Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S Asie 18 juin 2019 ∾

Exercice I 6 points

Commun à tous les candidats

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1. Le café est chaud au départ, dans une pièce dont la température est fraiche ; le café va refroidir et sa température va aller vers celle de la pièce, donc la suite est décroissante.
2. Pour tout n, $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10) \iff T_{n+1} = \boxed{T_n - 0,2(T_n - 10) = 0,8T_n + 2}$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.

   a. Pour tout n, $u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = 0,8T_n + 2 - 10 = 0,8T_n - 8 = 0,8(T_n - 10) = 0,8u_n$ donc $\boxed{u_{n+1} = 0,8u_n}$.
   La suite (u_n) est géométrique, de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70$.

   b. On en déduit que, pour tout n, $u_n = u_0 q^n = 70 \times 0,8^n$ donc, comme $u_n = T_n - 10 \iff T_n = u_n + 10$, on a donc $\boxed{T_n = 70 \times 0,8^n + 10}$.

   c. $-1 < 0,8 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ et aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 70 \times 0,8^n = 0$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = 10}$.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
        T ← 0,8T + 2
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

   a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
   On obtient les valeurs 80 ; 66 ; 54,8 ; 45,84 ; 38,672.
   À la fin de l'algorithme, n vaut 4.

   b. $\boxed{\text{Au bout de 4 minutes, la température du café est tombée à 40 °C}}$.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.

a. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

f est un quotient : $f'(t) = \dfrac{\theta'(t)\times \mathrm{e}^{-0,2t} - \theta(t)\times\left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2} = \dfrac{-0,2\theta(t)\mathrm{e}^{-0,2t} + 0,2\theta(t)\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$

$f'(t) = \boxed{0}$.

b. $f(0) = \dfrac{80}{1} = 80$.

Puisque $f'(t) = 0$ pour tout t, f est **constante**, donc, pour tout t, $f(t) = f(0) = 80$ d'où $\boxed{\theta(t) = 80\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

c. $\theta(0) = 80$ et $\theta'(t) = 80\times\left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right) = -0,2\theta(t)$ donc θ est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

Une personne aime boire son café à 40 °C.

g est dérivable ; $g'(t) = 70\times\left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right) = -14\mathrm{e}^{-0,2t} < 0$ donc g est strictement décroisante sur $[0\,;\,+\infty[$.

- g est continue (dérivable donc continue ou somme, produit et composée de fonctions continues)
- $g(0) = 80 > 40$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 10 < 40$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0,2t) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 70\mathrm{e}^{-0,2t} = \lim\limits_{T\to-\infty} 70\mathrm{e}^{T} = 0$.

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(t) = 40$ a au moins une solution. Comme la fonction est décroissante, cette solution est unique ; on la note t_0.
À la calculatrice, on trouve $t_0 = 4,236$ (min), donc environ 4 min 14 s.
Le café est à une température de 40°au bout de 4 min 14 s environ.

Exercice II — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Il est attribué un point si la lettre correspond à l'affirmation exacte, 0 sinon.

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace.

Les quatre questions sont indépendantes.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère le plan P d'équation cartésienne $3x+2y+9z-5=0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4t+3\\ y &=& -t+2\\ z &=& -t+9\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation A : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(3\,;2\,;9)$.

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in P \cap d \iff \left\{\begin{array}{l} x=4t+3\\ y=-t+2\\ z=-t+9\\ 3x+2y+9z-5=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=4t+3\\ y=-t+2\\ z=-t+9\\ 3(4t+3)+2(-t+2)+9(-t+9)-5=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=4t+3\\ y=-t+2\\ z=-t+9\\ t+89=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-353\\ y=91\\ z=98\\ t=-89\end{array}\right. .$$

L'affirmation est **fausse**

Affirmation B : le plan P et la droite d sont orthogonaux.

