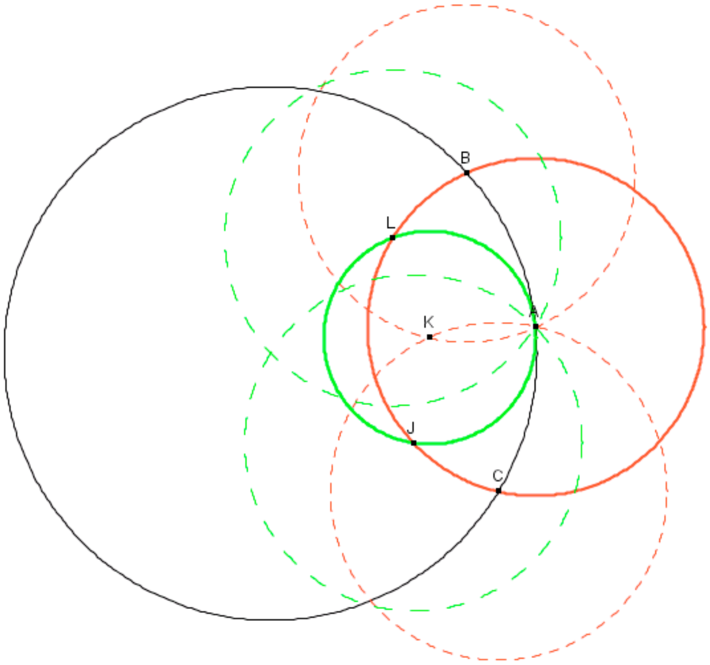
M.CARRE

MATHEMATIQUES

LES AUTOROUTES DU BREVET

2006



REUSSIR VITE ET BIEN

10 SUJETS TYPES DE BFEM CORRIGES ET COMMENTES

Illustrations nettes et précises.

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS

Les corrigés que vous avez sous les yeux n'ont pas la prétention de vous donner des solutions préfabriquées et qu'il va falloir restituer le jour de l'examen, ce serait d'ailleurs en porte à faux avec la rigueur scientifique. Mais ils vous préparent à réagir devant une épreuve de mathématiques et surtout à mener une démarche rigoureuse tout en vous souciant de la présentation qui s'avère très souvent déterminante. En effet, le candidat se contente trop souvent de fournir un résultat, exact ou non, sans fournir d'explication et en choisissant au hasard les formules à appliquer.
Il convient donc de lui montrer comment analyser un problème et par une suite de questions logiquement enchaînées, comment arriver à la solution par étapes successives. Dans quelques cas il est fait exprès d'aller rapidement à la solution afin d'amener l'élève à reconstituer les étapes sautées.
En plus, ils vous familiarisent avec les conditions de l'examen en vous confrontant avec des sujets type de BFEM.
Les problèmes choisis ont tous été donnés au BFEM au cours de ces quinze dernières années et correspondent à l'intégralité du programme de mathématiques de la classe de troisième.
Cependant, n'hésitez pas à me faire parvenir vos suggestions et remarques utiles pour son amélioration.
Enfin, je vous remercie de votre confiance, persuadé que vous avez fait un bon choix en achetant cette annale.
J'espère que ce recueil constituera un outil précieux aux élèves qui se préparent aux examens et concours du niveau de la classe de troisième mais aussi aux professeurs pour un gain de temps considérable.
J'espère aussi que vous aurez autant de plaisir à l'utiliser que j'en ai pris à le réaliser.

Réalisé par
Modou CARRE
Professeur de Mathématiques au CEM Modou Awa Balla Mbacké de LOUGA
Avec la collaboration de
Maryse MEGE
Professeur de Mathématiques au Lycée Albert Camus de LOURENX

Remerciements à l'association Manuels sans frontières

Contacts:
E-mail:caffa30@hotmail.com

EXAMEN DU BFEM –SESSION DE 1989
Sénégal

I ALGEBRE

EXERCICE 1 :

1°/ Trouver successivement dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{D}$ puis dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de l'équation $4x^2 - 9 = 0$.

2°/Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes et représenter l'ensemble E des solutions sur une droite orientée.

$2x - 3 < 0$ $\quad\quad$ $2x + 3 < 0$

$2x - 3 > 0$ $\quad\quad$ $2x + 3 > 0$

3°/ En utilisant les résultats de la question 2) donner l'ensemble E des solutions de l'inéquation $4x^2 - 9 > 0$

EXERCICE 2

1°/ Soit f la fonction définie par f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{2x - 3}$$

Calculer, si elles existent, les images f des réels 2 ; - 3 ; 0 ; 5.

Déterminer le domaine de définition de f.

2°/ a) Calculer $(2 - \sqrt{3})^2$ et $(2 + \sqrt{3})^2$

b)Déduire de la question précédente a) une écriture simplifiée des réels A' et B' suivants :

$$A' = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$B' = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

N.B : les questions 1°/ et 2°/ sont indépendantes.

II.- GEOMETRIE.- problème

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points A (- 2, 3) et B (-2,- 3).

1°/ Trouver par le calcul les coordonnées du point C image de A dans la symétrie de centre O et les coordonnées du point D image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2°) Montrer que le quadruplet (A, D, C, B) est un rectangle.

3°) trouver la longueur L du cercle circonscrit au rectangle (A, D, C, B).

On prendra $\pi = 3,14$.

4°) Déterminer l'équation de la médiatrice Δ du segment [AC].

5°) Trouver le réel a pour que le point K (a ; -1) appartienne à Δ.

BAREME

	Algèbre		Géométrie	
Exercice 1	1°/	1,5 pt	1°/	2 pts
	2°/	2 pts	2°/	2 pts
	3°/	2 pts	3°/	2 pts
Exercice 2	1°/	2 pts	4°/	2 pts
	2°/	2 pts	5°/	5 pts

Schéma 1,5pt

EXAMEN DU BFEM-SESSION DE 1989
CORRIGE

I ALGEBRE

EXERCICE 1

1°/ Trouver successivement dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{D}$ puis dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de l'équation $4x^2 - 9 = 0$.

$$4x^2 - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

On peut factoriser $4x^2 - 9$ puis on résout l'équation-produit $(2x-3)(2x+3) = 0$.

Dans $\mathbb{Z}$: $\mathcal{S} = \varnothing$ $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ et $-\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$	**Dans** $\mathbb{D}$: $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$ $\frac{3}{2} \in \mathbb{D}$ et $-\frac{3}{2} \in \mathbb{D}$	**Dans** $\mathbb{R}$: $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$ $\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$ et $-\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$

2°/Résoudre dans R chacune des inéquations suivantes et représenter l'ensemble E des solutions sur une droite orientée.

$2x - 3 < 0$ **$2x + 3 < 0$**

$2x - 3 > 0$ **$2x + 3 > 0$**

$2x - 3 < 0$	**$2x - 3 > 0$**	**$2x + 3 < 0$**	**$2x + 3 > 0$**
$\Leftrightarrow \quad 2x<3$ $\Leftrightarrow \quad x<\frac{3}{2}$	$\Leftrightarrow \quad 2x>3$ $\Leftrightarrow \quad x>\frac{3}{2}$	$\Leftrightarrow \quad 2x<-3$ $\Leftrightarrow \quad x<-\frac{3}{2}$	$\Leftrightarrow \quad 2x>-3$ $\Leftrightarrow \quad x>-\frac{3}{2}$
$-\infty \qquad \frac{3}{2} \qquad +\infty$	$-\infty \qquad \frac{3}{2} \qquad +\infty$	$-\infty \qquad -\frac{3}{2} \qquad +\infty$	$-\infty \qquad -\frac{3}{2} \qquad +\infty$
$\mathcal{S}_1 = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$	$\mathcal{S}_2 = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$	$\mathcal{S}_3 = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$	$\mathcal{S}_4 = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

3°/ En utilisant les résultats de la question 2) donner l'ensemble E des solutions de l'inéquation $4x^2 - 9 > 0$.

$$4x^2 - 9 > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (2x-3)(2x+3) > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{I} \begin{cases} 2x - 3 < 0 & (\mathcal{S}_1) \\ 2x + 3 < 0 & (\mathcal{S}_3) \end{cases} \quad \text{OU} \quad \text{II} \begin{cases} 2x - 3 > 0 & (\mathcal{S}_2) \\ 2x + 3 > 0 & (\mathcal{S}_4) \end{cases}$$

L'inéquation $4x^2 - 9 > 0$ conduit à deux systèmes d'inéquations I et II.
L'ensemble des solutions du système I est $\mathcal{S}_I = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3$.

L'ensemble des solutions du système II est $\mathcal{S}_{II} = \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_4$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $4x^2 - 9 > 0$ est $\mathcal{S} = \mathcal{S}_I \cup \mathcal{S}_{II}$.

$\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3) \cup (\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_4)$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[}$$

EXERCICE 2 :

1°/ Soit f la fonction définie par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{2x-3}$

Calculer, si elles existent, les images par f des réels 2 ; - 3 ; 0 ; 5.

$f(2) = \sqrt{2\times 2 - 3} = \sqrt{1} = 1$

$f(-3) = \sqrt{2\times(-3) - 3} = \sqrt{-9}$ indéterminée

$f(0) = \sqrt{2\times 0 - 3} = \sqrt{-3}$ indéterminée

$f(5) = \sqrt{2\times 5 - 3} = \sqrt{7}$

$f(2) = 1$
f(-3) n'existe pas
f(0) n'existe pas
$f(5) = \sqrt{7}$

Déterminer le domaine de définition de f

f est définie pour $2x - 3 \geq 0$.

Donc f est définie pour $x \geq \frac{3}{2}$.

Le domaine de définition de f est $\boxed{\mathcal{D}_f = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[}$

2°/ a) Calculer $(2 - \sqrt{3})^2$ et $(2 + \sqrt{3})^2$

$(2 - \sqrt{3})^2 = 2^2 - 2(2)\sqrt{3} + 3$

$= 7 - 4\sqrt{3}$

$(2 + \sqrt{3})^2 = 2^2 + 2(2)\sqrt{3} + 3$

$= 7 + 4\sqrt{3}$

$\boxed{(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}}$

$\boxed{(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}}$

b)Déduire de la question précédente a) une écriture simplifiée des réels A' et B' suivants :

$A' = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ $B' = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

$A' = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

Cherchons le signe de $2 - \sqrt{3}$.

