{13}$

● Les produits en croix :

$\dfrac{247 \times 5}{13} = 95$

● $247 : 13 = 19$ et $19 \times 5 = 95$

Donc : $\dfrac{95}{247} = \dfrac{5}{13}$

c. On cherche le numérateur z tel que $\dfrac{z}{236} = \dfrac{5}{13}$.

Or, 236 n'est pas divisible par 13.
Le numérateur ne peut pas être un nombre entier.
Par définition, il n'existe pas de fraction de dénominateur 236 égale à r.

Je m'évalue à mi-parcours

72 c. **73** a. **74** b. **75** b. **76** b. **77** c. **78** a.

Avec un logiciel et une calculatrice

79 **1. a.**, **b.** et **c.**

	A	B
1		17
2	2	1
3	3	2
4	4	1
5	5	2
6	6	5
7	7	3
8	8	1
9	9	8
10	10	7
11	11	6
12	12	5
13	13	4
14	14	3
15	15	2
16	16	1

d. On remarque qu'aucun reste de la division euclidienne de 17 par les nombres de 2 à 16 est zéro.
Donc, 17 n'a pas de diviseur parmi les nombres de 2 à 16.

e. On peut conclure que le nombre 17 est premier.

2. a.

	A	B
1		19
2	2	1
3	3	1
4	4	3
5	5	4
6	6	1
7	7	5
8	8	3
9	9	1
10	10	9
11	11	8
12	12	7
13	13	6
14	14	5
15	15	4
16	16	3
17	17	2
18	18	1

Le nombre 19 est premier.

b.

	A	B
1		53
2	2	1
3	3	2
4	4	1
5	5	3
6	6	5
7	7	4
8	8	5
9	9	8
10	10	3
11	11	9
12	12	5
13	13	1
14	14	11
15	15	8
16	16	5
17	17	2
18	18	17
19	19	15
20	20	13
21	21	11
22	22	9
23	23	7
24	24	5
25	25	3
26	26	1
27	27	26
28	28	25
29	29	24
30	30	23
31	31	22
32	32	21
33	33	20
34	34	19
35	35	18
36	36	17
37	37	16
38	38	15
39	39	14
40	40	13
41	41	12
42	42	11
43	43	10
44	44	9
45	45	8
46	46	7
47	47	6
48	48	5
49	49	4
50	50	3
51	51	2
52	52	1

Le nombre 53 est premier.

c. On écrit dans la cellule B1 le nombre 59.
On écrit les nombres de 2 à 58 dans la colonne A.
On recopie la même formule que précédemment jusqu'à la cellule B58.
On vérifie que 59 est un nombre premier.

d.

	A	B
1		91
2	2	1
3	3	1
4	4	3
5	5	1
6	6	1
7	7	0

On remarque que le reste de la division euclidienne de 91 par 7 est 0. Donc 91 est divisible par 7.
91 n'est pas un nombre premier.

e.

	A	B
1		111
2	2	1
3	3	0
4	4	3

On remarque que le reste de la division euclidienne de 111 par 3 est 0. Donc 111 est divisible par 3.
111 n'est pas un nombre premier.

3. Il faut chercher parmi les nombres impairs compris entre 125 et 130.

- 125 n'est pas premier, il est divisible par 5.
- On écrit dans la cellule B1 le nombre 127.
On écrit les nombres de 2 à 126 dans la colonne A.
On recopie la même formule que précédemment jusqu'à la cellule B126.
On vérifie que 127 est un nombre premier.
- 129 est divisible par 3, il n'est pas premier.

80 **1. a.**

374
$2\times11\times17$

b. La montre sonne tous les multiples de 1 014 et le réveil tous les multiples de 374.
La calculatrice donne les deux décompositions en produit de facteurs premiers.
$1\,014 = 2\times3\times13^2$
$374 = 2\times11\times17$
On observe que le premier multiple commun non nul à 1 014 et 374 est obtenu en multipliant 1 014 par 11 et 17 et 374 par 3 et 13^2.
Ce multiple commun est donc $2\times3\times11\times13^2\times17$.
Ainsi, la montre et le réveil sonneront à nouveau pour la première fois ensemble après $2\times3\times11\times13^2\times17$ s.
Or, $2\times3\times11\times13^2\times17 = 189\,618$.

1 h = 3 600 s.
On effectue la division euclidienne de 189 618 par 3 600.

$$\begin{array}{r|l} 189618 & 3600 \\ \cline{2-2} -18000 & 52 \\ \hline 9618 & \\ -7200 & \\ \hline 2418 & \end{array}$$

Il reste 2 418 s.
On effectue la division euclidienne de 2 418 par 60.

$$\begin{array}{r|l} 2418 & 60 \\ \cline{2-2} -240 & 40 \\ \hline 18 & \end{array}$$

Il reste 18 s.
189 618 s = 52 h 40 min 18 s.
La montre et le réveil sonneront à nouveau pour la première fois ensemble après 52 h 40 min 18 s.

2. a.

1457
31×47

8756
8 756

b. Dans la décomposition en produit de facteurs premiers, il n'y a aucun facteur commun à 1 457 et 8 756. La fraction est donc irréductible.

3. a.

972
$2^2\times3^5$

360
$2^3\times3^2\times5$

b. On pouvait prévoir que 9 720 serait le dénominateur commun à ces deux fractions à partir de leurs décompositions en produit de facteurs premiers.

J'utilise mes compétences

81 **a.** $n = 100\times c + 10\times d + u$.

b. 100 et 10 sont divisibles par 5 donc $100c$ et $10d$ sont divisibles par 5. On conclut que $100c + 10d$ est divisible par 5.

c. $100c + 10d$ est divisible par 5 donc si u est divisible par 5 alors, $100c + 10d + u$ est divisible par 5.

82 **1.** $99c + 9d + c + d + u = 100c + 10d + u$
Un nombre à 3 chiffres s'écrit bien $100c + 10d + u$.

2. a. 99 et 9 sont divisibles par 3 donc $99c$ et $9d$ sont divisibles par 3. Donc $99c + 9d$ est divisible par 3.

b. $99c + 9d$ est divisible par 3.
Si $c + d + u$ est divisible par 3, alors $n = 99c + 9d + c + d + u$ est divisible par 3.
Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3 alors ce nombre est divisible par 3.

3. On reprend la même démonstration qu'à la question précédente.
99 et 9 sont divisibles par 9, donc $99c$ et $9d$ sont divisibles par 9. Donc $99c + 9d$ est divisible par 9.
Si $c + d + u$ est divisible par 9, alors $n = 99c + 9d + c + d + u$ est divisible par 9.
Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9 alors ce nombre est divisible par 9.

83 $n = 100c + 10d + u$
100 est divisible par 4, donc $100c$ est divisible par 4.
Si $10d + u$ est divisible par 4, alors n est divisible par 4.
$10d + u$ correspond au nombre formé du chiffre des dizaines et des unités.

84 **1. a.** $3 = 4\times0+3$; $5 = 4\times1+1$; $7 = 4\times1+3$
$11 = 4\times2+3$; $13 = 4\times3+1$; $17 = 4\times4+1$; $19 = 4\times4+3$

Ces nombres s'écrivent sous la forme $4n + 1$ ou $4n + 3$, où n désigne un nombre entier.

b. Dans une division euclidienne par 4, les restes possibles sont 0, 1, 2 et 3.
Le dividende est une des formes suivantes :
$4n$ ou $4n + 1$ ou $4n + 2$ ou $4n + 3$.

c. $4n$ et $4n + 2$ sont divisibles par 2.
Ce ne peut pas être des nombres premiers sauf pour 2.
Donc les nombres premiers, supérieurs à 2, sont parmi les nombres de formes $4n + 1$ ou $4n + 3$.

d. $21 = 4 \times 5 + 1$. 21 s'écrit sous la forme $4n + 1$.
Mais 21 n'est pas un nombre premier, il est, par exemple, divisible par 3.

2. a. Dans une division euclidienne par 6, les restes possibles sont 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.
Le dividende est une des formes suivantes :
$6n$ ou $6n + 1$ ou $6n + 2$ ou $6n + 3$ ou $6n + 4$ ou $6n + 5$.
Or, les nombres de la forme $6n$ sont les multiples de 6, les nombres de la forme $6n + 2$ ou $6n + 4$ sont divisibles par 2, ceux de la forme $6n + 3$ divisibles par 3. Les nombres premiers sont donc parmi ceux de la forme
$6n + 1$ ou $6n + 5$.

b. $35 = 6 \times 5 + 5$ est de la forme $6n + 5$.
35 est divisible par 5, ce n'est donc pas un nombre premier.

85 **1. a.** $5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$
24 est un multiple de 4 : $24 : 4 = 6$
$13^2 - 1 = 169 - 1 = 168$
168 est un multiple de 4 ; $168 : 4 = 42$
b. $7^2 - 1 = 49 - 1 = 48$
48 est aussi un multiple de 4 ; $48 : 4 = 12$

c. Si l'on choisit un nombre premier différent de 2, alors le résultat de ce programme de calcul est un multiple de 4.

2. a. On obtient : $p^2 - 1$

b. p est un nombre premier différent de 2, il est donc impair. Sinon, il serait divisible par 2.
$p + 1$ est le nombre qui suit p, il est donc pair.
De même, $p - 1$ est pair.

c. On utilise une identité remarquable :
$(p + 1) \times (p - 1) = p^2 - 1$
$(p + 1)$ et $(p - 1)$ sont tous les deux pairs.
Donc $(p + 1)$ est un multiple de 2 ainsi que $(p - 1)$.
Le produit $(p + 1) \times (p - 1)$ est donc divisible par 4.

86 • L'année de sa naissance est un nombre à 4 chiffres.
Son livre est écrit en 2004.
Il est né en 19_ _

• Le nombre premier entre 90 et 99 est 97.
Il est né en 1 97_

• $1 + 9 + 7 = 17$
La somme des chiffres est divisible par 13.
Cette somme est entre 17 et 26.
C'est donc 26.
Le chiffre des unités est donc 9.
Sa date de naissance est 1979.

87 Voici les nombres premiers inférieurs à 100 :

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

a. Son voisin a pour numéro un multiple de 3 et 5.
Les possibilités pour le numéro de Noé sont les multiples de 15.
Les possibilités pour le numéro de Bastien sont 31, 61 et 91.

b. Le numéro de Noé est aussi divisible par 4.
Le numéro d'appartement de Bastien est le 61 puisque 60 est divisible par 4.

88 **a.** $8 = 5 + 3$
Cette conjecture est vraie pour le nombre 8.

b. $36 = 5 + 31$ ou $36 = 7 + 29$ ou $36 = 13 + 23$
ou $36 = 17 + 19$.
Cette conjecture est vraie pour les nombres précédents.

c. $48 = 5 + 43$
$48 = 7 + 41$
$48 = 11 + 37$
$48 = 17 + 31$
$48 = 19 + 29$

89 Entre 1 et 20, il y a 8 nombres premiers :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
Il y a 8 choix possibles sur un total de 20 nombres.
La probabilité de tirer au hasard un nombre premier entre 1 et 20 est $\frac{8}{20}$, soit $\frac{2}{5}$.

90 **a.** Il faut choisir les 3 plus petits facteurs premiers distincts.
$2 \times 3 \times 5 = 30$
Ce nombre est 30.
Il faut choisir les 5 plus petits facteurs premiers distincts.
$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2\,310$
Ce nombre est 2 310.

b. $4 = 2 \times 2$
$2 \times 3 \times 2 \times 5 = 60$
Ce nombre est 60.

91 **1.** Si deux nombres premiers se suivent, l'un des deux est pair. Il n'y a que 2 et 3 qui sont premiers et se suivent.

2. a. 5 et 7 sont deux nombres premiers de différence 2, ils sont donc jumeaux.

b. 11 et 13 sont deux nombres premiers de différence 2, ils sont donc jumeaux.

c. 13 et 15 ne sont pas jumeaux puisque 15 n'est pas un nombre premier.

d. 29 et 27 ne sont pas jumeaux puisque 27 n'est pas un nombre premier (il est en particulier divisible par 9).

92 Je cherche la décomposition en produit de facteurs premiers de 42 et 85.
$42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$
$85 = 5 \times 17$
On observe que le premier multiple commun non nul à 42 et 85 est obtenu en multipliant 42 par 5 et 17 et 85 par 2, 3 et 7.
Ce multiple commun est donc $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17$.
Ce qui donne 3 570.
Ainsi, Céline pourra de nouveau observer cet alignement dans 3 570 h.
Et 3 570 h = 148 jours + 18 h

93 **a.** $28 = 2^2 \times 7$

b. Les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28.

$\times$	1	7
1	1	7
2	2	14
2^2	$2^2 = 4$	28

c. $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$
Le nombre 28 est un nombre parfait.

94 $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$
Les nombres premiers 2 et 5 divisent 140 et 150.
Le plus grand diviseur commun à 140 et 150 est donc 10.

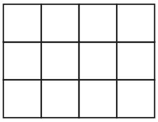
95 ● **Traduction**

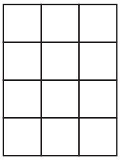
a. Dessiner le maximum de rectangles différents qui contiennent 12 carrés. Les longueur et largeur sont des nombres entiers.

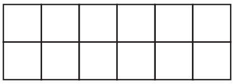
b. Dessiner le maximum de rectangles différents qui contiennent 7 carrés. Les longueur et largeur sont des nombres entiers.

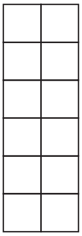
● **Solution**

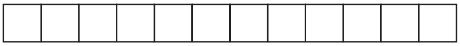
a. $12 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 4 = 1 \times 12 = 12 \times 1$
Il y a donc 6 solutions possibles.

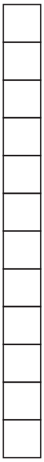




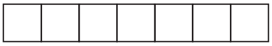




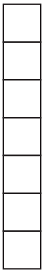




b. 7 est premier : $7 = 7 \times 1 = 1 \times 7$. Il y a donc deux solutions possibles.



Ou



96 **a.** $1484 : 2 = 742$
$742 : 2 = 371$
$371 : 7 = 53$ et 53 est un nombre premier.
Donc $1\,484 = 2^2 \times 7 \times 53$
$1\,060 : 2 = 530$
$530 : 2 = 265$
$265 : 5 = 53$ et 53 est un nombre premier.
Donc $1\,060 = 2^2 \times 5 \times 53$

b. Les longueurs 1 484 cm et 1 060 cm sont divisibles par 2, 4, 53, 8, 106 et 212.
Comme le jardinier souhaite que la distance entre deux rosiers soit comprise entre 100 cm et 200 cm, le seul choix possible est 106 cm.

97 **1. a. b.**

	A	B
1		n(n+1) + 41
2	1	43
3	2	47
4	3	53
5	4	61
6	5	71
7	6	83
8	7	97
9	8	113
10	9	131
11	10	151

c. Tous les nombres de la cellule B2 à B11 sont des nombres premiers.

2. On teste en insérant 40 dans A12.
La formule donne 1 681.

	A	B
1		n(n+1) + 41
2	1	43
3	2	47
4	3	53
5	4	61
6	5	71
7	6	83
8	7	97
9	8	113
10	9	131
11	10	151
12	40	1681

1 681 n'est pas un nombre premier.
En effet, 1 681 est divisible par 41. 1 681 : 41 = 41.

98 3 min 18 s = 3 × 60 s + 18 s = 198 s
3 min 45 s = 3 × 60 s + 45 s = 225 s
On décompose 198 et 225 en produit de facteurs premiers :
198 : 2 = 99
99 : 3 = 33
33 : 3 = 11 et 11 est un nombre premier.
Donc $198 = 2 \times 3^2 \times 11$.
$225 = 15 \times 15$
$225 = 3 \times 5 \times 3 \times 5$
$225 = 3^2 \times 5^2$
On observe que le premier multiple commun non nul à 198 et 225 est obtenu en multipliant 198 par 5^2 et 225 par 2 et 11.
Ce multiple commun est donc $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$.
Ce qui donne 4 950.
4950 s = 82 min 30 ou 1 h 22 min 30 s.
Ils se retrouveront sur la ligne de départ de nouveau et pour la première fois au bout de 1 h 22 min 30 s.

99 Dans les 2ᵉ et 6ᵉ colonnes, les nombres des deux premières lignes sont premiers. Ceux de la 2ᵉ colonne sont de la forme : $6n + 1$ et ceux de la 6ᵉ colonne sont de la forme : $6n + 5$. Les autres colonnes ne peuvent pas être des nombres premiers, ils sont de la forme : $6n$ (multiples de 6) ; $6n + 2$ (multiples de 2) ; $6n + 3$ (multiples de 3) ; $6n + 4$ (multiples de 2).
Donc Anaïs a raison, tous les nombres premiers sont dans les 2ᵉ et 6ᵉ colonnes. Cependant, tous les nombres de ces colonnes ne sont pas des nombres premiers.
Par exemple dans le 6ᵉ colonne, on retrouve le nombre 35.

100 Personne 1 : tous les tiroirs sont ouverts.
Comme 7, 19 et 43 sont des nombres premiers, ces tiroirs resteront ouverts car aucune personne ne s'intéressera à ces nombres, qui ne sont multiples que de 1.
Les diviseurs de 45 sont : 1, 3, 5, 9, 15, 45.
Ce qui donne : ouvert, fermé, ouvert, fermé, ouvert et enfin fermé.
En conclusion 7, 19 et 43 sont ouverts et le 45 est fermé.

101 **a.** On note N le nombre de spectateurs.
Le problème se traduit par :
N compris entre 500 et 1 000.
$N = 24q + 9$
$N = 20q_1 + 9$
$N = 18q_2 + 9$
Donc N – 9 est divisible par 24, 20 et 18 et est entre 500 et 1 000.
Les nombres multiples de 24, 20 et 18 sont multiples de $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$
N – 9 = 720 est la seule solution entre 500 et 1 000.
Les spectateurs étaient 729.
b. $\sqrt{729} = 27$
Les spectateurs pourront se ranger en forme de carré avec 27 lignes et 27 colonnes.

Dossier Brevet

102 ① **Vrai**, car 10 = 2 × 5.
② **Faux**. Un contre exemple est 6. 6 est divisible par 3 mais pas par 9.
③ **Vrai**. 5 + 4 + 8 + 1 = 18.
18 est divisible par 9.

103 **a.** $\dfrac{1\,848}{2\,040}$ n'est pas irréductible puisque 1 848 et 2 040 sont au moins divisibles par 2.
b. 1848 : 8 = 231
231 : 3 = 77
77 : 7 = 11 et 11 est premier.
Donc $1\,848 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$.
2 040 : 8 = 255
255 : 3 = 85

$85 : 5 = 17$ et 17 est premier.
Donc $2\,040 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 17$.
c. Les diviseurs communs sont 2^3 et 3.
$$\frac{1\,848}{2\,040} = \frac{2^3 \times 3 \times 7 \times 11}{2^3 \times 3 \times 5 \times 17} = \frac{7 \times 11}{5 \times 17} = \frac{77}{85}$$

104 **1. a.** 2 et 5 sont des diviseurs premiers de 140.
b. $140 = 2^2 \times 5 \times 7$
c. $2 \times 5 \times 7$ est un diviseur de 140.
2^3 n'est pas un diviseur de 140.
$2^2 \times 5^2$ n'est pas un diviseur de 140.
d.

$\times$	$5^0 \times 7^0 = 1$	$5^1 \times 7^0 = 5$	$5^0 \times 7^1 = 7$	$5^1 \times 7^1 = 35$
$2^0 = 1$	1	5	7	35
$2^1 = 2$	2	10	14	70
$2^2 = 4$	4	20	28	140

2. a. 1 001 est non divisible par 2, 3 et 5.
$1\,001 : 7 = 143$
$143 : 11 = 13$ et 13 est premier.
Donc $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$.
b. Les diviseurs sont : 1, 7, 11, 13, 7×11, 7×13, 11×13 et $7 \times 11 \times 13$

105 La proportion des élèves mangeant au moins cinq fruits et légumes par jour est : $\frac{126}{588}$.
126 et 588 ont des diviseurs communs.
- On peut simplifier en utilisant les critères de divisibilité :
$$\frac{126}{588} = \frac{126 : 2}{588 : 2} = \frac{63}{294} = \frac{63 : 3}{294 : 3} = \frac{21}{98} = \frac{21 : 7}{98 : 7} = \frac{3}{14}$$
- On peut décomposer en produit de facteurs premiers :
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$
$$\frac{126}{588} = \frac{2 \times 3^2 \times 7}{2^2 \times 3 \times 7^2} = \frac{3}{2 \times 7} = \frac{3}{14}$$

106 **a.** $4 = 2^2$ et $6 = 2 \times 3$
On observe que le premier multiple non nul commun à 4 et 6 est obtenu en multipliant 4 par 3 et 6 par 2.
Ce multiple commun est donc $2^2 \times 3 = 12$.
Elle arrosera de nouveau ces deux variétés dans 12 jours.
On aurait pu regarder les multiples de 4 et de 6 :
Multiples de 4 : 4, 8, 12, 16, 20, 24…
Multiples de 6 : 6, 12, 18, 24
Le premier multiple commun à 4 et 6 est 12.
b. Tous les 12 jours, elle arrose ces fleurs en même temps.
$5 \times 12 = 60$. Elle arrosera à nouveau ces deux variétés pour la 5e fois dans 60 jours.

107 **1. a.** • $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$
• $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121$
• $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361$
b. $25 = 5^2$; $121 = 11^2$; $361 = 19^2$
2. a. $(n+1)(n+2) = n^2 + 2n + n + 2 = n^2 + 3n + 2 = n(n+3) + 2$
b. On pose $a = (n+1)(n+2)$.
D'après **2. a.** : $a - 2 = n(n+3)$
$p = n\,(n+1)(n+2)(n+3) = n \times (n(n+3) + 2)(n+3)$
$p = n \times a(n+3) = a \times n(n+3) = a \times (a-2)$
c. $p + 1 = a \times (a-2) + 1$
et $a \times (a-2) + 1 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$
d. Contre-exemple :
$6 \times 7 \times 8 \times 9 + 1 = 3\,025$
$55^2 = 3\,025$ et 55 n'est pas un nombre premier.

108 **1.** 3 003 par 20 : R = 3
3 731 par 20 : R = 11
2. a. 3 003 par 90 : R = 33
Cela ne convient pas.
b. On peut décomposer 3 003 et 3 731 en produit de facteurs premiers.
$3\,003 : 3 = 1\,001$
$1\,001 : 7 = 143$
$143 : 11 = 13$ et 13 est premier.
$3\,003 = 3 \times 7 \times 11 \times 13$
$3731 : 7 = 533$
$533 : 13 = 41$ et 41 est premier.
$3\,731 = 7 \times 13 \times 41$
Le plus grand diviseur commun à 3 003 et 3 731 est $7 \times 13 = 91$.
Ils feront 91 ballotins.
$3\,003 : 91 = 33$ et $3\,731 : 91 = 41$.
Il y aura dans chaque ballotin 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes.

109 On prend un nombre entier à 3 chiffres :
$n = 1\,000 \times m + 100 \times c + 10 \times d + u$
$1\,000 \times m + 100 \times c$ est divisible par 25 car $100 : 25 = 4$ et $1\,000 : 4 = 250$.
$10 \times d + u$ est divisible par 25 seulement s'il s'écrit 00 ou 25 ou 50 ou 75.
Conclusion : Un nombre est divisible par 25 lorsque le nombre composé du chiffre des dizaines et des unités est 25, 50, 75 ou 00. Maï a raison.

110 **a.** $12 = 2^2 \times 3$
On observe que le premier multiple commun non nul à 7 et 12 est obtenu en multipliant 7 par $2^2 \times 3$ et 12 par 7.
Ce multiple commun est donc $2^2 \times 3 \times 7 = 84$.
Ils partiront tous les deux ensemble de Marseille 84 jours après le 1er mars.
$84 = 31 + 30 + 23$
C'est donc le 24 mai.
b. $84 : 14 = 6$.
84 est aussi un multiple de 84.
Les trois bateaux partiront à nouveau ensemble le 24 mai.

111 On note n le nombre d'enfants.
$397 = n \times x + 37$
$598 = n \times y + 13$
Le nombre n est donc un diviseur de $397 - 37 = 360$ et de $598 - 13 = 585$.
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$585 = 3^2 \times 5 \times 13$
Un diviseur commun, le plus grand possible, est $3^2 \times 5 = 45$
45 enfants, au maximum, étaient présents.

112 **a.** $12 \times 30 = 360$
360 min = 6 h.
La voiture B, gagnante, a mis 6 h pour effectuer cette course.
b. $36 = 2^2 \times 3^2$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$
On observe que le premier multiple commun non nul à 36 et 30 est obtenu en multipliant 36 par 5 et 30 par 2×3.
Ce multiple commun est donc $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.
Les deux voitures se croisent sur la ligne d'arrivée toutes les 180 min soit 3 h.
Les deux voitures se seront croisées sur la ligne de départ 3 fois pendant la course : au départ, au milieu de la course de la voiture B et à l'arrivée de la voiture B.

113 **a.** $A = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7$
$A^2 = 2^4 \times 3^2 \times 5^6 \times 7^2$
b. $B = 2^4 \times 3^6 \times 5^4$
$B = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 2^2 \times 3^3 \times 5^2$
B est donc le carré de $2^2 \times 3^3 \times 5^2$
c. $3\,136 = 2^6 \times 7^2$
$3\,136 = 2^3 \times 7^1 \times 2^3 \times 7^1$
3 136 est le carré du nombre $2^3 \times 7 = 56$.
C'est un carré parfait.

114 **a.** $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$
et $945 = 3^3 \times 5 \times 7$
b. Il faut trouver le plus grand diviseur commun à 882 et 945. C'est $3^2 \times 7 = 63$.
c. Les valeurs possibles pour a sont :
1, 3, $3^2 = 9$, 7, 21, 63.

115 **1. a.** On peut utiliser $260 = 26 \times 10$.
On obtient : $260 = 2^2 \times 5 \times 13$.
On peut utiliser $90 = 9 \times 10$.
On obtient : $90 = 2 \times 3^2 \times 5$
b. D'après les deux décompositions en produit en facteurs premiers, $2 \times 5 = 10$ est le plus grand diviseur commun à 260 et 90.
La longueur du côté d'un carré est bien 10 cm.
c. $260 : 10 = 26$ et $90 : 10 = 9$.
$26 \times 9 = 234$.
Elle obtiendra 234 carrés de côté bien 10 cm.
2. ***Erratum :*** Dans les premiers manuels imprimés, le document 2 comporte une erreur. Pour pouvoir répondre à la question 2, il faut que la colonne C du tableur soit déjà renseignée. Cette erreur sera corrigée lors des réimpressions.
$234 : 2 = 117$
$117 \times 75 = 8\,775$
$117 \times 80 = 9\,360$
$8\,775 + 9\,360 = 18\,135$

	A	B	C	D
1	Impression du motif	Prix unitaire (en CFP)	Quantité	Prix total (en CFP)
2	Tiki	75	117	8 775
3	Tipannier	80	117	9 360
4	TOTAL			18 135

Le montant du devis est 18 135 CFP.

116 **1. a.** 8 m = 800 cm.
9 m – 3,5 m = 5,5 m.
5,5 m = 550 cm.
Les dimensions de la salle de travail sont 800 cm et 550 cm.
b. ● Calcul de l'aire de la salle de travail :
$8 \times 5{,}5 = 44$
L'aire de la salle de travail est 44 m².
● Calcul de l'aire de la salle de recherche :
On peut décomposer la salle de recherche en deux polygones : un rectangle et un triangle rectangle.
$$3{,}5 \times 8 + \frac{4 \times 8}{2} = 44$$
L'aire de la salle de recherche est 44 m².
2. a. On décompose en produit de facteurs premiers les nombres 550 et 800.
On peut utiliser le fait que $550 = 55 \times 10$ et que $800 = 8 \times 100$.
On obtient :
$550 = 2 \times 5^2 \times 11$
$800 = 2^5 \times 5^2$
b. On cherche le plus grand diviseur commun à 550 et 800. D'après les deux décompositions en produit en facteurs premiers, ce diviseur est 2×5^2.
Donc $c = 50$.
$800 : 50 = 40$
$550 : 50 = 11$
$40 \times 11 = 440$
440 dalles sont nécessaires pour recouvrir le sol de la salle de travail.
c. $44 \times 13{,}5 = 594$
La dépense sera de 594 €.

CHAPITRE 4

Calculer et interpréter des caractéristiques

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

❶ Le point sur le début du cycle 4

L'attendu de fin de cycle est d'interpréter, de représenter et de traiter des données.
Tous ces thèmes ont été travaillés dans les années précédentes du cycle 4.
Dans ce chapitre, plus court que d'autres, on met l'accent plus particulièrement sur l'interprétation des caractéristiques de position et de dispersion d'une série statistique. Bien évidemment, on remobilise les compétences acquises précédemment sur le calcul de ces caractéristiques.
Conformément au programme, on s'intéresse aux trois indicateurs : moyenne, médiane, étendue.
Avec la notion d'étendue, une première approche de la dispersion a été abordée. Toutefois l'étendue présente l'inconvénient de ne pas mesurer la dispersion de la majorité des valeurs d'une série ; elle ne mesure que la dispersion entre la plus grande et la plus petite des valeurs de la série. Aussi, nous proposons un exercice de découverte des quartiles (exercice 26).
Ce chapitre peut être traité à n'importe quel moment de l'année, y compris dès le début.

❷ Je découvre

Activité

L'objectif de cette activité est double :
– réactiver les compétences sur le calcul de la moyenne d'une série statistique donnée par une liste, sur la détermination de la médiane de cette série, sur le calcul de l'étendue ;
– comparer deux séries statistiques.
Dans la question **1.**, on demande aux élèves de déterminer la moyenne et la médiane de deux séries statistiques. Les données constituent une liste, mais certaines valeurs de chaque série étant répétées, des élèves pourront avoir envie de regrouper les données dans un tableau d'effectifs (ils calculeront alors des moyennes pondérées et auront vraisemblablement les valeurs de chaque série ordonnées par ordre croissant, organisation utile pour la détermination de la médiane). On pourra utilement confronter les différentes démarches au sein de la classe.
Dans la question **2.**, on s'intéresse plus particulièrement à la notion de dispersion. On réactive la notion de série dispersée et on introduit la notion de série homogène.
Dans la question **3.**, on aborde la réalisation d'un schéma résumant une série statistique, ce qui peut aider à donner du sens à tous ces indicateurs. On pourra comparer les schémas des deux séries et revenir sur la question **2.**

❸ J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

Suite à l'activité, on peut étudier le cours « Caractéristiques d'une série statistique ».
On pourra étudier l'exemple (les calculs se font mentalement). Il est volontairement différent de l'activité (ici, les deux séries ont la même moyenne et la même médiane) pour montrer un autre cas où la dispersion d'une série a aussi toute son importance.
On explicitera le vocabulaire donné en définition.

Exercice résolu

Il s'agit ici, d'une part, de calculer la moyenne (moyenne pondérée) d'une série statistique représentée par un diagramme en bâtons, d'en déterminer la médiane, d'en calculer l'étendue, d'autre part, d'interpréter moyenne et médiane.
On pourra passer un peu de temps pour revenir sur l'interprétation de la moyenne de la série.
Pour l'interprétation de la médiane, on pourra s'intéresser à l'interprétation générale (liée à la définition de la médiane d'une série) et à une interprétation plus pointue, utilisant la situation précise proposée.
Dans les exercices « Sur le même modèle », on a choisi de proposer deux situations proches de l'univers quotidien des élèves de façon qu'il n'y ait pas d'obstacle dans l'interprétation de chaque indicateur.

❹ Compléments

Les exercices « À l'oral » sont à faire d'emblée. Ils permettent de réactiver les procédés de calcul pour déterminer un effectif, une fréquence, la moyenne d'une série, sa médiane, son étendue. Ils permettent également de revenir sur certains aspects de la moyenne et de la médiane et de remobiliser définitions et propriétés.
Les exercices de « Je m'entraîne » portent sur les procédés de calcul mais aussi sur l'interprétation des différentes caractéristiques d'une série statistique. Ils se terminent par un exercice (17) où l'on exploite des résultats de mesures à l'aide du tableur. À noter que les fonctions MOYENNE et MEDIANE permettent de calculer la moyenne et la médiane d'une série donnée par une liste ; dans le cas où la série est donnée par un tableau d'effectifs, le tableur ne permet pas de déterminer directement la médiane. Aussi, on recopie chaque valeur autant de fois que ne l'indique l'effectif puis on calcule la moyenne et la médiane d'une plage ; on met ainsi l'accent sur ce qu'est une moyenne pondérée par les effectifs.

Avec un logiciel

Dans cet exercice 18, on a choisi de comparer trois séries statistiques. Outre le calcul de la moyenne, de la médiane et de l'étendue de chaque série, on représente chaque série par un graphique. Ces trois séries ont la même moyenne, la même médiane, mais des étendues différentes. L'interprétation finale est liée à la notion de dispersion mais aussi à l'observation des graphiques.

J'utilise mes compétences

Dans l'exercice 23, on demande à l'élève de réfléchir à la notion de moyenne ; une bonne compréhension de cette notion est utile. Il lui faudra prendre des initiatives pour pouvoir répondre à la dernière question.
Dans l'exercice 24, on compare deux séries de données. Elles ont la même moyenne, mais l'une est dispersée et l'autre homogène.
Dans l'exercice 25, il s'agit en particulier de comparer salaire médian et salaire moyen et d'expliquer pourquoi ils sont différents. Appliquer et calculer un pourcentage sont des compétences également utilisées.
Enfin, dans l'exercice 26, on aborde, à partir d'une situation concrète, un autre aspect de la dispersion avec la découverte des premier et troisième quartiles.

Dossier Brevet

Les deux exercices de la partie « Je fais le point sur mes compétences » portent l'un sur le calcul d'une moyenne et le calcul d'une fréquence, l'autre sur moyenne, médiane et étendue. Dans l'exercice 28, l'élève est amené à trouver une valeur manquante dans une série dont on connaît la moyenne (la situation est facilitée par un premier calcul de moyenne). On poursuit par la comparaison de deux séries.
Dans la rubrique « Je prends des initiatives », les deux premiers exercices (29 et 30) portent sur la comparaison de la moyenne et de la médiane d'une série dans laquelle certaines valeurs sont exceptionnelles. On pourra passer un peu de temps sur l'exercice 29 et utiliser l'aide donnée avant de proposer l'exercice 30, où l'élève ne recevra plus d'aide.
Le dernier exercice (31) permet de travailler sur la médiane d'une série dans le cas où il s'agit d'une valeur répétée et d'expliquer pourquoi, dans ce cas, l'ajout d'une nouvelle donnée ne modifie pas la médiane de la série.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. a. ; **2. c.** ; **3. c.** ; **4. a.**, **b.** et **c.** ; **5. a** et **b.**

Je découvre

Activité

1 a. Catégorie des individus de 15 à 34 ans
On peut présenter les valeurs de la série dans un tableau d'effectifs.

Durée (en h)	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
Effectif	1	1	3	5	2

● Calcul de la moyenne

$$m = \frac{2,2+2,3+2,4\times3+2,5\times5+2,6\times2}{12} = \frac{29,4}{12} = 2,45$$

En moyenne, les individus de 15 à 34 ans ont regardé la télévision pendant 2,45 h par jour en 2014.

● Détermination de la médiane
L'effectif est pair (12) et $12 = 2 \times 6$.
La médiane est la demi-somme des 6^{e} et 7^{e} valeurs de la série, les valeurs étant rangées par ordre croissant.
$1 + 1 + 3 = 5 \qquad 5 + 5 = 10$
Ainsi de la 6^{e} à la 10^{e} valeur, ce sont des 2,5 donc la médiane de la série est 2,5 h.
M = 2,5 h.

Catégorie des femmes de moins de 50 ans
On peut présenter les valeurs de la série dans un tableau d'effectifs.

Durée (en h)	3	3,2	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	4
Effectif	1	1	1	2	1	2	2	2

● Calcul de la moyenne

$$m = \frac{3+3,2+3,4+3,5\times2+\ldots+4\times2}{12} = \frac{43,2}{12} = 3,6$$

En moyenne, les femmes de moins de 50 ans ont regardé la télévision pendant 3,6 h par jour en 2014.

● Détermination de la médiane
Comme précédemment, la médiane est la demi-somme des 6^{e} et 7^{e} valeurs de la série, les valeurs étant rangées par ordre croissant.

$$\underbrace{3\,;3,2\,;3,4\,;3,5\,;3,5\,;3,6}_{\text{6 valeurs}}\,;\underbrace{3,7\,;3,7\,;3,8\,;3,8\,;4\,;4}_{\text{6 valeurs}}$$

La 6^{e} valeur est 3,6, la 7^{e} valeur est 3,7.

$\dfrac{3,6+3,7}{12} = 3,65$ donc la médiane de la série est 3,65 h.

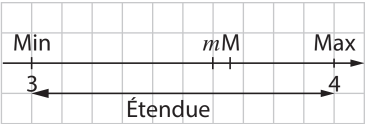
M = 3,65 h

b. 3,6 h – 2, 45 h = 1,15 h
En moyenne, par jour, une femme de moins de 50 ans a regardé la télévision pendant 1,15 h de plus qu'un individu de 15 à 34 ans.
On écrit 1,15 h en heures et minutes.
1,15 h = 1 h + 0,15 h = 1 h + 60 min × 0,15 = 1 h 9 min
Donc Adrien a raison.

2 a. 2,6 h – 2,2 h = 0,4 h
et 0,4 h = 60 min × 0,4 = 24 min
4 h – 3 h = 1 h
L'étendue de la série des durées moyennes pour les individus de 15 à 34 ans est 0,4 h (soit 24 min) et l'étendue de la série des durées moyennes pour les femmes de moins de 50 ans est 1 h.
b. 1 h > 24 min donc l'étendue de la série des durées moyennes pour les femmes de moins de 50 ans est supérieure à celle pour les individus de 15 à 34 ans.

c. « La série des femmes de moins de 50 ans est plus **dispersée** que la série des individus de 15 à 34 ans, qui est plus **homogène**. »

3 Voici le schéma pour la deuxième série.



J'applique le cours

2 **a.** On peut présenter les données dans un tableau d'effectifs.

Nombre d'élèves	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Nombre de classes	1	2	6	7	1	2	6	5	0

- $m = \dfrac{23+24\times2+\ldots+29\times6+30\times5}{1+2+6+7+1+2+6+5}$

$m = \dfrac{810}{30} = 27$

Le nombre moyen d'élèves par classe est 27.

Interprétation : L'effectif total de ce collège serait le même s'il y avait 27 élèves dans chaque classe.

- Le nombre total de classes est 30 et $30 = 2 \times 15$.

Donc la médiane est la demi-somme des 15^{e} et 16^{e} valeurs.

Or, $1 + 2 + 6 = 9$ et $9 + 7 = 16$ donc de la 10^{e} à la 16^{e} valeur, ce sont des 26 : la 15^{e} et la 16^{e} valeurs sont 26.

Donc le nombre médian d'élèves est 26.

Interprétation : Dans au moins 50 % des classes de ce collège, le nombre d'élèves par classe est inférieur ou égal à 26, et dans au moins 50 % des classes de ce collège, il est supérieur ou égal à 26.

b. $30 - 23 = 7$.

L'étendue de la série est 7 élèves.

3 **a.** On peut présenter les données dans un tableau d'effectifs.

Note	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Effectif	2	3	1	3	5	4	1	3	2	1

- $m = \dfrac{8\times2+9\times3+\ldots+16\times2+17\times1}{2+3+1+3+5+4+1+3+2+1}$

$m = \dfrac{306}{25} = 12{,}24$

La moyenne des notes est 12,24.

Interprétation : La somme totale des notes obtenues à ce devoir serait la même si chacune des 25 notes était 12,24.

- Le nombre total de notes est 25 et $25 = 2 \times 12 + 1$.

Donc la médiane est la 13^{e} valeur.

Or $2 + 3 + 1 + 3 = 9$ et $9 + 5 = 14$ donc de la 10^{e} à la 14^{e} valeur, ce sont des 12 ; la 13^{e} valeur est 12.

Donc la médiane des notes est 12.

Interprétation : Au moins 50 % des notes sont inférieures ou égales à 12 et au moins 50 % des notes sont supérieures ou égales à 12.

b. $17 - 8 = 9$.

L'étendue des notes est 9.

À l'oral

4 **1.** $1 + 5 + 4 = 10$

L'effectif total est 10.

5 élèves parmi les 10 ont 14 ans, donc leur fréquence est $\dfrac{5}{10}$ (ou 50 %).

2. a. On calcule l'âge moyen des élèves.

$m = \dfrac{13+14\times5+15\times4}{10} = \dfrac{143}{10} = 14{,}3$

L'âge moyen des élèves est 14,3 ans.

$14{,}3 > 14$ donc le groupe ne peut pas participer au festival.

b. Le responsable du groupe va choisir l'élève de 11 ans pour que la moyenne des âges diminue.

c. $m = \dfrac{143+11}{11} = \dfrac{154}{11} = 14$

L'âge moyen des élèves est désormais 14 ans, donc le groupe pourra participer au festival.

5 **a.** Le temps le plus long est 20,57 s et le temps le plus court est 19,32 s.

20,57 s – 19,32 s = 1,25 s

L'étendue de la série est 1,25 s.

b. L'effectif total est impair (7).

On range les temps par ordre croissant.

$$\underbrace{19{,}32\,;\,19{,}44\,;\,19{,}84}_{\text{3 valeurs}}\,;\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{médiane}}}{19{,}90}\,;\,\underbrace{20{,}00\,;\,20{,}19\,;\,20{,}57}_{\text{3 valeurs}}$$

Le temps médian de la série est 19,90 s donc le temps d'Anaïs est 19,90 s.

6 **a.** L'affirmation est fausse.

Par contre, on peut affirmer qu'au moins la moitié des salariés gagnent au moins 1 875 € par mois (salaire médian).

b. L'affirmation est fausse.

En effet, si l'on ôte le salaire du PDG, le salaire moyen va baisser.

c. L'affirmation est vraie.

En effet, si l'on répartit les salaires par ordre croissant en deux groupes d'égal effectif et si l'on ôte le salaire du PDG et celui de la personne qui a le plus bas salaire, alors le groupe des salaires les plus bas va perdre son premier élément et le groupe des salaires les plus élevés va perdre son dernier élément, mais la médiane reste la même.

7 **a.** Les nombres relatifs indiqués sont tous des nombres positifs, donc ce tableau traduit une augmentation des températures.

Par exemple, à Nouméa, la température minimale a augmenté de 1,3 °C en 40 ans.
b. Dans la ligne des températures minimales, le nombre le plus grand est 1,5, donc c'est à La Roche que la température minimale a le plus augmenté.

c. $m_1 = \dfrac{1{,}3+1{,}2+1{,}2+1{,}5}{4} = \dfrac{5{,}2}{4} = 1{,}3$

$m_2 = \dfrac{1{,}3+1+0{,}8+1}{4} = \dfrac{4{,}1}{4} = 1{,}025$

Les températures minimales ont augmenté en moyenne de 1,2 °C et les températures maximales ont augmenté en moyenne de 1,025 °C.

8 **a.** $m = \dfrac{1+2\times4+3+8+6\times5+7\times3}{1+4+8+5+3} = \dfrac{84}{21} = 4$

Dans la classe n°1, les élèves ont emprunté en moyenne 4 livres.
Les élèves des deux classes ont donc emprunté en moyenne le même nombre de livres.
b. ● Dans la classe n° 1, un « grand lecteur » est un élève qui a emprunté 6 ou 7 livres.
5 + 3 = 8 ainsi ils sont 8 « grands lecteurs » dans la classe n° 1.
● Dans la classe n° 2, la médiane est 5. On peut ainsi savoir qu'au moins la moitié des élèves de cette classe ont emprunté 5 livres ou plus.
Comme ils sont 25 dans cette classe, au moins 13 élèves sont concernés.
13 > 8 donc c'est dans la classe n° 2 qu'il y a le plus de « grands lecteurs ».
c. ● Dans la classe n° 1, le maximum de livres empruntés par un élève est 7.
● Dans la classe n° 2, on sait que l'étendue est 8.
La valeur minimale de la série est supérieure ou égale à 0 (0 dans le cas où des élèves n'aient emprunté aucun livre) ; par conséquent la valeur maximale de la série est supérieure ou égale à 8.
C'est donc dans la classe n° 2 que se trouve l'élève qui a emprunté le plus de livres (il en a emprunté au moins 8).

Calcul mental

9 **a.** $m = \dfrac{1\times2+4\times2+6\times4+8\times7+30}{2+2+4+7+1} = \dfrac{120}{16} = 7{,}5$

La moyenne de cette série est 7,5.
Remarque : pour diviser mentalement 120 par 16, on peut diviser 120 par 4, puis 30 par 2 et enfin 15 par 2.
b. On supprime la valeur 30.

$\dfrac{120-30}{15} = \dfrac{90}{15} = 6$

La moyenne de la série privée de la valeur 30 est 6.
Remarque : pour diviser mentalement 90 par 15, on peut diviser 90 par 3, puis 30 par 5.

10 Les valeurs de ces deux séries ne sont pas rangées par ordre croissant. Il faut donc repérer la valeur la plus grande et la valeur la plus petite de chaque série.
a. 175 – 115 = 60
L'étendue de cette série est 60.
b. 30,2 – 15,6 = 14,6
L'étendue de cette série est 14,6.

11 ● **Série A**
a. On range les 5 valeurs de la série par ordre croissant.

$$\underbrace{1\,;2}\,;6\,;\underbrace{8\,;9}$$

La médiane est la 3^{e} valeur de la série, donc la médiane est 6.

b. $\dfrac{1+2+6+8+9}{5} = \dfrac{26}{5} = 5{,}2$

La moyenne de la série est 5,2.
c. 9 – 1 = 8
L'étendue de la série est 8.
● **Série B**
a. On range les 4 valeurs de la série par ordre croissant.

$$\underbrace{4\,;5}\,;\underbrace{9\,;10}$$

La médiane est la demi-somme des 2^{e} et 3^{e} valeurs de la série.

$\dfrac{5+9}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$ donc la médiane est 7.

b. $\dfrac{4+5+9+10}{4} = \dfrac{28}{4} = 7$

La moyenne de la série est 7.
c. 10 – 4 = 6
L'étendue de la série est 6.
● **Série C**
a. Les 6 valeurs de la série sont rangées par ordre croissant.

$$\underbrace{1\,;2\,;2}\,;\underbrace{2\,;3\,;5}$$

La médiane est la demi-somme des 3^{e} et 4^{e} valeurs de la série, toutes les deux égales à 2, donc la médiane est 2.

b. $\dfrac{1+2+2+2+3+5}{6} = \dfrac{15}{6} = 2{,}5$

La moyenne de la série est 2,5.
c. 5 – 1 = 4
L'étendue de la série est 4.
● **Série D**
a. 2 + 1 + 3 + 7 = 13
donc l'effectif total est 13. Il est impair.
13 = 2 × 6 + 1 donc la médiane est la 7^{e} valeur de la série.
2 + 1 + 3 = 6   6 + 7 = 13
De la 7^{e} à la 13^{e} valeur, ce sont des 8, donc la médiane est 8.

b. $\dfrac{4\times2+6+7\times3+8\times7}{13} = \dfrac{91}{13} = 7$

La moyenne de la série est 7.
c. 8 – 4 = 4
L'étendue de la série est 4.

12 On range les valeurs connues par ordre croissant.
6 ; 8 ; 11 ; 15 ; 20
L'effectif est pair (6) et la médiane est 10 donc le nombre manquant ne peut qu'occuper la 3^{e} place.
On a alors la série : 6 ; 8 ; … ; 11 ; 15 ; 20.

On cherche le nombre tel que la demi-somme de ce nombre et de 11 est 10, donc le nombre manquant est 9.

Je m'entraîne

13 • $\frac{80}{100} \times 72 = 0,8 \times 72 = 57,6$

• On calcule le nombre moyen de passagers par jour pendant les deux semaines.
$55 + 65 + \ldots + 67 + 63 = 840$
$840 : 14 = 60$
Le nombre moyen de passagers par jour est 60.

• Conclusion : $60 > 57,6$ donc l'objectif est atteint.

14 **a.** $\frac{1\times5+2\times6+\ldots+19\times6+20\times3}{125} = \frac{1\,303}{125} = 10,424$
donc la moyenne des dépassements de la vitesse autorisée est 10,424 km/h.
b. $5 + 6 + 5 + 5 = 21$
$125 - 21 = 104$
Parmi les 125 véhicules, 104 ont dépassé la vitesse autorisée d'au moins 5 km/h.

Leur fréquence est donc $\frac{104}{125}$.

$\frac{104}{125} = 0,832$ donc 83,2% des véhicules ont dépassé la vitesse autorisée d'au moins 5 km/h.
c. L'effectif est impair (125).
$125 = 2 \times 62 + 1$ donc la médiane est la 63^{e} valeur de la série.
On cumule les effectifs jusqu'à atteindre ou dépasser pour la première fois 63.
$5 + 6 + \ldots + 7 + 6 = 59$ $\quad 59 + 4 = 63$
De la 60^{e} à la 63^{e} valeur, ce sont des 10, donc la médiane est 10.
La médiane M de cette série est 10 km/h.
d. $125 - 59 = 66$
66 véhicules sur les 125 ont eu un excès de vitesse supérieur ou égal à 10 km/h.

Leur fréquence est donc $\frac{66}{125}$.

$\frac{66}{125} = 0,528$ donc 52,8 %, soit environ 53 % des véhicules ont eu un excès de vitesse supérieur ou égal à la médiane M.

15 **1.** $375 \times 2 + 1\,250 \times 3 + 1\,675 \times 4 + 560 \times 8 = 15\,680$
$(18\,200 - 15\,680) : 3 = 2\,520 : 3 = 840$.
Pour chaque véhicule de la marque C on dépense 840 €.
Voici le tableau complété.

Marque	A	B	C	D	E
Effectif	2	3	3	4	8
Dépense par véhicule (en €)	375	1 250	**840**	1 675	560

2. $2 + 3 + 3 + 4 + 8 = 20$
L'effectif total est 20.
$18\,200$ € : $20 = 910$ €
La dépense moyenne par véhicule est 910 €.
Cette moyenne ne décrit pas correctement les dépenses effectuées car les dépenses par véhicule selon la marque sont très dispersées (de 375 € à 1 675 €).

3. a. L'effectif total est pair (20).
$20 = 2 \times 10$ donc la médiane est la demi-somme des 10^{e} et 11^{e} valeurs de la série, lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant.
On réécrit le tableau en mettant les dépenses par ordre croissant.

Marque	A	B	C	D	E
Effectif	2	8	3	3	4
Dépense par véhicule (en €)	375	560	840	1 250	1 675

$2 + 8 = 10$ $\quad 10 + 3 = 13$
donc la 10^{e} valeur est 560 et la 11^{e} valeur est 840.
$\frac{560+840}{2} = \frac{1400}{2} = 700$.
La dépense médiane est donc 700 €.
b. $3 + 3 + 4 = 10$
Pour 10 véhicules sur les 20, la dépense dépasse la dépense médiane.
10 est la moitié de 20.
Dylan se trompe. La dépense dépasse la dépense médiane pour exactement un véhicule sur deux, et pas pour plus d'un véhicule sur deux.

16 **1.** 85 h 01 min – 84 h 46 min = 1 min + 14 min = 15 min.
Il y a 15 min de différence entre les temps de course des deux coureurs.

2. a. La différence calculée à la question **1.** représente l'étendue de la série statistique des temps de course.
b. L'effectif est impair (7) et $7 = 2 \times 3 + 1$ donc la médiane est le 4^{e} temps de course soit 84 h 55 min.

17 **1. a.** On réalise la feuille de calcul.
b. On peut saisir la formule =MOYENNE(A1:H6) en cellule J1 pour calculer la moyenne des mesures.
On saisit la formule =MEDIANE(A1:H6) en cellule J2 pour déterminer la médiane des mesures.
On saisit la formule =MAX(A1:H6)-MIN(A1:H6) en cellule J3 pour calculer l'étendue des mesures.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	998	1 001	1 001	999	1 005	1 003	1 000	1 002	moyenne	1 000,75
2	1 002	1 000	1 005	1 001	1 001	1 002	1 001	1 000	médiane	1 001
3	1 003	997	1 002	1 003	999	1 003	1 000	1 002	étendue	8
4	1 000	998	1 003	999	997	1 000	1 003	997		
5	1 001	1 000	999	997	1 004	998	1 002	1 000		
6	1 004	1 005	999	1 003	999	998	1 003	997		

On lit que la moyenne des mesures est 1 000,75 Ω, que la médiane des mesures est 1 001 Ω et que l'étendue des mesures est 8 Ω.

2. a. On réalise la feuille de calcul.

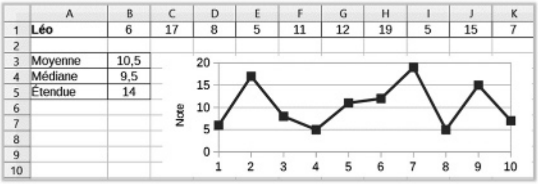
b. On recopie chaque mesure autant de fois que ne l'indique l'effectif, pour pouvoir calculer la moyenne et la médiane à l'aide du tableur.
On peut saisir la formule =MOYENNE(A4:H15) en cellule J4 pour calculer la moyenne des mesures.
On saisit la formule =MEDIANE(A4:H15) en cellule J5 pour déterminer la médiane des mesures.
On saisit la formule =MAX(A1:H1)-MIN(A1:H1) en cellule J1 pour calculer l'étendue des mesures.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	990	997	998	999	1 000	1 001	1 004	1 010	étendue	20
2	9	4	7	5	4	8	12	11		
3										
4	990	997	998	999	1 000	1 001	1 004	1 010	moyenne	1 000,75
5	990	997	998	999	1 000	1 001	1 004	1 010	médiane	1 001
6	990	997	998	999	1 000	1 001	1 004	1 010		
7	990	997	998	999	1 000	1 001	1 004	1 010		
8	990		998	999		1 001	1 004	1 010		
9	990		998			1 001	1 004	1 010		
10	990		998			1 001	1 004	1 010		
11	990					1 001	1 004	1 010		
12	990						1 004	1 010		
13							1 004	1 010		
14							1 004	1 010		
15							1 004			

On lit que la moyenne des mesures est 1 000,75 Ω, que la médiane des mesures est 1 001 Ω et que l'étendue des mesures est 20 Ω.
Remarque : pour calculer la moyenne de la série de mesures, on peut aussi saisir en ligne 3 les produits « mesure × effectif » puis ajouter ces 8 produits et diviser cette somme par la somme des valeurs de la plage A2:H2.
Toutefois on ne peut déterminer que la médiane d'une liste avec un tableur.
c. On remarque que ces deux séries de mesures ont la même moyenne et la même médiane. Cependant, l'étendue de la 1re série de mesures est 8 Ω alors que l'étendue de la 2e série de mesures est 20 Ω.
Les mesures de la 1re série sont moins dispersées que celles de la 2e série.

Avec un logiciel

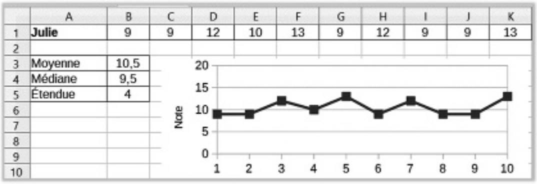
18 **a.** On prépare le tableau comme indiqué dans l'énoncé.
b. On réalise la feuille de calcul.
On peut saisir la formule =MOYENNE(B1:K1) en cellule B3 pour calculer la moyenne des notes de Léo.
On saisit la formule =MEDIANE(B1:K1) en cellule B4 pour déterminer la médiane de ses notes.
On saisit la formule =MAX(B1:K1)-MIN(B1:K1) en cellule B5 pour calculer l'étendue des notes.
On réalise le graphique.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Léo	6	17	8	5	11	12	19	5	15	7
3	Moyenne	10,5									
4	Médiane	9,5									
5	Étendue	14									

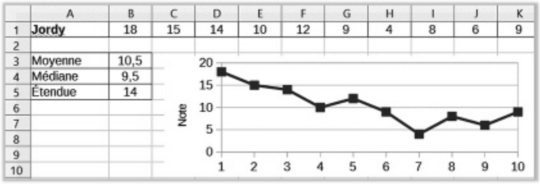
On complète le tableau réalisé à la question **a.**

c. • On remplace les notes de Léo par celles de Julie. Voici ce qu'on obtient.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Julie	9	9	12	10	13	9	12	9	9	13
3	Moyenne	10,5									
4	Médiane	9,5									
5	Étendue	4									

On complète le tableau réalisé à la question **a.**
• On remplace les notes de Julie par celles de Jordy. Voici ce qu'on obtient.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Jordy	18	15	14	10	12	9	4	8	6	9
3	Moyenne	10,5									
4	Médiane	9,5									
5	Étendue	14									

Voici le tableau commencé à la question **a.** complété.

	Moyenne	Médiane	Étendue
Léo	10,5	9,5	14
Julie	10,5	9,5	4
Jordy	10,5	9,5	14

d. On remarque que les trois séries de notes ont la même moyenne (10,5) et la même médiane (9,5).
Seule l'étendue est différente : celle des notes de Julie est 4 alors que celle des notes de Léo, comme celle des notes de Jordy est 14.
e. On peut attribuer l'appréciation ❶ à Julie, dont la série de notes est la moins dispersée.
On peut attribuer l'appréciation ❷ à Jordy. Sur le graphique, on observe la baisse des notes.
On peut attribuer l'appréciation ❸ à Léo dont la série de notes est dispersée et irrégulière.

Je m'évalue à mi-parcours

19 **b.** **20** **c.** **21** **a.** **22** **b.**

J'utilise mes compétences

23 **a** Réponse : **Non**.
En effet, la moyenne d'une série de valeurs n'est pas forcément égale à l'une des valeurs de la série.
b Réponse : **Non**.
En effet, si l'appartement a été occupé pendant plus de 315 jours par an au cours des dix dernières années, chaque année, l'occupation moyenne de cet appartement serait supérieure à 315 jours.
c Réponse : **Oui**.
Par exemple, si l'appartement a été occupé neuf années pendant 350 jours par an et est resté inoccupé pendant une année, alors l'occupation moyenne sur les dix années est de 315 jours.

En effet : $\dfrac{350 \times 9 + 0 \times 1}{10} = \dfrac{3\,150}{10} = 315$.

24 **a.** On peut observer que les danseuses du groupe 1 ont des tailles dispersées alors que celles du groupe 2 ont toutes à peu près la même taille.
On valide en calculant l'étendue de chaque série :
1,75 m – 1,47 m = 0,28 m = 28 cm
1,62 m – 1,58 m = 0,04 m = 4 cm
L'étendue de la série de tailles du groupe 1 est 28 cm alors que celle de la série de tailles du groupe 2 est 7 fois plus petite (4 cm). La série des tailles du groupe 2 est homogène tandis que celle des tailles du groupe 1 est dispersée.

b. • Groupe 1

$$\frac{1{,}65 + 1{,}75 + 1{,}47 + 1{,}62 + 1{,}51 + 1{,}54 + 1{,}66}{7} = \frac{11{,}2}{7} = 1{,}6$$

donc la taille moyenne des danseuses du groupe 1 est 1,60 m.

• Groupe 2

$$\frac{1{,}59 + 1{,}61 + 1{,}60 + 1{,}58 + 1{,}60 + 1{,}62}{6} = \frac{9{,}6}{6} = 1{,}6$$

donc la taille moyenne des danseuses du groupe 2 est 1,60 m.

c. On remarque que la taille moyenne est la même dans les deux groupes (question **b.**). Pourtant les deux groupes sont différents (voir question **a.**).
La moyenne d'une série de valeurs est toujours comprise entre les valeurs extrêmes de la série, ce qui est bien le cas ici :

1,47 m < 1,60 m < 1,75 m (Groupe 1)
1,58 m < 1,60 m < 1,62 m (Groupe 2)

d'où la cohérence des réponses.

25 **1.** Une démarche

$\dfrac{24{,}4}{100} \times 2912\ € = 0{,}244 \times 2912\ € = 710{,}528\ €$

2912 € – 710,528 € = 2201,472 €.
Une autre démarche :
100 % – 24,4 % = 75,6 %

$\dfrac{75{,}6}{100} \times 2912\ € = 0{,}756 \times 2912\ € = 2201{,}472\ €$.

Le salaire moyen net est environ 2 201 € par mois.

2. a. Dire que le salaire médian net des Français est de 1772 € par mois signifie qu'au moins la moitié des salaires nets sont inférieurs ou égaux à 1772 € et qu'au moins la moitié des salaires nets sont supérieurs ou égaux à 1772 €.

b. 2201 > 1772 et 2201 € – 1772 € = 429 €.
En 2013, le salaire médian net était inférieur de 429 € au salaire moyen net.
Cette différence s'explique par le fait qu'il y a beaucoup plus de personnes qui gagnent moins que le salaire moyen que le contraire.

3. La proportion des personnes qui sont sous le seuil de pauvreté est $\dfrac{8{,}7}{66}$.

$\dfrac{8{,}7}{66} \approx 0{,}13$ donc environ 13 % des Français vivent sous le seuil de pauvreté.

26 **a.** L'effectif de la série est 9.

25 % de 9 c'est $\dfrac{1}{4}$ de 9.

$\dfrac{1}{4} \times 9 = 2{,}25$.

Comme ce nombre n'est pas un nombre entier, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des capacités lui soient inférieures ou égales est la 3^{e} valeur, lorsque les valeurs sont rangées par ordre croissant.

15,7 ; 15,8 ; 15,9 ; 16 …
2^{e} 3^{e} 4^{e}

Ainsi Q_1 = 15,9 Go.
Q_1 est le premier quartile de la série.

b. 75 % de 9 c'est $\dfrac{3}{4}$ de 9.

$\dfrac{3}{4} \times 9 = 6{,}75$.

Comme ce nombre n'est pas un nombre entier, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des capacités lui soient inférieures ou égales est la 7^{e} valeur, lorsque les valeurs sont rangées par ordre croissant.

… 16,1 ; 16,2 ; 16,3 ; 16,3
6^{e} 7^{e} 8^{e} 9^{e}

Ainsi Q_3 = 16,2 Go.
Q_3 est le troisième quartile de la série.

c. Il y a 5 clés sur les 9 qui ont une capacité comprise entre 15,9 Go (inclus) et 16,2 Go (inclus).

Cette proportion s'exprime sous la forme $\dfrac{5}{9}$.

$\dfrac{5}{9} \approx 0{,}56$ donc environ 56 % des clés ont une capacité comprise entre 15,9 Go (inclus) et 16,2 Go (inclus).
56 % > 50 % donc Esteban a raison.

d. • 3 clés parmi les 9 ont une capacité inférieure ou égale à Q_1.
Cette proportion s'exprime sous la forme $\dfrac{3}{9}$ ou $\dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{3}{9} \approx 0{,}33$ donc environ 33 % des clés ont une capacité inférieure ou égale à Q_1.

• 3 clés parmi les 9 ont une capacité supérieure ou égale à Q_3.
Cette proportion s'exprime sous la forme $\dfrac{3}{9}$ ou $\dfrac{1}{3}$.

Donc environ 33 % des clés ont une capacité supérieure ou égale à Q_3.

Dossier Brevet

27 **a.** On peut saisir la formule =SOMME(B2:B7) .

b. $m = \dfrac{1\,250 + 2\,130 + 1\,070 + 2\,260 + 1\,600 + 1\,740}{6}$

$m = \dfrac{10\,050}{6} = 1\,675.$

On a collecté en moyenne 1 675 L de lait par exploitation.

c. La proportion de lait récolté dans l'exploitation « Petit pas » est $\dfrac{2\,260}{10\,050}$.

$\dfrac{2\,260}{10\,050} \approx 0{,}22$ donc environ 22 % de la collecte provient de l'exploitation « Petit pas ».

28 **a.** $\dfrac{40 + 35 + 85 + 67 + 28 + 74 + 28}{7} = \dfrac{357}{7} = 51.$

En moyenne, Jules a obtenu 51 points par partie.

b. Nadia a obtenu 51 points en moyenne par partie, donc elle a obtenu 357 points en tout, comme Jules.

12 + 62 + 7 + 100 + 81 + 30 = 292

357 – 292 = 65

Nadia a obtenu 65 points à la 6e partie.

c. • Série de points obtenus par Jules

On range les résultats par ordre croissant.

$$\underbrace{28\,;28\,;35}_{\text{3 valeurs}}\,;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{médiane}}}{40}\,;\underbrace{67\,;74\,;85}_{\text{3 valeurs}}$$

L'effectif est impair (7) donc la médiane est la 4e valeur de la série, c'est-à-dire 40.

La médiane de la série de points obtenus par Jules est 40 points.

• Série de points obtenus par Nadia

On range les résultats par ordre croissant.

$$\underbrace{7\,;12\,;30}_{\text{3 valeurs}}\,;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{médiane}}}{62}\,;\underbrace{65\,;81\,;100}_{\text{3 valeurs}}$$

La médiane de la série de points obtenus par Nadia est 62 points.

d. • Étendue de la série de points obtenus par Jules

85 – 28 = 57

L'étendue de cette série est 57 points.

• Étendue de la série de points obtenus par Nadia

100 – 7 = 93

L'étendue de cette série est 93 points.

e. 57 < 93 donc l'étendue de la série de points obtenus par Jules est inférieure à celle de la série de points obtenus par Nadia. C'est Jules qui a obtenu la série la plus homogène.

29 **a.** • On calcule la moyenne de cette série de 8 valeurs.

$m = \dfrac{7 + 8 + 12 \times 2 + 14 + 15 \times 2 + 41}{8} = \dfrac{124}{8} = 15{,}5$

La moyenne de cette série est 15,5.

• On détermine la médiane de cette série.

L'effectif est pair (8) donc la médiane est la demi-somme des 4e et 5e valeurs de la série.

$$\underbrace{7\,;8\,;12\,;12}_{\text{4 valeurs}}\,;\underbrace{14\,;15\,;15\,;41}_{\text{4 valeurs}}$$

$\dfrac{12 + 14}{2} = 13$ donc la médiane de la série est 13.

• Conclusion : 13 < 15,5 donc la médiane de la série est inférieure à la moyenne.

b. On calcule l'étendue de la série.

41 – 7 = 34

La série est dispersée ; la valeur 41 est très éloignée des autres valeurs (sans cette valeur, l'étendue serait 8).

À cause de cette valeur 41, la moyenne ne représente pas vraiment la moyenne des valeurs de la série.

Cela explique pourquoi la moyenne est supérieure à la médiane, donc pourquoi la moyenne et la médiane sont différentes.

30 **1. a.** $\dfrac{1 \times 11 + 2 \times 3 + \ldots + 32 + 41}{11 + 3 + \ldots + 1 + 1} = \dfrac{223}{30}$

$\dfrac{223}{30} \approx 7{,}4.$

La moyenne de cette série est environ 7 médailles.

b. L'effectif est pair (30).

30 = 2 × 15 donc la médiane de la série est la demi-somme des 15e et 16e valeurs de la série.

11 + 3 = 14 14 + 2 = 16

Les 15e et 16e valeurs sont des 3, donc la médiane de la série est 3 médailles.

c. 41 – 1 = 40

L'étendue de la série est 40 donc la série est dispersée.

Ceci explique pourquoi la médiane et la moyenne sont différentes. Ici la moyenne est supérieure à la médiane.

Trois pays dominent le classement avec 26, 32 et 41 médailles d'or : la moyenne est influencée par ces « grandes » valeurs.

Onze pays ont une seule médaille d'or : la médiane est influencée par la présence de ces onze valeurs 1.

2. 71 % des pays médaillés ont obtenu au moins une médaille d'or, c'est-à-dire que les 30 pays dont il est question dans la question **1.** représentent 71 % du nombre total de pays médaillés.

Une démarche :

71 % des pays correspondent à 30 pays, donc 1 % des pays correspond à $\dfrac{30}{71}$ pays et 100 % des pays correspondent à $100 \times \dfrac{30}{71}$ pays.

$100 \times \dfrac{30}{71} \approx 42.$

Autre démarche :

On note n le nombre total de pays médaillés.

On cherche le nombre n tel que $\dfrac{71}{100} \times n = 30.$

$0{,}71 \times n = 30$

n est le quotient de 30 par 0,71 donc $n = \dfrac{30}{0{,}71}$ soit $n \approx 42.$

En tout il y a 42 pays médaillés.

42 – 30 = 12

Ainsi 12 pays n'ont reçu que des médailles d'argent ou de bronze.

31 **a.** L'effectif est impair (29).

$29 = 2 \times 14 + 1$ donc la médiane est la 15^{e} valeur de la série.

$1 + 4 + 6 + 2 = 13$ $\quad$ $13 + 3 = 16$

De la 14^{e} à la 16^{e} valeur, ce sont des 18 donc la médiane est 18 cm.

b. On peut écrire les valeurs de la série dans l'ordre croissant.

$$\underbrace{0\,;10\,;10\,;\ \ldots\,;17\,;18}_{\text{14 valeurs}}\,;\underset{\underset{\text{Médiane}}{\uparrow}}{18}\,;\underbrace{18\,;19\,;\ldots\,;22\,;22}_{\text{14 valeurs}}$$

Si on ajoute une nouvelle donnée, l'effectif devient 30 et la médiane est la demi-somme des 15^{e} et 16^{e} valeurs de la série.

● Si la nouvelle donnée est une taille inférieure à 18 cm, on obtient :

$$\underbrace{0\,;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;18}_{\text{15 valeurs}}\,;\underbrace{18\,;18\,;19\,;\ldots\,;22\,;22}_{\text{15 valeurs}}$$

Dans ce cas, la 15^{e} valeur et la 16^{e} valeur sont 18, donc leur demi-somme est 18.

● Si la nouvelle donnée est une taille égale à 18 cm, de la 14^{e} valeur à la 17^{e} valeur de la nouvelle série, ce sont des 18, donc la 15^{e} valeur et la 16^{e} valeur sont 18 et leur demi-somme est 18.

● Si la nouvelle donnée est une taille supérieure à 18 cm, on obtient :

$$\underbrace{0\,;10\,;10\,;\ \ldots\,;17\,;18\,;18}_{\text{15 valeurs}}\,;\underbrace{18\,;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;22}_{\text{15 valeurs}}$$

Dans ce cas, la 15^{e} valeur et la 16^{e} valeur sont 18, donc leur demi-somme est 18.

● Conclusion : dans tous les cas, la médiane est égale à 18, elle ne change pas.

Calculer des probabilités

CHAPITRE 5

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le début du cycle 4

En classe de 5^e :
– on aborde les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples ;
– on modélise une expérience aléatoire ;
– on remarque qu'une probabilité peut s'exprimer sous diverses formes, qu'elle est comprise entre 0 et 1 ; on note également que la somme des probabilités des issues est égale à 1.
La plupart des situations rencontrées sont équiprobables, on résout toutefois quelques exercices où les issues n'ont pas la même probabilité.
En classe de 4^e, on établit essentiellement le lien entre fréquence et probabilité en constatant expérimentalement le phénomène de stabilisation des fréquences. On simule les expériences aléatoires à l'aide du tableur, de la calculatrice ou d'un programme.
On rencontre régulièrement des situations non équiprobables et quelques expériences à deux épreuves.

2 Je découvre

Activité 1

Dans cette activité, on aborde la notion d'événement et on introduit la formulation : « Issues qui réalisent l'événement ». On pose également la question du calcul de la probabilité d'un événement.

Activité 2

Le but de l'activité est de considérer l'événement contraire d'un événement.
On détermine les probabilités de l'événement étudié et de son événement contraire, on approche ainsi la formule générale du cours qui relie ces probabilités.
Dans la dernière question, on donne un exemple d'événements incompatibles.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

Les paragraphes 1 et 2 peuvent être étudiés après l'activité 1.
Un autre exemple (la roue de loterie) illustre les définitions et propriétés introduites.
L'activité 2 permet d'introduire le paragraphe 3 du cours.

Exercice résolu

On propose ici, dans une situation simple, de calculer la probabilité d'un événement E en considérant son événement contraire $\overline{E}$. La probabilité de $\overline{E}$ est connue, il suffit alors d'appliquer la formule du paragraphe 3 du cours pour obtenir celle de E.

Dans cet exemple, on peut retrouver la probabilité de E en sommant les probabilités des issues qui le réalisent.

4 Compléments

Probabilités d'événements

Dans des contextes simples, on calcule des probabilités d'événements.
Les situations sont équiprobables ou non.

Expériences à deux épreuves

Quelques exemples ont déjà été rencontrés, on propose ici d'autres situations et on s'aide souvent d'un arbre pour représenter l'ensemble des issues.

Événement contraire

Il est fréquent d'obtenir la probabilité d'un événement à partir de celle de son événement contraire, c'est le cas dans les exercices 30, 31, 34 et 35.

Simulation d'une expérience aléatoire

De nombreux exemples ont été donnés en 4^e, on en reprend à nouveau deux ici dans les exercices 41 et 48.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. b. et **c.** ; **2. c.** ; **3. a.** ; **4. c.**

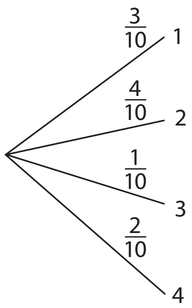
Je découvre

Activité 1

1 a. Les issues de cette expérience aléatoire sont : 1, 2, 3 et 4.

b. La probabilité de l'issue 1 est $\frac{3}{10}$, celle de l'issue 2 est $\frac{4}{10}$, celle de l'issue 3 est $\frac{1}{10}$ et enfin, celle de l'issue 4 est $\frac{2}{10}$.

c.



2 **a.** Le souhait de Lisa est réalisé par les issues 2 et 4.

b. On calcule la probabilité de l'événement P en effectuant la somme des probabilités des issues 2 et 4.

On obtient : $\frac{4}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$.

Activité 2

1 **a.** Voici les six trajets possibles :
- Ha - Ma - Po - Co
- Ha - Ma - Ho - Co
- Ha - St - Ho - Co
- Ha - St - Bo - Co
- Ha - Te - Bo - Co
- Ha - Sa - Bo - Co

b. La probabilité que chacun des trajets soit emprunté est $\frac{1}{6}$.

2 **a.** Les trajets qui réalisent l'événement A sont :
Ha - Ma - Ho - Co
Ha - St - Ho - Co
Les trajets qui ne réalisent pas l'événement A sont :
Ha - Ma - Po - Co
Ha - St - Bo - Co
Ha - Te - Bo - Co
Ha - Sa - Bo - Co

b. La probabilité de l'événement A est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, celle de l'événement $\overline{A}$ est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

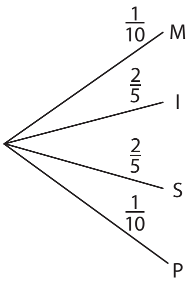
3 Il n'existe pas de trajet qui réalise à la fois les deux événements A et B.

J'applique le cours

2 **a.** Les lettres se répartissent de la façon suivante :

Lettre	M	I	S	P	Total
Effectif	1	4	4	1	10

On obtient l'arbre :



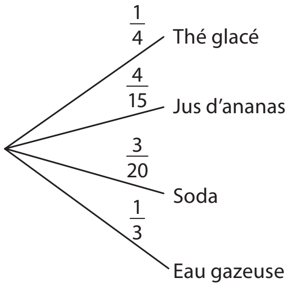
b. L'événement contraire de l'événement E est $\overline{E}$: « La lettre obtenue est une voyelle » et $P(\overline{E}) = \frac{2}{5}$.

Donc $P(E) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

3 **a.** Les bouteilles se répartissent de la façon suivante :

Bouteille	Thé glacé	Jus d'ananas	Soda	Eau gazeuse	Total
Effectif	30	32	18	40	120

On obtient l'arbre :



b. L'événement contraire de l'événement E est $\overline{E}$: « La bouteille contient de l'eau gazeuse » et $P(\overline{E}) = \frac{1}{3}$.

Donc $P(E) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

À l'oral

4 **a.** Les trajets possibles sont :
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA.

b. Deux d'entre eux commencent par la ville B.

5 Les issues qui réalisent l'événement E sont :
09, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.

6 L'événement F est réalisé par les issues : 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 et 100.

Donc $P(F) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

7 Aucune carte tirée ne peut réaliser à la fois les événements E et F.

8 Les issues qui réalisent E sont : 2, 4, 6 ; celles qui réalisent $\overline{E}$ sont : 1, 3, 5.

9 L'événement contraire de E est :
$\overline{E}$: « Ne pas obtenir Pile ».
Il est réalisé par la seule issue : FF.

10 L'événement E est réalisé par les issues : 4, 8, 12 et 16.

Donc $P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

D'autre part, $P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

E et $\overline{E}$ ont la même probabilité.

Calcul mental

11 **a.** $P(E) = 0{,}32 + 0{,}23 = 0{,}55$

b. $P(F) = 0{,}19 + 0{,}23 = 0{,}42$

12 **a.** $P(\overline{E}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

b. $P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

c. $P(\overline{E}) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

13 $P(E) = 5 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

14 $P(E) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Je m'entraîne

15 **1. a.** Les issues de cette expérience aléatoire sont les lettres : A, R, M, U, E.

b. La probabilité de chacune des issues A, M, U, E est $\frac{1}{6}$, celle de la lettre R est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. a. E_1 est l'événement certain, donc $P(E_1) = 1$.

b. E_2 est l'événement impossible, donc $P(E_2) = 0$.

c. E_3 est réalisé par les issues A et M, donc

$P(E_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

d. E_4 est réalisé par les issues R et M, donc

$P(E_4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

16 **1. a.** E_1 est réalisé par : 2, 4, 6 et 8.

b. E_2 est réalisé par : 4, 5, 6, 7 et 8.

c. E_3 est réalisé par : 4, 6 et 8.

2. a. $P(E_1) = \frac{4}{8} = 0{,}5$.

b. $P(E_2) = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

c. $P(E_3) = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

17 **a.** La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.
La probabilité manquante d'obtenir 3 est donc :
$1 - (0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

b. A est réalisé par les issues 3 et 6, donc $P(A) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$.
B est réalisé par les issues 4, 5 et 6, donc :
$P(B) = 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}3 = 0{,}75$.
C est réalisé par les issues 1, 2, 5 et 6, donc :
$P(C) = 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}3 = 0{,}7$.

c. La probabilité d'obtenir un nombre pair est :
$0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$, donc celle d'obtenir un nombre impair est :
$1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
Pauline a tort.

18 La somme des probabilités des événements J, R et V est égale à 1, donc $P(V) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

19 **a.** $P(B) = 0{,}08 + 0{,}01 = 0{,}09$.

b. $P(R+) = 0{,}36 + 0{,}38 + 0{,}08 + 0{,}03 = 0{,}85$.

c. $P(A-) = 0{,}07$.

20 **1.**

Nombre de clients	satisfaits de A	non satisfaits de A	Total
satisfaits de B	20	27	47
non satisfaits de B	15	38	53
Total	35	65	100

2. La probabilité qu'il soit :

a. satisfait du produit B est : 0,47 ;

b. satisfait du produit A seulement est : 0,15 ;

c. satisfait d'un seul des deux produits est :
$0{,}15 + 0{,}27 = 0{,}42$;

d. satisfait d'au moins un des deux produits est :
$0{,}2 + 0{,}27 + 0{,}15 = 0{,}62$ (ou $1 - 0{,}38 = 0{,}62$).

21 **1. a.** L'expérience compte 32 issues.

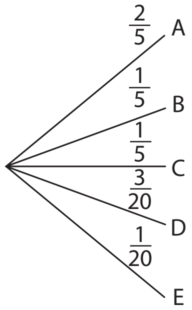
b. La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{32}$.

2. a. E est réalisé par les issues : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as de cœur et 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as de carreau.
F est réalisé par les issues : as de cœur, as de carreau, as de pique et as de trèfle.

b. $P(E) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

3. E et F sont réalisés simultanément par les issues : as de cœur et as de carreau.

22 **a.** Le nombre total de salariés de l'entreprise est :
$80 + 40 + 40 + 30 + 10 = 200$.



b. $P(U) = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{5}$.

$P(V) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

23 **1.** E est réalisé par les issues : 2, 4, 6, 8 et 10.
F est réalisé par les issues : 3, 6 et 9.
G est réalisé par les issues : 5 et 10.

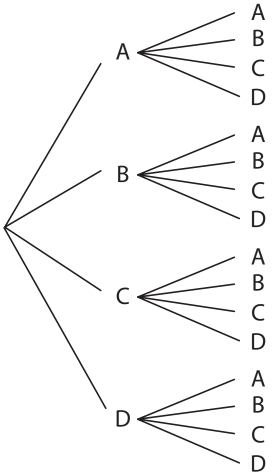
2. a. E et F ne sont pas incompatibles car l'issue 6 les réalise tous les deux.

b. E et G ne sont pas incompatibles car l'issue 10 les réalise tous les deux.

c. F et G sont incompatibles car aucune issue ne les réalise tous les deux.

3. $P(E) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ et $P(G) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

24 **1. a.** **Fève dans la galette frangipane** **Fève dans la galette briochée**



b. Il y a $4 \times 4 = 16$ issues possibles pour la répartition des deux fèves.

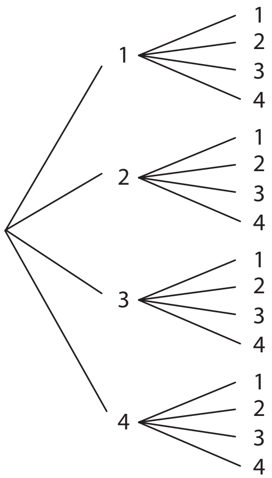
2. a. E est réalisé par une seule issue, $P(E) = \frac{1}{16}$.

b. D'après l'arbre, 9 issues réalisent F donc $P(F) = \frac{9}{16}$.

c. D'après l'arbre, 6 issues réalisent G donc $P(G) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

d. D'après l'arbre, 7 issues réalisent H donc $P(H) = \frac{7}{16}$.

25 **1. a.** **1er lancer** **2^{e} lancer**



b. Il y a $4 \times 4 = 16$ issues possibles. La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{16}$.

2. a. E est réalisé par les issues : 1 – 4 ; 2 – 3 ; 3 – 2 et 4 – 1.

b. $P(E) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

3. a. F est l'événement impossible, aucune issue ne le réalise.

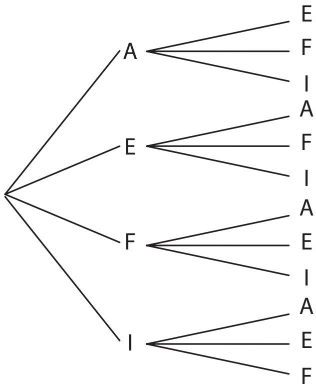
b. G est l'événement certain, toutes les issues le réalisent.

26 Il y a 36 issues possibles.

a. 6 issues réalisent cet événement, donc sa probabilité est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b. Il s'agit de l'événement contraire, sa probabilité est $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

27 **1. a.** **1re pièce** **2^{e} pièce**



b. L'expérience compte $4 \times 3 = 12$ issues, la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{12}$.

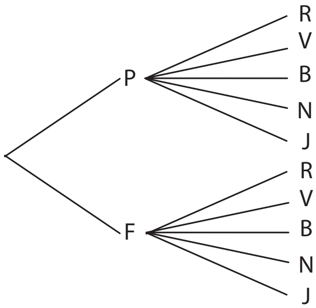
2. a. M_1 est réalisé par les issues :
A-F ; E-F ; F-A ; F-E ; F-I et I-F.

b. M_2 coïncide avec M_1.

c. M_3 est réalisé par les issues :
A-E ; A-I ; E-A ; E-I ; I-A et I-E.

3. $P(M_1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ et $P(M_3) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

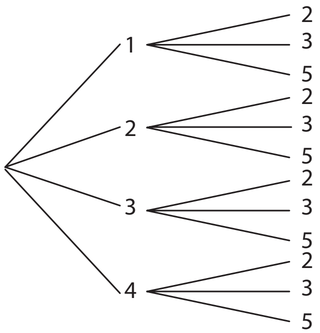
28 **1. a.** **1re épreuve** **2^{e} épreuve**



b. L'expérience compte $2 \times 5 = 10$ issues.

2. $P(E_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ et $P(E_2) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

29 **1er tirage** **2^{e} tirage**



L'expérience compte $4 \times 3 = 12$ issues. La probabilité d'obtenir deux boules numérotées 2 est $\frac{1}{12}$.

30 **1.** Il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ écritures possibles.

2. a. $\overline{U}$ est l'événement : « l'un des deux chiffres 0 ou 1 n'apparaît pas dans l'écriture ».
$\overline{U}$ est réalisé par les écritures : | 0 | 0 | 0 | et | 1 | 1 | 1 |.

b. $P(\overline{U}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

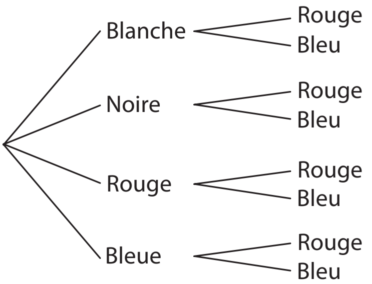
c. Donc $P(U) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

31 **1. a.** L'événement $\overline{E}$ est : « Le nombre sorti est 6 » et $P(\overline{E}) = 0{,}17$.

b. Donc $P(E) = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$.

2. On peut aussi obtenir P(E) par le calcul :
$P(E) = 0{,}12 + 0{,}23 + 0{,}09 + 0{,}31 + 0{,}08 = 0{,}83$.

32 **a.** **Robe** **Chapeau**



b. D'après l'arbre, 2 issues réalisent l'événement E, donc $P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

c. $\overline{E}$ est l'événement : « La robe et le chapeau choisis par Sarah ne sont pas de la même couleur ».

$P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

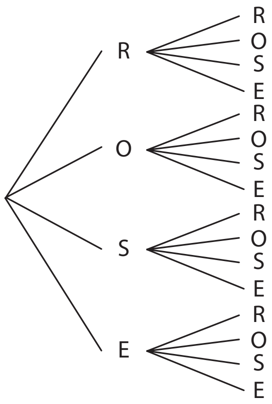
33 **a.** $P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b. $P(E_2) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

c. Il y a 3 consonnes, donc $P(E_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

d. E_4 est réalisé par les lettres O, U et S, donc $P(E_4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

34 **1. a.** **1er morceau** **2^{e} morceau**



b. L'expérience compte $4 \times 4 = 16$ issues, la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{16}$.

2. a. $\overline{M}$ est l'événement : « Je n'ai pas tiré la lettre O ».

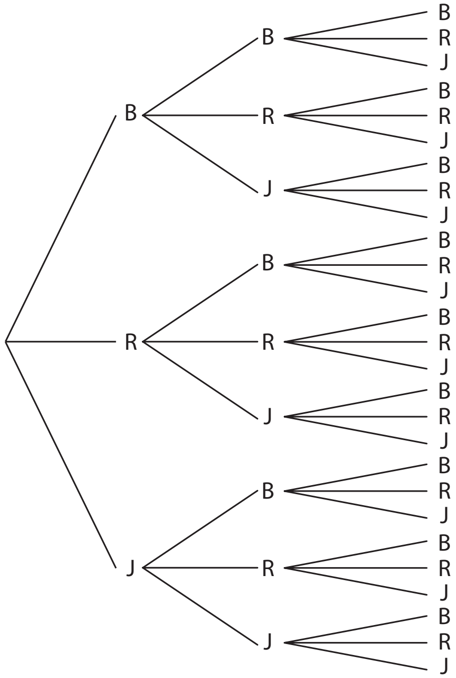
b. D'après l'arbre, 9 issues réalisent l'événement $\overline{M}$ donc $P(\overline{M}) = \frac{9}{16}$.

c. Alors $P(M) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

d. Avec l'arbre, 7 issues réalisent l'événement $\overline{M}$ donc $P(M) = \frac{7}{16}$.