Un vecteur normal au plan P est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\9\end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires donc d et P ne sont pas orthogonaux.
L'affirmation B est **fausse**

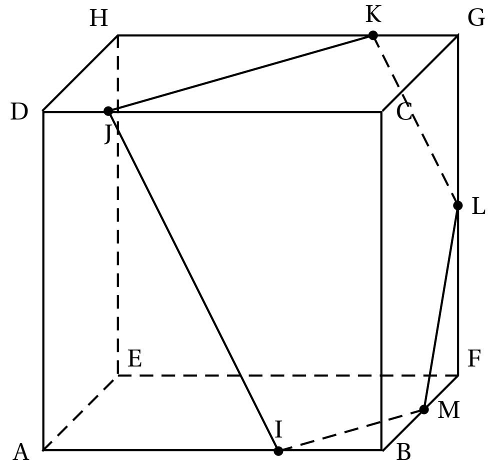
Affirmation C : le plan P et la droite d sont parallèles.
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 3\times 4+2\times(-1)+9\times(1) = 12-2+9 \neq 0$ donc $\overrightarrow{u}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{n}$, vecteur normal à P; le plan P et la droite d ne sont pas parallèles.
L''affirmation C est **fausse**.

Affirmation D : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353\,;\,91\,;\,98)$.
Vrai, puisque l'on a trouvé les coordonnées du point d'intersection pour la première affirmation.

2.

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous et les points I, J et K définis par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DC}},\ \overrightarrow{\mathrm{HK}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}.$$



On cherche la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) :
On trace le segments [IJ] et [JK].
Le plan (ABC) est parallèle au plan (EFG) ; le plan (IJK) coupe ces deux plans selon deux droites parallèles, donc on trace le segment [KL], parallèle au segment [IJ].
De même, le plan (IJK) coupe les plans parallèles (ABF) et (DCG) selon deux droites parallèles ; on trace alors le segment [IM], parallèle au segment [JK].
On trace alors [KL].
La section du cube par le plan (IJK) est donc un pentagone IJKLM. (**affirmation C**)

3. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l c r}x &=& t+2\\ y &=& 2\\ z &=& 5t-6\end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, et le point A$(-2~;~1~;~0)$. Soit M un point variable de la droite d.

On a :
$AM^2 = (t+2+2)^2+(2-1)^2+(5t-6)^2 = (t+4)^2+1+(5t-6)^2 = t^2+8t+16+1+25t^2-60t+36$
$= 26t^2-52t+53$.
Le coefficient de t^2 est $26 > 0$: le polynôme du second degré atteint donc son minimum pour $t = -\dfrac{52}{2\times 26} = 1$.
Ce minimum vaut $\boxed{27}$.
Ainsi la plus petite longueur AM est-elle égale à $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. (**Affirmation B**)

4. On considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ et le plan P' d'équation cartésienne $2x-y+2=0$.

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P ; $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc l'affirmation A est fausse.
Le point B ne vérifie pas l'équation cartésienne du plan P'. Affirmation B fausse.
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = -1 \neq 0$. Aucune droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ n'est incluse dans le plan P.
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{u} = 0$. De plus les coordonnées du point D vérifient les deux équations cartésiennes.
L'affirmation D est vraie

Exercice III 5 points

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes.
Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au millième.

Partie A

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.
En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio. De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.
On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

- F l'évènement « la personne choisie est une femme » ;
- H l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- B l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

1. Traduction des données :
$\boxed{P(F) = 0,52}$; $\boxed{P(B) = 0,92}$; $\boxed{P_B(F) = 0,55}$.
2. **a.** On a : $P(F \cap B) = P_B(F) \times P(B) = 0,55 \times 0,92 = 0,506$

   b. On en déduit : $P_F(B) = \dfrac{P(F \cap B)}{P(F)} = \dfrac{0,506}{0,52} \approx \boxed{0,973}$.
   La probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme vaut environ 0,973.
3. $P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap H)$ donc $P(B \cap H) = P(B) - P(B \cap F) = 0,92 - 0,506 = 0,414$.
On a $P_H(B) = \dfrac{P(B \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0,414}{0,48}$ donc $P_H\left(\overline{B}\right) = 1 - \dfrac{0,414}{0,48} = \boxed{0,1375}$