Pour cela comparons les carrés de 2 et $\sqrt{3}$.

$\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$

$\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$

$\left.\begin{array}{l}(2)^2 = 4 \\ (\sqrt{3})^2 = 3\end{array}\right\}$ $4 > 3$ alors $2 > \sqrt{3}$ d'où $2 - \sqrt{3} > 0$

En conclusion : $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}$

$B' = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}$

$A' = 2 - \sqrt{3}$
$B' = 2 + \sqrt{3}$

II.- GEOMETRIE.- problème

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
on donne les points A (- 2 ; 3) et B (-2 ; - 3).

1°/ Trouver par le calcul les coordonnées du point C image de A dans la symétrie de centre O et les coordonnées du point D image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Soit C (x_C; y_C) et D (x_D; y_D)

$S_O(A) = C$ alors $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} -(-2) \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AO}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = -3 \end{cases}$ $\quad \boxed{C\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}$

$t_{\overrightarrow{BC}}(A) = D$ alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2+2 \\ -3+3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D + 2 \\ y_D - 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = 4 \\ y_D - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 3 \end{cases}$ $\quad \boxed{D\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

2°) Montrer que le quadruplet (A, D, C, B) est un rectangle

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ alors (A, D, C, B) est un parallélogramme.

Montrons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2+2 \\ -3-3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

$4 \times 0 + (-6) \times 0 = 0 + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

(A, D, C, B) est un parallélogramme
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux
} $\boxed{\text{(A, D, C, B) est un rectangle}}$

3°) Trouver la longueur L du cercle circonscrit au rectangle **(A, D, C, B)**
(on prendra $\pi = 3{,}14$).

$L = Diamètre \times \pi$

Le diamètre du cercle circonscrit égale la diagonale du rectangle.
Calculons la diagonale AC du rectangle.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

NB : on peut calculer AC en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC.

$AC = \sqrt{(2+2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$L = AC \times \pi$

$L = 2\sqrt{13} \times 3{,}14$ $\boxed{L = 6{,}28\sqrt{13}}$

4°) Déterminer l'équation de la médiatrice (Δ) du segment [AC]

$S_O(A) = C$ alors O est le milieu de [AC].
La médiatrice (Δ) du segment [AC] passe donc par O.
Soit M(x ;y) un point de (Δ) : $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2+2 \\ -3-3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ⇔ $4x - 6y = 0$
$\boxed{(\Delta) : 4x - 6y = 0}$

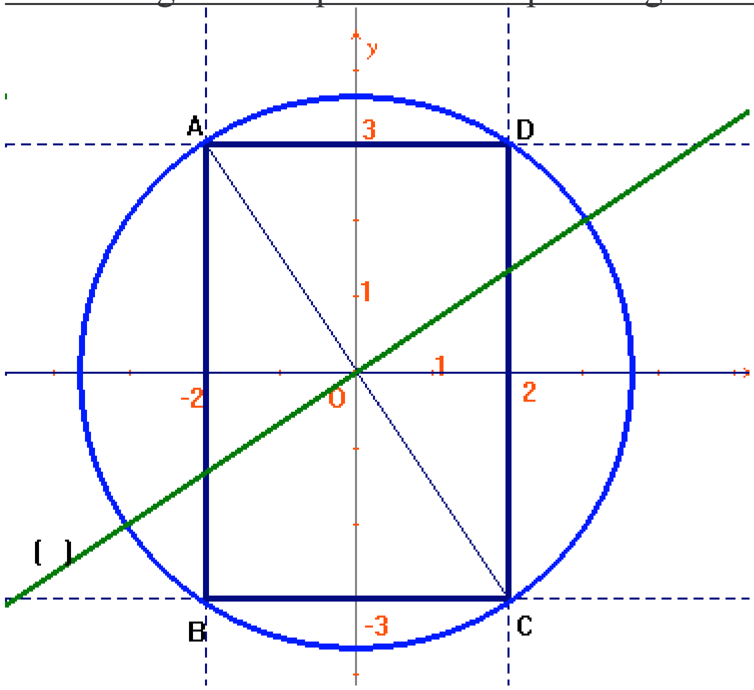
5°) Trouver le réel a pour que le point K(a ; -1) appartienne à (Δ)

$K \in (\Delta)$ alors $4a - 6(-1) = 0$.
Résolvons l'équation $4a + 6 = 0$ pour trouver a.

$4a + 6 = 0$

⇔ $a = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ $\boxed{a = -\frac{3}{2}}$

<u>Voici la figure bien qu'elle ne soit pas obligatoire (elle n'est pas demandée).</u>



EXAMEN DU BFEM- SESSION DE 1992
Sénégal

I ALGEBRE :

Exercice 1 : On considère deux fonctions polynômes f et g définies dans IR par :
$f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = 1 - 2x$

1°) Calculer les réels $r_1 = f(\sqrt{8})$ et $r_2 = g(\sqrt{2})$

2°) a/ Calculer le réel $r = f(\sqrt{8}) + g(\sqrt{2})$

b/ Donner un encadrement de r d'amplitude 0,01 sachant que :

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

3°) Soit le réel $q = \frac{r_1}{r_2}$.Montrer que q peut s'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$.

Exercice2: On considère la fonction polynôme f définie par :

$$h(x) = (2x - \sqrt{3})^2 + 2(2x - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})^2$$

1°/ Montrer que h(x) est le carré d'un polynôme.

2°/ Résoudre dans IR, l'équation : $\sqrt{h(x)} - 7 = 0$.

3°/ Soit k la fonction définie dans IR par : $k(x) = \sqrt{h(x)} - 1$.

a/ Sur quelle partie de IR, k est-elle une fonction linéaire ?

b/ Sur quelle partie de IR, k est-elle une fonction affine ?

c/ Représenter graphiquement k dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II – GEOMETRIE :

Exercice 1 :

1°) Construire le triangle rectangle en A, dont les dimensions sont les suivantes : AB =8 cm et AC = 6 cm.

2°) Calculer BC puis $\cos(\widehat{ABC})$.

3°) Placer le point M tel que $AM = \frac{1}{3}AB$.

4°) La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

a) Comparer les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

b) En déduire que $AN = \frac{1}{3}AC$.

Exercice 2 : le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Construire la droite **(Δ)** d'équation $x - 2y + 6 = 0$.

2°) Placer le point A de coordonnées (-5 ; 8). Justifier que A n'appartient pas au demi-plan ouvert de bord **(Δ)** contenant le point O.

3°) Soit B le point de coordonnées (1 ;- 4), calculer les coordonnées de **K** milieu de [**AB**].

4°) Démontrer que A et B sont symétriques par rapport à **(Δ).**

EXAMEN DU BFEM-SESSION DE 1992
CORRIGE

I ALGEBRE :

Exercice1 : On considère deux fonctions polynômes f et g définies dans IR par :
$f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = 1 - 2x$.

1°) Calculer les réels $r_1 = f(\sqrt{8})$ et $r_2 = g(\sqrt{2})$

$f(\sqrt{8}) = (\sqrt{8})^2 - \sqrt{8} = 8 - \sqrt{8} = 8 - 2\sqrt{2}$ $\boxed{r_1 = 8 - 2\sqrt{2}}$

$g(\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$ $\boxed{r_2 = 1 - 2\sqrt{2}}$

2°) a/ Calculer le réel $r = f(\sqrt{8}) + g(\sqrt{2})$.

$r = r_1 + r_2$

$r = (8 - 2\sqrt{2}) + (1 - 2\sqrt{2})$

$r = 9 - 4\sqrt{2}$ $\boxed{r = 9 - 4\sqrt{2}}$

b/ Donner un encadrement de r d'amplitude 0,01 sachant que : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

$-4 \times 1,415 < -4 \times \sqrt{2} < -4 \times 1,414$ l'inégalité change de sens quand on multiplie ses membres par un nombre négatif.

$-5,66 < -4\sqrt{2} < -5,656$

$9 - 5,66 < 9 - 4\sqrt{2} < 9 - 5,656$

$3,34 < 9 - 4\sqrt{2} < 3,344$

$\boxed{3,34 < r < 3,35}$ amplitude = 3,35 – 3, 34 = 0,01

3°) Soit le réel $q = \frac{r_1}{r_2}$. Montrer que q peut s'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in Z$ et $b \in N$

$$q = \frac{8 - 2\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}} = \frac{(8 - 2\sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2})}{1 - 8} = \frac{14\sqrt{2}}{-7} = -2\sqrt{2}$$

$\boxed{q = -2\sqrt{2}}$ $\boxed{a = -2}$ $\boxed{b = 2}$

Exercice2: On considère la fonction polynôme h définie par :

$h(x) = (2x - \sqrt{3})^2 + 2(2x - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})^2$

1°/ Montrer que h(x) est le carré d'un polynôme.

$h(x) = (2x - \sqrt{3})^2 + 2(2x - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})^2$

$= [(2x - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})]^2$

$= (2x - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3})^2$

$= (2x + 1)^2$ $\boxed{h(x) = (2x + 1)^2}$

2°/ Résoudre dans IR, l'équation $\sqrt{h(x)} - 7 = 0$:

$\sqrt{h(x)} - 7 = 0$

$\Leftrightarrow |2x + 1| - 7 = 0$

$\Leftrightarrow |2x + 1| = 7$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = 7$ ou $2x + 1 = -7$

$\Leftrightarrow$ 2x = 6 ou 2x = - 8

$\Leftrightarrow$ x = 3 ou x = - 4

3°/ Soit k la fonction définie dans IR par : k (x) = $\sqrt{h(x)}-1$

a/ Sur quelle partie de IR, k est elle une fonction linéaire ?

b/ Sur quelle partie de IR, k est une fonction affine ?

k (x) = $\sqrt{h(x)}-1$

$k(x)=|2x+1|-1$

Si 2x + 1 $\geq$ 0: k(x) = 2x +1 – 1

si x$\geq -\frac{1}{2}$: k(x) = 2x alors, k est une fonction linéaire.