35 **1. a.**

Couleur du toit **Couleur de la porte** **Couleur de la fenêtre**



b. Le nombre de dessins coloriés possibles est :
$3 \times 3 \times 3 = 27$.

2. $\overline{A}$ est l'événement : « L'enfant a utilisé une seule couleur ».
$\overline{A}$ est réalisé par 3 issues, donc $P(\overline{A}) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

Donc $P(A) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Je m'évalue à mi-parcours

36 **b.** **37** **a.** **38** **c.** **39** **c.** **40** **a.**

Avec un logiciel

41 **1. d.** Dans le cellule E2, on saisit la formule =C2-D2

2. c. La valeur de la cellule G2 donne le nombre de fois où l'événement : « AB > 0,5 » est réalisé lors des 100 simulations de l'expérience.

d. Dans la cellule H2, on saisit la formule : =G2/100 .

3. b. Les fréquences observées varient autour de 0,25. On estime la probabilité de l'événement : « AB > 0,5 » à 0,25.

J'utilise mes compétences

42 On représente l'expérience à l'aide du tableau :

		Dé rouge					
		1	2	3	4	5	6
Dé vert	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

L'expérience compte 36 issues, l'événement : « La somme des deux nombres est égale à 8 » est réalisé par 5 issues, donc sa probabilité est $\frac{5}{36}$.

43 Pour chaque nombre entier aléatoire n, le lutin énonce deux valeurs A et B données dans le tableau suivant :

n	A	B
1	6	2
2	7	4
3	8	6
4	9	8
5	10	10
6	11	12
7	12	14
8	13	16
9	14	18
10	15	20

Il y a 10 issues possibles, une seule réalise l'événement : « A = B », donc sa probabilité est $\frac{1}{10}$.

44 **1. a.** L'expérience compte 16 issues.

b. La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{16}$.

2. a. 7 rangées réalisent l'événement A.

b. La probabilité de l'événement A est $\frac{7}{16}$.

3. 10 rangées réalisent l'événement B, donc la probabilité de cet événement est $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

45 **1.**

	Jeunes coureurs de moins de 25 ans	Coureurs de 25 ans ou plus	Total
Coureurs français	10	30	40
Coureurs étrangers	20	140	160
Total	30	170	200

2. a. La probabilité que le coureur contrôlé soit un jeune est $\frac{30}{200} = \frac{3}{20}$.
La probabilité que le coureur contrôlé soit un jeune français est $\frac{10}{200} = \frac{1}{20}$.

b. Il y a 160 coureurs étrangers dont 140 ont 25 ans ou plus, la probabilité demandée est donc $\frac{140}{160} = \frac{7}{8}$.

46 **1.**

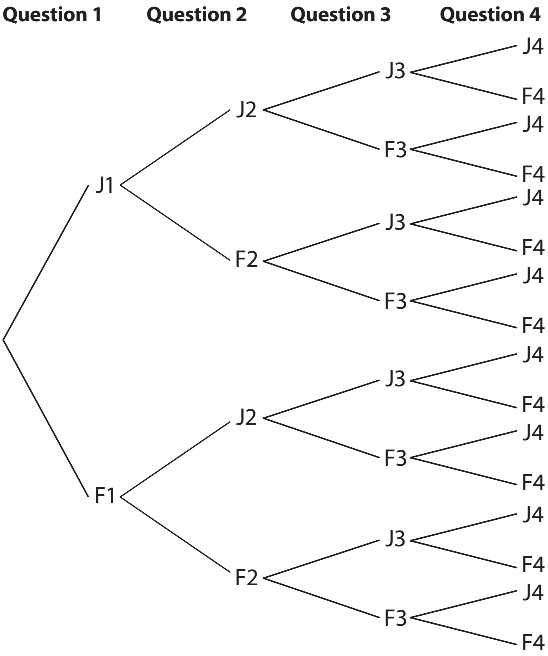
Produit		Dé n° 1					
		1	2	2	3	3	3
Dé n° 2	1	1	2	2	3	3	3
	1	1	2	2	3	3	3
	1	1	2	2	3	3	3
	2	2	4	4	6	6	6
	2	2	4	4	6	6	6
	3	3	6	6	9	9	9

2. L'expérience compte 36 issues.

8 issues réalisent l'événement E, donc $P(E) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

25 issues réalisent l'événement F, donc $P(F) = \frac{25}{36}$.

47 **1. a.**



b. Il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ réponses complètes possibles.

2. Une seule issue réalise l'événement E, donc $P(E) = \dfrac{1}{16}$.

D'après l'arbre, 4 issues réalisent l'événement F, donc $P(F) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

L'événement contraire de G est : « L'élève a donné quatre réponses fausses », sa probabilité est $\dfrac{1}{16}$, donc la probabilité de G est $1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$.

48 **1. f.** La valeur affichée dans la cellule E2 représente le nombre de fois où l'événement E est réalisé lors des 100 simulations.

g. On saisit la formule =E2/100 dans la cellule F2.

2. a.

Plus grand des deux nombres		1er nombre					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2e nombre	**1**	1	2	3	4	5	6
	2	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6	6

L'expérience compte 36 issues dont 9 réalisent l'événement E.

b. La probabilité de l'événement E est : $\dfrac{9}{36} = 0{,}25$.

c. Les fréquences varient lors des simulations et les valeurs oscillent autour de 0,25.

49 ● **Traduction**

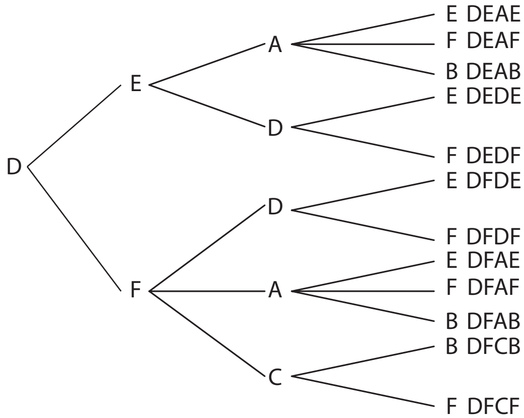
Un chat se promène autour de deux immeubles à base carrée. Il choisit son chemin au hasard et peut à tout instant faire demi-tour. Il faut une minute pour parcourir un côté. On observe les mouvements du chat pendant trois minutes.

a. Lister tous les chemins possibles.

b. Quelle est la probabilité que le chat atteigne le point A au bout de 3 minutes ?

● **Solution**

a. On dresse la liste des chemins possibles à l'aide d'un arbre :



b. « Le chat atteint le point A après 3 minutes » est l'événement impossible, sa probabilité est égale à 0.

50 **a.**

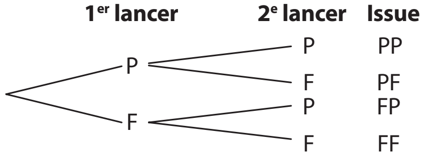
n	Valeur énoncée par le lutin
2	1
10	0
3	1
9	0
15	0

b. Les issues de l'expérience sont 0 et 1.

L'issue 1 est obtenue lorsque la valeur affectée à n est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8, sa probabilité est donc $\dfrac{8}{15}$.

L'issue 0 est obtenue lorsque la valeur affectée à n est 9, 10, 11, 12, 13, 14 ou 15, sa probabilité est donc $\dfrac{7}{15}$.

51 On peut décrire les issues de l'expérience à l'aide d'un arbre.

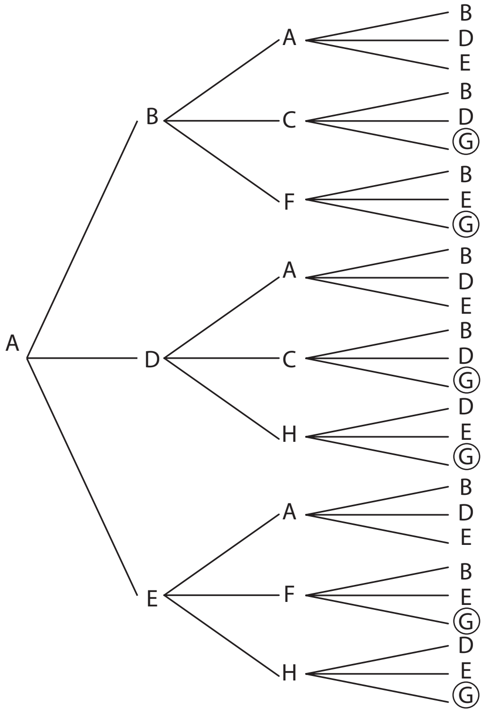


La probabilité que Matéo fasse la vaisselle est $\dfrac{1}{4}$, la probabilité que ce soit Elisa est $\dfrac{1}{4}$ mais la probabilité que Léo soit de corvée est $\dfrac{1}{2}$.

Cette façon de faire n'est donc pas équitable.

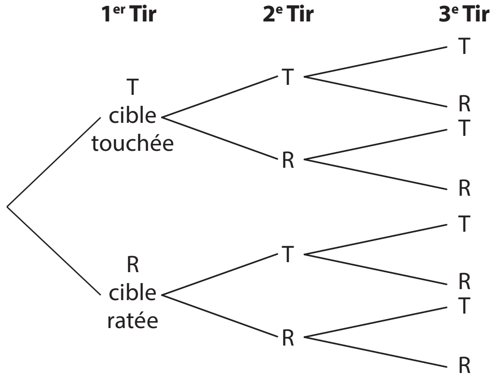
52 On détermine déjà p et q :
$q = 2p$ et $0{,}21 + p + 0{,}13 + 0{,}14 + q + 0{,}16 = 1$, donc $3p + 0{,}64 = 1$, $p = 0{,}12$ et $q = 0{,}24$.
La probabilité que le professeur enseigne l'une des disciplines 1, 2 ou 3 est : $0{,}21 + 0{,}12 + 0{,}13 = 0{,}46$.

53 On décrit les chemins possibles à l'aide d'un arbre :



Il y a $3 \times 3 \times 3 = 27$ chemins possibles et la probabilité que le scarabée emprunte chaque chemin est $\frac{1}{27}$.
L'événement : « Le scarabée atteint le point G » est réalisé par 6 issues, donc sa probabilité est $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

54 On décrit les issues de l'expérience à l'aide d'un arbre.



L'expérience compte 8 issues, Yasmine touche la cible une fois sur deux, donc les issues sont équiprobables.

La probabilité qu'elle rate la cible les trois fois est $\frac{1}{8}$, donc la probabilité qu'elle l'atteigne au moins une fois est $\frac{7}{8}$.

Dossier Brevet

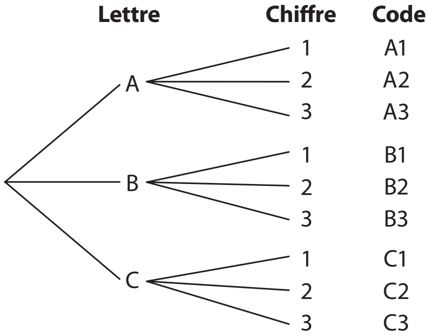
55 **1.** Le sac compte 20 boules.

2. a. La probabilité de tirer une boule bleue portant la lettre A est $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

b. La probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

c. La probabilité de tirer une boule portant la lettre A est $\frac{3+5+2}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, celle de tirer une boule portant la lettre B est $\frac{2+2+6}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.
Ces probabilités sont égales, on a autant de chances de tirer une boule portant la lettre A que de tirer une boule portant la lettre B.

56 **1.** On trouve tous ces codes possibles à l'aide d'un arbre :



2. a. Il y a 9 codes possibles, la probabilité qu'Anna compose le bon code est $\frac{1}{9}$.

b. Il reste alors 4 codes possibles pour Anna : B2, B3, C2 et C3. Sa probabilité de trouver le bon code à son deuxième essai est $\frac{1}{4}$.

c. Si lors de ce deuxième essai, Anna se trompe de lettre et a le bon chiffre, elle connaît alors le code de la porte pour son troisième essai.

57 **a.** 170 lancers donnent la somme 7. La fréquence représentée par ces lancers est $\frac{170}{1\,000} = 17\ \%$.

b.

Somme des 2 dés		Valeur du 2e dé					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Valeur du 1er dé	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

L'expérience compte 36 issues, dont 6 donnent une somme égale à 7.

La probabilité d'obtenir cette somme est donc $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

La fréquence 0,17 obtenue au **a.** est proche de la probabilité $\frac{1}{6}$ obtenue au **b.**.

58 **1.** La classe compte 30 élèves.

a. La probabilité que la fiche soit celle d'une fille qui porte des lunettes est $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.

b. La probabilité que la fiche soit celle d'un garçon est $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

2. Les 10 élèves qui portent des lunettes représentent 12,5 % de ceux qui en portent dans tout le collège. Le nombre d'élèves qui portent des lunettes dans le collège est $\frac{10 \times 100}{12,5} = 80$.

59 **a.** Les résultats observés ne permettent pas de connaître le nombre de billes de chaque couleur de la bouteille.

b. La probabilité de faire apparaître une bille rouge est $1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$.

Le nombre de billes rouges est donc : $24 \times \frac{1}{8} = 3$.

60 **a.** La probabilité que le premier sportif à sortir du bus soit :

- un joueur de ping-pong est $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$;
- un coureur ou un gymnaste est $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$.

b. Si n est le nombre de nageurs, la proportion de nageurs dans le bus est $\frac{n}{40+n}$.

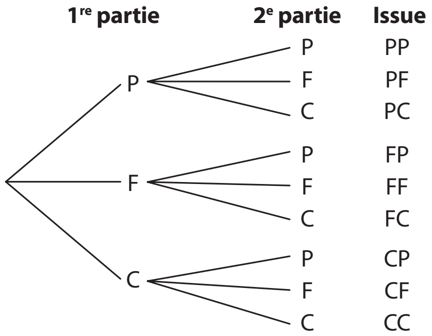
$\frac{n}{40+n} = \frac{1}{5}$ équivaut à $5n = 40 + n$, soit $4n = 40$.

Ainsi $n = 10$.

61 **1. a.** La probabilité que je perde la partie est $\frac{1}{3}$.

b. La probabilité que je ne perde pas la partie est donc $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

2. a.



b. M est réalisé par l'issue CC, donc $P(M) = \frac{1}{9}$.

N est réalisé par l'issue FF, donc $P(N) = \frac{1}{9}$.

Q est réalisé par les issues PC, FC, CP et CF, donc $P(Q) = \frac{4}{9}$.

R est réalisé par les issues PP, PC, CP et CC, donc $P(R) = \frac{4}{9}$.

c. L'événement contraire de R est : « Je perds au moins une partie » et sa probabilité est $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

62 **1. a.** La couleur la plus présente dans le sac est la couleur orange.

b. Le professeur a saisi la formule : =B2/A2 .

2. Le nombre de jetons rouges dans le sac est :
$\frac{1}{5} \times 20 = 4$.

63 Il manque 350 points à Paola pour gagner la partie. Pour gagner à son 3e lancer, elle doit donc obtenir une paire de 1, de 4, de 5 ou de 6.

Or il y a 36 issues possibles, donc la probabilité qu'elle gagne à son 3e lancer est $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

CHAPITRE 6

Comprendre et utiliser la notion de fonction

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le cycle 3 et le début du cycle 4

- La notion de fonction ne fait pas partie des programmes de cycle 3 mais plusieurs thèmes abordés permettent de préparer son étude, comme la recherche et l'organisation d'informations à partir de tableaux ou de graphiques représentant l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre.
- L'étude des grandeurs, la construction de tableaux ou de graphiques ont permis de présenter des activités liées à la notion de fonction sans que celle-ci soit évoquée.
- Dès le début du cycle 4, en 5e, conformément au programme, « la rencontre de relations de dépendance entre grandeurs mesurables, ainsi que leurs représentations graphiques, permet d'introduire la notion de fonction qui est stabilisée en 3e, avec le vocabulaire et les notations correspondantes ».
- Des expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » ont été utilisées dans le cadre du langage littéral.
- Les élèves ont été amenés à appliquer des programmes de calcul. La notion de fonction a ainsi pu être progressivement installée en dehors de toute formalisation ou notation.

2 Les activités

Activité 1

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de fonction à partir d'un programme de calcul qui est aussi présenté comme « une machine à transformer les nombres ».
Dans la question **1.**, on reste dans le domaine numérique pour permettre aux élèves de bien comprendre le processus de transformation.
Dans la question **2.**, on passe dans le domaine littéral et on introduit la notation $f(x)$ ainsi que le vocabulaire image puis antécédent. La question **2. a.** est à rapprocher de la question **1. a.** pour faire le lien entre le langage naturel et la notation fonctionnelle. Il est alors important d'insister sur la signification de la notation $f(x)$, dans laquelle les parenthèses ont un usage différent de celui qu'elles occupent dans l'écriture d'une expression littérale.
On travaille ainsi les compétences modéliser, représenter, calculer et communiquer.

Activité 2

L'objectif de cette activité est de présenter une fonction définie par un graphique permettant de modéliser une situation (température dans l'espace en fonction de l'altitude). C'est aussi l'occasion de revenir sur une lecture graphique dans un repère du plan. À une altitude a donnée, on associe une température unique que l'on note $T(a)$, reprenant ainsi la notation fonctionnelle qui a été introduite à l'activité précédente.
Cette situation donne l'occasion de travailler les compétences représenter et modéliser et permet, à la question **a.**, le changement de cadre : graphique/tableau.
À la question **b.**, on pourra faire remarquer qu'une lecture graphique ne permet parfois d'obtenir qu'une valeur approchée lorque les points ne sont pas clairement repérés par une croix.
La question **c.**, permet de faire le lien entre la représentation de la situation étudiée et son interprétation dans le langage naturel.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

- Suite à l'activité 1, on peut étudier le paragraphe 1 « Notion de fonction ».
- Suite à l'activité 2, on peut étudier le paragraphe 2 « Définir une fonction ».

Exercice résolu

Cet exercice présente, à partir d'un support concret, la lecture graphique d'images et d'antécédents. Dans la solution, les différentes couleurs et les directions des flèches facilite la compréhension du sens de lecture sur lequel on insiste également dans la remarque.
Les connaissances et compétences abordées sont, conformément au programme, « résoudre des problèmes modélisés par des fonctions » et « étudier et commenter des exemples ».
On travaille les compétences « chercher » et « représenter », ainsi que « communiquer » dans les interprétations des lectures.

4 Compléments

Notion de fonction

- De nombreux exercices permettent de travailler le concept de fonction numérique. L'exercice 6 de la rubrique « À l'oral » met en avant la nécessité d'avoir une seule image associée à un nombre pour pouvoir définir une fonction.
- Des exercices de la rubrique « Je m'entraîne » proposent des exemples aidant particulièrement à la compréhension des notations et du vocabulaire. On passe de la notation $f(a) = b$ à des phrases du type « b est l'image

de a par la fonction f » ou « a est un antécédent de b par la fonction f » dans les exercices 15 à 17. Les exercices 19 et 20 permettent d'insister sur le sens des notations $f(x)$ et $f : x \mapsto f(x)$.

Différents modes de représentation

- Dans les rubriques « À l'oral » et « Je m'entraîne », on propose des exemples de fonctions définies **par un graphique** (exercices 8, 9, 22 à 26). On y trouve des lectures d'images et d'antécédents ainsi que le lien avec des égalités du type $f(a) = b$. Plusieurs situations s'appuient sur des supports concrets.
- Des exemples de fonctions définies **par un tableau** (exercices 27 à 32) sont également proposés. On réinvestit aussi, dans ces cas-là, les notations et le vocabulaire.

De nombreux exercices de ce chapitre permettent aussi de comprendre et d'utiliser la notion de fonction définie par une formule, en particulier les exercices 33 à 46. On réinvestit aussi les notations et le vocabulaire. L'exercice 7 de la rubrique « À L'oral » et les exercices 44 et 45 proposent le changement de cadre : formule/tableau.

Avec un logiciel

- Les exercices de cette page proposent des exemples d'utilisation du tableur.
- L'exercice 51 est consacré à la réalisation d'un tableau de valeurs d'une fonction définie par une formule.
- À l'exercice 52, à partir d'un support concret, on utilise différents modes de représentation en passant d'un tableau à un graphique.

Dossier brevet

- L'exercice 75 amène les élèves à étudier et commenter deux exemples de fonctions modélisant deux situations. Deux modes de représentation sont ici utilisés. Les montants des recettes demandés seront obtenus par le calcul. Des lectures graphiques peuvent être effectuées mais elles ne permettent pas d'obtenir les valeurs exactes.
- À l'exercice 76, les élèves devront extraire et organiser les informations données dans les documents. Ils auront à utiliser une formule donnée pour effectuer un calcul et ensuite interpréter le résultat.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. c. ; **2. b.** ; **3. c.** ; **4. a.**

Je découvre

Activité 1

1 a. $4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$.
En choisissant 4, on obtient 12.

b. $7^2 - 4 = 49 - 4 = 45$.
En choisissant 7, on obtient 45.
$(-7)^2 - 4 = 49 - 4 = 45$.
En choisissant –7, on obtient 45.

c. On note x le nombre choisi.
$x^2 - 4 = 0$ lorsque $x^2 = 4$.
Pour obtenir 0, on peut choisir 2 ou –2.

2 a. $f(4) = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$.

b. L'image de –1 par la fonction f est notée $f(-1)$.
$f(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$.
L'image de –1 par la fonction f est –3.

c. $x^2 - 4 = 21$ lorsque $x^2 = 25$.
5 et –5 ont pour image 21 par la fonction f.

Activité 2

a.

a en km	0	10	20	30	50
T(a) en °C	20	–50	–40	–30	0

a en km	60	80	100	140	160
T(a) en °C	–40	–80	–50	10	40

b. Les antécédents de 0 par la fonction T sont approximativement : 2 ; 50 et 130.
T(a) est minimale pour $a = 90$.

c. Le ballon-sonde a relevé une température de 0 °C aux altitudes de 2 km ; 50 km et 130 km.
La température la plus basse a été relevée à une altitude de 90 km.

J'applique le cours

2 a. L'image de 0 est 0.
b. L'image de 4 est 2.
c. Les antécédents de 0 sont –4 ; –2 ; 0 et 3.
d. Les antécédents de 1 sont approximativement –1,8 ; –0,3 et 3,6.

3 a. L'image de 0 est 1.
b. Les antécédents de 1 sont 0 et 3.
L'antécédent de –2 est –3.
c. 2,5 n'a pas d'antécédent.
d. 0 a trois antécédents (–1 ; 3,5 et 6).

À l'oral

4 a. $20 \rightarrow \frac{1}{4} \times 20 = 5 \rightarrow 5^2 = 25$.
Si l'on entre le nombre 20, on obtient bien 25.
b. $p(-12) = 9$ signifie que si l'on entre –12 on obtient 9.
On dit que l'image de –12 est 9.

$-12 \rightarrow \frac{1}{4} \times (-12) = -3 \rightarrow (-3)^2 = 9$.

5 1. a. $h(-1) = 2$ donc l'image de –1 par la fonction h est 2.
b. $h(1) = -2$ donc l'image de 1 par la fonction h est –2.
c. $h(5) = 0$ donc l'image de 5 par la fonction h est 0.
2. a. $h(1) = -2$ et $h(0) = -2$ donc 1 et 0 sont deux antécédents de –2 par la fonction h.

b. $h(-3) = 3$ donc -3 est un antécédent de 3 par la fonction h.

c. $h(5) = 0$ donc 5 est un antécédent de 0 par la fonction h.

3. $h(-1) = 2$ et $h(3) = 2$ donc -1 et 3 sont deux nombres dont l'image par la fonction h est 2.

6 **a.** On définit bien une fonction car, à chaque heure, correspond une température et une seule.

b. On ne définit pas une fonction car la même température peut avoir été relevée à des heures différentes.

7 D'après le tableau complété par Théo, 0 aurait pour image 5 or, $g(0) = 2 \times 0 + 3 = 3$.
Théo aurait dû écrire 3 au lieu de 5.

8 **a.** À 2 mois, la taille du tigre est 20 cm.
À 9 mois, la taille du tigre est 60 cm.

b. Le tigre mesure 45 cm à environ 5 mois.
Le tigre mesure 80 cm à environ 15 mois.

9 **1. a.** L'image de 10 est 2.
L'image de 6 est 4.
L'image de 2 est 3.

b. Les antécédents de 3 sont 2 et 8.
L'antécédent de 1 est 0.

2. a. L'image de 1 est approximativement 1,6.
L'image de 5 est approximativement 5,4.

b. Les antécédents de 2 sont approximativement 1,4 et 10.
Les antécédents de 5 sont approximativement 3,9 et 5,5.

Calcul mental

10 **a.** L'image de 3 est 9.

b. $f(-4) = -12$.

c. L'antécédent de 6 est 2.

d. L'antécédent de 1,5 est 0,5.

11 **a.** L'image de 4 est 4 + 1, soit 5 donc l'affirmation est fausse.

b. $7 - 4 = 3$ donc le quart de l'antécédent de 7 est égal à 3.
$3 \times 4 = 12$, donc l'affirmation est vraie.

12 **a.** $2^2 - 5 = 4 - 5 = -1$ donc l'image de 2 est -1.

b. $0^2 - 5 = -5$ donc l'image de 0 est -5.

c. $h(-5) = (-5)^2 - 5 = 25 - 5 = 20$.

d. $h(8) = 8^2 - 5 = 64 - 5 = 59$.

13 **a.** $p(3) = 2 \times (7 + 3) = 2 \times 10 = 20$.

b. $p(5{,}5) = 2 \times (7 + 5{,}5) = 2 \times 12{,}5 = 25$.
5,5 est bien un antécédent de 25 par la fonction p.

Je m'entraîne

14 **a.** $5 \rightarrow 5 + 3 = 8 \rightarrow 8 \times 2 = 16$.
En choisissant le nombre 5, on obtient 16.

b. $f(-4) = 2 \times (-4 + 3) = 2 \times (-1) = -2$.

15 **a.** L'image de 4 est 2.

b. L'image de -5 est -2.

c. L'image de $\frac{1}{2}$ est -3.

16 **a.** 1 a pour antécédent 0.

b. -2 a pour antécédent 2,5.

c. 0 a pour antécédent -1.

17 **a.**

Notation mathématique	En français
$f(7) = 2$	L'image de 7 est 2.
$f(8) = -3$	Un antécédent de -3 est 8.
$f(4) = 5$	4 a pour image 5.
$f(-6) = 1$	1 a pour antécédent -6.

b. $f(-3) = 4$ signifie que -3 a pour image 4 ou que 4 a pour antécédent -3.

18 **a.** $4 \rightarrow 4^2 = 16 \rightarrow 16 - 4 = 12 \rightarrow 12 \times 2 = 24$.
La machine transforme bien 4 en 24.

b. ● $f(7) =$ **$(7^2 - 4) \times 2 = (49 - 4) \times 2 = 45 \times 2$. Donc $f(7) = 90$.**
● L'image de 7 par la fonction f est **90**.
● Un antécédent de 90 par la fonction f est **7**.

c. $f(-8) = ((-8)^2 - 4) \times 2 = (64 - 4) \times 2 = 60 \times 2$. Donc $f(-8) = 120$.
L'image de -8 par la fonction f est 120.

d. $f(x) = 2(x^2 - 4)$.

19 **a.** La fonction qui, à un nombre, associe son opposé est la fonction g.

b. À un nombre, la fonction f associe son double.
À un nombre, la fonction h associe sa moitié.

c. $f(10) = 20$; $g(10) = -10$; $h(10) = 5$.

20 **a.** Les notations correctes pour définir la fonction f sont : $f(x) = 3x + 1$ et $f : x \rightarrow 3x + 1$.

b. $f(-1) = 3 \times (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$.

c. $f(-4) = 3 \times (-4) + 1 = -12 + 1 = -11$.
Donc c'est faux, -4 est un antécédent de -11, pas de 0.

21 **a.** On définit une fonction qui, à une masse en kg, associe une durée de cuisson en min.

b. On définit une fonction qui, à une quantité de Sans Plomb 98 en L, associe un prix en €.

c. On définit une fonction qui, à un nombre de Mo échangés, associe un prix en €.

22 **a.** Ce graphique définit une fonction p qui à **l'âge de l'enfant (en mois)** associe **son poids (en kg)**.

b. À 4 mois, l'enfant pesait 6 kg.

c. L'enfant pesait 4 kg à 1 mois. Il pesait 9 kg à 10 mois.

d. $p(0) = 3{,}3$ signifie qu'à la naissance, l'enfant pesait 3,3 kg.

23 **1. a.** Le point A a pour coordonnées (120 ; 90). Donc $f(120) = 90$.

b. À une vitesse de 120 km/h, la distance de freinage est 90 m.

2. a. La distance de freinage d'un véhicule roulant à 50 km/h est environ 16 m.

b. La distance de freinage est égale à 50 m pour un véhicule roulant à 90 km/h.

24 **1. a.** On lit les images des nombres sur l'axe des ordonnées.

b. On lit les antécédents sur l'axe des abscisses.

2. • $f(0{,}5) = 0$ • $f(-1{,}5) = 1$ • $f(0) = 3$.

3. a. -2 n'a aucun antécédent.

b. -1 a un seul antécédent : 1.

c. 0 a deux antécédents : 0,5 et 1,3.

d. 1 a trois antécédents : $-1{,}5$; 0,3 et 1,4.

4. Karim a raison car 3 a une infinité d'antécédents compris entre -1 et 0.

25 **a.** L'image de 2 par la fonction g est 1 et celle de 0 est 2.

b. Les antécédents de -2 par la fonction g sont -4 et 4.

26 **1.** Sur l'axe des abscisses, on peut écrire « Heure » et sur l'axe des ordonnées, on peut écrire « Température en °C ».

2. a. $T(8) = 15$; $T(12) = 23$ et $T(14) = 24$.

b. Les antécédents de 16 sont approximativement 4 h15 et 8 h 45.

3. À 8 h, la température était de 15 °C ; à midi, elle était de 23 °C et à 14 h, elle était de 24 °C. La température a été de 16 °C à 4 h 15 et à 8 h 45.

27 **a.** $N(7) = 9$ signifie qu'il y a 9 annonces qui ont 7 lignes.

b. • L'image de 6 est 15.

• Les antécédents de 24 sont 3 et 5.

28 **a.** 1 a pour **image** -1

b. 0 et 2 sont des **antécédents** de 5.

c. 0 a pour **antécédent** 3.

d. 2 est l'**image** de -1.

29 On ne définit pas une fonction car au nombre 4 on associe deux nombres différents : -7 et 1.

30 **a.** Une lettre de 18 g est affranchie à 0,70 €.
Une lettre de 80 g est affranchie à 1,40 €.

b. $T(20) = 0{,}70$ et $T(250) = 2{,}80$.

c. Avec un timbre à 4,20 €, on sait que la masse de la lettre est comprise entre 250 g et 500 g.

31 **a.** • L'image de 2 est -2.

• L'image de -2 est 5.

• L'image de 5 est 10.

b. • Un antécédent de 2 est -1.

• Un antécédent de -2 est 2.

• Un antécédent de 5 est -2.

c. Léa a tort. $g(10) = 12$. C'est $g(-3)$ qui est égal à 10, elle a confondu image et antécédent.

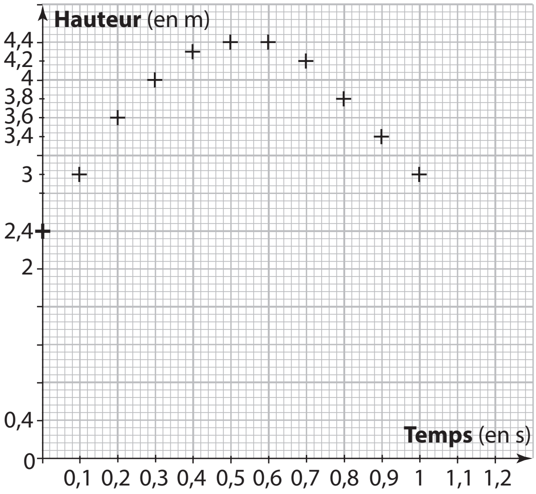
d. $h(a) = 10$ pour $a = -3$ ou $a = 5$.

32 **1. a.** $h(0) = 2{,}4$ signifie que le ballon a été lancé à partir d'une hauteur de 2,4 m.

b. $h(0{,}5) = 4{,}4$.

c. Les antécédents de 3 par h sont 0,1 et 1.

2. a. et **b.** Échelle 1/2.



33 $f(x) = -3x + 2$.

a. $f(1) = -3 \times 1 + 2 = -3 + 2 = -1$.
L'image de 1 est -1.

b. $f(0) = -3 \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2$.
L'image de 0 est 2.

c. $f(-2) = -3 \times (-2) + 2 = 6 + 2 = 8$.
L'image de -2 est 8.

d. $f\left(\frac{2}{3}\right) = -3 \times \frac{2}{3} + 2 = -2 + 2 = 0$.

L'image de $\frac{2}{3}$ est 0.

34 **a.** $g : x \mapsto x(4x - 1)$.

a. $g(2) = 2 \times (4 \times 2 - 1) = 2 \times (8 - 1) = 2 \times 7 = 14$.

b. $g(0) = 0 \times (4 \times 0 - 1) = 0 \times (-1) = 0$.

c. $g(-3) = -3 \times (4 \times (-3) - 1) = -3 \times (-13) = 39$.

d. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(4 \times \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \times (2 - 1) = \frac{1}{2}$.

35 $h(x) = -7x$.
$h(-4) = -7 \times (-4) = 28$.
28 est l'image de -4 ou un antécédent de 28 est -4. Un antécédent de -4 est $\frac{-4}{-7}$ soit $\frac{4}{7}$ et $\frac{4}{7} \neq 28$.

C'est Justine qui a raison.

36 $f : x \mapsto x(x + 3)$.

1. $f(x) = \boldsymbol{x(x + 3)}$.

2. a. Vrai car $f(-3) = -3 \times (-3 + 3) = 0$.

b. Vrai car $f(7) = 7 \times (7 + 3) = 70$.

c. Faux car $f(2) = 2 \times (2 + 3) = 10$.

d. Vrai car $f(-4) = -4 \times (-4 + 3) = 4$.

37 $f : x \mapsto x - 5$.

a. $f(-3) = -3 - 5 = -8$.
L'image de -3 est -8.

b. Le nombre qui a pour antécédent 7 est l'image de 7.
$f(7) = 7 - 5 = 2$.

Le nombre qui a pour antécédent 7 est 2.

c. Le nombre qui a pour image 7 est le nombre x tel que $x - 5 = 7$.
Ce nombre est $7 + 5$ soit 12.

d. L'antécédent de 4 est le nombre x tel que $x - 5 = 4$.
Ce nombre est $4 + 5$ soit 9.

38 **1. a.** $2^2 \times 5 + 10 = 20 + 10 = 30$. C'est exact.
b. $0{,}1^2 \times 5 + 10 = 0{,}05 + 10 = 10{,}05$.
Robin obtient 10,05.

2. a. $p(x) = 5x^2 + 10$.
b. $p(-1) = 5 \times (-1)^2 + 10 = 5 + 10 = 15$.
$p(3) = 5 \times 3^2 + 10 = 45 + 10 = 55$.
$p(0) = 5 \times 0^2 + 10 = 10$.
c. $p(0{,}2) = 5 \times 0{,}2^2 + 10 = 5 \times 0{,}04 + 10 = 10{,}2$.
0,2 est bien un antécédent de 10,2.

39 ● Choisir un nombre.
● Multiplier par 4.
● Soustraire 7.

40 ● Choisir un nombre.
● Calculer son carré.
● Multiplier par 2.
● Ajouter 5.

41 **a.** $\mathcal{A}(3) = \dfrac{3 \times (3+2)}{2} = \dfrac{15}{2} = 7{,}5$.

b. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x(x+2)}{2}$.

c. $\mathcal{A}(5) = \dfrac{5 \times (5+2)}{2} = \dfrac{35}{2} = 17{,}5$.
5 est bien un antécédent de 17,5 par la fonction $\mathcal{A}$.

42 **a.** $f(x) = x^3$.
b. $g(x) = \pi x^2$.
c. $h(x) = 3x$.

43 **a.** $h(x) = 4 \times (2 + x)$.
b. ● C'est faux car l'image de 8 par h est :
$h(8) = 4 \times (2 + 8) = 4 \times 10 = 40$.
● C'est vrai car :
$h(0{,}5) = 4 \times (2 + 0{,}5) = 4 \times 2{,}5 = 10$.

44

x	-5	-1	0	**1**	5	101
$h(x)$	**72**	**8**	**2**	0	**32**	**20 000**

45 $g(x) = \dfrac{x}{5} + 1$.

1. Dans la cellule B2, on a saisi = B1/5+1.

2. a. Vrai car $g(5) = 2$.

b. Faux car $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{5} + 1 = \dfrac{1}{10} + 1 = \dfrac{11}{10}$.

c. Vrai car $g(3) = 1{,}6$ et $\dfrac{8}{5} = 1{,}6$.

d. Faux car $g(0) = \dfrac{0}{5} + 1 = 1$.
0 a pour image 1.

e. Faux car $g(-2) = \dfrac{-2}{5} + 1 = \dfrac{-2}{5} + \dfrac{5}{5} = \dfrac{3}{5}$.
-2 est un antécédent de $\dfrac{3}{5}$.

Ou 15 a pour antécédent le nombre x tel que $\dfrac{x}{5} + 1 = 15$
donc $\dfrac{x}{5} = 14$ et $x = 14 \times 5 = 70$.
15 a pour antécédent 70.

46 $f(x) = (x + 2)^2 - 7$.

Je m'évalue à mi-parcours

47 **b.** **48** **b.** **49** **c.** **50** **c.**

Avec un logiciel

51 **1.**

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	f(x)	-11	-5	-1	1	1	-1	-5

2. a.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
2	f(x)	-1	0,25	1	1,25	1	0,25	-1

b.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
2	f(x)	0,44	0,25	0,04	-0,19	-0,44	-0,71	-1

Maya a remarqué que $f(1{,}6) > 0 > f(1{,}7)$.

c.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	1,6	1,61	1,62	1,63	1,64	1,65	1,66
2	f(x)	0,04	0,0179	-0,0044	-0,0269	-0,0496	-0,0725	-0,0956

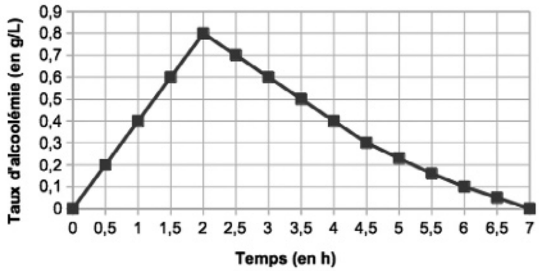
Avec un pas de 0,01, on remarque que $f(1{,}61) > 0 > f(1{,}62)$.

Donc 1,62 est une valeur approchée au centième près de l'antécédent de 0 par f compris entre 1,6 et 1,7.

52 **1.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Temps (en h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
2	Taux d'alcoolémie (en g/L)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,23	0,16	0,1	0,05	0

2. a., **b.**, **c.** et **d.**



J'utilise mes compétences

53 Sur le graphique de la machine A, on lit qu'à moins de 5 m de la machine le niveau de bruit dépasse les 85 dB.
Sur le graphique de la machine B, on lit que le niveau de bruit dépasse les 85 dB lorsqu'on se trouve à moins de 10 m de la machine.
Le port d'un casque antibruit est donc obligatoire quand on se trouve à moins de 10 m de la machine B.

54 On pose $AM = x$.
a. Si $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $f(x)$ est l'aire d'un rectangle de dimensions x et 3. $f(x) = 3x$.
b. Si $4 \leqslant x \leqslant 7$, alors $f(x)$ est la somme de l'aire du rectangle de dimensions 4 et 3 et de l'aire d'un rectangle de dimensions $(x - 4)$ et 1.
$f(x) = 12 + x - 4 = 8 + x$.
c. Si $7 \leqslant x \leqslant 10$, alors $f(x)$ est la somme des aires des rectangles de dimensions 4 et 3, 3 et 1, $(x - 7)$ et 4.
$f(x) = 12 + 3 + 4(x - 7) = 15 + 4x - 28$ donc $f(x) = 4x - 13$.

55 $f(x) = (x - 1)(x - 2)$.
Pour qu'un produit soit égal à 0, il faut que l'un des facteurs soit égal à 0.
Pour que $f(x) = 0$, il faut que $x - 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$.
Donc $x = 1$ ou $x = 2$.
Par la fonction f, 0 a deux antécédents : 1 et 2.

56 **a.** Ce graphique ne convient pas car les valeurs de x ont été portées sur l'axe des ordonnées au lieu de l'axe des abscisses et les valeurs de $f(x)$ sur l'axe des abscisses au lieu de l'axe des ordonnées.
b. Ce graphique comporte une erreur : c'est le point de coordonnées $(0 ; -2)$ qui a été placé au lieu du point de coordonnées $(-2 ; 0)$.
D'après le tableau, -2 a pour image 0 or, sur le graphique, -2 n'a pas d'image.

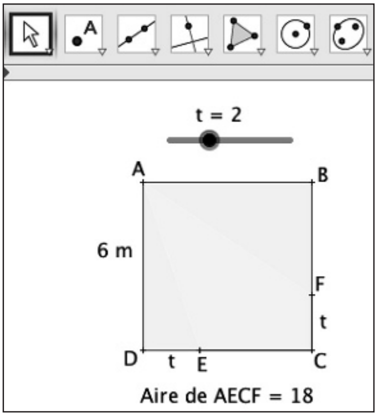
57 **a.** $f(0) = (2 \times 0 + 3) \times (0 - 4) = 3 \times (-4) = -12$
$g(0) = 2 \times 0^2 - 5 \times 0 - 12 = -12$
$f(1) = (2 \times 1 + 3) \times (1 - 4) = 5 \times (-3) = -15$
$g(1) = 2 \times 1^2 - 5 \times 1 - 12 = 2 - 5 - 12 = -15$
$f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$ donc l'affirmation de Tom est bien exacte.
b. $f(x) = (2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 8x + 3x - 12$
donc $f(x) = 2x^2 - 5x - 12 = g(x)$
Quel que soit le nombre x choisi, $f(x) = g(x)$.
Emma a raison.

58 **1.** Dans la cellule B2, Fazia a saisi la formule = B1/(B1–5) .
2. Dans la cellule H2, le calcul demandé correspond à 5 divisé par 0, ce qui est mathématiquement impossible.
Lorsqu'un nombre est divisé par 0, le logiciel affiche le message d'erreur : #DIV/0!.
3. a. Les nombres affichés dans les cellules B2 et E2 sont des valeurs approchées.
b. $f(-1) = \dfrac{-1}{-1-5} = \dfrac{1}{6}$
$f(2) = \dfrac{2}{2-5} = -\dfrac{2}{3}$.

59 **a.** Cette éolienne produit de l'électricité à partir d'une vitesse de vent de 3 m/s.
b. Avec un vent de 8 m/s, l'éolienne délivre une puissance d'environ 250 kW.
c. La puissance maximale est atteinte pour des vents de 14 m/s à 25 m/s.
d. On arrête cette éolienne pour des vents d'une vitesse supérieure à 25 m/s.
e. L'éolienne délivre une puissance supérieure à 500 kW pour des vents de 10 m/s à 25 m/s.
f. Ce graphique ne représente pas une fonction car 25 a plusieurs images : tout nombre entre 0 et 750.

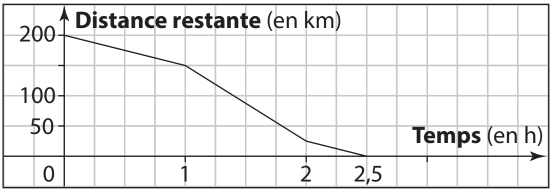
60 **a.** Le graphique peut représenter une fonction car un nombre n'a qu'une seule image.
b. Ce graphique ne peut pas représenter une fonction car un nombre a deux images.
c. Le graphique peut représenter une fonction car un nombre n'a qu'une seule image.

61 **1.** E est un point du côté [DC] donc E varie entre le point D et le point C. Comme t = DE et DC = 6, t est compris entre 0 et 6.
2. a.



b. En déplaçant le curseur, on peut observer que l'aire du polygone semble être toujours égale à 18 m².
3. S(t) = aire de AECF
S(t) = aire de ABCD – aire de ADE – aire de ABF.
Donc $S(t) = 6^2 - 6t : 2 - 6(6 - t) : 2$
$S(t) = 36 - 3t - 3(6 - t) = 36 - 3t - 18 + 3t$. Donc $S(t) = 18$.

62



63 **a.** ● **Traduction**
À partir d'un triangle équilatéral de côté x (en cm) :
– on divise chaque côté en trois segments de même longueur ;

– on construit un triangle équilatéral sur chaque segment du milieu ;
– on efface chaque segment du milieu.
On note P la fonction qui, à x, associe le périmètre de l'étoile bleue ainsi obtenue. Donner l'expression de $P(x)$.

● **Solution :**

Chaque petit segment a une longueur égale à $\frac{x}{3}$ cm. Le contour de l'étoile bleue se compose de 12 petits segments.

Donc $P(x) = 12 \times \frac{x}{3}$ soit $P(x) = 4x$.

64 **a.**

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	**24**	**6**	**–4**	**–6**	**0**	**14**	**36**
$g(x)$	**24**	**6**	**–4**	**–6**	**0**	**14**	**36**

b. Pour tous les nombres du tableau, $f(x) = g(x)$, on peut donc penser que cette égalité est vraie pour tous les nombres x.

$f(x) = (x - 1)(11 - x) + 5(x - 1)^2$
$f(x) = 11x - x^2 - 11 + x + 5(x^2 - 2x + 1)$
$f(x) = 12x - x^2 - 11 + 5x^2 - 10x + 5$
$f(x) = 4x^2 + 2x - 6$
$g(x) = 2(x - 1)(2x + 3)$
$g(x) = 2(2x^2 + 3x - 2x - 3)$
$g(x) = 2(2x^2 + x - 3)$
$g(x) = 4x^2 + 2x - 6$

Quel que soit le nombre x, $f(x) = g(x)$.

65 Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût de production.
Pour x repas servis, la recette $R(x)$ est égale à $12x$. On peut lire le coût de production $C(x)$ sur le graphique et calculer le bénéfice : $B(x) = R(x) - C(x)$.
Avec un tableur, on obtient :

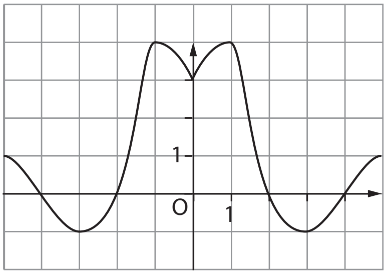
	A	B	C	D
1	x	C(x)	R(x)	B(x)
2	0	0	0	0
3	5	140	60	-80
4	10	240	120	-120
5	15	290	180	-110
6	20	310	240	-70
7	25	320	300	-20
8	30	330	360	30
9	35	340	420	80
10	40	350	480	130
11	45	370	540	170
12	50	420	600	180
13	55	500	660	160
14	60	650	720	70
15	65	850	780	-70
16	70	1200	840	-360

Vincent peut donc réaliser un bénéfice d'au moins 100 € ; pour cela il doit servir entre 40 et 55 repas.

66 Sur le graphique, la vitesse diminue quand la voiture est dans un virage. Le circuit contient donc trois virages. On peut donc éliminer les circuits A et E.
Sur le graphique, on remarque que la vitesse de la voiture diminue le plus au 2e virage.
On remarque aussi que la distance entre le 1er et le 2e virage est un peu plus courte que la distance entre le 2e et le 3e virage.
Sur le circuit C, les virages sont à peu près identiques et les distances entre les virages aussi. On peut donc éliminer ce circuit.
Sur le circuit D, la distance entre le 1er et le 2e virage est plus grande que celle entre le 2e et le 3e virage. On peut donc éliminer ce circuit.
Conclusion : la voiture roulait sur le circuit B.

67 Le réservoir est composé d'un cône et d'un cylindre. L'eau arrive d'abord dans le cône, donc la hauteur augmente plus vite au début.
On peut donc éliminer les graphiques 3 et 4.
Lorsque l'eau arrive dans le cylindre, le niveau d'eau augmente régulièrement.
On peut donc éliminer le graphique 1.
C'est donc le graphique 2 qui illustre la façon dont le niveau d'eau évolue dans le temps.

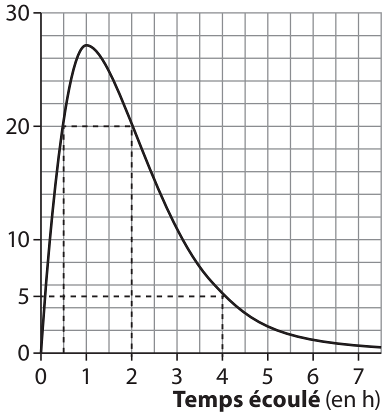
68



Dossier Brevet

69 **a.** Dans la colonne D du tableau, on peut lire $f(2) = -1$ donc l'affirmation 1 est **fausse**.
$f(11) = (11 - 1)(2 \times 11 - 5) = 10 \times 17 = 170$
donc l'affirmation 2 est **vraie**.
b. Dans la cellule B2, on a saisi = (B1 – 1)*(2*B1 – 5) .
c. Dans la colonne C du tableau, on peut lire que 1 est un antécédent de 0 par la fonction f.

70



a. Sur le graphique, on peut lire que la quantité de principe actif est supérieure à 20 mg/L entre 0,5 h et 2 h, donc pendant 1,5 h.

b. Sur le graphique, on peut lire que la quantité de principe actif est supérieure à 5 mg/L jusqu'à 4 h. Ce médicament est donc efficace pendant 4 h.

71 **a.** Pour la journée J_1, à 7 h, on lit une puissance consommée de 68 100 MW.

b. Pour la journée J_2, à 7 h, on lit une puissance consommée de 61 300 MW.
$68\,100 - 61\,300 = 6\,800$.
À 7 h, on a économisé 6 800 MW.

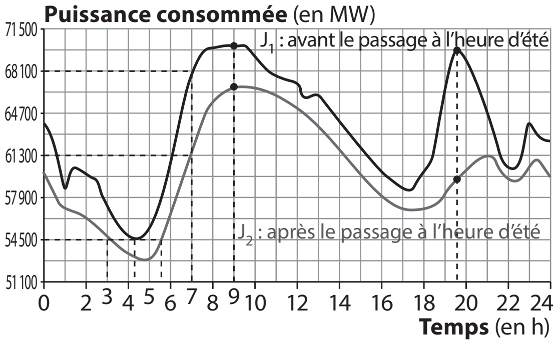
c. Pour la journée J_2, on lit une puissance consommée de 54 500 MW à 3 h et à 5 h 30.

d. Pour la journée J_1, on lit une puissance consommée de 54 500 MW à 4 h 30.

e. Le passage à l'heure d'été permet le plus d'économies lorsque l'écart entre les deux courbes est le plus grand. Ce moment se situe vers 19 h 30.

f. Sur l'axe des ordonnées, deux carreaux représentent 3 400 MW. À 19 h 30, l'écart entre les deux courbes est de 6 carreaux soit trois fois deux carreaux.
$3 \times 3\,400 = 10\,200$.
On a donc économisé 10 200 MW.

g. À 9 h, l'écart entre les deux courbes correspond à 2 carreaux.
À 9 h, on a donc économisé 3 400 MW.



72 **1. a.** La flèche est tirée d'une hauteur de 1 m.

b. La flèche retombe au sol à 10 m de Julien.

c. La hauteur maximale atteinte par la flèche correspond à l'ordonnée du plus haut point de la courbe. On lit approximativement 3 m.

2. a. $f(4) = -0{,}1 \times 4^2 + 0{,}9 \times 4 + 1$
donc $f(4) = -1{,}6 + 3{,}6 + 1 = 3$.
$f(5) = -0{,}1 \times 5^2 + 0{,}9 \times 5 + 1$ donc $f(5) = -2{,}5 + 4{,}5 + 1 = 3$.

b. La flèche s'élève à 3 m de hauteur lorsqu'elle est à 4 m et à 5 m de Julien.
Il semble qu'entre les deux, elle soit à plus de 3 m de hauteur.
$f(4{,}5) = -0{,}1 \times 4{,}5^2 + 0{,}9 \times 4{,}5 + 1 = 3{,}025$
$3{,}025 > 3$
La flèche s'élève donc à plus de 3 m de hauteur.

73 **a.** $f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$.
L'image de –1 est 2.

b. $g(-3) = 2 \times (-3)^2 - 5 \times (-3) + 3 = 18 + 15 + 3$
donc $g(-3) = 36$. L'image de –3 est 36.

c. Un antécédent de –7 est un nombre x tel que $3x + 2 = -7$.
Donc $3x = -9$ et $x = -3$.
Ou $h(-19) = 3 \times (-19) + 2 = -38 + 2 = -36$
$h(-3) = 3 \times (-3) + 2 = -9 + 2 = -7$
$h(-7) = 3 \times (-7) + 2 = -21 + 2 = -9$
Un antécédent de –7 est –3.

74 **a.** La formule pour calculer le volume d'un cylindre est : $V = \pi \times r^2 \times h$.
Soit ici, $V = \pi \times 5^2 \times 15$.
Le volume exact de la partie cylindrique est $V = 375\pi$ cm³.
Avec la calculatrice, on trouve $V \approx 1\,178$ cm³.

b. D'après **a.**, on sait que $V(15) \approx 1\,178$.
Le graphique 4 ne convient pas car on lit $V(15) \approx 1\,300$.
Le graphique 2 ne convient pas car, à partir de $h = 15$, le volume diminue ce qui n'est pas possible quand on remplit la bouteille.
Le graphique 3 ne convient pas car, à partir de $h = 15$, le volume augmente plus vite alors que la partie conique contient moins d'eau que la partie cylindrique.
C'est donc le graphique 1 qui représente correctement le volume d'eau dans la bouteille en fonction de la hauteur de remplissage.

75 **a.** Pour une réduction de 2 €, le nombre de spectateurs est $S(2) = 500 + 50 \times 2 = 600$.
Le prix de la place est alors de 20 € – 2 € soit 18 €.
600×18 € $= 10\,800$ €.
La recette s'élève alors à 10 800 €.

b. La salle peut accueillir 800 spectateurs au maximum.
Donc $S(x)$ doit être inférieur ou égal à 800.
Soit $500 + 50x \leqslant 800$. Donc $50x \leqslant 300$ d'où $x \leqslant 6$.
Le directeur ne peut consentir que 6 € de réduction au maximum car, sinon, la salle ne pourrait pas accueillir tous les spectateurs.
Avec une réduction de 6 €, le prix de la place est 14 € et il y a 800 spectateurs.
800×14 € $= 11\,200$ €.
Le montant de la recette est alors 11 200 €.

c. D'après le graphique, la recette maximale est obtenue pour une réduction de 5 €.
Le prix de la place est alors 15 €.
Il y a $500 + 50 \times 5$, c'est-à-dire 750 spectateurs.
750×15 € $= 11\,250$ €.
La recette maximale est 11 250 €.

76 La surface corporelle du patient est :

$$S = \sqrt{\frac{105 \times 17{,}5}{3\,600}}.$$

La dose à administrer est donc :

$$70 \times \sqrt{\frac{105 \times 17{,}5}{3\,600}}$$

soit environ 50 mg.
Le médecin doit prescrire un sachet par jour.

CHAPITRE 7

Relier proportionnalité et fonction linéaire

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le cycle 3 et le début du cycle 4

- La notion de fonction ne fait pas partie des programmes de cycle 3 mais plusieurs thèmes abordés permettent de préparer son étude.
- L'utilisation de formules pour le calcul du périmètre du carré et du cercle ont donné lieu à des activités préparant la compréhension de la notion de fonction linéaire.
- L'identification d'une situation de proportionnalité entre deux grandeurs et l'utilisation de tableaux et de graphiques représentant des variations entre ces grandeurs ont aussi été l'occasion de rencontrer des exemples liés à la notion de fonction linéaire même si celle-ci n'a pas été évoquée.
- Dès le début du cycle 4, en 5e et 4e, les cas de proportionnalité de deux grandeurs ont permis d'aborder la notion de fonction linéaire mais sans formalisation et sans que le terme de fonction linéaire ne soit énoncé.

Remarque : La notion de fonction, le vocabulaire et les notations ont été introduits dans le chapitre 6 précédent.

2 Je découvre

Activité 1

L'objectif de cette activité est, dans la question **1.**, de reconnaître une situation de proportionnalité et de modéliser cet exemple par une fonction. On profite de cette activité pour réinvestir la notion de fonction et introduire le cas particulier de la fonction linéaire en mettant en avant le processus caractéristique de ce type de fonctions décrit par une formulation du type : «on multiplie … par …».

À la question **c.**, on utilise les notations des fonctions vues au chapitre 6. On travaille ainsi, conformément au programme, la compétence «modéliser» et en particulier «Traduire en langage mathématique une situation réelle». Cette question sera aussi l'occasion de réinvestir le vocabulaire (image, antécédent) et de travailler la compétence «communiquer» et en particulier «Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française».

À la question **d.**, on attire l'attention sur le fait que, dans la situation concrète, les valeurs prises par la variable doivent être entières et positives. On définit alors ce qu'est une fonction linéaire dans sa généralité.

À la question **2.**, on propose une situation qui peut être modélisée par une fonction qui n'est pas une fonction linéaire.

Activité 2

L'objectif de cette activité est, conformément au programme, de travailler la compétence «représenter» en proposant une situation (fonction reliant puissance et énergie) permettant des changements de cadres.

À la question **1.**, on passe d'un tableau à un graphique en réinvestissant la caractérisation graphique d'une situation de proportionnalité vue en 4e.

À la question **2.**, on passe d'un graphique à une formule en déterminant le coefficient de proportionnalité correspondant à la situation.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

- Suite à l'activité 1, on peut étudier le paragraphe 1 «Fonction linéaire».
- Suite à l'activité 2, on peut étudier le paragraphe 2 «Représentation graphique d'une fonction linéaire».

Exercice résolu

Dans cet exercice, on aborde les trois domaines de situations d'apprentissage sur la notion de fonction linéaire : numérique, algébrique et graphique.

À la question **a.**, on utilise une démarche numérique pour calculer l'image d'un nombre.

Dans les conseils, on met en avant le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.

À la question **b.**, on utilise une démarche algébrique, avec la résolution d'une équation, pour déterminer l'antécédent d'un nombre.

À la question **c.**, on utilise une démarche graphique avec le tracé de la représentation de la fonction linéaire. Dans les conseils, on met en avant le fait que le choix d'un point à coordonnées entières facilite la tâche et permet d'obtenir une plus grande précision pour le tracé de la droite.

4 Compléments

Expressions algébriques et calculs

De nombreux exercices utilisent les cadres numériques et algébriques pour travailler la notion de fonction linéaire. Les élèves sont amenés à reconnaître si une fonction est linéaire à partir de son expression algébrique (exercices 11, 29 et 66) ou à partir de nombres et de leurs images (exercices 8, 27 et 31). Des calculs d'images et d'antécédents sont demandés dans les exercices 12, 17 et 19 de la rubrique «À l'oral» et dans les exercices 22 à 26 et 33 de la rubrique «Je m'entraîne». D'autres exercices (14, 34 à 36) proposent de déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir d'un nombre et de son image.

Modélisations de situations

L'étude des fonctions linéaires permet de travailler particulièrement la compétence « modéliser ». À ce sujet, beaucoup d'exercices de difficulté progressive sont proposés dans les différentes rubriques de ce chapitre.

Pour commencer, on peut proposer des exercices de la rubrique « À l'oral » puis des exercices de la page 104 de la rubrique « Je m'entraîne ». Dans la rubrique « J'utilise mes compétences », on retrouve aussi des exercices en lien avec la géométrie ou la physique.

Représentations graphiques

Dans plusieurs exercices de ce chapitre, les élèves sont amenés à lire, interpréter et tracer des représentations graphiques de fonctions linéaires. Conformément au programme, plusieurs exemples sont proposés pour « utiliser différents modes de représentation et passer de l'un à l'autre » et travailler en particulier la compétence « représenter ».

Dans la rubrique « À l'oral », les exercices 15 et 16 invitent les élèves à reconnaître la représentation graphique d'une fonction linéaire. Dans la rubrique « Calcul mental », les exercices 20 et 21 permettent de lier formule et graphique.

Au fil des exercices proposés, les élèves sont amenés à tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire, à lire des images ou des antécédents puis à déterminer l'expression algébrique de la fonction à partir de sa représentation graphique. L'exercice 58 est consacré à l'étude d'une situation concrète en utilisant les trois registres : numérique, algébrique et graphique.

Dossier Brevet

- L'exercice 92 permet de faire le lien entre deux unités de pression : le bar et le PSI qui est une unité anglo-saxonne. Les élèves devront utiliser le graphique et les informations données pour répondre à la question posée.
- L'exercice 93 amène les élèves à étudier la consommation de carburant d'un véhicule en fonction de sa vitesse. À la question **b.**, ils devront utiliser les relations entre distance, durée et vitesse. Ce sera aussi l'occasion de revenir sur les unités de durées.

Ces deux exercices permettent de développer les six compétences : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. a. et **c.** ; **2. a.**, **b.** et **c.** ; **3. a.** et **b.** ; **4. a.** ; **5. c.**

Je découvre

Activité 1

1 a.

Nombre de tickets achetés	1	5	10	15	20
Prix payé (en €)	**1,50**	**7,50**	**15**	**22,50**	**30**

b. On obtient le prix payé en multipliant le nombre de tickets achetés par 1,5.
Le tableau précédent est un tableau de proportionnalité.

c. $f(10) = 15$ signifie que le prix de 10 tickets est égal à 15 €.

d. $f(-5) = -5 \times 1{,}5 = -7{,}5$
$f(1{,}5) = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$.
On ne peut pas interpréter ces résultats pour la situation étudiée car le nombre de tickets achetés ne peut être qu'un nombre entier positif.

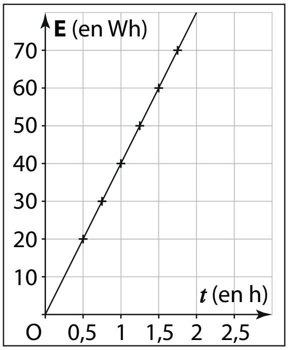
2 La fonction qui modélise le prix payé avec la carte est la fonction $x \mapsto 20 + 0{,}5x$.
Cette fonction n'est pas une fonction linéaire car elle n'est pas du type $x \mapsto ax$.

Activité 2

1 a. $\dfrac{20}{0{,}5} = \dfrac{30}{0{,}75} = \dfrac{40}{1} = \dfrac{50}{1{,}25} = \dfrac{60}{1{,}5} = \dfrac{70}{1{,}75} = 40.$

On passe de la 1re ligne du tableau à la 2e en multipliant par 40, donc ce tableau est un tableau de proportionnalité.
On a $E = 40 \times t$, donc l'ampoule utilisée a une puissance de 40 W.

b.



Les points sont alignés avec le point O.

2 a. Sur le graphique on lit que $60 = P \times 1$ donc $P = 60$.
L'ampoule utilisée a une puissance de 60 W.

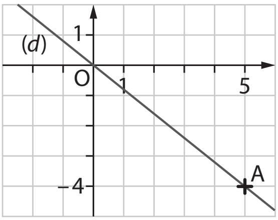
b. $g(t) = 60t$.

J'applique le cours

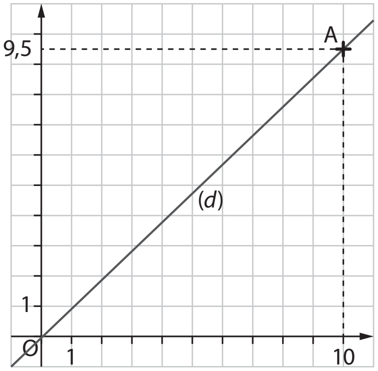
2 a. $f(3) = -0{,}8 \times 3 = -2{,}4$.
Donc l'image de 3 par f est $-2{,}4$.

b. On cherche un nombre x tel que
$f(x) = -4$ c'est-à-dire $-0{,}8x = -4$.
Ainsi $x = -4 : (-0{,}8) = 5$.
L'antécédent de -4 par f est 5.

c. La droite (d) passe par l'origine du repère.
D'après **b.**, $f(5) = -4$ donc (d) passe par le point A $(5 ; -4)$.

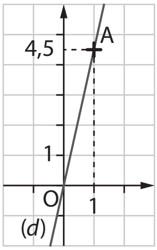


3 **a.** $t(14) = 0{,}95 \times 14 = 13{,}3$.
b. On cherche un nombre x tel que
$t(x) = 19$, c'est-à-dire $0{,}95x = 19$
Ainsi $x = 19 : 0{,}95 = 20$.
L'antécédent de 19 par la fonction t est 20.
c. La droite (d) passe par l'origine du repère.
$t(10) = 0{,}95 \times 10 = 9{,}5$ donc (d) passe par le point A(10 ; 9,5).



4 **a.** On cherche un nombre x tel que $k(x) = -8$, c'est-à-dire $-1{,}6x = -8$.
Ainsi $x = -8 : (-1{,}6) = 5$.
L'antécédent de -8 par k est 5.
b. $k(9) = -1{,}6 \times 9 = -14{,}4$.

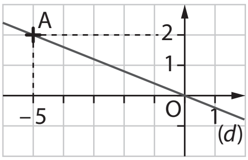
5 **a.** $g(-3) = 4{,}5 \times (-3) = -13{,}5$.
Donc l'image de -3 par g est $-13{,}5$.
b. On cherche un nombre x tel que $g(x) = 36$, c'est-à-dire $4{,}5x = 36$
Ainsi $x = 36 : 4{,}5 = 8$.
L'antécédent de 36 par g est 8.
c. La droite (d) passe par l'origine du repère.
$g(1) = 4{,}5$, donc (d) passe par le point A(1 ; 4,5).



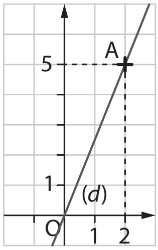
6 **a.**

x	**–10**	–5	**0**	20
$h(x)$	4	**2**	0	**–8**

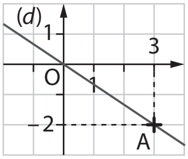
b. La droite représentant graphiquement la fonction h passe par l'origine du repère et par le point A(– 5 ; 2).



7 **a.** $f(2) = 2{,}5 \times 2 = 5$.
Dans un repère, la fonction linéaire f définie par $f(x) = 2{,}5x$ est représentée par la droite passant par l'origine du repère et par le point A(2 ; 5).



b. $g(3) = -\dfrac{2}{3} \times 3 = -2$.
Dans un repère, la fonction linéaire g de coefficient $-\dfrac{2}{3}$ est représentée par la droite passant par l'origine du repère et par le point A(3 ; – 2).



À l'oral

8 **a.** Pour les valeurs du tableau, on a $g(x) = 2{,}5x$. Donc g peut être la fonction linéaire de coefficient 2,5.
b. $h(0) \neq 0$, donc la fonction h ne peut pas être une fonction linéaire.

9 1 bracelet coûte 5 € et 5 bracelets coûtent 20 €. Le prix n'est pas proportionnel au nombre de bracelets car 5 bracelets ne coûtent pas 5 × 5 €. Cette situation ne peut donc pas être modélisée par une fonction linéaire.

10 **a.** Le périmètre d'un triangle équilatéral de côté x est égal à $3x$.
Cette situation peut donc être modélisée par la fonction linéaire de coefficient 3.
b. L'aire d'un disque de rayon r est égale à πr^2. Cette situation peut être modélisée par la fonction $f : x \mapsto \pi x^2$. $f(x)$ n'est pas de la forme ax. Donc cette fonction n'est pas une fonction linéaire.

11 **a.** Non. **b.** Oui, $a = 4$. **c.** Oui, $a = 1{,}8$.
d. Non. **e.** Oui, $a = \dfrac{2}{3}$. **f.** Non.

12 **a.** On calcule l'image de 16 par la fonction f.
b. On calcule l'antécédent de 16 par la fonction f.

13 **a.** $p(x) = 5x$ donc $p(1{,}5) = 5 \times 1{,}5 = 7{,}5$.
L'image de 1,5 par la fonction p est 7,5.
b. On cherche un nombre x tel que $p(x) = 30$
c'est-à-dire $5x = 30$
Ainsi $x = 30 : 5 = 6$.
L'antécédent de 30 par la fonction p est 6.

c. D'après **a.**, 1,5 kg de cerises coûte 7,50 €.
D'après **b.**, 30 € est le prix de 6 kg de cerises.

14 $a \times 10 = 12$ donc $a = 12 : 10 = 1,2$.
$f(x) = 1,2x$.

15 ❶ Non, car ce n'est pas une droite.

❷ Oui, $a = 0,5$

❸ Non, car la droite ne passe pas par l'origine du repère.

16 **a.** Le tarif n'est pas proportionnel à la durée. En effet, le graphique n'est pas constitué de points alignés avec l'origine du repère.
b. Pour moins de 4 h de communication, vous payez 5 € de l'heure et après la 4e heure de communication, toutes vos communications supplémentaires sont gratuites.

Calcul mental

17 **a.** $f(-3) = 7 \times (-3) = -21$.
b. $7x = 4,2$ pour $x = 4,2 : 7 = 0,6$.
c. L'image de 4 est 7×4, soit 28.
d. L'antécédent de -350 est $-350 : 7$, soit -50.

18 $a \times 5 = 26$ donc $a = 26 : 5 = 5,2$.
$g(x) = 5,2x$.

19 $9 = 3 \times 3$, donc $g(9) = 3 \times g(3) = 3 \times 4 = 12$.
$-6 = -2 \times 3$, donc $g(-6) = -2 \times g(3) = -2 \times 4 = -8$.

20 L'ordonnée de A est $1,5 \times 4$ soit 6.

21 **a.** $h(0) = 0$ donc A $\notin$ (d).
b. $h(-1) = 5$ donc B $\in$ (d).
c. $h(10) = -50$ donc C $\notin$ (d).
d. $h(0,2) = -1$ donc D $\in$ (d).

Je m'entraîne

22 **a.** $f(-3,4) = 5 \times (-3,4) = -17$.
L'image de $-3,4$ par f est -17.
b. On cherche un nombre x tel que $f(x) = 18,2$ c'est-à-dire tel que $5x = 18,2$.
Ainsi $x = 18,2 : 5 = 3,64$.
L'antécédent de 18,2 par f est 3,64.

23 **a.** On cherche un nombre x tel que $g(x) = -8$ c'est-à-dire tel que $-2,4x = -8$.

Ainsi $x = \dfrac{-8}{-2,4} = \dfrac{10}{3}$.

L'antécédent de -8 par g est $\dfrac{10}{3}$.

b. $g(9) = -2,4 \times 9 = -21,6$.

24 **a.** $f(3) = -3,5 \times 3 = -10,5$.
L'image de 3 est $-10,5$.
b. On cherche un nombre x tel que $f(x) = -14$ c'est-à-dire tel que $-3,5x = -14$.
Ainsi $x = -14 : (-3,5) = 4$.
L'antécédent de -14 est 4.

c. $f(-16) = -3,5 \times (-16) = 56$.
d. On cherche un nombre x tel que $f(x) = 21$ c'est-à-dire tel que $-3,5x = 21$.
Ainsi $x = 21 : (-3,5) = -6$.
Le nombre qui a pour image 21 est -6.

25

x	-3	-2	2,5	**0**	**-5**	**0,25**
$g(x)$	**$-8,4$**	**$-5,6$**	**7**	0	-14	0,7

26

x	-3	**$-2,5$**	$-1,5$	**$-0,75$**	0	**5**
$h(x)$	**9,6**	8	**4,8**	2,4	**0**	-16

27 **a.** $\dfrac{9}{7} \neq \dfrac{10}{8}$.

Le tableau n'est pas un tableau de proportionnalité donc la fonction f ne peut pas être linéaire.

b. $\dfrac{4}{-3} = \dfrac{-4}{3} = \dfrac{-12}{9}$.

La fonction f peut être la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{4}{3}$.
c. $21 \times 11 = 231$ et $10 \times 23 = 230$.
Le tableau n'est pas un tableau de proportionnalité, donc la fonction f ne peut pas être linéaire.

28 **a.** $f(2) = 2^2 = 4$.
L'image de 2 par la fonction f est 4.
b. $f(3) = 3^2 = 9$.
c. $f(2) = 2 \times 2$ et $f(3) = 3 \times 3$
d. Pour obtenir l'image de 2 on le multiplie par 2 et pour obtenir l'image de 3 on le multiplie par 3. On ne multiplie pas par le même nombre donc la fonction f n'est pas une fonction linéaire.

29 **a.** Oui, $a = 0,5$ **b.** Non **c.** Oui, $a = -1$

d. Non **e.** Non **f.** Oui, $a = \dfrac{1}{4}$

30 • $P_1(x) = 7x + 2$.
On ne peut pas associer une fonction linéaire au programme P_1.

• $P_2(x) = 7x : 2 = \dfrac{7x}{2} = 3,5x$.

On peut associer la fonction linéaire de coefficient 3,5 au programme P_2.
• $P_3(x) = x + 4$.
On ne peut pas associer une fonction linéaire au programme P_3.

• $P_4(x) = x : 2 = \dfrac{1}{2}x$.

On peut associer la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{2}$ au programme P_4.

31 $-14 : 4 = -3,5$ et $35 : (-10) = -3,5$.
Donc $g(4) = -3,5 \times 4$ et $g(-10) = -3,5 \times (-10)$.
La fonction g peut être linéaire.
Dans ce cas, son coefficient est $-3,5$ donc $g(x) = -3,5x$.

32 **a.** Dans la cellule B1, il doit saisir =B2/5.
b. Dans la cellule B3, il doit saisir =B2*5.

33 **a.** $k\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} = 6.$

L'image de $\frac{9}{2}$ est 6.

b. On cherche un nombre x tel que $k(x) = 5$

C'est-à-dire $\frac{4}{3}x = 5.$

Ainsi $x = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}.$

L'antécédent de 5 est $\frac{15}{4}.$

34 **a.** $a \times 4 = 120$ donc $a = 120 : 4 = 30$
donc $f(x) = 30x$.
b. $a \times (-10) = 8$ donc $a = 8 : (-10) = -0{,}8$
donc $f(x) = -0{,}8x$.

35 $a \times 3 = 5$ donc $a = \frac{5}{3}$

donc $f(x) = \frac{5}{3}x.$

36 ● $a \times 6 = 5$ donc $a = \frac{5}{6}$ donc $f(x) = \frac{5}{6}x.$

● $a \times (-4) = \frac{8}{7}$ donc $a = \frac{8}{7} : (-4) = -\frac{8}{7\times4} = -\frac{2}{7}$ donc

$f(x) = -\frac{2}{7}x.$

● $a \times \frac{2}{3} = 5$ donc $a = 5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

donc $f(x) = \frac{15}{2}x.$

37 $2{,}5 = 5 : 2$ donc $f(2{,}5) = f(5) : 2 = 8 : 2 = 4.$
Marine a raison.
$7{,}5 = 5 + 2{,}5$ donc $f(7{,}5) = f(5) + f(2{,}5)$
Ainsi $f(7{,}5) = 8 + 4 = 12.$
Abdel a raison.

38 **a.** $p(x) = 2{,}5x$ donc p est la fonction linéaire de coefficient 2,5.
b.

x	0	1	**2,4**	4,5	**6**
$p(x)$	**0**	**2,5**	6	**11,25**	15

c. $p(5) = 2{,}5 \times 5 = 12{,}5.$
Pour la situation, cette égalité signifie que 5 kg d'abricots coûtent 12,50 €.

39 Cette situation peut être modélisée par la fonction $x \mapsto 9{,}95x + 3{,}90.$
Cette fonction n'est pas une fonction linéaire.

40 **a.** $P(x) = 2(2x + x) = 2 \times 3x = 6x.$
P est la fonction linéaire de coefficient 6.
b. $A(x) = 2x \times x = 2x^2.$
A n'est pas une fonction linéaire.

41 **a.**

Salaire annuel (en €)	12 000	15 000	18 000	21 000
Prime (en €)	**1 000**	**1 250**	**1 500**	**1 750**
Revenu total (en €)	**13 000**	**16 250**	**19 500**	**22 750**

b. $f(x) = x + \frac{1}{12}x = \frac{13}{12}x.$
f est la fonction linéaire de coefficient $\frac{13}{12}.$

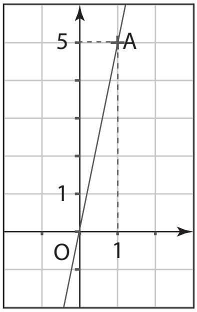
42 **a.** $h(10) = 16$ ainsi $a \times 10 = 16$
d'où $a = 16 : 10 = 1{,}6$ donc $h(x) = 1{,}6x.$
h est la fonction linéaire de coefficient 1,6.
b. $h(121) = 1{,}6 \times 121 = 193{,}6$
La distance entre Los Angeles et San Diego est 193,6 km.
c. $313 : 1{,}6 = 195{,}625$
La distance entre Lyon et Marseille est environ 196 miles.

43 **1. a.** $2\,030 \times \frac{12}{1\,680} = 14{,}5$
Lou a eu 14,5/20.
b. $20 \times \frac{1\,680}{12} = 2\,800$
Pour avoir 20/20, il faut parcourir 2 800 m.
2. D'après **1. a**, $N(2\,030) = 14{,}5.$
D'après **1. b**, $N(2\,800) = 20.$

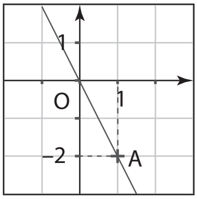
44 **a.** $f(t) = 900t.$
b. ● $f(1{,}5) = 900 \times 1{,}5 = 1\,350$
● $f(4) = 900 \times 4 = 3\,600$
● $f(5{,}5) = 900 \times 5{,}5 = 4\,950$
c. On cherche un nombre x tel que
$f(x) = 4\,050$ c'est-à-dire $900x = 4\,050.$
Ainsi $x = 4\,050 : 900 = 4{,}5.$
L'antécédent de 4 050 par la fonction f est 4,5.
L'avion parcourt 4050 km en 4,5 h c'est-à-dire en 4 h 30 min.

45 1 km/h correspond à $\frac{1}{1{,}852}$ nœud. Le coefficient de la fonction linéaire n est $\frac{1}{1{,}852}$ soit environ 0,54.

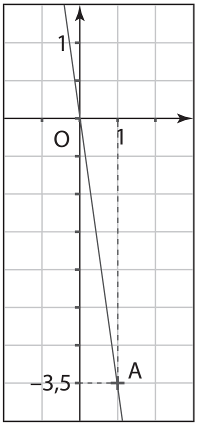
46 **a.** La droite représentant la fonction linéaire de coefficient 5 passe par l'origine du repère et par le point A (1 ; 5).



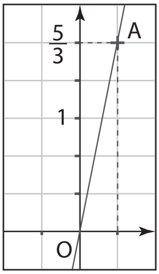
b. La droite représentant la fonction linéaire $g : x \mapsto -2x$ passe par l'origine du repère et par le point A (1 ; –2).



47 **a.** et **b.** La droite représentant la fonction linéaire $h : x \mapsto -3{,}5x$ passe par l'origine du repère et par le point A (1 ; –3,5).



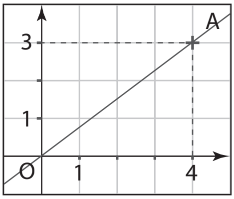
48 **a.** et **b.** La droite représentant la fonction linéaire k définie par $k(x) = \frac{5}{3}x$ passe par l'origine du repère et par le point A$\left(1 ; \frac{5}{3}\right)$.



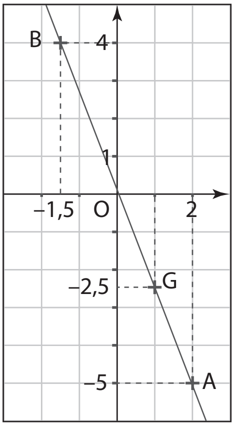
49 **a.** $f(4) = \frac{3}{4} \times 4 = 3$.

b. Le point A (4 ; 3) appartient à la droite (d).

c.



50 **a.** La droite représentant la fonction linéaire g définie par $g(x) = -2{,}5x$ passe par l'origine du repère et par le point G (1 ; –2,5).

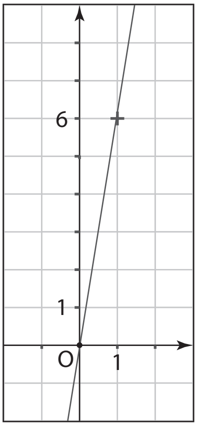


b. Sur le graphique, on lit que A a pour ordonnée – 5.
$g(2) = -2{,}5 \times 2 = -5$.

c. Sur le graphique, on lit que B a pour abscisse –1,5.
On cherche un nombre x tel que $g(x) = 4$.
C'est-à-dire tel que $-2{,}5x = 4$.
Ainsi $x = 4 : (-2{,}5) = -1{,}5$.

51 **a.** La droite (d) représentant la fonction linéaire de coefficient 6 passe par l'origine du repère et par le point de coordonnées (1 ; 6).

b. $6 \times 0{,}5 = 3$ donc le point A (0,5 ; 3) appartient à la droite (d).
$6 \times (-1{,}25) = -7{,}5$ donc le point B (–1,25 ; 7,5) n'appartient pas à la droite (d).



52 **a.** Le point A (6; 9) appartient à la droite représentant la fonction linéaire f donc $f(6) = 9$.

Ainsi $f(x) = \frac{9}{6}x = 1{,}5x$.

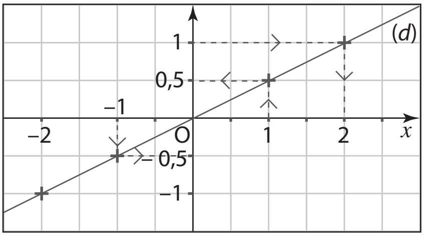
L'image de 9 est $1{,}5 \times 9$, c'est-à-dire 13,5.
L'affirmation est donc fausse.

b. $18 = 3 \times 6$, donc $f(18) = 3 \times f(6) = 3 \times 9 = 27$.
L'affirmation est donc vraie.

c. $2 = \frac{1}{3} \times 6$ donc $f(2) = \frac{1}{3} \times f(6) = \frac{1}{3} \times 9 = 3$.

L'affirmation est donc vraie.

53



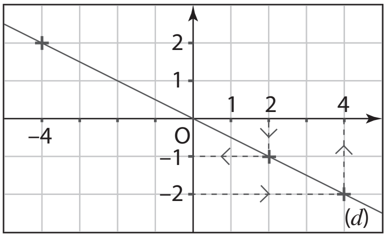
a. L'image de 1 par la fonction f est 0,5.

b. $f(-1) = -0{,}5$.

c. L'antécédent de 1 par la fonction f est 2.

54 **1.** La représentation graphique de la fonction f est une droite qui passe par l'origine du repère donc f est une fonction linéaire.

2.



a. L'image de 2 est –1.

b. L'antécédent de –2 est 4.

3. $f(x) = -0{,}5x$.

55 **a.** $f(-4) = -3$ donc $a = \frac{-3}{-4} = 0{,}75$.
$f(2) = 0{,}75 \times 2 = 1{,}5$.
Le résultat est cohérent avec la lecture graphique.

b. $f(-3) = 2$ donc $a = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$.

$f(2) = -\dfrac{2}{3} \times 2 = -\dfrac{4}{3}$.

Le résultat est cohérent avec la lecture graphique.

56 $f(1) = 3$ donc, pour f, $a = \dfrac{3}{1} = 3$.
Donc $f(x) = 3x$.

$g(3) = 1$ donc, pour g, $a = \dfrac{1}{3}$.

Donc $g(x) = \dfrac{1}{3}x$.

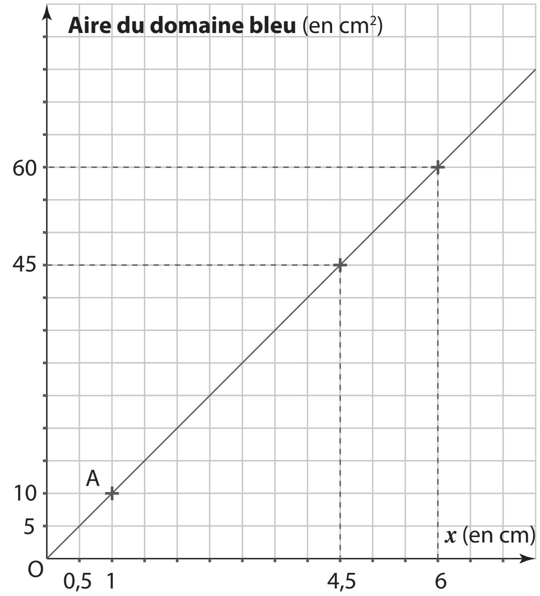
$h(-4) = 2$ donc, pour h, $a = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$.

Donc $h(x) = -\dfrac{1}{2}x$.

57 **1. a.** $A(x) = 12x - \dfrac{4x}{2} = 12x - 2x = 10x$.

b. La fonction A est la fonction linéaire de coefficient 10.

2. Dans un repère, lorsque $x \geqslant 0$, la fonction A est représentée par la demi-droite d'origine O passant par le point A (1 ; 10).



3. a. Le point de la demi-droite ayant pour abscisse 6 a pour ordonnée 60.
L'image de 6 est 60.

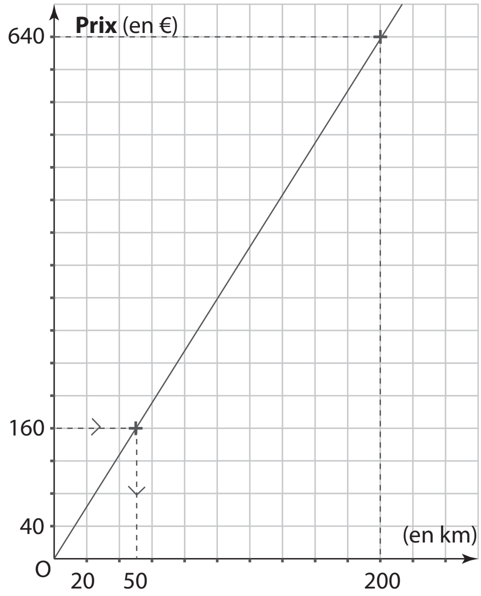
b. Le point de la demi-droite ayant pour ordonnée 45 a pour abscisse 4,5.
L'antécédent de 45 est 4,5.

58 **1.** $3{,}20 \times 200 = 640$.
Pour un trajet de 200 km, le prix à payer est 640 €.

2. a. $f(x) = 3{,}2x$.

b. On cherche un nombre x tel que $f(x) = 160$ c'est-à-dire tel que $3{,}2x = 160$.
Ainsi $x = 160 : 3{,}2 = 50$.
L'antécédent de 160 par f est 50.
On paye 160 € pour 50 km parcourus.

3. a. $f(200) = 640$.
Dans un repère, lorsque $x \geqslant 0$, la fonction f est représentée par la demi-droite d'origine O passant par le point de coordonnées (200 ; 640).



b. Le point de la demi-droite ayant pour ordonnée 160 a pour abscisse 50.

Je m'évalue à mi-parcours

59 c. **60** a. **61** b. **62** c. **63** b.