Partie B

Dans un supermarché, un chef de rayon souhaite développer l'offre de produits bio.
Afin de justifier sa démarche, il affirme à son responsable que 75 % des clients achètent des produits bio au moins une fois par mois.
Le responsable souhaite vérifier ses dires. Pour cela, il organise un sondage à la sortie du magasin. Sur 20 000 personnes interrogées, 1 421 répondent qu'elles consomment des produits bio au moins une fois par mois.
La proportion théorique de personnes achetant des produit bio au moins une fois par mois est $p = 0,75$.
La taille de l'échantillon est $n = 2000$.
On a : $\begin{cases} n = 2000 \geqslant 30 \\ np = 1500 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 500 \geqslant 5 \end{cases}$.
Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est alors :
$I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,75 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,75 \times 0,25}}{\sqrt{2000}}\ ;\ 0,75 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,75 \times 0,25}}{\sqrt{2000}}\right]$
$\boxed{\approx [0,731\ ;\ 0,769]}$.
La fréquence observée réelle est $f = \dfrac{1421}{2000} \approx \boxed{0,7105 \notin I}$.
Au risque d'erreur de 5 %, on peut dire que l'affirmation du chef de rayon est **fausse**.

Partie C

Pour promouvoir les produits bio de son enseigne, le responsable d'un magasin décide d'organiser un jeu qui consiste, pour un client, à remplir un panier avec une certaine masse d'abricots issus de l'agriculture biologique. Il est annoncé que le client gagne le contenu du panier si la masse d'abricots déposés est comprise entre $3,2$ et $3,5$ kilogrammes.

La masse de fruits en kg, mis dans le panier par les clients, peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f définie sur l'intervalle $[3; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}.$$

Rappel : on appelle fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ toute fonction f définie, continue et positive sur $[a\,;\,b]$, telle que l'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$ est égale à 1.

1. On pose $u(x) = x-2$: alors $u'(x) = 1$. On en déduit $f = 2\times\frac{u'}{u^2}$. Une primitive est alors $F = 2\times -\frac{1}{u} = -2\times\frac{1}{u}$ d'où $F(x) = -2\times\frac{1}{x-2}$
   On en déduit : $\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4)-F(3) = -2\left[\frac{1}{2}-1\right] = -2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.
   f est donc bien une fonction de densité sur $[3\,;\,4]$.
2. $P(3,2 \leqslant X \leqslant 3,5) = \int_{3,2}^{3,5} f(x)\,\mathrm{d}x = F(3,5)-F(3,2) = -2\left[\frac{1}{1,5}-\frac{1}{1,2}\right] = -2\left[\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right] = -2\times\left(-\frac{1}{6}\right)$
   $= \boxed{\frac{1}{3}}$.
   L'annonce est donc **exacte**.
3. Cette question a pour but de calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
   On rappelle que, pour une variable aléatoire X de densité f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, $\mathrm{E}(X)$ est donnée par : $\mathrm{E}(X) = \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Soit $G(x) = \ln(x-2) - \frac{x}{x-2}$.
   On sait que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ donc $G'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1\times(x-2)-1\times x}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2} = \frac{1(x-2)+2}{(x-2)^2} = \frac{x}{(x-2)^2}$.
   G est bien une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{x}{(x-2)^2}$.
   b. On a : $E(X) = \int_3^4 xf(x)\,\mathrm{d}x = [2G(x)]_3^4 = 2\,[G(4)-G(3)]$.
   $G(4) = \ln 2 - 2$; $G(3) = -3$ donc $E(X) = 2(1+\ln 2) \approx 3,39$; $\boxed{E(X) = 2(1+\ln 2) \approx 3,39}$
   En moyenne, la masse du panier déposé par les clients est environ égale à 3,39 kg.