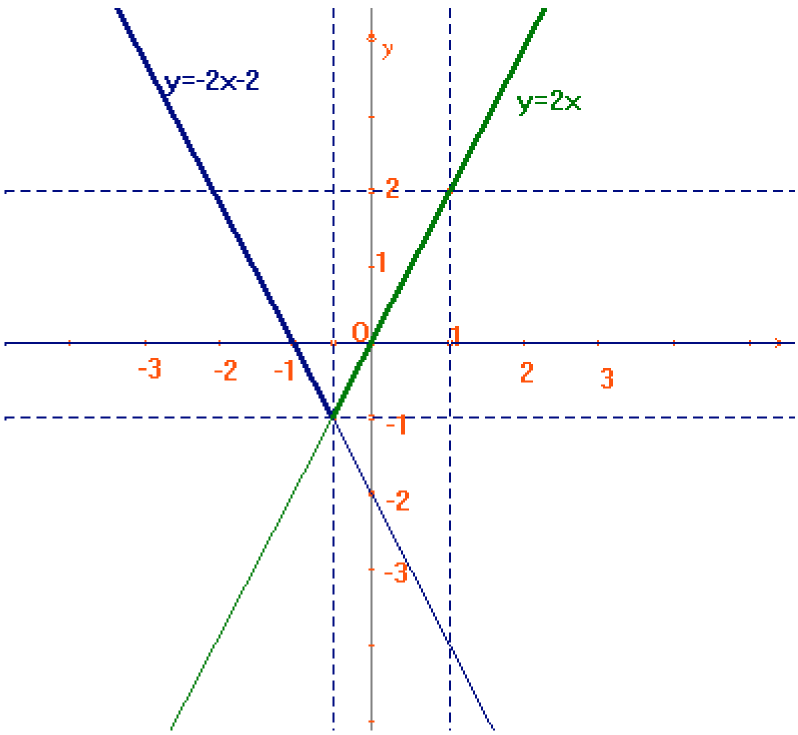
k est une fonction linéaire pour tout $x \in$ IR tel que $x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Si 2x +1$\leq$ 0 : k(x) = - 2x - 1 – 1

si x$\leq -\frac{1}{2}$: k(x) = - 2x – 2 alors, k est une fonction affine.

k est une fonction affine pour tout $x \in$ IR tel que $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

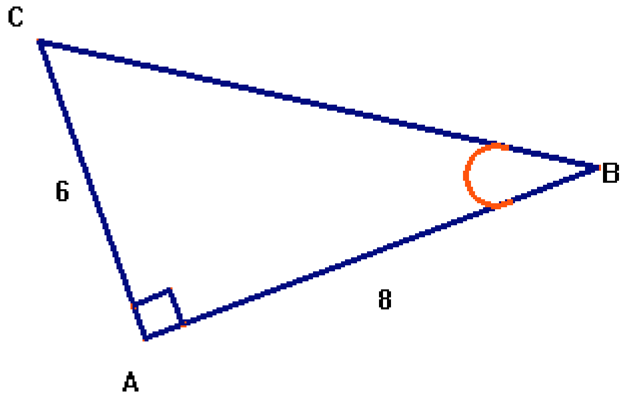
c/ Représenter graphiquement k dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)



II – GEOMETRIE :

Exercice 1 :

1°) Construire le triangle rectangle en A, dont les dimensions sont les suivantes : AB =8 cm et AC = 6cm.



On trace deux droites perpendiculaires en A.
On place le point B tel que
, AB =8 cm et le point C tel que AC = 6 cm.

2°) Calculer BC puis cos ABC

BC² = AB² + AC²

$$\cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

BC² = 64 + 36

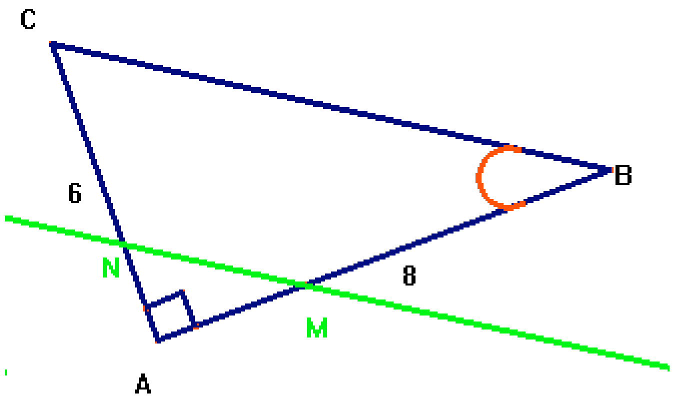
BC² = 100
BC = 10

$\boxed{BC = 10 \text{ cm}}$

$\boxed{\cos \widehat{ABC} = 0{,}8}$

3°) Placer le point M tel que $AM = \frac{1}{3}AB$.

4°) La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.



On partage le segment $[AB]$ en trois parties égales.
(Voir page 59)

a) Comparer les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{A, M et B sont alignés dans cet ordre}\\ \text{A, N et C sont alignés dans cet ordre}\\ \text{(BC) // (MN)}\end{array}\right\}\text{alors}\quad \boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}}$$

(Théorème de Thalès).

b) En déduire que $AN = \frac{1}{3}AC$

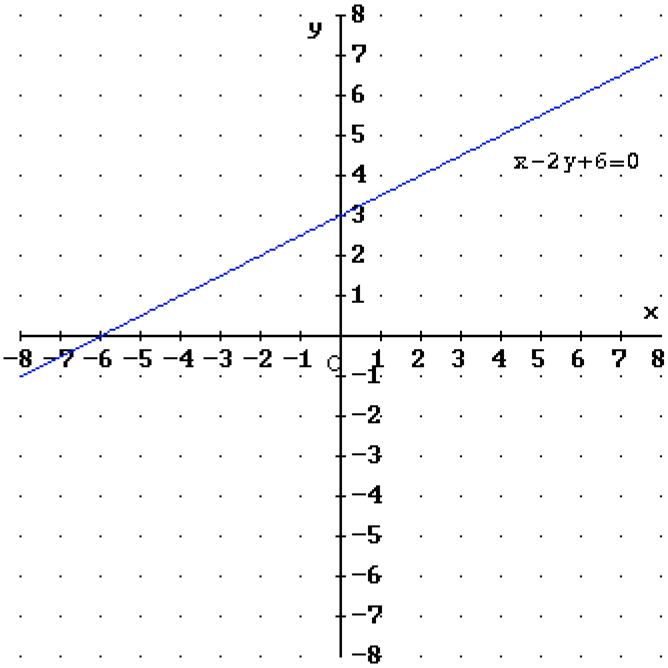
$AM = \frac{1}{3}AB$ donc $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$

or $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Donc $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$ d'où $\boxed{\text{AN} = \frac{1}{3}\text{AC}}$

<u>Exercice 2</u> : le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) Construire la droite **(Δ)** d'équation x – 2y + 6 = 0



On choisit deux points M et N appartenant à **(Δ).**

$x_M - 2y_M + 6 = 0$

si $x_M = 0$ alors $y_M = 3$

$x_N - 2y_N + 6 = 0$

si $y_N = 0$ alors $x_N = -6$

(Δ) passe donc par les points de coordonnées M(0 ;3) et N(- 6 ;0).

2°) Placer le point A de coordonnées (5 ;8). Justifier que A n'appartient pas au demi-plan ouvert de bord **(Δ)** contenant le point O.

Calculons $x_O - 2y_O + 6$.

$0 - 2(0) + 6 = 6 > 0$

Donc le demi-plan ouvert de bord (Δ) contenant le point O est le lieu de tous les points tels que $x - 2y + 6 > 0$.

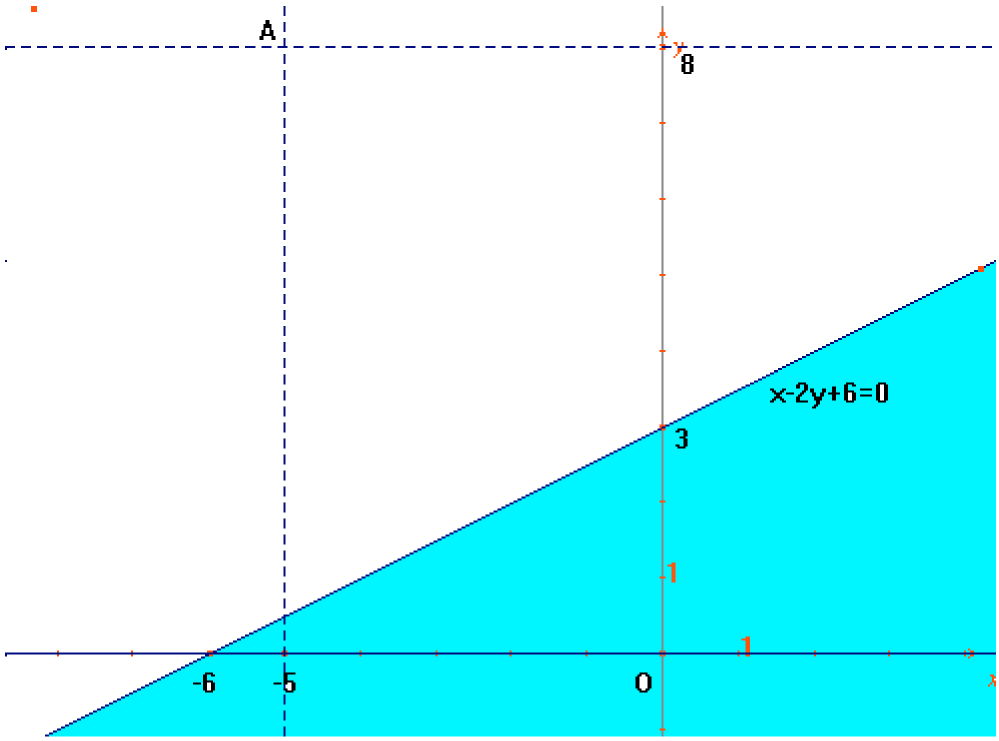
Pour justifier que le point A n'appartient pas à ce demi-plan, il suffit de montrer que les coordonnées de A ne vérifient pas l'inégalité $x - 2y + 6 > 0$.

