Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

OBLIGATOIRE

SUJET

ÉPREUVE DU LUNDI 11 JUIN 2018

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°2 (5 points)

Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration.

En journée, la masse d'algues augmente de 2%, puis à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas la nuit.

Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg.

On modélise par a_n la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours ; ainsi, $a_0 = 2000$. On admet que cette modélisation demeure valable tant que a_n reste positif.

1. Vérifier par le calcul que la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est de 1878,8 kg.

2. On affirme que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1{,}02a_n - 100$.

a. Justifier à l'aide de l'énoncé la relation précédente.

b. On considère la suite (b_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$b_n = a_n - 5000 \text{ .}$$

Démontrer que la suite (b_n) est géométrique. Préciser son premier terme b_0 et sa raison.

c. En déduire pour tout entier naturel n, une expression de b_n en fonction de n, puis montrer que $a_n = 5000 - 3000 \times 1{,}02^n$.

d. En déterminant la limite de la suite (a_n), justifier que les algues finissent par disparaître.

3.

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine le nombre de jours nécessaire à la disparition des algues.

```
N ← 0
A ← 2000
Tant que …
        A ← …
        N ← N+1
Fin Tant que
Afficher …
```

b. Quel est le résultat renvoyé par l'algorithme ?

4.

a. Résoudre par le calcul l'inéquation $5000 - 3000 \times 1{,}02^n \leq 0$.

b. Quel résultat précédemment obtenu retrouve-t-on ?

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2018]

1. Vérifions que $a_2 = 1878,8$ kg:

Il s'agit de calculer a_2.

$a_2 = (1 + 2\%)\, a_1 - 100$, avec: $a_1 = (1 + 2\%)\, a_0 - 100$.

D'où: $a_2 = (1 + 2\%) \times ((1 + 2\%)\, a_0 - 100) - 100$

$= (1,02)^2 \times 2\,000 - 202$

$\Rightarrow a_2 = 1878,8$ kg.

Ainsi, la masse d'algues dans l'étang après deux jours de fonctionnement du système de filtration est bien de: 1878,8 kg.

2. a. Justifions que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1,02\, a_n - 100$:

- D'après l'énoncé, la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg.

D'où: $a_0 = 2\,000$ kg.

- De plus, chaque jour, la masse d'algues évolue comme suit:
  - en journée, elle augmente de 2%,
  - et, elle diminue de 100 kg grâce à la mise en place pendant une heure du système de filtration.

Soient:
- a_{n+1}, la masse d'algues dans l'étang (en kg) après utilisation du système de filtration pendant $(n+1)$ jours,
- a_n, la masse d'algues dans l'étang (en kg) après utilisation du système de filtration pendant (n) jours.

Pour tout entier naturel n, la masse d'algues a_{n+1} dans l'étang (en kg) après utilisation du système de filtration pendant $(n+1)$ jours est égale à celle a_n augmentée de 2% et diminuée de 100 kg.

Pour tout entier naturel n:

$$a_{n+1} = a_n + 2\%\, a_n - 100 \Rightarrow a_{n+1} = 1,02\, a_n - 100.$$

Au total, nous avons bien: $a_{n+1} = 1,02\, a_n - 100$.

2. b. Montrons que (b_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme b_0 que l'on précisera:

$$b_n = a_n - 5000 \Leftrightarrow b_{n+1} = a_{n+1} - 5000$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = (1,02\, a_n - 100) - 5000 \quad (1).$$

Or: $b_0 = a_0 - 5000 \Rightarrow b_0 = 2000 - 5000 = -3000$ et $a_n = b_n + 5000$.

Ainsi: $(1) \Leftrightarrow b_{n+1} = (1,02\,[b_n + 5000] - 100) - 5000$

$$\Rightarrow b_{n+1} = 1,02\, b_n.$$

Par conséquent, (b_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $b_0 = -3000$ kg.

2. c. c1. Déduisons-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de b_n en fonction de n:

Comme $b_{n+1} = 1,02\, b_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$b_n = b_0 \times (1,02)^n$, avec: $b_0 = -3000$.

2. c. c2. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5000 - 3000 \times 1,02^n$:

Nous savons que: * $b_n = -3000 \times (1,02)^n$

* $a_n = b_n + 5000$.

D'où: $a_n = -3000 \times (1,02)^n + 5000$ ou: $a_n = 5000 - 3000 \times (1,02)^n$.

2. d. Déterminons la limite de la suite (a_n) et justifions que les algues finissent par disparaître:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 5000 - 3000 \times (1,02)^n$$

$= -\infty$ car: $\lim_{n \to +\infty} (1,02)^n = +\infty$, car: $1,02 > 1$.

Or: $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ revient à dire $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ car avoir une masse d'algues négative dans l'étang n'a aucune signification !!!

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

En conclusion: au bout de n jours (" n " très grand), la masse d'algues dans l'étang deviendra nulle.

En d'autres termes, au bout de n jours (" n " très grand), les algues finissent par disparaître.

3. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
N ← 0
A ← 2000
Tant que A ⩾ 0
    A ← 1,02 x A - 100
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

3. b. Déterminons le résultat renvoyé par l'algorithme:

L'algorithme renvoie la valeur: $N = 26$ car: $a_{25} \approx 78,2$ et $a_{26} \approx -20,15$.

4. a. Résolvons l'inéquation $5000 - 3000 \times (1,02)^n \leqslant 0$:

$$5000 - 3000 \times (1,02)^n \leqslant 0 \iff (1,02)^n \geqslant \frac{5}{3}$$

$$\iff n \cdot \ln(1,02) \geqslant \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1,02)}$$

$$\Rightarrow n \geqslant 26, \text{ car } n \text{ est un entier naturel.}$$

En conclusion, l'inéquation $5000 - 3000 \times (1,02)^n \leqslant 0$ a pour solution: $n \geqslant 26$.

4. b. Interprétons le résultat obtenu:

Au bout de 26 jours exactement, les algues finiront par disparaître dans l'étang.

On retrouve ainsi le résultat trouvé à la question **3. b.**