Avec un logiciel

64 **1.** Lorsque la température est multipliée par 2, le volume n'est pas multiplié par 2.
En effet, $10 = 5 \times 2$ mais $74{,}2 \neq 73 \times 2$.
Ce n'est pas une situation de proportionnalité, donc la fonction qui modélise cette situation n'est pas une fonction linéaire.

2. a. Dans la cellule C2, il faut saisir la formule =A2+273,15 .

b.

	A	B	C	D
1	T (en °C)	V (en cm³)	T_K (en K)	V/T_K
2	5	73	278,15	0,2624
3	10	74,2	283,15	0,2621
4	20	77	293,15	0,2627
5	30	79,5	303,15	0,2622
6	50	84,8	323,15	0,2624
7	70	90	343,15	0,2623
8	100	98	373,15	0,2626

Les quotients affichés dans la colonne D sont proches. Il semble que le volume est proportionnel à la température en kelvin.

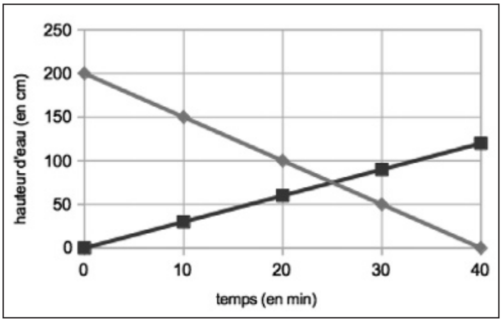
c. Une valeur approchée au millième près du coefficient de la fonction linéaire correspondant à l'expérience réalisée est 0,262.

65 **1. a.** Au départ, le réservoir A est vide et la hauteur d'eau augmente de 3 cm par minute. Au bout de x min, la hauteur d'eau dans le réservoir A est égale à $3x$ cm.
Donc $f(x) = 3x$.
Au départ, le réservoir B a une hauteur d'eau de 200 cm et la hauteur d'eau diminue de 5 cm par minute. Au bout de x min, la hauteur d'eau dans le réservoir B est égale à $200 - 5x$ cm.
Donc $g(x) = 200 - 5x$.
b. La fonction f est la fonction linéaire de coefficient 3.

2. a.

	A	B	C	D	E	F
1	**Temps** (en min)	0	10	20	30	40
2	**Hauteur d'eau dans le réservoir A** (en cm)	0	30	60	90	120
3	**Hauteur d'eau dans le réservoir B** (en cm)	200	150	100	50	0

b.



c. Le point d'intersection des deux segments a pour abscisse 25.
L'eau est à la même hauteur dans les deux réservoirs au bout de 25 minutes.

J'utilise mes compétences

66 $f(x) = 4(x + 3) - 12 = 4x + 12 - 12 = 4x$.
$f(x)$ peut s'écrire sous la forme ax donc la fonction f est une fonction linéaire.
Son coefficient est 4.

67 $g(49) = \frac{5}{7} \times 49 = 5 \times 7 = 35$.
L'image de 49 par la fonction g est 35.
$g(35) = \frac{5}{7} \times 35 = 5 \times 5 = 25$.
35 est donc aussi l'antécédent de 25.
Sofiane a raison.

68 D'après le graphique, $h(3) = 1$ donc h est la fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{3}$.
$\frac{1}{3} \times 16{,}48 = 5{,}46$ donc $A \in (d)$.
$\frac{1}{3} \times (-8{,}5) \neq -2{,}8$ donc $B \notin (d)$.

69 $f(x) = 2x$ et $g(2x) = -2 \times (2x) = -4x$.
On a donc :

$$\begin{tikzcd} & \boxed{2x} \arrow[dr, "g"] & \\ \boxed{x} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & \boxed{-4x} \end{tikzcd}$$

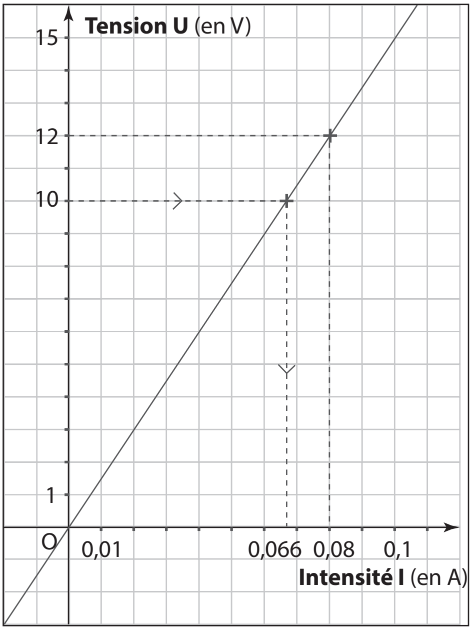
h est la fonction linéaire de coefficient -4.

70 **1. a.** À la vitesse de 1 m/s, on parcourt 1 m en 1 s donc 3 600 m en 3 600 s, c'est-à-dire 3,6 km en 1 h. Donc 1 m/s = 3,6 km/h.
b. $f(x) = 3{,}6x$.
f est la fonction linéaire de coefficient 3,6.
2. Pour convertir des km/h en m/s il faut diviser par 3,6 c'est-à-dire multiplier par $\frac{1}{3{,}6}$.
$\frac{1}{3{,}6} = \frac{5}{18}$ donc $g(x) = \frac{5}{18}x$.
g est la fonction linéaire de coefficient $\frac{5}{18}$.

71 $V(x) = \frac{1}{3} \times 4^2 \times x = \frac{16}{3}x$.
Cette situation peut être modélisée par la fonction linéaire de coefficient $\frac{16}{3}$.

72 **a.** D'après le théorème de Thalès, on a :
$\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE}$.
C'est-à-dire $\frac{AF}{AE} = \frac{7}{5} = \frac{BF}{CE}$.
Donc $AF = \frac{7}{5}AE$.
Ainsi $f(x) = \frac{7}{5}x$.
b. $AF = f(AE) = f(6) = \frac{7}{5} \times 6 = 8{,}4$.
$BF = f(CE) = f(5{,}5) = \frac{7}{5} \times 5{,}5 = 7{,}7$.

73 **1. a.** $\frac{3}{0{,}02} = \frac{4{,}5}{0{,}03} = \frac{6}{0{,}04} = \frac{12}{0{,}08} = 150$.
Ce tableau est un tableau de proportionnalité.
b. Le coefficient de proportionnalité est 150.
c. $150 \times 0{,}07 = 10{,}5$.
Si l'intensité I est égale à 0,07 A, la tension U est égale à 10,5 V.
2. La fonction f modélise une situation de proportionnalité donc f est une fonction linéaire.
Son coefficient est 150 donc $f(I) = 150 \times I$.
3. a. et **b.** La représentation graphique de la fonction f est la droite passant par l'origine du repère et par le point (0,08 ; 12).



4. a. Quand U = 10 V, on lit sur le graphique I ≈ 0,0066 A.
b. On cherche la valeur de I pour laquelle
$f(\mathrm{I}) = 10$ c'est-à-dire $150 \times \mathrm{I} = 10$.

Ainsi $\mathrm{I} = \dfrac{10}{150} = \dfrac{1}{15}$.

Quand U = 10 V, l'intensité I est égale à $\dfrac{1}{15}$ A.

74 **1. a.** $0 < x < 15$.
b. Les droites (PM) et (AC) sont perpendiculaires à la droite (AB), elles sont donc parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BC}}$

C'est-à-dire $\dfrac{x}{15} = \dfrac{\mathrm{PM}}{8}$.

Donc $\mathrm{PM} = \dfrac{8}{15}x$.

c. Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore on a l'égalité suivante : $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$
C'est-à-dire $\mathrm{BC}^2 = 152 + 82 = 289$
D'où $\mathrm{BC} = \sqrt{289} = 17$ cm.

On a donc $\dfrac{x}{15} = \dfrac{\mathrm{BM}}{17}$ d'où $\mathrm{BM} = \dfrac{17}{15}x$.

2. a. Le périmètre du triangle MBP est égal à BP + PM + BM.

Donc $p(x) = x + \dfrac{8}{15}x + \dfrac{17}{15}x$.

Ainsi $p(x) = \dfrac{15}{15}x + \dfrac{8}{15}x + \dfrac{17}{15}x = \dfrac{40}{15}x$.

D'où $p(x) = \dfrac{8}{3}x$.

p est la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{8}{3}$.

b. $\dfrac{8}{3}x$ est un nombre entier lorsque x est un multiple de 3.
Comme $0 < x < 15$, le périmètre de MBP est égal à un nombre entier de cm lorsque x est égal à 3 ou 6 ou 9 ou 12 cm.

75 **1. a.** Le mousseur permet d'économiser 20 L d'eau par douche. Pour x douches, on économise $20x$ L d'eau.
b. 1 m^3 = 1 000 L = 50 × 20 L
20 L d'eau chaude reviennent donc à 5,50 : 50, soit 0,11 €.
Le mousseur permet donc d'économiser 0,11 € par douche.
Donc $g(x) = 0{,}11x$.
2. a. $g(4) = 0{,}11 \times 4 = 0{,}44$
La famille économise 0,44 € par jour.
10,95 : 0,44 ≈ 24,9.
La famille aura remboursé l'achat du mousseur en 25 jours.
b. 4 × 365 = 1 460.
La famille prend 1 460 douches par an.
$g(1\,460) = 0{,}11 \times 1\,460 = 160{,}6$.
Sur une année, la famille économise 160,60 €.

76 **1.** P = 70 × 9,8 = 686.
Sur la Terre, le poids d'un homme de 70 kg est 686 newtons.
2. a. 17 : 10 = 1,7.
L'accélération de la pesanteur sur la Lune est 1,7.
b. 9,8 : 1,7 ≈ 5,8
5,8 est proche de 6, donc l'affirmation est exacte.

77 • **Traduction :**
Pour son voyage à Londres, Mateo a changé 200 € en 147 £.
Il a regardé sur Internet le prix de trois vêtements qu'il veut acheter.

	Veste	Jean	Sweat
Prix à Paris	140 €	90 €	40 €
Prix à Londres	100 £	65 £	30 £

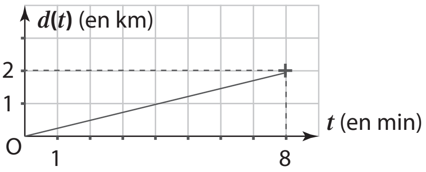
Quels vêtements devrait-il plutôt acheter à Londres ?
• **Solution :**
147 : 200 = 0,735.
La conversion des euros en livres peut être modélisée par la fonction linéaire f de coefficient 0,735.
$f(140) = 0{,}735 \times 140 = 102{,}9$ et $102{,}9 > 100$
$f(90) = 0{,}735 \times 90 = 66{,}15$ et $66{,}15 > 65$
$f(40) = 0{,}735 \times 40 = 29{,}4$ et $29{,}4 < 30$
Il vaut mieux acheter la veste et le jean à Londres.

78 **a.** Louise parcourt 15 km en 60 min donc, en 1 min, elle parcourt $\dfrac{15}{60}$ km c'est-à-dire $\dfrac{1}{4}$ km.

Ainsi $d(t) = \dfrac{1}{4}t$ ou $0{,}25t$.

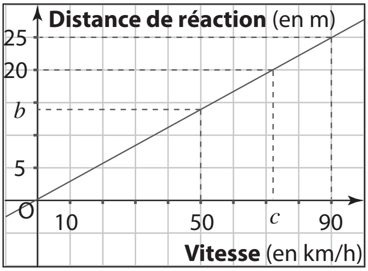
b. $d(8) = \dfrac{1}{4} \times 8 = 2$

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction d pour t compris entre 0 et 8 est un segment ayant pour extrémités l'origine du repère et le point de coordonnées (8 ; 2).



79 **a.** $d(90) = \dfrac{5}{18} \times 90 = 25$.

Dans un repère, la fonction d est représentée par la droite passant par l'origine et par le point de coordonnées (90 ; 25).



b. À une vitesse de 50 km/h, on lit sur le graphique une distance de réaction $b \approx 14$ m.

c. La distance de réaction dépasse 20 m pour une vitesse supérieure à $c \approx 72$ km/h.

80 Le volume d'eau (en m^3) contenu dans la piscine pour une hauteur d'eau h (en cm) est :

$\mathscr{V} = 2{,}5 \times 8 \times \dfrac{h}{100} = 0{,}2h$.

La pompe a un débit de 25 L par minute soit 25 × 60 L par heure c'est-à-dire 1 500 L/h.
1 500 L = 1,5 m^3.
Pour une durée t de remplissage (en h), le volume d'eau (en m^3) contenu dans la piscine est : $\mathscr{V} = 1{,}5t$

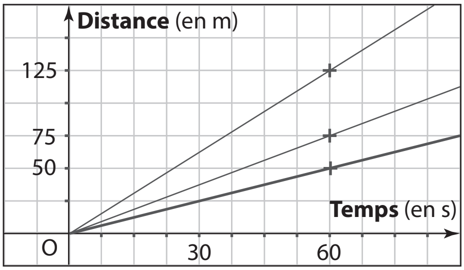
$0{,}2h = 1{,}5t$ donc $h = \dfrac{1{,}5}{0{,}2}t$ soit $h = 7{,}5t$.

81 **1. a.** $f(5) + f(2) = 1{,}5 \times 5 + 1{,}5 \times 2 = 7{,}5 + 3 = 10{,}5$
$f(5 + 2) = 1{,}5 \times (5 + 2) = 1{,}5 \times 7 = 10{,}5$
Donc $f(5) + f(2) = f(5 + 2)$.
b. $f(x) + f(x') = 1{,}5x + 1{,}5x' = 1{,}5(x + x')$
Donc pour tous nombres x et x', on a :
$f(x) + f(x') = f(x + x')$.

2. a. $3 \times f(4) = 3 \times 1{,}5 \times 4 = 3 \times 6 = 18$
$f(3 \times 4) = f(12) = 1{,}5 \times 12 = 18$
Donc $3 \times f(4) = f(3 \times 4)$.
b. $k \times f(x) = k \times 1{,}5 \times x = 1{,}5 \times k \times x$
Donc pour tous nombres k et x, on a :
$k \times f(x) = f(k \times x)$.

82 En 60 s, une personne marchant sur le tapis parcourt 125 m et une personne marchant à côté du tapis parcourt 75 m soit 50 m de moins. La vitesse du tapis est donc de 50 m par minute.

La demi-droite correspondant à la personne immobile sur le tapis est celle qui passe par le point (60 ; 50).



83 $91 : (-78) = -\dfrac{7}{6}$; $-105 : 90 = -\dfrac{7}{6}$

La droite (AB) représente la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{7}{6}$.

84 On note R le rayon du disque et c le côté du carré. L'aire du carré est c^2 donc, si x est l'aire du carré, son côté c est $\sqrt{x}$.
Le rayon du disque est la moitié du côté du carré donc $R = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

L'aire du disque est $\pi \times R^2$ donc $\pi \times \left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$

c'est-à-dire $\pi \times \dfrac{x}{4}$.

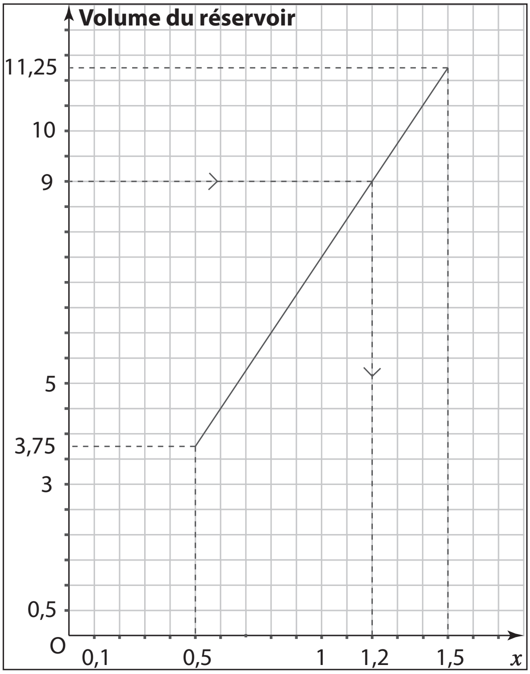
Ainsi $f(x) = \dfrac{\pi}{4}x$.

f est la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{\pi}{4}$.

Dossier Brevet

85 **a.** L'image de 2 par la fonction f est 1.
b. $f(-1) = -0{,}5$.
c. L'antécédent de 2 par la fonction f est 4.
d. $f(x) = -1$ pour $x = -2$.

86 **a.** Le volume du réservoir est égal à $3 \times 2{,}5 \times x$ c'est-à-dire à $7{,}5x$.
Il peut donc être modélisé par la fonction $f : x \mapsto 7{,}5x$.
Cette fonction est la fonction linéaire de coefficient 7,5.
b. $f(0{,}5) = 7{,}5 \times 0{,}5 = 3{,}75$; $f(1{,}5) = 7{,}5 \times 1{,}5 = 11{,}25$
Pour $0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5$, la fonction f est représentée par le segment ayant pour extrémités les points (0,5 ; 3,75) et (1,5 ; 11,25).



c. L'antécédent de 9 par la fonction f est 1,2.
Le réservoir a un volume de 9 m³ lorsque x est égal à 1,2 m.

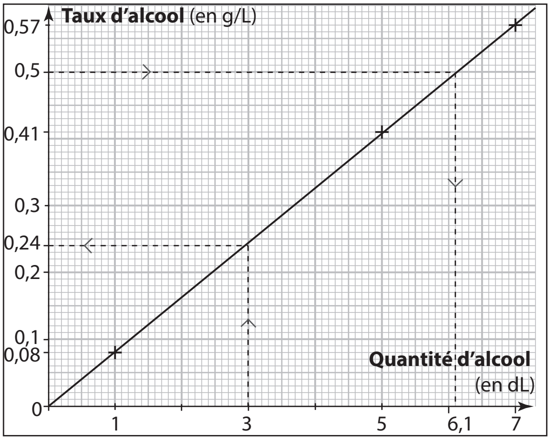
87 **1. a.** Le taux d'alcool est égal à $\dfrac{2 \times 330 \times 0,05 \times 0,8}{60 \times 0,7}$ soit environ 0,63 g/L.

b. 0,63 > 0,5 donc cette personne n'a pas le droit de conduire.

2. a.

Quantité d'alcool (en dL)	0	1	5	7
Taux d'alcool (en g/L)	**0**	**0,08**	**0,41**	**0,57**

b.



3. a. Pour une quantité de bière de 3 dL, on lit un taux d'alcool d'environ 0,24 g/L.

b. Cet homme n'est plus autorisé à conduire lorsque son taux d'alcool dépasse 0,5 g/L.

Sur le graphique, on lit que cela se produit à partir de 6,1 dL de bière.

88 **1.** $4 \times 115 \times 365 = 167\,900$
Cette famille consomme environ 168 000 L d'eau par an soit 168 m³.
$60\,\% \times 168 = 100,8$
Les besoins en eau de pluie de cette famille sont d'environ 100 m³.

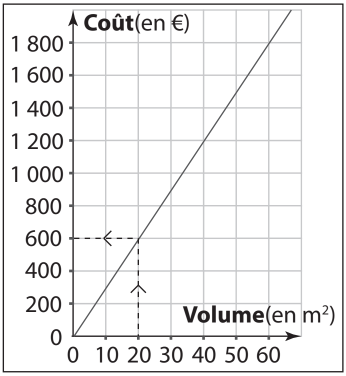
2. a. D'après le graphique, 100 m³ d'eau coûtent 250 €.

b. Le graphique est une demi-droite qui passe par l'origine du repère donc la fonction p est une fonction linéaire.
$p(100) = 250$ donc le coefficient de cette fonction linéaire est 250 : 100 soit 2,5.
Donc $p(x) = 2,5x$.

89 **a.** $f(x) = 0,18x$ et $g(x) = 15 + 0,15x$.
La fonction f est la fonction linéaire de coefficient 0,18.

b. $f(x) = g(x)$ pour x tel que
$0,18x = 15 + 0,15x$
C'est-à-dire $0,03x = 15$
Donc $x = 15 : 0,03 = 500$.
Pour une consommation de 500 KWh, on paie le même prix avec les deux tarifs.

90 **a.**



Le coût d'un déménagement de 20 m³ est 600 €.

b. La représentation graphique est une demi-droite qui passe par l'origine du repère donc le coût est proportionnel au volume transporté.

c. $g(20) = 600$ donc le coefficient de la fonction linéaire g est 600 : 20 soit 30.
Donc $g(x) = 30x$.

91 **a.** 1 h 30 min = 90 min.
$0,10 \times 90 = 9$
Avec le tarif 1, Sarah paiera 9 €.
Avec le tarif 2, on lit sur le graphique qu'elle paiera plus de 9 €. Le tarif le plus avantageux pour Sarah est le tarif 1.

b. 12 : 0,10 = 120
Pour 12 €, avec le tarif 1, Arash peut téléphoner 120 min à l'étranger.
Avec le tarif 2, on lit sur le graphique que, pour 12 €, on peut téléphoner pendant 130 min.
Le tarif le plus avantageux pour Arash est le tarif 2.

92 Sur le graphique, on lit que 2 bars correspondent à un peu moins de 30 PSI.
36 PSI correspondent à environ 2,5 bars.
Jenane doit augmenter la pression des pneus de sa voiture de 0,5 bar.

93 **a.** En réduisant sa vitesse de 130 km/h à 110 km/h, Léa économise 0,02 L par km.
Sur 300 km, elle économise $0{,}02 \times 300$ soit 6 L de SP98.
En réduisant sa vitesse de 110 km/h à 90 km/h, Léa économise 0,01 L par km.
Sur 150 km, elle économise $0{,}01 \times 150$ soit 1,5L de SP98.
Sur le trajet sur autoroute, elle économise
$6 + 1{,}5$ soit 7,5 L de SP98.
$7{,}5 \times 1{,}30 = 9{,}75$
Elle économisera 9,75 € de carburant.
b. À la vitesse de 130 km/h, on parcourt 300 km en $\frac{300}{130}$ h soit environ 2,31 h.
À la vitesse de 110 km/h, on parcourt 300 km en $\frac{300}{110}$ h soit environ 2,73 h.
$2{,}73 - 2{,}31 = 0{,}42$
Sur la partie limitée à 130 km/h, en roulant à 110 km/h au lieu de 130 km/h, elle met 0,42 h de plus.
À la vitesse de 110 km/h, on parcourt 150 km en $\frac{150}{110}$ h soit environ 1,36 h.

À la vitesse de 90 km/h, on parcourt 150 km en $\frac{150}{90}$ h soit environ 1,67 h.
$1{,}67 - 1{,}36 = 0{,}31$
Sur la partie limitée à 110 km/h, en roulant à 90 km/h au lieu de 110 km/h, elle met 0,31 h de plus.
$0{,}42 + 0{,}31 = 0{,}73$
$0{,}73\text{ h} = 0{,}73 \times 60\text{ min} = 43{,}8\text{ min}$
Elle mettra environ 44 min de plus.

CHAPITRE 8

Connaître les fonctions affines

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le cycle 3 et le début du cycle 4

- Le thème « Organisation et gestion de données, fonctions » n'apparaît pas dans les programmes de cycle 3. Les élèves ont cependant été amenés à pratiquer des activités préparant à l'étude des fonctions : production et utilisation de tableaux et de graphiques, résolution de problèmes impliquant des grandeurs, reconnaissance de situations de proportionnalité.
- Dès le début du cycle 4, des études de relations entre deux grandeurs ont amené les élèves à reconnaître des situations de proportionnalité ou de non-proportionnalité. Ces relations ont été exprimées par des formules, des graphiques ou des tableaux.
- La notion de fonction, le vocabulaire (image, antécédent, fonctions linéaires et affines) et les notations sont des éléments nouveaux étudiés en classe de 3^{e}.

Remarques : La notion de fonction, le vocabulaire (image, antécédent) et les notations ont été introduits dans le chapitre 6. Le cas des fonctions linéaires liées aux situations de proportionnalité a été traité dans le chapitre 7 précédent.

2 Je découvre

Activité 1

L'objectif de cette activité est de définir la notion de fonction affine par son expression caractéristique : $x \mapsto ax + b$ où a et b sont des nombres donnés.
À partir d'une situation à support concret, on propose, conformément au programme, de « modéliser des phénomènes continus par une fonction ». Cette activité est aussi l'occasion de montrer aux élèves que les fonctions linéaires et constantes sont des cas particuliers de fonctions affines.
La question **d.** fait apparaître une situation de proportionnalité entre la différence du nombre de séances et la différence de prix. Le professeur pourra mettre en évidence que, g étant la fonction $x \mapsto 4x + 48$, si x augmente de 3, $g(x)$ augmente de 4×3.

Activité 2

L'objectif de cette activité est de faire comprendre aux élèves comment obtenir la représentation graphique d'une fonction affine. On propose, ici aussi, une situation à support concret qui présente l'avantage de ne pas porter uniquement sur des valeurs entières ou positives. On s'appuie sur la représentation graphique de la fonction linéaire associée (vue au chapitre 7) et sur la notion de translation (vue en milieu de cycle).

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

- Suite à l'activité 1, on peut étudier le paragraphe 1 « Fonction affine ».
- Suite à l'activité 2, on peut étudier le paragraphe 2 « Représentation graphique d'une fonction affine ».

Exercice résolu

Cet exercice présente le calcul d'une image et la détermination de l'antécédent d'un nombre par une fonction affine.
Dans la solution, on propose une démarche numérique pour le calcul de l'image et une démarche algébrique avec la résolution d'une équation pour la détermination de l'antécédent.
Dans nos conseils, l'utilisation de schémas peut aider les élèves à comprendre le sens des calculs effectués et à bien distinguer les deux types de raisonnements.

4 Compléments

Fonctions affines

Les exercices 10 et 11 de la rubrique « À L'oral » et les exercices 25 et 26 de la rubrique « Je m'entraîne » permettent de familiariser les élèves avec la reconnaissance d'une fonction affine à partir de son expression algébrique.
Des programmes de calcul, souvent utilisés dès le début du cycle 4, sont associés à des fonctions dans les exercices 8 et 9 de la rubrique « À L'oral » et dans l'exercice 22 de la rubrique « Je m'entraîne ».
De nombreux exercices entraînent les élèves à calculer des images et à déterminer des antécédents, en particulier les exercices de la page « J'applique le cours », les exercices 12 et 13 de la rubrique « À L'oral » et l'exercice 19 de la rubrique « Calcul mental ».
Les exercices 24, 27 et 35 proposent des exemples d'utilisation du tableur en lien avec les fonctions affines.

Modélisations de situations

L'étude des fonctions affines permet de travailler particulièrement la compétence « modéliser ».
Conformément au programme, plusieurs exercices entraînent les élèves à « modéliser des phénomènes continus par une fonction » dans les différentes rubriques de ce chapitre.
On peut proposer l'exercice 23 puis les exercices 28 à 33 de « Je m'entraîne » pour familiariser les élèves avec la démarche de modélisation.

Représentations graphiques

Dans plusieurs exercices de ce chapitre, les élèves sont amenés à lire, tracer et interpréter des représentations graphiques de fonctions affines.
Des lectures graphiques d'images et d'antécédents sont proposées dans les exercices 16, 36 et 37.
Les exercices 38 à 40 sont consacrés au tracé de la représentation graphique d'une fonction affine à partir de la détermination des coordonnées de deux points de la droite.
Les exercices 17, 20, 40 et 41 permettent de lier formule et graphique.
Conformément au programme, dans les exercices 42 à 49, les élèves sont amenés à « lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite ». On commence par une lecture guidée puis on détermine l'expression algébrique de la fonction à partir de sa représentation graphique. Dans les exercices 50 et 51, on utilise les coefficients d'une fonction affine pour tracer sa représentation graphique.
Les exercices 54 et 55 permettent d'interpréter graphiquement une résolution d'équation.

Résolutions de problèmes

Dans la rubrique « J'utilise mes compétences », de nombreux exercices permettent de travailler la compétence « Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions » en utilisant différents modes de représentations.

Dossier Brevet

- L'exercice 87 permet d'étudier et de commenter le calcul de l'impôt sur le revenu avec un exemple de fonction affine par morceaux. Les élèves sont amenés à comparer deux situations pour lesquelles les méthodes de calcul sont différentes.
- L'exercice 88 propose une comparaison entre le poids idéal et les poids minimal et maximal conseillés. À la question **a.**, les élèves devront transformer l'expression donnée pour reconnaître que le poids idéal peut être modélisé par une fonction affine et tracer sa représentation graphique.

La question **b.** permet de réinvestir la notion de moyenne.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. b. et **c.** ; **2. a.** et **b.** ; **3. b.** et **c.** ; **4. b.** ; **5. b.**

Je découvre

Activité 1

a.

	Prix (en €) **payé pour 5 séances**	**Prix** (en €) **payé pour 10 séances**	**Prix** (en €) **payé pour 15 séances**
Tarif A	60	120	180
Tarif B	68	88	108
Tarif C	100	100	100

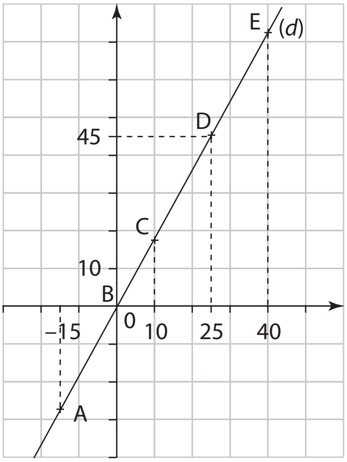
b. $f(x) = 12x$
$g(x) = 4x + 48$
$h(x) = 100$

c. f est une fonction affine car $f(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 12$ et $b = 0$.
g est une fonction affine car $g(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 4$ et $b = 48$.
h est une fonction affine car $h(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 0$ et $b = 100$.

d. Avec le tarif B, on paye 4 € par séance.
Jeanne a vu trois séances de plus que Lorna, elle a donc payé 3×4 €, c'est-à-dire 12 € de plus.

Activité 2

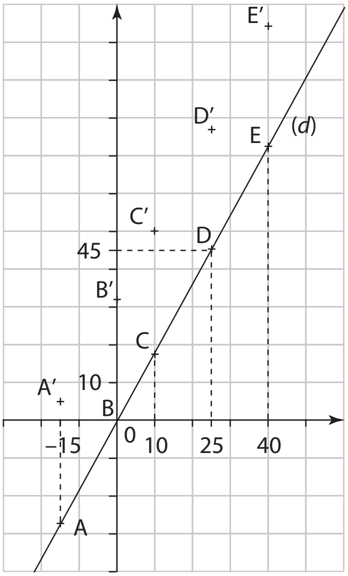
1 a., b. g est la fonction linéaire de coefficient 1,8.
$g(25) = 1{,}8 \times 25 = 45$
Dans un repère, sa représentation graphique est la droite (d) qui passe par l'origine et par le point (25 ; 45).



2 a.

Point	A′	B′	C′	D′	E′
Abscisse x	− 15	0	10	25	40
Ordonnée $1{,}8x + 32$	5	32	50	77	104

b.



Les points A′, B′, C′, D′ et E′ semblent alignés.

c. On passe de A à A′, de B à B′, de C à C′, de D à D′ et de E à E′ par une même translation (glissement vertical vers le haut de 3,2 cm).

d. La représentation graphique de la fonction affine f est obtenue par translation de la droite (d) : c'est donc une droite parallèle à (d).

J'applique le cours

2 **a.** $f(-4) = -3 \times (-4) + 2 = 12 + 2 = 14$
L'image de -4 par f est 14.

b. On cherche un nombre x tel que $f(x) = 5$, c'est-à-dire tel que $-3x + 2 = 5$,
$-3x = 5 - 2$
$-3x = 3$
Ainsi $x = \dfrac{3}{-3} = -1$.
L'antécédent de 5 par f est -1.

3 **1. a.** $g(2) = 4 \times 2 + 3 = 8 + 3 = 11$
L'image de 2 par g est 11.
b. $g(0) = 4 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3$
L'image de 0 par g est 3.
c. $g(-8) = 4 \times (-8) + 3 = -32 + 3 = -29$
L'image de -8 par g est -29.

2. a. On cherche un nombre x tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire tel que $4x + 3 = 0$,
$4x = 0 - 3$
$4x = -3$
Ainsi $x = \dfrac{-3}{4} = -\dfrac{3}{4}$.
L'antécédent de 0 par g est $-\dfrac{3}{4}$.

b. On cherche un nombre x tel que $g(x) = 9$, c'est-à-dire tel que $4x + 3 = 9$,
$4x = 9 - 3$
$4x = 6$
Ainsi $x = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.
L'antécédent de 9 par g est $\dfrac{3}{2}$.

c. On cherche un nombre x tel que $g(x) = -1$, c'est-à-dire tel que $4x + 3 = -1$,
$4x = -1 - 3$
$4x = -4$
Ainsi $x = \dfrac{-4}{4} = -1$.
L'antécédent de -1 par g est -1.

4

x	-1	**$-0,5$**	0	**$0,8$**	$1,6$	**3**
$h(x)$	**-9**	$-6,5$	**-4**	0	**4**	11

5 **a.** $k(8) = 2 \times 8 - 7 = 16 - 7 = 9$

b. Le nombre qui a pour image -9 est le nombre x tel que $k(x) = -9$, c'est-à-dire tel que $2x - 7 = -9$,
$2x = -9 + 7$
$2x = -2$
Ainsi $x = \dfrac{-2}{2} = -1$.
Le nombre qui a pour image -9 par k est -1.

6 Amar a tort car, par exemple, l'image de -1 par g est $-2 \times (-1) - 1$ c'est-à-dire $2 - 1$ soit 1.

7 **a.** Pour calculer l'image d'un nombre par f, il faut appliquer le programme 2.
b. Pour déterminer l'antécédent d'un nombre par f, il faut appliquer le programme 4.

À l'oral

8 Pour calculer l'image d'un nombre par la fonction f, on **multiplie** ce nombre par **2** puis on **ajoute 3**.

9 **a.** • Choisir un nombre.
• Multiplier par 3.
• Soustraire 4.

b. • Choisir un nombre.
• Diviser par 2.
• Ajouter 5.

c. • Choisir un nombre.
• Multiplier par -7.
• Ajouter 2.

10 **a.** $a = 1$ et $b = 3$.
b. $a = 2$ et $b = -1$.
c. $a = -5$ et $b = 2$.
d. $a = 1$ et $b = 0$.
e. $a = 0$ et $b = 7$.
f. $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = 0$.
g. $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = -1$.
h. $a = -1$ et $b = -\dfrac{3}{4}$.
i. $a = -0,5$ et $b = 7$.

11 **a.** Les fonctions h et i sont des fonctions linéaires.
b. Les fonctions g et j sont des fonctions affines non linéaires.

12 **a.** On calcule l'image de -1.
b. On calcule l'antécédent de 7.
c. On calcule l'image de 2.

13 **1. b.** L'image du nombre 5 est 11.
2. a. L'image du nombre 1 est -1.
3. c. L'antécédent du nombre 0 est $\dfrac{4}{3}$.
4. b. L'antécédent du nombre 5 est 3.

14 **a.** Yanis a raison. Pour f, $a = 4$ et $b = -5$.
Pour g, $a = -1$ et $b = 0$.
Pour h, $a = 0$ et $b = -1$.

b. $f(1) = 4 \times 1 - 5 = 4 - 5 = -1$
$g(1) = -1$ et $h(1) = -1$
Ilona a raison.

15 **a.** Le graphique n'est pas une droite donc il ne peut pas représenter une fonction affine.
b. Le graphique est une droite donc il peut représenter une fonction affine.
c. Le graphique n'est pas une droite donc il ne peut pas représenter une fonction affine.

16 **1.** f_3 est linéaire car sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.
f_1 est constante car sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.
2. a. L'image de 1 par f_1 : 2 ; par f_2 : 1 ; par f_3 : 3.
b. L'antécédent de 3 par f_2 : 0 ; par f_3 : 1.
3 n'a pas d'antécédent par f_1.

17 **a. Vrai** car $5 \times 2 - 1 = 9$.
b. Faux car $5 \times (-1) - 1 \neq 4$.
c. Vrai car $5 \times 0{,}2 - 1 = 0$.
d. Vrai car $a = 5$.
e. Faux car $b = -1$.

18 **a.** Lorsque x augmente de 1, $g(x)$ augmente de 7.
b. Lorsque x augmente de 1, $g(x)$ diminue de 4.
c. Lorsque x augmente de 1, $g(x)$ augmente de $\frac{1}{5}$.
d. Lorsque x augmente de 1, $g(x)$ diminue de $\frac{2}{3}$.

Cacul mental

19 **1. a.** $f(-3) = -21$ **b.** $f(0) = -9$
c. $f(0{,}5) = -7$ **d.** $f(-0{,}25) = -10$
2. a. 3 **b.** $\frac{9}{4}$ **c.** 2 **d.** 4 **e.** -2

20 **a.** L'ordonnée du point A est -3.
b. L'abscisse du point B est -1.

Je m'entraîne

21 **a.** La fonction représentée par le schéma est $f_2 : x \mapsto 3x + 4$.
b. $f_2(-1) = 3 \times (-1) + 4 = -3 + 4 = 1$
L'image de -1 par cette fonction est 1.

22 **a.** Pour le programme 1 : $f_1(x) = 7x - 2$.
Pour le programme 2 : $f_2(x) = \frac{1}{2}x + 7$.
Pour le programme 3 : $f_3(x) = x + 7$.
Pour le programme 4 : $f_4(x) = x_2 + 2$.
b. Les programmes 1, 2 et 3 correspondent à une fonction affine.

23 **a.** $p(x) = 25 + 0{,}25x$.
$a = 0{,}25$ et $b = 25$. p est une fonction affine.
b. $p(x) = 15$.
$a = 0$ et $b = 15$. p est une fonction affine.
Puisque $a = 0$, p est une fonction constante.
c. $p(x) = 2x + 10$.
$a = 2$ et $b = 10$. p est une fonction affine.
d. $p(x) = 4x$.
$a = 4$ et $b = 0$. p est une fonction affine.
Puisque $b = 0$, p est une fonction linéaire.

24 **a.** Dans la cellule B2, il a tapé =2*B1-5.
b. $g(6) = 2 \times 6 - 5 = 12 - 5 = 7$
c. $g(4) = 3$ signifie que 3 a pour antécédent 4 par la fonction g.

25 **a.** $g(x) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
b. g est une fonction affine avec $a = -\frac{3}{5}$ et $b = \frac{4}{5}$.

26 **a.** $f(x) = \frac{3}{2}(2x - 5) = \frac{3}{2} \times 2x - \frac{3}{2} \times 5$
Donc $f(x) = 3x - \frac{15}{2}$.
f est une fonction affine avec $a = 3$ et $b = \frac{15}{2}$ ou 7,5.
b. $g(x) = (x - 2)^2 - x^2 = x^2 - 4x + 4 - x^2$
Donc $g(x) = -4x + 4$.
g est une fonction affine avec $a = -4$ et $b = 4$.

27 **a.** Dans la colonne C, on lit que l'image de -2 par la fonction f est 7.
b. Dans la colonne F, on lit que l'antécédent de -2 par la fonction f est 1.
c. $f(x) = -3x + 1$.
d. $f(10) = -3 \times 10 + 1 = -30 + 1 = -29$.

28 **a.** $f(x) = 0{,}05x + 5$. f est une fonction affine avec $a = 0{,}05$ et $b = 5$.
b. $f(400) = 0{,}05 \times 400 + 5 = 20 + 5 = 25$
Le montant d'une commande de 400 Go est 25 €.
c. L'antécédent de 15 par la fonction f est le nombre x tel que $f(x) = 15$, c'est-à-dire $0{,}05x + 5 = 15$
$0{,}05x = 15 - 5$
$0{,}05x = 10$
Ainsi $x = \frac{10}{0{,}05} = 200$
L'antécédent de 15 par la fonction f est 200.
15 € est le montant d'une commande de 200 Go.

29 **1.** $C(x) = 900 + 40x$
2. a. • $C(120) = 900 + 40 \times 120$
$C(120) = 900 + 4\,800 = 5\,700$
• L'antécédent de 4 500 par la fonction C est le nombre x tel que $C(x) = 4\,500$, c'est-à-dire $900 + 40x = 4\,500$
$40x = 4\,500 - 900$
$40x = 3\,600$
Ainsi $x = \frac{3\,600}{40} = 90$
L'antécédent de 4 500 par la fonction C est 90.

b. • $C(120) = 5\,700$ signifie que pour refaire une toiture de 120 m² le coût est de 5 700 €.

• Le fait que l'antécédent de 4 500 par la fonction C soit 90 signifie qu'avec un budget de 4 500 € on peut refaire une toiture de 90 m².

30 $p(x) = 10 + 0{,}5x$

a. $p(35) = 10 + 0{,}50 \times 35 = 10 + 17{,}5 = 27{,}5$

Pour 35 livres empruntés, on paye 27,50 €.

b. On note x le nombre de livres empruntés.

x est tel que $p(x) = 19$, c'est-à-dire $10 + 0{,}5x = 19$

$0{,}5x = 19 - 10$

$0{,}5x = 9$ ainsi $x = \dfrac{9}{0{,}5} = 18$

Avec un budget de 19 €, Guillaume peut emprunter 18 livres dans l'année.

c. D'après **a.**, $p(35) = 27{,}5$.

D'après **b.**, $p(18) = 19$.

31 **1.** A et B appartiennent au cercle de centre O donc le triangle AOB est isocèle en O.

Donc $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = x$.

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° donc $m(x) = \widehat{AOB} = 180 - 2x$.

Lola a raison.

2. a. • $m(15) = 180 - 2 \times 15 = 180 - 30$ donc $m(15) = 150$.

• L'antécédent de 60 par m est le nombre x tel que $m(x) = 60$.

C'est-à-dire $180 - 2x = 60$.

$-2x = 60 - 180$

$-2x = -120$

Ainsi $x = \dfrac{-120}{-2} = 60$.

L'antécédent de 60 par m est 60.

b. • Le fait que l'image de 15 par m soit 150 signifie que lorsque l'angle $\widehat{OAB}$ mesure 15°, l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 150°.

• Le fait que l'antécédent de 60 par m soit 60 signifie que lorsque l'angle $\widehat{OAB}$ mesure 60°, l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 60°. Dans ce cas là, le triangle AOB est équilatéral.

32 **a.** ❶ L'aire $A(x)$ du domaine coloré en vert est égale à $2x + \dfrac{(7-2)x}{2}$.

Donc $A(x) = 2x + 2{,}5x$, c'est-à-dire $A(x) = 4{,}5x$.

❷ L'aire $B(x)$ du domaine coloré en vert est égale à $\dfrac{4(9-x)}{2}$. Donc $B(x) = 2(9-x)$, c'est-à-dire $B(x) = 18 - 2x$.

❸ L'aire $C(x)$ du domaine coloré en vert est égale à $\dfrac{6(4+x)}{2}$. Donc $C(x) = 3(4+x)$, c'est-à-dire $C(x) = 12 + 3x$.

b. ❶ La fonction A est affine avec $a = 4{,}5$ et $b = 0$. C'est une fonction linéaire.

❷ La fonction B est affine avec $a = -2$ et $b = 18$.

❸ La fonction C est affine avec $a = 3$ et $b = 12$.

33 **1.** $s(x) = 4 \times 10 - 4x$ donc $s(x) = 40 - 4x$.

2. a. • $s(2{,}5) = 40 - 4 \times 2{,}5 = 40 - 10 = 30$

• L'antécédent de 32 par la fonction s est le nombre x tel que $s(x) = 32$, c'est-à-dire $40 - 4x = 32$

$-4x = 32 - 40$

$-4x = -8$

Ainsi $x = \dfrac{-8}{-4} = 2$

L'antécédent de 32 par la fonction s est 2.

b. • En installant une cloison à 2,5 m du fond, Louise disposera d'une surface de garage de 30 m².

• Pour disposer d'une surface de garage de 32 m², Louise doit installer la cloison à 2 m du fond.

34 • Choisir un nombre.

• Ajouter 1.

• Diviser par −4.

35 **a.** Dans la cellule B2, il faut taper la formule =-2×B1+6.

b. Pour obtenir l'antécédent d'un nombre par la fonction h, on soustrait 6 et on divise le résultat par −2 ce qui revient à multiplier par $-\dfrac{1}{2}$. Pour un nombre x, on calcule donc $-\dfrac{1}{2}(x-6)$. Ainsi, $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

Jules a tort.

36 **a.** L'image de 3 par g est −1.

b. Le nombre qui a pour image 1 par g est −1.

37 **a.** • $g(0) = 50$.

• L'antécédent de 350 est 120

b. • Pour une consommation nulle, le montant de la facture est 50 € ce qui correspond au montant de l'abonnement.

• Le montant de la facture est égal à 350 € pour une consommation de 120 m³ d'eau.

38 **a.** $f(0) = -2 \times 0 + 5 = 0 + 5 = 5$

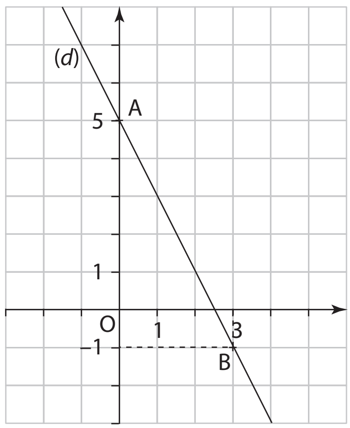
L'image de 0 par f est 5.

$f(3) = -2 \times 3 + 5 = -6 + 5 = -1$

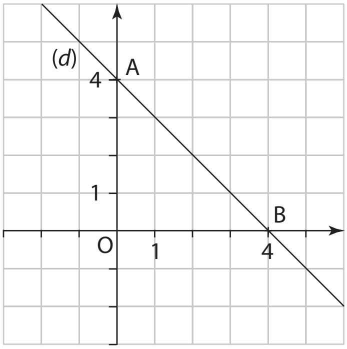
L'image de 3 par f est −1.

b. Les points A (0; 5) et B (3; −1) appartiennent à la droite (d).

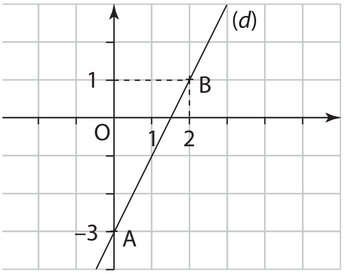
c.



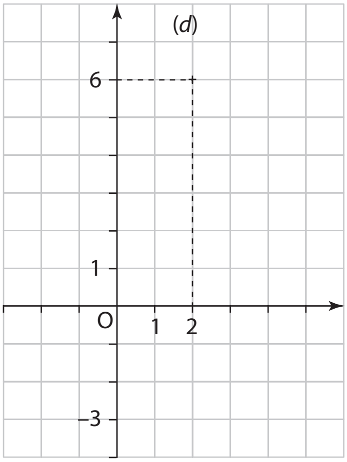
39 **a.** La représentation graphique de la fonction f est la droite qui passe par le point A (0 ; 4) et le point B (4 ; 0).



b. La représentation graphique de la fonction g est la droite qui passe par le point A (0 ; – 3) et le point B (2 ; 1).



40 **a.** Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine f est la droite qui passe par le point (0 ; – 3) et le point (2 ; 6).



b. $f(10) = 4{,}5 \times 10 - 3 = 45 - 3 = 42$
Le point A d'abscisse 10 de la droite (d) a pour ordonnée 42.

c. $f(-50) = 4{,}5 \times (-50) - 3 = -225 - 3 = -228$
Le point B d'abscisse – 50 de la droite (d) a pour ordonnée – 228.

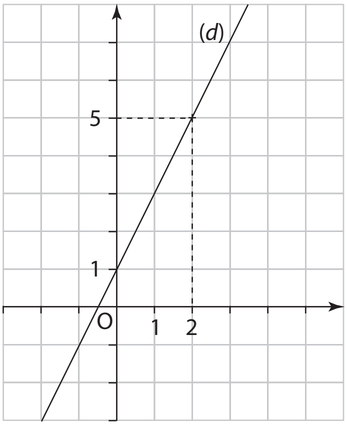
d. L'abscisse du point d'ordonnée 99 de la droite (d) est le nombre x tel que $f(x) = 99$, c'est-à-dire tel que
$4{,}5x - 3 = 99$
$4{,}5x = 99 + 3$
$4{,}5x = 102$

Ainsi $x = \dfrac{102}{4{,}5} = \dfrac{68}{3}$
Le point C d'ordonnée 99 de la droite (d) a pour abscisse $\dfrac{68}{3}$.

41 • $g(1{,}8) = -5 \times 1{,}8 + 7 = -9 + 7 = -2$ donc A $\in$ (d).
• $g(3{,}3) = -5 \times 3{,}3 + 7 = -16{,}5 + 7 = -9{,}5$ donc B $\notin$ (d).
• $g(5{,}2) = -5 \times 5{,}2 + 7 = -26 + 7 = -19$ donc C $\notin$ (d).
• $g(-0{,}5) = -5 \times (-0{,}5) + 7 = 2{,}5 + 7 = 9{,}5$ donc D $\in$ (d).
• $g(-4{,}1) = -5 \times (-4{,}1) + 7 = 20{,}5 + 7 = 27{,}5$ donc E $\in$ (d).
• $g(-9) = -5 \times (-9) + 7 = 45 + 7 = 52$ donc F $\in$ (d).

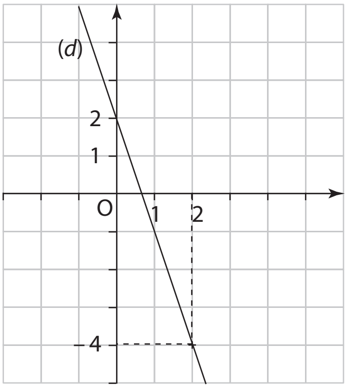
42 **a.** Le coefficient directeur $a = -2$, l'ordonnée à l'origine $b = 3$.
b. Le coefficient directeur $a = 1$, l'ordonnée à l'origine $b = 1$.
c. Le coefficient directeur $a = 3$, l'ordonnée à l'origine $b = -2$.

43 **a.** Dans un repère, la droite (d) représentant la fonction affine f passe par le point (0 ; 1) et le point (2 ; 5).



b. • Lorsque x augmente de 1, $f(x)$ augmente de 2.
• Lorsque x augmente de 2, $f(x)$ augmente de 4.
• Lorsque x diminue de 1, $f(x)$ diminue de 2.
• Lorsque x diminue de 3, $f(x)$ diminue de 6.

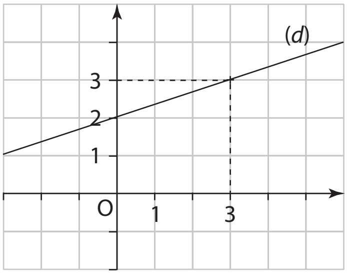
44 **a.** Dans un repère, la droite (d) représentant la fonction affine f passe par le point (0 ; 2) et le point (2 ; –4).



b. • Lorsque x augmente de 2, $f(x)$ diminue de 6.
• Lorsque x diminue de 3, $f(x)$ augmente de 9.

45 **1. a.** $f(0) = \frac{1}{3} \times 0 + 2 = 2$; $f(3) = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 1 + 2 = 3$

La droite (d) passe par le point (0 ; 2) et par le point (3 ; 3).



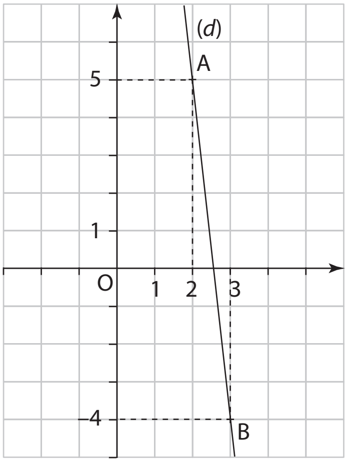
b. • Lorsque x augmente de 3, $f(x)$ augmente de 1.
• Lorsque x diminue de 6, $f(x)$ diminue de 2.

2. a. Le coefficient directeur $a = -\frac{1}{3}$.

b. Le coefficient directeur $a = \frac{1}{4}$.

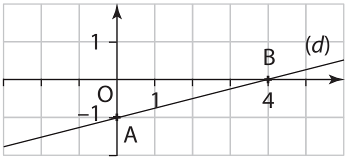
46 **a.** L'ordonnée à l'origine $b = -2$.
b. A (1 ; 0) et B (2 ; 2). Lorsque x augmente de 1, $f(x)$ augmente de 2 donc le coefficient directeur $a = 2$.
c. $f(x) = 2x - 2$.

47 **a.**



b. Pour aller de A vers B, x augmente de 1 et y diminue de 9 donc le coefficient directeur $a = -9$.
c. $f(x) = -9x + b$.
Pour déterminer b, on utilise par exemple le point A (2 ; 5).
$f(2) = -9 \times 2 + b = 5$
On a donc $-18 + b = 5$
$b = 5 + 18 = 23$
Donc $f(x) = -9x + 23$.

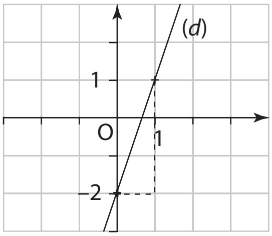
48 **a.**



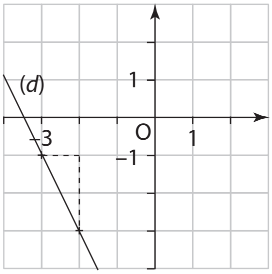
b. Pour aller de A vers B, x augmente de 4 et y augmente de 1 donc le coefficient directeur $a = \frac{1}{4}$.
$g(x) = \frac{1}{4}x + b$.
Pour déterminer b, on utilise par exemple le point B (4 ; 0).
$g(4) = \frac{1}{4} \times 4 + b = 1 + b$
On a donc $1 + b = 0$
$b = -1$
Donc $g(x) = \frac{1}{4}x - 1$.

49 La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point (0 ; 2) donc $b = 2$.
Quand x augmente de 2, y diminue de 1 donc $a = -\frac{1}{2}$.
Donc $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

50 **a.** Dans un repère, la droite représentant la fonction f passe par le point de coordonnées (0 ; – 2). Le coefficient directeur est $a = 3$ donc lorsque x augmente de 1, y augmente de 3.

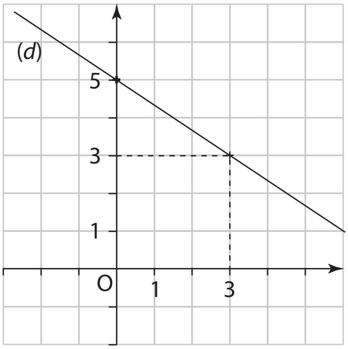


b. Dans un repère, la droite représentant la fonction g passe par le point de coordonnées (– 3 ; – 1).
Le coefficient directeur $a = -2$ donc lorsque x augmente de 1, y diminue de 2.



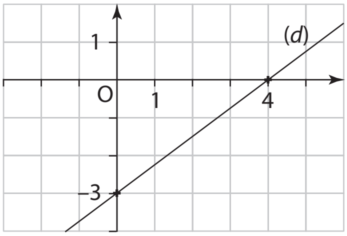
51 **1.** L'ordonnée à l'origine de la droite (d) est $b = -2$ donc Enzo a placé le point (0 ; – 2).
Le coefficient directeur de la droite (d) est $a = \frac{1}{3}$. Lorsque x augmente de 1, y augmente de $\frac{1}{3}$ donc lorsque x augmente de 3, y augmente de 1. Enzo a donc placé le point (3 ; – 1).
2. a. L'ordonnée à l'origine de la droite (d) est $b = 5$, donc on place le point (0 ; 5).
Le coefficient directeur de la droite (d) est $a = -\frac{2}{3}$.

Lorsque x augmente de 1, y diminue de $\frac{2}{3}$ donc lorsque x augmente de 3, y diminue de 2. On place donc le point (3 ; 3).

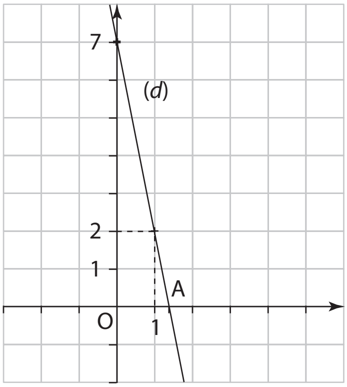


b. L'ordonnée à l'origine de la droite (*d*) est $b = -3$ donc on place le point (0 ; – 3).

Le coefficient directeur de la droite (*d*) est $a = \frac{3}{4}$. Lorsque x augmente de 1, y augmente de $\frac{3}{4}$ donc lorsque x augmente de 4, y augmente de 3.
On place donc le point (4 ; 0).

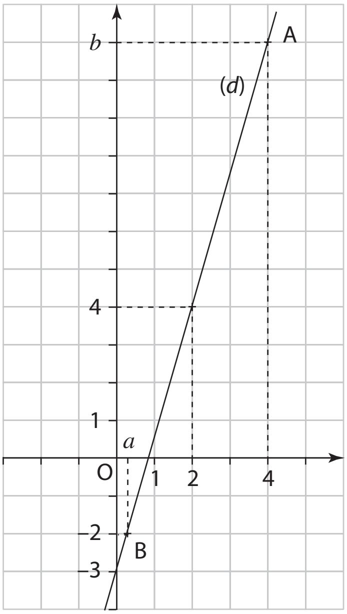


52 **1.** Dans un repère, la droite (*d*) qui représente la fonction affine g passe par le point (0 ; 7) et par le point (1 ; 2).



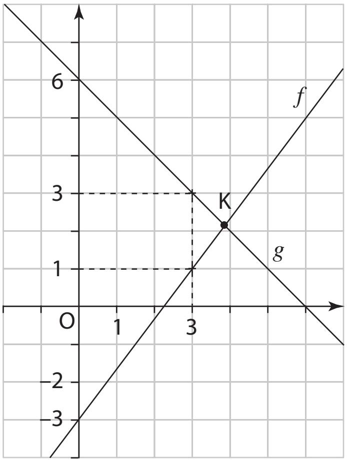
2. a. Sur le graphique, on lit environ 1,4 pour l'abscisse de A.
b. L'abscisse de A est le nombre x tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire : $-5x + 7 = 0$
$-5x = -7$ ainsi $x = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} = 1,4$.
L'abscisse du point A est égale à 1,4.

53 **a.** Dans un repère, la droite (*d*) qui représente la fonction affine f passe par le point (0 ; – 3) et par le point (2 ; 4).



b. Sur le graphique, on lit que l'ordonnée du point A est $b = 11$.
Par le calcul : $f(4) = 3,5 \times 4 - 3 = 14 - 3 = 11$
c. Sur le graphique, on lit que l'abscisse du point B est $a \approx 0,3$.
Par le calcul : l'abscisse de B est le nombre a tel que $f(a) = -2$, c'est-à-dire : $3,5a - 3 = -2$
$3,5a = -2 + 3$
$3,5a = 1$
Ainsi $a = \frac{1}{3,5} = \frac{2}{7}$.

54 **a.** La droite représentant la fonction f passe par les points (0 ; – 3) et (3 ; 1).
La droite représentant la fonction g passe par les points (0 ; 6) et (3 ; 3).



b. On lit approximativement K(3,8 ; 2,1).

c. L'abscisse du point K est le nombre x tel que $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire tel que $\frac{4}{3}x - 3 = -x + 6$

$\frac{4}{3}x + x = 6 + 3$; $\frac{7}{3}x = 9$

Ainsi $x = \frac{27}{7}$.

L'ordonnée de K est :

$g\left(\frac{27}{7}\right) = -\frac{27}{7} + 6 = -\frac{27}{7} + \frac{42}{7} = \frac{15}{7}$

Donc K a pour coordonnées $\left(\frac{27}{7}; \frac{15}{7}\right)$.

55 **a.** $-5x + 1 = 2x - 4$

$-5x - 2x = -4 - 1$

$-7x = -5$

Ainsi $x = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$

b. Dans un repère, le point d'intersection des droites représentant les fonctions affines f et g a pour abscisse $\frac{5}{7}$.

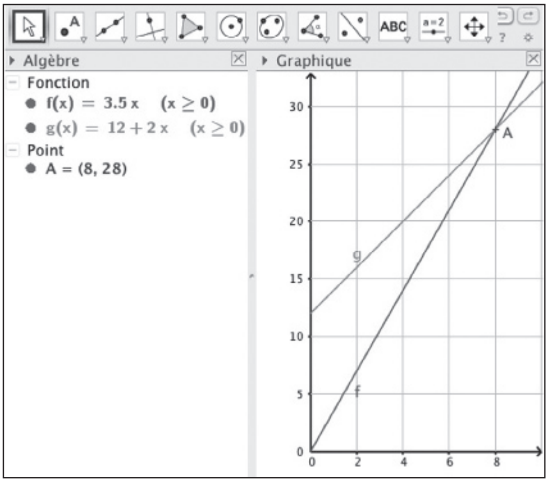
Je m'évalue à mi-parcours

56 **b.** **57** **c.** **58** **a.** **59** **a.** **60** **b.**

Avec un logiciel

61 **1.** $f(x) = 3{,}5x$ et $g(x) = 12 + 2x$

2. a., **b.** et **c.**

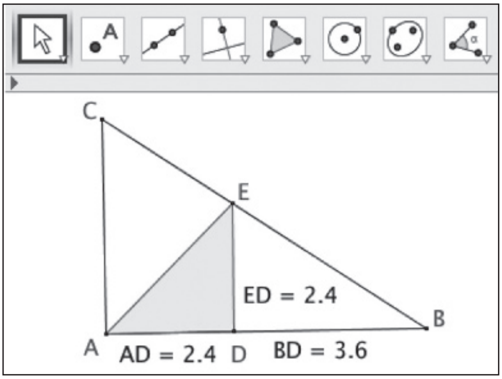


3. a. Le point d'intersection A des demi-droites a pour coordonnées (8 ; 28).

Cela signifie que pour 8 films loués dans l'année, le prix payé est de 28 € quelle que soit la formule utilisée.

b. Pour moins de 8 films loués dans l'année, la formule 1 est la plus avantageuse. Pour plus de 8 films loués dans l'année, c'est la formule 2 qui est la plus avantageuse.

62 **1. a. b. c.**



Il semble que le triangle AED soit isocèle en D lorsque BD = 3,6 cm.

2. a. $f(x) = 6 - x$

b. Les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (AB), elles sont donc parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{ED}{AC} = \frac{BD}{AB}$, c'est-à-dire $\frac{ED}{4} = \frac{x}{6}$.

Donc $ED = 4 \times \frac{x}{6}$

D'où $g(x) = \frac{2}{3}x$.

c. $6 - x = \frac{2}{3}x$

$\frac{2}{3}x + x = 6$

$\frac{5}{3}x = 6$

Ainsi $x = 6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$.

d. Le triangle AED est isocèle en D lorsque AD = ED, c'est-à-dire $f(x) = g(x)$ soit x = BD = 3,6 cm.

J'utilise mes compétences

63 Dans le tableau, on lit $b = f(0) = 2$.

Donc $f(x) = ax + 2$.

$f(2) = -1$ donc $a \times 2 + 2 = -1$

$2a = -1 - 2 = -3$

Ainsi $a = \frac{-3}{2} = -1{,}5$

D'où $f(x) = -1{,}5x + 2$.

64 Le périmètre P du rectangle est égal à $2x + 2y$. On a donc $2x + 2y = 30$.

$2y = 30 - 2x$ et donc $y = 15 - x$.

La fonction qui, à la dimension x, associe l'autre dimension y est la fonction définie par $x \mapsto 15 - x$.

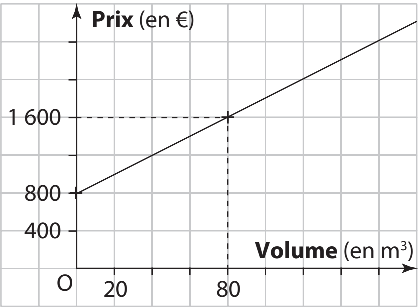
Kévin a raison, cette fonction est affine : $a = -1$ et $b = 15$.

65 **a.** $f(80) = 10 \times 80 + 800 = 800 + 800 = 1\,600$

Pour un déménagement de 80 m^3, le prix à payer est 1 600 €.

b. On cherche le nombre x tel que
$f(x) = 3\,500$, c'est-à-dire $10x + 800 = 3\,500$
$10x = 3\,500 - 800$
$10x = 2\,700$
Ainsi $x = 2\,700 : 10 = 270$
L'antécédent de 3 500 par la fonction f est 270.

c. La fonction f est une fonction affine. Pour $x \geqslant 0$, elle est représentée par la demi-droite ayant pour origine le point (0 ; 800) et passant par le point (80 ; 1 600).



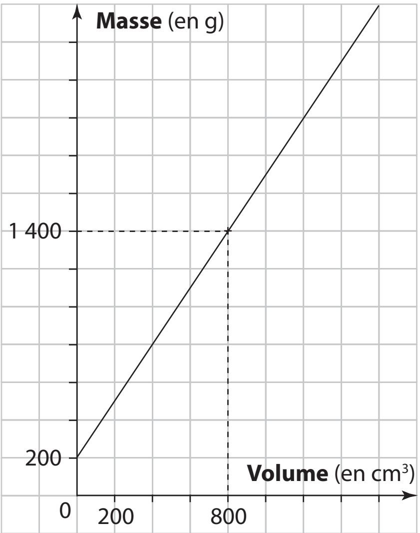
66 **a.** $f(x+1) = 4(x+1) - 5 = 4x + 4 - 5$
donc $f(x+1) = 4x - 5 + 4 = f(x) + 4$
b. $f(x+3) = 4(x+3) - 5 = 4x + 4 \times 3 - 5$
donc $f(x+3) = 4x - 5 + 4 \times 3 = f(x) + 4 \times 3$
c. $f(x-5) = 4(x-5) - 5 = 4x - 4 \times 5 - 5$
donc $f(x-5) = 4x - 5 - 4 \times 5 = f(x) - 4 \times 5$

67 Li a inversé abscisse et ordonnée.
La droite représentant la fonction h passe par le point (0 ; 2) et par le point (5 ; – 2).
Dimitri s'est trompé pour le coefficient directeur. $a = -\dfrac{4}{5}$ donc, lorsque x augmente de 1, y diminue de $\dfrac{4}{5}$.
Par conséquent, lorsque x augmente de 5, y diminue de 4.
La droite représentant la fonction h passe par le point (0 ; 2) et par le point (5 ; – 2).

68 L'affirmation 1 est fausse, car pour toute fonction constante, $f(6) = f(9)$. Par exemple, pour la fonction $f : x \mapsto 10$ ($a = 0$ et $b = 10$) et $f(6) = f(9) = 10$.
L'affirmation 2 est fausse car, par exemple, la fonction $x \mapsto x + 4$ est une fonction affine ($a = 1$ et $b = 4$) et $f(2) = 6$ mais $f(1)$ n'est pas égal à 3 ($f(1) = 4$).

69 **a.** $f(x) = 3x$
$g(x) = 4 \times (10{,}5 - x) = 42 - 4x$
b. $3x = 42 - 4x$
$3x + 4x = 42$
$7x = 42$
Ainsi $x = 42 : 7 = 6$
c. Le triangle ACM et le carré MDEB ont le même périmètre lorsque $f(x) = g(x)$.
D'après **b.**, ceci se produit pour $x = 6$.
Le triangle et le carré ont donc le même périmètre lorsque AM = 6 cm.
Le périmètre du triangle ACM est $f(6) = 6 \times 3 = 18$ cm.
Le périmètre du carré MDEB est
$g(6) = 42 - 4 \times 6 = 42 - 24 = 18$ cm.

70 **a.** La masse totale est $1{,}5x + 200$.
b. On cherche le nombre x tel que
$1{,}5x + 200 = 2\,300$
$1{,}5x = 2\,100$
Ainsi $x = \dfrac{2\,100}{1{,}5} = 1\,400$.
Pour avoir une masse totale de 2 300 g, le paquet doit contenir 1 400 cm³ de lessive.
c. Pour $x \geqslant 0$, la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 1{,}5x + 200$ est une demi-droite.
Son origine est le point (0 ; 200) et elle passe par le point (800 ; 1 400).



d. D'après **b.**, la masse totale est 2 300 g pour un volume de 1 400 cm³ de lessive.
Le volume d'un cube d'arête a est a^3.
On cherche un nombre a tel que a^3 soit proche de 1 400.
Avec un tableur, on obtient :

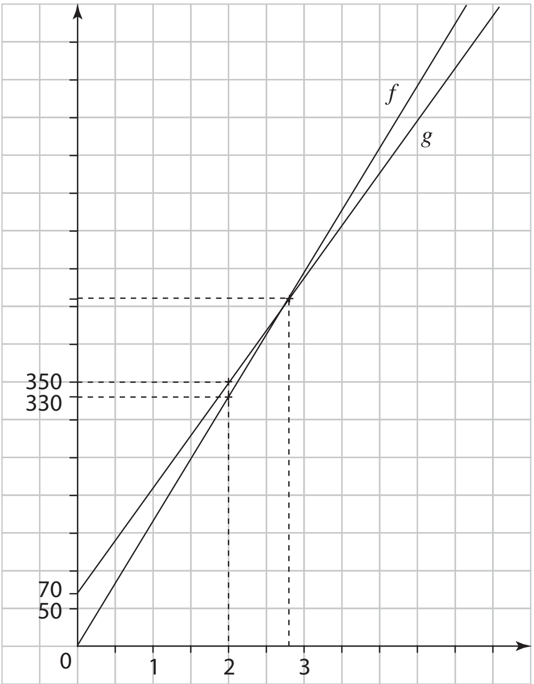
	A	B	C	D	E
1	a	11	11,1	11,2	11,3
2	a^3	1331	1367,63	1404,93	1442,9

La longueur de l'arête du paquet de lessive est donc proche de 11,2 cm (à 1 mm près).

71 **1.** Pour 20 séances dans l'année, il faut acheter 2 cartes de 10 séances.
Avec l'option A, 2 × 165 € = 330 €.
Avec l'option B, 2 × 140 € + 70 € = 350 €.
Pour 20 séances dans l'année, l'option A est plus avantageuse.
2. a. Pour x cartes achetées dans l'année, avec l'option A, le coût (en €) pour la famille sera égal à $165x$.
b. Pour x cartes achetées dans l'année, avec l'option B, le coût (en €) pour la famille sera égal à $140x + 70$.
c. L'option B devient avantageuse lorsque x est tel que $140x + 70 \leqslant 165x$.

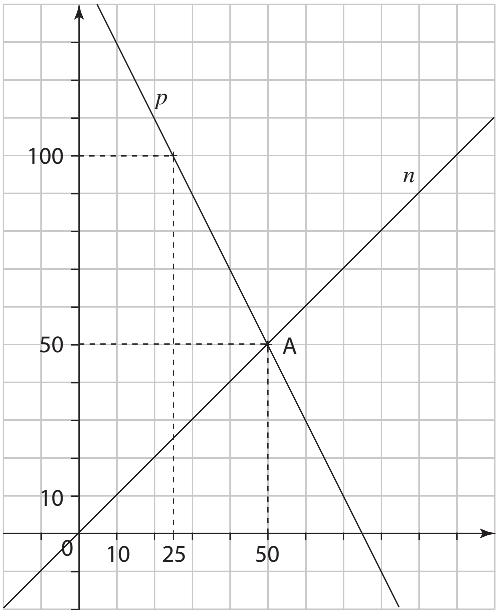
$70 \leqslant 165x - 140x$
$70 \leqslant 25x$
Ainsi $x \geqslant \dfrac{70}{25}$ soit $x \geqslant 2,8$.
L'option B devient avantageuse à partir de 3 cartes de 10 séances achetées dans l'année.

3. a. Pour $x \geqslant 0$, la représentation graphique de la fonction f est la demi-droite d'origine (0 ; 0) passant par le point (2 ; 330).
Pour $x \geqslant 0$, la représentation graphique de la fonction g est la demi-droite d'origine (0 ; 70) passant par le point (2 ; 350).



b. Le point d'intersection des deux demi-droites a pour abscisse 2,8. À partir de ce point, la demi-droite représentant la fonction g est en dessous de celle représentant la fonction f.
Le nombre de cartes achetées étant un nombre entier, on en déduit que l'option B est plus avantageuse à partir de 3 cartes achetées dans l'année.

72 **1. a.** Le nageur part de A et parcourt 1 m par seconde donc 50 s après son départ il se trouvera à 50 m du point A.
b. En 50 s, la pirogue aura parcouru 50 × 2 m soit 100 m. Elle est partie du point B qui est à 150 m du point A, donc 50 s après son départ, elle se trouvera à 150 – 100, c'est-à-dire à 50 m du point A.
2. a. Les représentations graphiques des fonctions n et p sont deux droites.
Pour n : la droite passe par l'origine du repère et par le point (50 ; 50).
Pour p : la droite passe par le point (25 ; 100) et par le point (50 ; 50).



b. Les deux droites se croisent au point A (50 ; 50). Le nageur et la pirogue se croisent 50 s après leur départ à 50 m du point A.

73 • **Traduction**
Un ballon météo est utilisé par les météorologistes pour mesurer la température à haute altitude.
À une altitude de 4 km, un ballon météo a mesuré une température de – 2 °C. Au même moment, la température au niveau de la mer était de 24 °C.
a. À quel rythme baisse la température en fonction de l'altitude ?
b. À ce rythme, estimer la température à une altitude de 6 km.

• **Solution**
a. À une altitude de 4 km, la température a baissé de 26 °C.
26 : 4 = 6,5.
La température baisse de 6,5 °C par km.
b. À ce rythme, la température baissera de 13 °C en passant d'une altitude de 4 km à une altitude de 6 km.
On peut donc estimer qu'à une altitude de 6 km la température mesurée sera – 15 °C.

74 On note x le temps de trajet en min, $c(x)$ la distance séparant les Cissé de la sortie 22 et $l(x)$ la distance séparant les Lepage de la sortie 22.
Les deux familles se croiseront lorsque $c(x) = l(x)$.
90 km/h = $\dfrac{90}{60}$ km/min = 1,5 km/min donc $c(x) = 1,5x$.
120 km/h = $\dfrac{120}{60}$ km/min = 2 km/min.
Les sorties 18 et 22 sont distantes de 42 km donc $l(x) = 42 - 2x$.
On cherche x tel que $c(x) = l(x)$, c'est-à-dire tel que $1,5x = 42 - 2x$.

$1{,}5x + 2x = 42$
$3{,}5x = 42$
Ainsi $x = \frac{42}{3{,}5} = 12$.
Les deux familles se croiseront au bout de 12 min soit à 10 h 52.

75 On note x le nombre de kWh consommés par cette famille en 2015.
D'après les tarifs de 2015 :
$84{,}56 + 0{,}1372x = 1\,012{,}30$
$0{,}1372x = 1\,012{,}30 - 84{,}56$
$0{,}1372x = 927{,}74$
Ainsi $x = \frac{927{,}74}{0{,}1372}$ soit environ 6 762 kWh.
D'après les tarifs de 2016 :
$88{,}42 + 0{,}1467 \times 6\,762 = 1\,080{,}4054$
Pour la même consommation, cette famille a payé 1 080,40 € en 2016.

76 La fonction f est affine donc $f(x) = ax + b$.
La longueur du ressort sans objet suspendu correspond à $f(0)$, c'est-à-dire b.
$50a + b = 95$ et $60a + b = 98$
donc $10a = 3$
Ainsi $a = 0{,}3$.
$f(x) = 0{,}3x + b$
$0{,}3 \times 50 + b = 95$
$15 + b = 95$
$b = 95 - 15 = 80$
La longueur du ressort sans objet suspendu est 80 mm.

77 Le producteur A propose un salaire d'au moins 200 €, quel que soit le nombre de seaux récoltés, ce qui élimine les graphiques 1 et 4.
Avec le contrat proposé par le producteur B, pour x seaux récoltés, le salaire est égal à
- $0{,}6x$ si $0 \leqslant x \leqslant 350$
- $210 + x - 350$ soit $x - 140$ si $x \geqslant 351$

La fonction modélisant ce salaire n'est pas une fonction linéaire.
La graduation de l'axe des abscisses permet de visualiser le salaire jusqu'à 500 seaux récoltés. Le graphique 2 ne convient donc pas.
C'est le graphique 3 qui illustre la façon dont les deux producteurs payent leurs employés.

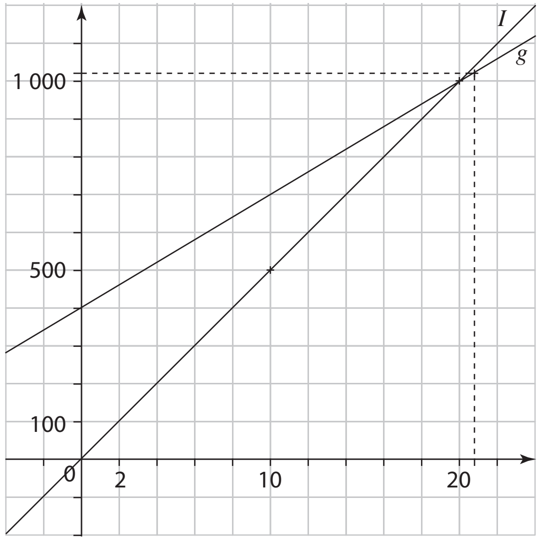
78 Adrien a reçu 400 € de plus que Nadia pour 2 voitures vendues en plus.
La prime est donc de 200 € par voiture vendue. Théo a vendu 3 voitures de plus qu'Adrien, il recevra donc 3×200 €, soit 600 € de plus.
Théo a reçu 2 800 €.

79 Si y est l'image de x par la fonction f, on a $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}$.
Alors $\frac{1}{5}x = y - \frac{1}{3}$
D'où $x = 5y - \frac{5}{3}$.
Si y est un nombre entier, $5y$ est aussi un nombre entier.
Or $\frac{5}{3}$ n'est pas un nombre décimal donc $5y - \frac{5}{3}$ ne peut pas être un nombre décimal.
Aucun nombre décimal n'a pour image un nombre entier par cette fonction f, l'affirmation de William est donc fausse.

Dossier Brevet

80 **1. a.** On lit, dans la cellule B2, que l'image de -3 par f est 22.
b. Dans la cellule C2, la formule `=5*C1+7` a été saisie.
Donc $f(7) = -5 \times 7 + 7$.
C'est-à-dire $f(7) = -28$.
c. $f(x) = -5x + 7$.
d. On cherche un nombre x tel que $f(x) = -10$, c'est-à-dire $-5x + 7 = -10$.
$-5x = -17$ donc $x = \frac{-17}{-5} = \frac{17}{5}$.
L'antécédent de -10 par f est $\frac{17}{5}$.
$\frac{17}{5} = 3{,}4$ donc le nombre obtenu est un nombre décimal non entier.
2. La formule qui a été saisie dans la cellule B3 et recopiée ensuite vers la droite est `=B1^2+4` ou `=B1*B1+4`.

81 **a.** $I(x) = 50x$ et $g(x) = 30x + 400$.
b. Les représentations graphiques de ces deux fonctions sont deux droites.
Pour $x \mapsto 50x$: la droite passe par l'origine du repère et par le point (10 ; 500).
Pour $x \mapsto 30x + 400$: la droite passe par le point (0 ; 400) et par le point (20 ; 1 000).



c. Selon le graphique, le tarif groupe est le plus avantageux pour un groupe de 21 danseurs.
d. $I(x) = g(x)$ lorsque $50x = 30x + 400$.
$50x - 30x = 400$
$20x = 400$

Ainsi $x = 400 : 20 = 20$.
On paye le même prix avec les deux tarifs pour 20 inscriptions.

82 **a.** Au début du jeu, le plus fort est le guerrier avec 50 points et le moins fort est le mage avec 0 point.

b.

Niveau	0	1	5	10	15	25
Points du guerrier	50	50	**50**	**50**	**50**	**50**
Points du mage	0	3	**15**	**30**	**45**	**75**
Points du chasseur	40	41	**45**	**50**	**55**	**65**

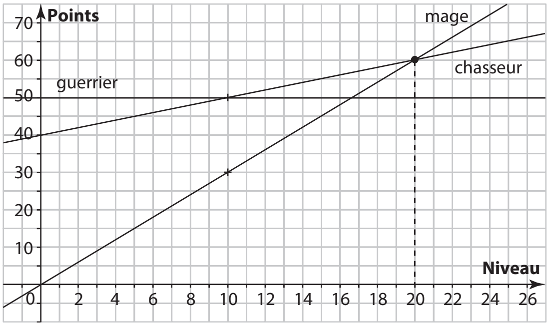
c. Le chasseur aura autant de points que le guerrier au niveau 10. Ils auront 50 points chacun.

d. • $f(x) = 3x$ désigne le nombre de points du mage.

• $g(x) = 50$ désigne le nombre de points du guerrier.

• $h(x) = x + 40$ désigne le nombre de points du chasseur.

e. La droite représentant la fonction f passe par le point $(0 ; 0)$ et par le point $(10 ; 30)$.
La droite représentant la fonction h passe par le point $(0 ; 40)$ et par le point $(10 ; 50)$.



f. Le mage devient le plus fort à partir du niveau 21.

83 **a.** On voit sur les lignes 1 et 2 de la colonne C que $f(0) = -7$. Donc 0 a pour image -7 par la fonction f.

b. $f(6) = 6^2 + 3 \times 6 - 7 = 36 + 18 - 7 = 54 - 7$
Donc $f(6) = 47$.

c. On voit sur les lignes 1, 2 et 3 de la colonne E que $f(x) = g(x) = 21$ pour $x = 4$.
Donc 4 est une solution de l'équation $x^2 + 3x - 7 = 4x + 5$.

d. $h(x)$ est de la forme $ax + b$.
Dans la cellule C4, on lit que $h(0) = 5$ donc $b = 5$. Ainsi $h(x) = ax + 5$.
Dans la cellule D4, on lit que $h(2) = 1$ donc $a \times 2 + 5 = 1$
$2a = 1 - 5$
$2a = -4$
Ainsi $a = -4 : 2 = -2$.
Donc $h(x) = -2x + 5$.

84 **1.** $f(x)$ est de la forme $ax + b$. La valeur de a est : **-2**.

2. L'image de 0 par f est : **3**.

3. La droite qui représente la fonction f, dans un repère, passe par le point : **B $(-1 ; 5)$**.

4. L'antécédent de 4 par la fonction f est : $\mathbf{-\frac{1}{2}}$.

5. La droite qui représente la fonction f dans un repère coupe l'axe des ordonnées en : **E $(0 ; 3)$**.

85 **1.** x peut varier entre 0 et 5.

2. a. L'aire du triangle AED est égale à $\dfrac{AD \times AE}{2}$ soit $\dfrac{3x}{2}$. Elle peut donc être modélisée par la fonction $f : x \mapsto 1{,}5x$.
L'aire du triangle EBC est égale à $\dfrac{BC \times EB}{2}$ soit $\dfrac{4(5 - x)}{2}$.
Elle peut donc être modélisée par la fonction
$g : x \mapsto 10 - 2x$.

b. La fonction f est linéaire et la fonction g est affine.

3. a. $g(x) = 6$ lorsque $10 - 2x = 6$.
$10 - 6 = 2x$
$2x = 4$
Ainsi $x = 2$.
L'aire du triangle EBC est égale à 6 cm² pour $x = 2$ cm.
2 est l'antécédent de 6 par la fonction g.

b. $g(4) = 10 - 2 \times 4 = 10 - 8 = 2$
Lorsque x est égal à 4 cm, l'aire du triangle EBC est égale à 2 cm².
2 est l'image de 4 par la fonction g.

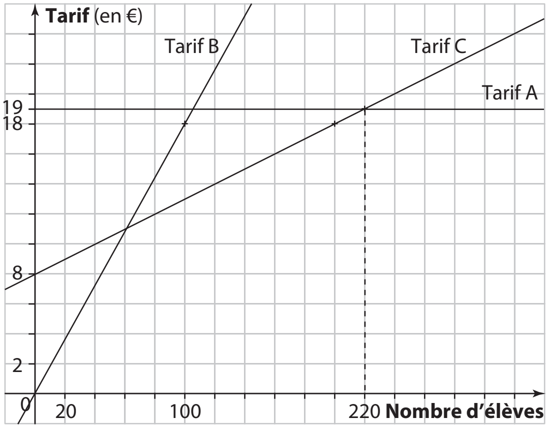
4. $f(x) = g(x)$ lorsque $1{,}5x = 10 - 2x$.
$1{,}5x + 2x = 10$
$3{,}5x = 10$
Ainsi $x = \dfrac{10}{3{,}5} = \dfrac{20}{7}$.
Les deux aires sont égales pour $x = \dfrac{20}{7}$ cm soit environ 2,9 cm au mm près.

86 **a.** La fonction correspondant au tarif C est :
$x \mapsto 8 + 0{,}05x$.

b. • La fonction modélisant le tarif A est une fonction constante. Quel que soit x, le tarif A est égal à 19 €. Sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

• La fonction modélisant le tarif B est une fonction linéaire. Pour x élèves, le tarif B est égal à $0{,}18x$ €. Sa représentation graphique est la droite passant par l'origine du repère et par le point $(100 ; 18)$.

• La fonction modélisant le tarif C est une fonction affine. C'est la fonction $x \mapsto 8 + 0{,}05x$.
Sa représentation graphique est la droite passant par le point $(0 ; 8)$ et par le point $(200 ; 18)$.



c. Par lecture graphique, on lit que le tarif A est plus intéressant que le tarif C à partir de 220 élèves.

d. D'après le graphique, pour une école de 209 élèves, c'est le tarif C qui est le plus intéressant.
Par le calcul :
Tarif A = 19 €
Tarif B = 0,18 × 209 = 37,62 €
Tarif C = 8 + 0,05 × 209 = 18,45 €

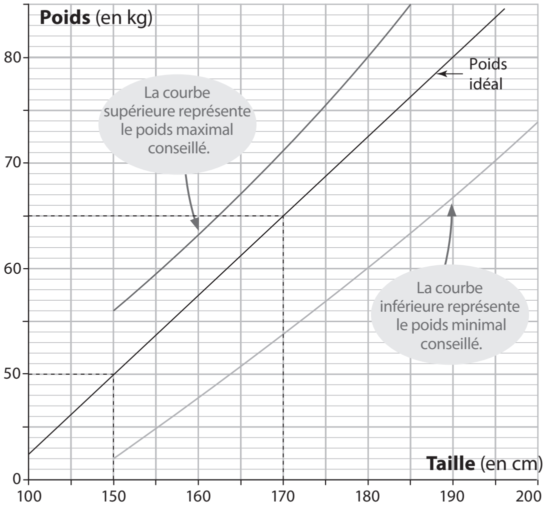
87 D'après ses revenus, Maxime se situe dans la 2e tranche avec un taux d'imposition à 14 %.
0,14 × 25 905 – 1 358 × 1 = 2 268,70
Maxime paye 2 268,70 € d'impôt.
D'après ses revenus, Claire se situe dans la 3e tranche avec un taux d'imposition à 30 %.
0,3 × 27 750 – 5 644,56 × 1 = 2 680,44
Claire paye 2 680,44 € d'impôt.
2 268,70 + 2 680,44 = 4 949,14
À eux deux, ils ont payé 4 949,14 € d'impôt.
25 905 + 27 750 = 53 655
En étant mariés et en faisant une déclaration commune, ils déclareraient 53 655 € pour 2 parts.
Leur revenu commun se situe dans la 3e tranche avec un taux d'imposition à 30 %.
0,3 × 53 655 – 5 644,56 × 2 = 4 807,38
Ils auraient payé 4 807,38 € d'impôt.
En étant mariés et en faisant une déclaration commune, Maxime et Claire paieraient moins d'impôt.
4 949,14 – 4 807,38 = 141,76
Ils paieraient 141,76 € d'impôt en moins.