$- 5 - 2(8) + 6 = - 5 - 16 + 6$

$= - 21 + 6$

$= - 15$

- 15 n'est pas supérieur à 0, donc A n'appartient pas au demi-plan ouvert de bord (Δ) contenant le point O.



3°) Soit B le point de coordonnées (1 ;- 4), calculer les coordonnées de **K** milieu de [**AB**].

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$$

$\boxed{K\ (-\ 2\ ;\ 2)}$

4°) Démontrer que A et B sont symétriques par rapport à (**Δ**).

Montrons que (AB) est perpendiculaire à (Δ) et que K est un point de (Δ).

$\vec{u}$ (2 ;1) est un vecteur directeur de la droite (Δ) : x – 2y + 6 = 0

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1+5 \\ -4-8 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

Vérifions que le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

2×6 + 1×(-12) = 12 - 12
= 0

Vérifions que le point K (- 2 ; 2) appartient à (Δ).

- 2 - 2×2 + 6 = - 2 – 4 + 6
= - 6 + 6
= 0

$\left.\begin{array}{l} \text{K est le milieu de [AB]} \\ (\Delta) \perp (AB) \\ K \in (\Delta) \end{array}\right\}$ (Δ) est la médiatrice de [AB]

D’où A et B sont symétriques par rapport à (Δ).

EXAMEN DU BFEM – SESSION DE 1993
Sénégal

I ALGEBRE

Exercice 1

1) Ecrire l'expression **B =2** $\sqrt{75}$ **+ 4** $\sqrt{48}$ **+ 7** $\sqrt{192}$ sous la forme **B = a** $\sqrt{b}$;
a et b étant deux réels qu'on déterminera.
2) Calculer la valeur numérique de l'expression suivante :

C = $\frac{2x}{2-x} - \frac{2-x}{2x}$ **pour x = 2 -** $\sqrt{3}$

Exercice 2

Soient a et b deux réels et le système de deux équations à deux inconnues suivant

$$\begin{cases} 2ax - y - 5b = 0 \\ 2bx - y - 3a = 0 \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que le couple (2 ; -1) soit solution de ce système.
Remplacer dans ce système a et b par les valeurs trouvées et résoudre dans R² le système

$$\begin{cases} -2ax - y - 5b = 0 \\ \sqrt{3}\, x + y = 3 \end{cases}$$

II GEOMETRIE

Un plan P est rapporté à un repère orthonormé (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$)
Placer dans ce plan les points A, B, C donnés par leurs coordonnées
A(- 1,5 ; 2) ; B(1,5 ; -2) ; C (6,5 ; 8) et montrer que O est le milieu de [AB].
Calculer les distances AB ; AC et BC et montrer que le triangle ABC est rectangle.
Soit H la projection orthogonale de A sur la droite **(BC)**
Calculer BH ; CH ; et AH (on utilisera les relations métriques dans le triangle rectangle.)
4) Soit B'et C'respectivement les projetés orthogonaux des points B et C sur l'axe (0 , $\vec{j}$).

a) **Calculer** $\frac{BH}{BC}$ **et** $\frac{B'O}{B'C'}$**.**

b) Montrer avec précision que l'on peut en conclure que H appartient à l'axe (o, $\vec{i}$).

EXAMEN DU BFEM-SESSION DE 1993
CORRIGE

I ALGEBRE

Exercice 1

1) Ecrire l'expression **B = 2**$\sqrt{75}$ **+ 4**$\sqrt{48}$ **+ 7**$\sqrt{192}$ sous la forme **B = a**$\sqrt{b}$. (a et b étant deux réels qu'on déterminera).

Décomposer 75 ; 48 et 192.

75 = 3$\times 5^2$

48 = 3$\times 2^4$

192 = 3$\times 2^6$

$\sqrt{75} = \sqrt{3\times 25} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{48} = \sqrt{3\times 16} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{192} = \sqrt{3\times 64} = 8\sqrt{3}$

B = 2$\times 5\sqrt{3}$ **+ 4**$\times 4\sqrt{3}$ **+ 7**$\times 8\sqrt{3}$

B = $10\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 56\sqrt{3}$

$\boxed{B = 82\sqrt{3}}$ $\boxed{a = 82}$ $\boxed{b = 3}$

2) Calculer la valeur numérique de l'expression suivante :

C = $\dfrac{2x}{2-x} - \dfrac{2-x}{2x}$ **pour x = 2 -** $\sqrt{3}$.

Pour x = 2 - $\sqrt{3}$: C = $\dfrac{2(2-\sqrt{3})}{2-(2-\sqrt{3})} - \dfrac{2-(2-\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})}$

$$C = \frac{\left(4-2\sqrt{3}\right)^2 - 3}{\sqrt{3}\left(4-2\sqrt{3}\right)} = \frac{16-2\times 4\times 2\sqrt{3}+12-3}{4\sqrt{3}-2\times 3} = \frac{25-16\sqrt{3}}{-6+4\sqrt{3}}$$

$$\boxed{C = \frac{25-16\sqrt{3}}{-6+4\sqrt{3}}}$$

Exercice 2

Soient a et b deux réels et le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{2ax - y - 5b = 0} \\ \mathbf{2bx - y - 3a = 0} \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que le couple (2 ; -1) soit solution de ce système.

Le couple (2 ; - 1) est solution du système alors, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{4a + 1 - 5b = 0} \\ \mathbf{4b + 1 - 3a = 0} \end{cases}$$

on a remplacé x par 2 et y par - 1 dans les deux équations.

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} 4a + 1 - 5b = 0 \\ 4b + 1 - 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (\times 3) \\ (\times 4) \end{matrix}\begin{cases} 4a + 1 - 5b = 0 \\ -3a + 1 + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a + 3 - 15b = 0 \\ -12a + 4 + 16b = 0 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre, on obtient :

7 + b = 0

$\Leftrightarrow$ $\boxed{b = -7}$

On trouve a en remplaçant b dans l'une des équations du système :

$$\begin{aligned} & \mathbf{4a + 1 - 5b = 0} \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{4a + 1 + 5\times 7 = 0} \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{4a + 36 = 0} \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{4a = -36} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{a = -9}}$

Remplacer dans ce système a et b par les valeurs trouvées et résoudre dans R² le système

$$\begin{cases} -2ax - y - 5b = 0 \\ \sqrt{3}\,x + y = 3 \end{cases}$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs, le système devient :

$$\begin{cases} 18x - y + 35 = 0 \\ \sqrt{3}\,x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x - y = -35 \\ \sqrt{3}\,x + y = 3 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces deux équations, on obtient :

$$(18 + \sqrt{3})x = -32$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{-32}{18+\sqrt{3}}}$$

On remplace la valeur de x dans l'une des équations pour trouver y :

$$\frac{-32}{18+\sqrt{3}} \times \sqrt{3} + y = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 3 - \frac{-32}{18+\sqrt{3}} \times \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{54 + 3\sqrt{3} + 32\sqrt{3}}{18+\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = \frac{54 + 35\sqrt{3}}{18+\sqrt{3}}}$$

II GEOMETRIE

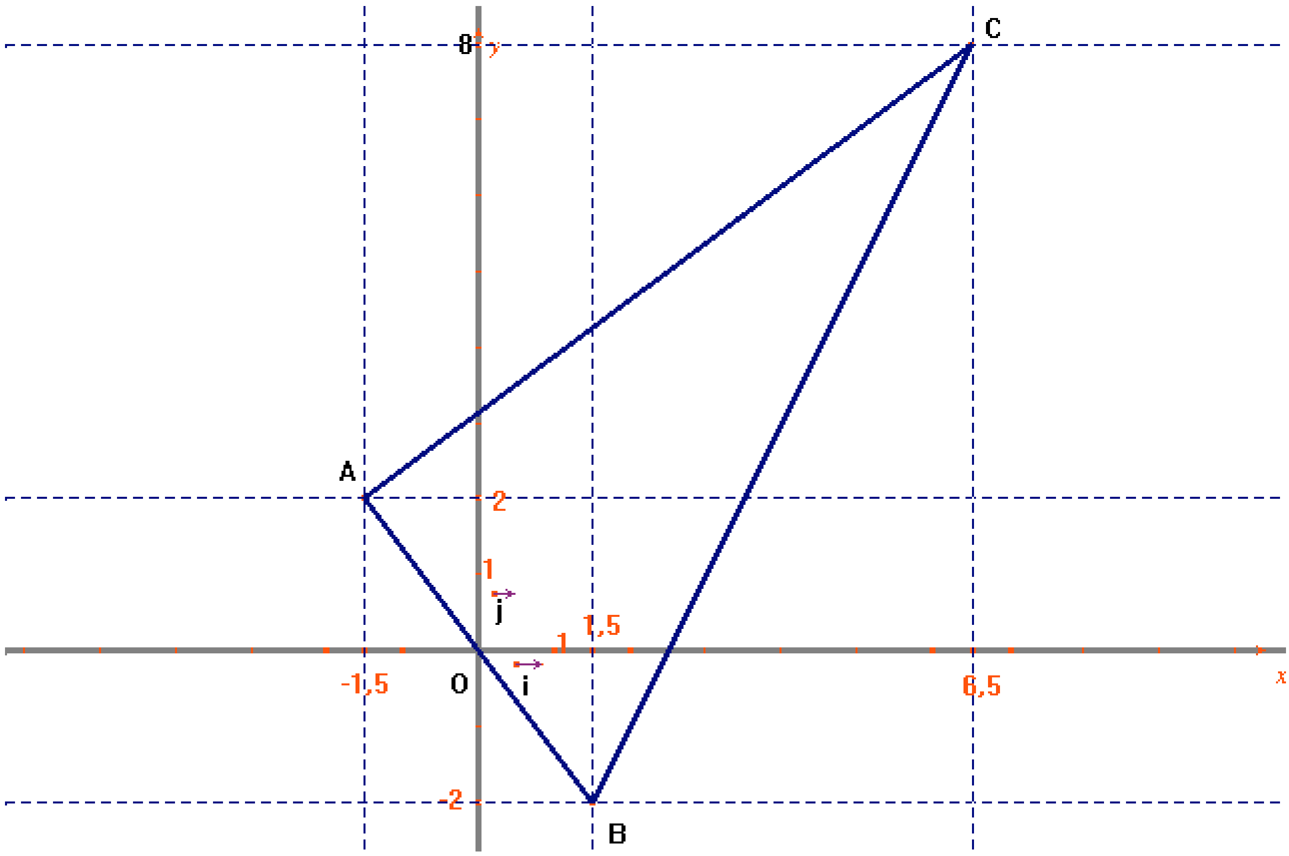
1) Un plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Placer dans ce plan les points A, B et C donnés par leurs coordonnées
A(- 1,5 ; 2) ; B(1,5 ; -2) ; C (6,5 ; 8) et montrer que O est le milieu de [AB].

