Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 19 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 4 (5 *points*)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,520$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1\,520$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à $2\,000$.

```
n ← 0
u ← 3 000
Tant que ……
    | n ← ……
    | u ← ……
Fin de Tant que
```

La notation « ⟵ » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \longleftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2018]

1. Justifions que $U_1 = 2926$:

Il s'agit de calculer U_1.

U_1 est tel que: $U_1 = (1 - 5\%) \times (U_0 + 80)$

$\iff U_1 = 0,95 \times (U_0 + 80)$

$\iff U_1 = 0,95 \times (3000 + 80)$

$\Rightarrow U_1 = 2926$ cétacés.

Au total: le nombre de cétacés au 1er juin est de 2926.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,95\, U_n + 76$:

• D'après l'énoncé, le nombre de cétacés au 1er juin 2017 est de **3000**.

D'où: $U_0 = 3000$ cétacés.

• De plus, chaque année, 80 cétacés arrivent **(entre le 1er juin et le 31 octobre)** dans la réserve marine et cette dernière subit une baisse de 5% de son effectif total **(entre le 1er novembre et le 31 mai)**.

Soient: • U_{n+1}, le nombre de cétacés au 1er juin de l'année 2017 + (n+1),

• U_n, le nombre de cétacés au 1er juin de l'année 2017 + (n).

Pour tout entier naturel n, le nombre de cétacés U_{n+1} est:

$$U_{n+1} = (1 - 5\%) \times (U_n + 80)$$

$$= 0,95 \times (U_n + 80)$$

$$= 0,95\ U_n + 76.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,95\ U_n + 76.$

3. Déterminons la formule demandée:

La formule à entrer dans la cellule C_2 est:

- En C_2: on entre << = (B_2 + 80) * 0, 95 >>.

4. a. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $U_n \geqslant 1520$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant 1520$ ".

Initialisation: • $U_0 \geqslant 1520$?

oui car: $U_0 = 3000 \geqslant 1520$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \geqslant 1520$
et montrons qu'alors $U_{n+1} \geqslant 1520$.

Supposons: $U_n \geqslant 1520$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

(1) => $0,95 \times U_n \geqslant 0,95 \times 1520$

=> $0,95 \times U_n \geqslant 1444$

$\Rightarrow \quad 0,95 \times U_n + 76 \geq 1520$

$\Rightarrow \quad U_{n+1} \geq 1520.$

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1520$.

4. b. Démontrons que la suite (U_n) est décroissante:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$U_{n+1} - U_n = (0,95\ U_n + 76) - U_n$

$= -\ 0,05\ U_n + 76.$

Or, pour tout entier naturel n: $U_n \geq 1520$.

Dans ces conditions: $-\ U_n \leq -1520$

$\Leftrightarrow \quad -\ 0,05\ U_n \leq -\ 76$

$\Leftrightarrow \quad -\ 0,05\ U_n + 76 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad U_{n+1} - U_n \leq 0.$

Au total: la suite (U_n) est décroissante car $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

4. c. Justifions que la suite (U_n) est convergente:

D'après le cours, nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici:
- $U_{n+1} - U_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Donc la suite (U_n) est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $U_n \geq 1520$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (U_n) est minorée par $m = 1520$.

Dans ces conditions: la suite (U_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme:

$V_n = U_n - 1520 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 1520$

$\iff V_{n+1} = (0,95\,U_n + 76) - 1520 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 1520 \implies V_0 = 1480$ et $U_n = V_n + 1520$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,95\,[V_n + 1520] + 76) - 1520$

$\implies V_{n+1} = 0,95\,V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $V_0 = 1480$.

5. b. Déduisons-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$:

Nous savons que: * $V_n = 1480 \times (0,95)^n$ (d'après le cours)

* $U_n = V_n + 1520$.

D'où: $U_n = 1480 \times (0,95^n) + 1520$.

5. c. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1480 \times (0,95)^n + 1520$

$= 1520$ car: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,95)^n = 0$, car: $0,95 \in \,]0;1[$.

Au total: la limite de la suite (U_n) est égale à 1520 cétacés et donc la suite (U_n) converge vers 1520 cétacés.

6. **Recopions et complétons l'algorithme:**

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

$n \leftarrow 0$

$u \leftarrow 3000$

Tant que $u \geqslant 2000$

| $n \leftarrow n + 1$

| $u \leftarrow 0,95 \times u + 76$

Fin de Tant que

7. **La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminons l'année de fermeture:**

- **Oui**, la réserve marine fermera un jour car comme nous l'avons vu:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1520 \leqslant 2000 \text{ cétacés.}$$

- **L'année de fermeture sera: l'année 2039.**

En effet: $U_n \leqslant 2000 \iff 1480 \times (0,95)^n + 1520 \leqslant 2000$

$$\iff 1480 \times (0,95)^n \leqslant 480$$

$$\iff (0,95)^n \leqslant \frac{48}{148}$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \times \ln(0,95) \leqslant \ln\left(\frac{48}{148}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{48}{148}\right)}{\ln(0,95)},$$

car: $0,95 \in]\,0\,;1\,[$, et donc: $\ln(0,95) < 0$,

$\Rightarrow$ $n \geqslant 22$ ans, car n est un entier naturel.

En conclusion: la réserve marine fermera en 2017 + 22 années cad en **2039**.