88 **a.** $p = t - 100 - \dfrac{t-150}{4}$

donc $p = t - \dfrac{t}{4} - 100 + \dfrac{150}{4}$

$p = \dfrac{3}{4}t - 62{,}5$

La fonction modélisant le poids idéal (en kg) en fonction de la taille (en cm) est une fonction affine.
Sa représentation graphique est une droite.
Elle passe par le point (150 ; 50) et par le point (170 ; 65).



b. Manon a tort car, par exemple, pour une taille de 180 cm, le poids maximal conseillé est 80 kg, le poids minimal conseillé est 60 kg.

$\dfrac{80+60}{2} = 70$

Or, pour une taille de 180 cm, le poids idéal est de 72,5 kg alors que la moyenne du poids minimal et du poids maximal est de 70 kg.
Graphiquement, on peut voir que le poids idéal est plus proche du poids maximal que du poids minimal conseillé.

CHAPITRE 9

Faire le point sur la proportionnalité

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le cycle 3 et le début du cycle 4

En fin de cycle 4, il s'agit de compléter l'étude de la proportionnalité par une synthèse d'un apprentissage commencé au cycle 3.

● Au cycle 3, l'élève a été amené à reconnaître des situations relevant de la proportionnalité en particulier dans le cadre des grandeurs.
Il a appris à les traiter en utilisant un moyen adapté : propriétés d'additivité et d'homogénéité de la proportionnalité et passage par l'unité.
L'élève a également été confronté à des situations mettant en jeu des échelles, des vitesses constantes et l'application d'un taux de pourcentage. Des situations de proportionnalité entre deux grandeurs s'appuyant sur un graphique ont aussi été travaillées.
L'élève a enfin appris à reconnaître des situations relevant ou ne relevant pas de la proportionnalité.

● Au cycle 4, l'élève a appris à reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité, dans le cadre :
– de données présentées sous forme d'un tableau (dès le début du cycle et tout au long du cycle) ;
– de représentations graphiques (en milieu de cycle) ;
– de relations exprimées à l'aide d'une formule (en milieu et fin de cycle).
Au cycle 4, l'élève a également appris à utiliser différentes procédures pour calculer une quatrième proportionnelle : propriétés d'additivité et d'homogénéité de la proportionnalité (avec un coefficient entier, décimal puis fractionnaire).
Progressivement, il a enrichi ces procédures avec la mise en œuvre d'un coefficient de linéarité et l'utilisation de l'égalité des produits en croix. Il a appris à construire et compléter un tableau de proportionnalité.
L'élève a également appris à :
– calculer un pourcentage en lien avec les proportions,
– utiliser et calculer l'échelle d'une carte ou d'un dessin.

2 Je découvre

Activité 1

L'objectif de cette activité est d'utiliser une fonction linéaire pour résoudre un problème de géométrie. La situation proposée s'appuie sur la proportionnalité des longueurs de deux triangles, dans le cadre du théorème de Thalès, d'une homothétie ou d'une réduction.

Activité 2

L'objectif de cette activité est d'établir le fait que diminuer de 5 %, c'est multiplier par 0,95.
La question 2 rappelle le lien entre proportionnalité et pourcentage en s'appuyant sur un tableau dont les lignes sont proportionnelles.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

● Le paragraphe 1 présente, à travers deux exemples, différents aspects de la proportionnalité rencontrés tout au long du cycle : fonctions linéaires et représentations graphiques, agrandissements et réductions, le théorème de Thalès et les homothéties.

● Suite à l'activité 2, on peut étudier le paragraphe 2 « Proportionnalité, pourcentages et fonctions linéaires » de la leçon.

Exercice résolu

Cet exercice permet de mettre en œuvre des variations en pourcentage.

4 Compléments

Différents aspects de la proportionnalité

● Conformément aux préconisations du programme, les exercices proposés visent à aborder des situations de proportionnalité sous différents points de vue.

● Les exercices 17 et 18 de la rubrique « Je m'entraîne » et l'exercice 8 de la rubrique « À l'oral » présentent des situations de proportionnalité qui mettent en jeu différentes procédures de calcul d'une quatrième proportionnelle. Dans l'exercice 18, l'utilisation d'un tableau est laissée à l'initiative de l'élève.

● Les exercices 5 et 7 ainsi que les exercices 19 à 22 font le lien entre proportionnalité et fonctions linéaires. Il s'agit notamment d'amener les élèves à associer coefficient de la fonction linéaire étudiée et coefficient de proportionnalité.
Afin de varier les approches, les données sont présentées sous différentes formes : tableaux, graphiques ou formules.

● L'exercice 23 et l'exercice 7 permettent de rappeler le lien entre proportionnalité et vitesse.

● Les exercices 25 à 31, ainsi que l'exercice 6 présentent des situations de proportionnalité ou de non-proportionnalité dans le cadre géométrique : théorème de Thalès, homothéties et agrandissement et réduction.

Pourcentages

● Dans les exercices 32 à 36, il s'agit d'appliquer un taux de pourcentage dans le cas d'une hausse ou d'une baisse. L'élève peut procéder en deux étapes, mais dans

l'exercice 35, il est incité à utiliser un coefficient (par exemple 1,05 pour une hausse de 5 %). Cette procédure est proposée également dans les exercices 9 à 12 de la rubrique « À l'oral ».
Les exercices 34 à 36 sont l'occasion d'aborder des notions économiques : intérêts bancaires, taux de crédit, inflation.

- Les exercices 37 à 39 présentent des calculs de pourcentages de variation. L'exercice 37 sensibilise les élèves à la maîtrise de la production des déchets.
- Les exercices 40 et 41 présentent des situations de deux variations successives. Ces deux exercices, détaillés, peuvent être travaillés en préparation des exercices 56 et 68.
- Dans les exercices 42 à 45, il s'agit de retrouver une valeur initiale après une hausse ou une baisse.

J'utilise mes compétences

- Dans les exercices 53, 54 et 62, l'élève est amené à reconnaître des situations de proportionnalité.
- Les exercices 60 et 61 mettent en jeu un coefficient de proportionnalité non rationnel. Dans l'exercice 60, certains élèves pourront procéder par essais avant de déterminer la valeur exacte du coefficient de proportionnalité.
- Les exercices 62 et 63 proposent de faire le lien entre différentes représentations d'une fonction linéaire.
- Dans les exercices 71 et 72, le tableur pourra être utilisé.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. b. et **c.** ; **2. b.** ; **3. b.** et **c.** ; **4. c.** ; **5. a.** et **c.**

Je découvre

Activité 1

1 On sait que le triangle ABC est rectangle en A avec AB = 4 cm et AC = 3 cm.
D'après l'égalité de Pythagore :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 3^2$
$BC^2 = 16 + 9$
$BC^2 = 25$
Alors $BC = \sqrt{25} = 5$ cm

2 **a.** Les points B, S, A et B, T, C sont alignés et les droites (TS) et (AC) sont parallèles (car ARTS est un rectangle) donc les triangles SBT et ABC forment une configuration de Thalès :

$$\frac{BT}{BC} = \frac{BS}{BA} = \frac{ST}{AC}$$

$$\frac{BT}{5} = \frac{x}{4} = \frac{TS}{3}$$

Ainsi $ST = \frac{3}{4}x$ et $BT = \frac{5}{4}x$.

b. $f(x) = BT + ST + SB = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x + x$

$f(x) = \frac{12}{4}x = 3x$

Ainsi x et $f(x)$ sont proportionnels.
f est une fonction linéaire de coefficient 3.

c. $AS = 4 - x$
$g(x) = TS \times 2 + AS \times 2$

$g(x) = \frac{3}{4}x \times 2 + (4 - x) \times 2$

$g(x) = \frac{3}{2}x + 8 - 2x = 8 - \frac{1}{2}x$

Ainsi x et $g(x)$ ne sont pas proportionnels.

d. $f(x) = g(x)$

$3x = 8 - \frac{1}{2}x$

$3x + \frac{1}{2}x = 8$

$\frac{7}{2}x = 8$ ainsi $x = 8 \times \frac{2}{7}$

$x = \frac{16}{7}$ soit $x \approx 2{,}3$ cm

Donc pour SB ≈ 2,3 cm, ARTS et TSB ont le même périmètre.

Activité 2

1 $30 \times \frac{5}{100} = 1{,}5$ €

Le libraire accorde une remise de 1,5 €.
30 – 1,5 = 28,5 €
Jade paye donc 28,5 € pour ce livre.

2 **a.**

Prix initial (en €)	34	60	100
Montant de la réduction (en €)	1,70	3	5
Prix réduit (en €)	32,30	57	95

b. $\frac{32{,}3}{34} = 0{,}95$; $\frac{57}{60} = 0{,}95$ et $\frac{95}{100} = 0{,}95$

Le prix réduit est proportionnel au prix initial.
Le coefficient de proportionnalité est 0,95 soit 95 %.

3 $x \times \frac{5}{100} = 0{,}05x$ €

La remise est $0{,}05x$.
$x - 0{,}05x = (1 - 0{,}05)x$ € $= 0{,}95x$ €
Le prix du livre après réduction est $0{,}95x$ €.

J'applique le cours

2 **a.** $\frac{25}{100} \times 4\,600 = 0{,}25 \times 4\,600 = 1\,150$

Donc, entre 2014 et 2015, les ventes ont augmenté de 1 150 vélos.

4 600 + 1 150 = 5 750.

Donc le fabricant a vendu 5 750 vélos en 2015.

b. $6\,325 - 5\,750 = 575$.
Donc, entre 2015 et 2016, le nombre de vélos vendus a augmenté de 575 vélos.

$\frac{575}{5\,750} = 0{,}1 = \frac{10}{100}$

Donc les ventes ont augmenté de 10 % entre 2015 et 2016.

3 **a.** 81 ans – 45 ans = 36 ans.
Donc l'espérance de vie a augmenté de 36 ans entre 1900 et 2015.

b. $\frac{36}{45} = 0{,}8 = \frac{80}{100}$

Donc l'espérance de vie en France a augmenté de 80 % entre 1900 et 2015.

4 **a.** • $7{,}5 \times \frac{16}{100} = 1{,}2$

Donc la superficie de la banquise arctique a diminué de 1,2 million de km^2 entre 1980 et 2000.

• $7{,}5 - 1{,}2 = 6{,}3$.
Donc, en 2000, la superficie de la banquise arctique était 6,3 millions de km^2.

b. $7{,}5 - 4{,}41 = 3{,}09$.
Donc la superficie de la banquise arctique a diminué de 3,09 millions de km^2 entre 1980 et 2015.

$\frac{3{,}09}{7{,}5} = 0{,}412 = \frac{41{,}2}{100}$

Donc la superficie de la banquise arctique a diminué de 41,2 % entre 1980 et 2015.

À l'oral

5 **a. Vrai** : $3 \times 5 = 15$; $7 \times 5 = 35$ et $12 \times 5 = 60$
Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

b. Faux : $p(7) = 7 + 12 = 19 \neq 35$

c. Vrai : $p(x) = 5 \times x = 5x$

d. Vrai : $x = \frac{p(x)}{5} = p(x) \times 0{,}2$

6 **a.** $\frac{25}{10} = 2{,}5$

Le triangle BED est un agrandissement du triangle BCA dans le rapport 2,5.

b. $\frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 0{,}4$

Le triangle BCA est l'image du triangle BED par l'homothétie de centre B est de rapport 0,4.

c. $BD = 4 \times 2{,}5 = 10$ cm

d. $BE = 9 \times 2{,}5 = 22{,}5$ cm

7 $v(6) = 10{,}2 \times 3 = 30{,}6$ m
Le cycliste a parcouru 30,6 m en 6 s.

8 **a.** $4 \times 1{,}5 = 6$ €
2,5 kg de fraises coûtent 10 €.

b. 250 g représentent le quart de 1 kg.
250 g coûtent donc 1 €.
750 g coûtent donc 3 €.

c. 4 € + 1 € = 5 € donc 1 kg + 0,25 kg = 1,25 kg
Avec 5 €, on achète 1,250 kg.

9 A : ❸ ; B : ❹ ; C : ❺ ; D : ❷ ; E : ❶.

10 **a.** $0{,}75 = 1 - 0{,}25$ et $0{,}25 = \frac{25}{100}$

donc il s'agit d'une réduction de 25 %.

b. $\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 1 - \frac{30}{100}$

donc il s'agit d'une réduction de 30 %.

11 **a.** $1{,}1 = 1 + 0{,}1$ et $0{,}1 = \frac{10}{100}$

Il s'agit d'une augmentation de 10 %.

b. $\frac{3}{2} = \frac{150}{100} = 1 + \frac{50}{100}$

Il s'agit d'une augmentation de 50 %.

12 **a.** $1 + \frac{40}{100} = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$

b. $1 - \frac{30}{100} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

c. $1 + \frac{200}{100} = 1 + 2 = 3$

d. $1 - \frac{50}{100} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

e. $1 + \frac{1}{100} = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$

Calcul mental

13 **a.** $4 \times 0{,}7 = 2{,}8$ cm et $7 \times 0{,}7 = 4{,}9$ cm

b. $4 \times 1{,}5 = 6$ cm et $7 \times 1{,}5 = 10{,}5$ cm

14 Les triangles MOU et MTR forment une configuration de Thalès : $MR = 3 \times MU$

a. $MT = 3 \times 5{,}2 = 15{,}6$ cm

b. $OT = 15{,}6 - 5{,}2 = 10{,}4$ cm
ou $2 \times 5{,}2 = 10{,}4$ cm

c. $OU = 19{,}2 \div 3 = 6{,}4$ cm

15 **a.** $\frac{BC}{FG} = \frac{6}{4} = 1{,}5$

Le rapport de l'homothétie est 1,5.

b. $AB = 1{,}5 \times 2 = 3$ cm
$OA = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5$ cm

$EG = 7{,}5 \div 1{,}5 = 7{,}5 \times \frac{2}{3} = 5$ cm

$OG = 9 \div 1{,}5 = 9 \times \frac{2}{3} = 6$ cm

16 $300 \times 0{,}01 = 300 \div 100 = 3$ L
$300 - 3 = 297$ L
Il reste donc 297 L.

Je m'entraîne

17 **a.** $\frac{9{,}36}{3} = 3{,}12$ kg

Une tige de 1 m pèse 3,12 kg.

b. $x = 2{,}5 \times 3{,}12 = 7{,}8$ kg

$y = \dfrac{19{,}5}{3{,}12} = 6{,}25$ kg.

c. On appelle z la masse d'une barre de 5,5 m.

● Une méthode :

$z = 5{,}5 \times 3{,}12 = 17{,}16$ kg

● Une autre méthode :

3 m + 2,5 m = 5,5 m

donc $z = 9{,}36$ kg + 7,8 kg = 17,16 kg

● Une autre méthode : en écrivant l'égalité des produits en croix :

$3 \times z = 9{,}36 \times 5{,}5$

$z = \dfrac{9{,}36 \times 5{,}5}{3}$ soit $z = 17{,}16$ kg

Une tige de 5,5 m pèse 17,16 kg.

18 **a.** $\dfrac{50}{400} = 0{,}125$

Pour 1 m², il faut 0,125 kg soit 125 g.

$0{,}125 \times 1\,500 = 187{,}5$ kg

Pour 1 500 m², il faut 187,5 kg.

b. 1 t = 1 000 kg

$\dfrac{1\,000}{0{,}125} = 8000$ m²

Avec 1 tonne de sel, on peut couvrir 8 000 m².

c. $150 \times 5 = 750$ m²

La rue a une surface de 750 m².

$0{,}125 \times 750 = 93{,}75$ kg

Pour cette rue, il faut 93,75 kg de sel.

19 **a.** $\dfrac{7{,}20}{3} = 2{,}4$; $\dfrac{12}{5} = 2{,}4$ et $\dfrac{26{,}4}{11} = 2{,}4$

Il s'agit donc d'un tableau de proportionnalité.

b. $p(x) = 2{,}4x$

p est une fonction linéaire de coefficient 2,4.

20 **a.** $\dfrac{1{,}8}{40} = 0{,}045$; $\dfrac{8{,}1}{180} = 0{,}045$ et $\dfrac{18{,}9}{420} = 0{,}045$

Il s'agit donc d'un tableau de proportionnalité.

b. $x \mapsto g(x) = 0{,}045 \times x$

$g(100) = 0{,}045 \times 100 = 4{,}5$

Pour 100 km parcourus, la voiture consomme 4,5 L.

c. $g(x) = 14{,}85$ soit $0{,}045x = 14{,}85$

ainsi $x = \dfrac{14{,}85}{0{,}045} = 330$

Avec 14,85 L, la voiture parcourt 330 km.

21 **a.**

x	4	**12**	16
V(x)	**75**	225	**300**

b. V est une fonction linaire : elle représente une situation de proportionnalité. En effet :

● les points du graphique sont alignés avec l'origine du repère.

● $\dfrac{75}{4} = 18{,}75$; $\dfrac{225}{12} = 18{,}75$ et $\dfrac{300}{16} = 18{,}75$

22 **a.** ● Le nombre choisi est 7 :

$7 \times (-5) + 7 \times 9 = -35 + 63 = 28$

● Le nombre choisi est - 3 :

$-3 \times (-5) + (-3) \times 9 = 15 - 27 = -12$

● Le nombre choisi est 1,2 :

$1{,}2 \times (-5) + 1{,}2 \times 9 = -6 + 10{,}8 = 4{,}8$

Nombre de départ	7	–3	1,2
Résultat obtenu	**28**	**–12**	**4,8**

$7 \times 4 = 28$; $-3 \times 4 = -12$

et $1{,}2 \times 4 = 4{,}8$

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

b. $f(x) = -5x + 9x = 4x$

f est une fonction linaire de coefficient 4.

23 On exprime les durées en minutes et les longueurs en m.

Temps	5 min	20 min	75 min
Distance	900 m	3 600 m	12 000 m

$\dfrac{900}{5} = 180$; $\dfrac{3\,600}{20} = 180$ et $\dfrac{12\,000}{75} = 160$

La distance n'est pas proportionnelle au temps.

Ming n'a pas couru à allure régulière.

24 **a.** ● $15 + 35 + 25 = 75$ cL

Le volume de ce cocktail est 75 cL.

● $\dfrac{150}{25} = 6$

donc $15 \times 6 = 90$ cL

Il faut 90 cL de grenadine pour 150 cL de jus d'ananas.

b. x est le volume de jus d'orange cherché.

On peut représenter les données dans le tableau de proportionnalité suivant :

6 L = 600 cL

Volume de jus d'orange (en cL)	35	x
Volume du cocktail (en cL)	75	600

En utilisant l'égalité des produits en croix :

$x = \dfrac{35 \times 600}{75} = 280$

Il faut 280 cL de jus d'orange pour un cocktail de 6 L .

25 Les points E, B, D et E, A, C sont alignés et les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On peut donc utiliser le théorème de Thalès.

Les longueurs des triangles EBA et EDC sont proportionnelles :

$\dfrac{EB}{ED} = \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{AB}{CD}$

$\dfrac{2{,}5}{6} = \dfrac{3}{EC} = \dfrac{AB}{5{,}4}$

Ainsi EC = $\dfrac{3\times6}{2,5}$ = 7,2 cm

et AB = $\dfrac{5,4\times2,5}{6}$ = 2,25 cm

26 **a.** $\dfrac{3,5}{5,6} = 0,625$; $\dfrac{4}{6,4} = 0,625$ et $\dfrac{3}{4,8} = 0,625$

Il s'agit donc d'un tableau de proportionnalité.

b. Les points E, D, H et les points C, D, I sont alignés dans le même ordre.

D'après la question **a**, on a : $\dfrac{DH}{DE} = \dfrac{DI}{DC}$

donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (EC) et (HI) sont parallèles.

27 **a.** $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{8} = 0,375$; $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$

Les longueurs des triangles ABD et ACE ne sont pas proportionnelles.

b. $\dfrac{AD}{AC} \neq \dfrac{AD}{AE}$

donc les droites (BD) et (CE) ne sont pas parallèles.

28 $\dfrac{IE}{IP} = \dfrac{5,6}{3,5} = 1,6$; $\dfrac{IL}{IN} = \dfrac{4,8}{3} = 1,6$

et $\dfrac{LE}{PN} = \dfrac{4,5}{3,5} \approx 1,61$

Les longueurs des triangles PIN et ILE ne sont pas proportionnelles donc le triangle PIN n'est pas l'image du triangle ILE par une homothétie.

29 **a.**

	BL	UE	**KE**	**KL**
Trapèze BLEU	3	2	**6**	**3**
Trapèze VERT	**6**	**4**	12	6
	VE	**TR**	KR	KE

b. $\dfrac{VE}{BL} = \dfrac{6}{3} = 2$

Le rapport de cette homothétie est 2.

30 **a.** $\dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$; $\dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

b. 9 m = 900 cm

donc : $\dfrac{12}{900} = \dfrac{1\times12}{75\times12} = \dfrac{1}{75}$

L'échelle de ce plan est $\dfrac{1}{75}$.

c. ● Une première méthode : 15 m = 1 500 cm

$1\,500 \times \dfrac{1}{75} = 20$ cm

● Une autre méthode :

$\dfrac{15 \text{ m}}{12 \text{ m}} = 1,25$ donc 15 × 1,25 = 20 cm

La diagonale de cette salle est de 20 cm sur le plan.

31 **a.** Le triangle ABC est une réduction du triangle DEF de rapport $\dfrac{1}{4}$ donc :

DE = AB × 4 = 1,5 × 4 = 6 cm

AC = DF × $\dfrac{1}{4}$ = 5 ÷ 4 = 1,25 cm

b. $\dfrac{GH}{DE} = \dfrac{9,6}{6} = 1,6$

Le rapport d'agrandissement du triangle DEF au triangle GHI est 1,6.

Ainsi : GI = DF × 1,6 = 5 × 1,6 = 8 cm.

c. $\dfrac{GH}{AB} = \dfrac{9,6}{1,5} = 6,4$ et $\dfrac{GI}{AC} = \dfrac{8}{1,25} = 6,4$

Les longueurs des triangles ABC et GHI sont proportionnelles : le coefficient de proportionnalité est 6,4.

Le triangle GHI est un agrandissement du triangle ABC de rapport 6,4.

32 $1 + \dfrac{5}{100} = 1 + 0,05 = 1,05$

Augmenter un prix de 5 % revient à le multiplier par 1,05.

Une première méthode :

120 × 1,05 = 126 €

La lampe coûte 126 €.

49 × 1,05 = 51,45 €

Le miroir coûte 51,45 €.

126 € + 51,45 € = 177,45 €

Léonie doit payer 177,45 €.

Une autre méthode :

120 € + 49 € =169 €

Les deux articles coûtent 169 €.

169 × 1,05 = 177,45 €

Léonie doit payer 177,45 €.

33 ● $1 - \dfrac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$

Diminuer un prix de 15 % revient à le multiplier par 0,85.

69 × 0,85 = 58,65

Le blouson A coûte 58,65 €.

● $1 - \dfrac{20}{100} = 1 - 0,20 = 0,80$

Diminuer un prix de 20 % revient à le multiplier par 0,80.

73 × 0,80 = 58,4

Le blouson B coûte 58,40 €.

Marin choisit donc le blouson B à 58,40 €.

34 **a.** $1 + \dfrac{2,5}{100} = 1 + 0,025 = 1,025$

Augmenter un prix de 2,5 % revient à le multiplier par 1,025.

420 × 1,025 = 430,50 €

Le téléviseur coûte 430,50 € avec le crédit.

b. 430,50 – 70,50 = 360 €

Il reste à payer 360 € en 12 mensualités.

$\dfrac{360}{12} = 30$

Le montant d'une mensualité est 30 €.

35 ① $1-\frac{5}{100}=1-0{,}05=0{,}95$

Diminuer un prix de 5 % revient à le multiplier par 0,95. Il s'agit du calcul C.

② $1+\frac{5}{100}=1+0{,}05=1{,}05$

Augmenter une valeur de 5 % revient à la multiplier par 1,05. Il s'agit du calcul A.

③ Prendre 5% d'une quantité revient à la multiplier par $\frac{5}{100}=0{,}05$. Il s'agit du calcul B.

36 $1+\frac{2}{100}=1+0{,}02=1{,}02$

Augmenter un prix de 2 % revient à le multiplier par 1,02.

- $0{,}90\times1{,}02=0{,}918$ € et $0{,}918<0{,}95$

Pour la baguette, le prix a augmenté plus que l'inflation.

- $9{,}80\times1{,}02=9{,}996$ € et $9{,}996<10{,}20$

Pour la place de cinéma, le prix a augmenté plus que l'inflation.

- $65\times1{,}02=66{,}30$ € et $66{,}30>65$

Pour la carte de bus, le prix a augmenté moins que l'inflation.

37 **a.** $315-276=39$

Entre 2007 et 2013, la masse de déchets annuelle produite par un Français a baissé de 39 kg.

$\frac{39}{315}\approx0{,}12$ or $0{,}12=\frac{12}{100}$.

Le pourcentage de baisse est d'environ 12 %.

b. $1-\frac{7}{100}=1-0{,}07=0{,}93$

Diminuer une quantité de 7 %, revient à la multiplier par 0,93.

$276\times\frac{93}{100}=256{,}68$ kg.

En 2020, pour respecter les objectifs, la masse de déchets produite en moyenne par Français, ne devra pas dépasser 256,68 kg.

38 **a.** $5{,}6-3{,}5=2{,}1$ kg

D'octobre à avril, la marmotte perd 2,1 kg.

$\frac{2{,}1}{5{,}6}=0{,}375$ or $0{,}375=\frac{37{,}5}{100}$.

La marmotte perd 37,5 % de sa masse pendant l'hiver.

b. $\frac{2{,}1}{3{,}5}=0{,}6$ or $0{,}6=\frac{60}{100}$.

La masse de la marmotte augmente de 60 % d'avril à octobre.

39 **1. a.** $30-25=5$ m^3

Entre le 1er et le 2^e trimestre, la consommation d'eau a augmenté de 5 m^3.

$\frac{5}{25}=0{,}2$ or $0{,}2=\frac{20}{100}$.

La consommation a augmenté de 20 %.

b. $30-21=9$ m^3

Entre le 3^e et le 4^e trimestre, la consommation d'eau a baissé de 9 m^3.

$\frac{9}{30}=0{,}3$ or $0{,}3=\frac{30}{100}$.

La consommation a baissé de 30 %.

2. $25-21=4$ m^3

Entre le 1er et le 4^e trimestre, la consommation d'eau a baissé de 4 m^3.

$\frac{4}{25}=0{,}16$ or $0{,}16=\frac{16}{100}$.

La consommation a baissé de 16 % et non de 10 %.

40 **1. a.** $200\times\frac{10}{100}=20$

Le prix augmente 20 €.
$200+20=220$.
Le nouveau prix est 220 €.

b. $220\times\frac{5}{100}=11$

Le prix baisse de 11 €.
$220-11=209$.
Le prix final est 209 €.

2. $1+\frac{10}{100}=1+0{,}10=1{,}1$

Augmenter une valeur de 10 % revient à la multiplier par 1,10.

Après la hausse, le prix est : $200\times1{,}10$

$1-\frac{5}{100}=1-0{,}05=0{,}95$

Diminuer une valeur de 5 % revient à la multiplier par 0,95.

Après la baisse, le prix est : $200\times1{,}10\times0{,}95$

Nadia a donc raison.

On peut remarquer que :

$200\times1{,}10\times0{,}95=209$ €

On retrouve la réponse de la question **b.**

41 **a.** $550\times\frac{16}{100}=88$

Les émissions de GES ont baissé de 88 millions de tonnes.
$550-88=462$.
En 2014, les émissions de GES ont été de 462 millions de tonnes.

b. $462\times\frac{10}{100}=46{,}2$

Les émissions de GES devront baisser de 46,2 millions de tonnes.
$462-46{,}2=415{,}8$.
En 2020, les émissions de GES devraient être de 415,8 millions de tonnes.

c. $550-415{,}8=134{,}2$

$\frac{134{,}2}{550}=0{,}244$ or $0{,}244=\frac{24{,}4}{100}$.

Les émissions de GES devront baisser de 24,4 %.

On peut remarquer que :

– diminuer une valeur de 16 % revient à la multiplier par 0,84 ;

– diminuer une valeur de 10 % revient à la multiplier par 0,90.
Ainsi $0{,}84 \times 0{,}90 = 0{,}756$
et $1 - 0{,}756 = 0{,}244$ or $0{,}244 = \dfrac{24{,}4}{100}$.
On retrouve le pourcentage de 24,4 %.

42 $1 - \dfrac{30}{100} = 1 - 0{,}3 = 0{,}70$
Diminuer une valeur de 30 % revient à la multiplier par 0,70.
On cherche le nombre x tel que :
$x \times 0{,}7 = 84$ ainsi $x = 84 \div 0{,}7 = 120$
Avant les soldes, la montre coûtait 120 €.

43 **a.** $1 + \dfrac{2}{100} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$
Augmenter une valeur de 2 % revient à la multiplier par 1,02.
$620 \times 1{,}02 = 632{,}40$
Le montant du loyer sera 632,40 €.
b. On cherche le nombre x tel que :
$x \times 1{,}02 = 357$
ainsi $x = 357 \div 1{,}02 = 350$.
Le montant actuel du loyer est 350 €.

44 **a.** $1 - \dfrac{12}{100} = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$
Diminuer une valeur de 12 % revient à la multiplier par 0,88.
$f(x) = 0{,}88x$
f est une fonction linéaire de coefficient 0,88.
b.

	Terrain A	Terrain B
Surface actuelle x (en m²)	250	**625**
Surface réduite $f(x)$ (en m²)	**220**	550

- $250\ \text{m}^2 \times 0{,}88 = 220\ \text{m}^2$
- $550\ \text{m}^2 \div 0{,}88 = 625\ \text{m}^2$

45 $1 + \dfrac{3}{100} = 1 + 0{,}03 = 1{,}03$
Augmenter une valeur de 3 % revient à la multiplier par 1,03.
On cherche le nombre x tel que :
$x \times 1{,}03 = 1\,493{,}50$
ainsi $x = 1\,493{,}5 \div 1{,}03 = 1\,450$
Le mois dernier, Norredine gagnait 1450 €.

Je m'évalue à mi-parcours

46 **b.** **47** **c.** **48** **c.** **49** **b.** **50** **a.**

Avec un logiciel

51 **2. a.** Cette formule permet de calculer le prix total HT pour les 3 cartouches achetées.
b. Dans la cellule D7, on peut saisir la formule :
= SOMME(D2:D6) ou = D2+D3+D4+D5+D6
3. a. $1 - \dfrac{5}{100} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$
Diminuer une valeur de 5 % revient à la multiplier par 0,95.
La formule à saisir est = D7*0,95 .
4. a. Dans la cellule D9, on peut saisir la formule :
= D8*0,20 .
b. Dans la cellule D10, on peut saisir la formule :
= D8 + D9 .
On peut aussi saisir la formule : = D8*1,20 .

	A	B	C	D
1		Prix à l'unité HT (en €)	Quantité	Prix HT (en €)
2	Cartouche d'encre	27	3	81
3	Imprimante	85	1	85
4	Souris sans fil	15	1	15
5	Clé USB 16 Gb	12	3	36
6	Ordinateur	599	1	599
7		TOTAL HT		816
8		TOTAL HT avec remise 5 %		775,2
9		TVA 20 %		155,04
10		TOTAL TTC		930,24

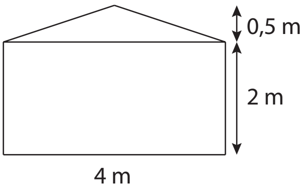
52 **c.** Dans la cellule D3, on peut saisir la formule :
= D3*1,2 .
Dans la cellule F3, on peut saisir la formule :
= F3*1,3 ; et dans la cellule G3 : = G3*1,3 .
d., **e.** et **f.**

	A	B	C	D	E	F	G
1	Prix initial (en €)	38	62	95	145	110	85
2	Pourcentage de réduction (%)	15	15	20	20	30	30
3	Prix (en €) après la 1re remise	32,3	52,7	76	116	77	59,5
4	Prix (en €) après la 2e remise de 20 %	25,84	42,16	60,8	92,8	61,6	47,6
5	Remise totale (en €)	12,16	19,84	34,2	52,2	48,4	37,4
6	Pourcentage total de réduction (%)	32	32	36	36	44	44

g. • Pour les articles B et C, les pourcentages de réduction sont 15 % et 20 %.
Le pourcentage total est 32 % : il n'est pas la somme de 15 % et 20 %.
On peut remarquer :
Réduire une valeur de 15 % revient à la multiplier par 0,85.
Réduire une valeur de 20 % revient à la multiplier par 0,80.
Réduire une valeur de 15 % puis de 20 %, revient à la multiplier par $0{,}85 \times 0{,}80 = 0{,}68$.
Or $1 - 0{,}68 = 0{,}32 = \dfrac{32}{100}$
Le pourcentage total de baisse est 32 %.
• Pour les articles D et E, les pourcentages de réduction sont 20 % et 20 %.
Le pourcentage total est 36 %, ce n'est pas la somme de 20 % et 20 %.
• Pour les articles F et G, les pourcentages de réduction sont 30 % et 20 %.
Le pourcentage total est 44 %, ce n'est pas la somme de 30 % et 20 %.

J'utilise mes compétences

53 • Les façades pentagonales peuvent être découpées en un rectangle et un triangle :



$\mathscr{A}$ (triangle) $= \dfrac{4\times0{,}5}{2} = 1\,\text{m}^2$

$\mathscr{A}$ (rectangle) $= 4 \times 2 = 8\ \text{m}^2$

● Les faces latérales sont des rectangles :
$\mathscr{A}$ (rectangle) $= 3{,}5 \times 2 = 7\ \text{m}^2$

● $\mathscr{A}$ (totale) $= 2 \times 1 + 2 \times 8 + 2 \times 7 = 32\ \text{m}^2$
La surface totale à peindre est 32 m^2.

● Il faut prévoir deux couches de vernis, c'est à dire couvrir une surface de 64 m^2.

● $\dfrac{64}{9} \approx 7{,}1$ L et $2{,}5 \times 3 = 7{,}5$ L
Il faut donc prévoir 3 pots de 2,5 L chacun.

● $35{,}80 \times 3 = 107{,}40$ €
Il faut prévoir au minimum 107,40 € pour vernir ce hangar.

54 ● On commence par calculer la longueur DF :
On sait que le triangle DEF est rectangle en E
avec DE = 5,4 m et EF = 7,2 m.
D'après l'égalité de Pythagore :

$$\begin{aligned} DE^2 + EF^2 &= DF^2 \\ DF^2 &= 5{,}4^2 + 7{,}2^2 \\ DF^2 &= 29{,}16 + 51{,}84 \\ DF^2 &= 81 \end{aligned}$$

Alors $DF = \sqrt{81} = 9$ cm.

● On vérifie si les longueurs des triangles DEF et ABC sont proportionnelles :

DE	**EF**	**DF**
5,4	7,2	9
4,5	6	7,5
AB	**BC**	**AC**

$\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{5{,}4}{4{,}5} = 1{,}2$; $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{7{,}2}{6} = 1{,}2$;

et $\dfrac{EF}{AC} = \dfrac{9}{7{,}5} = 1{,}2$

Le triangle DEF est un agrandissement du triangle ABC de rapport 1,2.

55 **Promotion 1**

● $\dfrac{20}{100} \times 1{,}5\ \text{L} = 0{,}3\ \text{L}$ et $1{,}5\ \text{L} + 0{,}3\ \text{L} = 1{,}8\ \text{L}$.
Donc la bouteille contiendrait 1,8 L de jus de fruits.

● $\dfrac{2{,}70\ €}{1{,}8} = 1{,}50\ €$
Donc 1 L de jus de fruits coûterait 1,50 €.

Promotion 2

● $\dfrac{20}{100} \times 2{,}70\ € = 0{,}54\ €$ et $2{,}70\ € - 0{,}54\ € = 2{,}16\ €$.
Donc la bouteille coûterait 2,16 €.

● $\dfrac{2{,}16\ €}{1{,}5} = 1{,}44\ €$.
Donc 1 L de jus de fruits coûterait 1,44 €.
Conclusion
1,44 < 1,50 donc la promotion 2 est la plus avantageuse pour le client.

56 ● **Site Techplus :**

$1 + \dfrac{20}{100} = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$

Augmenter une valeur de 20 % revient à la multiplier par 1,2.
Après la hausse, le prix est : $x \times 1{,}2$

$1 - \dfrac{40}{100} = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Diminuer une valeur de 40 % revient à la multiplier par 0,6.
Après la baisse, le prix est donc : $x \times 1{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}72x$

● **Site Logishop :**

$1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

Diminuer une valeur de 10 % revient à la multiplier par 0,9.
Après la baisse, le prix est donc : $x \times 0{,}9$

$1 - \dfrac{20}{100} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Diminuer une valeur de 20 % revient à la multiplier par 0,8.
Après la 2^e baisse, le prix est donc : $x \times 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}72x$
L'ordinateur aura le même prix sur les deux sites.

57 $1 + \dfrac{4}{100} = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$

Augmenter une valeur de 4 % revient à la multiplier par 1,04.
Maeva dispose donc :

● au bout d'une année de 520 € : $500 \times 1{,}04 = 520$;

● au bout de 2 ans de 540,80 € : $520 \times 1{,}04 = 540{,}8$;

● au bout de 3 ans d'environ 562,43 € :
$540 \times 1{,}04 = 562{,}432$;

● au bout de 4 ans d'environ 584,93 € :
$562{,}432 \times 1{,}04 = 584{,}929\,28$;

● au bout de 5 ans d'environ 608,33 € :
$584{,}929\,28 \times 1{,}04 \approx 608{,}33$.

Maeva devra laisser placer la somme de 500 €, pendant 5 ans, pour disposer d'au moins 600 €.
On peut remarquer que :

$$500 \times 1{,}04^5 \approx 608{,}33$$

58 On note x la population de 1950. La population actuelle est $0{,}32x$ $(1 - 0{,}68 = 0{,}32)$.
Pour revenir à la population de 1950 il faut multiplier la population actuelle par $\dfrac{1}{0{,}32}$ soit 3,125.
La population actuelle doit donc augmenter de 212,5 % (312,5 % – 100 % = 212,5 %).

59 On note x le coût total de fabrication.

● Le coût de la main d'œuvre représente $0{,}60x$. Augmenter une valeur de 5 % revient à la multiplier par 1,05. Ainsi le coût de la main d'œuvre est : $1{,}05 \times 0{,}60x = 0{,}63x$.

● Le coût des matières premières représente $0{,}40x$. Augmenter une valeur de 15 % revient à la multiplier par 1,15. Ainsi le coût des matières premières est :
$1{,}15 \times 0{,}40x = 0{,}46x$.

● $0{,}46x + 0{,}63x = 1{,}09x$
Le coût de fabrication de ce vêtement est passé de x € à $1{,}09x$ € : il a été multiplié par 1,09 ce qui correspond à une augmentation de 9 %.

60 On note x le côté du carré et d sa diagonale.
D'après l'égalité de Pythagore :

$$d^2 = x^2 + x^2$$
$$d^2 = 2x^2$$
$$d = x \times \sqrt{2}$$

La diagonale d'un carré est donc proportionnelle à la longueur de son côté : le coefficient de proportionnalité est $\sqrt{2}$.

61 **a.** $\dfrac{39,3}{2} = 19,65$; $\dfrac{47,2}{2,4} \approx 19,67$ et $\dfrac{58,9}{3} \approx 19,63$
Les quotients obtenus sont « proches », ce qui explique la remarque de Tom.
b. $V(x) = \pi \times R^2 \times x$
On note : $k = \pi \times R^2$, k est un nombre fixé.
Ainsi $V(x) = k \times x$
Donc le volume est proportionnel à la hauteur.
c. $V(x) = \pi \times R^2 \times x$
Pour $x = 5$ dm, le volume est 98,2 dm^3.
On cherche R tel que : $\pi \times R^2 \times 5 = 98{,}2$

$R^2 = \dfrac{98{,}2}{5\pi} \approx 6{,}25$

Ainsi : $R = \sqrt{\dfrac{98{,}2}{5\pi}} \approx 2{,}5$ dm

62 **a.** ● $1{,}5 \times 1{,}2 \times 10 = 18$ m^2
La surface totale des panneaux est 18 m^2.

● Le graphique indique que la production d'électricité est proportionnelle à la surface des panneaux.
Pour 4 m^2, on peut produire 480 kWh :

$\dfrac{18}{4} = 4{,}5$ et $480 \times 4{,}5 = 2\,160$

Pour 18 m^2 de panneaux, on peut produire 2 160 kWh en une année.
b. $0{,}55 \times 2\,160 = 1\,188$ €.
Chaque année, l'installation de Victor lui rapportera 1 188 €.
$1\,188 \times 9 = 10\,692$ €
$1\,188 \times 10 = 11\,880$ €
Victor aura amorti son installation au bout de 10 ans.

63 D'après le graphique, $f(15) = 12$ et $f(20) = 16$

● $\dfrac{12}{15} = 0{,}8 = \dfrac{4}{5}$ donc c'est la formule ❷ qui convient.

● Comme (15) = 12 , le tableau B ne peut pas convenir.

Pour le tableau A : $f(6{,}5) = \dfrac{4}{5} \times 6{,}5 = 5{,}2 \neq 5$

Donc le tableau A ne convient pas.

$f(30) = \dfrac{4}{5} \times 30 = 24$.

Le tableau C convient.

64 ● **Traduction**
Ethan a commandé un casque sur un site Internet.
a. Recopier et compléter sa commande :

Casque	85 $
Réduction – 30 %	……..
Frais de livraison	5,10 $
TOTAL de la commande	……..

b. Calculer le pourcentage de réduction final.

● **Solution**

a. ● $85 \times \dfrac{30}{100} = 25{,}5$ $

Le montant de la réduction est 25,5 $.
● $85 - 25{,}5 + 5{,}10 = 64{,}60$ $
Le casque coûte 64,60 $.

Casque	85 $
Réduction – 30 %	**25,5 $**
Frais de livraison	5,10 $
TOTAL de la commande	**64,60 $**

b. $85 - 64{,}60 = 20{,}40$ $

$\dfrac{20,40}{85} = 0{,}24 = \dfrac{24}{100}$

Finalement, le prix du casque a baissé de 24 %.

65 **a. Faux.**
AR = 3 × AN donc AR ≠ AN donc Les triangles NOA et DAR ne sont pas symétriques par rapport au point A.
b. Vrai.
On vérifie les conditions :
● AR = 3 × AN et AO = 3 × AD
● N, A, R et O, A, D sont alignés dans le même ordre
● (DR)//(AN)
DAR est donc l'image du triangle NAO par une homothétie de centre A.
c. Vrai.

$\dfrac{AR}{AN} = 3$ et $\dfrac{DR}{NO} = 3$

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

66 $1 - \dfrac{30}{100} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Diminuer une valeur de 30 % revient à la multiplier par 0,7.
$1{,}8 \times 0{,}7^4 = 0{,}432\,18$ mg
$0{,}432\,18 < 0{,}5$

Au bout de 4 ans, la quantité de médicament présente dans le sang est 0,432 18 mg.
Donc l'affirmation est vraie.

67 Agrandir dans un rapport 300 % revient à multiplier les longueurs par 3.
Réduire dans un rapport de 25 % revient à multiplier les longueurs par 0,25.
Agrandir dans un rapport de 150 % revient à multiplier les longueurs par 1,5.
$3 \times 0{,}25 \times 1{,}5 = 1{,}125$
Ainsi les longueurs sont multipliées par 1,125, ce qui correspond à un agrandissement dans un rapport de 112,5 %.

68 • D'après ce premier tableau, le côté a été réduit d'un pourcentage compris entre 7 % et 8 %.

	A	B	C	D
1	Pourcentage de réduction de la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie le volume	Pourcentage de réduction du volume
2	1	0,99	0,970299	2,9701
3	2	0,98	0,941192	5,8808
4	3	0,97	0,912673	8,7327
5	4	0,96	0,884736	11,5264
6	5	0,95	0,857375	14,2625
7	6	0,94	0,830584	16,9416
8	7	0,93	0,804357	19,5643
9	8	0,92	0,778688	22,1312

On a saisi :
B2 = 1 – A2/100 ; C2 = B2*B2*B2 ; C2 = (1-C2)*100

• En modifiant les cellules A2 et A3 puis en étirant la formule, on obtient ce nouveau tableau.

	A	B	C	D
1	Pourcentage de réduction de la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie la longueur du côté	Nombre par lequel on multiplie le volume	Pourcentage de réduction du volume
2	7	0,93	0,804357	19,5643
3	7,1	0,929	0,801765089	19,8234911
4	7,2	0,928	0,799178752	20,0821248

D'après ce second tableau, le pourcentage dont a été réduit le côté est compris entre 7,1 % et 7,2 %.

69 On appelle x la largeur de ce rectangle et y sa longueur.
L'aire du rectangle initial est $\mathscr{A} = xy$
La largeur diminue de 10 % alors la nouvelle largeur x' est égale à $0{,}9x$.
La longueur augmente de 10 % alors la nouvelle longueur y' est égale à $1{,}1y$.
L'aire du rectangle modifié est

$$\mathscr{A}' = x'y' = 0{,}9x \times 1{,}1y$$
$$\mathscr{A}' = 0{,}99xy$$

C'est à dire : $\mathscr{A}' = 0{,}99\mathscr{A}$

$1 - 0{,}99 = 0{,}01$ or $0{,}01 = \dfrac{1}{100}$

Donc l'aire de ce rectangle diminue de 1 %.

70 • 50 % + 100 % = 150 % et $\dfrac{150}{100} \times \dfrac{40}{100} = \dfrac{60}{100}$ donc l'année prochaine les dépenses pour les sports représenteront 60 % des dépenses pour les loisirs de cette année.

• 5 % + 100 % = 105 % et $\dfrac{105}{100} \times \dfrac{20}{100} = \dfrac{21}{100}$ donc l'année prochaine les dépenses pour le cinéma représenteront 21 % des dépenses pour les loisirs de cette année.

• 5 % + 100 % = 105 % et $\dfrac{105}{100} \times \dfrac{30}{100} = \dfrac{31{,}5}{100}$ donc l'année prochaine les dépenses pour la musique représenteront 31,5 % des dépenses pour les loisirs de cette année.

• 25 % + 100 % = 125 % et $\dfrac{125}{100} \times \dfrac{10}{100} = \dfrac{12{,}5}{100}$ donc l'année

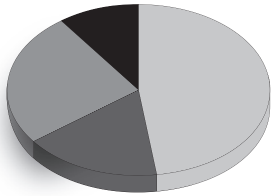
prochaine les dépenses pour la lecture représenteront 125 % des dépenses pour les loisirs de cette année.

• 60 % + 21 % + 31,5 % + 12,5 % = 125 % donc l'année prochaine les dépenses pour les loisirs représenteront 125 % des dépenses de cette année.

• On peut donc construire ce tableau de proportionalité :

	Sports	Cinéma	Musique	Lecture	Total
Pourcentage	60	21	31,5	12,5	125
Angle en degré	172,8	60,48	90,72	36	360

D'où ce diagramme circulaire :



71 On appelle x le taux.
Augmenter une valeur de x revient à la multiplier par

$y = 1 + \dfrac{x}{100}$

Pour que la somme double en 10 ans, on écrit l'équation :

$$1000 \times y^{10} = 2\,000$$
$$y^{10} = 2$$

On peut réaliser des essais successifs avec la calculatrice ou utiliser le tableur :
D'après ce premier tableau, y est compris entre 1 et 1,1.

	A	B
1	y	y^{10}
2	1	1
3	1,1	2,5937424601

D'après ce deuxième tableau, y est compris entre 1,07 et 1,08.

	A	B
1	y	y^{10}
2	1,05	1,6288946268
3	1,06	1,7908476965
4	1,07	1,9671513573
5	1,08	2,1589249973

D'après ce deuxième tableau, y est compris entre 1,071 et 1,072.

	A	B
1	y	y^{10}
2	1,075	2,0610315622
3	1,072	2,0042313617
4	1,071	1,9856134608

Comme $y = 1 + \dfrac{x}{100}$, alors x est compris entre 7,1% et 7,2 %. M. Avare doit donc placer son argent à un taux compris entre 7,1 et 7,2 %.

72 Diminuer une valeur de 10 %, revient à la multiplier par 0,9.
On peut utiliser le tableur : il semble qu'Ulysse parcourra moins de 100 km et qu'il n'arrivera jamais au bout de son voyage.

	A	B	C
1	Jour	Distance parcourue ce jour-là	Distance totale parcourue
2	1	10,0000000	10,0000000
3	2	9,0000000	19,0000000
4	3	8,1000000	27,1000000
5	4	7,2900000	34,3900000
6	5	6,5610000	40,9510000
202	201	0,0000000	99,9999999
203	202	0,0000000	99,9999999
204	203	0,0000000	99,9999999
205	204	0,0000000	100,0000000
206	205	0,0000000	100,0000000
207	206	0,0000000	100,0000000
208	207	0,0000000	100,0000000
907	906	0,0000000	100,0000000
908	907	0,0000000	100,0000000
909	908	0,0000000	100,0000000
910	909	0,0000000	100,0000000
911	910	0,0000000	100,0000000
912	911	0,0000000	100,0000000
913	912	0,0000000	100,0000000
914	913	0,0000000	100,0000000
915	914	0,0000000	100,0000000

Dossier Brevet

73 • Il y aura 58 personnes à prévoir.
• Calcul des proportions :

Ingrédients	Quantité pour 4 personnes	Quantité pour 1 personne	Quantité pour 58 personnes
Beurre	50 g	12,5 g	725 g
Haricots	400 g	100 g	5 800 g
Bœuf	500 g	125 g	7 250 g
Oignons	2	0,5	29
Concentré	65 g	16,25 g	942,5 g

Le cuisinier ne pourra pas recevoir les 8 personnes supplémentaires : il n'aura pas assez de bœuf haché.

$\dfrac{7\ 000}{125} = 56$

Il pourra recevoir 6 personnes supplémentaires.

74 **a.** $1 - \dfrac{30}{100} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Diminuer une valeur de 30 % revient à la multiplier par 0,7.

Donc $\dfrac{49}{0{,}7} = 70$ €

L'ancien prix est 70 €.

b. $80 - 60 = 20$ €

La réduction est 20 €.

$\dfrac{20}{80} = 0{,}25$

Le pourcentage de réduction est 25 %.

75 • $80 \times 0{,}04 = 3{,}2$ kg

Loan a perdu 3,2 kg.

$80 - 3{,}2 = 76{,}8$ kg.

À la fin du triathlon, il pèse 76,8 kg.

• $\dfrac{3{,}2}{76{,}8} \approx 0{,}042$ or $0{,}042 = \dfrac{1{,}2}{100}$

Le poids doit augmenter de 4,2 % environ.

76 **1.** Le magasin C est le seul qui propose une réduction de 30 % sur chaque cahier acheté, donc aussi sur le premier cahier.
Ainsi si on n'achète qu'un seul cahier, c'est le magasin C qui est le plus intéressant.

2. On note x le prix d'un cahier :

a. Pour l'achat de 2 cahiers :

Magasins	**Prix** (en €)
Magasin A	$2x$
Magasin B	$x + 0{,}5x = 1{,}5x$
Magasin C	$2 \times 0{,}7x = 1{,}4x$

Ainsi si on achète deux cahiers, c'est le magasin C qui est le plus intéressant.

b. Pour l'achat de 3 cahiers :

Magasins	**Prix** (en €)
Magasin A	$2x$
Magasin B	$x + 0{,}5x + x = 2{,}5x$
Magasin C	$3 \times 0{,}7x = 2{,}1x$

Ainsi si on achète trois cahiers, c'est le magasin A qui est le plus intéressant.

3. On appelle x le prix d'un cahier :
Avec la réduction de 30 %, le prix à payer est $0{,}7x$.
Avec la carte de fidélité, le prix est multiplié par 0,9.
Ainsi, le prix final est : $0{,}9 \times 0{,}7x = 0{,}63x$.

$1 - 0{,}63 = 0{,}37$ or $0{,}37 = \dfrac{37}{100}$

Le pourcentage total de réduction est 37 %.

77 **a.** $\dfrac{30 \text{ min}}{60} = 0{,}5$ h

La durée du trajet est 0,5 h.

$v = \frac{d}{t} = \frac{17}{0{,}50} = 34$ km/h

b. $t = \frac{d}{v} = \frac{17}{20} = 0{,}85$ h

0,85 h × 60 = 51 min

Le Ferry Vogues met 0,85 h soit 51 min pour faire la traversée. Son arrivée est donc prévue à 6 h 51 min.

78 **1. a.** Le volume de glace est environ 6,5 L.

b. Le volume d'eau est environ 9,3 L.

2. Le volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide, car la représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.

3. 10,8 – 10 = 0,8 L donc $\frac{0{,}8}{10} = 0{,}08 = \frac{8}{100}$

Le pourcentage d'augmentation est de 8 %.

79 • AC = AE + EC = 36 + 72 = 108 cm

Le triangle DEC est une réduction du triangle BAC donc :

$\frac{CE}{CA} = \frac{DE}{AB}$ d'où $\frac{72}{108} = \frac{DE}{72}$

Ainsi DE = $\frac{72 \times 72}{108} = 48$ cm.

• Le triangle DCF est une réduction du triangle DEC donc :

$\frac{DC}{EC} = \frac{FD}{DE} = \frac{FC}{DC}$ c'est-à-dire $\frac{DC}{72} = \frac{40}{48} = \frac{50}{DC}$

donc DC = $\frac{72 \times 40}{48} = 60$ cm ou $\frac{48 \times 50}{40} = 60$ cm

80 **a.** $\frac{310{,}5}{3} = 103{,}5$

Pour trois enfants, le prix de revient est de 103,5 € par enfant.

b. • **Facture 1 :**

Prix total avant réduction : 115 × 2 = 230 €

Montant de la réduction : 230 × $\frac{5}{100}$ = 11,50 €

Prix total à payer : 230 – 11,50 = 218,5 €

• **Facture 2 :**

Prix total avant réduction : 115 × 3 = 345 €

Montant de la réduction : 345 – 310,5 = 34,5€

Facture 1	
Prix d'un stage	115 €
Nombre d'enfants inscrits	2
Prix total avant réduction	**230** €
Montant de la réduction (5 % du prix total avant réduction)	**11,5** €
Prix total à payer	**218,50** €

Facture 2	
Prix d'un stage	115 €
Nombre d'enfants inscrits	3
Prix total avant réduction	**345** €
Montant de la réduction (10 % du prix total avant réduction)	**34,5** €
Prix total à payer	310,50 €

Pourcentage de réduction : $\frac{34{,}5}{345} = 0{,}1$ soit 10 %.

c. L'affirmation est fausse, le pourcentage de réduction est de 5 % pour chaque enfant.

$\frac{218{,}5}{2} = 109{,}25$

Pour deux enfants, le prix de revient est de 109,25 € par enfant.

Montant de la réduction : 115 – 109,25 = 5,75 €

Pourcentage de réduction : $\frac{5{,}75}{115} = 0{,}05$ soit 5 %.

81 • **Voiture n°27 :**

300 × 13,629 = 4 088,7 km

Cette voiture a parcouru 4 088,7 km en 24 h.

$v = \frac{d}{t} = \frac{4\,088{,}7}{24} = 170{,}3625$ km/h

La voiture n°27 a roulé à la vitesse moyenne de 170,4 km/h environ.

• **Voiture n°28 :**

108 × 1 609 = 17 3772 m

soit 173,772 km en 1 heure.

La voiture n°28 a roulé à la vitesse moyenne de 173,8 km/h environ. Elle a donc été plus rapide que la voiture n°27.

82 **a.** • **On vérifie l'encombrement :**

Avec 5 parpaings dans la largeur, on obtient :

5 × 50 = 250 cm et 250 cm < 260 cm.

Avec 9 parpaings dans la hauteur, on obtient :

9 × 20 = 180 cm et 180 cm < 184 cm.

Avec 15 parpaings dans la longueur, on obtient :

15 × 10 = 150 cm et 150 cm < 156 cm.

Alors : 9 × 5 × 15 = 675

Ainsi on peut mettre 675 parpaings dans le fourgon. Le fourgon est assez grand pour transporter 300 parpaings.

• **On vérifie la masse :**

Le fourgon peut transporter 1,7 tonne.

300 × 10 = 3 000 kg soit 3 tonnes.

Ce bricoleur devra effectuer deux allers-retours pour transporter les 300 parpaings jusqu'à sa maison. Donc il peut transporter 150 parpaings à chaque voyage.

b. • (2 × 10) × 2 = 40 km

Il parcourt 40 km en deux allers-retours,

donc le tarif de la location sera de 55 €.

• Carburant : le fourgon consomme 8 litres aux 100 km.

$8 \times \frac{40}{100} = 3{,}2$ L

Pour parcourir 40 km, il consomme 3,2 L.

3,2 × 1,1 = 3,52 €

Le carburant coûte 3,52 €.

• 55 + 3,52 = 58,52 €.

Le coût total sera donc 58,52 €.

c. $\frac{30}{48} = 0{,}625$ et $\frac{50}{55} \approx 0{,}909$

Les tarifs de location du fourgon ne sont pas proportionnels.

83 • $30 + 31 + 31 = 92$
Du 1er juin au 31 août, il y a 92 jours.
$92 \times 0,75 = 69$
Il y a 69 jours de soleil.
$92 - 69 = 23$
Il y a 23 jours de temps pluvieux et gris.

• Sur la plage :
$3 \times 2\,500 = 7\,500$ €
Peio paiera 7 500 € de location pour la paillote.
$69 \times 500 = 34\,500$ €
Au total, il gagnera 34 500 € les jours de soleil.
$23 \times 50 = 1\,150$ €
Au total, il gagnera 1 150 € les autres jours.
$34\,500 + 1\,150 - 7\,500 = 28\,150$ €
Avec la paillotte, il gagnera 28 150 € sur 3 mois.

• En boutique :
$60 \times 92 = 5\,520$ €
Peio paiera 5 520 € de location pour la boutique.
$69 \times 350 = 24\,150$ €
Au total, il gagnera 24 150 € les jours de soleil.
$23 \times 300 = 6\,900$ €
Au total, il gagnera 6 900 € les autres jours.
$24\,150 + 6\,900 - 5\,520 = 25\,530$ €
En boutique, il gagnera 25 530 € sur 3 mois.

Peio gagnera plus d'argent avec une paillotte sur la plage.

Étudier l'effet d'un agrandissement-réduction

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le cycle 3 et le début du cycle 4

- Les attendus de fin de cycle 3, pour le thème « Espace et Géométrie », indiquent que les élèves savent reconnaître et utiliser quelques relations géométriques (entre autres des notions d'agrandissement et de réduction).

– On associe la proportionnalité aux agrandissements-réductions.
– On reproduit une figure en respectant une échelle.
– On reproduit une figure à partir d'un modèle.
– On utilise une échelle donnée par des éléments déjà tracés.
– On apprend à mesurer des longueurs, on identifie les angles d'une figure et on les mesure.

- Au cycle 4, les élèves valident leurs conjectures par le raisonnement et la démonstration en utilisant les propriétés vues au cycle 3 et les nouvelles introduites au cycle 4 (théorèmes de Pythagore, de Thalès…).

2 Les activités

Activité 1

Après avoir construit deux figures simples : un rectangle et un triangle isocèle, en connaissant les dimensions réelles et l'échelle écrite sous forme d'une écriture fractionnaire, l'objectif de cette activité est d'établir le rapport entre les aires lors d'une réduction.

Activité 2

Avec cette activité, il s'agit d'étudier un objet en 3D. L'objectif de cette activité est donc de vérifier que le rapport entre les volumes est k^3.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

– Une définition est proposée. Elle est formulée en s'appuyant sur la construction d'un agrandissement ou d'une réduction d'une figure.
Elle est généralisée en utilisant, pour le rapport, la lettre k. Suit ensuite, l'exposé des trois cas possibles.

– Le paragraphe 2 « Effets sur les longueurs et les angles » énonce la propriété vue lors de l'activité 1. On retrouve les rapports du théorème de Thalès.

– Le paragraphe 3 « Effets sur les aires et les volumes » énonce les relations entre les aires vues avec l'activité 1 et entre les volumes vues avec l'activité 2.

Exercice résolu

Avec cet exercice de construction, les élèves doivent organiser les différentes étapes pour réaliser la figure.
Pour cet exercice, le rapport n'est pas donné, il faut le calculer à partir de dimensions données.
Une fois le rapport calculé, il faut l'utiliser pour calculer une dimension non donnée.
Cet exercice permet de mettre en application la conservation des angles.

4 Compléments

Agrandissement-réduction

Quelques exercices reposent sur une simple reconnaissance visuelle de figures agrandies ou réduites. Elles peuvent être données, comme pour l'exercice 6, ou doivent être construites comme pour l'exercice 18.
Une vérification par le calcul est parfois nécessaire, voire demandée.

Effets sur les longueurs et les angles

Les exercices s'appuient souvent sur la construction d'une figure. Ils portent sur la recherche de l'une des trois données : rapport, dimension initiale et dimension finale.
L'exercice 27 fait appel à un objet familier : un écran de téléphone.

Effets sur les aires et les volumes

Dès la rubrique « À l'oral », on rencontre des questions sur les effets des agrandissements ou des réductions sur les aires (exercices 9 et 10) et les volumes (exercices 11 et 13).
Les exercices sont tantôt des situations concrètes comme l'exercice 33 qui porte sur la statue de la Liberté ou le 27 sur l'écran d'un téléphone et tantôt des figures purement géométriques comme dans les exercices 21, 28… Tous ces exercices demandent des calculs.

J'utilise mes compétences

De nombreuses situations concrètes sont proposées. Très souvent, une prise d'initiatives est nécessaire.

Narration de recherche

On reconnaît le flocon de Koch. On peut consulter le site
http://aesculier.fr/fichiersMaple/koch/koch.html
pour voir quelques constructions animées.

Dossier brevet

– La première partie permet de réviser efficacement les différentes propriétés.
– La deuxième partie propose deux problèmes avec prises d'initiatives.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

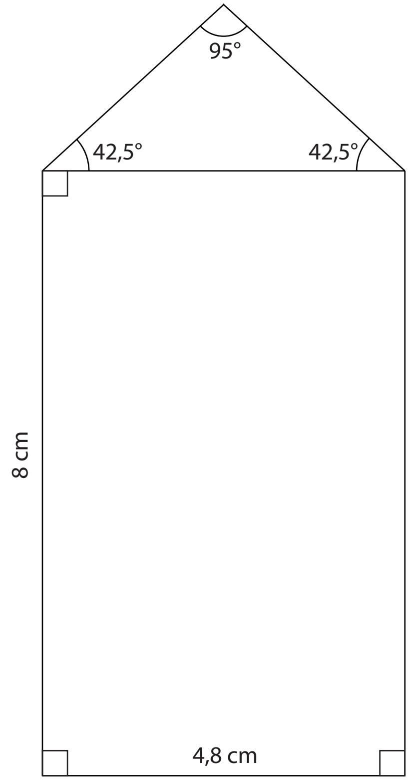
1. c. ; **2. a.** ; **3. a.** et **c.** ; **4. b.** ; **5. a.** et **c.**

Je découvre

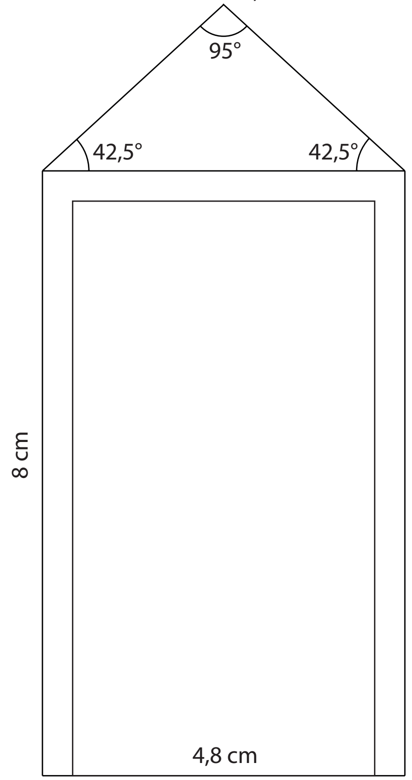
Activité 1

a. 120 cm × 0,04 = 4,8 cm
(180° – 95°) : 2 = 42,5° ; 200 cm × 0,04 = 8 cm

En vraie grandeur, le rectangle mesure 4,8 cm sur 8 cm.



b. (La porte, qui sur la photo est dessinée en blanc, est représentée en noir sur le dessin.)



c. $\mathscr{A} = 1\text{m} \times 1{,}90\text{ m} = 1{,}90\text{ m}^2$

L'aire de la porte en vraie grandeur est $1{,}90\text{ m}^2$.

$\mathscr{A}' = 0{,}04\text{ m} \times 0{,}076\text{ m} = 0{,}003\,04\text{ m}^2$

L'aire de la porte sur la figure est $0{,}003\,04\text{ m}^2$.

$k = \dfrac{0{,}003\ 04}{1{,}90} = 0{,}001\,6$

Le rapport k vaut 0,001 6.

On remarque que $0{,}001\,6 = 0{,}04^2$.

d. $k = \dfrac{0{,}048 \times 0{,}08}{1{,}2 \times 2} = \dfrac{0{,}003\ 84}{2{,}4} = 0{,}001\,6$

On retrouve le même rapport.

Activité 2

a.

	Parallélépipède rectangle			Cube supérieur
	largeur	profondeur	hauteur	arête
Stèle	**135 cm**	30 cm	**90 cm**	**30 cm**
Maquette	**27 cm**	**6 cm**	**18 cm**	6cm

b. ● $\mathscr{V}$ en $\text{cm}^3 = 135 \times 30 \times 90 = 364\,500$

Le volume du parallélépipède rectangle de la stèle est $364\,500\text{ cm}^3$.

● $\mathscr{V}'$ en $\text{cm}^3 = 27 \times 6 \times 18 = 2\,916$

Le volume du parallélépipède rectangle de la maquette est $2\,916\text{ cm}^3$.

● $k = \dfrac{\mathscr{V}'}{\mathscr{V}} = \dfrac{2\ 916}{364\ 500} = 0{,}008$

Or, $0{,}2^3 = 0{,}008$. Donc le rapport k est bien $0{,}2^3$.

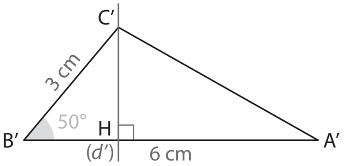
c. $\dfrac{6^3}{30^3} = \dfrac{6^3}{6^3 \times 5^3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125} = 0{,}008$

On retrouve le même rapport que dans la question **b.**

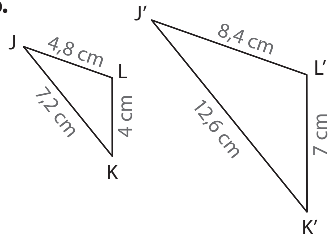
J'applique le cours

2 $\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$. Le coefficient est 1,5.

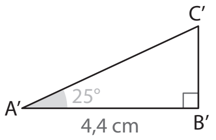
$B'C' = BC \times 1{,}5 = 2\text{ cm} \times 1{,}5 = 3\text{ cm}$



3 **a.** et **b.**



4 On peut calculer la mesure de l'angle de sommet A :
$\widehat{BAC} = 90° - \widehat{ACB} = 90° - 65° = 25°$



À l'oral

5 $\dfrac{1,2}{0,6} = 2$

Le rapport d'agrandissement est 2.

6 Pour un agrandissement ou une réduction, les angles sont les mêmes, or, ceux des deux losanges sont différents donc l'un n'est pas l'agrandissement de l'autre.

7 Le rapport de réduction est $k = \dfrac{1\text{ cm}}{3\text{ cm}} = \dfrac{1}{3}$.

$\widehat{NMP} = 50°$ puisque les angles sont conservés dans une réduction.

8 20 cm : 4 = 5 cm

Le côté du carré ABCD, c'est-à-dire la longueur initiale, mesure 5 cm et le côté du carré réduit mesure 4 cm.

On sait que le rapport k est tel que :

$k = \dfrac{\text{longueur obtenue}}{\text{longueur initiale}} = \dfrac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0,8.$

Le rapport de réduction est 0,8.

9 $0,2^2 = 0,04$

L'aire est multipliée par 0,04.

10 **a.** $\dfrac{4}{9} = \dfrac{2^2}{3^2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

Le rapport de réduction est $\dfrac{2}{3}$.

b. $18 \times \dfrac{4}{9} = 8$.

L'aire du petit carré est 8 cm^2.

11 **a.** $27 = 3^3$.

Le rapport d'agrandissement est 3.

b. $3^2 = 9$.

L'aire de chaque face est multipliée par 9.

12 $\dfrac{60}{15} = 4$ or $\dfrac{112}{25} \neq 4$ donc le terrain de foot n'est pas un agrandissement de rapport 4 du terrain de basket ou, ce qui revient au même, le terrain de basket n'est pas une réduction du terrain de foot.

13 Le rapport est 5, donc les volumes sont dans le rapport $5^3 = 125$.

Il faudra verser 125 fois le petit récipient pour remplir le grand.

Calcul mental

14 **a.** 4 cm × 0,7 = 2,8 cm et 7 cm × 0,7 = 4,9 cm

EFGH a pour dimensions 2,8 cm et 4,9 cm.

b. 4 cm × 1,5 = 6 cm et 7 cm × 1,5 = 10,5 cm

IJKL a pour dimensions 6 cm et 10,5 cm.

15 $8 = 2^3$

Le cube dont le volume est 8 cm^3 a une arête de 2 cm.

$\dfrac{2\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \dfrac{1}{2}$

Le rapport de réduction est $\dfrac{1}{2}$ soit 0,5.

16 $1\,000 = 10^3$

Le cube dont le volume est 1 000 cm^3 a une arête de 10 cm.

$\dfrac{10\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 2$

Le rapport d'agrandissement est 2.

17 Dans un agrandissement, les mesures des angles sont conservées, donc :

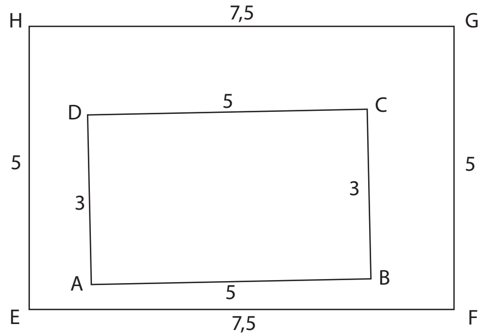
$\widehat{B'A'C'} = 38°$ et $\widehat{A'B'C'} = 110°$.

Les longueurs sont multipliées par le rapport d'agrandissement, donc :

A'B' = 4 cm × 2,5 = 10 cm

Je m'entraîne

18 **a.**



Les mesures indiquées sont en cm.

b. $\dfrac{7,5}{5} = 1,5$ et $\dfrac{5}{3}$ sont deux rapports différents donc, EFGH n'est pas un agrandissement de ABCD.

19 $\dfrac{1,8\text{ cm}}{2,7\text{ cm}} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{4,5}{6,8} \neq \dfrac{2}{3}$

Le cylindre vert n'est pas un agrandissement du cylindre bleu.

20 $\dfrac{2,8}{17,1} = \dfrac{1,8}{11,2} = \dfrac{9}{56}, \dfrac{5,4}{1,14} = \dfrac{19}{90}$

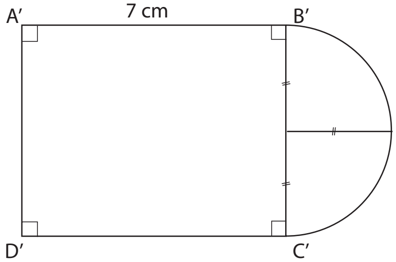
Les rapports ne sont pas égaux donc le morceau de sucre n'est pas une réduction de la boîte de sucre.

21 Les triangles ❶ et ❹, en effet, $\dfrac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{0,75\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 0,75 = \dfrac{3}{4}$.

Les triangles ❷ et ❺, en effet, $\dfrac{0{,}9\text{ cm}}{0{,}6\text{ cm}} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{3{,}3\text{ cm}}{2{,}2\text{ cm}} = \dfrac{3}{2}$.

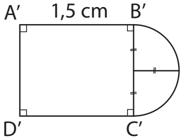
22 $7 : 2 = 3{,}5$
Le rapport d'agrandissement est 3,5.
$1{,}6\text{ cm} \times 3{,}5 = 5{,}6\text{ cm}$

Échelle 1/2



23 $\dfrac{1{,}2\text{ cm}}{1{,}6\text{ cm}} = \dfrac{3}{4}$

Le rapport de réduction est $\dfrac{3}{4}$.



(Figure réalisée en vraie grandeur : A'D' mesure 1,2 cm)

24 **a.** $\dfrac{10\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$
Le nombre k est 2,5, c'est un agrandissement.
$6\text{ cm} \times 2{,}5 = 15\text{ cm}$ donc B'C' = 15 cm.
$5\text{ cm} \times 2{,}5 = 12{,}5\text{ cm}$ donc A'C' = 15 cm.
b. $\dfrac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$
Le rapport est 0,8, c'est une réduction.
$6\text{ cm} \times 0{,}8 = 4{,}8\text{ cm}$ donc B'C' = 4,8 cm.
$4\text{ cm} \times 0{,}8 = 3{,}2\text{ cm}$ donc A'B' = 3,2 cm.

25 $\text{DE} = 12\text{ m} \times \dfrac{1}{200} = \dfrac{1200\text{ cm}}{200} = 6\text{ cm}$

$\text{EF} = 9\text{ m} \times \dfrac{1}{200} = \dfrac{900\text{ cm}}{200} = 4{,}5\text{ cm}$

$\text{DF} = 15\text{ m} \times \dfrac{1}{200} = \dfrac{1500\text{ cm}}{200} = 7{,}5\text{ cm}$

	DE	EF	DF
Dimensions réelles	12 m	9 m	15 m
Dimensions du dessin	**6 cm**	**4,5 cm**	**7,5 cm**

DE mesure 6 cm, EF mesure 4,5 cm et DF mesure 7,5 cm.

26 $k = \dfrac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.
Le rapport de réduction est 0,6.
$7\text{ cm} \times 0{,}6 = 4{,}2\text{ cm}$
La hauteur du prisme réduit doit être 4,2 cm.

27 **a.** $\dfrac{15{,}4\text{ cm}}{8{,}8\text{ cm}} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$
Le rapport d'agrandissement est $\dfrac{7}{4}$ soit 1,75.
b. $5\text{ cm} \times 1{,}75 = 8{,}75\text{ cm}$
La largeur de la photo imprimée est 8,75 cm.

28 **1. a.** $k = \dfrac{2{,}1\text{ cm}}{2{,}8\text{ cm}} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$
Le rapport de réduction est 0,75.
b. $\text{EF} = 1{,}2\text{ cm} \times 0{,}75 = 0{,}9\text{ cm}$
Le segment [EF] mesure 0,9 cm.
c. $\widehat{\text{DEF}} = 100°$
L'angle $\widehat{\text{DEF}}$ mesure 100°.
2. $k' = \dfrac{2{,}8\text{ cm}}{2{,}1\text{ cm}} = \dfrac{4}{3}$
La valeur exacte de cet agrandissement est $\dfrac{4}{3}$.

29 **1re façon :**
Aire du triangle ABC :
$\dfrac{7{,}5\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{2} = 22{,}5\text{ cm}^2$
Le rapport de réduction est $\dfrac{4}{5}$, donc l'aire est multipliée par $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$.
Aire de EFG :
$22{,}5\text{ cm}^2 \times \dfrac{16}{25} = 14{,}4\text{ cm}^2$
L'aire du triangle EFG est donc 14,4 cm².
2e façon :
$7{,}5\text{ cm} \times \dfrac{4}{5} = 6\text{ cm}$
$6\text{ cm} \times \dfrac{4}{5} = 4{,}8\text{ cm}$
Aire de EFG :
$\dfrac{6\text{ cm} \times 4{,}8\text{ cm}}{2} = 14{,}4\text{ cm}^2$
L'aire du triangle EFG est donc 14,4 cm².

30 Le rapport de réduction est $\dfrac{1}{20}$, donc les volumes sont multipliés par $\left(\dfrac{1}{20}\right)^3 = \dfrac{1}{8\,000}$.
$900\text{ m}^3 \times \dfrac{1}{8\,000} = 0{,}112\,5\text{ m}^3 = 112{,}5\text{ dm}^3$
Le volume de la maquette est 112,5 dm³.

31 **a.** $73\text{ m} \times \dfrac{1}{125} = 0{,}584\text{ m} = 58{,}4\text{ cm}$
La maquette mesure 58,4 cm de long.
b. $540{,}8\text{ cm}^2 \times 125^2 = 8\,450\,000\text{ cm}^2 = 845\text{ m}^2$
L'aile de l'avion a une aire de 845 m².
c. $310\,000\text{ L} = 310\,000\,000\text{ cm}^3$
$310\,000\,000\text{ cm}^3 \times \left(\dfrac{1}{125}\right)^3 = 158{,}72\text{ cm}^3$

La capacité du réservoir de la maquette est 158,72 cm^3.

32 **a.** 6 000 km = 6 000 000 000 mm
12 cm = 120 mm

$k = \dfrac{120}{6\ 000\ 000\ 000} = \dfrac{1}{50\ 000\ 000} = 2 \times 10^{-8}$

Le rapport de réduction est 2×10^{-8}.
b. Le rapport entre les volumes est $(2 \times 10^{-8})^3 = 8 \times 10^{-24}$.

33 **a.** $k = \dfrac{11{,}50\text{ m}}{46\text{ m}} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

Le rapport de réduction est 0,25.
b. La masse étant liée au volume, le rapport entre les masses doit être le même que le rapport entre les volumes, c'est-à-dire : $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}$.

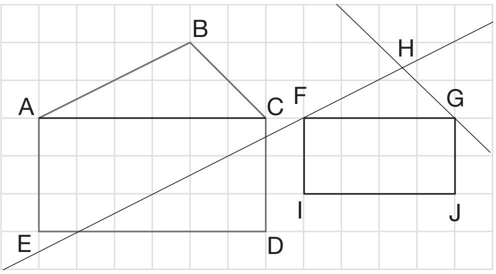
Or, $\dfrac{14}{225} \neq \dfrac{1}{64}$, donc la statue française n'est pas une parfaite réduction de sa grande sœur new-yorkaise.

Je m'évalue à mi-parcours

34 **a.** **35** **b.** **36** **b.** **37** **c.**

J'utilise mes compétences

38



39 Augmenter de 10 % une dimension x permet de passer de x à $x + \dfrac{x+10}{100} = \dfrac{100x + 10x}{100} = \dfrac{110x}{100} = \dfrac{110}{100}x$, autrement dit d'avoir un rapport d'agrandissement de $\dfrac{110}{100} = 1{,}1$.

Lorsque les longueurs sont multipliées par 1,1 les volumes le sont par $(1{,}1)^3 = 1{,}331$.
Donc, $100 \times 1{,}331 = 133$.
L'éponge mouillée a un volume de 133,1 cm^3.

40 20 cL × 4 = 80 cL

$\dfrac{3 \times 20}{4} = 15$

Les verrines plus petites ont une contenance de 15 cL.
$6 \times 15 = 90$
Les 6 nouvelles verrines ne seront pas pleines, il manque 10 cL.

41

Petite	8 cm	10 cm	12 cm
Moyenne	18 cm	21 cm	24 cm
Grande	24 cm	28 cm	32 cm

● Petite et moyenne : 12 cm × 2 = 24 cm or 10 cm × 2 ≠ 21 cm
Donc, la petite boîte n'est pas une réduction de la moyenne.
● Petite et grande : 8 cm × 3 = 24 cm or 10 cm × 3 ≠ 28 cm
Donc, la grande boîte n'est pas un agrandissement de la petite.
● Moyenne et grande : $18\text{ cm} \times \dfrac{4}{3} = 24\text{ cm}$

$21\text{ cm} \times \dfrac{4}{3} = 28\text{ cm}$

$24\text{ cm} \times \dfrac{4}{3} = 32\text{ cm}$

La grande boîte est donc un agrandissement de la moyenne.

42 ● $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{64}{125}$

$625 \times \dfrac{64}{125} = 320$

La 2^e poupée a un volume de 320 cm^3.

● $320 \times \dfrac{64}{125} = 163{,}84$

La 3^e poupée a un volume de 163,84 cm^3.

● $163{,}84 \times \dfrac{64}{125} = 83{,}886\ 08$

La 4^e poupée a un volume de 83,886 08 cm^3 ; une valeur approchée de son volume est 84 cm^3.

● $83{,}88608 \times \dfrac{64}{125} \approx 42{,}949$

Une valeur approchée du volume de la 5^e poupée est 43 cm^3.

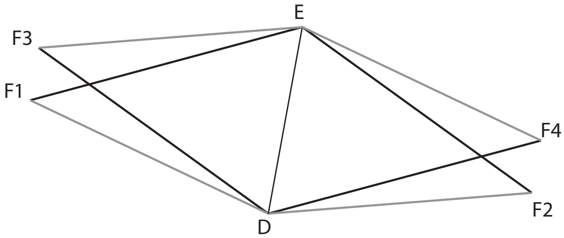
43 **a.** $k = \dfrac{2{,}5\text{ cm}}{1\text{ cm}} = \dfrac{5}{2}$

Le rapport d'agrandissement est $\dfrac{5}{2}$.

$DF = 1{,}4\text{ cm} \times \dfrac{5}{2} = 3{,}5\text{ cm}$ et $EF = 1{,}5\text{ cm} \times \dfrac{5}{2} = 3{,}75\text{ cm}$

ou DF = 3,75 cm et EF = 3,5 cm.

b.



44 **a.** $k = \dfrac{10\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \dfrac{5}{2}$

Le rapport d'agrandissement est $\dfrac{5}{2}$.

b. Le triangle ABC est rectangle en B.

$\dfrac{3\text{ cm} \times 4\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}^2$

L'aire du triangle ABC est 6 cm^2.

$6\text{ cm}^2 \times \dfrac{5^2}{2^2} = 37{,}5\text{ cm}^2$

L'aire du triangle A'B'C' est 37,5 cm^2.

45 • **Traduction**

Kevin doit faire la maquette d'un immeuble qui mesure 36 m de haut et 10 m de large. La maquette mesure 15 cm de large.

a. Quelle est la hauteur de la maquette ?

b. Trouver l'échelle de la maquette.

• **Solution**

a. $\dfrac{15\text{ cm}}{1000\text{ cm}} = \dfrac{3}{200}$

$3\,600 \times \dfrac{3}{200} = 54$

La hauteur mesure 54 cm.

b. $k = \dfrac{15\text{ cm}}{1000\text{ cm}} = \dfrac{3}{200}$

L'échelle est $\dfrac{3}{200}$.

46 **a.** $8^3 = 512$

$512\text{ m}^3 = 512\,000\,000\,000\text{ mm}^3$

$\dfrac{512\,000}{512\,000\,000\,000} = \dfrac{1}{1\,000\,000} = \left(\dfrac{1}{100}\right)^3$ donc $k = \dfrac{1}{100}$.

Le Rubik's Cube est une réduction du cube Astor dans le rapport $\dfrac{1}{100}$.

b. 8 m = 800 cm

$800\text{ cm} \times \dfrac{1}{100} = 8\text{ cm}$

L'arête du Rubik's Cube mesure 8 cm.

47 **a.** $\dfrac{29{,}7}{21} = \dfrac{99}{70} \approx 1{,}414$

$1{,}41 = \dfrac{141}{100} = 141\,\%$

Une valeur approchée à l'unité du pourcentage à saisir est 141.

b. $\dfrac{14{,}8}{21} = \dfrac{74}{105} \approx 0{,}704$

$0{,}70 = \dfrac{70}{100} = 70\,\%$

Une valeur approchée à l'unité du pourcentage à saisir est 70.

48 Si les longueurs sont multipliées par $\dfrac{1}{100}$, les volumes le sont par $\left(\dfrac{1}{100}\right)^3 = \dfrac{1}{1\,000\,000}$.

$180\text{ m}^3 = 180\,000\,000\text{ cm}^3$

$180\,000\,000 \times \dfrac{1}{1\,000\,000} = 180$

Le volume de la piscine de la maquette est 180 cm^3.

49 $13{,}125\text{ cm}^3 \times 200^3 = 105\,000\,000\text{ cm}^3 = 105\text{ m}^3$

Le volume du garage est 105 m^3.

50 $387^3 = 57\,960\,603$

Il faudrait 57 960 603 lunes.

51 $k_1 = \dfrac{19\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \dfrac{19}{6} \approx 3{,}166$

$k_2 = \dfrac{25\text{ cm}}{9\text{ cm}} = \dfrac{25}{9} \approx 2{,}777$

Le plus grand rapport que l'on peut utiliser est k_2.

Une valeur approchée au dixième est 2,7.

52 $3^2 = 9$

$45\text{ m} \times 9 = 405\text{ mm}^2$.

L'aire d'un triangle jaune est 360 mm^2.

L'aire d'un triangle bleu est $\dfrac{45}{9}$ mm^2 = 5 mm^2.

$360 + 3 \times 45 + 12 \times 5 = 555$

L'aire du flocon est donc 555 mm^2.

53 $\dfrac{18{,}75}{15} = \dfrac{5}{4}$

L rapport d'agrandissement est $\dfrac{5}{4}$.

18 cm : 3 = 6 cm

$y = 6\text{ cm} \times \dfrac{5}{4} = 7{,}5\text{ cm}$

15 cm – 11 cm = 4 cm

$x = 4\text{ cm} \times \dfrac{5}{4} = 5\text{ cm}$

x et y mesurent respectivement 5 et 7,5 cm.

Dossier Brevet

54 $100\text{ m}^2 = 1\,000\,000\text{ cm}^2$

Le rapport de réduction est k, les aires sont multipliées par k^2 :

$k^2 = \dfrac{1}{1\,000\,000}$ donc $k = \dfrac{1}{1\,000}$.

Le rapport de réduction est $\dfrac{1}{1\,000}$.

55 $k = 10$ donc $k^2 = 100$

$0{,}2\text{ mm}^2 \times 100 = 20\text{ mm}^2$

L'aire de la bactérie observée est 20 mm^2.

56 $k = 1{,}2$ donc $k^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728$

$418 \times 1{,}728 = 722{,}304$

Le volume du ballon gonflé est 722,304 cm^3.

Une valeur approchée à l'unité de ce volume est 722 cm^3.

57 $\dfrac{230^2 \times 146{,}60}{3} \approx 2\,585\,046{,}66$

Une valeur approchée du volume de la pyramide de Khéops est 2 585 046,66 m^3.

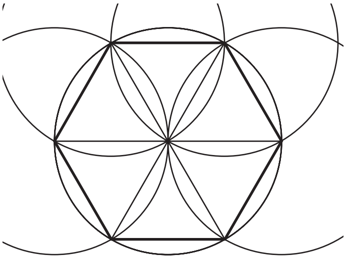
$k = \dfrac{1}{4}$ donc $k^3 = \dfrac{1}{64}$

$2\,585\,046{,}66 \times \dfrac{1}{64} \approx 40\,391{,}35$

Une valeur approchée à l'unité près du volume de la réduction de cette pyramide est 40 391 m^3.

58 3 mm × 10 = 30 mm
(En vraie grandeur, les rayons des cercles mesurent 30 mm.)