Cherchons les coordonnées du milieu de [AB].

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1,5+1,5}{2} = 0$$

$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0$$

Donc le point de coordonnées (0 ; 0) est milieu de [AB].
D'où le point O est milieu de [AB].



2) Calculer les distances AB ; AC et BC et montrer que le triangle ABC est rectangle.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$AB = \sqrt{(1,5+1,5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$
$$AC = \sqrt{(6,5+1,5)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$BC = \sqrt{(6,5-1,5)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$\boxed{AB = 5}$ $\boxed{AC = 10}$ $\boxed{BC = 5\sqrt{5}}$

Montrons que $AB^2+AC^2=BC^2$ (réciproque du théorème de Pythagore)

$AB^2=25$; $AC^2=100$; $BC^2=125$.

$\left.\begin{array}{l} AB^2+AC^2=125 \\ BC=125 \end{array}\right\}$ $AB^2+AC^2=BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A.

3) Soit H la projection orthogonale de A sur la droite **(BC)** .
Calculer BH ; CH ; et AH (on utilisera les relations métriques dans le triangle rectangle.)

$BH \times BC = AB^2$ alors $BH = \dfrac{AB^2}{BC}$

$BH = \dfrac{25}{5\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ $\boxed{BH = \sqrt{5}}$

$CH = BC - BH$

$CH = 5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ $\boxed{CH = 4\sqrt{5}}$

$AH^2 = BH \times CH$

$AH = \sqrt{4(\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}$ $\boxed{AH = 2\sqrt{5}}$

4) Soit B'et C'respectivement les projetés orthogonaux des points B et C sur l'axe $(0, \vec{j}\,)$

a) Calculer $\dfrac{BH}{BC}$ **et** $\dfrac{B'O}{B'C'}$.

$\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}$

$\dfrac{B'O}{B'C'} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

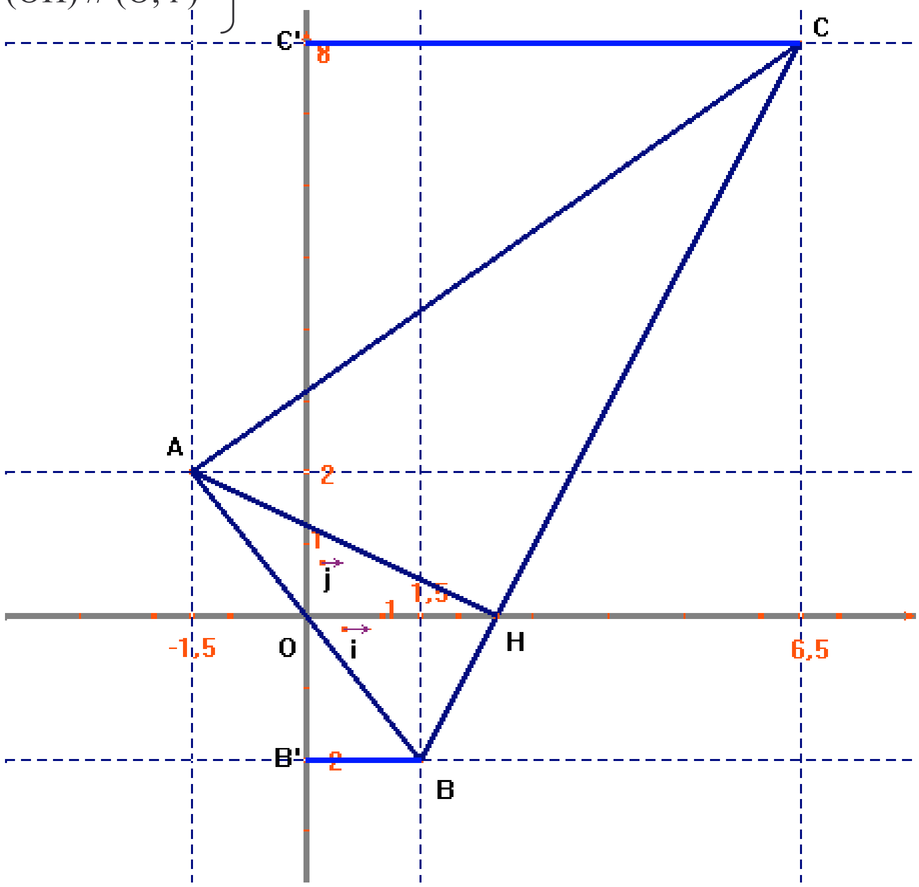
b) Montrer avec précision que l'on peut en conclure que H appartient à l'axe $(o, \vec{i}\,)$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{B'O}{B'C'} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$ (BB') // (OH)

B' étant le projeté orthogonal de B sur (O, j), alors (BB') // $(O, \vec{i}\,)$

$\left.\begin{array}{l} (BB') \,//\, (OH) \\ (BB') \,//\, (O, \vec{i}\,) \end{array}\right\}$ $(OH) \,//\, (O, \vec{i}\,)$

$\left.\begin{array}{l} O \in (OH) \\ O \in (O, \vec{i}\,) \\ (OH) \,//\, (O, \vec{i}\,) \end{array}\right\}$ $(OH) = (O, \vec{i}\,)$ d'où $H \in (O, \vec{i}\,)$



EXAMEN DU BFEM –SESSION DE 1995
Sénégal

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Exercice : (3 pts)

1°/ On considère un segment [AB] de milieu I, démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

2°/ ABC est un triangle, on suppose qu'il existe un point H tel que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{O}$.
En utilisant I, milieu de [AB] , démontrer que H est un point de [IC] .

Problème : **(7 pts)**

Soit un cône de révolution de sommet S et de base le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R = a. La distance OS est égale à 2a.

1°) Calculer en fonction de a le volume du cône.

2°) Soit T un point qui décrit le cercle; calculer une mesure, selon le degré, de l'angle $\widehat{OST}$.

3°) NPQR est un carré inscrit dans le cercle de base $\mathcal{C}$.
Calculer en fonction de a le volume et l'aire totale de la pyramide régulière de sommet S et de base NPQR.

ACTIVITES NUMERIQUES :

Exercice : (4 pts)

Résoudre algébriquement le système (S) défini par :

$$(S)\begin{cases} x - y - 1 = 0 & (1) \\ 2x - y + 2 = 0 & (2) \\ -x + 3y + 9 = 0 & (3) \end{cases}$$

Interpréter géométriquement votre réponse. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J).

Problème : (6pts)

On considère les expressions suivantes :

$A(x) = (15x + 10)(-x + 5) - (12x + 8)(-7x + 2) - 5\,(9x^2 + 6x)$ et
$B(x) = (7x + 18)^2 - (-x + 1)^2$

1°) Factoriser A(x) puis B(x)

2°) On considère l'expression q(x) définie par $q(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$.

3°) Simplifier l'expression q(x).

4°) Résoudre les équations suivantes : q(x) = 0 ; $\mathbf{q(x) = \frac{1}{2}}$.

Calculer la valeur exacte de q ($\sqrt{2}$) (sans radical au dénominateur). En déduire une valeur approchée à 10-3 prés par défaut de q ($\sqrt{2}$) sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

EXAMEN DU BFEM-SESSION DE 1995

CORRIGE

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Exercice : (3 pts)

1°/ On considère un segment [AB] de milieu I, démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

I milieu de [AB] alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$ (Relation de Chasles)

$= 2\,\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$

$= 2\,\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{IA} = -\,\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

$\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}}$

2°/ ABC est un triangle, on suppose qu'il existe un point H tel que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{O}$.
En utilisant I, milieu de [AB], démontrer que H est un point de [IC] .

I milieu de [AB] alors $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = 2\,\overrightarrow{HI}$.

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{O}$

$\Leftrightarrow\quad 2\,\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{O}$

$\Leftrightarrow\quad 2\,\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O}$

$\Leftrightarrow\quad 3\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O}$

$\Leftrightarrow\quad -\,3\,\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IC}$

$\Leftrightarrow\quad 3\,\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IC}$

$2\,\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HI} = 3\,\overrightarrow{HI}$

Donc les points I, H et C sont alignés dans cet ordre.

D'où $\boxed{H \in [IC]}$.

Problème : **(7 pts)**

Soit un cône de révolution de sommet S et de base le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R = a. La distance OS est égale à 2a.

1°) Calculer en fonction de a le volume du cône.

Soit $\mathcal{V}$ le volume du cône.

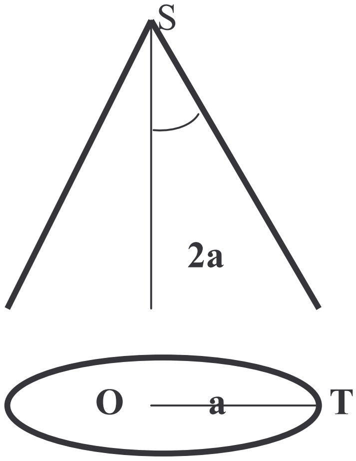
$$\mathcal{V} = \frac{Aire\_de\_base \times Hauteur}{3}$$

$$Aire\_de\_base = a^2 \times \pi$$

$$\mathcal{V} = \frac{a^2 \times \pi \times 2a}{3} = \frac{2\pi a^3}{3}$$

$$Hauteur = 2a$$

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{2\pi a^3}{3}}$$



2°) Soit T un point qui décrit le cercle; calculer une mesure, selon le degré, de l'angle $\widehat{OST}$.