Exercice IV — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématique

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2 + \left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 8\mathrm{i} = 0 \quad (E).$$

   a. $(-2\mathrm{i})^3 + \left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)\times(-2\mathrm{i})^2 + \left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\times(-2\mathrm{i}) + 8\mathrm{i}$
   $= 8\mathrm{i} + \left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)\times(-4) + \left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\times(-2\mathrm{i}) + 8\mathrm{i}$
   $= 8\mathrm{i} + 8\sqrt{3} - 8\mathrm{i} - 8\mathrm{i} - 8\sqrt{3} + 8\mathrm{i} = \boxed{0}$.
   $-2\mathrm{i}$ est donc bien une solution de l'équation (E).
   b. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $(z+2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right) = z^3 - 2\sqrt{3}z^2 + 4z + 2\mathrm{i}z^2 - 4\sqrt{3}\mathrm{i}z + 8\mathrm{i}$
   $= z^3 + \left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2 + \left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 8\mathrm{i}$. Donc : $z^3 + \left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2 + \left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 8\mathrm{i} = (z+2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$.

c. Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, un l'un des facteurs est nul.
On a :

- $z+2\text{i}=0$ donc $z_1=-2\text{i}$
- $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$
$\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times 4=12-16=-4<0$; l'équation a deux solutions complexes conjuguées.
$z_2=\dfrac{2\sqrt{3}-(2\text{i})}{2}=\sqrt{3}-\text{i}$ et $z_3=\overline{z_2}=\sqrt{3}+\text{i}$

Les solutions de (E) sont : $\boxed{\mathcal{S}=\{-2\text{i}\,;\ \sqrt{3}-\text{i}\,;\ \sqrt{3}+\text{i}\}}$.

d.
- $z_1=-2\text{i}=2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}$.
$z_2=\sqrt{3}-\text{i}=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}\right)=2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
- $z_3=\overline{z_2}=2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3}+\text{i}$ et $\sqrt{3}-\text{i}$.

a. On a $|z_1|=2$; $|z_2|=2$ et $|z_3|=\left|\overline{z_2}\right|=2$ donc $\boxed{OA=OB=OC=2}$.
A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b. Voir figure en fin d'exercice.

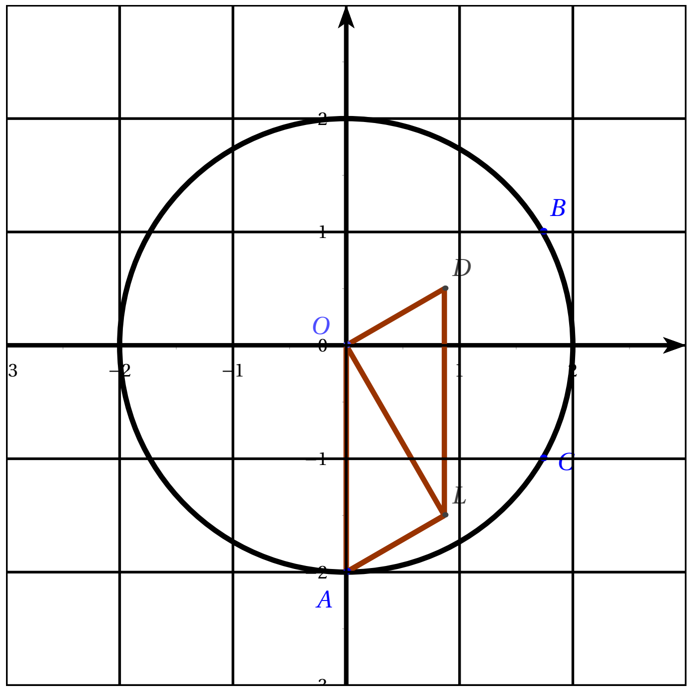
c. AODL est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{LD} \iff -z_A=z_D-z_L \iff z_A=z_L-z_D$ donc $z_L=z_A+z_D=z_A+\dfrac{1}{2}z_B=-2\text{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i}}$.

2. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;\ y)$ et $(x'\,;\ y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$.

a. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
$z\overline{z'}=(x+\text{i}y)\left(x'-\text{i}y'\right)=xx'+yy'+\text{i}\left(x'y-xy'\right)$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx'+yy'=0 \iff \text{Re}\left(z\overline{z'}\right)=0$, donc si, et seulement si, $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

b. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OL}$ est $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i}$.
Celle du vecteur $\overrightarrow{AL}$ est $z'=z_L-z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i}+2\text{i}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$.
Alors : $z\overline{z'}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{i}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\text{i}-\dfrac{3}{4}=-\sqrt{3}\text{i}\in\text{i}\mathbb{R}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AL}$ donc donc orthogonaux; le triangle AOL est bien **rectangle** en L.