Échelle 1/2.



59 **a.** $k = \dfrac{66}{44} = \dfrac{3}{2}$

L'aire est multipliée par $\dfrac{9}{4}$ et, comme la puissance est proportionnelle à l'aire, elle est aussi multipliée par $\dfrac{9}{4}$.

b. $E = 4 \times 10^6\ \text{W} \times 24\ \text{h} \times 365 = 35\,040 \times 10^6\ \text{Wh}$
L'énergie fournie en 1 an est $35\,040 \times 10^6$ Wh.

CHAPITRE

11 Utiliser le théorème de Thalès

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le cycle 4

● Les homothéties sont amenées en 3e, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.

● Le théorème de Thalès est introduit en 3e, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions.

2 Je découvre

Activité 1

L'objectif de cette activité est d'introduire l'homothétie puis de mettre en évidence, à l'aide d'un logiciel de géométrie, les propriétés de cette nouvelle transformation.
Cette activité permet d'établir un premier lien entre proportionnalité, agrandissement-réduction et homothétie.

Activité 2

L'objectif de cette activité est d'introduire le théorème de Thalès.
Ce théorème est, comme le demande le programme, introduit en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie.

Activité 3

L'activité 3 a pour objectif d'introduire la réciproque du théorème de Thalès. Au cours de cette activité, on insiste sur l'importance de l'ordre des points pour prouver que deux droites peuvent être parallèles.
En effet l'égalité de deux rapports ne suffit pas à l'utilisation de la réciproque du théorème de Thalès.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

● Suite à l'activité 1, on peut étudier le paragraphe 1 « Homothéties ».

● Suite à l'activité 2, on peut étudier le paragraphe 2 « Le théorème de Thalès ».

● Suite à l'activité 3, on peut étudier le paragraphe 3 « La réciproque du théorème de Thalès ».

Exercice résolu

L'objectif est de faire le point sur l'utilisation du théorème de Thalès et de sa réciproque.
À la question **a.**, on calcule des longueurs en utilisant le théorème de Thalès.
À la question **b.**, on démontre que deux droites sont parallèles en utilisant la réciproque du théorème de Thalès.

4 Compléments

Avec un logiciel

● L'exercice 50 est consacré à la construction de l'image d'un triangle par une homothétie.
À la question **1.**, on construit, sans utiliser le menu « Homothétie », l'image d'un triangle ABC par l'homothétie de centre A qui transforme C en un point D.
À la question **2.**, on construit, toujours sans utiliser le menu « Homothétie », l'image d'un triangle ABC par l'homothétie de centre O qui transforme A en un point A'.
Pour chacune de ces questions la validité des constructions est ensuite vérifiées à l'aide du menu « Homothétie » de GeoGebra.

● Dans l'exercice 51, l'utilisation d'un logiciel de géométrie permet de conjecturer la solution à un problème de périmètres égaux.
La vérification demandée en seconde partie d'exercice est accessible à tous les élèves.

Estimation du rayon de la terre

Comme le suggère le programme, l'exercice 66 propose d'estimer le rayon de la Terre à l'aide de la méthode utilisée par Ératosthène.

Droite des milieux

Le cas particulier du théorème de la droite des milieux est étudié à l'exercice 69. Ce théorème était auparavant vu en classe de 4e.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

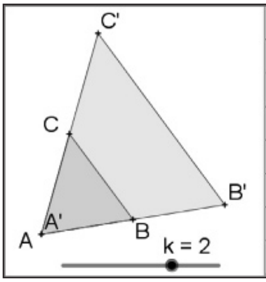
1. a. et **b.** ; **2. a.** et **b.** ; **3. b.** et **c.** ; **4. a.** et **c.** ; **5. a.** et **b.**

Je découvre

Activité 1

c. Les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.
Les points A, B et B' sont alignés.

d.



	A	B	C
1	5.79	6.48	6.63
2	5.79	6.48	6.63
3			
4			
5			
6			
7			

On observe les égalités suivantes :
$AB' = k \times AB$; $AC' = k \times AC$ et $B'C' = k \times BC$.

- Si k est strictement supérieur à 1 ou strictement inférieur à – 1, alors le triangle AB′C′ est un agrandissement du triangle ABC.
- Si k est compris entre – 1 et 1 (– 1 ; 0 et 1 exclus), alors le triangle AB′C′ est une réduction de rapport k du triangle ABC.
- Si $k = 1$ ou $k = -1$, alors le triangle AB′C′ est une reproduction du triangle ABC.
- Si $k = 0$, alors le triangle AB′C′ n'existe pas.

Activité 2

a. A est le centre de l'homothétie.
b. Le triangle AMN est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre A et de rapport k donc
$AM = k \times AB$; $AN = k \times AC$ et $MN = k \times BC$.
On déduit que $k = \dfrac{AM}{AB}$; $k = \dfrac{AN}{AC}$ et $k = \dfrac{MN}{BC}$.
Donc $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.
c. • Sur cette figure B et M sont du même côté par rapport à A donc k est positif.
• $AM < AB$ donc k est inférieur à 1.

Activité 3

a. Tara se trompe, en effet dans la figure 3, on a bien $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = 1,5$ et pourtant les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.
b. Conjecture : ajouter que les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre (comme sur les figures 1 et 2).

J'applique le cours

2 a. Les droites (BD) et (CE) sont sécantes en A et les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$, soit $\dfrac{4}{AD} = \dfrac{3}{4,5} = \dfrac{BC}{4,2}$.
• De $\dfrac{4}{AD} = \dfrac{3}{4,5}$, on déduit que $3 \times AD = 4 \times 4,5$.
Ainsi $AD = \dfrac{4 \times 4,5}{3}$. Donc AD = 6 cm.
• De $\dfrac{3}{4,5} = \dfrac{BC}{4,2}$, on déduit que $BC = 4,2 \times \dfrac{3}{4,5}$.
Donc BC = 2,8 cm.
b. Les points F, A, C et G, A, B sont alignés dans le même ordre.
$\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{4,05}{3} = 1,35$ et $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{5,4}{4} = 1,35$.
Donc $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AG}{AB}$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

3 a. Les droites (TC) et (RB) sont sécantes en A et les droites (TR) et (CB) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{AT}{AC} = \dfrac{AR}{AB} = \dfrac{RT}{CB}$, soit $\dfrac{AT}{7,2} = \dfrac{4,5}{6} = \dfrac{RT}{10}$.
• De $\dfrac{AT}{7,2} = \dfrac{4,5}{6}$, on déduit que $AT = 7,2 \times \dfrac{4,5}{6}$.
Donc AT = 5,4 cm.
• De $\dfrac{4,5}{6} = \dfrac{RT}{10}$, on déduit que $RT = 10 \times \dfrac{4,5}{6}$.
Donc RT = 7,5 cm.
• $B \in [AE]$ donc AE = AB + BE
soit AE = 6 cm + 2 cm.
Donc AE = 8 cm.
b. Les points A, B, E et A, T, C sont alignés dans le même ordre.
$\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{6}{8} = 0,75$ et $\dfrac{AT}{AC} = \dfrac{5,4}{7,2} = 0,75$.
Donc $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AT}{AC}$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BT) et (EC) sont parallèles.

À l'oral

4 Le triangle DCM est l'image du triangle AMN par une **homothétie** de **centre** M et de rapport k (avec $k > 1$).

5 BG = 1,5 × BE = 1,5 × 2 cm = 3 cm ;
BI = 1,5 × BF = 1,5 × 1,6 cm = 2,4 cm ;
IG = 1,5 × EF = 1,5 × 1 cm = 1,5 cm.

6 LJ′ = 0,4 × LJ = 0,4 × 5 cm = 2 cm ;
LK′ = 0,4 × LK = 0,4 × 7 cm = 2,8 cm ;
J′K′ = 0,4 × JK = 0,4 × 6 cm = 2,4 cm.

7 a. $k = -2$ **b.** $k = \dfrac{2}{3}$

8 a. $\dfrac{\mathbf{TJ}}{TU} = \dfrac{TS}{\mathbf{TM}} = \dfrac{\mathbf{JS}}{\mathbf{SM}}$ **b.** $\dfrac{AP}{\mathbf{AI}} = \dfrac{\mathbf{AS}}{AR} = \dfrac{\mathbf{PS}}{\mathbf{RI}}$

9 a. O est le centre de l'homothétie.
Le rapport k de l'homothétie est $k = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{4}{2} = 2$.
b. OD = 2 × OA = 2 × 1 cm = 2 cm.
OC = 2 × OB soit 3 cm = 2 × OB et $OB = \dfrac{3\text{ cm}}{2}$.
Donc OB = 1,5 cm.

10 a. $\dfrac{LO}{LC}$ et $\dfrac{LB}{LS}$ **b.** $\dfrac{GE}{GD}$ et $\dfrac{GF}{GH}$

Calcul mental

11 a. 14,4 cm **b.** 7,2 cm **c.** 15 cm **d.** 0,42 cm

12 a. 3,6 **b.** 15 **c.** 6,4

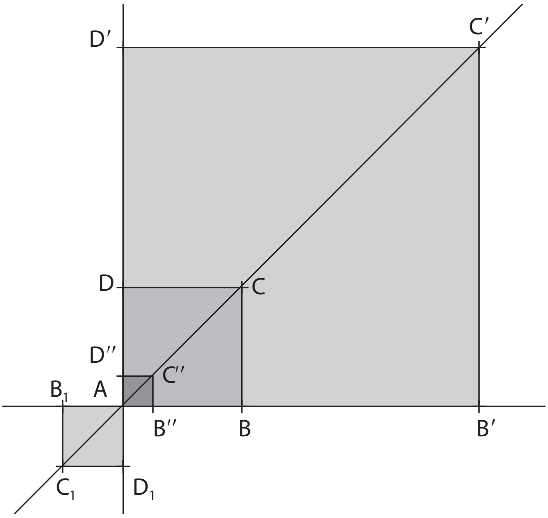
13 On remarque que OV = 2 × OQ.
OU = 2 × OP = 2 × 2,5 cm = 5 cm.
PQ = VU : 2 = 3,6 cm : 2 = 1,8 cm.

14 On remarque que CA = 5 × CB.
BE = AD : 5 = 1,5 cm : 5 = 0,3 cm.
CD = 5 × CE = 5 × 0,7 cm = 3,5 cm.

Je m'entraîne

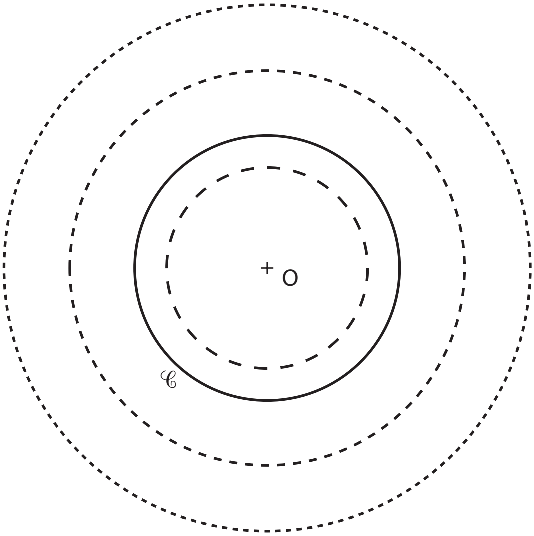
15 On note k le rapport de l'homothétie.
a. • B est le centre de l'homothétie.
• $k = \frac{BC}{BO} = \frac{32}{8} = 4$.
Le rapport de l'homothétie est 4.
• CA = 4 × OE soit 18 = 4 × OE.
$OE = \frac{18}{4}$ donc OE = 4,5 cm.
• BA = 4 × BE soit 20 = 4 × BE.
$BE = \frac{20}{4}$ donc BE = 5 cm.
b. • B est le centre de l'homothétie.
• $k = -\frac{BC}{BO} = \frac{6,3}{9} = -0,7$.
Le rapport de l'homothétie est – 0,7.
• CA = 0,7 × OE soit 7 = 0,7 × OE.
• $OE = \frac{7}{0,7}$ donc OE = 10 cm.
• BA = 0,7 × BE soit 4,2 = 0,7 × BE.
$BE = \frac{4,2}{0,7}$ donc BE = 6 cm.

16 **a.** à **e.**



b. AB′C′D′ est un carré.
AB′ = 3 × AB = 3 × 2 cm = 6 cm.
La longueur du côté du carré AB′C′D′ est 6 cm.
c. AB″C″D″est un carré.
$AB'' = \frac{1}{4} \times AB = \frac{1}{4} \times 2$ cm = 0,5 cm.
La longueur du côté du carré AB″C″D″ est 0,5 cm.
d. $AB_1C_1D_1$ est un carré.
$AB_1 = \frac{1}{2} \times AB = \frac{1}{2} \times 2$ cm = 1 cm.
La longueur du côté du carré $AB_1C_1D_1$ est 1 cm.
e. On constate que les points A, B, B′, B″, B_1 sont alignés. Il en est de même des points A, C, C′, C″, C_1 et A, D, D′, D″, D_1.

17 **a.** et **b.**



• 1,5 × 2 cm = 3 cm donc l'image du cercle $\mathscr{C}$ par une homothétie de centre O et de rapport 1,5 est un cercle de centre O et de rayon 3 cm.
• 0,75 × 2 cm = 1,5 cm donc l'image du cercle $\mathscr{C}$ par une homothétie de centre O et de rapport 0,75 est un cercle de centre O et de rayon 1,5 cm.
• 2 × 2 cm = 4 cm donc l'image du cercle $\mathscr{C}$ par une homothétie de centre O et de rapport – 2 est un cercle de centre O et de rayon 4 cm.

18 **a.** On note k le rapport de l'homothétie qui permet de passer du triangle FGE au triangle FHI.
$k = \frac{IH}{EG} = \frac{8,5}{5} = 1,7$.
Le triangle FHI est l'image du triangle FGE par l'homothétie de centre F et de rapport 1,7.
b. • FI = 1,7 × FE c'est-à-dire FI = 1,7 × 3,5.
Donc FI = 5,95 cm.
• FH = 1,7 × FG c'est-à-dire FH = 1,7 × 3.
Donc FH = 5,1 cm.

19 **a.** On note k le rapport de l'homothétie qui permet de passer du triangle MNR au triangle RST.
$k = -\frac{RS}{MN} = -\frac{1,8}{4,5} = -0,4$.
Le triangle RST est l'image du triangle MNR par l'homothétie de centre R et de rapport – 0,4.
b. • RT = 0,4 × RN c'est-à-dire RT = 0,4 × 3.
Donc RT = 1,2 cm.
• TS = 0,4 × MN c'est-à-dire TS = 0,4 × 4.
Donc TS = 1,6 cm.

20 CEG est un agrandissement du triangle CIJ dans le rapport $k = \dfrac{CE}{CI} = \dfrac{6}{2} = 3$.

$EG = k \times IJ$ c'est-à-dire $2{,}7 = 3 \times IJ$.

$IJ = \dfrac{2{,}7}{3}$. Donc $IJ = 0{,}9$ cm.

$CG = k \times CJ$ c'est-à-dire $CG = 3 \times 1{,}5$.
Donc $CG = 4{,}5$ cm.

21 ***Erratum :*** Dans les premiers manuels imprimés, il manque l'indication que les droites (DE) et (AC) sont parallèles. Cet oubli sera corrigé lors des réimpressions.

a. Les triangles BDE et BAC ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles.

b.

BE	BD	DE	
1	0,5	0,8	$\times 7$
7	3,5	5,6	
BC	BA	AC	

22 **a.** On peut construire ce tableau de proportionnalité.

OA	OC	AC	
3	5	...	$\times 1{,}6$
4,8	...	6	
OB	OD	BD	

b. $OD = 1{,}6 \times 5 = 8$. Donc $OD = 8$ cm.

$AC = \dfrac{6}{1{,}6} = 3{,}75$. Donc $AC = 3{,}75$ cm.

23 • **Calcul de la longueur AB**
Les droites (CA) et (BD) sont sécantes en S et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Donc le triangle ABC est une réduction dans le rapport $k = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{1}{2}$ du triangle SCD.

$AB = k \times CD$ c'est-à-dire $AB = \dfrac{1}{2} \times 1{,}80$ m.

Donc $AB = 0{,}90$ m.

• **Calcul de la longueur EF**
Les droites (EC) et (FD) sont sécantes en S et les droites (EF) et (CD) sont parallèles.
Donc le triangle SEF est un agrandissement dans le rapport $k' = \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{3}{2}$ du triangle SCD.

$EF = k' \times CD$ c'est-à-dire $EF = \dfrac{3}{2} \times 1{,}80$ m.
Donc $EF = 2{,}70$ m.

24 **a.** Si les points B, A, N d'une part et C, A, M d'autres part étaient alignés alors les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MAN}$ seraient opposés par le sommet et auraient donc la même mesure.
Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MAN}$ n'ont pas la même mesure, donc si les points B, A, N sont alignés, les points C, A, M ne le sont pas (ou inversement).

b. Les angles $\widehat{CBN}$ et $\widehat{MNB}$ sont alternes-internes et n'ont pas la même mesure.
Donc les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

25 **a.** $\dfrac{EA}{EF} = \dfrac{ER}{EB} = \dfrac{AR}{FB}$ **b.** $\dfrac{TH}{TG} = \dfrac{TI}{TM} = \dfrac{HI}{GM}$

26 • Première configuration de Thalès :
les droites (HK) et (JL) sont sécantes en I et les droites (HJ) et (KL) sont parallèles.
Les rapports égaux de cette configuration sont :
$\dfrac{IK}{IH} = \dfrac{IL}{IJ} = \dfrac{KL}{HJ}$.

• Deuxième configuration de Thalès :
les droites (HL) et (JK) sont sécantes en M et les droites (HJ) et (KL) sont parallèles.
Les rapports égaux de cette configuration sont :
$\dfrac{MK}{MJ} = \dfrac{ML}{MH} = \dfrac{KL}{HJ}$.

27 **a.** $\dfrac{CE}{\mathbf{CB}} = \dfrac{CD}{\mathbf{CA}} = \dfrac{\mathbf{ED}}{\mathbf{CA}}$

b. $\dfrac{CE}{6} = \dfrac{5{,}6}{8{,}4}$

c. $\dfrac{CE}{6} = \dfrac{5{,}6}{8{,}4}$ donc $CE = 6 \times \dfrac{5{,}6}{8{,}4}$. $CE = 4$ cm.

28 **1.** $\dfrac{UE}{\mathbf{UM}} = \dfrac{\mathbf{UT}}{\mathbf{UO}} = \dfrac{\mathbf{ET}}{\mathbf{MO}}$

2. a. En remplaçant par les longueurs connues on obtient :
$\dfrac{UE}{12} = \dfrac{18}{13{,}5} = \dfrac{21}{MO}$ d'où $\dfrac{UE}{12} = \dfrac{18}{13{,}5}$.

$UE = 12 \times \dfrac{18}{13{,}5}$ donc $UE = 16$ cm.

b. De l'égalité précédente, on déduit que $\dfrac{18}{13{,}5} = \dfrac{21}{MO}$.

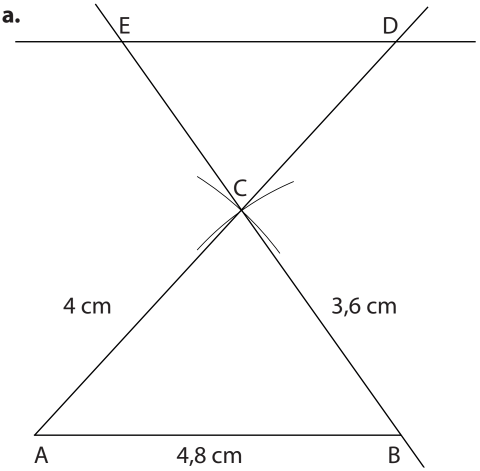
$18 \times MO = 13{,}5 \times 21$ et $MO = \dfrac{13{,}5 \times 21}{18}$ donc $MO = 15{,}75$ cm.

29 Les droites (AD) et (BC) sont sécantes en G et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{GA}{GD} = \dfrac{BA}{CD}$ soit $\dfrac{45}{30} = \dfrac{45}{30} = \dfrac{BA}{34}$.

De $\dfrac{45}{30} = \dfrac{BA}{34}$ on déduit que $BA = 34 \times \dfrac{45}{30}$.

Donc $BA = 51$ cm.
La longueur AB doit être 51 cm.

30 **a.**



b. ● $C \in [AD]$ donc $CD = AD - AC$, c'est-à-dire $CD = 7\text{ cm} - 4\text{ cm}$. Donc $CD = 3$ cm.

● Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en C et les droites (AB) et (ED) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{DE}{AB}$ soit $\dfrac{3}{4} = \dfrac{CE}{3{,}6} = \dfrac{DE}{4{,}8}$.

De $\dfrac{3}{4} = \dfrac{CE}{3{,}6}$, on déduit que $CE = 3{,}6 \times \dfrac{3}{4}$.

Donc $CE = 2{,}7$ cm.

De $\dfrac{3}{4} = \dfrac{DE}{4{,}8}$, on déduit que $DE = 4{,}8 \times \dfrac{3}{4}$.

Donc $DE = 3{,}6$ cm.

31 Les droites (AE) et (TI) sont sécantes en L et les droites (EI) et (AT) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{LE}{LA} = \dfrac{LI}{LT} = \dfrac{EI}{AT}$ soit $\dfrac{6}{LA} = \dfrac{4}{7} = \dfrac{5{,}6}{AT}$.

De $\dfrac{4}{7} = \dfrac{5{,}6}{AT}$, on déduit que $4 \times AT = 7 \times 5{,}6$.

$AT = \dfrac{7 \times 5{,}6}{4}$ soit $AT = 9{,}8$ cm.

Donc Fatou se trompe.

De $\dfrac{6}{LA} = \dfrac{4}{7}$, on déduit que $4 \times LA = 6 \times 7$.

$LA = \dfrac{6 \times 7}{4}$ soit $LA = 10{,}5$ cm.

Donc Arthur a raison.

32 ● Les droites (UL) et (OS) sont perpendiculaires à la même droite (TO), donc elles sont parallèles.

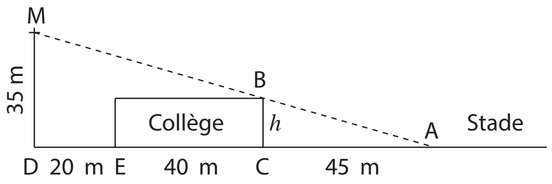
● Les droites (OU) et (SL) sont sécantes en T et les droites (UL) et (OS) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{TU}{TO} = \dfrac{TL}{TS} = \dfrac{UL}{OS}$ soit $\dfrac{TU}{TO} = \dfrac{TL}{150\,000\,000} = \dfrac{1\,736}{695\,000}$.

De $\dfrac{TL}{150\,000\,000} = \dfrac{1\,736}{695\,000}$, on déduit que

$TL = 150\,000\,000 \times \dfrac{1\,736}{695\,000}$.

Donc $TL \approx 374\,676$ km.

33



● $AD = 45\text{ m} + 40\text{ m} + 20\text{ m} = 105$ m.

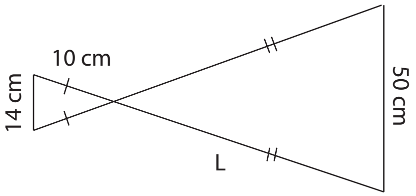
● Les droites (MB) et (DC) sont sécantes en A et les droites (MD) et (BC) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{MD}$ soit $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{45}{105} = \dfrac{h}{35}$.

De $\dfrac{45}{105} = \dfrac{h}{35}$, on déduit que $h = 35 \times \dfrac{45}{105}$.

Donc la hauteur h du collège est 15 m.

34 **a.**



b. Notons L la longueur de la lame, on utilise le théorème de Thalès et on a $\dfrac{L}{10} = \dfrac{50}{14}$ soit $L \approx 35{,}7$ cm.

35 ● Les droites (AE) et (CD) sont sécantes en B et les droites (AC) et (DE) sont parallèles donc le triangle BED est une réduction du triangle ABC dans le rapport $k = \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{3}{7{,}5} = 0{,}4$.

● Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2.
Aire BDE $= k^2 \times$ Aire ABC, c'est-à-dire :
Aire BDE $= 0{,}4^2 \times 18{,}75$ cm^2.
Donc l'aire du triangle BDE est 3 cm^2.

36 Aire de ABC $= \dfrac{AH \times BC}{2} = 27$ cm^2.

Le triangle BMN est une réduction du triangle ABC dans le rapport $\dfrac{BN}{BC} = 0{,}7$ donc l'aire de BMN est $0{,}7^2 \times 27$ cm^2, c'est-à-dire 13,23 cm^2.

37 **a.** $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{4}{6{,}4} = 0{,}625$ et $\dfrac{CG}{CH} = \dfrac{4{,}8}{8} = 0{,}6$.

b. $\dfrac{CD}{CE} \neq \dfrac{CG}{CH}$ donc les droites (DG) et (EH) ne sont pas parallèles.

38 $\dfrac{OM}{OU} = \dfrac{2{,}8}{4} = 0{,}7$ et $\dfrac{ON}{OI} = \dfrac{1{,}8}{2{,}4} = 0{,}75$.

$\dfrac{OM}{OU} \neq \dfrac{ON}{OI}$ donc les droites (MN) et (UI) ne sont pas parallèles.

39 **a.** $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2{,}5}{3} = \dfrac{2{,}5 \times \mathbf{4{,}2}}{3 \times 4{,}2} = \dfrac{\mathbf{10{,}5}}{\mathbf{12{,}6}}$

$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{3{,}5}{4{,}2} = \dfrac{3{,}5 \times \mathbf{3}}{4{,}2 \times 3} = \dfrac{\mathbf{10{,}5}}{\mathbf{12{,}6}}$

b. $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2{,}5}{3}$ et $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{3{,}5}{4{,}2}$.

$2{,}5 \times 4{,}2 = 10{,}5$ et $3{,}5 \times 3 = 10{,}5$.
Les produits en croix sont égaux donc les quotients $\dfrac{AC}{AB}$ et $\dfrac{AE}{AD}$ sont égaux.

c. Les points C, A, B et E, A, D sont alignés dans le même ordre et $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (CE) et (BD) sont parallèles.

40 **a.** On doit comparer les rapports $\frac{LR}{LO}$ et $\frac{LP}{LN}$.

b. • $\frac{LR}{LO} = \frac{2{,}4}{3{,}2} = 0{,}75$ et $\frac{LP}{LN} = \frac{2{,}1}{2{,}8} = 0{,}75$.

Donc $\frac{LR}{LO} = \frac{LP}{LN}$.

• Les points L, R, O et L, P, N sont alignés dans le même ordre et $\frac{LR}{LO} = \frac{LP}{LN}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (RP) et (ON) sont parallèles.

41 **a.** Les points A, B, N et A, C, M sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AB}{AN} = \frac{10{,}5}{22{,}5} = \frac{10{,}5 \times 15}{22{,}5 \times 15} = \frac{157{,}5}{337{,}5}$ et

$\frac{AC}{AM} = \frac{7}{15} = \frac{7 \times 22{,}5}{15 \times 22{,}5} = \frac{157{,}5}{337{,}5}$.

Donc $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

b. Les points A, B, N et A, C, M sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AB}{AN} = \frac{7{,}2}{4{,}5} = 1{,}6$ et $\frac{AC}{AM} = \frac{6}{4} = 1{,}5$. Donc $\frac{AB}{AN} \neq \frac{AC}{AM}$.

Donc les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

42 **a.** Les points A, S, T et A, P, R sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AS}{AT} = \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ et $\frac{AP}{AR} = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 4}{3 \times 4} = \frac{9}{12}$.

Donc $\frac{AS}{AT} \neq \frac{AP}{AR}$.

Donc les droites (PS) et (RT) ne sont pas parallèles.

b. Les points R, A, P et T, A, S sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AP}{AR} = \frac{1}{3}$ et $\frac{AS}{AT} = \frac{2}{6} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$. Donc $\frac{AP}{AR} = \frac{AS}{AT}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (PS) et (RT) sont parallèles.

43 • 1,2 m = 120 cm et 1,5 m = 150 cm.
GD = ED – EG = 120 cm – 48 cm = 72 cm.
GC = CF – GF = 150 cm – 60 cm = 90 cm.

• Les points E, G, D et F, G, C sont alignés dans le même ordre.

$\frac{GE}{GD} = \frac{48}{72} = \frac{48:24}{72:24} = \frac{2}{3}$ et $\frac{GF}{GC} = \frac{60}{90} = \frac{60:30}{90:30} = \frac{2}{3}$.

Donc $\frac{GE}{GD} = \frac{GF}{GC}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (DC) sont parallèles.
Le clavier est parallèle au sol.

44 Les points A, E, D et C, E, B sont alignés dans le même ordre.

$\frac{EA}{ED} = \frac{7}{9} = \frac{7 \times 13}{9 \times 13} = \frac{91}{117}$ et $\frac{EC}{EB} = \frac{10}{13} = \frac{10 \times 9}{13 \times 9} = \frac{90}{117}$.

Donc $\frac{EA}{ED} \neq \frac{EC}{EB}$.

Donc les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

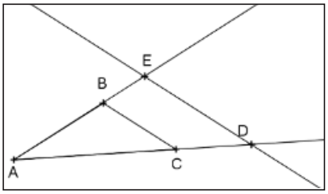
Je m'évalue à mi-parcours

45 **c.** **46** **a.** **47** **c.** **48** **b.** **49** **b.**

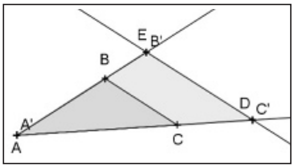
Avec un logiciel

50 **1. a.** et **b.**

L'image E de B est le point d'intersection de la demi-droite [AB] et de la parallèle à (BC) qui passe par D.

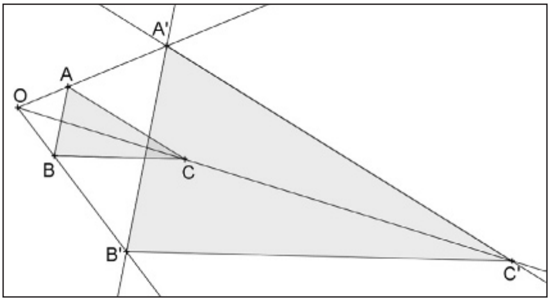


c.

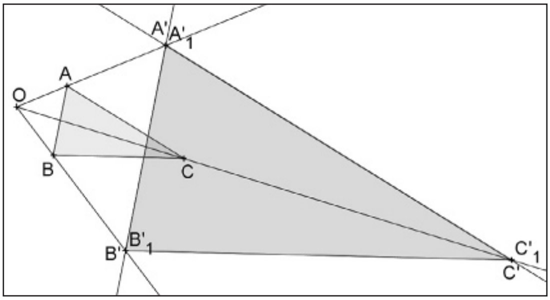


L'image A′B′C′ du triangle ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AD}{AC}$ est bien confondue avec le triangle ADE.

2. a. à **d.**

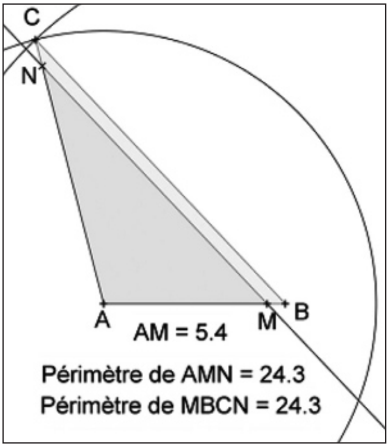


e.



L'image A'B'C' du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{OA'}{OA}$ est bien confondue avec le triangle ABC.

51 **1. a.** à **d.**



e. Conjecture : les périmètres du triangle AMN et du quadrilatère MNCB semblent égaux lorsque AM = 5,4 cm.

2. a. Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ soit $\frac{5,4}{6} = \frac{AN}{9} = \frac{MN}{12}$.

- Calcul de AN.

$\frac{5,4}{6} = \frac{AN}{9}$ donc $AN = 9.\ \frac{5,4}{6} = 8,1$.
Donc AN = 8,1 cm.

- Calcul de MN.

$\frac{5,4}{6} = \frac{MN}{12}$

$12 = 2 \times 6$ d'où $MN = 2 \times 5,4 = 10,8$.
Donc MN = 10,8 cm.

- Calcul de MB.

M ∈ [AB] donc MB = AB – AM.
MB = 6 cm – 5,4 cm = 0,6 cm.
Donc MB = 0,6 cm.

- Calcul de NC.

N ∈ [AC] donc NC = AC – AN.
NC = 9 cm – 8,1 cm = 0,9 cm.
Donc NC = 0,9 cm.

b. P = AM + MN + NA
P = 5,4 cm + 10,8 cm + 8,1 cm
P = 24,3 cm.
Donc le périmètre P du triangle AMN est 24,3 cm.

- P′ = MB + BC + CN + NM
P′ = 0,6 cm + 12 cm + 0,9 cm + 10,8 cm
P′ = 24,3 cm.
Donc le périmètre P′ du quadrilatère MBCN est 24,3 cm.
- Lorsque AM = 5,4 cm, les deux périmètres sont bien égaux.

J'utilise mes compétences

52 • Les droites (AB) et (DE) sont sécantes en C et les droites (BD) et (AE) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\frac{CB}{CA} = \frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE}$ soit $\frac{3,5}{4,5} = \frac{4,2}{CE} = \frac{BD}{AE}$.

De $\frac{3,5}{4,5} = \frac{4,2}{CE}$, on déduit que $3,5 \times CE = 4,2 \times 4,5$ et

$CE = \frac{4,2 \times 4,5}{3,5}$. Donc CE = 5,4 cm.

- D ∈ [CE] donc DE = CE – CD soit
DE = 5,4 cm – 4,2 cm.
Donc DE = 1,2 cm.

53 • Le triangle ADC est rectangle en C avec AC = 3,6 m et DC = 1,05 m.
D'après le théorème de Pythagore : $CA^2 + CD^2 = AD^2$.
$3,6^2 + 1,05^2 = AD^2$ soit $12,96 + 1,1025 = AD^2$.
$AD^2 = 14,0625$ et $AD = \sqrt{14,0325}$
Donc AD = 3,75 m.

- C ∈ [AB] donc AB = AC + CB.
AB = 3,6 m + 8,4 m = 12 m.
- Les droites (DC) et (EB) sont perpendiculaires à la même droite (AB) donc elles sont parallèles.
- Les droites (CB) et (DE) sont sécantes en A et les droites (CD) et (BE) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BE}$ soit $\frac{3,6}{12} = \frac{3,75}{AE} = \frac{CD}{BE}$.

De $\frac{3,6}{12} = \frac{3,75}{AE}$, on déduit que $3,6 \times AE = 12 \times 3,75$ et

$AE = \frac{12 \times 3,75}{3,6}$.

Donc AE = 12,5 m.
La longueur AE de la rampe est 12,5 m.

54 • [GI] est le côté le plus long du triangle GIJ.
$GI^2 = 6^2 = 36$ et $JG^2 + JI^2 = 4,8^2 + 3,6^2 = 23,04 + 12,96 = 36$.
Ainsi $GI^2 = JG^2 + JI^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle GIJ est rectangle en J.

- Les points H, G, I et F, G, J sont alignés dans le même ordre.

$\dfrac{GI}{GH} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$ et $\dfrac{GJ}{GF} = \dfrac{4{,}8}{4} = 1{,}2$. Donc $\dfrac{GI}{GH} = \dfrac{GJ}{GF}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (FH) sont parallèles.

● Les droites (IJ) et (FH) sont parallèles et les droites (IJ) et (JF) sont perpendiculaires donc les droites (FH) et (FJ) sont perpendiculaires.

● Le triangle GFH est donc rectangle en F.

55 ● Le triangle ADE est isocèle s'il a deux côtés de la même longueur. Par conséquent on s'intéresse aux longueurs de ses côtés.

● Les droites (CE) et (AD) sont sécantes en B et les droites (CA) et (DE) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{ED}{CA}$ soit $\dfrac{6}{8{,}4} = \dfrac{5}{BA} = \dfrac{ED}{2{,}8}$.

De $\dfrac{6}{8{,}4} = \dfrac{5}{BA}$, on déduit que $6 \times BA = 5 \times 8{,}4$ et

$BA = \dfrac{5 \times 8{,}4}{6}$. Donc BA = 7 cm.

De $\dfrac{6}{8{,}4} = \dfrac{ED}{2{,}8}$, on déduit que $8{,}4 \times ED = 6 \times 2{,}8$ et

$ED = \dfrac{6 \times 2{,}8}{8{,}4}$. Donc ED = 2 cm.

● $D \in [AB]$ donc AD = AB – DB = 7 cm – 5 cm = 2 cm.

● ED = AD = 2 cm, donc le triangle ADE est isocèle en D.

56 ● Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en O et les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OB}{OE} = \dfrac{AB}{DE}$ soit $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OB}{OE} = \dfrac{5}{7{,}5}$.

● Les droites (BE) et (FC) sont sécantes en O et les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{OB}{OE} = \dfrac{OC}{OF} = \dfrac{BC}{EF}$ soit $\dfrac{5}{7{,}5} = \dfrac{OC}{OF} = \dfrac{2}{EF}$ (on a vu précédemment que $\dfrac{OB}{OE} = \dfrac{5}{7{,}5}$).

● De $\dfrac{5}{7{,}5} = \dfrac{2}{EF}$ on déduit que $5 \times EF = 2 \times 7{,}5$ et $EF = \dfrac{2 \times 7{,}5}{5}$.

Donc EF = 3 cm.

57 ● Les droites (BI) et (AD) sont sécantes en G et les droites (AB) et (DI) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{GD}{GA} = \dfrac{GI}{GB} = \dfrac{DI}{AB}$ soit $\dfrac{2}{5} = \dfrac{GI}{GB} = \dfrac{DI}{3}$.

DE $\dfrac{2}{5} = \dfrac{DI}{3}$, on déduit que $DI = 3 \times \dfrac{2}{5}$.

Donc DI = 1,2 cm.

● $I \in [CD]$ donc CI = CD – DI = 3 cm – 1,2 cm = 1,8 cm.

Donc CI = 1,8 cm.

58 ● Les droites (AC) et (DF) sont sécantes en B et les droites (AF) et (CD) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BF}{BD} = \dfrac{AF}{CD}$ soit $\dfrac{4}{BC} = \dfrac{BF}{BD} = \dfrac{BC}{9}$.

De $\dfrac{4}{BC} = \dfrac{BC}{9}$, on déduit $BC \times BC = 4 \times 9$.

$BC^2 = 36$ donc BC = 6 cm.

59 ● On note x la longueur DE en m.

La longueur DF, en m, est alors $x + 8{,}5$.

● Les droites (FE) et (HG) sont sécantes en D et les droites (EG) et (FH) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{DG}{DH} = \dfrac{EG}{FH}$ soit $\dfrac{x}{x+8{,}5} = \dfrac{DG}{DH} = \dfrac{32}{42}$.

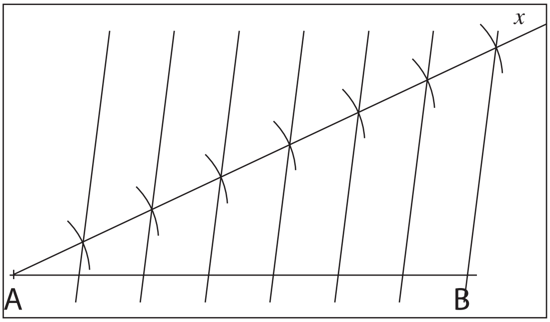
De $\dfrac{x}{x+8{,}5} = \dfrac{32}{42}$, on déduit $42 \times x = 32 \times (x + 8{,}5)$

$$42x = 32x + 272$$
$$42x - 32x = 32x - 32x + 272$$
$$10x = 272$$
$$x = \dfrac{272}{10}$$
$$x = 27{,}2.$$

Donc la largeur DE de la rivière est 27,2 m.

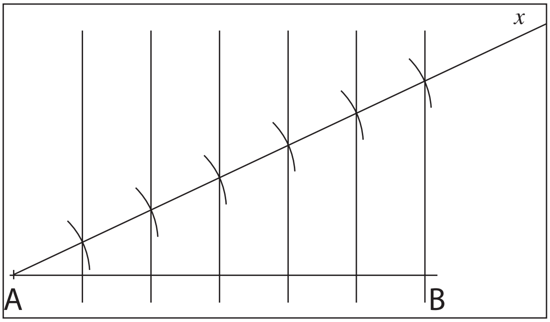
60 **1. a.** à **c.** Pour partager le segement [AB] en sept segments de même longueur, on trace des droites parallèles qui passent par les extrémités des segments de même longueur reportés sur la demi-droite [Ax).

Échelle 1/2



2. On procède de la même façon, en reportant 6 segments de même longueur sur la demi-droite [Ax).

Échelle 1/2



61 • Le triangle ADE est une réduction du triangle ABC dans le rapport k.
Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 donc :
Aire de DAE = $k^2 \times$ Aire de ABC, c'est-à-dire :
$19{,}2 = k^2 \times 30$ et $k^2 = \dfrac{19{,}2}{30}$.
Donc $k^2 = 0{,}64$ et $k = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.
• Dans une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k donc :
AD = $k \times$ AB c'est-à-dire AD = $0{,}8 \times 10$ cm.
Donc AD = 8 cm.

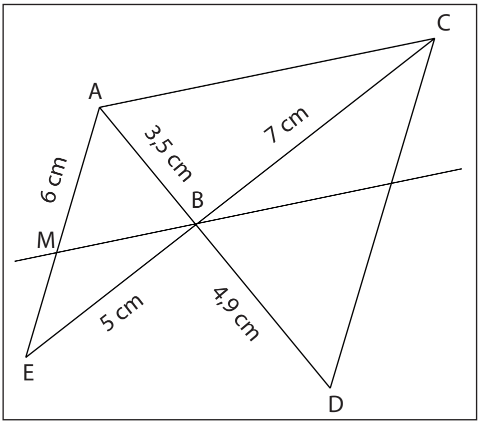
62 • Le triangle JAB est rectangle en A avec
AJ = 45 m et AB = 60 m.
D'après le théorème de Pythagore : $AJ^2 + AB^2 = JB^2$.
$45^2 + 60^2 = JB^2$ soit $2\,025 + 3\,600 = JB^2$.
$JB^2 = 5\,625$ et $JB = \sqrt{5\,625}$
Donc JB = 75 m.
• B ∈ [AC] donc BC = AC – AB = 96 m – 60 m = 36 m.
• Les droites (JN) et (AC) sont sécantes en B et les droites (JA) et (CN) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{BN}{BJ} = \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{NC}{JA}$ soit $\dfrac{BN}{75} = \dfrac{36}{60} = \dfrac{NC}{45}$.
De $\dfrac{BN}{75} = \dfrac{36}{60}$, on déduit BN = $75 \times \dfrac{36}{60}$.
Donc BN = 45 m.
• B ∈ [NJ] donc NJ = NB + BJ = 45 m + 75 m = 120 m.
Donc Noé va parcourir 120 m.

63 • Le quadrilatère BFED est un rectangle car il a trois angles droits.
Pour savoir s'il est un carré, il suffit de comparer les longueurs de deux côtés consécutifs, par exemple [BD] et [DE].
• Calcul de la longueur DE.
– Les droites (DE) et (AB) sont perpendiculaires à la même droite (BC) donc elles sont parallèles.
– D ∈ [BC] donc CD = CB – BD.
CD = 15 cm – 6 cm = 9 cm.
– Les droites (AE) et (BD) sont sécantes en C et les droites (DE) et (BA) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{CE}{CA} = \dfrac{DE}{BA}$ soit $\dfrac{9}{15} = \dfrac{CE}{CA} = \dfrac{DE}{10}$
De $\dfrac{9}{15} = \dfrac{DE}{10}$, on déduit DE = $10 \times \dfrac{9}{15}$.
Donc DE = 6 cm.
• BD = DE donc le rectangle BDEF est un carré.

64 **a.** • Première configuration de Thalès :
les droites (BD) et (CE) sont sécantes en A et les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ soit $\dfrac{2}{5} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$.

• Deuxième configuration de Thalès :
les droites (BE) et (DC) sont sécantes en F et les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
$\dfrac{FE}{FB} = \dfrac{FD}{FC} = \dfrac{DE}{BC}$ soit $\dfrac{FE}{4} = \dfrac{FD}{FC} = \dfrac{DE}{BC}$.
b. De la question précédente, on tire $\dfrac{2}{5} = \dfrac{DE}{BC}$ et $\dfrac{FE}{4} = \dfrac{DE}{BC}$.
Donc $\dfrac{2}{5} = \dfrac{FE}{4}$ et FE = $4 \times \dfrac{2}{5}$.
Donc FE = 1,6 cm.

65 **a.** Les droites (AD) et (EC) sont sécantes en B et les droites (AE) et (CD) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{AE}{DC}$ soit $\dfrac{BA}{4{,}9} = \dfrac{5}{7} = \dfrac{6}{DC}$.
De $\dfrac{BA}{4{,}9} = \dfrac{5}{7}$, on déduit BA = $4{,}9 \times \dfrac{5}{7}$.
Donc BA = 3,5 cm.
De $\dfrac{5}{7} = \dfrac{6}{DC}$, on déduit $5 \times DC = 6 \times 7$ et DC = $\dfrac{6 \times 7}{5}$.
Donc DC = 8,4 cm.
B ∈ [AD] donc AD = AB + BD = 3,5 cm + 4,9 cm = 8,4 cm.
AD = DC donc le triangle ADC est isocèle en D.
b. • Voici la figure complétée



B ∈ [EC] donc EC = EB + BC = 5 cm + 7 cm = 12 cm.
Les droites (BC) et (AM) sont sécantes en E et les droites (BM) et (AC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{EM}{EA} = \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{MB}{AC}$ soit $\dfrac{EM}{6} = \dfrac{5}{12} = \dfrac{MB}{AC}$.
De $\dfrac{EM}{6} = \dfrac{5}{12}$, on déduit EM = $6 \times \dfrac{5}{12}$. Donc EM = 2,5 cm.

66 1 m = 0,001 km et 8 m = 0,008 km.
Les droites (CE) et (FS) sont sécantes en A et les droites (FE) et (SC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{AF}{AS} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{FE}{SC}$ soit $\dfrac{0{,}001}{800} = \dfrac{0{,}008}{r} = \dfrac{FE}{SC}$.

De $\dfrac{0{,}001}{800} = \dfrac{0{,}008}{r}$, on déduit $0{,}001 \times r = 800 \times 0{,}008$ et $r = \dfrac{800 \times 0{,}008}{0{,}001}$. Donc $r = 6\,400$ km.

Selon la méthode d'Ératosthène, le rayon de la terre est 6 400 km.

67 ● **Traduction**

Calculer la hauteur h à laquelle la balle doit être frappée pour passer au ras du filet et retomber à 5 m de la base du filet. La figure n'est pas à l'échelle.

● **Solution**

Le théorème de Thalès permet d'écrire $\dfrac{5}{14} = \dfrac{0{,}9}{h}$.

On en déduit $5 \times h = 14 \times 0{,}9$ et $h = \dfrac{14 \times 0{,}9}{5}$.

Donc $h = 2{,}52$ m.

La balle doit-être frappée à 2,52 m de hauteur.

68 **1. c.** Les longueurs MD et ME semblent égales.

2. ● Dans le triangle MAB, on peut écrire :

$$\frac{MD}{MB} = \frac{MR}{MA} = \frac{DR}{BA}$$

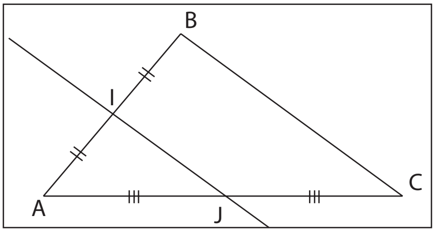
● Dans le triangle MAC, on peut écrire :

$$\frac{ME}{MC} = \frac{MR}{MA} = \frac{ER}{CA}$$

● Finalement : $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MR}{MA}$ et $\dfrac{ME}{MC} = \dfrac{MR}{MA}$.

On en déduit $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{ME}{MC}$. Or M est le milieu de [BC], donc MB = MC. L'égalité précédente peut alors s'écrire $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{ME}{MB}$ et donc MD = ME.

69 **a.**

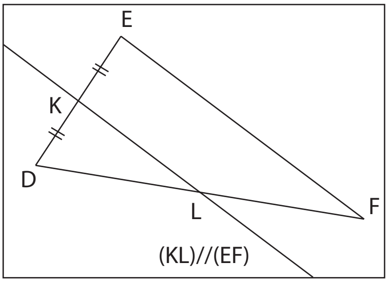


● Les points A, I, B et A, J, C sont alignés dans le même ordre.

$\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{1}{2}$. Donc $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

b.



Les droites (KE) et (FL) sont sécantes en D et les droites (KL) et (EF) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{DK}{DE} = \frac{DL}{DF} = \frac{KL}{EF} \text{ soit } \frac{1}{2} = \frac{DL}{DF} = \frac{KL}{EF}$$

De $\dfrac{1}{2} = \dfrac{DL}{DF}$, on déduit que L est le milieu de [DF].

c. ● Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux des côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

● Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

70 Les triangles OAB et OFE sont dans une configuration de Thalès donc $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{OB}{OF}$.

Les triangles ODE et OBC sont dans une configuration de Thalès donc $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{OE}{OC}$.

En multipliant ces égalités on obtient :

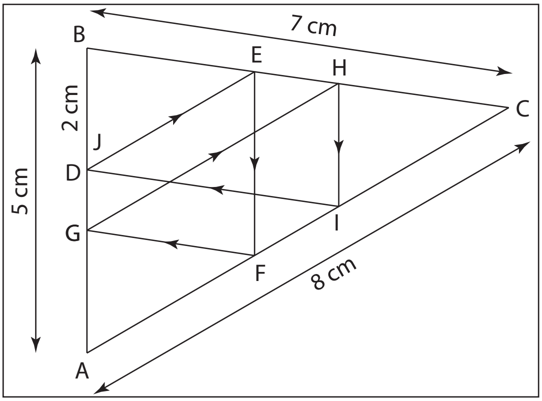
$$\frac{OA}{OE} \times \frac{OE}{OC} = \frac{OB}{OF} \times \frac{OD}{OB}$$

donc en simplifiant on a $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OD}{OF}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (AD) et (FC) sont parallèles.

71 ● Avec un logiciel de gèométrie ou à la main.

Il semble, sur la figure ci-dessous, que les points D et J soient confondus.

Donc le robot semble repasser par le point D.



● Dans le triangle ABC, les droites (DE) et (AC) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

C'est-à-dire $\dfrac{2}{5} = \dfrac{BE}{7} = \dfrac{DE}{8}$.

$\dfrac{2}{5} = \dfrac{BE}{7}$ donc $BE = \dfrac{2 \times 7}{5} = 2{,}8$ cm.

$\dfrac{2}{5} = \dfrac{DE}{8}$ donc $DE = \dfrac{2 \times 8}{5} = 3{,}2$ cm.

● $CE = CB - BE = 7\text{ cm} - 2{,}8\text{ cm} = 4{,}2\text{ cm}$.
Dans le triangle ABC, les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{CF}{CA} = \dfrac{EF}{BA}$.

C'est-à-dire $\dfrac{4{,}2}{7} = \dfrac{CF}{8} = \dfrac{EF}{5}$.

$\dfrac{4{,}2}{7} = \dfrac{CF}{8}$ donc $CF = \dfrac{4{,}2 \times 8}{7} = 4{,}8\text{ cm}$.

$\dfrac{4{,}2}{7} = \dfrac{EF}{5}$ donc $EF = \dfrac{4{,}2 \times 5}{7} = 3\text{ cm}$.

● $AF = AC - FC = 8\text{ cm} - 4{,}8\text{ cm} = 3{,}2\text{ cm}$.

● Dans le triangle ABC, les droites (GF) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AG}{AB} = \dfrac{GF}{BC}$.

C'est-à-dire $\dfrac{3{,}2}{8} = \dfrac{AG}{5} = \dfrac{GF}{7}$.

$\dfrac{3{,}2}{8} = \dfrac{AG}{5}$ donc $AG = \dfrac{3{,}2 \times 5}{8} = 2\text{ cm}$.

$\dfrac{3{,}2}{8} = \dfrac{GF}{7}$ donc $GF = \dfrac{3{,}2 \times 7}{8} = 2{,}8\text{ cm}$.

● $BG = BA - AG = 5\text{ cm} - 2\text{ cm} = 3\text{ cm}$.

● Dans le triangle ABC, les droites (GH) et (AC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{BG}{BA} = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{GH}{AC}$.

C'est-à-dire $\dfrac{3}{5} = \dfrac{BH}{7} = \dfrac{GH}{8}$.

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{BH}{7}$ donc $BH = \dfrac{3 \times 7}{5} = 4{,}2\text{ cm}$.

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{GH}{8}$ donc $GH = \dfrac{3 \times 8}{5} = 4{,}8\text{ cm}$.

● $CH = BC - HB = 7\text{ cm} - 4{,}2\text{ cm} = 2{,}8\text{ cm}$.

● Dans le triangle ABC, les droites (HI) et (BA) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CI}{CA} = \dfrac{HI}{BA}$.

C'est-à-dire $\dfrac{2{,}8}{7} = \dfrac{CI}{8} = \dfrac{HI}{5}$.

$\dfrac{2{,}8}{7} = \dfrac{CI}{8}$ donc $CI = \dfrac{8 \times 2{,}8}{7} = 3{,}2\text{ cm}$.

$\dfrac{2{,}8}{7} = \dfrac{HI}{5}$ donc $HI = \dfrac{5 \times 2{,}8}{7} = 2\text{ cm}$.

● $AI = AC - CI = 8\text{ cm} - 3{,}2\text{ cm} = 4{,}8\text{ cm}$.

● Dans le triangle ABC, les droites (IJ) et (CB) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AJ}{AB} = \dfrac{IJ}{CB}$.

C'est-à-dire $\dfrac{4{,}8}{8} = \dfrac{AJ}{5} = \dfrac{IJ}{7}$.

$\dfrac{4{,}8}{8} = \dfrac{AJ}{5}$ donc $CI = \dfrac{5 \times 4{,}8}{8} = 3\text{ cm}$.

$\dfrac{4{,}8}{8} = \dfrac{IJ}{7}$ donc $IJ = \dfrac{7 \times 4{,}8}{8} = 4{,}2\text{ cm}$.

● $BJ = BA - AJ = 5\text{ cm} - 3\text{ cm} = 2\text{ cm}$.
BJ = BD donc les points J et D sont confondus : le robot repassera bien par le point D.

● $DE + EF + FG + GH + HI + IJ$
$= 3{,}2\text{ cm} + 3\text{ cm} + 2{,}8\text{ cm} + 4{,}8\text{ cm} + 2\text{ cm} + 4{,}2\text{ cm}$
$= 20\text{ cm}$.
Donc le robot aura parcouru 20 cm quand il repassera par le point D.

72 ● Les droites (AB) et (DE) sont sécantes en C et les droites (AD) et (EB) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AD}{BE}$ soit $\dfrac{3}{5} = \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AD}{7}$.

De $\dfrac{3}{5} = \dfrac{AD}{7}$, on déduit $AD = 7 \times \dfrac{3}{5}$.

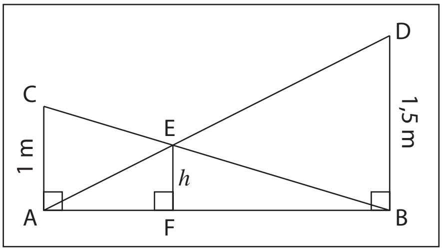
Donc $AD = 4{,}2\text{ cm}$.

● Les droites (FD) et (BC) sont sécantes en A et les droites (FC) et (DB) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{FC}{DB}$ soit $\dfrac{AF}{4{,}2} = \dfrac{3}{8} = \dfrac{FC}{DB}$.

De $\dfrac{AF}{4{,}2} = \dfrac{3}{8}$, on déduit $AF = 4{,}2 \times \dfrac{3}{8}$.

Donc $AF = 1{,}575\text{ cm}$.

73



Les droites (AC), (EF) et (BD) toutes perpendiculaires à (AB) sont parallèles.
On utilise le théorème de Thalès deux fois :
– dans le triangle ABC : $\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{EF}{AC}$ d'où $\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{h}{1}$.

– dans le triangle ABD : $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{EF}{DB}$ d'où $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{h}{1{,}5}$.

● F est un point du segment [AB] donc AF + FB = AB et

par conséquent $\dfrac{AF}{AB} + \dfrac{FB}{AB} = \dfrac{AB}{AB} = 1$.

On a donc à résoudre l'équation : $\dfrac{h}{1{,}5} + \dfrac{h}{1} = 1$

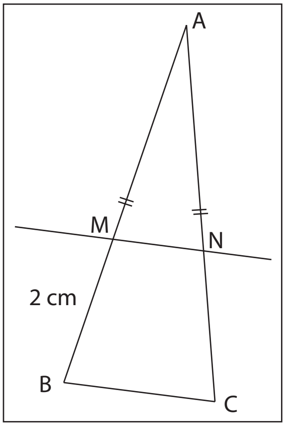
soit $h + 1{,}5\,h = 1{,}5$ ou $2{,}5\,h = 1{,}5$.

On obtient : $h = \dfrac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$.

Les deux barrières se croisent à une hauteur de 0,6 m.

Dossier Brevet

74 **1. a.**, **b.** et **c.**



2. $M \in [AB]$ donc $AM = AB - MB = 5 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$.
Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ soit $\frac{3}{5} = \frac{AN}{5} = \frac{MN}{2}$.
De $\frac{3}{5} = \frac{AN}{5}$, on déduit $AN = 3$ cm.
De $\frac{3}{5} = \frac{MN}{2}$, on déduit $MN = 2 \times \frac{3}{5}$.
Donc $MN = 1{,}2$ cm.

3. • $AM + MN + AN = 3 \text{ cm} + 1{,}2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 7{,}2 \text{ cm}$.
Donc le périmètre du triangle AMN est 7,2 cm.
• $BM + MN + NC + CB$
$= 2 \text{ cm} + 1{,}2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm}$
$= 7{,}2 \text{ cm}$.
Donc le périmètre du quadrilatère BMNC est 7,2 cm.
• Les périmètres du triangle AMN et du quadrilatère BMNC sont bien égaux.

75 **a.** Le triangle AKD est rectangle en K.
Donc, d'après le théorème de Pythagore :
$KA^2 + KD^2 = AD^2$.
$KA^2 + 11^2 = 60^2$
$KA^2 + 121 = 3\,600$
$KA^2 = 3\,600 - 121$
$KA^2 = 3\,479$
$KA = \sqrt{3479}$
Donc $KA \approx 59$ cm

b. $P \in [AD]$ donc $AP = AD - DP = 60 \text{ cm} - 45 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$.
Les droites (DK) et (PH) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (KA), donc elles sont parallèles.
Les droites (DP) et (KH) sont sécantes en A donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AH}{AK} = \frac{AP}{AD} = \frac{HP}{DK}$ soit $\frac{AH}{59} = \frac{15}{60} = \frac{HP}{11}$.
De $\frac{15}{60} = \frac{HP}{11}$, on déduit $HP = 11 \times \frac{15}{60}$.
Donc $HP = 2{,}75$ cm.

76 **1. a.** Les droites (MC) et (TW) sont sécantes en P et les droites (CT) et (MW) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$$\frac{PC}{PM} = \frac{CT}{MW} \text{ soit } \frac{3{,}78}{4{,}20} = \frac{CT}{3{,}40}$$
donc $CT = 3{,}40 \times \frac{3{,}78}{4{,}20} = 3{,}06$ m.

b. $3{,}06 \times 2 = 3{,}12$ or $6{,}12 < 7$, donc 7 m de fil suffiront.

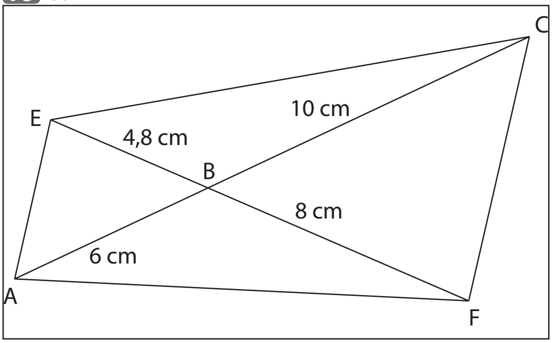
2. Les points P, C, M et P, T, W sont alignés dans le même ordre.
$\frac{PC}{PM} = \frac{3{,}78}{4{,}2} = \frac{3{,}78 \times 2{,}3}{4{,}2 \times 2{,}3} = \frac{8{,}694}{9{,}66}$ et
$\frac{PT}{PW} = \frac{1{,}88}{2{,}3} = \frac{1{,}88 \times 4{,}2}{2{,}3 \times 4{,}2} = \frac{7{,}896}{9{,}66}$
Donc $\frac{PC}{PM} \neq \frac{PT}{PW}$.
Donc les droites (CT) et (MW) ne sont pas parallèles.

77 **a.** Les droites (AB) et (DE) sont sécantes en C et les droites (BD) et (AE) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CA} = \frac{DB}{EA}$ soit $\frac{CD}{6} = \frac{CB}{CA} = \frac{1{,}1}{1{,}5}$.
De $\frac{CD}{6} = \frac{1{,}1}{1{,}5}$, on déduit $CD = 6 \times \frac{1{,}1}{1{,}5}$.
Donc $CD = 4{,}40$ m

b. $D \in [EC]$ donc $ED = EC - DC = 6 \text{ m} - 4{,}4 \text{ m} = 1{,}6 \text{ m}$.
Donc $ED = 1{,}60$ m.

c. De la question **b.**, on déduit qu'une personne mesurant 1,10 m (la longueur BD) et située à moins de 1,6 m (la longueur ED) du camion ne sera pas visible par le conducteur.
Donc le conducteur ne peut pas voir la fillette.

78 **a.**



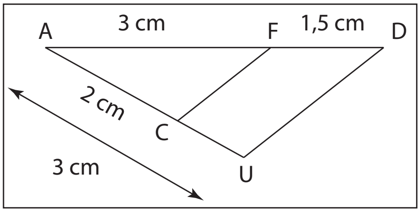
b. Les points A, B, C et E, B, F sont alignés dans le même ordre.
$\frac{BA}{BC} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ et $\frac{BE}{BF} = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6$. Donc $\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BF}$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AE) et (FC) sont parallèles.

c. Les points A, B, C et F, B, C sont alignés dans le même ordre.

$\frac{BA}{BC} = \frac{6}{10} = 0,6$ et $\frac{BF}{BE} = \frac{8}{4,8} = 1,7$.

$\frac{BA}{BC} \neq \frac{BF}{BE}$, donc les droites (AF) et (EC) ne sont pas parallèles.

79



a. Les points A, C, U et A, F, B sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AC}{AU} = \frac{2}{3} = \frac{2\times4,5}{3\times4,5} = \frac{9}{13,5}$ et $\frac{AF}{AD} = \frac{3}{4,5} = \frac{3\times3}{4,5\times3} = \frac{9}{13,5}$.

Donc $\frac{AC}{AU} = \frac{AF}{AD}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (CF) et (UD) sont parallèles.

b. On note k le rapport d'agrandissement.

$k = \frac{AD}{AF} = \frac{4,5}{3} = 1,5$.

Donc ADU est un agrandissement du triangle AFC dans le rapport 1,5.

c. • Première méthode :

Aire de ACF = $\frac{AF\times1,6}{2}$ c'est-à-dire

Aire de ACF = $\frac{3\times1,6}{2}$

Donc l'aire de ACF est 2,4 cm^2.

Dans un agrandissement de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 donc

Aire ADU = $k^2 \times$ Aire AC, c'est-à-dire

Aire ADU = $1,5^2 \times 2,4$.

Donc l'aire de ADU est 5,4 cm^2.

• Deuxième méthode :

On note h' la hauteur issue de U dans le triangle ADU.

$h' = k \times h$ soit $h' = 1,5 \times 1,6$ cm = 2,4 cm.

Aire de ADU = $\frac{AD\times h'}{2}$, c'est-à-dire

Aire de ADU = $\frac{4,5\times2,4}{2}$

Donc l'aire de ADU est 5,4 cm^2.

80 **a.** Calculer RA.

RA = OR – OA = 6,84 cm – 3,8 cm = 3,04 cm

b. Calculer OK.

Dans le triangle ROK, A est un point de [RO] et S un point de [RK]. (AS)//(OK).

Donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{RA}{RO} = \frac{AS}{OK}$ donc :

$$OK = 5 \times \frac{6,84}{3,04} = 11,25$$

c. Calculer le périmètre du triangle RKO.

P_{RKO} = KR + OR + OK = 7,2 cm + 6,84 cm + 11,25 cm = 25,29 cm.

81 BCDE est un carré donc les droites (BE) et (CD) sont parallèles.

De plus, B appartient à [AC] et M à [AF] donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CF}$ soit $\frac{BM}{CF} = \frac{2}{6}$.

Donc $\frac{BM}{CF} = \frac{1}{3}$ c'est-à-dire BM = $\frac{1}{3} \times$ CF.

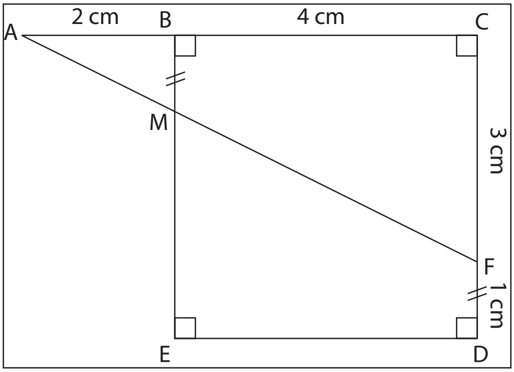
Pour avoir BM = FD, on doit donc avoir $\frac{1}{3} \times$ CF = FD.

Or CF + FD = 4 soit CF + $\frac{1}{3} \times$ CF = 4

$\frac{4}{3} \times$ CF = 4

Donc CF = 3 cm.

Ainsi, pour avoir BM = FD, on doit placer le point F sur [CD] de façon que CF = 3 cm.



82 On suppose que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Dans ce cas, d'après le théorème de Thalès :

$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$ soit $\frac{OA}{OD} = \frac{45}{50} = \frac{AB}{100}$.

De $\frac{45}{50} = \frac{AB}{100}$, on déduit AB = $100 \times \frac{45}{50}$.

Donc AB = 90 cm.

Or, sur la desserte, le plateau [AB] mesure 76 cm.

$76 \neq 90$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

83 • Calcul de BC :

Le théorème de Pythagore permet d'écrire, pour le triangle rectangle ABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 300^2 + 400^2 = 250\,000$

d'où BC = 500 m

• Calcul de CD et DE :

Dans les triangles ABC et CDE :

– les droites (AE) et (BD) se coupent en C ;

– les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{ED}$

- De $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD}$, on déduit $\frac{400}{1\,000} = \frac{500}{CD}$ et
$400 \times CD = 500 \times 1\,000$.
D'où $CD = \frac{500 \times 1\,000}{400}$ soit $CD = 1\,250$ m.

- De $\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{ED}$, on déduit $\frac{400}{1\,000} = \frac{300}{DE}$ et
$400 \times DE = 300 \times 1\,000$.
D'où $DE = \frac{300 \times 1000}{400}$ soit $DE = 750$ m.

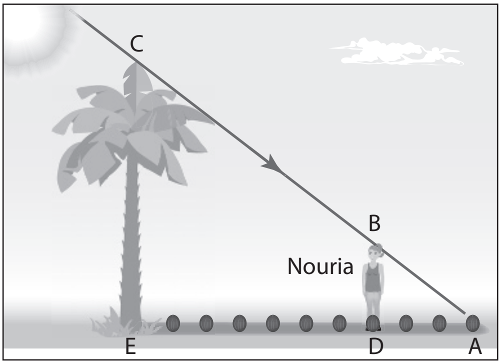
Remarque : on peut aussi utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle CDE rectangle en E.

- Longueur du parcours :
300 m + 500 m + 1 250 m + 750 m = 2 800 m
La longueur du parcours est 2,8 km.

84 • Les droites (BC) et (MN) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AN) donc elles sont parallèles.
- Le triangle AMN est un agrandissement du triangle ABC dans le rapport $k = \frac{AN}{AC} = \frac{6,3}{1,8} = 3,5$.
- Dans un agrandissement de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 donc
Aire de AMN $= k^2 \times$ Aire de ABC soit
Aire de AMN $= 3,5^2 \times$ Aire de ABC.
Aire de AMN $= 12,25 \times$ Aire de ABC.
- L'aire du triangle AMN est 12,25 fois plus grande que l'aire du triangle ABC, donc Héloïse mettra 12,25 fois plus de temps pour peindre le triangle AMN.
$12,25 \times 40$ min = 490 min.
Donc Héloïse mettra 490 minutes pour peindre le triangle AMN.
- 490 min – 40 min = 450 min et 450 min = 7 h 30 min.
Donc Héloïse aura terminé de peindre dans 7 h 30 min.

85 Calcul de l'inclinaison des phares
APQC est un rectangle donc PA = QC = 0,65 m.
$K \in [QC]$ donc
QK = QC – KC = 0,65 m – 0,58 cm = 0,07 cm.
$\frac{QK}{QP} = \frac{0,07}{5} = 0,014$.
$0,01 < 0,014 < 0,015$ donc l'inclinaison des phares est conforme.
Calcul de la portée des feux de croisement
Les droites (PQ) et (CS) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (QC) donc elles sont parallèles.
Les droites (CQ) et (PS) sont sécantes en K.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{KQ}{KC} = \frac{KP}{KS} = \frac{QP}{CS}$ soit $\frac{0,07}{0,58} = \frac{KP}{KS} = \frac{5}{CS}$.
De $\frac{0,07}{0,58} = \frac{5}{CS}$, on déduit $0,07 \times CS = 5 \times 0,58$ et
$CS = \frac{5 \times 0,58}{0,07}$.
Donc $CS \approx 41,43$ m.
- $C \in [AS]$ donc AS = AC + CS soit
AS ≈ 5 m + 41,43 m donc AS ≈ 46,43 m.
La portée des feux de croisement est supérieure à 45 m donc ces feux sont mal réglés : Pauline risque d'éblouir les autres conducteurs.

86



- On suppose que l'arbre et Nouria sont tous les deux perpendiculaires au sol, donc la droite (BD) est parallèle à la droite (CE).
- **Première méthode :**
D'après le document 1, Nouria fait 111 pas sur 100 mètres et $\frac{100}{11} \approx 0,9$ m
Donc un pas de Nouria mesure environ 0,9 m.
Les droites (BC) et (DE) sont sécantes en A et les droites (BD) et (CE) sont parallèles.
Donc, d'après le Théorème de Thalès :
$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$ c'est-à-dire $\frac{AB}{AC} = \frac{2,7}{9} = \frac{1,80}{CE}$
De $\frac{2,7}{9} = \frac{1,80}{CE}$, on déduit $2,7 \times CE = 9 \times 1,80$.
Donc $CE = \frac{9 \times 1,80}{2,7} = 6$.
Le cocotier mesure environ 6 m.
- **Deuxième méthode :**
On lit sur le document 2 que $\frac{AD}{AE} = \frac{3}{10}$.
Les droites (BC) et (DE) sont sécantes en A et les droites (BD) et (CE) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$ c'est-à-dire $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{10} = \frac{1,80}{CE}$
De $\frac{3}{10} = \frac{1,80}{CE}$ on déduit $3 \times CE = 10 \times 1,80$.
Donc $CE = \frac{10 \times 1,80}{3} = 6$.
Le cocotier mesure 6 m.

CHAPITRE 12

Modéliser une situation spatiale

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le cycle 3 et le début du cycle 4

On se familiarise dès la 6e avec le repérage sur un parallélépipède rectangle (face du dessus, arêtes perpendiculaires, faces parallèles...). En 5e, on commence à représenter en perspective cavalière et à construire des patrons de solides (parallélépipède rectangle, prisme droit, pyramide régulière). En 4e, on approfondit le repérage dans un parallélépipède rectangle avec les coordonnées (abscisses ; ordonnées ; altitude), on introduit le repérage sur la sphère et les coordonnées géographiques.

2 Je découvre

Activité 1

Conformément au programme («Développer sa vision de l'espace» et «Visualiser des solides et leurs sections planes afin de développer la vision dans l'espace»), l'objectif de cette activité est de comprendre, à partir d'images, les différentes sections d'un parallélépipède rectangle par un plan, d'une part parallèle à une face et, d'autre part, parallèle à une arête. L'élève est également invité à représenter ces sections en vraie grandeur.

Activité 2

Conformément au programme («Développer sa vision de l'espace» et «Visualiser des solides et leurs sections planes afin de développer la vision dans l'espace»), l'objectif de cette activité est de comprendre, à partir d'images, la section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base. À la question **2.**, l'élève utilise ses connaissances (notamment le théorème de Thalès) pour comprendre l'incidence d'une réduction sur un calcul de volume («Comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes»).

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

Suite à l'activité 1, on peut définir la section d'un prisme droit par un plan parallèle à une face ou à une arête et insister sur le cas particulier du parallélépipède rectangle. Suite à l'activité 2, on peut définir la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base et introduire la notion de rapport de réduction.

Exercice résolu

L'élève doit «comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les volumes». Cela permet de travailler à la fois la section et l'utilisation du rapport de réduction pour calculer des longueurs et des volumes.

4 Compléments

Section d'un parallélépipède rectangle

- Les exercices 19 à 21 invitent l'élève à représenter en perspective cavalière la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête ou à une face.
- Les exercices 22, 26 et 27 invitent l'élève à représenter en vraie grandeur la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête ou à une face.
- Les exercices 23 à 25 invitent l'élève, conformément au programme, à « Utiliser un logiciel de géométrie pour visualiser des solides et leurs sections planes afin de développer la vision dans l'espace ».

Section d'un prisme droit

- L'exercice 30 invite l'élève à représenter en perspective cavalière la section d'un prisme droit par un plan parallèle à une face.
- L'exercice 31 invite l'élève, conformément au programme, à « Utiliser un logiciel de géométrie pour visualiser des solides et leurs sections planes afin de développer la vision dans l'espace ».

Section d'un cylindre

- Les exercices 34 et 35 invitent l'élève à représenter en vraie grandeur la section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe.

Section d'un cône, d'une pyramide

- L'exercice 38 invite l'élève à représenter en perspective cavalière la section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base.
- Les exercices 14 et 39 à 42 invitent l'élève à utiliser le rapport de réduction obtenu par section d'un cône ou d'une pyramide, pour déduire des longueurs, des aires et des volumes.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

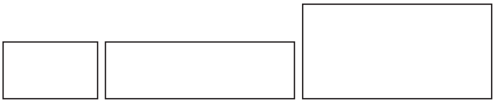
1. b. ; **2. a.** et **b.** ; **3. b.** ; **4. c.**

Je découvre

Activité 1

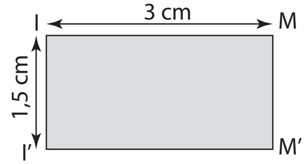
1 Les sections sont des rectangles dont les dimensions sont :
a. 1,5 cm et 2,5 cm.
b. 1,5 cm et 5 cm pour l'une et 2,5 cm et 5 cm pour l'autre.

Échelle 1/2.

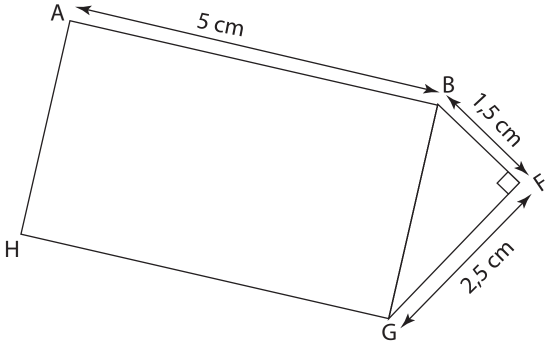


❷ Les sections sont des rectangles.

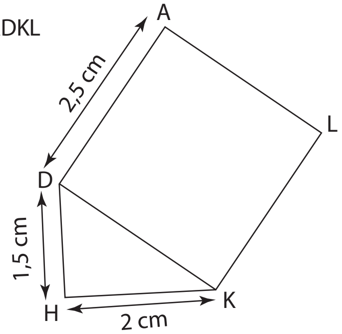
a. Section IMM'I'



b. Section ABGH



c. Section ADKL



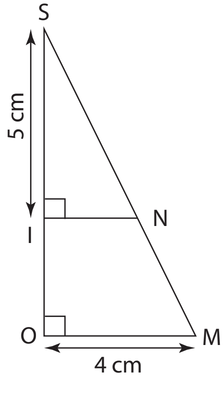
Activité 2

❶ **a.** La section de ce cône par le plan parallèle à sa base et qui passe par le point I tel que SI = 5 cm est un cercle de centre I.

b. La section de ce cône par le plan parallèle à sa base et qui passe par le point S est le point S.

❷ La figure ci-contre n'est pas demandée mais elle peut être un exercice utile.

Échelle 1/2.



a. Dans le triangle SOM, les droites (OM) et (NI) sont parallèles.

On reconnaît une configuration du théorème de Thalès avec les droites (SM) et (SO) sécantes en S et les deux droites parallèles (OM) et (IN).

On a alors : $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{IN}{OM}$ d'où $\dfrac{5}{8} = \dfrac{IN}{4}$ et donc :

$$IN = \frac{5 \times 4}{8} = 2{,}5.$$

Quelle que soit la position du point N, la distance IN est égale à 2,5 cm, N est donc un point du cercle de centre I et de rayon 2,5 cm.

La section de la section du cône par le plan P est le cercle de centre I et de rayon 2,5 cm.

b. $\mathcal{V} = \dfrac{\pi \times 4^2 \times 8}{3} = \dfrac{128\pi}{3}$

et $\mathcal{V}' = \dfrac{\pi \times 2{,}5^2 \times 5}{3} = \dfrac{125\pi}{12}$

$\mathcal{V} \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^3 = \dfrac{128 \times \pi \times 5^3}{3 \times 8^3} = \dfrac{125\pi}{12}$ or, $\mathcal{V}' = \dfrac{125\pi}{12}$.

On a vérifié que $\mathcal{V}' = \left(\dfrac{5}{8}\right)^3 \mathcal{V}$.

c. Le rapport de réduction est $\dfrac{5}{8}$.

J'applique le cours

2 **a.** La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD dans le rapport $k = \dfrac{SO'}{SO}$ c'est-à-dire :

$$k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

b. On note $\mathcal{V}$ le volume de la pyramide SABCD et $\mathcal{V}'$ celui de la pyramide SA'B'C'D', alors $\mathcal{V}' = k^3\mathcal{V}$.

Or, $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times$ Aire de base $\times h$

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 4{,}5^2 \times 9$

$\mathcal{V} = 60{,}75$ cm^3

Donc $\mathcal{V}' = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times 60{,}75$ cm^3 = 18 cm^3.

3 Le volume de la pyramide réduite obtenue est $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3 \times 1\,280$, soit 20 cm^3.

4 La section du cône par un plan parallèle à sa base est une réduction de cette base dans le rapport :

$$k = \frac{SA}{SO} \text{ c'est-à-dire } k = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

Le volume $\mathcal{V}$ du cône est :

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 15^2 \times 18 \approx 4\,241{,}15$$

donc le volume $\mathcal{V}'$ du cône réduit est :

$$\mathcal{V}' = \left(\frac{5}{9}\right)^3 \times \mathcal{V} \approx 727 \text{ cm}^3.$$

5 Le volume du cône réduit obtenu est $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 270$, soit 80 cm³.

À l'oral

6 Cette section est un rectangle de mêmes dimensions que ABCD.

7 Cette section est un rectangle de longueur OO′.

8 Cette section est un cercle de centre O′.

9 Cette section est un rectangle dont l'une des dimensions est égale à FB.

10 Cette section est un pentagone identique à ABCDE.

11 Cette section est un cercle de centre O′.

12 **a.** Plan parallèle à la face DCGH (ou à la face ABFE).
b. Plan parallèle à l'arête [AD] (ou à l'arête [EH] ou [FG] ou [BC]).

13 **a.** Lorsque M est en A, cette section est le segment [AD]. Elle est de longueur 4 cm.
b. Lorsque M est en B, cette section est le rectangle BCFE de dimensions 3 cm et 4 cm.
c. Lorsque M est le milieu de [AB], cette section est un rectangle de dimensions 1,5 cm et 4 cm.

14 **1.** La section est un cercle de centre I.

2. a. I se trouve à $\frac{1}{3}$ de la hauteur, en partant de S.

b. I se trouve à $\frac{3}{4}$ de la hauteur à partir de S.

c. I est confondu avec O.

3. Lilou a raison, le point I est alors confondu avec le point S.

4. a. Le rapport de réduction est $\frac{1}{2}$ pour les longueurs, donc $\frac{1}{4}$ pour les aires.

L'aire de la section est le quart de l'aire $\mathcal{B}$ de la base du cône $\mathcal{C}$.

b. Le rapport de réduction pour les volumes est $\frac{1}{8}$, donc le volume du cône dont la base est la section et de sommet S est $\frac{1}{8}$ du volume du cône $\mathcal{C}$.

15 La section est bien un triangle équilatéral.
On peut dire à Axel :

– Dans la leçon, on a appris que la section est une réduction de la base. Or, une réduction ne change pas la forme mais uniquement les longueurs.

– On a aussi établi, avec la propriété de Thalès, que chaque côté de la section est obtenu en multipliant chaque côté de la base par le même rapport. Comme les trois côtés de la base ont la même longueur, ceux de la section aussi et la section est donc un triangle équilatéral.

Calcul mental

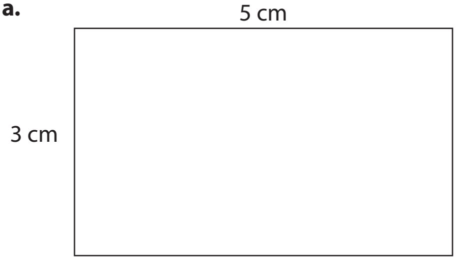
16 **a.** $\mathcal{V}' = 27$ cm³ ;

b. $\mathcal{V}' = 8$ cm³.

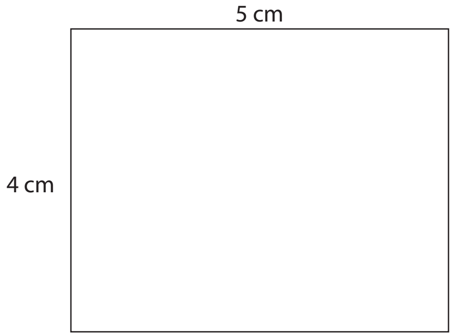
17 Le rapport de réduction est $k = \frac{1}{2}$.

Je m'entraîne

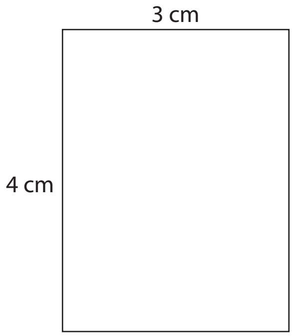
18 **a.**



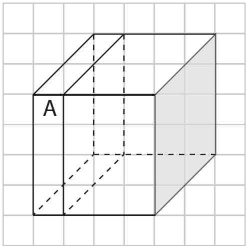
b.



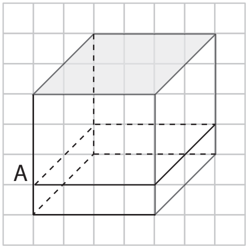
c.



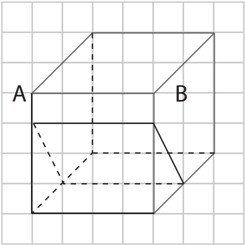
19 **a.**



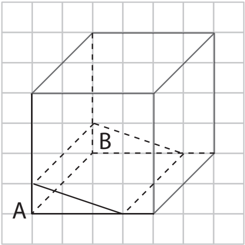
b.



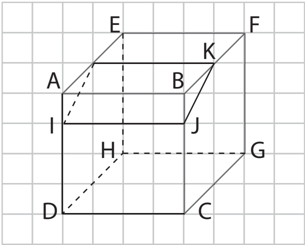
20 **a.**



b.

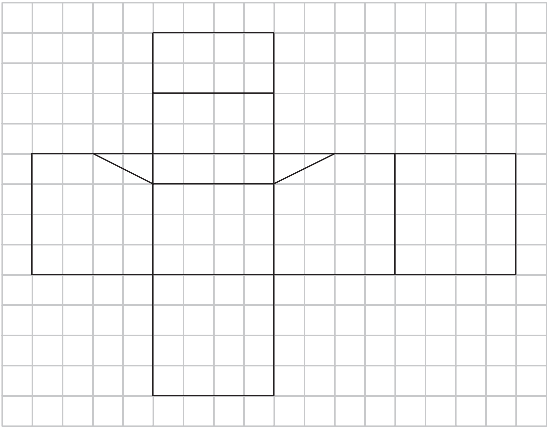


21 **a.**



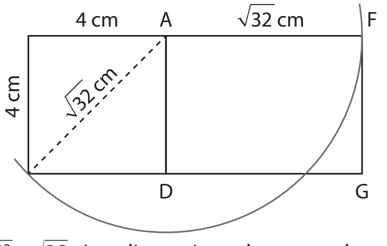
Cette section est obtenue par un plan parallèle à l'arête [AB] (ou [DC] ou [HG] ou [FE]) mais non à une face.

b. Échelle : 1 carreau = 1 cm.



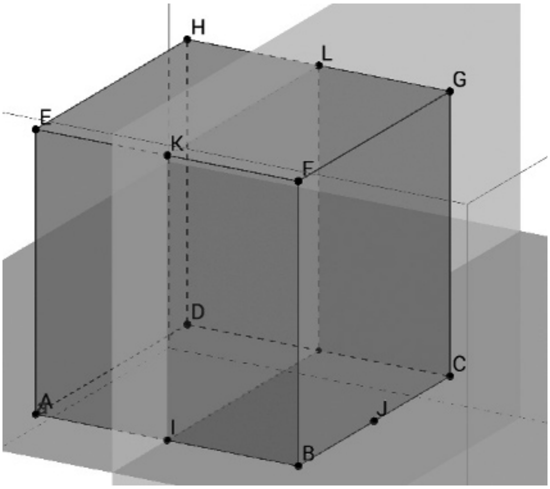
22 **a.** ADGF est un rectangle.

b.

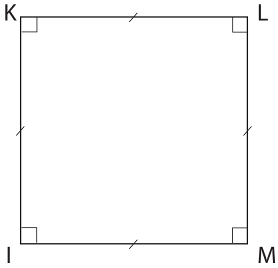


c. $\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}$. Les dimensions du rectangle sont 4 cm et $\sqrt{32}$cm, soit environ 5,7 cm.

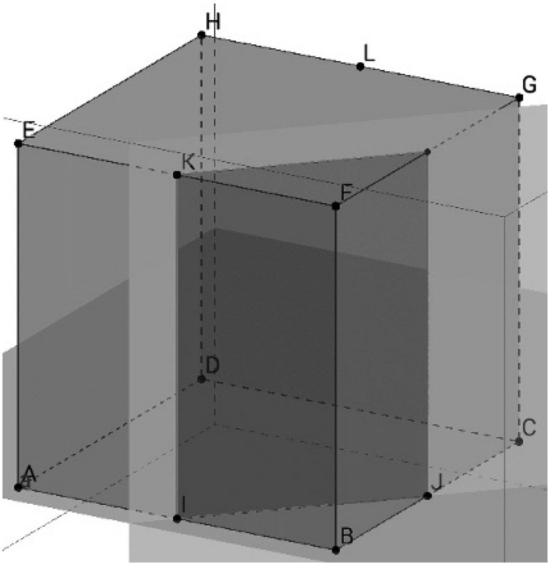
23 **a.**



b. Cette section est un carré de côté 3 cm.