T est un point du cercle, donc OT = a.

Calculons la tangente de $\widehat{OST}$ puisqu'on connaît OS et OT.

OST est un triangle rectangle en O, alors tg $\widehat{OST} = \frac{OT}{OS}$.

tg $\widehat{OST} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Angles	25°	26°	27°	28°
tangente	0,466	0 ,488	0,540	0,532

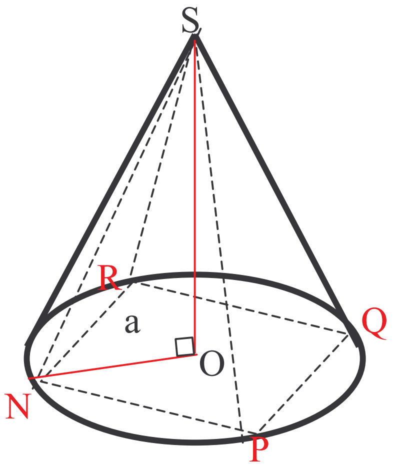
L'extrait de la table montre que :

0,488 < tg $\widehat{OST}$ < 0,540

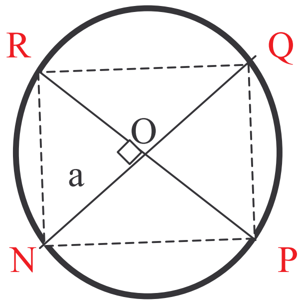
tg 26°< tg $\widehat{OST}$ < tg 27°

Donc $\widehat{OST}$ = 26° à 1° près par défaut.

3°) NPQR est un carré inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.
Calculer en fonction de a le volume et l'aire totale de la pyramide régulière de sommet S et de base NPQR



ON = a



Soit $\mathcal{V}_P$ le volume de la pyramide de sommet S et de base NPQR.

$$\mathcal{V}_P = \frac{Aire\_de\_base \times Hauteur}{3}$$

$$Aire\_de\_base = a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} = 2a^2$$

$$\mathcal{V}_P = \frac{2a^2 \times 2a}{3} = \frac{4a^3}{3}$$

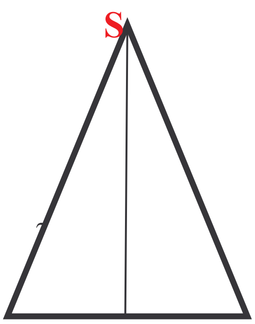
$$Hauteur = 2a$$

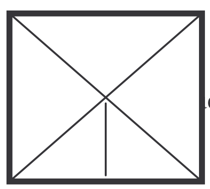
$$\boxed{\mathcal{V}_P = \frac{4a^3}{3}}$$

Soit $\mathcal{A}_T$ l'aire totale de la pyramide régulière de sommet S et de base NPQR.

$$\mathcal{A}_T = Aire\_de\_base + Aire\_latérale$$

$$Aire\_latérale = 4 \times \frac{SI \times NP}{2}$$





$NP = a\sqrt{2}$

O

Calculons SI. N I P N I P

Pour cela calculons d'abord OI.
OIN est un triangle rectangle en I : OI² = ON² - NI²

NI = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ NP = $a\sqrt{2}$

OI² = a² - $\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

OI = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

SI² = OI² + OS²

SI² = $\dfrac{a^2}{2} + 4a^2 = \dfrac{9a^2}{2}$

SI = $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

$$Aire\_latérale = 4 \times \frac{3a\sqrt{2} \times a\sqrt{2}}{2 \times 2} = 6a^2$$

$$Aire\_de\_base = 2a^2$$

$\mathcal{A}_T$= 6a² + 2a² = 8a²

$\boxed{\mathcal{A}_T = 8a^2}$

ACTIVITES NUMERIQUES :

Exercice : **(4 pts)**

Résoudre algébriquement le système (S) défini par :

$$(S)\begin{cases} \mathbf{x - y - 1 = 0} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{2x - y + 2 = 0} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{-x + 3y + 9 = 0} & \mathbf{(3)} \end{cases}$$

On tire y de l'équation (1) puis on le remplace dans l'équation (2) ou (3) :
De (1) on a : y = x - 1
Dans (2) on a : 2x – (x – 1) + 2 = 0
On résout cette équation à une inconnue en x.

$$\begin{aligned} & 2x - (x - 1) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x - x + 1 + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = -3 \end{aligned}$$

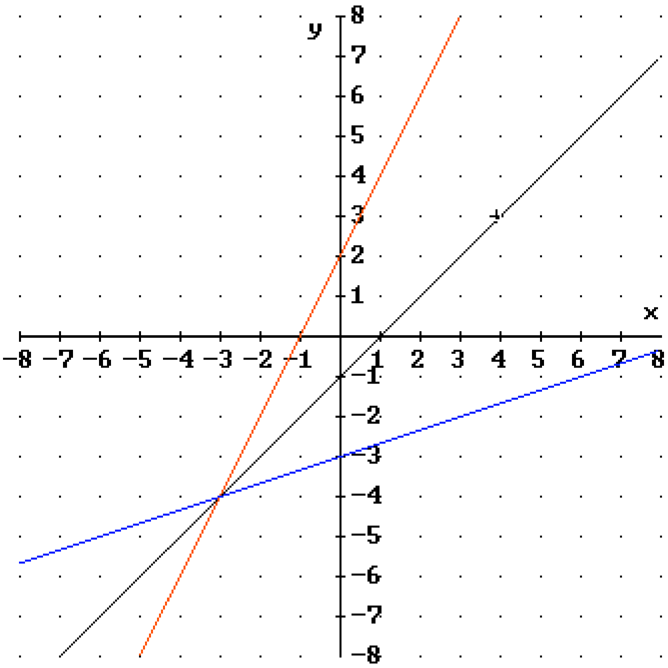
Calculons y dans l'équation y = x – 1 en remplaçant x par – 3.
y = - 3 – 1
y = - 4
Vérifions si x =- 3 et y =– 4 vérifient l'équation (3).

$-(-3) + 3(-4) + 9 = 3 - 12 + 9$
$= -9 + 9$
$= 0$ donc -3 et -4 vérifient l'équation (3).

Le système (S) a une solution unique : le couple $(-3 ; -4)$.

Interpréter géométriquement votre réponse. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J).

Les équations (1) ; (2) et (3) sont celles de droites qui se rencontrent en un point unique de coordonnées $(-3 ; -4)$.



<u>Problème</u> : **(6pts)**

On considère les expressions suivantes :

$A(x) = (15x + 10)(-x + 5) - (12x + 8)(-7x + 2) - 5(9x^2 + 6x)$ et

$B(x) = (7x + 18)^2 - (-x + 1)^2$

1°) Factoriser A(x) puis B(x)

$A(x) = (15x + 10)(-x + 5) - (12x + 8)(-7x + 2) - 5(9x^2 + 6x)$

$A(x) = 5(3x + 2)(-x + 5) - 4(3x + 2)(-7x + 2) - 5\times 3x\times(3x + 2)$

$A(x) = (3x + 2)[5(-x + 5) - 4(-7x + 2) - 5\times 3x]$

$A(x) = (3x + 2)(-5x + 25 + 28x - 8 - 15x)$

$\boxed{A(x) = (3x + 2)(8x + 17)}$

$B(x) = (7x + 18)^2 - (-x + 1)^2$

$B(x) = [(7x + 18) - (-x + 1)] \times [(7x + 18) + (-x + 1)]$

$B(x) = (7x + 18 + x - 1)\times(7x + 18 - x + 1)$

$\boxed{B(x) = (8x + 17)(6x + 19)}$

2°) On considère l'expression q(x) définie par $q(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$. Simplifier l'expression q(x).

$$q(x) = \frac{(3x+2)(8x+17)}{(8x+17)(6x+19)}$$

Avant de simplifier q(x), cherchons les valeurs de x pour lesquelles q(x) n'est pas définie. Ces valeurs sont celles qui annulent le dénominateur.

Résolvons pour cela l'équation (8x + 17) (6x + 19) = 0.

$$(8x + 17)(6x + 19) = 0$$

$\Leftrightarrow$ 8x + 17 = 0 ou 6x + 19 = 0

$\Leftrightarrow x = -\frac{17}{8}$ ou $x = -\frac{19}{6}$

Pour $x \neq -\frac{17}{8}$ et $x \neq -\frac{19}{6}$:

$$\boxed{q(x) = \frac{3x+2}{6x+19}}$$

3) Résoudre les équations suivantes : q(x) = 0 ; **q (x) =** $\frac{1}{2}$.

q(x) = 0 $\Leftrightarrow \frac{3x+2}{6x+19} = 0$

Pour $x \neq -\frac{17}{8}$ et $x \neq -\frac{19}{6}$:

$$\frac{3x+2}{6x+19} = 0$$

$\Leftrightarrow$ 3x + 2 = 0

$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3}}$

q(x) = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x+2}{6x+19} = \frac{1}{2}$

$$\frac{3x+2}{6x+19} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow$ 2(3x + 2)= 6x + 19

$\Leftrightarrow$ 6x + 4 = 6x + 19

$\Leftrightarrow$ 0x = 15

$\boxed{\text{Egalité impossible}}$

4) Calculer la valeur exacte de q ($\sqrt{2}$) (sans radical au dénominateur). En déduire une valeur approchée à 10^{-3} prés par défaut de q ($\sqrt{2}$) sachant que **1,414 <** $\sqrt{2}$ **< 1,415.**

$$q(\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}+2}{6\sqrt{2}+19}$$

En rendant rationnel le dénominateur on obtient :

$$q(\sqrt{2}) = \frac{(3\sqrt{2}+2)(6\sqrt{2}-19)}{(6\sqrt{2}+19)(6\sqrt{2}-19)} = \frac{36-57\sqrt{2}+12\sqrt{2}-38}{72-361}$$

$$q(\sqrt{2}) = \frac{-45\sqrt{2}-2}{-289} = \frac{2+45\sqrt{2}}{289}$$

$$\boxed{q(\sqrt{2}) = \frac{2+45\sqrt{2}}{289}}$$

Encadrons q($\sqrt{2}$) à 10^{-3} près:

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$63{,}63 < 45\sqrt{2} < 63{,}675$$
$$65{,}63 < 2 + 45\sqrt{2} < 65{,}675$$
$$0{,}2270 < \frac{2+45\sqrt{2}}{289} < 0{,}2272$$
$$0{,}227 < q(\sqrt{2}) < 0{,}228$$

q ($\sqrt{2}$) = 0,227 à 10^{-3} près par défaut

EXAMEN DU BFEM-SESSION DE 1997
Sénégal

Exercice 1*

Sur une période donnée les recettes d'une essencerie se repartissent comme suit :

Carburant	Essence ordinaire	Gasoil	Essence super	Mélange
% de toutes les recettes	30%	40%	25%	5%

1) Représente cette série par un diagramme semi-circulaire
2) Sachant que l'essence ordinaire vendue représente une somme de 126000 F et que 42 litres de mélange ont été vendus ; trouver :
   a°) La somme rapportée par le gasoil
   b°) Le prix du litre de mélange.

