Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Une société propose un service d'abonnement pour jeux vidéo sur téléphone mobile.
Le 1$^{\text{er}}$ janvier 2016, on compte 4 000 abonnés.
À partir de cette date, les dirigeants de la société ont constaté que d'un mois sur l'autre, 8 % des anciens joueurs se désabonnent mais que, par ailleurs, 8 000 nouvelles personnes s'abonnent.

1. Calculer le nombre d'abonnés à la date du 1$^{\text{er}}$ février 2016.

Pour la suite de l'exercice, on modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre de milliers d'abonnés au bout de n mois après le 1$^{\text{er}}$ janvier 2016.

La suite (u_n) est donc définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,92u_n + 8.$$

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables
N est un nombre entier naturel
U est un nombre réel
Traitement
U prend la valeur 4
N prend la valeur 0
Tant que $U < 40$
U prend la valeur $0,92 \times U + 8$
N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

a. Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Les valeurs de U seront arrondies au dixième.

Valeur de U	4	...	...
Valeur de N	0	...	...
Condition $U < 40$	vraie	...	...

b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 100$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,92 et calculer son premier terme v_0.

b. Donner l'expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 100 - 96 \times 0,92^n$.

4. En résolvant une inéquation, déterminer la date (année et mois) à partir de laquelle le nombre d'abonnés devient supérieur à 70 000.

EXERCICE 2

[Amérique du Nord 2016]

1. Calculons le nombre d'abonnés à la date du 1er février 2016:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 8\%)\ U_0 + 8000 \iff U_1 = 0,92 \times 4000 + 8000$

$\Rightarrow U_1 = 11680$ abonnés.

Ainsi, le nombre d'abonnés à la date du 1er février 2016 est de: 11680.

2. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

Valeur de U	4	11, 7	18, 7	25, 2	31, 2	36, 7	41, 8
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition U < 40	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Fausse

2. b. Donnons et interprétons la valeur affichée en sortie:

La valeur affichée en sortie par cet algorithme est: $N = 6$.

Cela signifie que 6 mois après le 1er janvier 2016, le nombre total d'abonnés sera supérieur ou égal à 40000.

En d'autres termes, à partir du 1er juillet 2016, le nombre total d'abonnés sera supérieur ou égal à 40000.

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 100 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 100$

$\iff V_{n+1} = (0,92\, U_n + 8) - 100 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 100 \Rightarrow V_0 = -96$ et $U_n = V_n + 100$.

Ainsi: (1) $\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,92\,[V_n + 100] + 8) - 100$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,92\, V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = -96$.

3. b. Exprimons (V_n) en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,92\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,92)^n, \quad \text{avec: } V_0 = -96.$$

3. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $U_n = 100 - 96 \times 0,92^n$:

Nous savons que: * $V_n = -96 \times (0,92)^n$

* $U_n = V_n + 100$.

D'où: $U_n = 100 - 96 \times 0,92^n$.

4. Résolvons l'inéquation $U_n > 70$*:

(* car: 70000 correspond à 70 en milliers d'abonnés)

$$U_n > 70 \Leftrightarrow 100 - 96 \times 0,92^n > 70$$

$$\Leftrightarrow -96 \times 0,92^n > -30$$

$$\Leftrightarrow 96 \times 0,92^n < 30$$

$$\Leftrightarrow 0,92^n < \frac{30}{96}$$

$$\Leftrightarrow 0,92^n < \frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,92) < \ln\left(\frac{5}{16}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\frac{5}{16}\right)}{\ln(0,92)}, \quad \text{car:} \quad 0,92 \in]0,1[, \quad \text{et donc:} \quad \ln(0,92) < 0$$

$$\Longrightarrow \quad n > 13,9497.$$

Nous prendrons $n = 14$ car n est un entier naturel.

Ainsi, 14 mois après le 1er janvier 2016, le nombre d'abonnés deviendra supérieur à 70 000.

En d'autres termes, le 1er mars 2017, le nombre d'abonnés deviendra supérieur à 70 000.