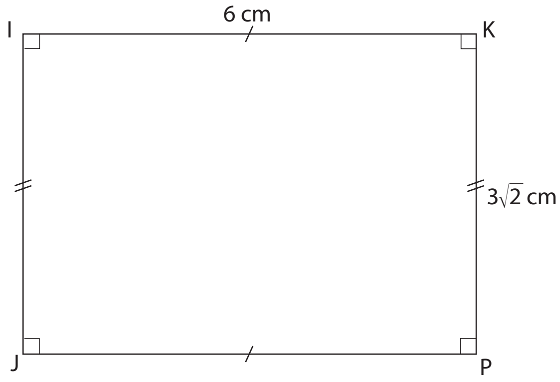
24 **a.**



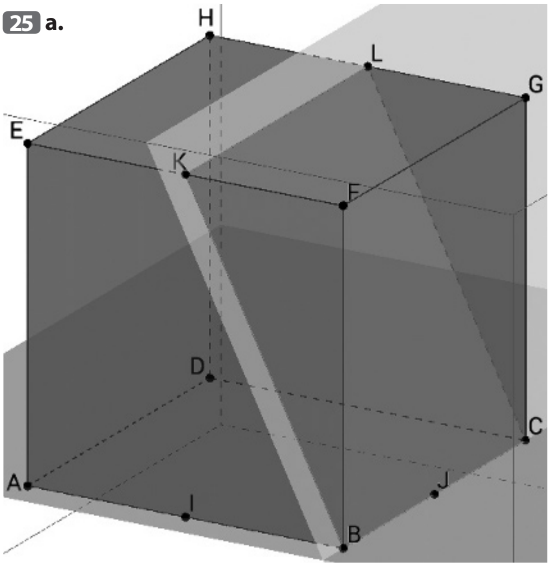
b. Cette section est un rectangle de dimensions 6 cm et $3\sqrt{2}$ cm.

En effet, dans le triangle BIJ rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

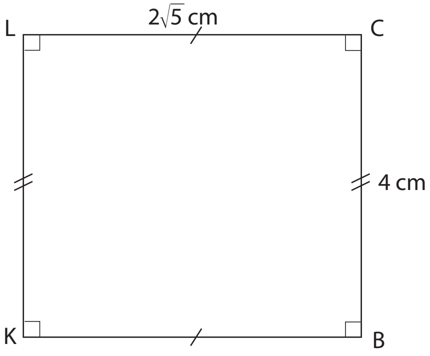
$IJ^2 = IB^2 + BJ^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, donc $IJ = 3\sqrt{2}$.



25 a.

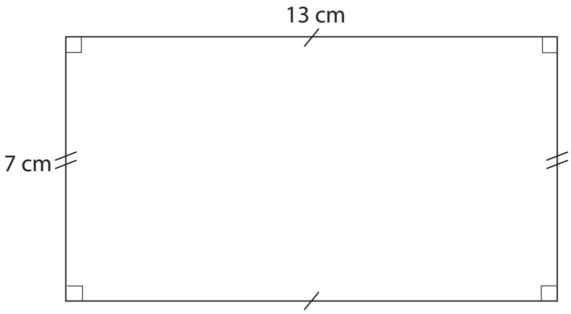


b. Cette section est un rectangle de dimensions 4 cm et $2\sqrt{5}$ cm.
En effet, dans le triangle BKF rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore :
$BK^2 = BF^2 + FK^2 = 4^2 + 2^2 = 20$, donc $BK = 2\sqrt{5}$.

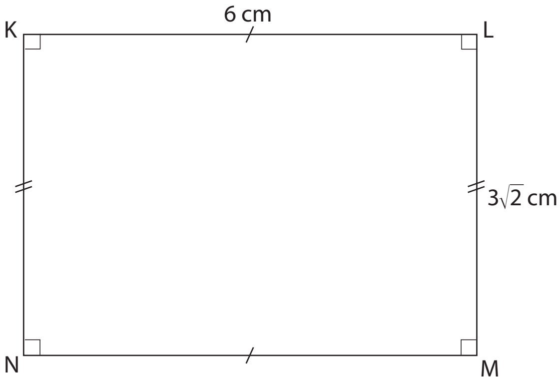


26 a. La section est un rectangle.
b. L'égalité de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D permet d'écrire :
$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$
donc AC = 13 cm.

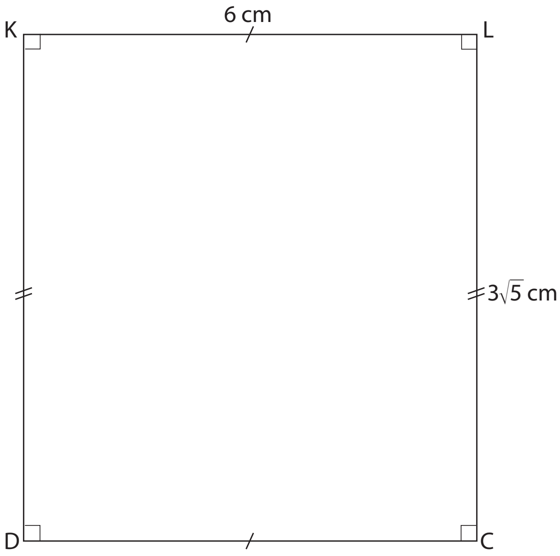
La section a pour dimensions 7 cm et 13 cm.
c. Échelle 1/2.



27 a. Dans le triangle KEN rectangle en E, $KN^2 = KE^2 + EN^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, donc $KN = 3\sqrt{2}$ cm.



b. Dans le triangle LBC rectangle en B, $LC^2 = LB^2 + BC^2 = 3^2 + 6^2 = 45$, donc $LC = 3\sqrt{5}$ cm.



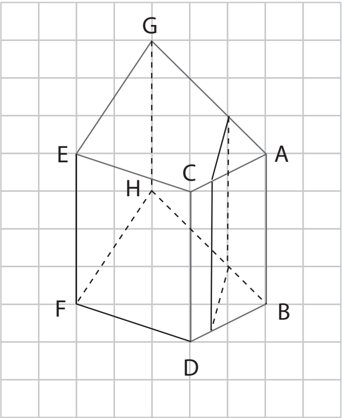
28 a. Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, donc AC = 13 cm.
b. Dans les triangles EMN et EAC, puisque (MN) // (AC), d'après le théorème de Thalès :

$\frac{EM}{EA} = \frac{EN}{EC} = \frac{MN}{AC}$, donc $\frac{2}{8} = \frac{MN}{13}$,

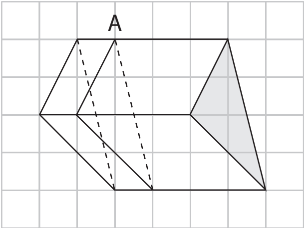
d'où $MN = \frac{2}{8} \times 13 = 3{,}25$ cm.

29 **a.** La section avec la face ABHG doit être tracée en pointillés et la section avec la face BDFH n'a pas été représentée.

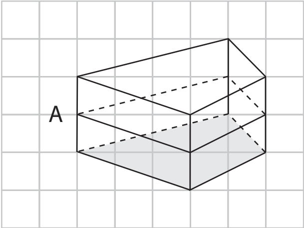
b.



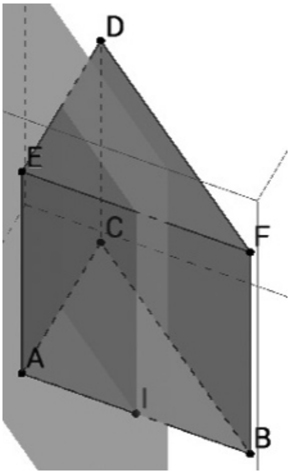
30 **a.**



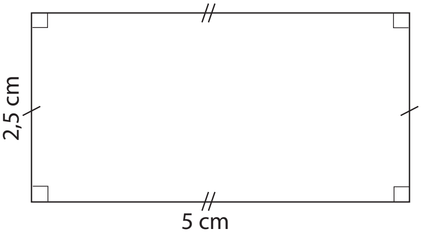
b.



31 **a.** à **d.**



e.



32 **a.** Dans le triangle ABE rectangle en E :

$\tan \widehat{ABE} = \frac{AE}{AB}$ donc $\tan 30° = \frac{4}{AB}$,

d'où $AB = \frac{4}{\tan 30°} = 4\sqrt{3}$ cm.

Dans les triangles EMN et EAB, d'après le théorème de Thalès :

$\frac{EM}{EA} = \frac{MN}{AB}$, donc $MN = \frac{3}{4} \times 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2$ cm.

b. Le volume $\mathcal{V}$ du prisme MNEPQF est :

$\mathcal{V} = \frac{MN \times EM}{2} \times NP$

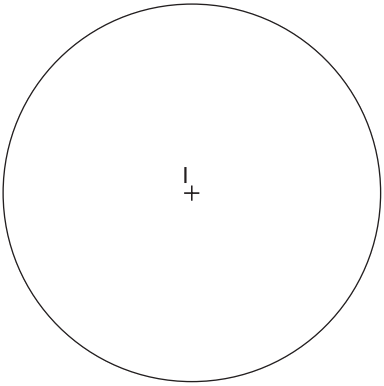
$\mathcal{V} = \frac{3\sqrt{3} \times 3}{2} \times 10$

$\mathcal{V} = 45\sqrt{3}$ cm³.

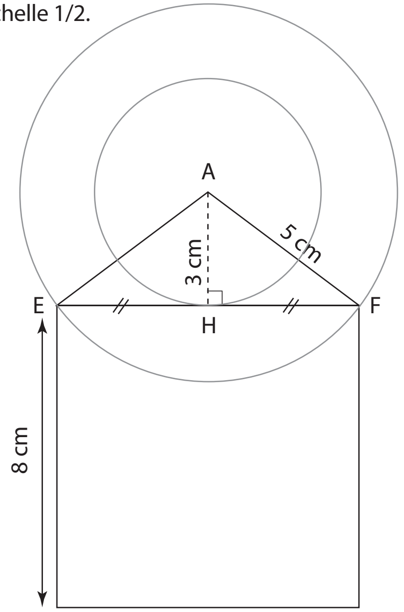
33 ① : Le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre ou parallèle à la face sur laquelle on voit la base du cylindre.
③ : Le plan semble contenir l'axe du cylindre et la diagonale de la face du cube sur laquelle apparaît la base du cylindre.
④ : Le plan est parallèle à l'axe du cylindre.

34 Dans le triangle MOQ rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :
$MQ^2 = MO^2 + OQ^2$ donc $MQ^2 = 7^2 + 7^2 = 98$
d'où $MQ = 7\sqrt{2}$ cm.
Le périmètre du rectangle MNPQ est donc :
$\mathcal{P} = 2 \times MN + 2 \times MQ = 12 + 14\sqrt{2}$ cm.

35 **1.** La section rouge est obtenue avec un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.
La section verte est obtenue avec un plan parallèle à l'axe du cylindre (situé à 3 cm de cet axe).
2. a. Échelle 1/2.

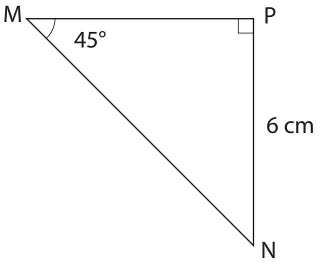


2. b. Échelle 1/2.



3. a. AE = AF, AEF est isocèle en A. H milieu de [EF] est aussi le pied de la hauteur.
Avec l'égalité de Pythagore dans le triangle AEH, rectangle en H :
$EH^2 = AE^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, donc EH = 4 cm.
EF = 2 × 4 cm = 8 cm.
b. On peut effectivement vérifier sur le dessin cette longueur.

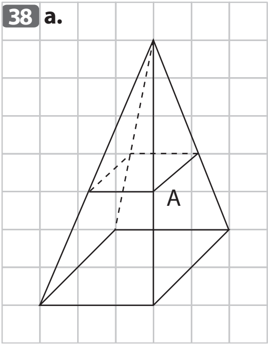
36 Échelle 1/2.



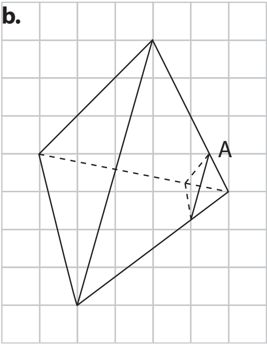
Le triangle MNP est isocèle rectangle en P, donc NP = MP = 6 cm.
D'après le théorème de Pythagore :
$MN^2 = MP^2 + PN^2$, donc $MN^2 = 6^2 + 6^2 = 72$
d'où $MN = 6\sqrt{2}$ cm.

37 **a.** La section est un carré.
b. La section est un cercle.

38 **a.**

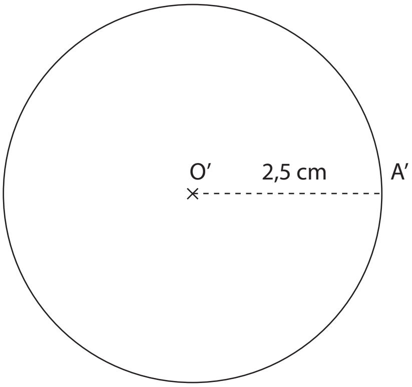


b.



39 **a.** Cette section est le cercle de centre O′ et de rayon O′A′.
b. D'après le théorème de Thalès, dans les triangles SOA et SO′A′ :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA}, \text{ donc } O'A' = \frac{1}{2} OA = 2,5 \text{ cm.}$$



40 D'après le théorème de Thalès, dans les triangles SAB et SA′B′ :

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}, \text{ donc } A'B' = \frac{3,2}{4} \times 2,1 = 1,68 \text{ cm.}$$

41 **a.** Le rapport de réduction est $\frac{1}{4}$.
b. Aire de la base de la grande pyramide :
$\mathcal{A} = 4,8 \times 4,8 = 23,04 \text{ cm}^2$.
Volume de la grande pyramide :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h = 46,08 \text{ cm}^3.$$

c. Aire de la base de la petite pyramide :

$$\mathcal{A}' = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \mathcal{A} = 1,44 \text{ cm}^2.$$

Volume de la petite pyramide :

$$\mathcal{V}' = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \mathcal{V} = 0,72 \text{ cm}^3.$$

42 **a.** Le rapport de réduction est $\frac{1}{6}$.
b. Aire de la base du grand cône :
$\mathcal{A} = \pi \times 24 \times 24 = 576\pi \text{ dm}^2$.

Volume du grand cône :

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times 36 = 6\,912\pi$ dm^3.

c. Aire de la base du petit cône :

$\mathcal{A}' = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \times \mathcal{A} = 16\pi$ dm^2.

Volume du grand cône :

$\mathcal{V}' = \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 \times \mathcal{V} = 32\pi$ dm^3.

43 **a.** $\dfrac{6 \times 6 \times 7{,}5}{3} = 90$.

Le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide SABCD est 90 cm^3.

b. $\mathcal{V}' = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \mathcal{V} = \dfrac{1}{27} \times 90 \approx 3{,}33$.

Une valeur approchée de $\mathcal{V}'$ est 3,33 cm^3.

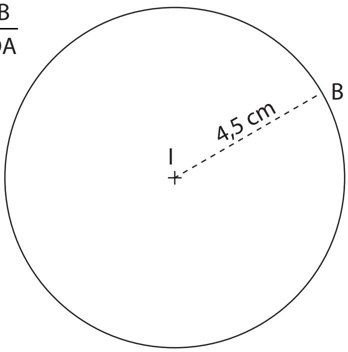
44 $8^2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 36$, l'aire de cette section est 36 cm^2.

45 **a.** $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SB}{SA} = \dfrac{IB}{OA}$

b. $\dfrac{6}{10} = \dfrac{IB}{7{,}5}$

$IB = \dfrac{6 \times 7{,}5}{10} = 4{,}5$.

Échelle 1/2.



46 **a.** 6 cm × 2 = 12 cm, la hauteur du cône $\mathcal{C}_1$ est 12 cm.

b. 50 cm^2 × 2^2 = 200 cm^2, l'aire de la base du cône $\mathcal{C}_1$ est 200 cm^2.

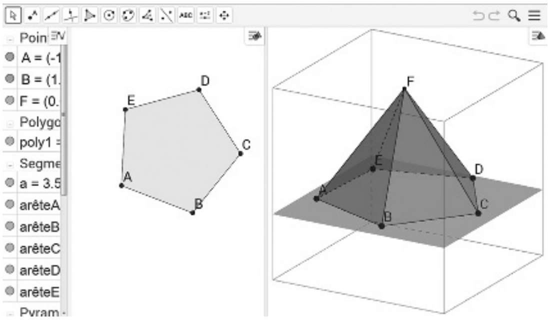
c. $\dfrac{1}{3} \times 200 \times 12 = 800$, le volume du cône $\mathcal{C}_1$ est 800 cm^3.

Je m'évalue à mi-parcours

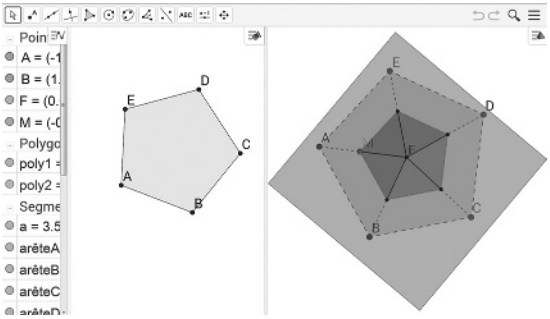
47 **b.** **48** **a.** **49** **a.**

Avec un logiciel

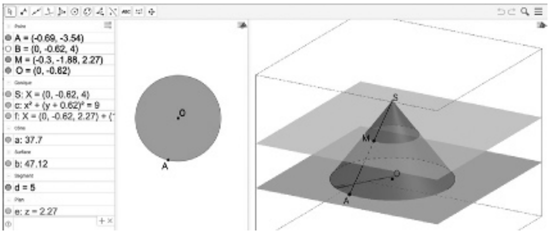
50 **1. a.** et **b.**



2. a. à **d.**



51 **a.** à **d.**



J'utilise mes compétences

52 On note a la longueur d'une arête du cube. $\mathcal{V} = a^3$.

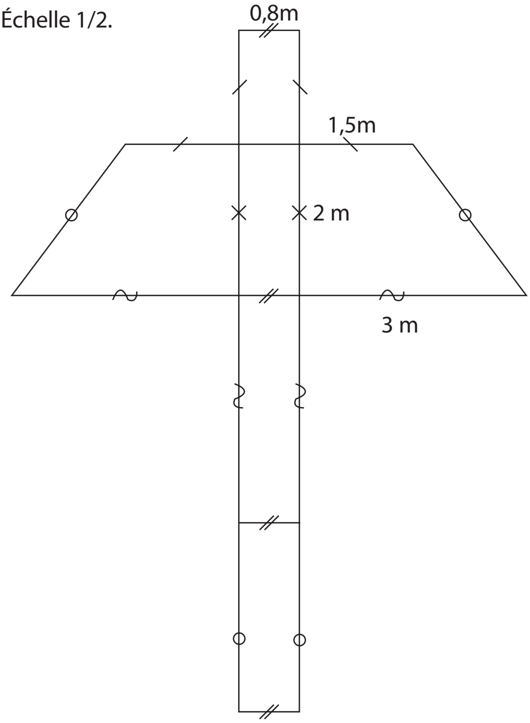
Le solide vert est une pyramide à base carrée, donc

$\mathcal{V}' = \dfrac{1}{3} \times a^2 \times \dfrac{2}{3} a = \dfrac{2}{9} a^3$.

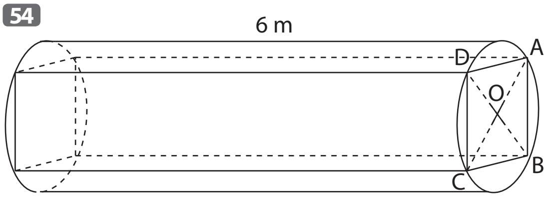
Ainsi, $9\mathcal{V}' = 2\mathcal{V}$.

53 La partie placard est un prisme droit dont la base est un trapèze.

Échelle 1/2.



54



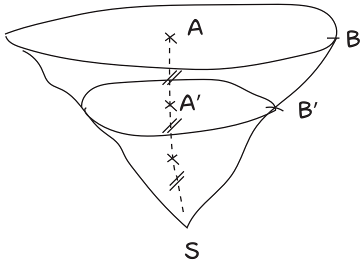
OA = 0,2 m
AC = 0,4 m

55 • La section par un plan parallèle à l'arête rouge est un rectangle de dimensions 5 cm et 6 cm.

• La section par un plan parallèle à l'arête bleue est un rectangle de dimensions 5 cm et 8 cm.

• La section par un plan parallèle à l'arête verte est un rectangle de dimensions 5 cm et 4 cm.
Donc la somme des aires des trois sections est :
$5 \times 6 + 5 \times 8 + 5 \times 4 = 90$ cm^2.
Justine a raison.

56



Le rapport de réduction est $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{2}{3}$.
Donc la quantité de jus d'orange versé est :
$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times 25 \approx 7{,}4$ cL.

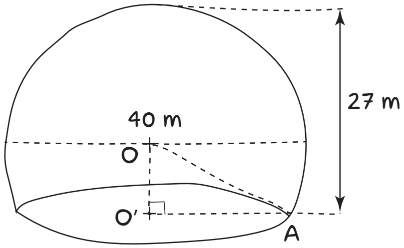
57 Le rapport de réduction est $\dfrac{3}{4}$.
Donc, on a : Aire bleue $= \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \times$ Aire verte.
D'où Aire verte $= \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \times 5 = \dfrac{80}{9}$ cm^2.

58 **a.** IJKLMN est un prisme droit de hauteur IL à base triangulaire IJK.
b. Le volume $\mathcal{V}$ de ce prisme IJKLMN est égal à :
$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\text{ABCDEFGH}) - \mathcal{V}(\text{AIJELM}) - \mathcal{V}(\text{BJKFMN}) - \mathcal{V}(\text{CDIKGHLN})$.
$\mathcal{V} = 2 \times 5 \times 10 - 2 \times \dfrac{2 \times 5}{2} - 2 \times \dfrac{3 \times 5}{2} - 2 \times \dfrac{(2 \times 1) \times 10}{2}$
$\mathcal{V} = 100 - 10 - 15 - 30$
$\mathcal{V} = 45$ cm^3.

59 30 cm – 12 cm = 18 cm.
$\dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.
Le cône de hauteur SO' est une réduction du cône de hauteur SO dans le rapport 0,6.
$4{,}8 : 0{,}6 = 8$.
Le cône de hauteur SO a une base de rayon 8 cm.

$8 \text{ cm} \times 2 = 16$ cm.
1,50 m = 150 cm.
150 cm : 16 = 9,375.
On peut aussi écrire : $150 \text{ cm} = 9 \times 16 \text{ cm} + 6$ cm.
On peut donc placer 9 cônes sur l'étagère.

60 **a.**

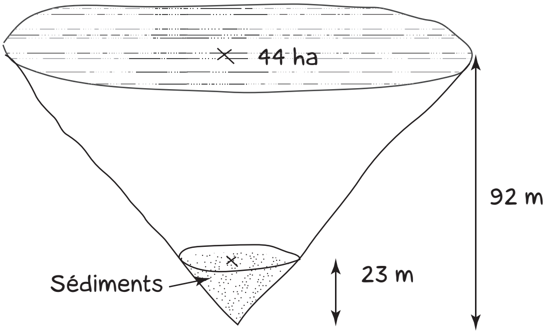


Dans le triangle OO'A rectangle en O', d'après le théorème de Pythagore :
$OA^2 = OO'^2 + O'A^2$, donc $20^2 = 7^2 + O'A^2$
d'où $O'A = \sqrt{351} \approx 18{,}7$ m.
b. La superficie au sol est donc :
$\pi \times O'A^2 = 351\pi \approx 1\,102{,}7$ m^2.

61 **1.** On note $\mathcal{V}$ le volume de cette pyramide.
$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 164{,}4^2 \times 104{,}4 \approx 940\,552$ m^3.
2. a. Le rapport de réduction est $\dfrac{1{,}46}{104{,}4}$, donc le volume $\mathcal{V}'$ du pyramidion est :
$\mathcal{V}' = \left(\dfrac{1{,}46}{104{,}4}\right)^3 \times \mathcal{V} \approx 2{,}6$ m^3.
Sa largeur est $l' = \left(\dfrac{1{,}46}{104{,}4}\right) \times 164{,}4 \approx 2{,}3$ m.
b. Sa masse est $m' \approx 2\,650 \times 2{,}6 \approx 6\,890$ kg.

62 Dire que la section est un carré signifie que la hauteur du cylindre est égale à son diamètre.
14 cm : 2 = 7 cm. Le rayon mesure donc 7 cm.
$\dfrac{1}{2} \times \pi \times 7^2 \times 14 \approx 343\pi$.
Le volume de chacun des morceaux est 343π cm^3.

63 **a.**



b. Le volume de l'eau est celui du tronc de cône obtenu en enlevant au cône de 92 m de haut, un cône de 23 m de haut, réduction du grand dans le rapport :

$$\frac{23}{92} = \frac{1}{4}.$$

44 ha = 44 hm² = 440 000 m²

$\frac{1}{3} \times 440\,000 \times 92 - \frac{1}{3} \times 440\,000 \times 92 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$

$= \frac{1}{3} \times 440\,000 \times 92 \left(1 - \frac{1}{4^3}\right)$

$= \frac{440\,000 \times 92 \times 63}{3 \times 4^3} = 13\,282\,500.$

Le volume d'eau est 13 282 500 m³.

64 • **Traduction**

Une publicité indique qu'un pot de peinture cylindrique contient 0,5 L. Le pot mesure 10 cm de diamètre et 10 cm de haut.

a. À quelle hauteur est le niveau de peinture dans ce pot. Donner une valeur approchée au millimètre près.

b. Dessiner le pot avec le niveau de peinture à main levée.

• **Solution**

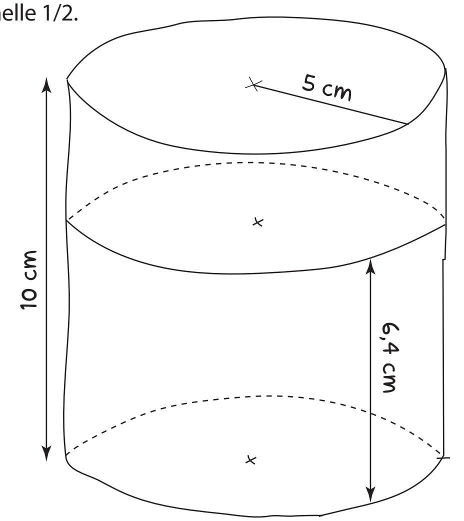
a. 0,5 L = 500 cm³.

Si on note h la hauteur correspondant au niveau de la peinture dans le pot, alors :

$\pi \times 5^2 \times h = 500$

d'où $h = \frac{20}{\pi} \approx 6{,}4$ cm.

b. Échelle 1/2.



65 **a.** M (85 ; 15 ; 370), P_1 (310 ; 390 ; 600), P_2 (520 ; 320 ; 600), V (650 ; 80 ; 470).

b. • Lors de sa montée : 230 m ;

• entre ses deux pauses : 0 m ;

• lors de sa descente : 130 m.

66 En découpant par un plan parallèle à la base, on obtient une petite pyramide qui est la réduction de la grande dans le rapport : $\frac{SA}{SH}$.

Soit $\mathcal{V}$ le volume de la grande pyramide et $\mathcal{V}'$ celui de la petite, on doit avoir simultanément :

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times \left(\frac{SA}{SH}\right)^3 \text{ et } \mathcal{V}' = \frac{1}{2} \times \mathcal{V}$$

Ce qui conduit à écrire que $\frac{SA^3}{SH^3} = \frac{1}{2}$ d'où :

$$SA^3 = \frac{1000}{2} = 500.$$

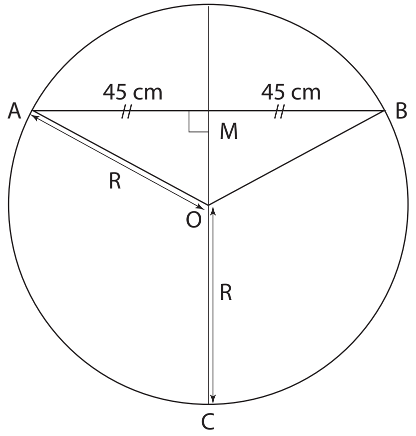
Avec une calculatrice, on peut chercher une valeur approchée du nombre dont le cube est 500, on trouve 7,937 00…

La hauteur SA doit mesurer environ 7,9 cm, arrondi au mm ou 8 cm, arrondi au cm.

67 CM = 81 cm.

Avec l'égalité de Pythagore, OM² = OA² – AM²

OM² = R² – 45².



OM = CM – OC = 81 – R

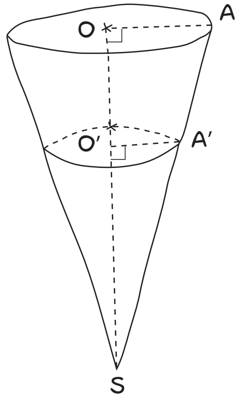
OM² = 81² – 162R + R².

D'où R² – 45² = 81² – 162R + R² – 45²

= 81² – 162R et R = (81² + 45²) : 162 = 53.

Le rayon du tronc d'arbre mesure 53 cm.

68 On schématise la situation à main levée.



Dans les triangles SOA et SO'A', d'après le théorème de Thalès :

$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA}$,

donc $\frac{SO'}{SO' + OO'} = \frac{O'A'}{OA}$,

donc $\frac{SO'}{SO' + 3} = \frac{1{,}5}{2{,}25}$,

ainsi 2,25SO' = 1,5(SO' + 3)

0,75SO' = 4,5

SO' = 6 dm.

Le volume $\mathcal{V}$ du grand cône est donc :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 2{,}25^2 \times 9 = 45{,}562\,5\pi$ dm³.

Le coefficient de réduction est $\frac{1{,}5}{2{,}25}$.

Donc le volume $\mathcal{V}'$ du petit cône est :

$\mathcal{V}' = \left(\frac{1{,}5}{2{,}25}\right)^3 \times \mathcal{V} = 13{,}5\pi$ dm³.

Ainsi, la contenance du pot de fleurs est :

$\mathcal{V} - \mathcal{V}' = 45{,}562\,5\pi - 13{,}5\pi \approx 101$ dm³, soit 101 L.

69 12 cm : 2 = 6 cm.
La hauteur de ces deux cônes est 6 cm.
5 cm : 2 = 2,5 cm.
Le rayon de base est 2,5 cm.
La partie emplie de sable a la forme d'un cône qui est la réduction du cône initial dans le rapport $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$$2{,}5 \times \frac{1}{2} = 1{,}25.$$

Ce cône de sable a donc une hauteur de 3 cm et un rayon de 1,25 cm.

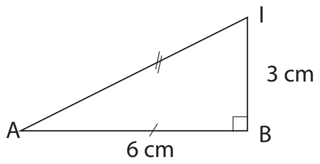
$$\frac{1}{3} \times \pi \times 1{,}25^2 \times 3 = \pi \times 1{,}562\,5.$$

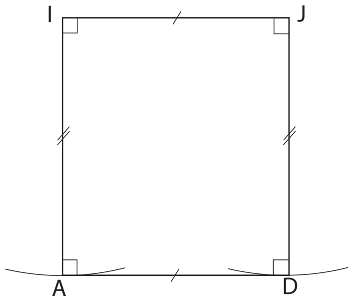
Et son volume est $1{,}562\,5\pi$ cm^3.
$1{,}562\,5\pi : 1{,}6 = 3{,}067\,96$ min
$0{,}067\,96 \times 1$ min $= 0{,}067\,96 \times 60$ s $= 4{,}07$ s.
La totalité du sable va donc s'écouler en 3 min et 4 s.

Dossier Brevet

70 Réponse **B**. Le liquide remplit moins de la moitié du verre.
En effet, le coefficient de réduction entre les deux cônes est $\frac{1}{2}$, donc le volume de liquide est égal à $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, soit $\frac{1}{8}$ du volume du verre.

71 **a.** Un cube est un parallélépipède rectangle, or la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à l'une de ses arêtes est un rectangle, donc aussi un parallélogramme.
b. Échelle 1/2.





c. Aire (AIB) $= \frac{AB \times IB}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$ cm^2.
d. Volume (ABIDCJ) = Aire (AIB) × IJ = 9 × 6 = 54 cm^3.

72 **1. a.** Volume (SABCD) $= \frac{\text{Aire (ABCD)} \times SH}{3}$, donc $108 = \frac{\text{Aire (ABCD)} \times 9}{3}$, d'où Aire (ABCD) = 36 cm^2.
b. Aire (ABCD) = AB^2, donc 36 = AB^2, d'où AB = 6 cm.
c. Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ d'où $AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ cm.
Ainsi, le périmètre du triangle ABC est :
$6 + 6 + 6\sqrt{2}$ soit $12 + 6\sqrt{2}$cm.
2. a. Puisque Aire (MNOP) = 4 cm^2, on déduit que MN = 2 cm.
Ainsi, le coefficient de réduction entre la grande pyramide SABCD et la petite pyramide SMNOP est $\frac{2}{6}$ soit $\frac{1}{3}$.
Donc Volume (SMNOP) $= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times$ Volume (SABCD)

$$\text{Volume (SMNOP)} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 108$$

$$\text{Volume (SMNOP)} = 4 \text{ cm}^3.$$

b. Anya a raison car le coefficient de réduction est $\frac{1}{3}$, donc MN $= \frac{1}{3}$ AB, NO $= \frac{1}{3}$ BC et MO $= \frac{1}{3}$ AC, d'où Périmètre (MNO) $= \frac{1}{3}$ Périmètre (ABC).

73 **a.** • Le volume du grand cône est :
$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3{,}75^2 \times 12 = 56{,}25\pi$ cm^3.
• Le rapport de réduction entre les deux cônes est :
$\frac{8}{12}$ soit $\frac{2}{3}$.
• Le volume du petit cône est donc :
$\mathcal{V}' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \mathcal{V} = \frac{50}{3}\pi$ cm^3.
• Finalement, le volume d'une cavité est :
$V = \mathcal{V} - \mathcal{V}' = 56{,}25\pi - \frac{50}{3}\pi \approx 125$ cm^3.
b. • $9 \times \frac{1}{3} V = 3V = 375$ cm$^3 \approx 0{,}375$ dm^3.
• Les 9 cavités remplies au tiers de leur volume nécessitent 0,375 dm^3 soit 0,375 L.
Léa a donc suffisamment de pâte.

74 **a.** Le triangle FNM est rectangle en F, donc
Aire (FNM) $= \frac{FN \times FM}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ cm^2.
b. Volume (BFNM) $= \frac{\text{Aire (FNM)} \times FB}{3} = \frac{6 \times 5}{3} = 10$ cm^3.
c. Volume (ABCDENMGH)
= Volume (ABCDEFGH) – Volume (BFNM)
= EF × FG × FB – Volume (BFNM)
= 15 × 10 × 5 – 10
= 740 cm^3.

75 **a.** $\mathcal{V} = \frac{\pi \times 2^2 \times 5}{3} = \frac{20}{3} \times \pi \approx 21$ cm^3.
b. Non, c'est faux.
En effet, le coefficient de réduction entre les deux cônes est $\frac{1}{2}$, donc le volume $\mathcal{V}'$ du petit cône est :
$\mathcal{V}' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \mathcal{V} = \frac{1}{8} \times \mathcal{V}$.

$\mathcal{V}'$ est donc égal à un huitième de $\mathcal{V}$.

76 **1.** $\mathcal{V}(\text{SABC}) = \dfrac{\text{Aire (ABC)} \times \text{SA}}{3}$

$= \dfrac{\dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2} \times \text{SA}}{3}$

$= \dfrac{\dfrac{7,5 \times 7,5}{2} \times 15}{3}$

$= 140,625 \text{ cm}^3$

$\approx 141 \text{ cm}^3$.

2. a. La section obtenue est de même nature que la base de la grande pyramide, donc S'MN est un triangle rectangle isocèle en S'.

b. ● Le coefficient de réduction entre les deux pyramides est $\dfrac{\text{SS}'}{\text{SA}}$, soit $\dfrac{6}{15}$ ou encore $\dfrac{2}{5}$.

● Ainsi, $\text{S'N} = \dfrac{2}{5} \times \text{AC} = 3$ cm.

3. Le volume maximal de parfum que peut contenir ce flacon est :

$\mathcal{V}$ = Volume (SABC) – Volume (SS'MN)

$= 140,625 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \times \text{Volume (SABC)}$

$= 140,625 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \times 140,625$

$= 140,625 - \dfrac{125}{3}$

$\approx 131,625 \text{ cm}^3$

$\approx 132 \text{ cm}^3$.

77 **1.** Dans le triangle SOM rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$\text{SM}^2 = \text{SO}^2 + \text{OM}^2$, donc $\text{SO}^2 = \text{SM}^2 - \text{OM}^2$,

$\text{SO}^2 = 37,5^2 - 24^2 = 830,25$, donc $\text{SO} = \sqrt{830,25} \approx 29$ cm.

2. a. Le ruban va former un cercle de centre C et de rayon CN.

b. ● Dans les triangles SCN et SOM, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{\text{SC}}{\text{SO}} = \dfrac{\text{CN}}{\text{OM}}$, donc $\text{CN} = \dfrac{1}{3} \times 24 = 8$ cm.

● La longueur du ruban est donc :

$\ell = 2 \times \pi \times \text{CN} = 16\pi \text{ cm} \approx 50$ cm.

78 **1.** Volume $(\mathcal{C}_1) = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 12 = 64\pi \text{ cm}^3$.

2. a. Le coefficient de réduction est : $\dfrac{\text{SO}'}{\text{SO}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

b. Volume $(\mathcal{C}_2) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 \times$ Volume $(\mathcal{C}_1)$

$= \dfrac{1}{64} \times 64\pi = \pi \text{ cm}^3$.

3. a. Volume d'eau = Volume $(\mathcal{C}_1)$ – Volume $(\mathcal{C}_2)$

$= 64\pi - \pi$

$= 63\pi \text{ cm}^3$.

b. Le volume d'eau est environ 198 cm³.

4. 0,2 L = 0,2 dm³ = 200 cm³.

Donc le volume d'eau est inférieur à 0,2 L.

79 **1.** La surface au sol de la maison est :

Aire (EFGH) = EH × GH = 12 × 9 = 108 m².

2. a. ● Le volume de la partie principale est :

$\mathcal{V}_P$ = Volume (ABCDEFGH) = 12 × 9 × 3 = 324 m³.

● Le rapport de réduction entre les deux pyramides est $\dfrac{\text{IK}_2}{\text{IK}_1} = \dfrac{4,5}{6,75} = \dfrac{2}{3}$.

● Volume (IABCD) $= \dfrac{1}{3} \times$ Aire (ABCD) $\times \text{IK}_1$

$= \dfrac{1}{3} \times 108 \times 6,75$

$= 243 \text{ m}^3$.

● Volume (IMSTR) $= \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times$ Volume (IABCD)

$= \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times 243$

$= 72 \text{ m}^3$.

● Le volume des chambres est donc :

$\mathcal{V}_C$ = Volume (IABCD) – Volume (IMSTR)

$= 243 - 72$

$= 171 \text{ m}^3$.

b. Le volume à chauffer est donc :

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_P + \mathcal{V}_C = 324 + 171 = 495 \text{ m}^3$.

3. On utilise un tableau de proportionnalité pour déterminer le nombre de watts nécessaires.

Volume (en m³)	25	495
Puissance (en W)	925	x

Donc $x = \dfrac{925 \times 495}{25} = 18\,315$ W.

● $\dfrac{18\,315}{1\,800} = 10,175$, il lui faut donc acheter 11 radiateurs.

● Pour l'achat des radiateurs, le propriétaire doit donc dépenser : 11 × 349,90 soit 3 848,90 €.

CHAPITRE 13

Connaître et utiliser les triangles semblables

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le début du cycle 4

Au cycle 4, les élèves ont étudié :

- la caractérisation angulaire du parallélisme ;
- la somme des angles d'un triangle ;
- l'inégalité triangulaire ;
- les cas d'égalité des triangles ;
- le théorème de Pythagore, qui a été introduit en classe de 4e ;
- le théorème de Thalès, qui a été introduit en classe de 3e, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions.

2 Je découvre

Activité 1

L'objectif de cette activité est d'introduire les triangles semblables puis de démontrer, avec un exemple générique, la propriété « deux triangles qui ont deux angles deux à deux de même mesure ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles ».
Cette démonstration riche, qui met en jeu les cas d'égalité des triangles, la caractérisation angulaire du parallélisme et le théorème de Thalès, est accessible à tous les élèves.

Activité 2

L'objectif de cette activité est de démontrer, avec un exemple générique, la propriété « deux triangles qui ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles ont leurs angles deux à deux de même mesure ».
Cette démonstration, qui s'appuie sur la réciproque du théorème de Thalès, le théorème de Thalès et les cas d'égalité des triangles, est elle aussi accessible à tous les élèves.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

- Suite à l'activité 1, on peut étudier le paragraphe 1 « Triangles semblables : angles » et la première propriété du paragraphe 2 « Triangles semblables : longueurs ».
- Suite à l'activité 2, on peut étudier la seconde propriété du paragraphe 2, puis faire noter que deux triangles qui forment une configuration de Thalès sont semblables.

Exercice résolu

L'objectif est de faire le point sur les triangles semblables.
À la question **a.**, on démontre que deux triangles sont semblables en utilisant le fait que ces deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure.
À la question **b.**, on indique les sommets et les côtés homologues. Il nous a paru important de mettre en évidence cette étape qui est très souvent cause d'erreurs.
À la question **c.**, on calcule des longueurs en utilisant le fait que les longueurs des côtés sont deux à deux proportionnelles.
Ce travail n'est possible que si les paires de côtés homologues ont été clairement identifiées auparavant, d'où l'importance de la question **b**.

4 Compléments

Avec un logiciel

- L'exercice 52 propose de terminer un triangle DEH semblable à un triangle ABC donné, à partir d'un segment [DE].
La méthode proposée est uniquement géométrique et repose sur la proportionnalité des longueurs des côtés.
Le logiciel permet de déplacer les points A, B, C, D et E pour vérifier que la construction est valide dans tous les cas de figure.
La justification demandée en seconde partie d'exercice est accessible à tous les élèves et s'appuie sur les triangles égaux, le théorème de Thalès ainsi que la proportionnalité des longueurs des côtés homologues.
Un prolongement à cette activité peut consister à demander aux élèves de proposer une autre méthode de construction du point H (avec les angles par exemple).
- Dans l'exercice 53, l'utilisation d'un logiciel de géométrie permet de conjecturer la nature du triangle IJH construit à partir d'un triangle équilatéral ABC.
La démonstration, demandée en seconde partie d'exercice, met en jeu les cas d'égalité des triangles et les propriétés des triangles semblables.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. a. et **b.** ; **2. a.** et **c.** ; **3. b.** et **c.** ; **4. a.** et **c.**

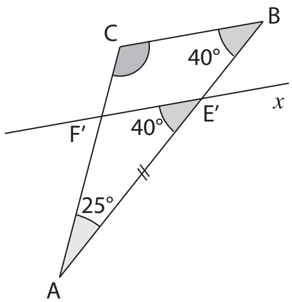
Je découvre

Activité 1

❶ La somme des mesures des angles du triangle ABC est égale à 180°, donc :
$\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{BAC})$ c'est-à-dire
$\widehat{ACB} = 180° - (40° + 25°)$.
Donc $\widehat{ACB} = 115°$.
En se plaçant dans le triangle DEF, on obtient de même :
$\widehat{DFE} = 180° - (\widehat{DEF} + \widehat{FDE})$ c'est-à-dire
$\widehat{DFE} = 180° - (40° + 25°)$.
Donc $\widehat{DFE} = 115°$.
Finalement $\widehat{ACB} = \widehat{DFE} = 115°$.

❷ **a.** DE = AE′, $\widehat{FDE} = \widehat{F'AE'}$ et $\widehat{FED} = \widehat{AE'F'}$.
Les triangles DEF et AE′F′ ont un côté de même longueur et des angles adjacents à ce côté deux à deux de même mesure. D'après le 1er cas d'égalité des triangles, les triangles DEF et AE′F′ sont égaux.

b. Dans les triangles égaux DEF et AE′F′, les côtés [EF] et [E′F′] sont homologues.
Donc EF = E′F′. De même FD = AF′.



Les angles $\widehat{F'E'A}$ et $\widehat{BE'x}$ sont opposés par le sommet donc ils ont la même mesure.
Donc $\widehat{BE'x} = 40°$.

● Les droites (BC) et (E′F′) coupées par la sécante (AB) forment des angles alternes-internes $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BE'x}$ de même mesure. Or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces droites sont parallèles. Donc (E′F′) et (BC) sont parallèles.

● Les droites (CF′) et (BE′) sont sécantes en A et les droites (E′F′) et (BC) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AE'}{AB} = \dfrac{AF'}{AC} = \dfrac{E'F'}{BC}$.

c. On a vu à la question **a.** que AE′ = DE, AF′ = FD et E′F′ = EF. En remplaçant AE′, AF′ et E′F′ par DE, FD et EF l'égalité précédente devient alors :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}.$$

Donc les longueurs des côtés des triangles ABC et DEF sont deux à deux proportionnelles.

Activité 2

❶ $\dfrac{NL}{JI} = \dfrac{1{,}2}{2} = 0{,}6$; $\dfrac{MN}{KJ} = \dfrac{1{,}2}{2} = \dfrac{1{,}8}{6} = 0{,}6$ et

$\dfrac{ML}{KI} = \dfrac{2{,}7}{4{,}5} = 0{,}6$.

$\dfrac{NL}{JI} = \dfrac{MN}{KJ} = \dfrac{ML}{KI}$ donc les triangles IJK et LMN ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles.

❷ **a.** Les points K, B, J et K, A, I sont alignés dans le même ordre.

$\dfrac{KA}{KI} = \dfrac{ML}{KI} = 0{,}6$ et $\dfrac{KB}{KJ} = \dfrac{MN}{KJ} = 0{,}6$.

Donc $\dfrac{KA}{KI} = \dfrac{KB}{KJ}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (IJ) sont parallèles.

b. Les droites (JB) et (IA) sont sécantes en K et les droites (AB) et (IJ) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{KA}{KI} = \frac{KB}{KJ} = \frac{AB}{IJ} \text{ soit } \frac{2{,}7}{4{,}5} = \frac{1{,}8}{3} = \frac{AB}{2}.$$

De $\dfrac{1{,}8}{3} = \dfrac{AB}{2}$, on déduit $3 \times AB = 2 \times 1{,}8$.

$AB = \dfrac{2 \times 1{,}8}{3}$.

Donc AB = 1,2 cm.

c. ● KA = ML, KB = MN et AB = NL.
Donc, d'après le 3e cas d'égalité des triangles, les triangles KAB et MNL sont égaux.

● Le triangle KAB est une réduction du triangle KIJ dans le rapport 0,6 donc :

$$\widehat{IKJ} = \widehat{AKB} ; \ \widehat{IJK} = \widehat{KBA} \text{ et } \widehat{JIK} = \widehat{BAK}.$$

Les triangles KAB et MNL sont égaux donc :

$$\widehat{LMN} = \widehat{AKB} ; \ \widehat{LNM} = \widehat{KBA} \text{ et } \widehat{MLN} = \widehat{BAK}.$$

Finalement, $\widehat{LMN} = \widehat{AKB} = \widehat{IKJ}$; $\widehat{LNM} = \widehat{KBA} = \widehat{IJK}$ et $\widehat{MLN} = \widehat{BAK} = \widehat{JIK}$. Donc les triangles MNL et KIJ ont leurs angles deux à deux de même mesure.

J'applique le cours

2 **a.** $\widehat{EDC} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{DCE} = \widehat{ACB}$.
Les triangles ABC et CDE ont deux angles deux à deux de même mesure, donc ils sont semblables.

b. On peut construire ce tableau.

Sommets homologues	Côtés homologues
A et E	[BC] et [DC]
B et D	[AC] et [EC]
C et C	[AB] et [ED]

c. Les longueurs des côtés homologues des triangles ABC et CDE sont proportionnelles donc :

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC} \text{ soit } \frac{6}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{4}{1,2}.$$

De $\frac{6}{ED} = \frac{4}{1,2}$, on déduit que : $4 \times ED = 6 \times 1,2$

c'est-à-dire $ED = \frac{6 \times 1,2}{4} = 1,8$.

Donc ED = 1,8 cm.

3 **a.** $\widehat{EDC} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{DCE} = \widehat{BCA}$.
Les triangles ABC et CDE ont deux angles deux à deux de même mesure, donc ils sont semblables.

b. ● On peut construire ce tableau.

Sommets homologues	**Côtés homologues**
A et D	[BC] et [EC]
B et E	[AC] et [DC]
C et C	[AB] et [ED]

● AC = AE + EC = 1,6 cm + 5,4 cm = 7 cm.
Les longueurs des côtés homologues des triangles ABC et CDE sont proportionnelles donc :

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} \text{ soit } \frac{5}{ED} = \frac{7}{2} = \frac{BC}{1,6}.$$

● De $\frac{7}{2} = \frac{BC}{1,6}$, on déduit que : $BC = 1,6 \times \frac{7}{2}$.
Donc BC = 5,6 cm.

● De $\frac{5}{ED} = \frac{7}{2}$, on déduit que : $7 \times ED = 5 \times 2$,

c'est-à-dire $ED = \frac{5 \times 2}{7}$.

Donc ED ≈ 1,4 cm.

À l'oral

4 **a.** E **b.** [CB] **c.** [AB]

5 ● La somme des mesures des angles du triangle IJK est égale à 180° donc :
$\widehat{IJK} = 180° - (\widehat{JIK} + \widehat{JKI})$ c'est-à-dire $\widehat{IJK} = 180° - (40° + 20°)$.
Donc $\widehat{IJK} = 120°$.

● Les triangles IJK et MNL sont semblables et les sommets homologues sont I et N, J et M, K et L.
Donc $\widehat{LMN} = \widehat{KJI} = 120°$, $\widehat{MLN} = \widehat{JKI} = 20°$ et
$\widehat{LNM} = \widehat{KIJ} = 40°$.

6 ● La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.
$\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{BAC})$ c'est-à-dire
$\widehat{ACB} = 180° - (30° + 70°)$.
Donc $\widehat{ACB} = 80°$.
● $\widehat{EDF} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{DFE} = \widehat{ACB}$.
Les triangles ABC et DEF ont deux angles deux à deux de même mesure, donc ils sont semblables.

7 ● 180° – (60° + 90°) = 30°.
Donc les angles de la grande équerre mesurent 90°, 60° et 30°.

● Les triangles qui forment les deux équerres ont deux angles (30° et 90°) deux à deux de même mesure, donc ces triangles sont semblables.

8 ● La somme des mesures des angles du triangle ABE est égale à 180° donc :
$\widehat{AEB} = 180° - (\widehat{ABE} + \widehat{BAE})$ c'est-à-dire
$\widehat{AEB} = 180° - (47° + 23°)$.
Donc $\widehat{AEB} = 110°$.

● De même dans le triangle ACD :
$\widehat{ADC} = 180° - (\widehat{ACD} + \widehat{CAD})$ c'est-à-dire
$\widehat{ADC} = 180° - (111° + 23°)$.
Donc $\widehat{ADC} = 46°$.
Les angles du triangle AEB mesurent 23°, 47° et 110°.
Les angles du triangle ACD mesurent 23°, 46° et 111°.
Les triangles AED et ACD n'ont pas deux angles deux à deux de même mesure donc ils ne sont pas semblables.

9 $\frac{UT}{\mathbf{AI}} = \frac{BU}{\mathbf{MA}} = \frac{\mathbf{BT}}{\mathbf{MI}}$.

10 On range les longueurs des côtés de chacun des deux triangles dans l'ordre croissant.
Pour PIN : 5 cm, 6 cm et 8 cm.
Pour OLE : 15 cm, 18 cm et 24 cm.
15 cm = 3 × 5 cm, 18 cm = 3 × 6 cm et 24 cm = 3 × 8 cm.
Les longueurs des côtés des triangles PIN et OLE sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

11 **a.** Les triangles ABC et DEF ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

b. Les côtés homologues sont [AB] et [DE], [AC] et [EF], [BC] et [DF].
$\frac{DE}{AB} = \frac{2,8}{4} = 0,7$.
Donc il faut multiplier les longueurs des côtés du triangle ABC par 0,7 pour obtenir les longueurs des côtés du triangle DEF.

c. EF = 0,7 × CA et DF = 0,7 × BC.
C'est-à-dire EF = 0,7 × 5 cm et DF = 0,7 × 7 cm.
Donc EF = 3,5 cm et DF = 4,9 cm.

12 **a.** Les droites (AB) et (RS) sont sécantes en C et les droites (AR) et (BS) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CR}{CS} = \frac{AR}{BS}.$$

Les triangles CAR et CBS ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles donc ils sont semblables.

b. Le triangle CBS est un agrandissement du triangle CAR dans le rapport : $k = \frac{BS}{AR} = 2,4$.
Pour obtenir les longueurs des côtés du triangle CBS il faut multiplier les longueurs des côtés du triangle CAR par 2,4.

c. CS = 2,4 × CR

c'est-à-dire CS = 2,4 × 2 cm.
Donc CS = 4,8 cm.
CB = 2,4 × CA
c'est-à-dire CB = 2,4 × 1,5 cm.
Donc CB = 3,6 cm.

Calcul mental

13 **a.** $\widehat{GUH} = 60°$ **b.** $\widehat{GVP} = 75°$ **c.** $\widehat{VGP} = 45°$

14 Les côtés homologues sont [AB] et [RS], [AC] et [TS], [BC] et [RT].
$\frac{RS}{AB} = \frac{12}{10} = 1{,}2$.
Donc il faut multiplier les longueurs des côtés du triangle ABC par 1,2 pour obtenir les longueurs des côtés du triangle RST.
ST = 1,2 × AC et RT = 1,2 × BC.
C'est-à-dire ST = 1,2 × 4 cm et RT = 1,2 × 7 cm.
Donc ST = 4,8 cm et RT = 8,4 cm.

Je m'entraîne

15

Angles homologues	Sommets homologues	Côtés homologues
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{\mathbf{MIO}}$	B et **I**	[AC] et **[MO]**
$\widehat{BAC}$ et $\widehat{\mathbf{IMO}}$	A et **M**	[BC] et **[IO]**
$\widehat{ACB}$ et $\widehat{\mathbf{MOI}}$	C et **O**	[AB] et **[MI]**

16 **a.** ● La somme des mesures des angles du triangle ABC est égale à 180° donc :
$\widehat{BAC} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA})$ c'est-à-dire
$\widehat{BAC} = 180° - (90° + 40°)$.
Donc $\widehat{BAC} = 50°$.
● $\widehat{BAC} = \widehat{FED}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{EDF}$.
Les triangles ABC et DEF ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.
● Les côtés [BC] et [DF] sont homologues, le rapport d'agrandissement est $\frac{DF}{BC}$, soit $\frac{6}{4}$.
Donc le rapport d'agrandissement est 1,5.
b. ● Le triangle DEF est isocèle en E donc $\widehat{EDF} = \widehat{EFD}$.
La somme des mesures des angles du triangle DEF est égale à 180° donc :
$\widehat{EDF} = \widehat{EFD} = \frac{180° - \widehat{DEF}}{2}$ c'est-à-dire
$\widehat{EDF} = \widehat{EFD} = \frac{180° - 70°}{2}$.
Donc $\widehat{EDF} = \widehat{EFD} = 55°$.
● $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$.
Les triangles ABC et DEF ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.
● Les côtés [AB] et [DE] sont homologues, le rapport de réduction est $\frac{DE}{AB}$, soit $\frac{1{,}4}{2}$.
Donc le rapport de réduction est 0,7.

17 ● La somme des mesures des angles du triangle ABC est égale à 180° donc :
$\widehat{BAC} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA})$ c'est-à-dire
$\widehat{BAC} = 180° - (50° + 110°)$.
Donc $\widehat{BAC} = 20°$.
● $\widehat{BAC} = \widehat{CDA}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$.
Les triangles ABC et ACD ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.

18 **a.** Les angles $\widehat{KIL}$ et $\widehat{HIJ}$ sont opposés par le sommet donc ils ont la même mesure.
Donc $\widehat{KIL} = 47°$.
b. ● La somme des mesures des angles du triangle IHJ est égale à 180° donc :
$\widehat{IJH} = 180° - (\widehat{HIJ} + \widehat{IHJ})$ c'est-à-dire
$\widehat{IJH} = 180° - (47° + 75°)$.
Donc $\widehat{IJH} = 58°$.
● $\widehat{IJH} = \widehat{IKL}$ et $\widehat{HIJ} = \widehat{KIL}$.
Les triangles HIJ et ILK ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.

19 ● La somme des mesures des angles du triangle BCD est égale à 180° donc :
$\widehat{BDC} = 180° - (\widehat{CBD} + \widehat{BCD})$ c'est-à-dire
$\widehat{BDC} = 180° - (46° + 31°)$.
Donc $\widehat{BDC} = 103°$.
● $\widehat{BDC} = \widehat{BGF}$ et $\widehat{DBC} = \widehat{FBG}$.
Les triangles BCD et BFG ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.

20 **a.** ● $\widehat{ACB} = \widehat{ACH}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{AHC}$.
Les triangles ABC et ACH ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.
b. $\widehat{ABC} = \widehat{ABH}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{AHB}$.
Les triangles ABC et ABH ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.
c. ● Les triangles ABC et ABH sont semblables.
Les angles homologues sont $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABH}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{AHB}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAH}$ donc $\widehat{ACB} = \widehat{BAH} = 35°$.
● $\widehat{AHC} = \widehat{AHB} = 90°$ et $\widehat{ACH} = \widehat{BAH} = 35°$.
Les triangles ACH et ABH ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.
L'affirmation de Louise est exacte.

21 **a.** ● Le triangle ABC est isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
La somme des mesures des angles du triangle ABC est égale à 180° donc :
$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180° - \widehat{BAC}}{2}$ c'est-à-dire
$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180° - 36°}{2}$.
Donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$.
b. ● [BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ donc :
$\widehat{DBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$, c'est-à-dire :
$\widehat{DBC} = \frac{72°}{2}$.

Donc $\widehat{DBC} = 36°$.
● $\widehat{BAC} = \widehat{DBC} = 36°$ et $\widehat{BCA} = \widehat{BCD} = 72°$.
Les triangles BCD et ABC ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.

22 **a.** Les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{DIC}$ sont opposés par le sommet donc ils ont la même mesure.
b. $\widehat{AIB} = \widehat{DIC}$ et $\widehat{BAI} = \widehat{IDC}$.
Les triangles AIB et DIC ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.

23 ABC et MNP sont deux triangles semblables donc ABC et MNP ont leurs angles deux à deux de même mesure.
EFG est un triangle égal au triangle MNP donc EFG et MNP ont leurs angles deux à deux de même mesure.
Finalement, ABC et EFG ont leurs angles deux à deux de même mesure : ces deux triangles sont donc semblables.

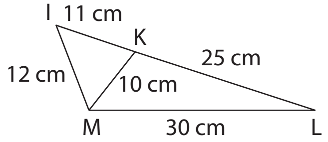
24 On range les longueurs des côtés de chacun des deux triangles dans l'ordre croissant.
Pour ABC : 5 cm, 6,5 cm et 8 cm.
Pour EFG : 1 cm, 1,2 cm et 1,6 cm.
$\frac{5}{1} = 5$ et $5 \times 1{,}2 = 6$.
$6 \neq 6{,}5$ donc les longueurs des côtés des triangles ABC et EFG ne sont pas deux à deux proportionnelles.
Les triangles ABC et EFG ne sont pas semblables.

25 **b.** Jules n'a pas comparé les bons rapports.
En effet si les triangles ABC et DEF sont semblables le côté homologue à [AB] est [DF] et non [DE].
Pour éviter cette erreur Jules aurait dû dans un premier temps ranger les longueurs des côtés de chacun des triangles dans l'ordre croissant.
c. On range les longueurs des côtés de chacun des deux triangles dans l'ordre croissant.
Pour le triangle ABC : AB < BC < AC.
Pour le triangle DEF : DF < EF < DE.
$\frac{DF}{AB} = \frac{2{,}6}{4} = 0{,}65$; $\frac{EF}{BC} = \frac{3{,}9}{6} = 0{,}65$ et $\frac{DE}{AC} = \frac{5{,}2}{8} = 0{,}65$.
Les longueurs des côtés des triangles ABC et DEF sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

26 ● On range les longueurs des côtés dans l'ordre croissant.
Pour le triangle BOF : OF < BO < BF.
Pour le triangle END : EN < DE < ND.
● $\frac{EN}{OF} = \frac{4{,}2}{5{,}6} = 0{,}75$; $\frac{DE}{BO} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$
et $\frac{ND}{BF} = \frac{5{,}4}{7{,}2} = 0{,}75$.
Les triangles BOF et END ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles, donc ils sont semblables.

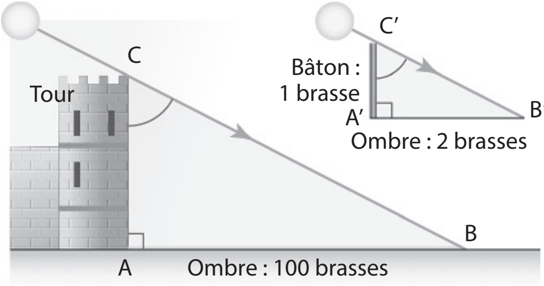
27 $\frac{LM}{IK} = \frac{LN}{IJ} = \frac{8}{5} = 1{,}6$; $\frac{MN}{KJ} = \frac{11{,}2}{7} = 1{,}6$.
Les longueurs des côtés des triangles IJK et LMN sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

28 **a.** $\frac{IL}{ML} = \frac{36}{30} = 1{,}2$; $\frac{ML}{KL} = \frac{30}{25} = 1{,}2$ et $\frac{IM}{MK} = \frac{12}{10} = 1{,}2$.
Les longueurs des côtés des triangles IML et MKL sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.
b. $\widehat{MIL} = \widehat{KML}$; $\widehat{IML} = \widehat{MKL}$ et $\widehat{MLI} = \widehat{KLM}$.
Remarque : l'égalité $\widehat{MLI} = \widehat{KLM}$ indique que sur une figure tracée en vraie grandeur les points I, K et L sont alignés.



29 A'B'C' est un triangle semblable au triangle ABC donc A'B'C' est un agrandissement ou une réduction de ABC.
a. ● **Calcul du rapport k d'agrandissement.**
$A'B' = k \times AB$ soit $10 = k \times 4$ et $k = \frac{10}{4} = 2{,}5$.
● **Calcul des longueurs A'C' et B'C'.**
$A'C' = k \times AC$ donc $A'C' = 2{,}5 \times 5$ cm.
Donc A'C' = 12,5 cm.
$B'C' = k \times BC$ donc $B'C' = 2{,}5 \times 6$ cm.
Donc B'C' = 15 cm.
b. ● **Calcul du rapport k de réduction.**
$A'C' = k \times AC$ soit $4 = k \times 5$ et $k = \frac{4}{5} = 0{,}8$.
● **Calcul des longueurs A'B' et B'C'.**
$A'B' = k \times AB$ donc $A'B' = 0{,}8 \times 4$ cm.
Donc A'B' = 3,2 cm.
$B'C' = k \times BC$ donc $B'C' = 0{,}8 \times 6$ cm.
Donc B'C' = 4,8 cm.

30



● $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.
Les triangles ABC et A'B'C' ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.
● $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ c'est-à-dire $\frac{AC}{1} = \frac{100}{2}$.
Donc AC = 50.
La tour mesure 50 brasses.

31 On note h la hauteur, en m, de la petite voile.
Les longueurs des côtés homologues des triangles sont proportionnelles donc :
$\frac{h}{5,4} = \frac{2,4}{3,6}$ et $h = 5,4 \times \frac{2,4}{3,6}$.
$h = 3,6$.
La hauteur de la petite voile est 3,6 m.

32 Les deux triangles sont semblables et les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles donc :

$$\frac{FG}{3} = \frac{FH}{4,5} = \frac{105}{6,3}.$$

- De $\frac{FG}{3} = \frac{105}{6,3}$, on déduit $FG = 3 \times \frac{105}{6,3}$.

Donc FG = 50 cm.

- De $\frac{FH}{4,5} = \frac{105}{6,3}$, on déduit $FH = 4,5 \times \frac{105}{6,3}$.

Donc FH = 75 cm.

33 On note l et L les longueurs des deux plus grands côtés du grand circuit.
Les longueurs des côtés homologues des deux triangles sont proportionnelles donc :

$$\frac{400}{300} = \frac{l}{360} = \frac{L}{570}.$$

- De $\frac{400}{300} = \frac{l}{360}$, on déduit $l = 360 \times \frac{400}{300}$.

Donc $l = 480$ m.

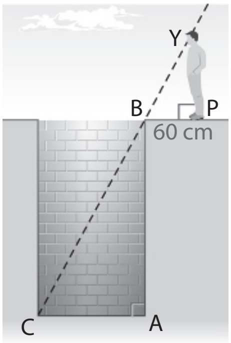
- De $\frac{400}{300} = \frac{L}{570}$, on déduit $L = 570 \times \frac{400}{300}$.

Donc $L = 760$ m.

- 2 × (400 m + 480 m + 760 m) = 2 × 1 640 m = 3 280 m.

Donc Ambre parcourt 3 280 m.

34 On note P le point qui correspond aux pieds de Maxime.



- 60 cm = 0,6 m.
- En se plaçant dans le triangle YBP, on peut écrire :

$\widehat{PYB} = 90° - \widehat{PBY}$.
Les points C, B et Y sont alignés donc :
$\widehat{ABC} = 180° - \widehat{ABP} - \widehat{PBY}$ c'est-à-dire
$\widehat{ABC} = 180° - 90° - \widehat{PBY}$.
Donc $\widehat{ABC} = 90° - \widehat{PBY}$.

- $\widehat{PYB} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{BPY} = \widehat{BAC}$.

Les triangles BYP et ABC ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.

- Les longueurs des côtés homologues des triangles BYP et ABC sont proportionnelles donc :

$\frac{AB}{PY} = \frac{AC}{PB} = \frac{BC}{YB}$ c'est-à-dire $\frac{AB}{1,7} = \frac{1,5}{0,6} = \frac{BC}{YB}$.
De $\frac{AB}{1,7} = \frac{1,5}{0,6}$, on déduit $AB = 1,7 \times \frac{1,5}{0,6}$.
Donc AB = 4,25 m.
La profondeur du puits est 4,25 m.

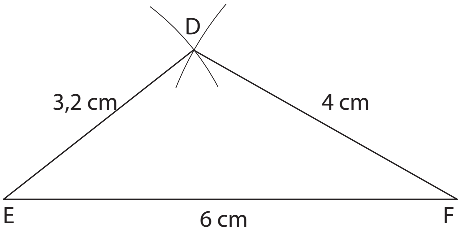
35 **a.** On suppose que les côtés [DE] et [AB] sont homologues (et donc que les côtés [DF] et [AC] sont homologues).
Les triangles DEF et ABC sont semblables donc les longueurs des côtés sont deux à deux proportionnelles.
D'où $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ c'est-à-dire $\frac{DE}{4} = \frac{DF}{5} = \frac{6}{7,5}$.

- De $\frac{DE}{4} = \frac{6}{7,5}$, on déduit $DE = 4 \times \frac{6}{7,5}$.

Donc DE = 3,2 cm.

- De $\frac{DF}{5} = \frac{6}{7,5}$, on déduit $DF = 5 \times \frac{6}{7,5}$.

Donc DF = 4 cm.



b. Si on suppose que les côtés [DE] et [AC] sont homologues (et donc que les côtés [DF] et [AB] sont homologues), on obtient DF = 3,2 cm, ED = 4 cm et EF = 6 cm.
Les triangles construits par les élèves de la classe sont donc égaux.

36 **a.** $\widehat{ACB} = \widehat{EDF}$.
b. On peut construire ce tableau.

Sommets homologues	Côtés homologues
A et E	[BC] et [DF]
B et F	[AC] et [DE]
C et D	[AB] et [EF]

D'où les égalités : $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{ED} = \frac{BC}{FD}$.

37 **a.** On peut construire ce tableau.

Sommets homologues	Côtés homologues
D et I	[UO] et [AM]
O et M	[DU] et [AI]
U et A	[OU] et [MI]

Donc $\widehat{DOU} = \widehat{IMA}$ et $\widehat{OUD} = \widehat{MAI}$

b. $\dfrac{UO}{AM} = \dfrac{DU}{AI} = \dfrac{OD}{MI}$.

38 **a.** Les sommets homologues sont N et T, Z et R, E et I.
b. $\widehat{ZNE} = \widehat{RTI}$, $\widehat{NZE} = \widehat{TRI}$ et $\widehat{NEZ} = \widehat{TIR}$.

39 ● $\dfrac{3,9}{6,5} = 0,6$ et $\dfrac{7,2}{12} = 0,6$.

Les longueurs des côtés des triangles sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.
● Les deux triangles sont semblables donc leurs angles homologues sont deux à deux de même mesure.
L'angle vert et l'angle bleu sont donc de même mesure.
L'affirmation de Juliette est exacte.

40 **a.** Le triangle AEB est rectangle en E.
Donc, d'après le théorème de Pythagore :
$EA^2 + EB^2 = AB^2$
$EA^2 + 4,5^2 = 5,1^2$
$EA^2 + 20,25 = 26,01$
$EA^2 = 26,01 - 20,25$
$EA^2 = 5,76$
Donc $EA = \sqrt{5,76}$ m et EA = 2,4 m.
La hauteur AE est 2,4 m.
b. Les triangles AEB et IHF sont semblables donc les longueurs des côtés sont deux à deux proportionnelles.
D'où les égalités :
$\dfrac{HI}{EA} = \dfrac{HF}{EB} = \dfrac{IF}{AB}$ c'est-à-dire $\dfrac{HI}{2,4} = \dfrac{3}{4,5} = \dfrac{IF}{5,1}$.

● De $\dfrac{HI}{2,4} = \dfrac{3}{4,5}$, on déduit $HI = 2,4 \times \dfrac{3}{4,5}$.

Donc HI = 1,6 m.

● De $\dfrac{3}{4,5} = \dfrac{IF}{5,1}$, on déduit $IF = 5,1 \times \dfrac{3}{4,5}$.

Donc IF = 3,4 m.

41 **a.**

Côtés homologues
[ME] et [CL]
[ER] et [AL]
[MR] et [CA]

b. Les triangles DEF et DFG sont semblables donc les longueurs des côtés sont deux à deux proportionnelles.
D'où les égalités :
$\dfrac{ME}{CL} = \dfrac{ER}{AL} = \dfrac{MR}{CA}$ c'est-à-dire $\dfrac{3,5}{1,4} = \dfrac{6,5}{AL} = \dfrac{MR}{1,6}$.

● De $\dfrac{3,5}{1,4} = \dfrac{MR}{1,6}$, on déduit $MR = 1,6 \times \dfrac{3,5}{1,4}$.

Donc MR = 4 cm.

● De $\dfrac{3,5}{1,4} = \dfrac{6,5}{AL}$, on déduit $3,5 \times AL = 6,5 \times 1,4$.

$AL = \dfrac{6,5 \times 1,4}{3,5}$.

Donc AL = 2,6 cm.

42 **a.**

Côtés homologues
[DE] et [GF]
[DF] et [GD]
[EF] et [FD]

b. Les triangles DEF et DFG sont semblables donc les longueurs des côtés sont deux à deux proportionnelles.
D'où les égalités :
$\dfrac{DE}{GF} = \dfrac{DF}{GD} = \dfrac{EF}{FD}$ c'est-à-dire $\dfrac{DE}{2,4} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{EF}{3}$.

● De $\dfrac{DE}{2,4} = \dfrac{3}{5}$, on déduit $DE = 2,4 \times \dfrac{3}{5}$.

Donc DE = 1,44 cm.

● De $\dfrac{3}{5} = \dfrac{EF}{3}$, on déduit $EF = 3 \times \dfrac{3}{5}$.

Donc EF = 1,8 cm.

43

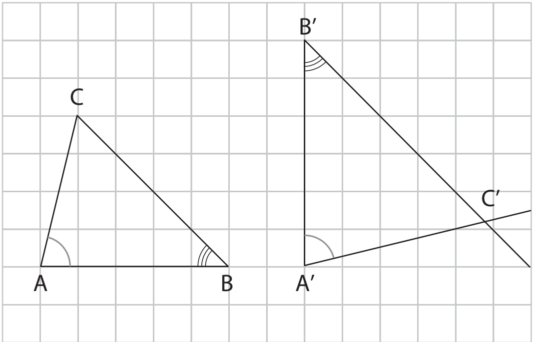
Côtés homologues
[ON] et [ST]
[NM] et [TR]
[OM] et [SR]

Les triangles MON et RST sont semblables donc les longueurs des côtés sont deux à deux proportionnelles.
D'où les égalités :
$\dfrac{ON}{ST} = \dfrac{NM}{TR} = \dfrac{OM}{SR}$ c'est-à-dire $\dfrac{ON}{4,2} = \dfrac{1,5}{1,8} = \dfrac{OM}{SR}$.

De $\dfrac{ON}{4,2} = \dfrac{1,5}{1,8}$, on déduit $ON = 4,2 \times \dfrac{1,5}{1,8}$.

Donc ON = 3,5 cm.
L'affirmation de Myriam est exacte. L'affirmation de Justine est fausse. En effet on ne peut pas calculer la longueur OM.

44 **a.** et **b.** À l'aide du quadrillage, on construit le point C' tel que $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.



Les triangles ABC et A'B'C' ont deux angles de même mesure, donc ils sont semblables.

45 **a.** Les points J, F, H et K, F, G sont alignés dans le même ordre.

$\dfrac{FJ}{FH} = \dfrac{1,2}{1,6} = 0,75$ et $\dfrac{FK}{FG} = \dfrac{1,5}{2} = 0,75$.

Donc $\dfrac{FJ}{FH} = \dfrac{FK}{FG}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (JK) et (GH) sont parallèles.

b. ● Les droites (JH) et (KG) sont sécantes en T et les droites (JK) et (GH) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{FJ}{FH}=\frac{FK}{FG}=\frac{JK}{HG}.$$

● Les longueurs des côtés des triangles FKJ et FGH sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

46 **a.** ● D ∈ [BC] donc BC = BD + DC.
C'est-à-dire BC = 6,4 cm + 1,6 cm. Donc BC = 8 cm.
E ∈ [BA] donc BA = BE + EA.
C'est-à-dire BA = 4,8 cm + 1,2 cm. Donc BA = 6 cm.
● Les points B, D, C et B, E, A sont alignés dans le même ordre.

$\frac{BD}{BC}=\frac{6,4}{8}=0,8$ et $\frac{BE}{BA}=\frac{4,8}{6}=0,8$.

Donc $\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (DE) et (AC) sont parallèles.
● Les droites (CD) et (AE) sont sécantes en B et les droites (DE) et (AC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA}=\frac{DE}{CA}.$$

Les longueurs des côtés des triangles ABC et EBD sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

b. En remplaçant les longueurs connues, l'égalité $\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA}=\frac{DE}{CA}$ devient $\frac{6,4}{8}=\frac{4,8}{6}=\frac{DE}{7}$.

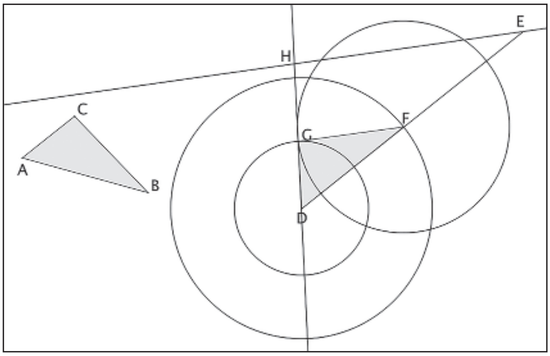
De $\frac{4,8}{6}=\frac{DE}{7}$, on déduit $DE=7\times\frac{4,8}{6}$.
Donc DE = 5,6 cm.

Je m'évalue à mi-parcours

47 **b.** **48** **c.** **49** **b.** **50** **a.** **51** **b.**

Avec un logiciel

52 **1. a.** à **d.**



2. a. AB = DF, AC = DG et BC = GF.
Les triangles ABC et DFG ont leurs côtés deux à deux de même longueur donc ces deux triangles sont égaux.

b. ● Les droites (HG) et (EF) sont sécantes en D et les droites (GF) et (HE) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

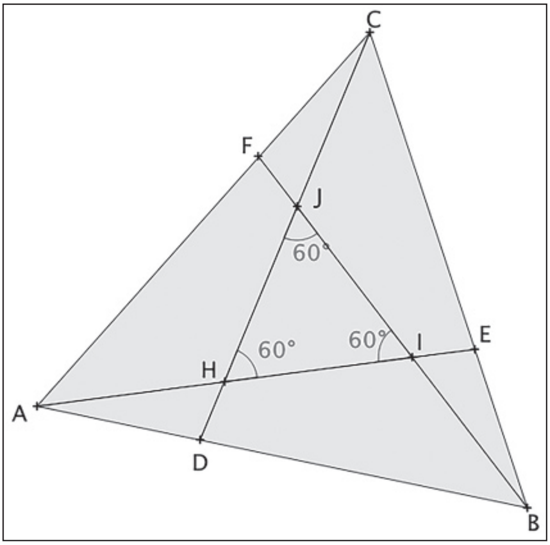
$$\frac{DG}{DH}=\frac{DF}{DE}=\frac{GF}{HE}.$$

● Les longueurs des côtés des triangles DEH et DFG sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

c. ● À l'aide des égalités de la question **a.**, l'égalité $\frac{DG}{DH}=\frac{DF}{DE}=\frac{GF}{HE}$ peut s'écrire $\frac{AC}{DH}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{HE}$.

● Les longueurs des côtés des triangles DEH et ABC sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

53 **1. a.** à **d.** et **2. a.**



2. b. Les angles $\widehat{IHJ}$, $\widehat{HJI}$ et $\widehat{JIH}$ mesurent 60°.
Le triangle HIJ est équilatéral.

3. a. ABC est un triangle équilatéral donc :
● AC = AB ;
● $AD=\frac{1}{3}\times AB=\frac{1}{3}\times BC=BE$;
● $\widehat{CAD}=\widehat{ABE}=60°$.
Ainsi, les triangles ADC et AEB ont un angle de même mesure ($\widehat{CAD}=\widehat{ABE}$) compris entre deux côtés de même longueur (AC = BA et AD = BE).
D'après le 2e cas d'égalité des triangles, les triangles ADC et AEB sont égaux.

b. ● Les triangles ADC et AEB sont égaux et les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BAE}$ sont homologues donc $\widehat{ACD}=\widehat{BAE}$.
On en déduit alors $\widehat{ACD}=\widehat{DAH}$.
● $\widehat{ACD}=\widehat{DAH}$ et $\widehat{ADC}=\widehat{ADH}$.
Les triangles ADC et ADH ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

c.

Angles homologues
$\widehat{ACD}$ et $\widehat{DAH}$
$\widehat{ADC}$ et $\widehat{ADH}$
$\widehat{CAD}$ et $\widehat{AHD}$

Les angles homologues ont la même mesure donc :
$\widehat{AHD} = \widehat{CAD} = 60°$.

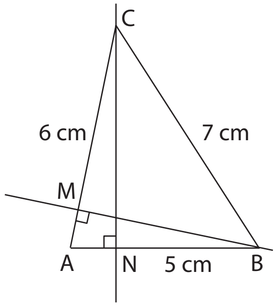
● Les angles $\widehat{AHD}$ et $\widehat{IHJ}$ sont opposés par le sommet donc ils ont la même mesure.
Donc $\widehat{IHJ} = 60°$.

d. ● On peut démontrer de même que $\widehat{HIJ} = 60°$ (en utilisant les triangles AEB, BFC et BIE) et que $\widehat{HJI} = 60°$ (en utilisant les triangles BFC, ACD et CFJ).

● Chacun des angles du triangle HIJ mesure 60° donc le triangle HIJ est équilatéral.

J'utilise mes compétences

54 **a.** Échelle 1/2.



b. $\widehat{AMB} = \widehat{ANC}$ et $\widehat{MAB} = \widehat{CAN}$.
Les triangles AMB et ANC ont deux angles deux à deux de même mesure, donc ils sont semblables.

55 ● Le triangle ABC est rectangle en A avec AB = 4,8 cm et BC = 5 cm.
D'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$
$4{,}8^2 + AC^2 = 5^2$
$23{,}04 + AC^2 = 25$
$AC^2 = 25 - 23{,}04$
$AC^2 = 1{,}96$
Donc $AC = \sqrt{1{,}96}$ cm c'est-à-dire AC = 1,4 cm.

● Le triangle DEF est rectangle en D avec DE = 2,1 cm et DF = 7,2 cm.
D'après le théorème de Pythagore :
$DE^2 + DF^2 = EF^2$
$2{,}1^2 + 7{,}2^2 = EF^2$
$4{,}41 + 51{,}84 = EF^2$
$EF^2 = 56{,}25$
Donc $EF = \sqrt{56{,}25}$ cm c'est-à-dire EF = 7,5 cm.

● Rangées dans l'ordre croissant, les longueurs des côtés du triangle ABC sont 1,4 cm, 4,8 cm et 5 cm.
Les longueurs des côtés du triangle DEF sont 2,1 cm, 7,2 cm et 7,5 cm.

● $\dfrac{2{,}1}{1{,}4} = 1{,}5$; $\dfrac{7{,}2}{4{,}8} = 1{,}5$ et $\dfrac{7{,}5}{5} = 1{,}5$.

Les longueurs des côtés des triangles ABC et DEF sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

56 ● I est le milieu de [AC] donc :
$AI = \dfrac{AC}{2}$ c'est-à-dire $AI = \dfrac{28 \text{ mm}}{2}$.
Donc AI = 14 mm.

● $\widehat{DAI} = \widehat{DAC}$ et $\widehat{AID} = \widehat{ABC}$.
Les triangles DAI et ABC ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

● Les sommets homologues sont I et B, A et A, D et C.
D'où les égalités :
$\dfrac{IA}{BA} = \dfrac{ID}{BC} = \dfrac{AD}{AC}$ soit $\dfrac{14}{42} = \dfrac{ID}{36} = \dfrac{AD}{28}$.

De $\dfrac{14}{42} = \dfrac{ID}{36}$, on déduit $ID = 36 \times \dfrac{14}{42}$.
Donc ID = 12 mm.

De $\dfrac{14}{42} = \dfrac{AD}{28}$, on déduit $AD = 28 \times \dfrac{14}{42}$.
Donc AD ≈ 9,3 mm.

57 **a.** Les sommets homologues sont A et E, B et F, C et D. D'où les égalités :
$\dfrac{ED}{AC} = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{DF}{BC}$ soit $\dfrac{ED}{13} = \dfrac{EF}{14} = \dfrac{6}{15}$.

De $\dfrac{ED}{13} = \dfrac{6}{15}$, on déduit $ED = 13 \times \dfrac{6}{15}$.
Donc ED = 5,2 cm.

De $\dfrac{EF}{14} = \dfrac{6}{15}$, on déduit $EF = 14 \times \dfrac{6}{15}$.
Donc EF = 5,6 cm.

b. DEF est une réduction de ABC dans le rapport
$k = \dfrac{6}{15} = 0{,}4$.

Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2.
Donc Aire DEF = $0{,}4^2 \times 84$ cm².
L'aire du triangle DEF est 13,44 cm².

58 ● **Étude du cas où RE < 12 cm.**
Dans ce cas, les côtés homologues sont [RE] et [ZO], [RA] et [ZU] et [EA] et [OU].
$\dfrac{RA}{ZU} = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$ et $\dfrac{EA}{OU} = \dfrac{21}{28} = 0{,}75$.

$\dfrac{RA}{ZU} \neq \dfrac{EA}{OU}$ donc la longueur RE ne peut pas être inférieure à 12 cm.

● **Étude du cas où 12 cm < RE < 21 cm.**
Dans ce cas, les côtés homologues sont [RA] et [ZO], [RE] et [ZU] et [EA] et [OU].
$\dfrac{RA}{ZO} = \dfrac{12}{16} = 0{,}75$ et $\dfrac{EA}{OU} = \dfrac{21}{28} = 0{,}75$.

$\dfrac{RA}{ZO} = \dfrac{EA}{OU}$ donc la longueur RE peut-être comprise entre 12 cm et 21 cm.

On a alors l'égalité : $\dfrac{RE}{ZU} = 0{,}75$ soit $\dfrac{RE}{20} = 0{,}75$.

$RE = 0{,}75 \times 20$ donc RE = 15 cm.

● **Étude du cas où RE > 21 cm.**
Dans ce cas, les côtés homologues sont [RE] et [OU], [AE] et [ZU] et [AR] et [ZO].

$\dfrac{AE}{ZU} = \dfrac{21}{20} = 1{,}05$ et $\dfrac{AR}{ZO} = \dfrac{12}{16} = 0{,}75$.

$\dfrac{AE}{ZU} \neq \dfrac{AR}{ZO}$ donc la longueur RE ne peut pas être supérieure à 21 cm.

59 **a.** Les triangles ABD et ABC sont semblables.
En effet $\widehat{BAD} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{DBA} = \widehat{ABC}$.
Les triangles ABD et ABC ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

b. Les sommets homologues sont A et C, B et B, D et A.

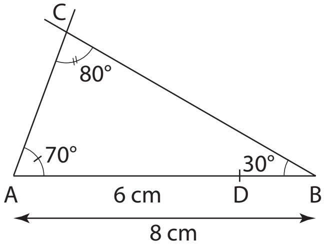
D'où les égalités : $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AD}{CA} = \dfrac{BD}{BA}$.

De $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BD}{BA}$, on déduit $AB \times BA = CB \times BD$.

Donc $AB^2 = BC \times BD$.

60 **a.** La somme des angles d'un triangle est égale à 180° donc :
$\widehat{BCA} = 180° - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC})$
$\widehat{BCA} = 180° - (70° + 30°)$.
Donc $\widehat{BCA} = 80°$.

Échelle 1/2.

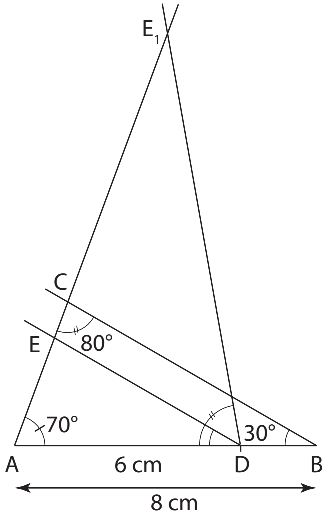


b. E est un point de la demi-droite [AC) donc $\widehat{DAE} = 70°$.
Les tableaux ci-dessous résument les deux possibilités pour le point E.

Angles homologues	Mesure
$\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$	70°
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADE}$	30°
$\widehat{CAB}$ et $\widehat{DEA}$	80°

Angles homologues	Mesure
$\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$	70°
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEA}$	30°
$\widehat{CAB}$ et $\widehat{ADE}$	80°

Sur la figure suivante, à l'échelle 1/2, les points E et E_1 représentent les deux emplacements possibles du point E.