Exercice 2**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 8cm et AC=4 cm.
Calculer BC puis faire une figure.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)
   - On donne $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$.
   - Calculer BH. CH puis AH.
2) La parallèle à la droite (AH) passant par C coupe (AB) en E. Calculer AE puis en déduire EC.
3) Calculer sinE. faire une figure complète

Exercice 3**

(O, I, J) est un repère du plan, les point A (-4 ; 4), B (-9 ; -6) ; C (1 ;-1) et D (6 ; 9).

1) Donner les composants des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis la nature du triangle ABC.
2) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.
3) Montrer que le point E (2 ;-8) est symétrique de A par rapport à (BC).

EXAMEN DU BFEM- SESSION DE1997
CORRIGE

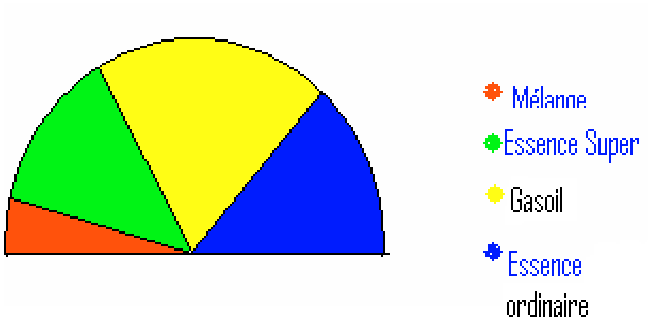
Exercice 1*

Sur une période donnée les recettes d'une essencerie se repartissent comme suit :

Carburant	Essence ordinaire	Gasoil	Essence super	Mélange
% de toutes les recettes	30%	40%	25%	5%

1) Représente cette série par un diagramme semi-circulaire :

Diagramme semi-circulaire



Carburant	Essence ordinaire	Gasoil	Essence super	Mélange	Total
% de toutes les recettes	30%	40%	25%	5%	100%
Secteurs angulaires	54°	72°	45°	9°	180°

2) Sachant que l'essence ordinaire vendue représente une somme de 126000 F et que 42 litres de mélange ont été vendus, trouver :

a) La somme rapportée par le gasoil

Carburant	Essence ordinaire	Gasoil	Essence super	Mélange
% de toutes les recettes	30%	40%	25%	5%

Le montant total de la recette : $\dfrac{126000 \times 100}{30} = 420000\,\mathrm{F}$

La somme rapportée par le gasoil : $\dfrac{420000 \times 40}{100} = 168000\,\mathrm{F}$

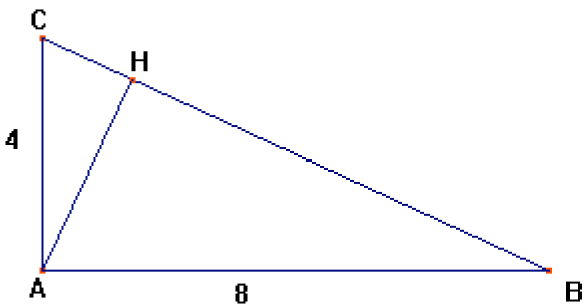
b) Le prix du litre de mélange…

La somme rapportée par le mélange : $\dfrac{168000}{8} = 21000\,\mathrm{F}$

Le prix du litre de mélange est alors : $\dfrac{21000}{42} = 500\,\mathrm{F}$

Exercice 2**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 8cm et AC=4 cm.
1) Calculer BC puis faire une figure :



Calculons BC sachant que ABC est un triangle rectangle en A.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Théorème de Pythagore) On

$BC^2 = 16+64$

$BC^2 = 80$ 80=16x5

$BC = 4\sqrt{5}$

$BC = \boxed{4\sqrt{5}\ \mathrm{cm}}$

2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) :
On donne AB^2 = BH x BC et AC^2 = CH x BC. Calculer BH, CH puis AH.

$$BH = \frac{AB^2}{BC}$$

$$BH = \frac{8^2}{4\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{BH = \frac{16\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{cm}}$$

$$CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{4^2}{4\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{CH = \frac{4\sqrt{5}}{5} cm}$$

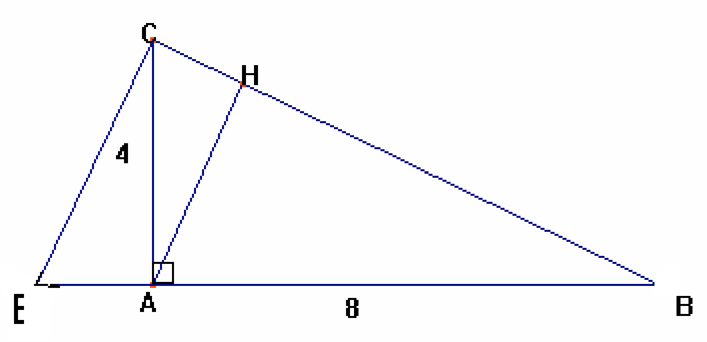
$$AH = \frac{AB \times AC}{BC}$$

$$AH = \frac{8 \times 4}{4\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{AH = \frac{8\sqrt{5}}{5} cm}$$

2) La parallèle à la droite (AH) passant par C coupe (AB) en E. Calculer AE puis en déduire EC.

ACE est un triangle rectangle en C.



A est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ECB.
On a alors :
AC² = AE $\times$ AB

$$AE = \frac{AC^2}{AB}$$

$$AE = \frac{4^2}{8} = 2$$

AE= 2cm

EC² = AE² +AC²
EC² = 2² + 4²
EC² =18
EC $= 2\sqrt{3}$

$$\boxed{EC = 2\sqrt{3} \text{ cm}}$$

4) Calculer sin E.Faire une figure complète :

$$\sin E = \frac{AC}{EC} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin E = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 3**

(O, I, J) est un repère du plan. A (-4 ; 4), B (-9 ; -6), C(1 ; -1) et D(6 ;9) sont des points du plan.

1) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis la nature du triangle ABC

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9+4\\-6-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1+9\\-1+6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+4\\-1-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$

Calculons les trois côtés du triangle ABC.

$$AB = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

On voit que AB = BC ; alors ABC est un triangle isocèle de sommet principal B.

2)Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-6\\-1-9\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-5\\-10\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme
AB = BC } alors ABCD est un losange.

3) Montrer que le point E(2 ;-8) est symétrique de A par rapport à (BC) .

Calculons CE et BE.

$$CE = \sqrt{(2-1)^2 + (-8+1)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$BE = \sqrt{(2+9)^2 + (-8+6)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

AC = CE alors C appartient à la médiatrice de [AE]
AB = BE alors B appartient à la médiatrice de [AE] } (BC) est la médiatrice de [AE] d'où E est le symétrique de A par rapport à (BC).

EXAMEN DU BFEM-SESSION DE 1998
Sénégal

Exercice 1*

Assane et Ousseynou désirent acheter en commun un magnétophone qui coûte 20 000 F. les économies de Ousseynou représentent les $\frac{4}{5}$ de celles de Assane. S'ils réunissent leurs économies, il leur manque 2720 F pour effectuer leur achat.
Calculer le montant des économies de chacun.

Exercice 2**

1) On donne A = $\sqrt{121}$ - 2$\sqrt{112}$ + $\sqrt{63}$ - $\sqrt{81}$. Ecrire A sous la forme a + b$\sqrt{c}$ (a, b et c sont des entiers relatifs).
2) Soit B (x) = $x^2 - 1 + (x + 7)(2x - 2)$
   a) Factoriser B(x)
   b) Développer, réduire, puis ordonner B(x)
3) Soit l'expression $q(x) = \dfrac{B(x)}{(x-1)(x+7)}$
   a) Etablir la condition d'existence de q (x) et la simplifier
   b) Calculer q (x) pour x = $\sqrt{2}$ et x = - 1

Exercice 3**

<u>les parties II et III sont indépendantes :</u>

a. (ABCD) est un trapèze rectangle de base [AB] et [DC] tel que AB = 6 cm, DC = 4 cm et AD = 3 cm. Calculer l'aire de ce trapèze

b. Une pyramide de sommet S et de base le trapèze ABCD a pour hauteur SA = 8cm. Faire une figure soignée

Préciser la nature de SAB et calculer SB. Calculer sin $\widehat{ABS}$

c. Un plan P sectionne la pyramide ABCDS parallèlement à sa base ABCD à $\frac{1}{3}$ de sa hauteur SA (à partir de A) et coupe respectivement les cotés [SA], [SB], [SC] et [SD] en I, J, K et L

1) Compléter votre figure et préciser la nature de la section IJKL

2) Montrer que $\frac{IJ}{AB} = \frac{2}{3}$ et en déduire IJ.