Figure



Exercice V Exercice IV 5 points

Candidats ayant suivi la spécialité mathématique

On note r l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes, à coefficients entiers.

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de r. À U et V, on associe la matrice $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ et le nombre $d(A) = u_1 v_2 - u_2 v_1$.

On dit que $(U,\ V)$ est une base de r si et seulement si, pour tout élément X de r, il existe un unique couple d'entiers relatifs $(a\ ;\ b)$ tel que $X = aU + bV$.

1. Dans cette question, on pose $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

a. $X = aU + bV \iff \begin{cases} 2a + b = 10 \\ a + 2b = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b = 10 \\ 2a + 4b = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b = 10 \\ 3b = 10 \end{cases}$ donc b n'est pas entier; Xne peut pas s'écrire comme $aU + bV$ avec $a$et b entiers relatifs.

b. Le couple $(U\ ;\ V)$ n'est donc pas une base de r puisque $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $aU + bV$.

Dans la suite de l'exercice, on souhaite illustrer sur un exemple la propriété : « si $d(A) = 1$, alors (U, V) est une base de r ».

1. En posant $U = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$ le but de cette question est de déterminer $V \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tel que $d(A) = 1$. On rappelle dans ce cas que la matrice A associée au couple $(U,\ V)$ s'écrit : $A = \begin{pmatrix} 6 & v_1 \\ -11 & v_2 \end{pmatrix}$.

a. $d(A)=1 \iff 6v_2+11v_1=1 \iff \boxed{11v_1+6v_2=1}$.

b. On considère l'équation (E) : $11x+6y=1$, où x et y sont des entiers relatifs.
$11\times(-1)+6\times 2=1$ donc le couple $(-1\,;\,2)$ est une solution particulière de cette équation.

c. $(E) \iff 11x+6y=1 \iff 11x+6y=11\times(-1)+6\times 2 \iff 11(x+1)=6(2-y)$.
11 divise $11(x+1)$ donc 11 divise 6(2-y) ; 11 et 6 sont premiers entre eux. D'après le **théorème de Gauss**, 11 divise $2-y$ donc $2-y=11k,\ k\in\mathbb{Z}$ d'où $y=2-11k,\ k\in\mathbb{Z}$.
On remplace dans l'équation : $11(x+1)=6\times 11k$ d'où, en divisant par 11 non nul, $x+1=6k$ qui donne $x=-1+11k$.
L'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\mathscr{S}=\{(-1+6k\,;\,2-11k),\ k\in\mathbb{Z}\}}$

d. Pour $k=1$, on trouve $x=5$ donc $0\leqslant x\leqslant 10$ et $y=-9$.
La matrice $V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}$ vérifie $d(A)=1$ et $0\leqslant v_1\leqslant 10$.

2. Dans cette question, on pose $U=\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}$. Ainsi $A=\begin{pmatrix}6&5\\-11&-9\end{pmatrix}$.

a. On pose $B=\begin{pmatrix}-9&-5\\11&6\end{pmatrix}$.
$A\times B=\begin{pmatrix}6&5\\-11&-9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-9&-5\\11&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\times(-9)+5\times 11 & 6\times(-5)+5\times 6\\-11\times(-9)+(-9)\times 11 & -11\times(-5)+(-9)\times 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$ Id en notant Id la matrice identité .
De même : $B\times A=\begin{pmatrix}-9&-5\\11&6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6&5\\-11&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$ Id. $AB=BA=Id$ donc A est inversible et $A^{-1}=B=\begin{pmatrix}-9&-5\\11&6\end{pmatrix}$.

b. Soit X un élément de r.
$X=aU+bV \iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x=6a+5b\\y=-11a-9b\end{cases} \iff \boxed{X=A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}$.

c. $X=a\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \iff A^{-1}X=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Ainsi, pour une matrice X de r donnée, existe-til une unique matrice $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ telle que $X=A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

d. Si $X=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-5\\11&6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-33\\40\end{pmatrix}$.
On en déduit $\boxed{a=-33}$ et $\boxed{b=40}$