61 ● BM = AB – AM = 94,5 m – 7 m = 87,5 m.
● $\widehat{AMT} = \widehat{BMS}$ et $\widehat{MAT} = \widehat{MBS}$.
Les triangles AMT et BMS ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.
● Les sommets homologues sont A et B, M et M, T et S.
D'où les égalités :
$\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AT}{BS} = \dfrac{MT}{MS}$ soit $\dfrac{7}{87{,}5} = \dfrac{1{,}84}{BS} = \dfrac{MT}{MS}$.

De $\dfrac{7}{87{,}5} = \dfrac{1{,}84}{BS}$, on déduit $7 \times BS = 87{,}5 \times 1{,}84$.

$BS = \dfrac{87{,}5 \times 1{,}84}{7} = 23$.

La hauteur de l'obélisque est 23 m.

62 ● On note x et y les longueurs des deux autres côtés du triangle DEF (avec $x < y$)

● **Cas où deux côtés homologues mesurent 15 cm et 27 cm.**

On obtient alors $\dfrac{27}{15} = \dfrac{x}{18} = \dfrac{y}{20}$.

$x = 18 \times \dfrac{27}{15} = 32{,}4$ et $y = 20 \times \dfrac{27}{15} = 36$.

● **Cas où deux côtés homologues mesurent 18 cm et 27 cm.**

On obtient alors $\dfrac{x}{15} = \dfrac{27}{18} = \dfrac{y}{20}$.

$x = 15 \times \dfrac{27}{18} = 22{,}5$ et $y = 20 \times \dfrac{27}{18} = 30$.

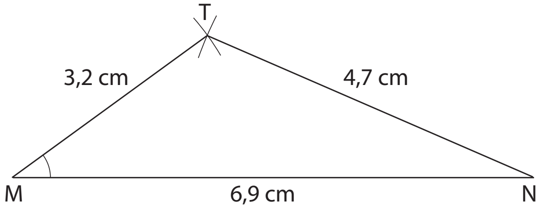
● **Cas où deux côtés homologues mesurent 20 cm et 27 cm.**

On obtient alors $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{18} = \dfrac{27}{20}$.

$x = 15 \times \dfrac{27}{20} = 20{,}25$ et $y = 18 \times \dfrac{27}{20} = 24{,}3$.

● Conclusion : les longueurs possibles des deux autres côtés sont 32,4 cm et 36 cm ou 22,5 cm et 30 cm ou 20,25 cm et 24,3 cm.

63 • Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{10\,000\,000}$, 1 cm représente 10 000 000 cm soit 100 km.
Sur ce plan, on a alors MN = 6,9 cm, NT = 4,7 cm et MT = 3,2 cm.



Sur ce plan, on mesure $\widehat{NMT} \approx 36°$.
• Les triangles MNT sur le plan et dans la réalité ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles donc ils sont semblables et leurs angles sont deux à deux de même mesure.
Dans la réalité : $\widehat{NMT} \approx 36°$.

64 **1.** $\frac{DE}{AB} = \frac{1,8}{3} = 0,6$ et $\frac{DF}{AC} = \frac{2,1}{3,5} = 0,6$

Donc $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$.

2. a. $\widehat{E'AF'} = \widehat{EDA}$, AE′ = DE et AF′ = DF.
Les triangles AE′F′ et DEF ont un angle de même mesure compris entre des côtés deux à deux de même longueur, donc les triangles AE′F′ et DEF sont égaux.
b. Les points A, E′, B et A, F′, C sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AE'}{AB} = \frac{DE}{AB} = 0,6$ et $\frac{AF'}{AC} = \frac{DF}{AC} = 0,6$.

Donc $\frac{AE'}{AB} = \frac{AF'}{AC}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (E′F′) et (BC) sont parallèles.
c. • Les droites (BE′) et (CF′) sont sécantes en A et les droites (E′F′) et (BC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AE'}{AB} = \frac{AF'}{AC} = \frac{E'F'}{BC}.$$

• Les triangles AE′F′ et DEF sont égaux donc les côtés homologues sont de même longueur donc AE′ = DE, AF′ = DF et E′F′ = EF.
• En remplaçant AE′, AF′ et E′F′ dans l'égalité
$\frac{AE'}{AB} = \frac{AF'}{AC} = \frac{E'F'}{BC}$ on obtient $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.

• Les longueurs des côtés des triangles ABC et DEF sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

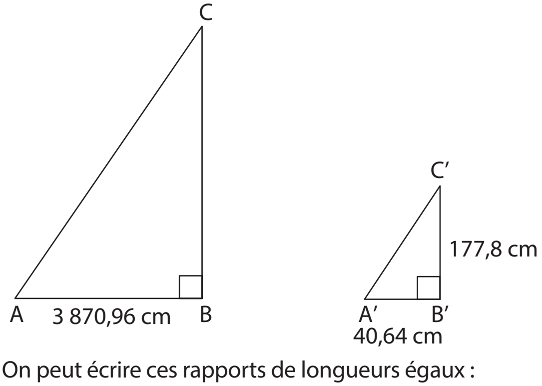
65 **a. Travail de Camille :**
ABCD est un parallélogramme donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
Les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ECF}$ sont alternes-internes et les droites (AD) et (BF) sont parallèles donc $\widehat{ADE} = \widehat{ECF}$.
On montre de même que $\widehat{DAE} = \widehat{CFE}$.
Les triangles ADE et EFC ont deux angles de même mesure donc ils sont semblables.
Travail de Manon :
ABCD est un parallélogramme donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
Les droites (CD) et (AF) sont sécantes en E et les droites (AD) et (FC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{ED}{EC} = \frac{EA}{EF} = \frac{DA}{CF}.$$

Les longueurs des côtés des triangles ADE et AFC sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

66 **Traduction :**
Dion se tient près du Washington Monument.
Il mesure 5 pieds 10 pouces.
Son ombre mesure 16 pouces.
L'ombre du Washington Monument mesure 127 pieds comme indiqué sur la figure ci-dessous.
Calculer une valeur approchée de la hauteur, en m, du Washington Monument.

Solution :
• 5 ft 10 in = 5 × 30,48 cm + 10 × 2,54 cm = 177,8 cm.
16 in = 16 × 2,54 cm = 40,64 cm.
127 ft = 127 × 30,48 cm = 3 870,96 cm.
• On peut réaliser ce schéma sur lequel ABC et A′B′C′ sont deux triangles semblables.



On peut écrire ces rapports de longueurs égaux :
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ soit $\frac{3\,870,96}{40,64} = \frac{BC}{177,8} = \frac{AC}{A'C'}$.

De $\frac{3\,870,96}{40,64} = \frac{BC}{177,8}$, on déduit que

$BC = \frac{3\,870,96 \times 177,8}{40,64}$.

Donc BC = 16 935,45 cm.
La hauteur du Washington Monument est environ 16 900 cm soit environ 169 m.

67 ● On note x la longueur AC en m.
La longueur CD est alors $100 - x$.
● $\widehat{ACR} = \widehat{DCB}$ et $\widehat{CAR} = \widehat{CDB}$.
Les triangles ACR et BCD ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.
● Les sommets homologues sont A et D, R et B, C et C.
D'où les égalités :
$\frac{AR}{DB} = \frac{AC}{CD} = \frac{RC}{BC}$ soit $\frac{30}{50} = \frac{x}{100 - x} = \frac{RC}{BC}$.
De $\frac{30}{50} = \frac{x}{100 - x}$, on déduit que $30(100 - x) = 50x$.
$$3\,000 - 30x = 50x$$
$$3\,000 - 30x + 30x = 50x + 30x$$
$$3\,000 = 80x$$
$$x = \frac{3\,000}{80}$$
$$x = 37{,}5.$$
Donc le point C doit-être à 37,5 cm de A.

68 **Calcul de la longueur DE.**
● On note x la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
● ABC est un triangle isocèle en C donc :
$\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = x$ et $\widehat{ACB} = 180° - 2x$.
● Les triangles ABC et BCD sont égaux.
Donc $\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = x$ et $\widehat{BCD} = 180° - 2x$.
● B appartient au segment [AE] donc $\widehat{ABE} = 180°$ et $\widehat{EBD} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{CBD})$ soit $\widehat{EBD} = 180° - 2x$.
BED est un triangle isocèle en B donc :
$\widehat{BED} = \widehat{BDE} = \frac{180° - \widehat{EBD}}{2} = \frac{180° - (180° - 2x)}{2} = \frac{2x}{2} = x.$
● $\widehat{EBD} = \widehat{BCD}$ et $\widehat{BED} = \widehat{CBD}$.
Les triangles BED et BCD ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.
Les sommets homologues sont, par exemple, B et C, E et B, D et D.
D'où les égalités : $\frac{BE}{CB} = \frac{BD}{CD} = \frac{DE}{BD}$ soit $\frac{BE}{5} = \frac{3}{5} = \frac{DE}{3}$.
De $\frac{3}{5} = \frac{DE}{3}$, on déduit que $DE = 3 \times \frac{3}{5}$.
Donc DE = 1,8 cm.

Calcul de la longueur DF.
On note y la longueur DF, la longueur CD est alors $y + 5$.
● $\widehat{FBC} = \widehat{EBD} + \widehat{DBC}$.
Donc $\widehat{FBC} = 180° - 2x + x = 180° - x$.
● E appartient au segment [BF] donc $\widehat{FEB} = 180°$ et $\widehat{FED} = 180° - \widehat{BED}$. Donc $\widehat{FED} = 180° - x$.
● $\widehat{FED} = \widehat{FBC}$ et $\widehat{DFE} = \widehat{CFB}$.
Les triangles FED et FBC ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.
Les sommets homologues sont E et B, D et C, F et F.
D'où les égalités : $\frac{FE}{FB} = \frac{DF}{CF} = \frac{ED}{BC}$ soit $\frac{FE}{FB} = \frac{y}{y+5} = \frac{1{,}8}{5}$.
De $\frac{y}{y+5} = \frac{1{,}8}{5}$, on déduit que $5y = 1{,}8(y + 5)$.
$$5y = 1{,}8y + 9$$
$$5y - 1{,}8y = 1{,}8y - 1{,}8y + 9$$
$$3{,}2y = 9$$
$$y = \frac{9}{3{,}2}$$
$$y = 2{,}812\,5$$
Donc DF = 2,812 5 cm.

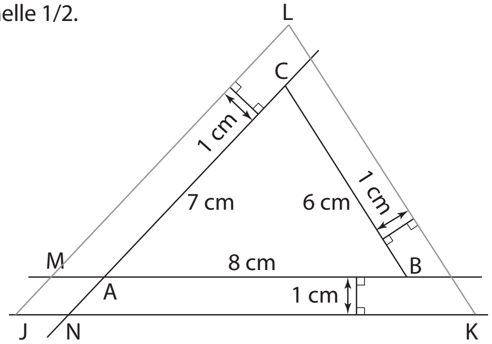
69 ● Le triangle MFS est rectangle en F avec FS = 32 km et MS = 40 km.
D'après le théorème de Pythagore :
$FM^2 + FS^2 = MS^2$
$FM^2 + 32^2 = 40^2$
$FM^2 + 1\,024 = 1\,600$
$FM^2 = 1\,600 - 1\,024$
$FM^2 = 576$
Donc $FM = \sqrt{576}$ cm c'est-à-dire FM = 24 km.
● Le triangle FMS est rectangle en F donc :
$\widehat{FMS} = 90° - \widehat{FSM}$.
● Le triangle CMS est rectangle en M donc :
$\widehat{MCS} = 90° - \widehat{CSM} = 90° - \widehat{FSM}$.
● $\widehat{FMS} = \widehat{MCS}$ et $\widehat{SFM} = \widehat{CFM}$.
Les triangles FMS et FCM ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.
Les sommets homologues sont M et C, F et F, S et M.
D'où les égalités : $\frac{MF}{CF} = \frac{MS}{CM} = \frac{FS}{FM}$ soit $\frac{24}{CF} = \frac{40}{CM} = \frac{32}{24}$.
De $\frac{40}{CM} = \frac{32}{24}$, on déduit que $32 \times CM = 40 \times 24$.
$CM = 40 \times \frac{24}{32}$.
Donc CM = 30 km et Myriam est à 30 km du Carbet.

70 ● Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{GAF}$ sont opposés par le sommet donc ils ont la même mesure.
● $\widehat{CAB} = \widehat{GAF}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{GFA}$.
Les triangles ABC et AFG ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.
Les sommets homologues sont, par exemple, A et A, B et F, C et G.
D'où les égalités : $\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AG} = \frac{BC}{FG}$ soit $\frac{18}{AC} = \frac{AC}{8} = \frac{27}{FG}$.
(on utilise le fait que AF = AC).
● De $\frac{18}{AC} = \frac{AC}{8}$, on déduit $AC \times AC = 18 \times 8$.
$AC^2 = 144$ donc $AC = \sqrt{144}$ cm soit AC = 12 cm.
● L'égalité $\frac{AC}{8} = \frac{27}{FG}$ devient alors $\frac{12}{8} = \frac{27}{FG}$.
$12 \times FG = 8 \times 27$ et $FG = \frac{8 \times 27}{12}$.
Donc FG = 18 cm.

71 ● Les droites (LJ) et (AC) sont perpendiculaires à une même droite donc les droites (LJ) et (AC) sont parallèles.
De même, les droites (AB) et (JK) sont parallèles ainsi que les droites (CB) et (LK).

● On note M le point d'intersection des droites (AB) et (JL) et N le point d'intersection des droites (AC) et (JK).

Échelle 1/2.



● (JM) // (AN) et (JN) // (MA).
Le quadrilatère MANJ a ses côtés opposés deux à deux parallèles donc MANJ est un parallélogramme.
Les angles opposés d'un parallélogramme ont même mesure donc $\widehat{MJN} = \widehat{MAN}$ soit aussi $\widehat{LJK} = \widehat{MAN}$.

● $\widehat{MAN}$ et $\widehat{CAB}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{MAN} = \widehat{CAB}$.

● $\widehat{LJK} = \widehat{MAN}$ et $\widehat{MAN} = \widehat{CAB}$ donc $\widehat{LJK} = \widehat{CAB}$.

● On peut montrer de même que $\widehat{JKL} = \widehat{ABC}$.

● Les triangles ABC et JKL ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

Dossier Brevet

72 **a.** D est le milieu de [AC] donc $AD = \dfrac{AC}{2}$ c'est-à-dire $AD = \dfrac{6\text{ cm}}{2}$. Donc AD = 3 cm.

● $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$
Les triangles ABC et ADE ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

b. Les sommets homologues sont A et A, B et D, C et E.
D'où les égalités : $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$ soit $\dfrac{5}{3} = \dfrac{6}{AE} = \dfrac{2}{DE}$.

● De $\dfrac{5}{3} = \dfrac{6}{AE}$, on déduit $5 \times AE = 6 \times 3$.

$AE = \dfrac{6 \times 3}{5}$ Donc AE = 3,6 cm.

● De $\dfrac{5}{3} = \dfrac{2}{DE}$, on déduit $5 \times DE = 2 \times 3$.

$DE = \dfrac{2 \times 3}{5}$ Donc DE = 1,2 cm.

73 **a.** $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC} = \widehat{CAB}$
Les triangles ABC et DAC ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

b. Le triangle ABC est rectangle en B.
Donc, d'après le théorème de Pythagore :
$BA^2 + BC^2 = AC^2$
$BA^2 + 8^2 = 10^2$
$BA^2 + 64 = 100$
$BA^2 = 100 - 64$
$BA^2 = 36$.
Donc AB = 6 cm.

c. ● Les triangles ABC et DAC sont semblables et les sommets homologues sont A et D, B et A, C et C.
D'où les égalités : $\dfrac{AB}{DA} = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{BC}{AC}$ soit $\dfrac{6}{DA} = \dfrac{10}{DC} = \dfrac{8}{10}$.

● De $\dfrac{6}{DA} = \dfrac{8}{10}$, on déduit $8 \times DA = 6 \times 10$.

$DA = \dfrac{6 \times 10}{8}$ donc DA = 7,5 cm.

● De $\dfrac{10}{DC} = \dfrac{8}{10}$, on déduit $8 \times DC = 10 \times 10$.

$DC = \dfrac{10 \times 10}{8}$ donc DC = 12,5 cm.

74 On range les longueurs des côtés dans l'ordre croissant.
Pour NEO : OE < NE < ON.
Pour AMI : AM < MI < AI.
$\dfrac{AM}{OE} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$; $\dfrac{MI}{NE} = \dfrac{8{,}1}{13{,}5} = 0{,}6$ et $\dfrac{AI}{ON} = \dfrac{9}{15} = 0{,}6$.
Les longueurs des côtés des triangles NEO et AMI sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

75 **a.** ● Les angles $\widehat{EGF}$ et $\widehat{HGI}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{EGF} = \widehat{HGI}$.

● $\widehat{EGF} = \widehat{HGI}$ et $\widehat{EFG} = \widehat{GHI}$.
Les triangles EFG et GHI ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

b. ● Les sommets homologues sont G et G, H et F, I et E.
D'où les égalités : $\dfrac{GH}{GF} = \dfrac{GI}{GE} = \dfrac{HI}{FE}$ soit $\dfrac{GH}{2} = \dfrac{3{,}6}{3} = \dfrac{HI}{1{,}5}$.

● De $\dfrac{GH}{2} = \dfrac{3{,}6}{3}$, on déduit $GH = 2 \times \dfrac{3{,}6}{3}$.
Donc GH = 2,4 cm.

● De $\dfrac{3{,}6}{3} = \dfrac{HI}{1{,}5}$, on déduit $HI = 1{,}5 \times \dfrac{3{,}6}{3}$.
Donc HI = 1,8 cm.

76 ● DF = 40 mm = 0,04 m et GE = 48 mm = 0,048 m.

● Les angles $\widehat{EGF}$ et $\widehat{CGA}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{EGF} = \widehat{CGA}$.

● $\widehat{EGF} = \widehat{CGA}$ et $\widehat{FEG} = \widehat{ACG}$.
Les triangles EFG et ACG ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

● Les sommets homologues sont G et G, C et E, A et F.
D'où les égalités :
$\dfrac{GC}{GE} = \dfrac{GA}{GF} = \dfrac{CA}{EF}$ soit $\dfrac{6}{0{,}048} = \dfrac{GA}{GF} = \dfrac{CA}{EF}$.

● Les droites (DF) et (AB) sont perpendiculaires à la même droite (CE) donc les droites (DF) et (AB) sont parallèles.

● Les droites (DB) et (FA) sont sécantes en G et les droites (DF) et (AB) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{GB}{GD} = \dfrac{GA}{GF} = \dfrac{BA}{DF}$ soit $\dfrac{GB}{GD} = \dfrac{GA}{GF} = \dfrac{BA}{0{,}04}$.

● Des égalités $\dfrac{6}{0{,}048} = \dfrac{GA}{GF}$ et $\dfrac{GA}{GF} = \dfrac{BA}{0{,}04}$, on déduit $\dfrac{6}{0{,}048} = \dfrac{BA}{0{,}04}$ et alors $BA = 0{,}04 \times \dfrac{6}{0{,}048}$.

Donc BA = 5 m.
La hauteur de l'arbre est 5 m.

77 **a.** Le triangle BHC est rectangle en H avec BH = 45 cm et HC = 60 cm.
D'après le théorème de Pythagore :
$HB^2 + HC^2 = BC^2$
$45^2 + 60^2 = BC^2$
$2\,025 + 3\,600 = BC^2$
$BC^2 = 5\,625$
Donc $BC = \sqrt{5\,625}$ cm c'est-à-dire BC = 75 cm.

b. $\widehat{ABC} = \widehat{BHC}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{HCB}$.
Les triangles ABC et BHC ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

c. ● Les sommets homologues sont A et B, B et H, C et C.
D'où les égalités : $\dfrac{AB}{BH} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{HC}$ soit $\dfrac{AB}{45} = \dfrac{AC}{75} = \dfrac{75}{60}$.

● De $\dfrac{AC}{75} = \dfrac{75}{60}$, on déduit $AC = 75 \times \dfrac{75}{60}$.
Donc AC = 93,75 cm.

● De $\dfrac{AB}{45} = \dfrac{75}{60}$, on déduit $AB = 45 \times \dfrac{75}{60}$.
Donc AB = 56,25 cm.

● AB + BC + CA = 56,25 cm + 75 cm + 93,75 cm.
AB + BC + CA = 225 cm.
Donc le périmètre du triangle ABC est 225 cm.

78 ● Le triangle CDE est rectangle en D avec DC = 1 cm et DE = 1 cm.
D'après le théorème de Pythagore :
$DC^2 + DE^2 = CE^2$
$1^2 + 1^2 = CE^2$
$1 + 1 = CE^2$
$CE^2 = 2$
Donc $CE = \sqrt{2}$ cm.
On montre de même que :
$AG = \sqrt{2}$ cm (en se plaçant dans le triangle AGH) ;
$AF = \sqrt{5}$ cm (en se plaçant dans le triangle AFH) ;
$AE = \sqrt{10}$ cm (en se plaçant dans le triangle AHE).

● Les longueurs des côtés du triangle CEA sont $CE = \sqrt{2}$ cm, AC = 2 cm, $AE = \sqrt{10}$ cm.
Les longueurs des côtés du triangle GFA sont GF = 1 cm, $AG = \sqrt{2}$ cm, $AF = \sqrt{5}$ cm.

● $\dfrac{CE}{GF} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$; $\dfrac{AC}{AG} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{2 \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

$\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ or $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{10}{5} = 2$ donc $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

Donc $\dfrac{CE}{GF} = \dfrac{AC}{AG} = \dfrac{AE}{AF}$.

Les longueurs des côtés des triangles CEA et GFA sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

79 ● On note x la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

● La somme des angles du triangle ABC est égale à 180° donc $\widehat{CAB} = 180° - \widehat{ACB} - \widehat{ABC}$.
C'est-à-dire $\widehat{CAB} = 180° - 40° - x$.
Donc $\widehat{CAB} = 140° - x$.

● $\widehat{EAO} = 180° - \widehat{CAB}$ c'est-à-dire :
$\widehat{EAO} = 180° - (140° - x) = 180° - 140° + x$.
Donc $\widehat{EAO} = 40° + x$.

● La somme des angles du triangle AOE est égale à 180° donc $\widehat{AEO} = 180° - \widehat{AOE} - \widehat{CAO}$.
C'est-à-dire $\widehat{AEO} = 180° - 90° - (40° + x)$.
$\widehat{AEO} = 180° - 90° - 40° - x$.
Donc $\widehat{AEO} = 50° - x$ et $\widehat{CEF} = 50° - x$

● La somme des angles du triangle CEF est égale à 180° donc $\widehat{EFC} = 180° - \widehat{ECF} - \widehat{CEF}$.
C'est-à-dire $\widehat{EFC} = 180° - 40° - (50° - x)$.
$\widehat{EFC} = 180° - 40° - 50° + x$.
Donc $\widehat{EFC} = 90° + x$.

Étude des cas possibles où les triangles ABC et CEF sont semblables.

● $\widehat{ACB} = \widehat{ECF}$ donc le sommet homologue au sommet C est C lui-même.

Étude du cas où les sommets homologues sont C et C, A et F, B et E.

$\widehat{ABC} = \widehat{FEC}$ c'est-à-dire $x = 50° - x$.
$$x + x = 50° - x + x$$
$$2x = 50°.$$
Donc $x = 25°$.
Pour $x = 25°$, $\widehat{ABC} = \widehat{FEC}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{FCE}$.
Les triangles ABC et CEF ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

Étude du cas où les sommets homologues sont C et C, A et E, B et F.

$\widehat{ABC} = \widehat{EFC}$ c'est-à-dire $x = 90° + x$.
$$x - x = 90° + x - x$$
$$0 = 90°$$
Donc les sommets homologues ne peuvent pas être C et C, A et E, B et F.
Conclusion : Les triangles ABC et CEF sont semblables lorsque l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 25°.

80 ● DE = DA + AB + BE c'est-à-dire :
DE = 3 cm + 8 cm + 3 cm = 14 cm.
Donc DE = 14 cm.

● Le triangle ACB est isocèle en C donc :
$\widehat{ABC} = \dfrac{180° - \widehat{ACB}}{2} = \dfrac{180° - \widehat{DFE}}{2}$.

Le triangle DFE est isocèle en F donc :
$\widehat{DEF} = \dfrac{180° - \widehat{DFE}}{2} = \widehat{ABC}$.

$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$.

Les triangles ABC et DEF ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

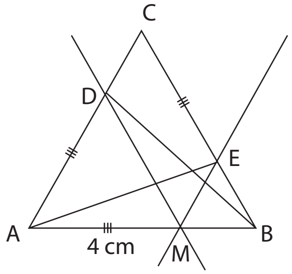
● Les sommets homologues sont F et C, D et A, E et B.

D'où les égalités : $\frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = \frac{DE}{AB}$ soit $\frac{EF}{5} = \frac{DF}{5} = \frac{14}{8}$.

De $\frac{DF}{5} = \frac{14}{8}$, on déduit $DF = 5 \times \frac{14}{8}$.

Donc DF = 8,75 cm.

81 **a.** Échelle 1/2.



b. ● ABC est un triangle équilatéral donc ses trois angles mesurent 60°.

Les droites (DC) et (BM) sont sécantes en A et les droites (DM) et (BC) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{MD}{BC}.$$

Les longueurs des côtés des triangles AMD et ABC sont deux à deux proportionnelles donc ces triangles sont semblables.

Les triangles AMD et ABC sont semblables donc leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Donc les trois angles du triangle AMD mesurent 60°.

● On montre de même que les triangles BEM et ABC sont semblables et donc que les trois angles du triangle BEM mesurent 60°.

● Les triangles ADM et BEM ont deux angles de même mesure donc ils sont semblables. Juliette a raison.

c. ADM est un agrandissement de BEM dans le rapport

$k = \frac{AM}{BM} = \frac{4}{2} = 2.$

Dans un agrandissement de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 donc :

Aire de ADM = $2^2 \times$ Aire de BEM c'est-à-dire

Aire de ADM = $4 \times$ Aire de BEM.

Donc l'affirmation de Kim n'est pas exacte.

d. ● M appartient au segment [AB] donc :

$\widehat{AMB} = 180°$ et $\widehat{AME} = 180° - \widehat{BME}$ c'est-à-dire

$\widehat{AME} = 180° - 60°$.

Donc $\widehat{AME} = 120°$.

$\widehat{BMD} = 180° - \widehat{AMD}$ c'est-à-dire

$\widehat{BMD} = 180° - 60°$.

Donc $\widehat{BMD} = 120°$.

● MA = MD, ME = MB et $\widehat{AME} = \widehat{BMD}$.

Ainsi, les triangles MAE et MDB ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur.

D'après le 2^e cas d'égalité des triangles, les triangles MAE et MDB sont égaux.

L'affirmation de Lucas est exacte.

82 **a.** ● La somme des angles du triangle ABC est égale à 180°.

Donc $\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{BAC})$ c'est-à-dire

$\widehat{ACB} = 180° - (58° + 43°)$.

Donc $\widehat{ACB} = 79°$.

● $\widehat{ACB} = \widehat{EFD}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$.

Les triangles ABC et DEF ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

b. Le triangle DEF est une réduction du triangle ABC dans le rapport $k = \frac{DE}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 donc :

Aire de DEF = $0{,}8^2 \times$ Aire de ABC c'est-à-dire

Aire de DEF = $0{,}64 \times 7{,}36$ cm^2.

Donc l'aire du triangle DEF est environ 4,71 cm^2.

83 **a.** Le côté le plus long du triangle ABC est le côté [BC].

$BC^2 = 17^2 = 289$

$AB^2 + AC^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

b. ● AB + BC + CA = 8 cm + 17 cm + 15 cm = 40 cm.

Donc le périmètre du triangle ABC est 40 cm.

● $\widehat{ACB} = \widehat{ECD}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDC}$.

Les triangles ABC et DEF ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

Le triangle CDE est une réduction du triangle ABC dans le rapport $k = \frac{DC}{AC} = \frac{6{,}8}{15}$.

● Dans une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k donc le périmètre du triangle CDE est $\frac{6{,}8}{15} \times 40$ cm soit environ 18,1 cm.

84 ● $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$.

Les triangles ABC et BCD ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

Les sommets homologues sont A et B, B et C, C et D.

D'où les égalités : $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BD} = \frac{BC}{CD}$ soit $\frac{40}{50} = \frac{26}{BD} = \frac{50}{CD}$.

De $\frac{40}{50} = \frac{26}{BD}$, on déduit $40 \times BD = 26 \times 50$.

$BD = \frac{26 \times 50}{40}$, donc BD = 32,5 m.

De $\frac{40}{50} = \frac{50}{CD}$, on déduit $40 \times CD = 50 \times 50$.

$CD = \frac{50 \times 50}{40}$, donc CD = 62,5 m.

● $BD + CD = 32{,}5\text{ m} + 62{,}5\text{ m} = 95\text{ m}$
Donc Sarah doit encore clôturer 95 m.
$AC + CB + BA = 26\text{ m} + 50\text{ m} + 40\text{ m} = 116\text{ m}$
Donc 116 m de clôture coûtent 406 €.
$\frac{406}{116} = 3{,}50$ €, donc 1 m de clôture coûte 3,50 €.
$95 \times 3{,}50$ € $= 332{,}50$ €
Le coût pour terminer de clôturer la parcelle 2 sera 332,50 €.

● 10 h 57 min – 7 h 45 min = 3 h 12 min = 3,2 h
Donc Sarah a mis 3,2 h pour tondre la parcelle 1.
Le triangle BCD est un agrandissement du triangle ABC dans le rapport $k = \frac{AB}{BC} = \frac{50}{40} = 1{,}25$.

● Dans un agrandissement de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 donc :
Aire de BCD $= k^2 \times$ Aire de ABC soit
Aire de BCD $= 1{,}25^2 \times$ Aire de ABC.
Aire de BCD $= 1{,}5625 \times$ Aire de ABC.

● L'aire du triangle BCD est 1,5625 fois plus grande que l'aire du triangle ABC donc Sarah mettra 1,5625 fois plus de temps pour tondre le triangle BCD.
$1{,}5625 \times 3{,}2\text{ h} = 5\text{ h}$.
Donc Sarah mettra 5 h pour tondre la parcelle 2.

85 ● $\widehat{BAC} = \widehat{MAO}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{AOM}$.
Les triangles ABC et MAO ont deux angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.
Les sommets homologues sont A et A, B et O, C et M.
D'où les égalités :
$$\frac{AB}{AO} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{OM} \text{ soit } \frac{360}{135} = \frac{AC}{159} = \frac{BC}{OM}.$$
De $\frac{360}{135} = \frac{AC}{159}$, on déduit $AC = 159 \times \frac{360}{135}$.
Donc AC = 424 km.

● Le triangle ABC est rectangle en B.
Donc, d'après le théorème de Pythagore :
$BA^2 + BC^2 = AC^2$
$360^2 + BC^2 = 424^2$
$129\,600 + BC^2 = 179\,776$
$BC^2 = 179\,776 - 129\,600$
$BC^2 = 50\,176$
$BC = \sqrt{50\,176}$ km c'est-à-dire BC = 224 km.

● **Étude des trajets par la route.**
AB + BC = 360 km + 224 km = 584 km.
Un camion effectue 584 km pour aller par la route de Auloin à Cityville.
$d = v \times t$ c'est-à-dire $584 = 80 \times t$.
$t = \frac{584}{80}$ donc $t = 7{,}3$ h.
Un camion met 7,3 h soit 7 h 18 min pour aller par la route de Auloin à Cityville.
160 g = 0,160 kg et $1\,500 \times 584 \times 0{,}160\text{ kg} = 140\,160\text{ kg}$.
Chaque jour les 1 500 camions émettent 140 160 kg soit 140,16 tonnes de CO_2.
$365 \times 140{,}16$ tonnes $= 51\,158{,}4$ tonnes
Chaque année les camions émettent 51 158,4 tonnes de CO_2.

● **Étude des trajets avec la voie ferrée.**
$d = v \times t$ c'est-à-dire $424 = 212 \times t$.
$t = \frac{424}{212}$ donc $t = 2$ h.
Avec la voie ferrée, un camion mettra 2 h pour aller de Auloin à Cityville.
7 h 12 min – 2 h = 5 h 12 min.
La voie ferrée fera gagner 5 h 12 min aux camions.

● Voici le courrier de la présidente complété :

> Cette voie ferrée fera gagner chaque jour **5 h 12** min aux camions qui empruntent la route entre Auloin et Cityville et permettra de réduire considérablement les émissions de CO_2.

CHAPITRE 14

Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

1 Le point sur le cycle 3 et le début du cycle 4

● Au cycle 3, on introduit la définition d'un triangle rectangle, on construit ou on reproduit des figures simples sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

● En 5e, on apprend que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. On applique cette propriété au cas particulier du triangle rectangle, le caractérisant par la somme des mesures des angles aigus égale à 90°.

● En 4e, on caractérise le triangle rectangle par l'égalité de Pythagore. On calcule la longueur d'un côté d'un triangle rectangle en connaissant les longueurs des deux autres côtés.

2 Je découvre

Activité 1

L'objectif de cette activité est d'introduire le cosinus, le sinus, la tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle. Pour cela, on montre que dans un triangle rectangle, les rapports :

- $\dfrac{\textit{longueur du côté adjacent}}{\textit{longueur de l'hypoténuse}}$;
- $\dfrac{\textit{longueur du côté opposé}}{\textit{longueur de l'hypoténuse}}$;
- $\dfrac{\textit{longueur du côté opposé}}{\textit{longueur du côté adjacent}}$.

ne dépendent que de la mesure de l'angle aigu considéré et non pas des longueurs des côtés du triangle rectangle.

Activité 2

L'objectif de cette activité est d'étudier une situation concrète où intervient le cosinus d'un angle aigu pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle.

On en profite pour introduire l'utilisation de la touche COS de la calculatrice.

3 J'apprends et j'applique le cours

J'apprends le cours

● Suite à l'activité 1, on peut introduire le paragraphe 1 « Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu ».

● Suite à l'activité 2, on peut étudier le paragraphe 2 « Connaître et utiliser les touches de la calculatrice ». On peut agrémenter cette étude de quelques exercices d'application directe tels que les exercices 2 à 6.

Exercice résolu

Cet exercice propose de déterminer dans un triangle rectangle :

– la longueur d'un côté, en connaissant la longueur d'un autre côté et la mesure d'un angle aigu ;

– la mesure d'un angle aigu en connaissant les longueurs de deux côtés.

4 Compléments

Triangles rectangles

Les exercices 7 et 8 de la rubrique « À l'oral » et les exercices 19 à 22 de « Je m'entraîne » permettent de vérifier la connaissance du vocabulaire et la reconnaissance d'un triangle rectangle à l'aide des mesures de ses angles aigus ou des longueurs de ses côtés.

Progressivité des exercices

On a particulièrement soigné la progressivité des exercices « Je m'entraîne » :

– aux exercices 23 et 24, on guide pas à pas l'utilisation des formules de trigonométrie ;

– aux exercices 25 et 26, on détermine la longueur du 3e côté d'un triangle rectangle à l'aide du théorème de Pythagore, puis on détermine les cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu ;

– aux exercices 28 et 29, on utilise le sinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle pour calculer soit la longueur du côté opposé, soit la longueur de l'hypoténuse ;

– aux exercices 30 et 31, on montre comment, en connaissant la longueur d'un côté et la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle, calculer les longueurs des autres côtés ;

– aux exercices 35 à 38, on construit un triangle rectangle dont on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu ;

– les exercices 39 à 48 font intervenir le théorème de Pythagore ou deux triangles rectangles ou demandent d'analyser une situation ;

– les exercices 49 à 57 sont consacrés à la détermination de la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle, en connaissant les longueurs de deux de ses côtés.

Avec un logiciel

● À l'exercice 62, on construit un angle de cosinus donné. On peut compléter cet exercice en observant, par déplacement du curseur, que plus le cosinus augmente plus la mesure de l'angle diminue.

● À l'exercice 63, on utilise un quart de cercle de rayon 1 dans un repère orthonormé. Le cosinus de l'angle $\widehat{AOC}$ correspond alors à l'abscisse du point C et son sinus correspond à l'ordonnée du point C.

On peut compléter cette étude en observant que plus la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$ augmente, plus l'abscisse de C diminue, autrement dit, plus son cosinus diminue.

S'initier au raisonnement

- L'exercice 64 invite à traduire la situation décrite par une figure géométrique codée avant de calculer une longueur.
- L'exercice 65 étudie une figure où interviennent plusieurs triangles rectangles.
- L'exercice 66 étudie un rectangle dont on connaît la longueur des diagonales et la mesure d'un des angles qu'elles forment.
- L'exercice 67 utilise la tangente d'un angle aigu dans différents triangles rectangles.
- L'exercice 68 nécessite d'utiliser le théorème de Pythagore dans différents triangles rectangles, puis d'utiliser le cosinus d'un angle aigu pour déterminer la mesure de cet angle.
- L'exercice 69 étudie un triangle isocèle dont on connaît la longueur de la base et les mesures des angles adjacents. Il faut prendre l'initiative de tracer la hauteur issue du sommet principal.

CORRIGÉS

Vu au cycle 4

1. c. ; **2. a.** et **b.** ; **3. b.** ; **4. a.**

Je découvre

Activité 1

a. Les points B, C, C′ sont alignés ainsi que les points B, A, A′ et les droites (AC) et (A′C′) sont parallèles, donc on est en présence d'une configuration de Thalès.

b. $\dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{BC}{BC'} = \dfrac{AC}{AC'}$.

c. On sait que $\dfrac{BC}{BC'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, donc $BC \times A'C' = AC \times BC'$.

Par conséquent, $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A'C'}{BC'}$. Ainsi le rapport $\dfrac{AC}{BC}$ ne dépend que de l'angle $\widehat{ABC}$.

d. $\dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{BC}{BC'}$, donc $BA \times BC' = BC \times BA'$

c'est-à-dire $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BA'}{BC'}$.

e. $\dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, donc $BA \times A'C' = AC \times BA'$

c'est-à-dire $\dfrac{AC}{BA} = \dfrac{A'C'}{BA'}$.

Activité 2

a. $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BC}{BA}$.

b. $\cos 5° = \dfrac{BC}{75}$ donc $BC = 75 \times \cos 5°$.

c. $BC \approx 74{,}7$ m.

J'applique le cours

2 Dans le triangle ABC rectangle en B :

$\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$ c'est-à-dire $\sin 52° = \dfrac{8}{AC}$.

Donc $AC = \dfrac{8}{\sin 52°}$ et $AC \approx 10{,}2$ cm.

3 Dans le triangle EFG rectangle en E :

$\cos \widehat{EFG} = \dfrac{EF}{FG}$ c'est-à-dire $\cos 59° = \dfrac{EF}{7{,}5}$.

Donc $EF = 7{,}5 \times \cos 59°$ et $EF \approx 3{,}9$ cm.

4 Dans le triangle KLM rectangle en M :

$\tan \widehat{MKL} = \dfrac{LM}{KM}$ c'est-à-dire $\tan 20° = \dfrac{LM}{5{,}4}$.

Donc $LM = 5{,}4 \times \tan 20°$ et $LM \approx 1{,}97$ cm.

5 **a.** Dans le triangle JKL rectangle en L :

$\cos \widehat{LJK} = \dfrac{JL}{JK} = \dfrac{2{,}9}{6}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{LJK} \approx 61°$.

b. Donc $\widehat{LKJ} \approx 90° - 61°$, c'est-à-dire $\widehat{LKJ} \approx 29°$.

6 Dans le triangle CST rectangle en S :

$\sin \widehat{STC} = \dfrac{CS}{CT} = \dfrac{35}{40} = 0{,}875$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{STC} \approx 61°$.

À l'oral

7 **1. a.** [DG] est **l'hypoténuse** du triangle rectangle DRG.

b. Pour l'angle $\widehat{GDR}$, [GR] est le côté **opposé** et [DR] est le côté **adjacent**.

2. L'angle $\widehat{RGD}$ a **[RG]** pour côté adjacent et **[DR]** pour côté opposé.

8 **a.** [MP] **b.** [ML] **c.** [ML]

9 **a.** $\cos \widehat{OUI} = \dfrac{UO}{UI}$

b. $\sin \widehat{OUI} = \dfrac{OI}{UI}$

c. $\tan \widehat{OUI} = \dfrac{OI}{OU}$

10 **a.** $\cos \widehat{OVL}$ **b.** $\tan \widehat{OVL}$ **c.** $\sin \widehat{OVL}$

11 **1.** $PR^2 = 13^2 = 169$

$GP^2 + GR^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.

$PR^2 = GP^2 + GR^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PGR est rectangle en G.

2. a. $\cos \widehat{GPR} = \dfrac{PG}{PR} = \dfrac{5}{13}$.

b. $\sin \widehat{GPR} = \dfrac{GR}{PR} = \dfrac{12}{13}$.

c. $\tan \widehat{GPR} = \dfrac{GR}{PG} = \dfrac{12}{5}$.

12 a. $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{AC}$.

b. $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{HC}{AC}$.

c. $\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{HC}{AH}$.

13 a. Il est préférable d'utiliser cos 50°.
b. Il est préférable d'utiliser tan 31°.

14 1. b. ; **2. c.**

Calcul mental

15 1. AC = 5 dm.

2. a. $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

b. $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

c. $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

16 1. a. $AB = \dfrac{4}{5} \times 25 = 20$ cm.

b. $AB = \dfrac{4}{5} \times 10 = 8$ cm.

c. $AB = \dfrac{4}{5} \times 8 = 6{,}4$ cm.

2. a. $AC = \dfrac{5}{4} \times 2 = 2{,}5$ cm.

b. $AC = \dfrac{5}{4} \times 12 = 15$ cm.

c. $AC = \dfrac{5}{4} \times 10 = 12{,}5$ cm.

17 a. $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$ c'est-à-dire $0{,}4 = \dfrac{AB}{7}$ et
$AB = 7 \times 0{,}4 = 2{,}8$.
Donc AB = 2,8 cm.
b. $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$ c'est-à-dire $0{,}5 = \dfrac{AC}{8}$ et $AC = 8 \times 0{,}5 = 4$.
Donc AC = 4 cm.
c. $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$ c'est-à-dire $0{,}4 = \dfrac{3{,}2}{BC}$ et $BC = \dfrac{3{,}2}{0{,}4} = 8$.
Donc BC = 8 cm.

18 $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$ et $\widehat{ACB} \approx 32°$.
Donc $\widehat{BAC} \approx 90° - 32°$ c'est-à-dire $\widehat{BAC} \approx 58°$.

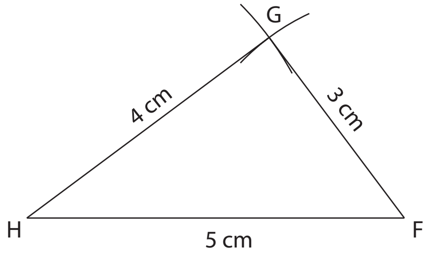
Je m'entraîne

19 1. a. [AC] **b.** [AB] **c.** [AB]
2. a. $\widehat{BCH}$ **b.** $\widehat{CBH}$

20 a. $\widehat{MPN} = 90° - 45° = 45°$.
b. MNP est un triangle rectangle et isocèle en M.

21 a. $AU^2 = 9{,}5^2 = 90{,}25$.
$TA^2 + TU^2 = 5{,}7^2 + 7{,}6^2 = 90{,}25$.
$AU^2 = TA^2 + TU^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle TAU est rectangle en T.
b. Le triangle OAU est rectangle en O donc, d'après le théorème de Pythagore :
$AU^2 = OA^2 + OU^2$
$9{,}5^2 = OA^2 + 8{,}1^2$
$OA^2 = 9{,}5^2 - 8{,}1^2 = 90{,}25 - 65{,}61$
$OA^2 = 24{,}64$
$OA \approx 5$ cm.

22 On construit avec la règle et le compas un triangle de côtés 3 cm, 4 cm, 5 cm.



23 • L'hypoténuse est [BI].
• Le côté adjacent à l'angle $\widehat{TBI}$ est [TB].
• Le côté opposé à l'angle $\widehat{TBI}$ est [IT].
Donc $\cos \widehat{TBI} = \dfrac{BT}{BI}$, $\sin \widehat{TBI} = \dfrac{IT}{BI}$ et $\tan \widehat{TBI} = \dfrac{IT}{BT}$.

24 a. $\sin \widehat{RDO} = \dfrac{OR}{DR}$. **b.** $\cos \widehat{RDO} = \dfrac{OD}{DR}$.

c. $\tan \widehat{DRO} = \dfrac{OD}{OR}$. **d.** $\tan \widehat{RDO} = \dfrac{OR}{OD}$.

25 a. Le triangle TOC est rectangle en T donc, d'après le théorème de Pythagore :
$OC^2 = TO^2 + TC^2$
$6{,}5^2 = TO^2 + 5{,}2^2$
$TO^2 = 6{,}5^2 - 5{,}2^2 = 42{,}25 - 27{,}04$
$TO^2 = 15{,}21$
TO = 3,9 cm.
b. $\cos \widehat{TOC} = \dfrac{OT}{OC} = \dfrac{3{,}9}{6{,}5} = 0{,}6$

$\sin \widehat{TOC} = \dfrac{TC}{OC} = \dfrac{5{,}2}{6{,}5} = 0{,}8$

$\tan \widehat{TOC} = \dfrac{TC}{TO} = \dfrac{5{,}2}{3{,}9} = \dfrac{4}{3}$.

26 a. Le triangle MUR est rectangle en M donc, d'après le théorème de Pythagore :

$RU^2 = MR^2 + MU^2$
$7{,}5^2 = 6^2 + MU^2$
$MU^2 = 7{,}5^2 - 6^2 = 56{,}25 - 36$
$MU^2 = 20{,}25$
$MU = 4{,}5$ cm.

b. $\cos \widehat{MUR} = \dfrac{MU}{UR} = \dfrac{4{,}5}{7{,}5} = \dfrac{3}{5}$.

$\sin \widehat{MUR} = \dfrac{MR}{UR} = \dfrac{6}{7{,}5} = \dfrac{4}{5}$.

$\tan \widehat{MUR} = \dfrac{RM}{MU} = \dfrac{6}{4{,}5} = \dfrac{4}{3}$.

27 **a.** ③ **b.** ① **c.** ②

28 $\sin \widehat{RTS} = \dfrac{RS}{TS}$ c'est-à-dire $\sin 31° = \dfrac{7{,}2}{TS}$ soit

$TS = \dfrac{7{,}2}{\sin 31°}$. Donc $TS \approx 14$ cm.

29 $\sin \widehat{LJU} = \dfrac{LU}{JU}$ c'est-à-dire $\sin 32° = \dfrac{LU}{8{,}2}$ soit

$LU = 8{,}2 \times \sin 32°$. Donc $LU \approx 4{,}3$ cm.

30 **1. a.** [AD] est le côté opposé à l'angle $\widehat{AND}$.

b. $\sin \widehat{AND} = \dfrac{AD}{AN}$ c'est-à-dire $\sin 35° = \dfrac{AD}{12}$

soit $AD = 12 \times \sin 35°$. Donc $AD \approx 6{,}88$ m.

2. a. [ND] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{AND}$.

b. $\cos \widehat{AND} = \dfrac{ND}{AN}$ c'est-à-dire $\cos 35° = \dfrac{ND}{12}$

soit $ND = 12 \times \cos 35°$.
Donc $ND \approx 9{,}83$ m.

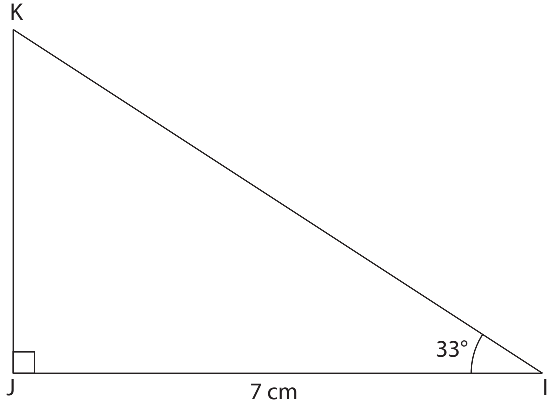
31 **a.** $\tan \widehat{VNE} = \dfrac{VE}{VN}$ c'est-à-dire $\tan 29° = \dfrac{VE}{5{,}8}$.

Ainsi $VE = 5{,}8 \times \tan 29°$ et $VE \approx 3{,}2$ cm.

b. $\cos \widehat{VNE} = \dfrac{VN}{EN}$ c'est-à-dire $\cos 29° = \dfrac{5{,}8}{EN}$.

Ainsi $EN = \dfrac{5{,}8}{\cos 29°}$ et $EN \approx 6{,}6$ cm.

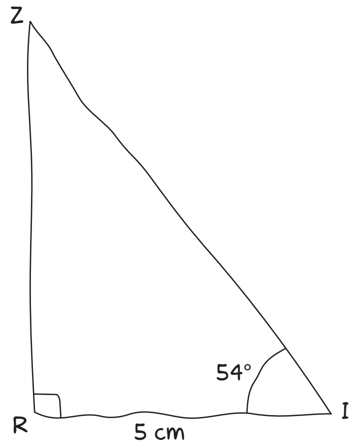
32 **a.**



b. $\cos \widehat{JIK} = \dfrac{IJ}{IK}$ c'est-à-dire $\cos 33° = \dfrac{7}{IK}$ et $IK = \dfrac{7}{\cos 33°}$.

Ainsi $IK \approx 8{,}3$ cm.

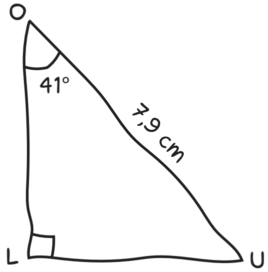
33 **a.**



b. $\tan \widehat{RIZ} = \dfrac{RZ}{RI}$ c'est-à-dire $\tan 54° = \dfrac{RZ}{5}$ et $RZ = 5\tan 54°$.

Ainsi $RZ \approx 6{,}9$ cm.

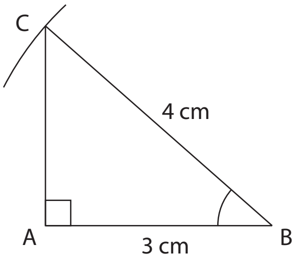
34 **a.**



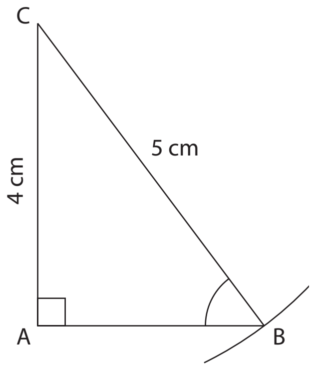
b. $\cos \widehat{LOU} = \dfrac{LO}{OU}$ c'est-à-dire $\cos 41° = \dfrac{LO}{7{,}9}$ et

$LO = 7{,}9 \times \cos 41°$. Ainsi $LO \approx 6$ cm.

35

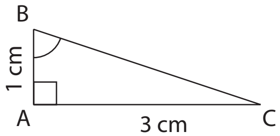


36



37 Impossible, car un sinus est toujours inférieur à 1.

38



39 **1.** $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{BC}{AC}$ c'est-à-dire $\cos 74° = \dfrac{3,8}{AC}$ et

$AC = \dfrac{3,8}{\cos 74°}$.

Ainsi $AC \approx 13,8$ cm.

2. a. Le triangle ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = BA^2 + BC^2$

$13,8^2 \approx BA^2 + 3,8^2$

$BA^2 \approx 13,8^2 - 3,8^2$

$BA^2 \approx 176$

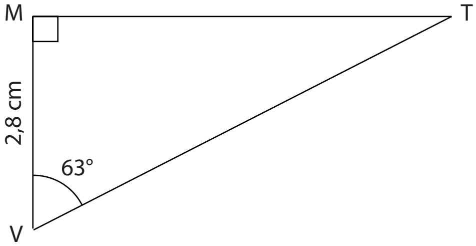
$BA \approx 13,3$ cm.

b. $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC}$ c'est-à-dire $\sin 74° \approx \dfrac{AB}{13,8}$ et

$AB \approx 13,8 \times \sin 74°$.

Ainsi $AB \approx 13,3$ cm.

40 **a.**



b. $\cos \widehat{MVT} = \dfrac{VM}{VT}$ c'est-à-dire $\cos 63° = \dfrac{2,8}{VT}$ et $VT = \dfrac{2,8}{\cos 63°}$.

Ainsi $VT \approx 6,2$ cm.

c. $\tan \widehat{MVT} = \dfrac{MT}{VM}$ c'est-à-dire $\tan 63° = \dfrac{MT}{2,8}$ et

$MT = 2,8 \times \tan 63°$.

Ainsi $MT \approx 5,5$ cm.

Donc : $VM + MT + VT \approx 2,8 + 5,5 + 6,2$.

Le périmètre du triangle MTV est environ 14,5 cm.

41 **a.** $\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$ c'est-à-dire $\tan 36° = \dfrac{3,5}{AC}$ et

$AC = \dfrac{3,5}{\tan 36°}$. Ainsi $AC \approx 4,82$ m.

b. $(BC \times AC) : 2 \approx (3,5 \times 4,82) : 2$.

Donc l'aire de ABC est environ 8,4 m^2.

42 **a.** Les angles $\widehat{DNJ}$ et $\widehat{ANG}$ sont opposés par le sommet, donc ils ont la même mesure.

b. $\sin \widehat{DNJ} = \dfrac{DJ}{NJ}$ et $\sin \widehat{ANG} = \dfrac{AG}{GN}$.

c. $\sin \widehat{DNJ} = \sin \widehat{ANG}$, donc $\dfrac{DJ}{NJ} = \dfrac{AG}{GN}$ soit $\dfrac{DJ}{7} = \dfrac{2}{5}$.

d. $DJ = 7 \times \dfrac{2}{5} = 2,8$ et $DJ = 2,8$ cm.

43 $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$ c'est-à-dire $\cos 40° = \dfrac{AB}{3}$ et

$AB = 3 \times \cos 40°$.

Ainsi $AB \approx 2,30$ m.

44 $\tan \widehat{IOH} = \dfrac{IH}{OI}$ c'est-à-dire $\tan 76,8° = \dfrac{IH}{5}$ et

$IH = 5 \times \tan 76,8°$.

Ainsi $IH \approx 21,32$ m.

$BH = BI + IH$ donc $BH \approx 1,70 + 21,32$ soit $BH \approx 23,02$ m.

45 $\tan \widehat{POH} = \dfrac{PH}{OP}$ c'est-à-dire $\tan 79,5° = \dfrac{PH}{100}$ et

$PH = 100 \times \tan 79,5°$.

Ainsi $PH \approx 539,55$ m.

$1,65 + 539,55 = 541,20$.

Donc la hauteur de cette tour est environ 541 m.

46 **a.** $\sin \widehat{HAS} = \dfrac{SH}{AS}$ c'est-à-dire $\sin 5° = \dfrac{SH}{2\,350}$ et

$SH = 2\,350 \times \sin 5°$.

Ainsi $SH \approx 204,82$ m.

b. $625 + 204,82 = 829,82$.

L'altitude du point S est environ 830 m.

47 **1.** Le triangle OAC est rectangle en O, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = OA^2 + OC^2$

$AC^2 = 50^2 + 100^2$

$AC^2 = 2\,500 + 10\,000$

$AC^2 = 12\,500$.

$AC = \sqrt{12\,500}$ soit $AC \approx 112$ m.

2. a. $\tan \alpha = \dfrac{OA}{OC}$.

b. $\tan \alpha = \dfrac{50}{100} = 0,5$ et $\alpha \approx 26,6°$.

c. $\cos \alpha = \dfrac{OC}{AC}$.

d. $\cos 26,6° \approx \dfrac{100}{AC}$ et $AC \approx \dfrac{100}{\cos 26,6°}$.

Ainsi $AC \approx 112$ m.

48 **a.** $\tan \widehat{BOC} = \dfrac{BC}{OB}$ c'est-à-dire $\tan 59° = \dfrac{BC}{85}$ et

$BC = 85 \times \tan 59°$.

Ainsi $BC \approx 141,5$ m.

b. $AC = AB + BC$

$AC \approx 1,5 + 141,5$

$AC \approx 143$ m.

La cathédrale a une hauteur d'environ 143 m.

49 **a.** $\cos \widehat{RMT} = \dfrac{RM}{TM} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

Donc $\widehat{RMT} \approx 37°$.

b. $\widehat{RTM} = 90° - \widehat{RMT}$

$\widehat{RTM} \approx 90° - 37°$ soit $\widehat{RTM} \approx 53°$.

50 **1.** Le triangle ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore :

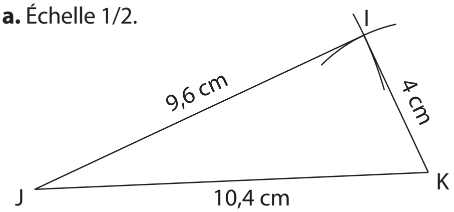
$AC^2 = BA^2 + BC^2$

$AC^2 = 2{,}7^2 + 3{,}6^2$
$AC^2 = 7{,}29 + 12{,}96$
$AC^2 = 20{,}25$
$AC = 4{,}5$ cm.

2. a. $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2{,}7}{4{,}5} = 0{,}6.$

Donc $\widehat{BAC} \approx 53°$.
b. $\widehat{BCA} = 90° - \widehat{BAC}$
$\widehat{BCA} \approx 90° - 53°$ soit $\widehat{BCA} \approx 37°$.

51 **a.** Échelle 1/2.



b. $JK^2 = 10{,}4^2 = 108{,}16$
$IJ^2 + IK^2 = 92{,}16 + 16 = 108{,}16.$
$JK^2 = IJ^2 + IK^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I.

c. • $\cos \widehat{IJK} = \dfrac{JI}{JK} = \dfrac{9{,}6}{10{,}4}.$

Donc $\widehat{IJK} \approx 23°$.
• $\widehat{IKJ} = 90° - \widehat{IJK}$.
$\widehat{IKJ} \approx 90° - 23°$ soit $\widehat{IKJ} \approx 67°$.

52 $\cos \widehat{RMI} = \dfrac{MI}{MR} = \dfrac{7{,}2}{10} = 0{,}72.$

Donc $\widehat{RMI} \approx 44°$.
C'est Fatou qui a raison.

53 **a.** $\tan \widehat{HAC} = \dfrac{HC}{HA} = \dfrac{0{,}8}{2{,}8}.$
Donc $\widehat{HAC} \approx 16°$.

b. $\tan \widehat{HAB} = \dfrac{HB}{HA} = \dfrac{2{,}3}{2{,}8}.$

Donc $\widehat{HAB} \approx 39°$.
c. $\widehat{CAB} = \widehat{HAB} - \widehat{HAC}$
$\widehat{CAB} \approx 39° - 16°$ soit $\widehat{CAB} \approx 23°$.

54 $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3.$

Donc $\widehat{ABC} \approx 73°$.
Cette rampe est donc conforme.

55 **a.** $CL = CE - LE = 5{,}60 - 0{,}65 = 4{,}95$.

$\cos \widehat{HCL} = \dfrac{CH}{CL} = \dfrac{1{,}2}{4{,}95}.$

Donc $\widehat{HCL} \approx 76°$.

b. $\sin \widehat{HCL} = \dfrac{HL}{CL}$ c'est-à-dire $\sin 76° \approx \dfrac{HL}{4{,}95}$ et

$HL \approx 4{,}95 \times \sin 76°$.
Ainsi $HL \approx 4{,}80$ m.

56 **a.** Le triangle BIC est rectangle en I donc, d'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = IB^2 + IC^2$
$BC^2 = 11^2 + 3{,}66^2$
$BC^2 = 134{,}3956$
$BC \approx 11{,}59$ m.

b. $\cos \widehat{IBC} = \dfrac{IB}{BC}$ donc $\cos \widehat{IBC} \approx \dfrac{11}{11{,}59}$ et $\widehat{IBC} \approx 18{,}3°$.
Or, $\widehat{ABC} = 2 \times \widehat{IBC}$ donc $\widehat{ABC} \approx 37°$.

57 $\sin \widehat{a} = \dfrac{2\,103 - 1\,349}{2\,595} = \dfrac{754}{2\,595}.$

Donc $\widehat{a} \approx 17°$.

Je m'évalue à mi-parcours

58 **c.** **59** **b.** **60** **b.** **61** **c.**

Avec un logiciel

62 **2.** $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a}{1} = a.$

63 **2.** On note $(x_C ; y_C)$ les coordonnées du point C.

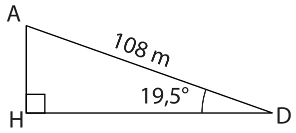
• $\cos \widehat{AOC} = \dfrac{DO}{OC} = \dfrac{x_c}{1} = x_c.$

• $\sin \widehat{AOC} = \dfrac{DC}{OC} = \dfrac{y_c}{1} = y_c.$

J'utilise mes compétences

64 $\sin \widehat{ADH} = \dfrac{AH}{AD}$ c'est-à-dire

$\sin 19{,}5° = \dfrac{AH}{108}$ et



$AH = 108 \times \sin 19{,}5°$.
Donc $AH \approx 36$ m.
La différence d'altitude entre le départ et l'arrivée est environ 36 m.

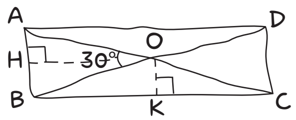
65 **a.** Dans le triangle ABH rectangle en H :

$\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6.$

b. Avec le théorème de Phythagore, $BH = 8$ cm.

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{10}{BC}$ donc $BC = \dfrac{100}{8}$, $BC = 12{,}5$ cm.

66 • Dans un rectangle, les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.



Donc $OA = OB = 4{,}5$ cm.
• Dans le triangle AOB isocèle en O, la hauteur [OH] est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$, donc $\widehat{AOH} = 15°$.
• Dans le triangle AOH rectangle en H :

$\sin \widehat{AOH} = \dfrac{AH}{OA}$ c'est-à-dire $\sin 15° = \dfrac{AH}{4{,}5}$ et

$AH = 4{,}5 \times \sin 15°$.
Donc $AB = 2 \times AH = 2 \times 4{,}5 \times \sin 15° = 9 \times \sin 15°$.
Ainsi $AB \approx 2{,}3$ cm.
• $\widehat{BOK} = 90° - 15° = 75°$.

Dans le triangle BOK rectangle en K :

$\sin \widehat{BOK} = \dfrac{BK}{OB}$ c'est-à-dire $\sin 75° = \dfrac{BK}{4,5}$ et

$BK = 4,5 \times \sin 75°$.

Donc $BC = 2 \times BK = 9 \times \sin 75°$.

Ainsi $BC \approx 8,7$ cm.

● *Conclusion* : ce rectangle a pour dimensions environ 2,3 cm et 8,7 cm.

67 ● Dans le triangle OBC rectangle en B :

$\tan \widehat{BOC} = \dfrac{BC}{BO}$ c'est-à-dire $\tan 53° = \dfrac{BC}{15}$ et

$BC = 15 \times \tan 53°$.

Ainsi $BC \approx 19,9$ m.

● Dans le triangle OBA rectangle en B :

$\tan \widehat{BOA} = \dfrac{BA}{BO}$ c'est-à-dire $\tan 24° = \dfrac{BA}{15}$ et

$BA = 15 \times \tan 24°$.

Ainsi $BA \approx 6,7$ m.

● $AC = AB + BC$

$AC \approx 19,9 + 6,7$

$AC \approx 26,6$ m.

La hauteur du mât est environ 26,6 m.

68 ● Dans le triangle ACD rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = DA^2 + DC^2$

$AC^2 = 2 \times 5^2 = 50$

$AC = \sqrt{50}$ cm.

● Dans le triangle ACG rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$AG^2 = AC^2 + CG^2$

$AG^2 = 50 + 5^2$

$AG^2 = 75$

$AG = \sqrt{75}$ cm.

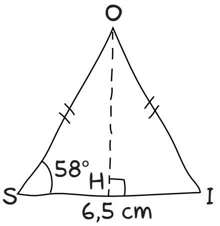
● Dans le triangle ACG rectangle en C,

$\cos \widehat{CAG} = \dfrac{AC}{AG} = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{75}}$.

Donc $\widehat{CAG} \approx 35°$.

69 ● [OH] est une hauteur du triangle isocèle SOI. C'est aussi la médiatrice de [SI] et donc H est le milieu de [SI].

● Dans le triangle SOH rectangle en H :



$\tan \widehat{ISO} = \dfrac{OH}{SH}$ c'est-à-dire

$\tan 58° = \dfrac{OH}{3,25}$ et $OH = 3,25 \times \tan 58°$.

Ainsi $OH \approx 5,2$ cm.

● $(OH \times SI) : 2 \approx (5,2 \times 6,5) : 2$

$(OH \times SI) : 2 \approx 16,9$.

L'aire de ce triangle est environ 16,9 cm^2.

70 **a.** ● Dans le triangle ABD rectangle en B,

$\sin \widehat{ADB} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

● Dans le triangle CDE rectangle en E :

$\sin \widehat{ADB} = \dfrac{CE}{CD} = \dfrac{2}{CD}$.

b. $\dfrac{2}{CD} = \dfrac{2}{3}$ donc $CD = 3$ cm.

c. ● Dans le triangle CDE rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore :

$CD^2 = EC^2 + ED^2$

$3^2 = 2^2 + ED^2$

$ED^2 = 3^2 - 2^2 = 5$

$ED = \sqrt{5}$ cm soit $ED \approx 2,2$ cm.

● Dans le triangle ABD rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$AD^2 = BA^2 + BD^2$

$6^2 = 4^2 + BD^2$

$BD^2 = 6^2 - 4^2 = 20$

$BD = \sqrt{20}$ cm soit $BD \approx 4,5$ cm.

● $BC = BD - CD$.

$BC \approx 4,5 - 3$ soit $BC \approx 1,5$ cm.

71 ● $55° + 35° = 90°$ donc le triangle ABI est rectangle en I.

● $\cos \widehat{ABI} = \dfrac{BI}{BA}$ c'est-à-dire $\cos 55° = \dfrac{BI}{800}$ et

$BI = 800 \times \cos 55°$.

Ainsi $BI = 458,9$ m.

● $\cos \widehat{IAB} = \dfrac{AI}{AB}$ c'est-à-dire $\cos 35° = \dfrac{AI}{800}$ et

$AI = 800 \times \cos 35°$.

Ainsi $AI \approx 655,3$ m.

72 ● Dans le triangle ABC rectangle en A :

$\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$ c'est-à-dire $\tan 40° = \dfrac{AC}{7}$ et

$AC = 7 \times \tan 40°$.

● Dans le triangle ACD rectangle en C :

$\cos \widehat{CAD} = \dfrac{AC}{AD}$ c'est-à-dire $\cos 40° = \dfrac{7 \times \tan 40°}{AD}$.

Ainsi $AD = \dfrac{7 \times \tan 40°}{\cos 40°}$.

Donc Théo a raison.

73 **a.** *Vrai.* En effet, le cosinus ou le sinus d'un angle est le quotient de la longueur d'un côté par une longueur plus grande, celle de l'hypoténuse.

b. *Faux.* En effet : $\tan 28° \approx 0,5317$ et $\dfrac{12,5}{23,5} \approx 0,5319$,

donc $\tan 28° \neq \dfrac{12,5}{23,5}$.

c. *Vrai.* En effet, $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$ c'est-à-dire $\cos 60° = \dfrac{AB}{8}$

soit $AB = 8 \times \cos 60° = 4$.

Ainsi $AB = 4$ cm.

74 **a.** ● Dans le triangle GHM rectangle en H :

$\cos \widehat{HMG} = \dfrac{MH}{MG}$ c'est-à-dire $\cos 48° = \dfrac{MH}{8,5}$ et

$MH = 8{,}5 \times \cos 48°$.
Ainsi $MH \approx 5{,}688$ km.

- Dans le triangle GHM rectangle en H :

$\sin \widehat{HMG} = \dfrac{GH}{MG}$ c'est-à-dire $\sin 48° = \dfrac{GH}{8{,}5}$ et

$GH = 8{,}5 \times \sin 48°$.
Ainsi $GH \approx 6{,}317$ km.

b. $\widehat{MGH} = 90° - 48° = 42°$.
$\widehat{HGT} = \widehat{MGT} - \widehat{MGH} = 118° - 42° = 76°$.

c. Dans le triangle GHT rectangle en H :

$\tan \widehat{HGT} = \dfrac{HT}{GH}$ c'est-à-dire $\tan 76° = \dfrac{HT}{8{,}5 \times \sin 48°}$ et

$HT = 8{,}5 \times \sin 48° \times \tan 76°$.
$HT \approx 25{,}335$ km.

- $MT = MH + HT$

$MT \approx 5{,}688 + 25{,}335$
$MT \approx 31$ km.

75 **1. a.** $\widehat{ABH} = 60°$.

$\cos \widehat{ABH} = \dfrac{HB}{AB} = \dfrac{HB}{1} = HB = \dfrac{1}{2}$ car H est le milieu de [BC].

b. $\sin \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AH}{1} = AH$.

Or, d'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 = HA^2 + HB^2$

$1^2 = HA^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$HA^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

$HA = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$.

Or $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \dfrac{3}{4}$ donc $HA = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\tan \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{HB} = \sqrt{3}$.

2. a. $\widehat{BAH} = 90° - 60° = 30°$.

$\sin \widehat{BAH} = \dfrac{HB}{AB} = \dfrac{HB}{1} = HB = \dfrac{1}{2}$.

b. $\cos \widehat{BAH} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AH}{1} = AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\tan \widehat{BAH} = \dfrac{HB}{AH} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{3}$, on obtient $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

76 **a.** Le triangle ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = BA^2 + BC^2$
$AC^2 = 1^2 + 1^2$
$AC^2 = 2$
$AC = \sqrt{2}$.

b. $\widehat{BAC} = 45°$.

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{2}$, on obtient $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

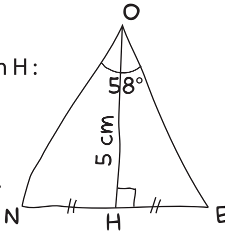
c. $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{1} = 1$.

77 • **Traduction**

ONE est un triangle isocèle avec ON = OE et où H est le pied de la hauteur issue de O.
On sait que $\widehat{ONE} = 58°$ et OH = 5 cm.
Calculer l'aire du triangle ONE en cm^2. Donner une valeur approchée au centième près.

• **Solution**



- $\widehat{HOE} = 58° : 2 = 29°$.

Dans le triangle OHE rectangle en H :

$\tan \widehat{HOE} = \dfrac{HE}{OH}$ c'est-à-dire

$\tan 29° = \dfrac{HE}{5}$ et $HE = 5 \times \tan 29°$.

Donc $NE = 2 \times HE = 10 \tan 29°$.

- $(OH \times NE) : 2 = (5 \times 10 \times \tan 29°) : 2$

$= 25 \times \tan 29°$
$\approx 13{,}86$ cm^2.

L'aire du triangle ONE est environ 13,86 cm^2.

78 **a.** $\tan \widehat{BCA} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$.

Donc $\widehat{BCA} \approx 6°$.

b. $\dfrac{1}{5} = 0{,}2 = 20\ \%$.

Le panneau ② indique une pente plus forte.

79 $\widehat{PAH} = 90° - 55° = 35°$ et $AH = 5{,}8 : 2 = 2{,}90$ m.

Dans le triangle PAH rectangle en H :

$\cos \widehat{PAH} = \dfrac{AH}{AP}$ c'est-à-dire $\cos 35° = \dfrac{2{,}9}{AP}$ et $AP = \dfrac{2{,}9}{\cos 35°}$.

Ainsi $AP \approx 3{,}54$ m.
Les deux portes ont une longueur d'environ 3,54 m.

80 **a.** Dans le triangle ABC rectangle en B :

$\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{BA}$ c'est-à-dire $\tan 22° = \dfrac{BC}{100}$ et

$BC = 100 \times \tan 22°$.

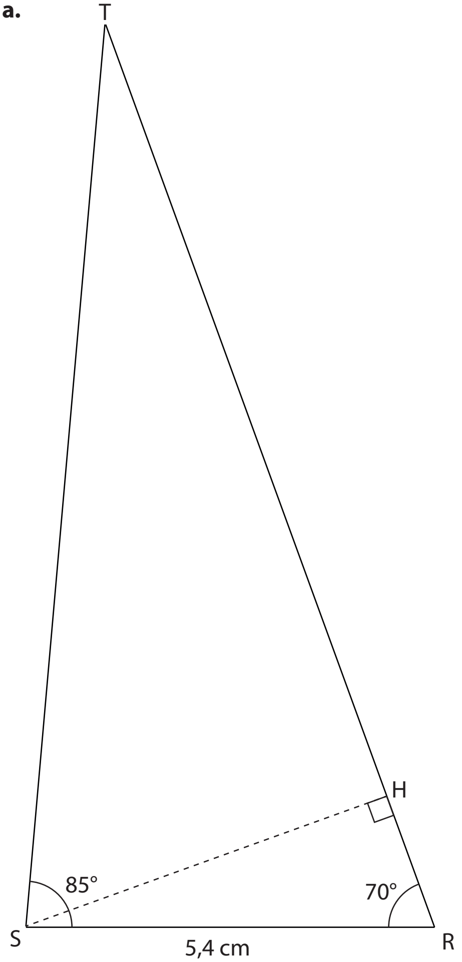
- Dans le triangle ABD rectangle en B :

$\tan \widehat{BAD} = \dfrac{BD}{BA}$ c'est-à-dire $\tan 60° = \dfrac{BD}{100}$ et

$BD = 100 \times \tan 60°$.

b. $DC = 100 \times \tan 60° - 100 \times \tan 22°$
$DC \approx 132{,}8$ m.
La longueur de la rivière est environ 132,8 m.

81 **a.**



b. $\widehat{STR} = 180° - (85° + 70°) = 25°$.

● Dans le triangle SRH rectangle en H :

$\cos \widehat{SRH} = \dfrac{HR}{RS}$ c'est-à-dire $\cos 70° = \dfrac{HR}{5{,}4}$.

Ainsi $HR = 5{,}4 \times \cos 70°$.

$\sin \widehat{SRH} = \dfrac{SH}{RS}$ c'est-à-dire $\sin 70° = \dfrac{SH}{5{,}4}$.

Ainsi $SH = 5{,}4 \times \sin 70°$.

● Dans le triangle SHT rectangle en H :

$\tan \widehat{STR} = \dfrac{SH}{TH}$ c'est-à-dire $\tan 25° = \dfrac{5{,}4 \times \sin 70°}{TH}$.

Donc $TH = \dfrac{5{,}4 \times \sin 70°}{\tan 25°}$.

Or, $TR = HR + TH$.

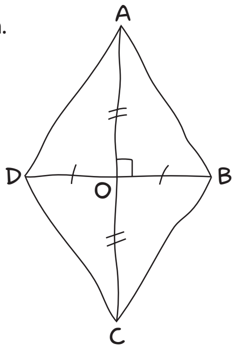
Donc $TR = 5{,}4 \times \cos 70° + \dfrac{5{,}4 \times \sin 70°}{\tan 25°}$ et $TR \approx 12{,}7$ cm.

● Dans le triangle STH rectangle en H :

$\sin \widehat{STR} = \dfrac{SH}{ST}$ c'est-à-dire $\sin 25° = \dfrac{5{,}4 \times \sin 70°}{ST}$ et

$ST = \dfrac{5{,}4 \times \sin 70°}{\sin 25°}$ soit $ST \approx 12$ cm.

82 $OB = 98{,}5$ cm et $OA = 155$ cm.



● Dans le triangle OAB rectangle en O :

$\tan \widehat{OAB} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{98{,}5}{155}$.

Donc $\widehat{OAB} \approx 32°$.

Donc $\widehat{DAB} = 2 \times \widehat{OAB}$

donc $\widehat{DAB} \approx 64°$.

● $\widehat{OBA} = 90° - \widehat{OAB}$

$\widehat{OBA} \approx 90° - 32° \approx 58°$.

Or $\widehat{ABC} = 2 \times \widehat{OBA}$ et $\widehat{ABC} \approx 116°$.

83 ● Dans le triangle AHS rectangle en H :

$\tan \widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH}$ c'est-à-dire $\tan 58{,}5° = \dfrac{h}{AH}$

soit $AH = \dfrac{h}{\tan 58{,}5°}$.

● Dans le triangle BHS rectangle en H :

$\tan \widehat{SBH} = \dfrac{SH}{BH}$ c'est-à-dire $\tan 35{,}1° = \dfrac{h}{BH}$

soit $BH = \dfrac{h}{\tan 35{,}1°}$.

● $AB = BH - AH = \dfrac{h}{\tan 35{,}1°} - \dfrac{h}{\tan 58{,}5°}$.

Or, $AB = 18{,}7$ m, donc $\left(\dfrac{h}{\tan 35{,}1°} - \dfrac{h}{\tan 58{,}5°}\right) = 18{,}7$

et $h = \dfrac{18{,}7}{\dfrac{1}{\tan 35{,}1°} - \dfrac{1}{\tan 58{,}5°}}$.

Ainsi $h \approx 23$ m.

Dossier Brevet

84 **a.** $RF = SF - RS = 18 - 1{,}5$, donc $RF = 16{,}5$ m.

b. Dans le triangle FPR rectangle en R :

$\tan \widehat{FPR} = \dfrac{RF}{RP} = \dfrac{16{,}5}{10} = 1{,}65$.

Donc $\widehat{FPR} \approx 59°$.

c. $\cos \widehat{FPR} = \dfrac{RP}{PF}$ c'est-à-dire $\cos 59° \approx \dfrac{10}{PF}$ et $PF \approx \dfrac{10}{\cos 59°}$.

Ainsi $PF \approx 19{,}4$ m.

Donc l'échelle sera assez longue.

85 **a.** Dans le triangle BCD rectangle en D :

$\cos \widehat{CBD} = \dfrac{BD}{BC}$ c'est-à-dire $\cos 60° = \dfrac{4}{BC}$ et $BC = \dfrac{4}{\cos 60°}$.

Ainsi $BC = 8$ cm.

b. $\sin \widehat{CBD} = \dfrac{CD}{BC}$ c'est-à-dire $\sin 60° = \dfrac{CD}{8}$ et

$CD = 8 \times \sin 60°$.

Ainsi $CD \approx 6{,}9$ cm.

c. Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = BC^2 + BA^2$
$AC^2 = 8^2 + 6^2$
$AC^2 = 64 + 36 = 100$
$AC = 10$ cm.

d. $\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{8}{6} \approx 1{,}33$.

e. Donc $\widehat{BAC} \approx 53°$.

86 **a.** $t = 0{,}000\,15$ s
$v = 300\,000$ km/s
$d = v \times t = 0{,}000\,15 \times 300\,000 = 45$.
L'avion est à 45 km de la tour.

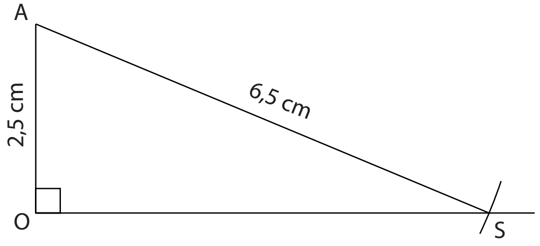
b. $\sin \widehat{ARI} = \dfrac{AI}{RA}$ c'est-à-dire $\sin 5° = \dfrac{AI}{45}$ et $AI = 45 \times \sin 5°$.
Ainsi $AI \approx 3{,}92$ km.
Soit $AI \approx 3\,920$ m.
L'avion a une altitude d'environ 3 920 m.

87 **1.** SAB et SAD sont des triangles rectangles en A.
Dans le triangle SAB :

2. a. $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{4}{8{,}2}$.
Donc $\widehat{SBA} \approx 26°$.

b. Dans le triangle SAD :
$\cos \widehat{ASD} = \dfrac{SA}{SD}$ c'est-à-dire $\cos 30° = \dfrac{4}{SD}$ et $SD = \dfrac{4}{\cos 30°}$.
Ainsi $SD \approx 4{,}6$ cm.

88 **a.** SAO est un triangle rectangle en O.

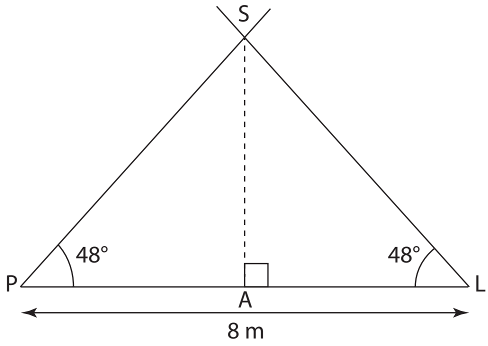


b. Dans le triangle rectangle SAO, d'après le théorème de Pythagore :
$AS^2 = OA^2 + OS^2$
$6{,}5^2 = 2{,}5^2 + OS^2$
$OS^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2$
$OS^2 = 36$
$OS = 6$ cm.

c. $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 2{,}5^2 \times 6 = 12{,}5\pi$
$\mathcal{V} \approx 39{,}3$ cm^3.

d. $\tan \widehat{ASO} = \dfrac{OA}{SO} = \dfrac{2{,}5}{6}$.
Donc $\widehat{ASO} \approx 23°$.

89 **1. a.** Échelle 3/4.



b. Il semble que $SA \approx 4{,}4$ m.

2. a. PSL est un triangle isocèle en S. Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiatrice du côté opposé, donc A est le milieu de [PL].

b. Dans le triangle PAS rectangle en A :
$\tan \widehat{APS} = \dfrac{AS}{AP}$ c'est-à-dire $\tan 48° = \dfrac{AS}{4}$ et
$AS = 4 \times \tan 48°$.
Ainsi $AS \approx 4{,}4$ m.

90 **1.** Dans le triangle ABD rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :
$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$50^2 = 40^2 + AD^2$
$AD^2 = 50^2 - 40^2 = 900$
$AD = 30$ cm.

2. $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times AB \times AD \times SO$

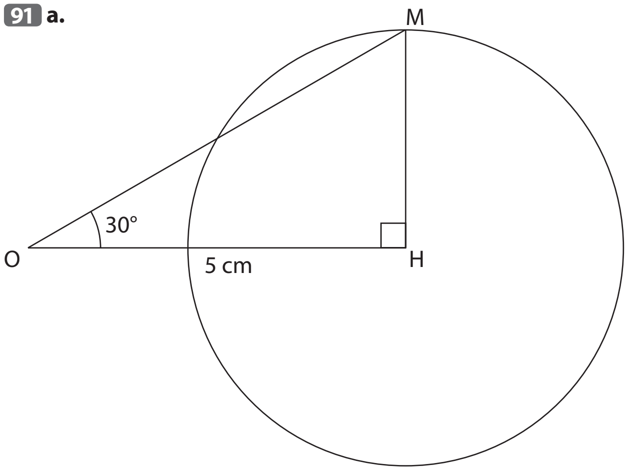
$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 40 \times 30 \times 81$

$\mathcal{V} = 32\,400$ cm^3.

3. a. $AO = AC : 2 = 50 : 2 = 25$ cm.
$\tan \widehat{SAO} = \dfrac{SO}{AO} = \dfrac{81}{25}$

b. Donc $\widehat{SAO} \approx 73°$.

91 **a.**



b. $\tan \widehat{HOM} = \dfrac{HM}{OH}$ c'est-à-dire $\tan 30° = \dfrac{HM}{5}$ et

$HM = 5 \times \tan 30°$.

Ainsi $HM \approx 2,9$ cm.

92 **a.** $\tan \widehat{BCD} = \dfrac{BD}{CD}$ c'est-à-dire $\tan 4,3° = \dfrac{BD}{29}$ et

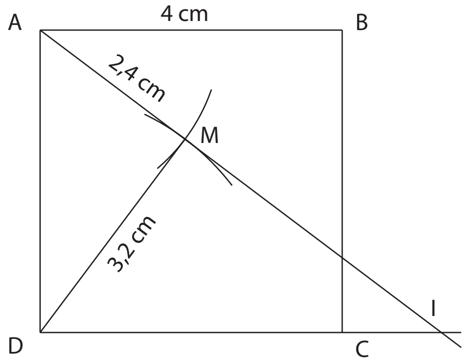
$BD = 29 \times \tan 4,3°$.

Ainsi $BD \approx 2,2$ km.

b. $20\,\% \times AB = CD$ c'est-à-dire $0,2 \times AB = 29$ soit $AB = \dfrac{29}{0,2}$.

Ainsi $AB = 145$ km.

93 **a.**



b. $AD^2 = 4^2 = 16$

$MA^2 + MD^2 = 2,4^2 + 3,2^2 = 16$.

$AD^2 = MA^2 + MD^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AMD est rectangle en M.

c. $\tan \widehat{DAM} = \dfrac{DM}{AM} = \dfrac{3,2}{2,4}$.

Donc $\widehat{DAM} \approx 53°$.

d. Dans le triangle ADI rectangle en D :

$\tan \widehat{DAI} = \dfrac{DI}{AD}$ c'est-à-dire $\tan 53° \approx \dfrac{DI}{4}$ et $DI \approx 4 \times \tan 53°$.

Ainsi $DI \approx 5,3$ cm.

94 • Dans le triangle DST rectangle en S, d'après le théorème de Pythagore :

$DT^2 = SD^2 + ST^2$

$50,2^2 = SD^2 + 6^2$

$SD^2 = 50,2^2 - 6^2 = 2\,484,04$

$SD \approx 49,8$ cm.

La longueur de l'horizontale est inférieure à 0,5 m.

• $\sin \widehat{TDS} = \dfrac{TS}{DT} = \dfrac{6}{50,2}$.

Donc $\widehat{TDS} \approx 6,9°$.

$\widehat{TDS} < 7°$, donc la rampe est conforme à la norme.

95 **a.** Dans le triangle PHL rectangle en P :

$\tan \widehat{PHL} = \dfrac{PL}{PH}$ c'est-à-dire $\tan 40° = \dfrac{PL}{4}$ et $PL = 4 \times \tan 40°$.

Ainsi $PL \approx 3,4$ m.

b. Dans le triangle MFC rectangle en C :

$\tan \widehat{MFC} = \dfrac{MC}{FC}$ c'est-à-dire $\tan 33° = \dfrac{MC}{5}$ et

$MC = 5 \times \tan 33°$.

Ainsi $MC \approx 3,2$ m.

Or, $PL + MC = PM + ML + ML + LC$

$= PC + ML$.

Donc $3,4 + 3,2 \approx 5,5 + ML$

soit $ML \approx 3,4 + 3,2 - 5,5$

$ML \approx 1,1$ m.

c. $LC \approx 5,5 - 3,4$ soit $LC \approx 2,1$ m.

$\tan \widehat{CFM} = \dfrac{LC}{FC}$ soit $\tan \widehat{CFM} \approx \dfrac{2,1}{5}$.

Donc $\widehat{CFM} \approx 25°$.

Étudier la logique algorithmique d'un programme

CHAPITRE 15

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

❶ Le point sur le début du cycle 4

● En classe de 5e, les élèves ont abordé l'étude du logiciel Scratch et réalisé leurs premières animations.
On a remarqué que l'exécution d'un programme peut être déclenchée par un événement et que des scripts peuvent se dérouler en parallèle.
On a également introduit la notion de sous-programme afin de structurer le travail de programmation.

● En classe de 4e, les élèves ont programmé à l'aide des structures de contrôle : instructions conditionnelles et boucles.
Dans les programmes, ils ont également rencontré la notion de variable informatique.

