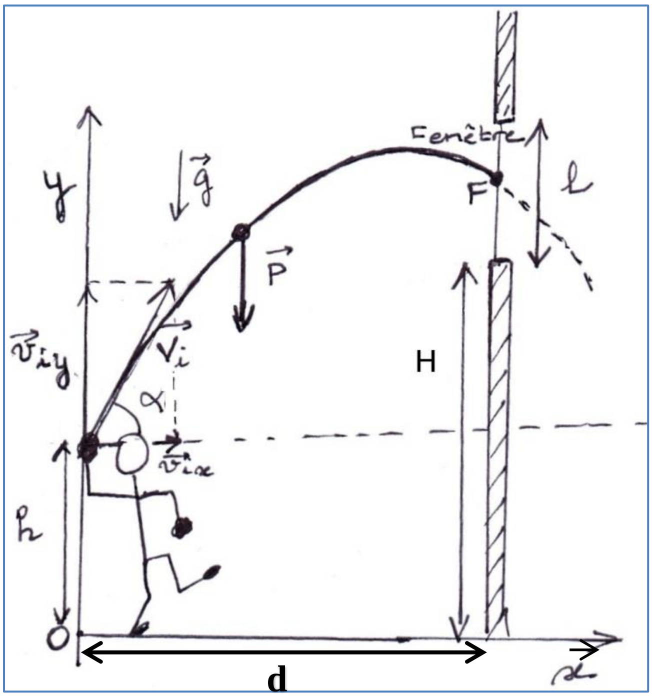
Exercice corrigé Ch. 6 p : 174 n°15 Applications des lois de Newton.

Visée d'une fenêtre en lançant une pierre.

La nuit tombée, Roméo se tient à une distance d de la maison de Juliette. Il lance un caillou de de masse m vers la fenêtre de hauteur l et qui est située à la hauteur h du sol. L'origine du repère est pris au niveau du sol, à l'endroit où se trouve Roméo avec une vitesse initiale de valeur v_i, faisant un angle α avec l'horizontale. A cet instant, elle se trouve à une hauteur h = 2,0 m du sol.
L'origine du repère d'espace est prise au niveau du sol, à l'endroit où se trouve Roméo. L'axe vertical est orienté vers le haut. Le référentiel est supposé galiléen. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme et vaut 9 ,81 m.s^{-2}.
Données : d = 2,0 m ; l = 1,0 m ; H = 4,5 m ; α = 60 °.
1) Schématiser la situation. Préciser les conditions initiales.
2) Dans l'hypothèse où la pierre est en chute libre, déterminer son vecteur accélération dans le référentiel terrestre.
Précisez la loi appliquée.
3) Montrer que les équation horaires sont : $x(t) = v_i.\cos\alpha.\,t$
$y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_i.\sin\alpha.\,t + h$
4) En déduire l'équation de la trajectoire de la pierre.
5) Roméo lance la pierre avec une vitesse initiale v_i égale à 10 m.s^{-1}. La pierre atteindra-t-elle la fenêtre de Juliette ?
Conseil : on pourra appeler F le point où le caillou atteint éventuellement la fenêtre.

CORRECTION :



1) Schéma de la situation :

Conditions initiales (t = 0) :
•Position initiale : $x_0 = y_0 = 0$ soit $\overrightarrow{OM_0}\begin{cases}x_0 = 0\\ y_0 = h\end{cases}$

• Vitesse initiale : $\vec{V_i} = \vec{V_{xi}} + \vec{V_{yi}} = v_i.\cos\alpha\,.\,\vec{i} + v_i.\sin\alpha\,\vec{j}$
$\vec{V_i}\begin{cases}v_{ix} = v_i.\cos\alpha\\ v_{iy} = v_i.\sin\alpha\end{cases}$

2) Vecteur accélération dans le référentiel terrestre

• Système { le caillou }
• Référentiel : terrestre, supposé galiléen
• Inventaire des forces : unique force :
- le poids $\vec{P}$, suivant la verticale vers le bas
Les valeurs des forces exercées par l'air sont très faibles devant celle du poids.
•La deuxième loi de Newton s'écrit :
$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ soit $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$
On a donc: $\vec{P} = m.\vec{a}$ D'où $m.\vec{g} = m.\vec{a}$ soit $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$
On est bien dans le cas **d'une chute libre** : L'unique force qui intervient est le poids $\vec{P}$. Le vecteur accélération est égal au vecteur champ de pesanteur.

3) **Les équations horaires :** Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$\vec{a}\begin{cases}a_x = 0\\ a_y = -g\end{cases}$ Par intégration et en tenant compte des conditions initiales $\vec{v}\begin{cases}v_x = C_1 = v_i.\cos\alpha\\ v_y = -g.t + C_2 = -g.t + v_i.\sin\alpha\end{cases}$ De même par intégration $\overrightarrow{OM}\begin{cases}\mathbf{x = v_i.(\cos\alpha).t + C_3} \text{ avec } C_3 = x_0 = 0\\ \mathbf{y = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_i.(\sin\alpha).t + C_4} \text{ avec } C_4 = y_0 = h\end{cases}$

Les équations horaires sont donc : et

$\mathbf{x(t) = v_i.(\cos\alpha).t}$ (1)
$\mathbf{y = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_i.(\sin\alpha).t + h}$ (2)

(1) : La projection du movement sur l'axe des x est rectiligne uniforme.
(2): La projection du movement sur l'axe des y est rectiligne uniformémeént varié.

4) En déduire l'équation de la trajectoire de la pierre.

Elle est de la forme y = f(x). **On élimine t entre (1) et (2).** De (1), on tire : $t = x / v_i.\cos\alpha$, puis on remplace dans l'équation (2) : $y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_i^2.\cos^2\alpha} + v_i.(\sin\alpha).\frac{x}{v_i.\cos\alpha} + h$ soit

$$\mathbf{y = -\frac{g}{2\,v_i^2.\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)\,x + h}$$

5) Roméo lance la pierre avec une vitesse initiale v_i égale à 10 m.s^{-1}. La pierre atteindra-t-elle la fenêtre de Juliette ?

Il s'agit de déterminer les coordonnées de F : pont d'impact de la pierre sur la fenêtre (x_F = d = 2,0 m ; y_F = ?). La fenêtre est atteinte si $H < y_F < H + l$. En remplaçant : $4{,}5\text{ m} < y_F < 4{,}5 + 1{,}0$ m soit $\mathbf{4{,}5\ m < y_F < 5{,}5\ m}$
En tenant compte de l'équation de la trajectoire : $\mathbf{y_F = -\frac{g}{2\,v_i^2.\cos^2\alpha}x_F^2 + (\tan\alpha.)\,x_F + h}$. On remplace par les valeurs numériques :

$y_F = -\frac{9{,}81.}{2\,x.10{,}0^2\,x\,\cos^2 60°}2{,}0^2 + (\tan 60°)\,.2{,}0 + 2{,}0$. On a $\tan 60° = 1{,}73$ et $\cos 60° = 0{,}50$

y_F = 4,7 m. On a bien : 4,5 m < y_F < 5,5 m donc **la pierre atteint la fenêtre de Juliette**.