❷ Les activités

Activité 1

Cette activité propose la réalisation d'un jeu de tir.
Elle permet de revoir les notions de programmation rencontrées en 5e et en 4e, en particulier la programmation événementielle et les structures de contrôle.

Activité 2

L'objectif de l'activité est d'introduire la notion d'algorithme.
On distingue ici la mise au point de l'algorithme et le codage de cet algorithme dans un langage de programmation.
L'algorithme décrit la démarche logique du programme et sa mise au point doit, le plus souvent, précéder sa traduction dans un langage informatique.

Activité 3

Les élèves ont déjà rencontré des variables de type numérique et chaîne de caractères.
Le but de cette activité est de découvrir le type liste du langage Scratch et de montrer l'utilité des variables de ce type dans l'écriture d'un programme.
Dans cette activité, le programme est également décrit par un algorithme.

Activité 4

Dans cette activité, on distingue les étapes d'un programme de simulation d'une expérience aléatoire et on résout chacun des sous-problèmes rencontrés. Cette démarche permet une programmation claire et structurée.

Activité 5

Cette activité permet une synthèse des notions de programmation, elle aborde une question connue en informatique : la gestion d'un répertoire.
Elle permet d'évoquer le fait que certains sous-programmes réalisent des fonctions usuelles et correspondent à des schémas classiques de programmation.

❸ Compléments

Variables dans un programme

On emploie des variables par exemple dans les programmes des exercices 2, 3, 4 et 5.
Dans les exercices 4 et 5, l'une de ces variables est de type liste.

Structures de contrôle

On revoit les structures de contrôle (boucles et tests), par exemple dans les exercices 1 à 6.

Algorithmes

Dans les exercices 4 et 5, on étudie le rôle d'un algorithme avant de le coder dans le langage Scratch.

Synthèse

La programmation d'un jeu à l'exercice 6 est un travail de synthèse.

CORRIGÉS

Activités

Activité 1

❶ **b.** Les premières instructions préparent le lutin : on choisit le costume « witch », on l'oriente vers la droite, on fixe un sens de rotation afin que la sorcière ne bascule pas et on définit sa position de départ dans la scène. Lorsque ces conditions sont remplies, on montre le lutin.

La « Sorcière » se déplace, rebondit si elle atteint le bord jusqu'à ce qu'elle soit touchée par le lutin « Balle ».

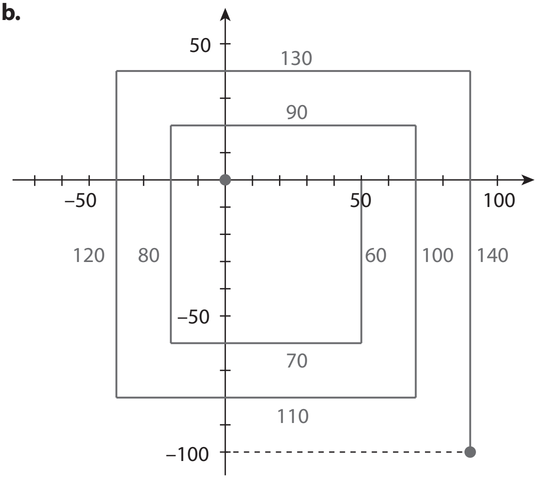
❷ **b.** Lorsque la touche espace est tapée, le message « Tir » est envoyé à tous les lutins de l'animation.

❸ **a.** Au départ, le lutin « Balle » a pour abscisse x : l'abscisse du lutin « Canon » et pour ordonnée y : – 135.
Deux conditions arrêtent le mouvement de ce lutin :
– soit il touche le lutin « Sorcière » ;
– soit son ordonnée dépasse 170.
S'il touche le lutin « Sorcière », le lutin « Balle » envoie le message « Touché ! », sinon il envoie le message « Raté ! ».

Activité 2

❶ **a.** La variable L est initialisée à la valeur 50. Dans la boucle, elle prend les valeurs successives : 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140 et 150.

b.



❷ **b.** Pour construire plus de segments de la spirale, on répète la boucle un plus grand nombre de fois.

❸

Activité 3

❶ **a.** Ce programme permet d'initialiser la liste T. On saisit dans la boucle du programme les dix nombres de la liste T.

❷ **a.**

k		1	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
k^e élément de la liste T		8	4	**9**	**6**	**5**	**7**	**2**	**8**	**3**	**6**	
Somme	0	8	12	**21**	**27**	**32**	**39**	**41**	**49**	**52**	**58**	

b. À la fin de l'algorithme, la variable Somme représente la somme des éléments de la liste T.

Activité 4

❸ **a.** On initialise la variable Effectif à 0 et on donne le nombre N de simulations voulues.

À l'aide d'une boucle, on répète les N simulations de l'expérience :

– on lance trois fois le dé ;

– on détermine le plus grand des trois nombres obtenus ;

– si le plus grand des trois nombres obtenus est 6, alors on augmente la variable Effectif de 1.

À la sortie de la boucle, le lutin énonce la fréquence de réalisation de l'événement E.

b. Il s'agit donc de la fréquence de réalisation de l'événement E.

Activité 5

❷ **a.**

❸ **a.** Dans ce sous-programme, on parcourt la liste des pays, k représente à un moment donné le numéro (ou l'indice) du pays.

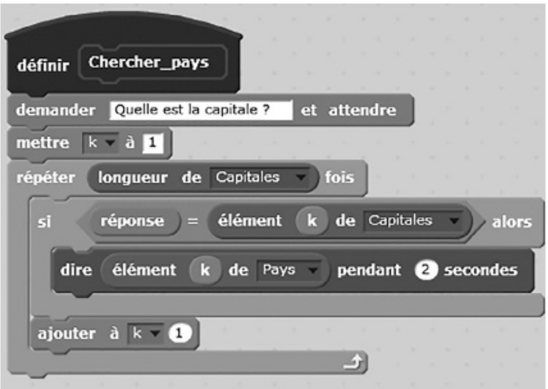
« élément k de Pays » représente le pays dont le numéro est k.

b. On parcourt la liste des pays jusqu'à ce que l'on trouve le pays cherché.

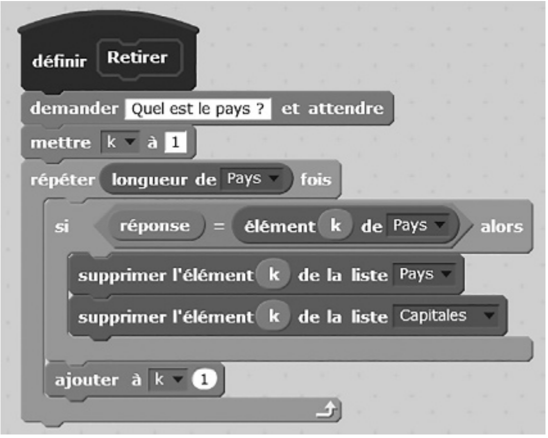
Si le pays est trouvé, le lutin énonce la capitale de ce pays.

Le pays et la capitale sont repérés par le même numéro.

❹ **a.**



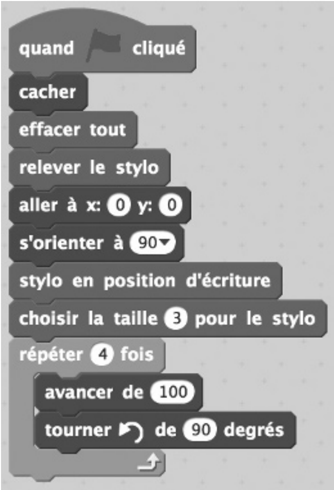
b.



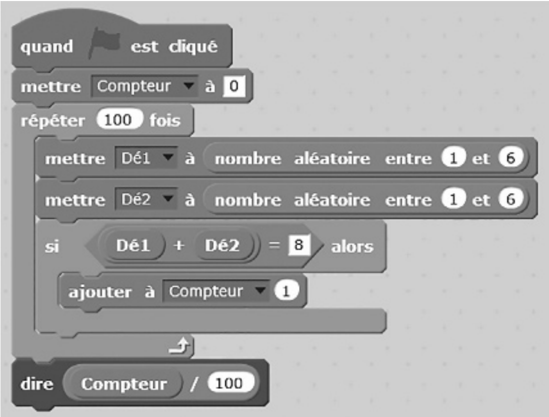
d. On peut compléter le répertoire avec d'autres listes : population, PIB, … des pays concernés. On peut également prévoir, par exemple, un programme de tri par ordre alphabétique des pays du répertoire.

Je m'entraîne

1 Voici le script de Zoé :



2 **a.** Voici le script complété :

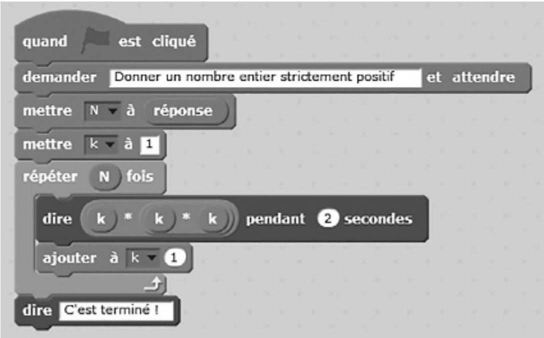


3 **1. a.**

k	1	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
dire…	1	4	**9**	**16**	**25**	**36**	**C'est terminé**

b. Pour un nombre entier strictement positif N donné au début, le lutin énonce tous les carrés successifs 1^2, 2^2, 3^2, … jusqu'à N^2.

2. a.

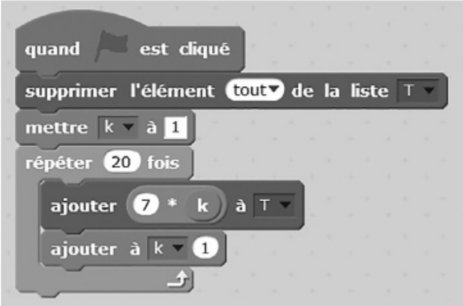


4 **1. a.** La liste T contient tous les multiples de 2 : 2, 4, 6, 8, … jusqu'à 100.

L'algorithme détermine tous les nombres pairs de 2 à 100.

b.

2.a.



b.

c.

J'utilise mes compétences

5 **1. a.**

M	5	8	8	8	**8**	**8**	**8**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
k	2	3	4	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
k^e élément de T	8	4	1	0	**3**	**2**	**9**	**7**	**6**	**2**	**7**	

b. L'algorithme détermine le plus grand des nombres de la liste T. À la fin de l'algorithme, M représente le plus grand nombre de prises de chacun des 12 participants.

2. b. Voici le script complété :

3. a.

Initialiser une variable m au 1er élément de la liste T et une variable k à 2
Répéter 11 fois les instructions :
  Si le k^e élément de la liste T est plus petit
    que m
    alors
    Donner à m la valeur de cet élément
  Fin du test
  Augmenter la valeur de k de 1
Fin de la boucle
Afficher la valeur de m

b.

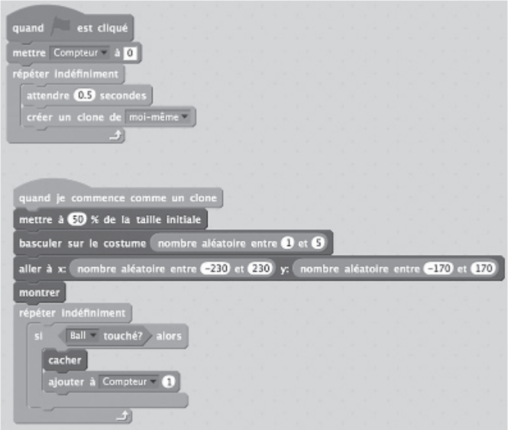
6 **1.** Ces lutins possèdent cinq costumes de couleurs différentes.

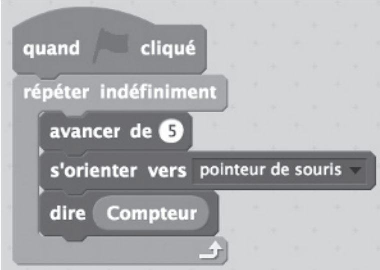
2. a. Le script permet au lutin « Ball » d'avancer en se dirigeant vers le pointeur de souris.

3. c. Le premier script permet de créer des clones du lutin « Ball2 ».

Dans le second script, on réduit la taille de chaque clone créé, on lui choisit un costume au hasard parmi les cinq et on le place au hasard dans la scène. Si le clone est touché par le lutin « Ball », alors on le cache.

4.





5. On peut, par exemple, arrêter le jeu lorsque la variable Compteur a la valeur 20.
On modifiera alors le script du lutin « Ball » de la façon suivante :

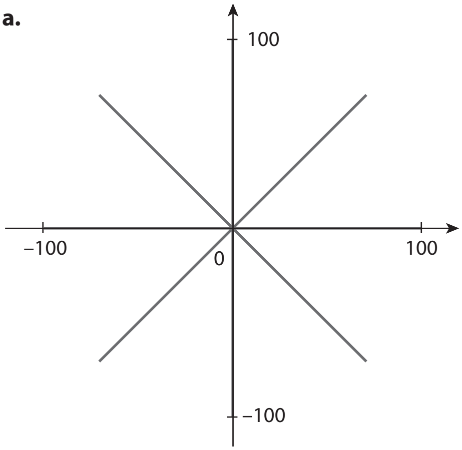
Dossier Brevet

7 **1. a.** Le capital disponible est
- après 1 an : 1 522,50 € ;
- après 2 ans : 1 545,34 € (valeur arrondie) ;
- après 3 ans : 1 568,52 € (valeur arrondie).

b. D'une année à la suivante, le capital est multiplié par 1,015.
2. a. Voici le programme complété :

b. Le 1er janvier 2016, le capital disponible s'élève donc à 1 740,81 €.
L'année suivante, il s'élève à :
1 740,81 × 1,015, soit 1 766,92 € arrondi au centime près.
Le scooter coûte 1 750 €, les parents de Jian pourront donc lui offrir au cours de l'année 2017.

8 **a.**



b. L'étoile compte 8 branches. On pouvait prévoir ce résultat car les instructions de la boucle sont répétées 8 fois.

9 **1. a.** Au début du programme, le lutin est placé à l'origine du repère : $x = 0$ et $y = 0$.
b. La variable N représente le nombre de déplacements du lutin de Louise, elle est initialisée à 0 et, à la sortie de la boucle, sa valeur est le nombre total de déplacements du lutin jusqu'à ce qu'il ait touché le bord de la scène.
2. Voici les positions successives du lutin :

Nombre aléatoire	x	y
1	10	0
3	10	10
3	10	20
1	20	20
4	20	10
2	10	10
1	20	10
3	20	20
1	30	20
4	30	10
2	20	10
4	20	0
1	30	0

La position du lutin est définie par : $x = 30$ et $y = 0$.

10 **a.** On suit l'évolution des variables S et k dans un tableau :

S	0	1	3	6	10	15
k	1	2	3	4	5	6

b. Plus généralement, pour un nombre entier strictement positif N, le programme calcule la somme : $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + N$.
Le lutin énonce la valeur S à la fin du programme.

11 **1. a.**

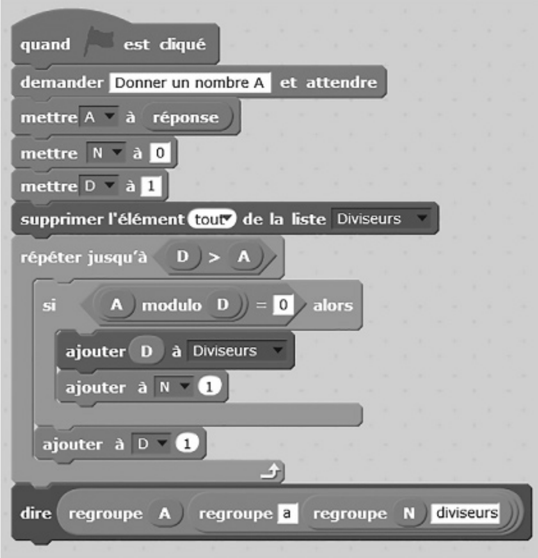
A	138	49	65	128	130
D	2	6	7	4	13
A modulo D	**0**	**1**	**2**	**0**	**0**

b. On reconnaît que D est un diviseur de A lorsque A modulo D donne 0 pour résultat.
2. a.

D	1	2	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
A modulo D	0	0	1	**2**	**0**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	
Liste des diviseurs	1	1 2	1 2	**1 2**	**1 2 5**	**1 2 5**	**1 2 5**	**1 2 5**	**1 2 5**	**1 2 5 10**	

b. Ce programme construit la liste des diviseurs du nombre A.

3. On peut apporter les modifications suivantes :



12 **1. a.** La position du lutin « Aaron » est définie au départ par : $x = -220$ et $y = 160$.

b. Le lutin « Aaron » se déplace dans la direction du lutin « Boo ».

2. a. Le point de départ de chacun des lutins est le suivant :

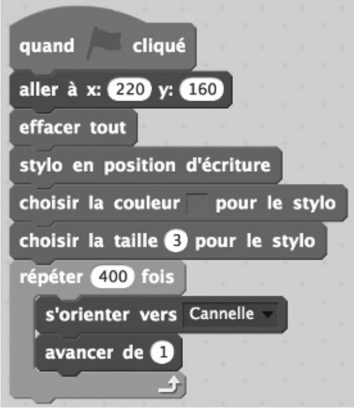
Boo : $x = 220$; $y = 160$

Cannelle : $x = 220$; $y = -160$

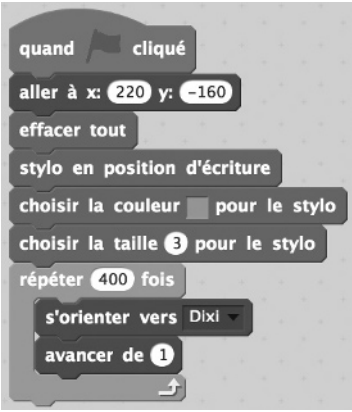
Dixi : $x = -220$; $y = -160$

b. Voici les scripts des autres lutins.

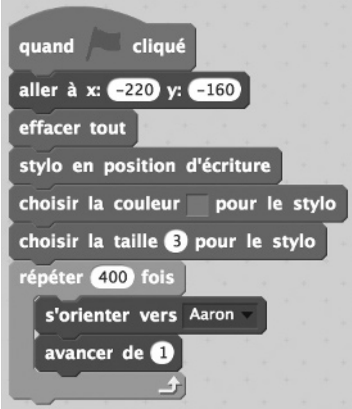
« Boo »



« Cannelle »



« Dixi »



Tâches complexes transversales

CORRIGÉS

1 La tornade

- On lit sur le document 2 que la tornade est de classe F4 (331 km/h < 340 km/h < 417 km/h).
- Diminuer une quantité de 10 % revient à multiplier cette quantité par $1 - \frac{10}{100}$ c'est-à-dire par 0,9.

Donc toutes les 5 minutes la vitesse des vents est multipliée par 0,9.
Avec un tableur, on peut alors construire ce tableau :

	A	B
1	Durée de vie (en minute)	Vitesse des vents (en km/h)
2	0	340
3	5	306
4	10	275,4
5	15	247,86
6	20	223,074
7	25	200,7666
8	30	180,68994
9	35	162,620946
10	40	146,3588514
11	45	131,72296626
12	50	118,550669634
13	55	106,6956026706
14	60	96,0260424035
15	65	86,4234381632
16	70	77,7810943469
17	75	70,0029849122
18	80	63,002686421

On a saisi dans la cellule B3 `= 0.9*B2` puis on a recopié cette formule vers le bas.
À la ligne 18, on lit que la durée de vie de la tornade est 80 minutes soit 1 h 20 min.

2 Les objets connectés

Étude des élèves de 6e et 5e

On peut construire ce tableau.

Nombre d'objets connectés	0	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	20	30	95	85	50	25	10	315

Étude des élèves de 4e

$\frac{2}{100} \times 150 = 3$; $\frac{6}{100} \times 150 = 9$; $\frac{12}{100} \times 150 = 18$;

$\frac{18}{100} \times 150 = 27$; $\frac{30}{100} \times 150 = 45$; $\frac{24}{100} \times 150 = 36$.

On peut alors construire ce tableau.

Nombre d'objets connectés	0	1	2	3	4	5	6	8	Total
Effectif	3	9	18	27	45	36	9	3	150

Étude des élèves de 6e, 5e et 4e

On peut alors construire ce tableau.

Nombre d'objets connectés	0	1	2	3	4	5	6	8	Total
Effectif	23	39	113	112	95	61	19	3	465

Calcul du nombre moyen M d'objets connectés par élève :

$$M = \frac{0\times23+1\times39+2\times113+3\times112+4\times95+5\times61+6\times19+8\times3+185\times4,5}{465+185}$$

$$M = \frac{2\,256,5}{650}$$

Donc M ≈ 3,5.
Le nombre moyen d'objets connectés par élève est environ 3,5.
Ce nombre est inférieur à celui de l'article (4).

Estimation du nombre médian d'objets connectés par élève :

- 112 + 95 + 61 + 19 + 3 = 290 donc 290 élèves des classes de 6e, 5e et 4e ont 3 objets connectés ou plus.
- Il y a 185 élèves en 3e et pour ces 185 élèves le nombre médian d'objets connectés est 4.

185 = 2 × 92 + 1 donc au moins 93 élèves de 3e ont 4 objets connectés ou plus.
Et donc au moins 93 élèves ont 3 objets connectés ou plus.

- 290 + 93 = 383 donc au moins 383 élèves du collège ont 3 objets connectés ou plus.
- Il y a 650 élèves dans le collège et 650 = 2 × 325.
- 325 < 383 donc le nombre médian d'objets connectés par élève est supérieur ou égal à 3.

Ce nombre est supérieur à celui de l'article (2).

3 Les groupes sanguins

Le groupe sanguin de Myriam est B^+.
On lit sur le document 3 que Myriam peut donner son sang aux personnes qui sont des groupes B^+ ou AB^+.
On lit sur le document 2 que les personnes qui sont des groupes B^+ ou AB^+ représentent 10,2 % (7,7 + 2,5 = 10,2) de la population française.
En assimilant les fréquences aux probabilités, on peut en déduire que la probabilité que Myriam puisse donner son sang à son amie Charlotte est 10,2 % ou 0,102.

4 Le programme

Comprendre le programme

Le programme génère de façon aléatoire deux nombres entiers *a* et *b* compris entre 1 et 8.
Ensuite ce programme calcule le produit *c* de ces deux nombres.

Si c est inférieur à 13, le lutin dit « j'ai gagné ».
Sinon, le lutin dit « j'ai perdu ».

Étude de la probabilité que le lutin gagne

On peut construire cette « table de multiplication ».

×	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9	12	15	18	21	24
4	4	8	12	16	20	24	28	32
5	5	10	15	20	25	30	35	40
6	6	12	18	24	30	36	42	48
7	7	14	21	28	35	42	49	56
8	8	16	24	32	40	48	56	64

Les nombres dans les 27 cases grisées correspondent aux valeurs de c inférieures à 13, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles le lutin gagne.

Donc la probabilité que le lutin gagne est $\frac{27}{64}$.

$\frac{1}{2} = \frac{32}{64}$ et $\frac{27}{64} < \frac{32}{64}$ donc le lutin a moins de chances de gagner que de perdre.

Modification du programme.

- Une première idée consiste à modifier la valeur 13 dans le programme 

.

Pour que le lutin ait autant de chances de gagner que de perdre, exactement 32 cases doivent-être grisées.
Si l'on grise les cases 14 – 14 – 15 – 15 on obtient 31 cases grisées.
Si l'on grise encore les trois cases qui contiennent 16 on obtient alors 34 cases grisées : ce n'est pas possible.
Modifier la valeur 13 ne permet pas de résoudre le problème…

- Une autre idée peut consister à modifier les valeurs possibles de a.

En remplaçant par exemple 8 par 7.

On a, à présent, 26 chances sur 56 de gagner.

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49
8	8	16	24	32	40	48	56

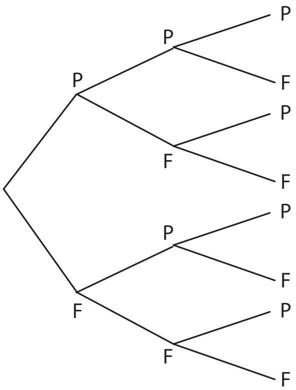
En passant la valeur c de 13 à 14 et en modifiant les conditions,

on obtient 28 chances sur 56 de gagner soit autant de chances de gagner que de perdre.

Le script final est alors :

5 Le choix du film

On peut construire cet arbre.



L'expérience a 8 issues et seules deux de ces issues (P-P-P et F-F-F) permettent à Jules de choisir le film.

La probabilité que Jules choisisse le film est donc $\frac{2}{8}$ ou 0,25.

0,25 < 0,5 donc la variante proposée par Arthur n'est pas équitable : Arthur a trois fois plus de chances de choisir le film que Jules.

6 Optimiser la recette

- 24 + 24 + 67 + 68 + 41 + 153 + 210 + 116 + 78 + 14 + 84 + 240 + 81 = 1 200.

1 200 consoles sont vendues en moyenne par semaine par la chaîne de magasins.

Quelques essais

Avant l'étude de marché :
105 – 25 = 80
Le bénéfice par console est de 80 €.
80 × 1 200 = 96 000 €
Si la console est vendue 105 €, 1 200 consoles sont vendues par semaine et le bénéfice est 96 000 €.

En cas d'augmentation :

- $82 \times 1\,150 = 94\,300$ €

Si la console est vendue 107 €, 1 150 consoles seront vendues par semaine et le bénéfice sera 94 300 €.

- $84 \times 1\,100 = 92\,400$ €

Si la console est vendue 109 €, 1 100 consoles seront vendues par semaine et le bénéfice sera 92 400 €.

En cas de diminution :

- $78 \times 1\,250 = 97\,500$ €

Si la console est vendue 103 €, 1 250 consoles seront vendues par semaine et le bénéfice sera 97 500 €.

- $76 \times 1\,300 = 98\,800$ €

Si la console est vendue 101 €,1 300 consoles seront vendues par semaine et le bénéfice sera 98 800 €.

Il semble, au vu de ces essais, que lorsqu'on augmente le prix de vente d'une console, le bénéfice total diminue et que lorsqu'on diminue le prix de vente d'une console, le bénéfice total augmente.

Avec un tableur

- Cas où on augmente le prix de vente d'une console.

Exemple de tableau :

	A	B	C	D
1	Nombre d'augmentations de 2 €	Nombre de consoles vendues	Bénéfice par console	Bénéfice total
2	0	1 200	80	96 000
3	1	1 150	82	94 300
4	2	1 100	84	92 400
5	3	1 050	86	90 300
6	4	1 000	88	88 000
7	5	950	90	85 500
8	6	900	92	82 800
9	7	850	94	79 900
10	8	800	96	76 800
11	9	750	98	73 500
12	10	700	100	70 000
13	11	650	102	66 300
14	12	600	104	62 400
15	13	550	106	58 300
16	14	500	108	54 000
17	15	450	110	49 500
18	16	400	112	44 800
19	17	350	114	39 900
20	18	300	116	34 800
21	19	250	118	29 500
22	20	200	120	24 000
23	21	150	122	18 300
24	22	100	124	12 400
25	23	50	126	6 300
26	24	0	128	0

On entre 1 200 et 80 dans les cellules B2 et C2, puis la formule = B2*C2 dans la cellule D2.

On entre les formules = B2–50 en B3 et = C2+2 en C3.

On étend ces formules vers le bas.

On remarque que le bénéfice total ne cesse de baisser.

- Cas où on diminue le prix de vente d'une console.

Exemple de tableau :

	A	B	C	D
1	Nombre de diminutions de 2 €	Nombre de consoles vendues	Bénéfice par console	Bénéfice total
2	0	1 200	80	96 000
3	1	1 250	78	97 500
4	2	1 300	76	98 800
5	3	1 350	74	99 900
6	4	1 400	72	100 800
7	5	1 450	70	101 500
8	6	1 500	68	102 000
9	7	1 550	66	102 300
10	8	1 600	64	102 400
11	9	1 650	62	102 300
12	10	1 700	60	102 000
13	11	1 750	58	101 500
14	12	1 800	56	100 800
15	13	1 850	54	99 900
16	14	1 900	52	98 800
17	15	1 950	50	97 500
18	16	2 000	48	96 000
19	17	2 050	46	94 300
20	18	2 100	44	92 400
21	19	2 150	42	90 300
22	20	2 200	40	88 000
23	21	2 250	38	85 500
24	22	2 300	36	82 800
25	23	2 350	34	79 900
26	24	2 400	32	76 800

On entre 1 200 et 80 dans les cellules B2 et C2, puis la formule = B2*C2 dans la cellule D2.

On entre les formule = B2+50 en B3 et = C2–2 en C3.

On étend ces formules vers le bas.

On remarque que le bénéfice total atteint une valeur maximale lorsqu'on procède à une diminution du prix de vente de 16 € par console (8 réductions de 2 €).

$$105 - 16 = 89$$

Conclusion : le bénéfice est le plus grand possible lorsque le prix de vente d'une console est 89 €.

7 La cycliste

Étude du vélo et de la vitesse de Lola

- 700 mm = 0,7 m et $\pi \times d = \pi \times 0{,}7$ m.

Donc, en tours de roue, Lola avance de $\pi \times 0{,}7$ m.

- $56 : 14 = 4$.

Quand Lola fait un tour de pédalier le pignon fait 4 tours et la roue fait aussi 4 tours.

- Donc, en un tour de pédalier, Lola avance de $4 \times \pi \times 0{,}7$ m c'est-à-dire de $2{,}8\pi$ m.
- Donc, en 1 seconde, Lola parcourt $0{,}8 \times 2{,}8\pi$ m soit $2{,}24\pi$ m soit encore $0{,}002\,24\pi$ km.
- En 1 heure, Lola parcourt $3\,600 \times 0{,}002\,24\pi$ km soit $8{,}064\pi$ km.

Calcul de la distance à parcourir

La carte du document 2 est à l'échelle $\dfrac{1}{700\,000}$.

Cela signifie que 1 cm sur la carte représente 700 000 cm soit 7 km dans la réalité.

Sur la carte, il y a 5 cm entre Olonne-sur-Mer et Saint-Jean-de-Monts.

5×7 km = 35 km.

Donc Lola doit parcourir 35 km.

Calcul de la durée de la balade

- $\dfrac{35}{8{,}064\pi} \approx 1{,}4$.

Donc la balade va durer environ 1,4 h.

- $1{,}4 \text{ h} = 1 \text{ h} + 0{,}4 \text{ h}$
  $= 1 \text{ h} + 0{,}4 \times 60 \text{ min}$
  $= 1 \text{ h } 24 \text{ min}$

La balade va durer environ 1 h 24 min.

Calcul de l'horaire de départ

$$10 \text{ h } 36 \text{ min} \xleftarrow{24 \text{ min}} 11 \text{ h} \xleftarrow{1 \text{ h}} 12 \text{ h}$$

Lola doit partir au plus tard à 10 h 36.

Calcul du nombre de tours de pédaliers

$2{,}8\pi$ m = $0{,}002\,8$ km.

$$\frac{35}{0{,}002\,8\pi} \approx 3\,979$$

Donc Lola devra donner environ 3 979 (voire 4 000) tours de pédale.

8 La salle de sport

- On note :

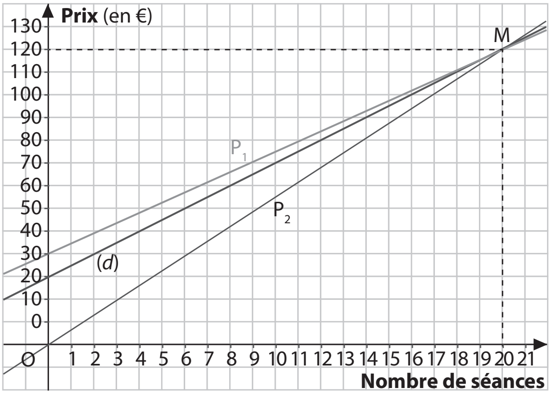
– x le nombre de séances d'une heure ;

– P_1 le prix à payer pour x séances d'une heure chez SportRoom ;

– P_2 le prix à payer pour x séances d'une heure chez SportVitalité.

On a alors $P_1(x) = 6x$ et $P_2(x) = 4{,}5x + 40$.

● Une solution peut consister à représenter dans un repère les fonctions P1 et P2 puis à tracer une droite (d) « comprise » entre les représentations graphiques des fonctions P_1 et P_2.



(d) est la représentation graphique d'une fonction affine P et P est de la forme $P(x) = ax + b$.

$P(0) = 20$ donc $a \times 0 + b = 20$ soit $b = 20$.

On a alors $P(x) = ax + 20$.

Le point M(20 ; 120) appartient à (d) donc

$P(20) = 120$ soit $a \times 20 + 20 = 120$.

$$a \times 20 + 20 - 20 = 120 - 20$$
$$a \times 20 = 100$$
$$a = \frac{100}{20}$$
$$a = 5.$$

Donc $P(x) = 5x + 20$.

Hasna peut proposer le tarif suivant : **achat obligatoire d'une carte de membre à 20 € (valable un an), puis 5 € la séance d'une heure.**

9 La vue du chalet

● On utilise les documents 1 et 2 pour déterminer les altitudes du chalet de Carmen, de l'hôtel et de la gare d'arrivée du télésiège.

Entre les deux courbes de niveau « 1 200 » et « 1 250 », on distingue quatre courbes de niveau, donc cinq intervalles.

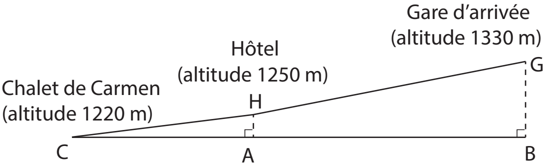
1 250 m – 1 200 m = 50 m et 50 m : 5 = 10 m.

Donc la différence d'altitude entre deux courbes de niveau consécutives est de 10 m.

On constate qu'il en est de même pour les autres courbes de niveau de la carte (doc. 1).

Le chalet de Carmen est donc à l'altitude 1 220 m, l'hôtel est construit à l'altitude 1 250 m et la gare d'arrivé du télésiège est à l'altitude 1 330 m.

On peut alors réaliser ce schéma (dans un plan vertical).



● On peut mesurer les distances au sol CA et AB sur la carte (doc. 1) :

CA = 3 cm et AB = 4,5 cm (sur le manuel grand format).

L'échelle de la carte est 1 : 8 000.

3 cm × 8 000 = 24 000 cm soit 240 m.

4,5 cm × 8 000 = 36 000 cm soit 360 m.

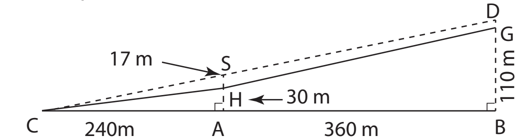
● On reprend alors le schéma précédent et on calcule les distances HA et BG.

HA = 1 250 m – 1 220 m soit HA = 30 m.

BG = 1 330 m – 1 220 m soit BG = 110 m.

On complète le schéma en y notant les distances calculées précédemment.

On note S le sommet de l'hôtel et on trace en pointillés la « ligne de vue » de Carmen depuis le pas de sa porte lorsqu'elle regarde le haut de l'hôtel. Cette ligne de vue (CS) coupe la droite (BG) en D.



● On cherche à déterminer la longueur DG.

Si cette longueur DG est inférieure à 4 m (la hauteur du bâtiment de la gare d'arrivée du télésiège, d'après le document 3), Carmen pourra toujours voir l'arrivée du télésiège, sinon elle ne la verra plus.

Dans le triangle BCD, les droites (AS) et (BD) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (BC) donc elles sont parallèles. Le point A appartient au côté [BC] et le point S appartient au côté [CD].

D'après la propriété de Thalès : $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{AS}{BD}$,

c'est-à-dire $\dfrac{240}{240 + 360} = \dfrac{30 + 17}{BD}$ soit $\dfrac{240}{600} = \dfrac{47}{BD}$.

On en déduit que $240 \times BD = 600 \times 47$ et

$BD = \dfrac{600 \times 47}{240} = 117{,}5$.

Donc BD = 117,5 m.

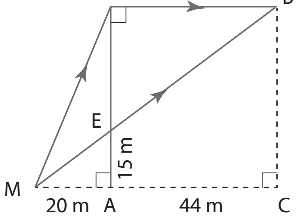
Alors GD = 117,5 m – 110 m soit GD = 7,5 m.

7,5 m > 4 m

En conclusion, Carmen ne pourra plus voir l'arrivée du télésiège depuis la porte de son chalet.

10 Le sauvetage

Pour faciliter la recherche, on nomme les points intéressants sur le plan (doc. 1).



Trajet 1

● Dans le triangle rectangle MAE, on utilise la propriété de Pythagore pour calculer la distance ME.

$AM^2 + AE^2 = ME^2$ ainsi $20^2 + 15^2 = ME^2$
soit $400 + 225 = ME^2$ ou $ME^2 = 625$.
Avec la calculatrice, on obtient ME = 25 m.
Dans le triangle MBC, les droites (AE) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (MC) donc elles sont parallèles. Le point A appartient au côté [MC] et le point E appartient au côté [MB].

D'après la propriété de Thalès : $\frac{MA}{MC} = \frac{ME}{MB} = \frac{AE}{BC}$,

c'est-à-dire $\frac{20}{20+44} = \frac{25}{MB} = \frac{15}{BC}$ soit $\frac{20}{64} = \frac{25}{MB} = \frac{15}{BC}$.

De $\frac{20}{64} = \frac{25}{MB}$, on déduit que $2 \times MB = 64 \times 25$ et

$MB = \frac{64 \times 25}{20} = 80$.

Donc MB = 80 m.

- Les points M, E et B sont alignés donc ME + EB = MB.
EB = 80 m – 25 m soit EB = 55 m.

- Si le maître nageur sauveteur suit le trajet 1, il court 25 m sur la plage et nage 55 m.
On cherche le temps mis pour effectuer ce trajet. On utilise alors les informations du document 2.
Sur la plage :
$d = v \times t$ avec $d = 25$ m et $v = 5$ m/s donc $25 = 5 \times t$ et $t = 25 : 5$ soit $t = 5$ s.
En mer :
$d = v \times t$ avec $d = 55$ m et $v = 25$ m/s donc $55 = 2{,}5 \times t$ et $t = 55 : 2{,}5$ soit $t = 22$ s.
On doit ajouter aussi le temps nécessaire pour mettre les palmes.
5 s + 5 s + 22 s = 32 s
Ainsi le maître nageur sauveteur met 32 s pour rejoindre le baigneur s'il prend le trajet 1.

Trajet 2

- Le quadrilatère ABCD a trois angles droits, donc il est un rectangle. Par conséquent ses côtés opposés ont la même longueur : ainsi DB = AC = 44 m.

- Pour déterminer la distance MD, on peut utiliser la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle MAD. Toutefois, on ne connaît pas la longueur AD ; il faut donc la déterminer en premier.
Comme le quadrilatère ACBD est un rectangle, AD = BC.
Exemple de réponse pour déterminer BC :

De $\frac{20}{64} = \frac{15}{BC}$, on déduit que $20 \times BC = 64 \times 15$ et

$BC = \frac{64 \times 15}{20} = 48$.

Donc BC = 48 m et, par conséquent, AD = 48 m.
Remarque : une autre démarche consiste à utiliser la propriété de Pythagore dans le triangle MBC.

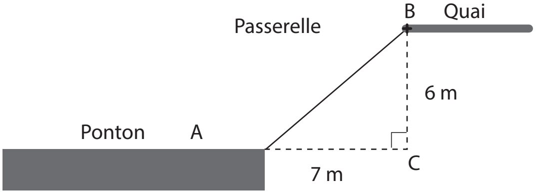
Dans le triangle rectangle MAD, on utilise la propriété de Pythagore pour calculer la distance MD.
$AM^2 + AD^2 = MD^2$ ainsi $20^2 + 48^2 = MD^2$
soit $400 + 2\,304 = MD^2$ ou $MD^2 = 2\,704$.
Avec la calculatrice on obtient MD = 52 m.

- Si le maître nageur sauveteur suit le trajet 2, il court 52 m sur la plage et nage 44 m.
On cherche le temps mis pour effectuer ce trajet.
Sur la plage :
$d = v \times t$ avec $d = 52$ m et $v = 5$ m/s donc $52 = 5 \times t$ et $t = 52 : 5$ soit $t = 10{,}4$ s.
En mer :
$d = v \times t$ avec $d = 44$ m et $v = 2{,}5$ m/s donc $44 = 2{,}5 \times t$ et $t = 44 : 2{,}5$ soit $t = 17{,}6$ s.
10,4 s + 5 s + 17,6 s = 33 s
Ainsi le maître nageur sauveteur met 33 s pour rejoindre le baigneur s'il prend le trajet 2.

- **Conclusion**
32 s < 33 s donc c'est le trajet 1 qui permet au maître nageur sauveteur d'arriver le plus vite possible auprès du baigneur.

11 La passerelle

- Calcul de la longueur minimale de la passerelle sans tenir compte, dans un premier temps, de la contrainte de l'angle avec l'horizontale :
– On peut représenter la situation à marée basse avec ce schéma.



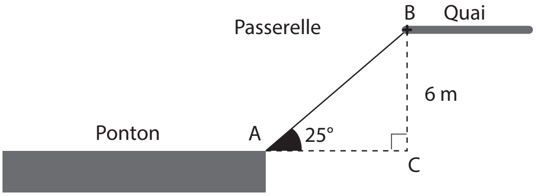
– Le triangle ABC est rectangle en C.
Donc, d'après le théorème de Pythagore :
$CA^2 + CB^2 = AB^2$
$7^2 + 6^2 = AB^2$
$49 + 36 = AB^2$
$AB^2 = 85$.
$AB = \sqrt{85}$ m.
$AB \approx 9{,}22$ m.
– Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{7}$

Donc $BAC \approx 40{,}6°$
$40{,}6° > 25°$ donc l'angle avec l'horizontale est trop grand.
La passerelle doit mesurer plus de 9,22 m.

- Calcul de la longueur minimale de la passerelle en tenant compte de la contrainte de l'angle avec l'horizontale :

– On peut représenter la situation à marée basse avec ce schéma :



$\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$

$\tan 25° = \dfrac{6}{AC}$

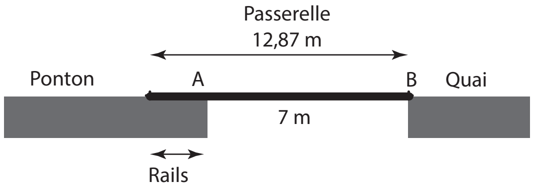
$AC = \dfrac{6}{\tan 25°}$

Donc $AC \approx 12{,}87$ m.

La passerelle doit mesurer au minimum 12,87 m.

- Calcul de la longueur des rails.

On peut représenter la situation à marée haute avec ce schéma.



12,87 m – 7 m = 5,87 m

Donc la longueur minimale des rails à fixer sur le ponton est 5,87 m.

12 En astronomie

La Terre tourne autour du Soleil en 365,25 jours.

Les distances parcourues sont proportionnelles aux durées de déplacement, donc les angles de rotation sont proportionnels aux durées de déplacement.

- En 365,25 jours, la Terre a tourné de 360° donc, en 106 jours, elle tourne de $\dfrac{360° \times 106}{365{,}25}$.

Donc $\widehat{T_1ST_2} = 104{,}5°$

- En 687 jours, Mars a tourné de 360° donc, en 106 jours, il tourne de $\dfrac{360° \times 106}{687}$.

Donc $\widehat{M_1SM_2} = 55{,}5°$.

- $\widehat{M_2ST_2} = 104{,}5° - 55{,}5°$.

Donc $\widehat{M_2ST_2} = 49°$.

- Dans le triangle ST_2M_2 rectangle en T_2,

$\widehat{M_2ST_2} = \dfrac{ST_2}{SM_2}$.

C'est-à-dire $\cos 49° \approx \dfrac{149\ 600\ 000}{SM_2}$.

Donc $SM_2 \times \cos 49° \approx 149\,600\,000$ et $SM_2 = \dfrac{149\ 600\ 000}{\cos 49°}$.

Avec la calculatrice, on trouve $SM_2 = 228\,000\,000$ km. Donc la distance entre le Soleil et la planète Mars est environ 228 000 000 km.

13 L'hélicoptère

- Le nombre dans le cercle rouge doit être le plus grand possible et il doit diviser à la fois 168 et 180 : il s'agit donc du plus grand diviseur commun à 180 et 168.
- Pour déterminer le plus grand diviseur commun à 180 et 168, on écrit les décompositions en produits de facteurs premiers de 180 et 168.

$180 = 10 \times 18 = 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 3$ c'est-à-dire aussi

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

$168 = 2 \times 84 = 2 \times 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 6 \times 7$.

Donc $168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$.

Le plus grand diviseur commun à 180 et 168 est $2 \times 2 \times 3$ c'est-à-dire 12.

Le nombre à inscrire dans le cercle rouge est 12.

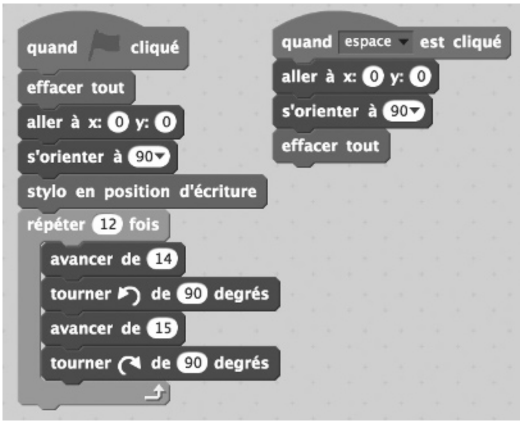
- $168 = \mathbf{12} \times 14$.

Le nombre à inscrire dans le premier cercle bleu est 14.

- $180 = \mathbf{12} \times 15$.

Le nombre à inscrire dans le deuxième cercle bleu est 15.

Voici le script complété :



Formulaire

CORRIGÉS

Fiche 1 : Nombres décimaux : écritures et calculs

1 **1. a.** $\frac{83}{10}$ **b.** $\frac{9}{10}$ **c.** $\frac{104}{10}$ **d.** $\frac{5\,403}{1\,000}$

2. a. 0,75 **b.** 93,1 **c.** 75,21 **d.** 0,32

2 **a.** $5{,}3 + 7 \times 6 : 10 = 5{,}3 + 42 : 10$
$= 5{,}3 + 4{,}2$
$= 9{,}5$

b. $(3{,}6 + 4 \times 5{,}1) : 6 = (3{,}6 + 20{,}4) : 6$
$= 24 : 6$
$= 4$

3 **a.** $(14 + 7) \times (9 - 2) = 147$
b. $75 : (5 \times (5 + 10)) = 1$
c. $(89 - (71 + 8)) : 2 = 5$

4 **a.** $A = 12{,}3 - 8 = 4{,}3$ et $B = 8{,}8 + 4{,}5 = 13{,}3$
donc $A < B$.
b. $C = 3 \times 8 = 24$ et $D = 16{,}2 + 2{,}6 = 18{,}8$
donc $C > D$.

Fiche 2 : Nombres entiers : multiples et diviseurs

5 **a.** $120 = 15 \times 8$ donc 120 est un **multiple** de 15.
b. $2016 : 18 = 112$ donc 18 est un **diviseur** de 2016.
c. $17 \times 15 = 255$ donc 17 et 15 sont des **diviseurs** de 255.
d. $\frac{437}{19} = 23$ donc 437 est un **multiple** de 23.

6 **a.** $252 : 14 = 18$
b. 18 est un nombre entier donc 14 est un diviseur de 252.
c. $252 = 14 \times 18 = 7 \times 2 \times 18 = 7 \times 36$ donc 252 est un multiple de 7.

7 **a.** 210 et 3 545.
b. 741 ; 210 ; 74 628 et 85 572.
c. 74 628 et 85 572.
d. 316 ; 74 628 et 85 572.

8 **a.** 16 est divisible par 4 donc 2016 est un multiple de 4.
$2 + 1 + 6 = 9$ donc 2016 est un multiple de 9.
2016 est un multiple de 4 et de 9 donc 2016 est un multiple de 36.
b. 2025 est un multiple de 5.
$2 + 2 + 5 = 9$ donc 2025 est un multiple de 9.
2025 est un multiple de 5 et de 9 donc 2025 est un multiple de 45.

Fiche 3 : Langage littéral

9 **a.** $2x + 6$ ou $2(x + 3)$ **b.** $25x^2$ **c.** $2x$

10 **a.** $x + 2y$ **b.** $(x - y)^2$ **c.** $x(y + 1)$

11 **a.** $5x + 3$ **b.** $(x - 4)^2$

12 **a.** $E = 3 + 8 = 11$ et $F = 3 \times 6 = 18$
b. $E = 3 + 3 = 6$ et $F = 3 \times 3{,}5 = 10{,}5$
c. $E = 3 + 0 = 3$ et $F = 3 \times 2 = 6$
d. $E = 3 - 4 = -1$ et $F = 3 \times 0 = 0$

Fiche 4 : Distributivité

13 **a.** $7x + 7 \times 3 = 7x + 21$
b. $6 \times 3 - 6x = 18 - 6x$
c. $5 \times 2x + 5 \times 1 = 10x + 5$
d. $4x - 4 \times 4 = 4x - 16$

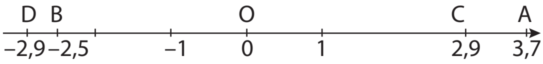
14 **a.** $5x + x^2 + 6 \times 5 + 6x = x^2 + 11x + 30$
b. $4x^2 + 4x \times 3 - 5x - 5 \times 3 = 4x^2 + 7x - 15$
c. $4x - 4 \times 5 + x^2 - 5x = x^2 - x - 20$
d. $2x \times 2x - 2x - 7 \times 2x + 7 \times 1 = 4x^2 - 16x + 7$

15 **a.** $7x - 14 = 7 \times x - 7 \times 2 = 7(x - 2)$
b. $2x^2 + 4x = 2x \times x + 2x \times 2 = 2x(x + 2)$

16 **a.** $(5 + 3)x = 8x$
b. $(9 - 4)x = 5x$
c. $(6 - 1)x = 5x$
d. $(2 + 3)x + (-2 + 4)y = 5x + 2y$
e. $(4 - 3)x + (-5 + 7)y = x + 2y$

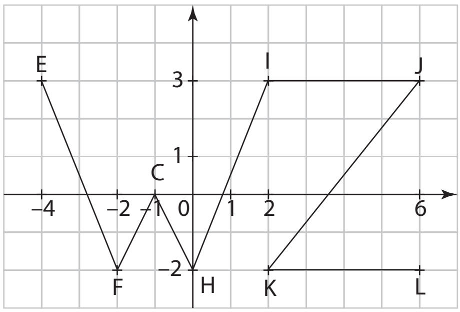
Fiche 5 : Nombres relatifs : écriture et repérage

17 **a.**



b. $-2{,}9 < -2{,}5 < 2{,}9 < 3{,}7$
c. L'opposé de 3,7 est –3,7.
L'opposé de –2,5 est 2,5.
L'opposé de 2,9 est –2,9.
L'opposé de –2,9 est 2,9.

18 **a.** à **c.**



b. On lit la lettre W.
d. Par exemple : J (6 ; 3) ; K (2 ; –2) et L (6 ; –2).

Fiche 6 : Nombres relatifs : addition et soustraction

19 **a.** 2 **b.** –3 **c.** –26 **d.** 11,5 **e.** –1,1 **f.** –11,5

20 A = 4,8 + (– 4) + (– 4,8) = – 4
B = 1 + (–1) = 0

21 **a.** 7 + 5 = 12 **b.** –21 **c.** –3 + 4 = 1
d. 3,6 **e.** –3,6 **f.** – 8,3 + 4,7 = –3,6

22 **a.** 8 + 7 – 11 – 6 + 5 = 20 – 17 = 3
b. –10 + 6 + 5 – 3 – 4 = 11 – 17 = –6
c. 7 – (9 – 11) + 7 = 7 + 2 + 7 = 16
d. –5 + 8 – (–11 + 11) = –5 + 8 = 3

Fiche 7 : Nombres relatifs : multiplication et division

23 **a.** 3,5 **b.** –13,5 **c.** –27,3

24 **a.** 117 **b.** –117

25 **a.** 7 × (– 6) = – 42 **b.** –35 × 0,1 = –3,5
c. –8 × 6 = – 48 **d.** –7 × (–9) = 63

26 **a.** –7 **b.** 13 **c.** – 0,73 **d.** 2,8

27 **a.** –5 **b.** 0,5 **c.** –6 **d.** – 0,2

28 **a.** 38 **b.** –12 **c.** –1,2 **d.** 3,8

Fiche 8 : Nombres rationnels : écritures fractionnaires

29 **a.** $7 \times \frac{3}{7} = 3$

$\frac{3}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

b. $\frac{13}{4} \times 4 = 13$

$\frac{13}{4} = 3{,}25$ donc $\frac{13}{4}$ est un nombre décimal.

c. $5 \times \frac{8}{5} = 8$

$\frac{8}{5} = 1{,}6$ donc $\frac{8}{5}$ est un nombre décimal.

d. $\frac{5}{9} \times 9 = 5$

$\frac{5}{9}$ n'est pas un nombre décimal.

e. $3 \times \frac{25}{3} = 25$

$\frac{25}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

f. $\frac{9}{10} \times 10 = 9$

$\frac{9}{10} = 0{,}9$ donc $\frac{9}{10}$ est un nombre décimal.

30 $\frac{2}{1{,}5} = \frac{-4}{-3} = \frac{40}{30} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

31 **a.** $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 4}{8 \times 4} = \frac{20}{32}$
b. $\frac{8}{18} = \frac{4}{9} = \frac{16}{36} = \frac{20}{45}$

32 **a.** $\frac{2{,}7}{3} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$ **b.** $\frac{6{,}3}{7{,}2} = \frac{63}{72} = \frac{7}{8}$
c. $\frac{7{,}5}{10} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ **d.** $\frac{0{,}16}{3} = \frac{16}{300} = \frac{4}{75}$

33 **a.** $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$ **b.** $\frac{54}{36} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ **c.** $\frac{15}{60} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Fiche 9 : Nombres rationnels : addition et soustraction

34 **a.** $-\frac{1}{4} + \frac{11}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$
b. $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
c. $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} = -\frac{1}{12}$
d. $\frac{4}{7} - \frac{3}{4} = \frac{16}{28} - \frac{21}{28} = -\frac{5}{28}$

35 **a.** $\frac{5}{6} + \frac{5}{12} = \frac{10}{12} + \frac{5}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$
b. $-\frac{8}{5} - \frac{1}{15} = -\frac{24}{15} - \frac{1}{15} = -\frac{25}{15} = -\frac{5}{3}$
c. $\frac{1}{6} - \frac{1}{5} = \frac{5}{30} - \frac{6}{30} = -\frac{1}{30}$
d. $-\frac{5}{7} + \frac{3}{2} = -\frac{10}{14} + \frac{21}{14} = \frac{11}{14}$

36 **a.** $1 + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$
b. $\frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{7}{4}$
c. $3 - \frac{16}{5} = \frac{15}{5} - \frac{16}{5} = -\frac{1}{5}$
d. $\frac{16}{3} - 4 = \frac{16}{3} - \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$

37 **a.** $-\frac{10}{2} - \frac{11}{3} = -\frac{15}{3} - \frac{11}{3} = -\frac{26}{3}$
b. $\frac{36}{18} - \frac{15}{18} + \frac{30}{18} - \frac{4}{18} = \frac{47}{18}$

Fiche 10 : Nombres rationnels : multiplication et division

38 **a.** $-\frac{3}{4} \times \frac{11}{2} = -\frac{33}{8}$

b. $-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{-7}{3}=\dfrac{7}{5}$

c. $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{9}{14}$

d. $-\dfrac{25}{9}\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{5\times5}{9\times5}=\dfrac{5}{9}$

39 **a.** $\dfrac{7}{5}\times\dfrac{5}{28}=\dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{4}$

b. $\dfrac{-12}{7}\times\dfrac{7}{3}=\dfrac{-12}{3}=-4$

c. $-4\times\dfrac{7}{16}=-\dfrac{4\times7}{4\times4}=-\dfrac{7}{4}$

d. $-\dfrac{9}{8}\times(-2)=\dfrac{9\times2}{4\times2}=\dfrac{9}{4}$

40 **a.** $\dfrac{6}{5}:\dfrac{5}{3}=\dfrac{6}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{25}$

b. $\dfrac{-4}{7}:\dfrac{11}{9}=\dfrac{-4}{7}\times\dfrac{9}{11}=-\dfrac{36}{77}$

41 **a.** $-\dfrac{3}{8}:\dfrac{5}{2}=-\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{5}=-\dfrac{3\times2}{4\times2\times5}=-\dfrac{3}{20}$

b. $\dfrac{11}{15}:(-22)=-\dfrac{11}{15}\times\dfrac{1}{22}=-\dfrac{11}{15\times2\times11}=\dfrac{-1}{30}$

c. $7:\left(-\dfrac{21}{4}\right)=-7\times\dfrac{4}{21}=-\dfrac{7\times4}{7\times3}=-\dfrac{4}{3}$

Fiche 11 : Situations de proportionnalité

42 **a.** $\dfrac{216}{2}=\dfrac{162}{1{,}5}=\dfrac{54}{0{,}5}=108$

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

b. $\dfrac{12}{10}=\dfrac{8}{9{,}6}=1{,}2$ mais $7\times1{,}2=8{,}4$

donc $7\times1{,}2\neq8{,}5$.

Il ne s'agit pas d'un tableau de proportionnalité.

43 **a.** Les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère donc le graphique ne représente pas une situation de proportionnalité.

b. Les points sont alignés avec l'origine du repère donc le graphique représente une situation de proportionnalité.

c. Les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère donc le graphique ne représente pas une situation de proportionnalité.

Fiche 12 : Utiliser la proportionnalité, cas des pourcentages

44 **a.** $x=\dfrac{400\times7}{5}=560$

Volume (en m³)	5	7
Masse (en kg)	400	**560**

b. $x=\dfrac{9\times2}{3{,}6}=5$

Tours de pédalier	2	**5**
Distance (en m)	3,6	9

45 **a.** $x=\dfrac{250\times160}{200}=200$

$y=\dfrac{60\times200}{160}=75$

Nombre de feuilles	200	250	**75**
Masse (en g)	160	**200**	60

b. x est la masse, en g, de 250 feuilles.

y est le nombre de feuilles pesant 60 g.

46 1 m³ de sable pèse $\dfrac{4{,}8}{3}$ t soit 1,6 t.

$7\times1{,}6=11{,}2$

7 m³ de sable pèsent 11,2 t.

47 **a.** $\dfrac{80}{100}\times32=25{,}6$

25,6 Go sont occupés.

b. Si 80 % de la capacité de la clé USB sont occupés, il reste 20 % disponibles.

$\dfrac{20}{100}\times32=6{,}4$

ou $32-25{,}6=6{,}4$

6,4 Go sont encore disponibles.

48 $\dfrac{4}{100}\times350=14$

En janvier, le loyer augmentera de 14 €.

$350+14=364$

En janvier, le loyer sera de 364 €.

49 $\dfrac{11{,}7}{15}=0{,}78$ et $\dfrac{3{,}15}{15}=0{,}21$

L'air contient 78 % d'azote et 21% d'oxygène.

50 $8-5=3$

On a accordé à Brice une remise de 3 €.

$\dfrac{3}{8}=0{,}375$

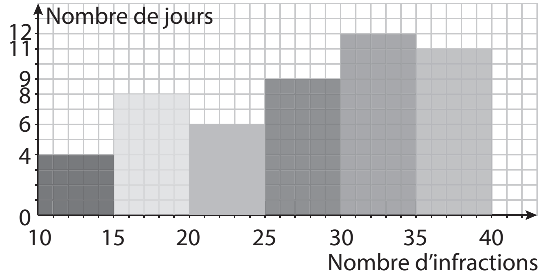
On lui a appliqué une remise de 37,5 %.

Fiche 13 : Lire et représenter des données

51 **a.** et **b.**

Jour	**L**	**Ma**	**Me**	**J**	**V**	**S**	**D**	**Total**
Effectif	35	15	40	25	50	55	30	250
Fréquences	0,14	0,06	0,16	0,1	0,2	0,22	0,12	1

52 **a.**



b. L'effectif total est 50.

Nombre d'infractions n	**Effectif** (en jours)	**Fréquences** (en %)
$10 \leqslant n < 15$	4	8
$15 \leqslant n < 20$	8	16
$20 \leqslant n < 25$	6	12
$25 \leqslant n < 30$	9	18
$30 \leqslant n < 35$	12	24
$35 \leqslant n < 40$	11	22

Fiche 14 : Caractéristiques d'une série statistique

53 **a.** $m = \dfrac{1100+2\times1\,500+4\times1\,800+2\times2\,000+5\,000}{1+2+4+2+1}$

$m = \dfrac{20\,300}{10} = 2\,030$

Le salaire moyen est 2 030 €.

Il ne reflète pas bien les salaires dans cette entreprise car un seul salaire est supérieur à 2 030 €.

b. L'effectif total est 10.

10 = 5 + 5 donc le salaire médian est entre le 5e et le 6e salaire.

Les 5e et 6e salaires sont 1 800.

Le salaire médian est 1 800 €.

c. 5 000 – 1 100 = 3 900

L'étendue des salaires est 3 900 €.

54 **a.**

Note	9	10	11	12	13	14	15
Effectif	2	3	1	2	2	3	5

Note	16	17	18	19	20
Effectif	3	3	3	2	1

b. $m = \dfrac{2\times9+3\times10+\ldots+2\times19+20}{30} = \dfrac{437}{30}$

$m \approx 14{,}56$

La note moyenne est environ 14,6.

c. L'effectif total est 30.

30 = 15 + 15

La note médiane est entre la 15e et la 16e note.

2 + 3 + 1 + 2 + 2 + 3 = 13

13 + 5 = 18

De la 14e à la 18e note, ce sont des 15.

La note médiane est donc 15.

20 – 9 = 11

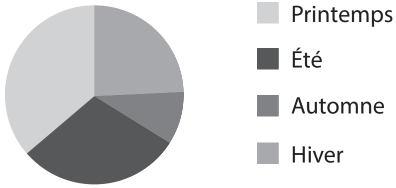
L'étendue de cette série de notes est 11.

Fiche 15 : Utiliser un tableur-grapheur

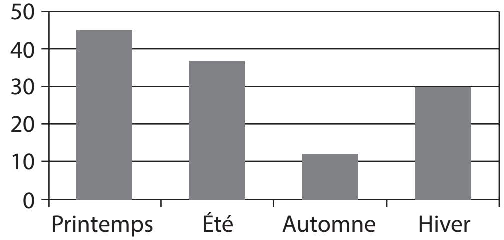
55 **1.**

	A	B	C	D	E
1	**Saison**	Printemps	Été	Automne	Hiver
2	**Effectif**	45	37	12	30

2. a.



b.



56 **a.** et **b.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1,73	1,75	1,81	1,85	1,87	1,87	1,85	1,8	1,75	1,72
2	1,72	1,75	1,78	1,84	1,87	1,88	1,88	1,86	1,84	1,76
3	1,76	1,83	1,86	1,92	1,67	1,76	1,7	1,76	1,78	1,91
4										
5	moyenne	1,804		médiane	1,805		étendue	0,250		

Dans la cellule C5, on saisit la formule =MOYENNE(A1:J3).

Dans la cellule F5, on saisit la formule =MEDIANE(A1:J3).

Dans la cellule J5, on saisit la formule =MAX(A1:J3)- MIN(A1:J3).

Fiche 16 : Puissances d'un nombre relatif

57 **a.** 8 **b.** 1 **c.** 27 **d.** –125 **e.** 0,36 **f.** 0

58 **a.** –8 **b.** –8 **c.** –25 **d.** 25 **e.** 1 **f.** – 1

59 **a.** $6^{-2} = \dfrac{1}{6^2} = \dfrac{1}{36}$ **b.** $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

60 **a.** 10^4 **b.** 10^{11} **c.** 10^6
d. 10^{-2} **e.** 10^{-5} **f.** 10^{-4}

61 **a.** 42 000 **b.** 5 000 **c.** 2 450
d. 0,051 **e.** 0,005 **f.** 0,005 24

Fiche 17 : Équations

62 **a.** Pour $x = 0$; $3x - 5 = 3 \times 0 - 5 = -5$
et $5x - 9 = 5 \times 0 - 9 = -9$
$-5 \neq -9$ donc 0 n'est pas une solution de l'équation.

b. Pour $x = -2$; $3x - 5 = 3 \times (-2) - 5 = -11$
et $5x - 9 = 5 \times (-2) - 9 = -19$
$-11 \neq -19$ donc –2 n'est pas une solution de l'équation.

c. Pour $x = -1{,}5$; $3x - 5 = 3 \times (-1{,}5) - 5 = -9{,}5$
et $5x - 9 = 5 \times (-1{,}5) - 9 = -16{,}5$
$-9{,}5 \neq -16{,}5$ donc $-1{,}5$ n'est pas une solution de l'équation.
d. Pour $x = 2$; $3x - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1$
et $5x - 9 = 5 \times 2 - 9 = 1$
donc 2 est une solution de l'équation.

63 **a.** Pour $x = \frac{1}{2}$; $2x = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

et $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

donc $\frac{1}{2}$ est une solution de l'équation $2x = x + \frac{1}{2}$.

b. Pour $t = \frac{1}{2}$; $4t^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{4} = 1$

$1 \neq 4$ donc $\frac{1}{2}$ n'est pas une solution de l'équation $4t^2 = 4$.

c. Pour $a = \frac{1}{2}$; $3a + 1 = 3 \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

et $-5a + 5 = -5 \times \frac{1}{2} + 5 = \frac{-5}{2} + \frac{10}{2} = \frac{5}{2}$

donc $\frac{1}{2}$ est une solution de l'équation $3a + 1 = -5a + 5$.

64 **a.** Si $3x - 5 = 7$, alors $3x = 12$ et $x = 4$.
b. Si $\frac{1}{3}x + 3 = -9$, alors $\frac{1}{3}x = -12$ et $x = -36$.

65 **a.** Si $2x + 4 = 5x - 2$, alors $-3x = -6$ et $x = 2$.
L'équation $2x + 4 = 5x - 2$ a pour solution 2.
b. Si $12 - x = 18 - 3x$, alors $2x = 6$ et $x = 3$.
L'équation $12 - x = 18 - 3x$ a pour solution 3.
c. Si $5 - 7x = 0$, alors $7x = 5$ et $x = \frac{5}{7}$.
L'équation $5 - 7x = 0$ a pour solution $\frac{5}{7}$.

Fiche 18 : Notion de probabilité

66 **a.** Il y a 32 issues possibles.
b. La probabilité d'obtenir le roi de cœur est $\frac{1}{32}$.

67 **a.** La probabilité d'obtenir une boule blanche est $\frac{10}{15}$ soit $\frac{2}{3}$.
b. La probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{5}{15}$ soit $\frac{1}{3}$.

68 **a.** Avec une pièce non truquée, la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{1}{2}$.
b. La somme des probabilités des issues est égale à 1 donc la probabilité d'obtenir Pile est $1 - 0{,}54$ soit 0,46.

69 La probabilité de tirer la boule rouge est $\frac{1}{5}$ soit 20 %.

Fiche 19 : Périmètres et aires

70 Le périmètre P de cette surface est :
$P = 2 \times 7{,}6$ cm $+ 4 \times 2{,}8$ cm
$P = 15{,}2$ cm $+ 11{,}2$ cm
$P = 26{,}4$ cm
Aire du carré EFGH $= 2{,}8^2$ cm^2 $= 7{,}84$ cm^2
Aire du rectangle ABCD $= 2{,}8$ cm $\times 7{,}6$ cm
$= 19$ cm^2
$7{,}84$ cm^2 $+ 19$ cm^2 $= 26{,}84$ cm^2
L'aire de cette surface est 26,84 cm^2.

71 5 cm + 12 cm + 13 cm = 30 cm
Le périmètre du triangle est 30 cm.
$\frac{5\text{ cm} \times 12\text{ cm}}{2} = 30\text{ cm}^2$
L'aire du triangle est 30 cm^2.

72 Le plus long côté du triangle rectangle est l'hypoténuse donc les côtés de l'angle droit mesurent 4,5 cm et 6 cm.
$\frac{4{,}5\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{2} = 13{,}5\text{ cm}^2$
L'aire du triangle est 13,5 cm^2.

73 L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AB \times CD}{2}$.
36 mm = 3,6 cm.
$\frac{9{,}6\text{ cm} \times 3{,}6\text{ cm}}{2} = 17{,}28\text{ cm}^2$
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AC \times EB}{2}$.
72 mm = 7,2 cm.
$\frac{7{,}2\text{ cm} \times 4{,}8\text{ cm}}{2} = 17{,}28\text{ cm}^2$
L'aire du triangle ABC est 17,28 cm^2.

74 **a.** La valeur exacte du périmètre d'un disque de rayon 3 cm est $2 \times \pi \times 3$ cm soit 6π cm.
b. $6\pi \approx 18{,}8$
Le périmètre du disque est environ 18,8 cm.

75 Si le diamètre est 5,6 cm, alors le rayon est 5,6 cm : 2 soit 2,8 cm.
$\pi \times 2{,}8^2 \approx 24{,}63$
L'aire du disque est environ 24,63 cm^2.

Fiche 20 : Grandeurs produits et grandeurs quotients

76 E = 3 kW × 10 min = 30 kW min.
10 min $= \frac{1}{6}$ h
E = 3 kW $\times \frac{1}{6}$ h = 0,5 kWh.

77 $\frac{64\ 400\ 000}{552\ 000} \approx 117$
En France métropolitaine, la densité de population est environ 117 hab/km^2.

78 2 h 30 min = 2,5 h

$\dfrac{275 \text{ km}}{2{,}5 \text{ h}} = 110 \text{ km/h}$

Sa vitesse moyenne est 110 km/h.

79 **a.** 5,4 km = 5 400 m et 1 h = 3 600 s

$\dfrac{5{,}4 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \dfrac{5\ 400 \text{ m}}{3\ 600 \text{ s}} = 1{,}5 \text{ m/s}$

Léa marche à la vitesse moyenne de 1,5 m/s.

b. 4 m = 0,004 km et 1 s = $\dfrac{1}{3\ 600}$ h

$\dfrac{4 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \dfrac{0{,}004 \text{ km}}{\dfrac{1}{3\ 600} \text{ h}} = 0{,}004 \times 3\ 600 \text{ km/h}$

$= 14{,}4 \text{ km/h}$

Théo court à la vitesse moyenne de 14,4 km/h.

80 Soit x la durée du trajet, en h.

$\dfrac{320 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \dfrac{408 \text{ km}}{x \text{ h}}$ donc $x = \dfrac{408}{320} \text{ h} = 1{,}275 \text{ h}$

0,275 h = 0,275 × 60 min = 16,5 min

0,5 min = 30 s

La durée du trajet est 1 h 16 min 30 s.

Fiche 21 : Représenter l'espace, calculer des volumes

81 **a.** $\mathcal{V} = 80 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 35 \text{ cm} = 84\ 000 \text{ cm}^3$.

Cet aquarium a un volume de 84 000 cm^3.

b. 84 000 cm^3 = 84 L

Pour remplir l'aquarium, il faut verser 84 L d'eau.

82 La tente est un prisme droit à base triangulaire.

$\mathcal{V} = \dfrac{1{,}20 \text{ m} \times 0{,}90 \text{ m}}{2} \times 2{,}10 \text{ m} = 1{,}134 \text{ m}^3$

Cette tente a un volume de 1,134 m^3.

83 Soit c le côté du carré ABCD,

d'après l'égalité de Pythagore, $2c^2 = 12^2$.

Donc $c^2 = 144 : 2 = 72$.

L'aire de la base est 72 cm^2.

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 72 \text{ cm}^2 \times 12 \text{ cm} = 288 \text{ cm}^3$

288 cm^3 = 28,8 cL

Ce flacon a une contenance de 28,8 cL.

84 Volume $\mathcal{V}_1$ du cylindre :

$\mathcal{V}_1 = \pi \times 2{,}5^2 \times 10 \text{ m}^3$

$\mathcal{V}_1 \approx 196{,}35 \text{ m}^3$

Volume $\mathcal{V}_2$ du cône :

$\mathcal{V}_2 = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 2{,}5^2 \times 5 \text{ m}^3$

$\mathcal{V}_2 \approx 32{,}72 \text{ m}^3$

196,35 + 32,72 = 229,07

Cette tour a un volume d'environ 229 m^3.

85 **a.** $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 10^3 \text{ cm}^3$ donc $\mathcal{V} \approx 4\ 189 \text{ cm}^3$.

Ce ballon a un volume d'environ 4 189 cm^3.

b. Si le diamètre est 24 cm, alors le rayon est 12 cm.

$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 12^3 \text{ cm}^3$ donc $\mathcal{V} \approx 7\ 238 \text{ cm}^3$.

Ce ballon a un volume d'environ 7 238 cm^3.

c. Si la circonférence est 69 cm, alors le rayon est $\dfrac{69}{2\pi}$ cm.

$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times \left(\dfrac{69}{2\pi}\right)^3 \text{ cm}^3$ donc $\mathcal{V} \approx 5\ 547 \text{ cm}^3$.

Ce ballon a un volume d'environ 5 547 cm3.

Fiche 22 : Repérage dans l'espace

86 A (0,5 ; 0 ; 0)

B (0 ; 0 ; 0,5)

C (0,5 ; 1 ; 1)

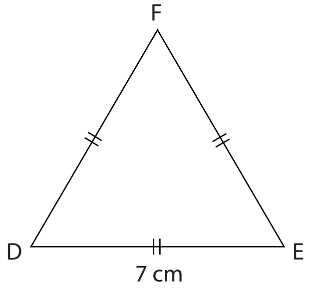
D (1 ; 1 ; 0,5)

87

Point	Longitude	Latitude
A	50° E	40° N
B	10° O	40° N
C	30° E	20° S
D	20° O	10° S
E	30° E	0°
F	50° O	0°

Fiche 23 : Triangles et droites remarquables

88 **a.** et **b.**

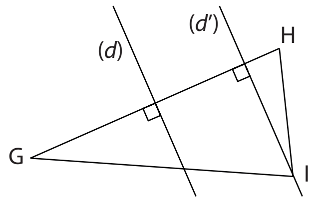


89 **a.** La droite (d) est la médiatrice du segment [AC].

La droite (d') est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

b. Dans le triangle AKC, la hauteur issue de K est la droite (d).

90



Les droites (d) et (d') sont toutes les deux perpendiculaires à (GH), elles sont donc parallèles.

91 **a.** AB est la plus grande longueur.

BC + AC = 7 cm + 5 cm = 12 cm et 9 cm < 12 cm.

Ainsi AB < BC + AC.

Il est donc possible de placer les points A, B et C et ils ne sont pas alignés.

b. AB est la plus grande longueur.
BC + AC = 2,2 cm + 4,3 cm = 6,5 cm
Ainsi AB = BC + AC.
Il est donc possible de placer les points A, B et C et ils sont alignés. Le point C est sur le segment [AB].

c. BC est la plus grande longueur.
AB + AC = 2,3 cm + 3,2 cm = 5,5 cm
et 7 cm $>$ 5,5 cm.
Ainsi BC $>$ AB + AC.
Il n'est donc pas possible de placer les points A, B et C.

Fiche 24 : Angles et parallélisme

92 **a.** Les angles $\widehat{tAv}$ et $\widehat{uAx}$ sont opposés par le sommet de même que les angles $\widehat{zBv}$ et $\widehat{uBy}$.
b. Les angles $\widehat{tAv}$ et $\widehat{uBy}$ sont alternes-internes de même que les angles $\widehat{vAx}$ et $\widehat{uBz}$.

93 **a.** $\widehat{DHG}$ et $\widehat{AGH}$ sont deux angles alternes-internes formés par les droites (AB) et (CD) coupées par la droite (EF).
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc $\widehat{DHG} = \widehat{AGH} = 56°$.
b. Les angles $\widehat{CHF}$ et $\widehat{DHG}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{CHF} = \widehat{DHG} = 56°$.
c. $\widehat{CHD} = 180°$ et $\widehat{DHF} = \widehat{CHD} - \widehat{CHF}$.
Donc $\widehat{DHF} = 180° - 56° = 124°$.
d. Les angles $\widehat{BGE}$ et $\widehat{AGH}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{BGE} = \widehat{AGH} = 56°$.

Fiche 25 : Angles d'un triangle

94 $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$
Donc $\widehat{BAC} = 180° - (16° + 56°)$
$\widehat{BAC} = 180° - 72°$
$\widehat{BAC} = 108°$.

95 **a.** Dans le triangle IGF,
$\widehat{FGI} + \widehat{GIF} + \widehat{IFG} = 180°$.
Donc $\widehat{FGI} = 180° - (112° + 30°)$
$\widehat{FGI} = 180° - 142°$
$\widehat{FGI} = 38°$.
b. $\widehat{FGI}$ et $\widehat{EHI}$ sont deux angles alternes-internes formés par les droites (EH) et (GF) coupées par la droite (GH).
$\widehat{FGI} = \widehat{EHI} = 38°$ donc les droites (EH) et (GF) sont parallèles.

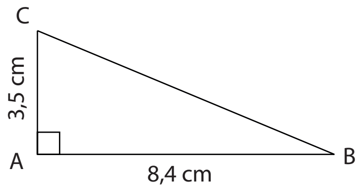
96 DEF est un triangle rectangle en D donc
$\widehat{EFD} + \widehat{DEF} = 90°$.
Ainsi $\widehat{EFD} = 90° - 23° = 67°$.

97 **a.** Si ISO est un triangle isocèle en I, alors $\widehat{IOS} = \widehat{ISO} = 32°$.
$\widehat{SIO} + \widehat{IOS} + \widehat{ISO} = 180°$
donc $\widehat{SIO} = 180° - 2 \times 32° = 180° - 64°$
donc $\widehat{SIO} = 116°$.
b. Si ISO est un triangle isocèle en S, alors $\widehat{SIO} = \widehat{IOS}$.
$\widehat{SIO} + \widehat{IOS} + \widehat{ISO} = 180°$
donc $\widehat{SIO} = \widehat{IOS} = \dfrac{180° - 32°}{2} = \dfrac{148°}{2}$.
donc $\widehat{SIO} = \widehat{IOS} = 74°$.

98 **a.** 90° – 45° = 45° donc si un triangle rectangle a un angle de 45°, alors il a un autre angle de 45°. Ce triangle est donc rectangle et isocèle.
b. Si 60° est un angle à la base, alors l'autre angle à la base mesure aussi 60°. L'angle au sommet mesure alors 180° – 2 × 60° c'est-à-dire 180° – 120° soit 60°.
Si 60° est l'angle au sommet principal, alors chaque angle à la base mesure $\dfrac{180° - 60°}{2}$ c'est-à-dire $\dfrac{120°}{2}$ soit 60°.
Ce triangle a donc trois angles de 60°, c'est un triangle équilatéral.

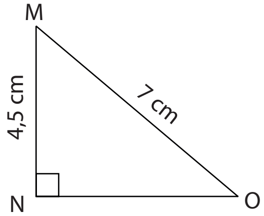
Fiche 26 : Le théorème de Pythagore et sa réciproque

99 **a.**



b. Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$. D'où $BC^2 = 8,4^2 + 3,5^2$.
$BC^2 = 82,81$, donc $BC = \sqrt{82,81}$.
Avec la calculatrice, on trouve BC = 9,1 cm.

100 **a.** Échelle 1/2.



b. Dans le triangle MNO rectangle en N, d'après le théorème de Pythagore :
$MO^2 = MN^2 + NO^2$. D'où $NO^2 = 7^2 - 4,5^2$.
$NO^2 = 28,75$, donc $NO = \sqrt{28,75}$.
Avec la calculatrice, on trouve NO ≈ 5,4 cm.

101 $3,5^2 = 12,25$; $2,1^2 = 4,41$ et $2,8^2 = 7,84$.
4,41 + 7,84 = 12,25, ainsi $DE^2 = DF^2 + EF^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle DEF est rectangle en F.

102 La plus grande longueur est LM.
$73^2 = 5\,329$; $48^2 = 2\,304$ et $55^2 = 3\,025$.
2 304 + 3 025 = 5 329,
ainsi $LM^2 = KL^2 + KM^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle KLM est rectangle en K. Maria a tort. Pour vérifier si l'égalité de Pythagore est vraie, il faut ajouter les

carrés des deux plus petites longueurs et comparer cette somme au carré de la plus grande longueur.

Fiche 27 : Quadrilatères

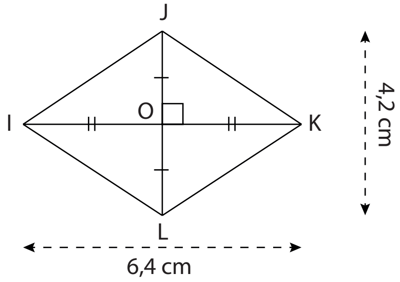
103 **a.** Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur donc BC = AD.
Ainsi BC = 1,5 cm.

b. Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur donc DC = AB.
Ainsi DC = 3 cm.

c. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu donc $AO = \frac{AC}{2} = \frac{4,2}{2}$.
Ainsi AO = 2,1 cm.

d. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu donc BD = 2 × OD. Ainsi BD = 2 × 1,1 cm = 2,2 cm.

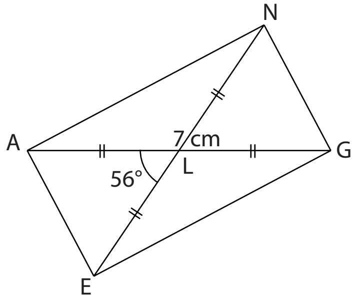
104 **a.**



b. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires donc $\widehat{KOJ} = 90°$.

c. Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu donc $IO = \frac{IK}{2} = \frac{6,4}{2}$.
Ainsi IO = 3,2 cm.

105



106 **a.** CASE est un parallélogramme qui a des diagonales perpendiculaires donc CASE est un losange.

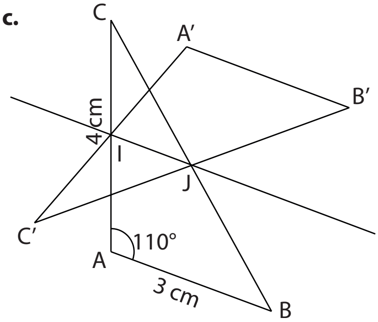
b. PAGE est un parallélogramme qui a des diagonales de même longueur donc PAGE est un rectangle.

c. MOTS est un rectangle qui a des diagonales perpendiculaires donc MOTS est un carré.

d. AIDE est un losange qui a un angle droit donc AIDE est un carré.

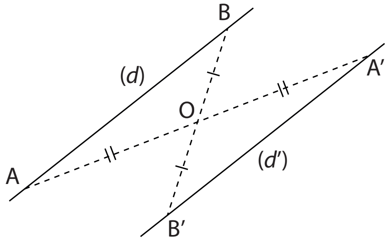
Fiche 28 : Symétries

107 **a.** à **c.**



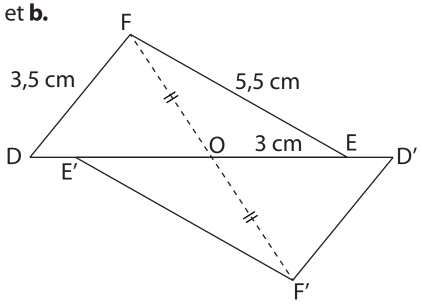
d. La symétrie axiale conserve les longueurs donc A′B′ = AB et A′C′ = AC.
Ainsi A′B′ = 3 cm et A′C′ = 4 cm.
La symétrie axiale conserve les mesures d'angles donc $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.
Ainsi $\widehat{B'A'C'} = 110°$.

108



Le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite parallèle donc les droites (*d*) et (*d*′) sont parallèles.

109 **a.** et **b.**

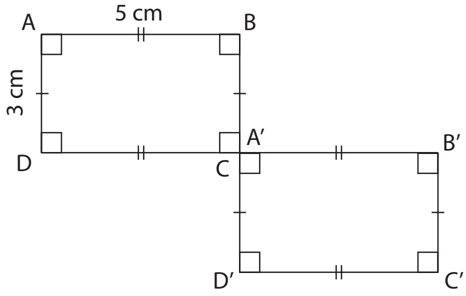


Fiche 29 : Translations et rotations

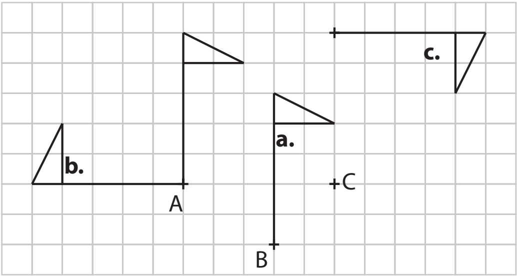
110 **a.** On passe de la figure 1 à la figure 2 par une translation.

b. On passe de la figure 1 à la figure 2 par une rotation.

111



112 **a.** à **c.**



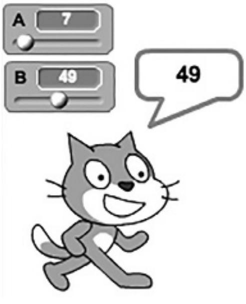
Fiche 30 : Variables dans un programme

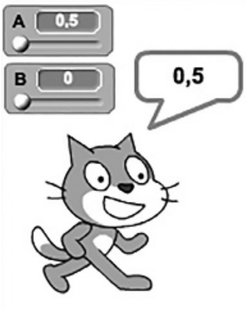
113 **a.** 36 **b.** 75 **c.** 30 **d.** 0

114 Le résultat de ce calcul est 5(1 + 2X).

Fiche 31 : Instructions conditionnelles et boucles

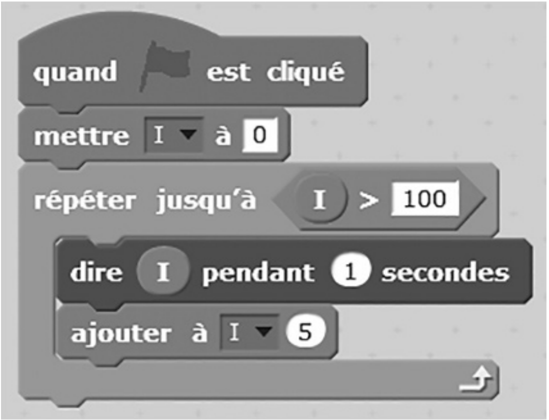
115 **a.**





b. Ce programme donne le carré du nombre entré si le nombre entré est négatif ou supérieur à 1 car son carré lui est supérieur. Si le nombre est compris entre 0 et 1, alors ce programme donne le nombre entré car son carré lui est inférieur.

116 **a.**



b. Au bout de 10 secondes :

trans math 3e

Une collection complète pour les mathématiques au collège

En complément du manuel de l'élève et du livre du professeur :

Un cahier

pour tous les élèves de 3e quel que soit le manuel utilisé en classe

Des ressources numériques

- Des exercices interactifs supplémentaires
- Les activités TICE
- Les documents à photocopier

Comment y accéder ?

GRATUIT
Site compagnon

Depuis le site compagnon sur **transmath-college.nathan.fr**

Manuel numérique ENSEIGNANT

Depuis le manuel numérique personnalisable et enrichi

Des QCM interactifs

ViaScola

Des évaluations diagnostiques, formatives et sommatives sur ViaScola.

ISBN 978 209 171946 7
9 782091 719467

Nathan