3) Calculer le volume de la pyramide (ABCDS).
En déduire le volume de la pyramide (IJKLS).

EXAMEN DU BFEM-SESSION DE 1998
CORRIGE

Exercice 1*

Assane et Ousseynou désirent acheter en commun un magnétophone qui coûte 20 000 F. les économies de Ousseynou représentent les $\frac{4}{5}$ de celles de Assane. S'ils réunissent leurs économies, il leur manque 2720 F pour effectuer leur achat.

Calculer le montant des économies de chacun.

Soit x le montant des économies de Assane.

Le montant y des économies de Ousseynou en fonction de x est alors: $y=\frac{4}{5}x$.

$x + \frac{4}{5}x = 20000-2720$

$\frac{9}{5}x = 17280$

$x = \frac{17280 \times 5}{9} = 9600$ $\boxed{x = 9600F}$

$y = 9600 \times \frac{4}{5} = 7680$ $\boxed{y = 7680F}$

Exercice 2**

On donne $A = \sqrt{121} - 2\sqrt{112} + \sqrt{63} - \sqrt{81}$.

1) Ecrire A sous la forme $a + b\sqrt{c}$ (a, b et c sont des entiers relatifs).

$A = \sqrt{121} - 2\sqrt{112} + \sqrt{63} - \sqrt{81}$.

$A = 11 - 2x4\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 9$

$\boxed{A = 2 - 5\sqrt{7}}$ $\boxed{a = 2}$ $\boxed{b = -5}$ $\boxed{c = 7}$

2) Soit $B(x) = x^2 - 1 + (x + 7)(2x - 2)$

a) Factoriser B(x)

$B(x) = x^2 - 1 + (x + 7)(2x - 2)$ $2x - 2 = 2(x - 1)$

$B(x) = (x - 1)(x + 1) + 2(x + 7)(x - 1)$ $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$B(x) = (x - 1)[(x + 1) + 2(x + 7)]$ $2(x + 7) = 2x + 14$

B (x) = (x – 1)(3x+ 15) 3x+ 15 = 3 (x+ 5)

$\boxed{B(x) = 3(x - 1)(x + 5)}$

b) Développer, réduire, puis ordonner B(x)

B (x) = (x – 1) (3x+ 15) le développement est plus facile à partir de la forme factorisée.

B (x) = 3x² +15x – 3x – 15

$\boxed{B(x) = 3x^2 + 12x - 15}$

3) Soit l'expression q (x) = $\dfrac{B(x)}{(x-1)(x+7)}$

a) Etablir la condition d'existence de q (x) et la simplifier

<u>Condition d'existence :</u>

q(x) existe pour (x-1) (x + 7) $\neq$ 0

Résolvons l'équation (x-1) (x + 7)= 0 pour déterminer les valeurs pour lesquelles q(x) n'a pas de sens. On en déduit ensuite les valeurs pour lesquelles q(x) existe.

(x-1) (x + 7)= 0

$\Leftrightarrow$x – 1=0 ou x + 7 = 0

$\Leftrightarrow$x =1 ou x = - 7

$\boxed{\text{q(x) existe alors pour } x \neq 1 \text{ et } x \neq -7}$

<u>Simplification :</u>

Pour x $\neq$ 1 et x $\neq$ - 7 : $q(x) = \dfrac{3(x+5)}{x+7}$

a)Calculer q (x) pour x = $\sqrt{2}$ et x = - 1

Pour x = $\sqrt{2}$: $q(\sqrt{2}) = \dfrac{3(\sqrt{2}+5)}{\sqrt{2}+7}$

$$q(\sqrt{2}) = \frac{3(\sqrt{2}+5)}{\sqrt{2}+7} = \frac{3(\sqrt{2}+5)(\sqrt{2}-7)}{(\sqrt{2}+7)(\sqrt{2}-7)} = \frac{3(2-2\sqrt{2}-35)}{2-49}$$

$$\boxed{q(\sqrt{2}) = \frac{-6\sqrt{2}-99}{-47} = \frac{6\sqrt{2}+99}{47}}$$

Pour x = - 1 : $q(-1) = \dfrac{3(-1+5)}{-1+7} = \dfrac{12}{6} = 2$ $\boxed{q(-1) = 2}$

Exercice 3**

<u>les parties II et III sont indépendantes</u> :

1) (ABCD) est un trapèze rectangle de base [AB] et [DC] tel que AB = 6 cm, DC = 4 cm et AD = 3 cm. Calculer l'aire de ce trapèze

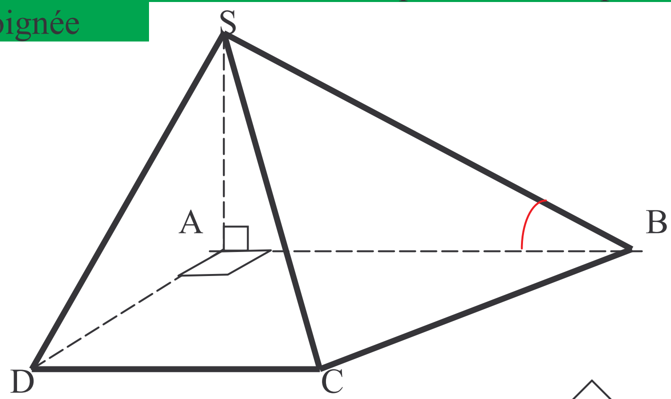
L'aire du trapèze est donnée par la formule : $\dfrac{somme\_des\_bases \times hauteur}{2}$

$$A(ABCD) = \frac{(AB+DC) \times AD}{2}$$

$$A(ABCD) = \frac{(6+4) \times 3}{2} = 15$$

$$A(ABCD) = 15cm^2$$

2) Une pyramide de sommet S et de base le trapèze ABCD a pour hauteur SA = 8cm. Faire une figure soignée



3) Préciser la nature de SAB et calculer SB. Calculer sin $\widehat{ABS}$

SAB est un triangle rectangle en A.

$SB^2 = AS^2 + AB^2$

$SB^2 = 8^2 + 6^2$

$SB^2 = 100$

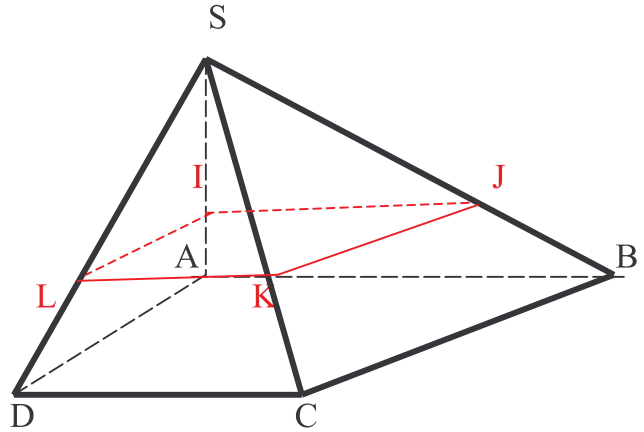
SB= 10

$\boxed{SB = 10\text{ cm}}$

$\sin\widehat{ABS} = \dfrac{AS}{BS} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

$\boxed{\sin\widehat{ABS} = 0{,}8}$

4) Un plan P sectionne la pyramide ABCDS parallèlement à sa base ABCD à 1/3 de sa hauteur SA (à partir de A) et coupe respectivement les cotés [SA], [SB], [SC] et [SD] en I, J, K et L. Compléter votre figure et préciser la nature de la section IJKL



IJKL est un trapèze rectangle. Il est une réduction du trapèze ABCD.

5)Montrer que $\dfrac{IJ}{AB} = \dfrac{2}{3}$ et en déduire IJ.

$\dfrac{IJ}{AB} = \dfrac{SI}{AS}$

Or $SI = \dfrac{2}{3}AS$

$AI = \dfrac{1}{3}AS$

Donc $\dfrac{IJ}{AB} = \dfrac{\frac{2}{3}AS}{AS} = \dfrac{2AS}{3AS} = \dfrac{2}{3}$

$\boxed{\dfrac{IJ}{AB} = \dfrac{2}{3}}$

$IJ = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2\times 6}{3} = 4$

$\boxed{IJ = 4cm}$

6)Calculer le volume de la pyramide (ABCDS).En déduire le volume de la pyramide (IJKLS).

$$\mathcal{V}\text{ (ABCDS)}=\frac{A(ABCD)\times AS}{3}$$

$$\mathcal{V}\text{ (ABCDS)} = \frac{15\times 8}{3} = 40 \qquad \boxed{\mathcal{V}\text{ (ABCDS)} = 40cm^3}$$

$$\mathcal{V}\text{ (IJKLS)} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \mathcal{V}\text{ (ABCDS)}$$

$$\mathcal{V}\text{ (IJKLS)} = \frac{8\times 40}{27} = 11,85 \qquad \boxed{\mathcal{V}\text{ (IJKLS)} = 11,85cm^3}$$

EXAMEN DU BFEM-SESSION DE 1999
Sénégal

Exercice 1*

On considère les expressions suivantes :

$A(x) = (x – 2)\ (x + 5) – (2 – x)\ (3 – x) + x^2 – 4$

$B(x) = x^2 – 4x + 4 – (3x – 6)$

1) Factoriser A(x) et B(x).
2) Développer et réduire A(x) et B(x).
3) Calculer A (0) et A ($\sqrt{3}$).
4) Soit E(x) le quotient défini par $E(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$

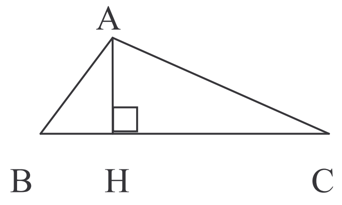
Pour quelles valeurs de x, E(x) n'a pas de sens ?

Donner une écriture simplifiée de E(x).

Exercice 2**

Sur la figure suivante AB = 18 ; AH = 12 ; $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{4}{5}$; (AH) est la perpendiculaire à (BC).

1) Calculer la valeur exacte de AC et de BC (BC = BH + HC)
2) La parallèle à (BC) passant par le point E de [AB] tel que BE = 6, coupe (AC) en F. Calculer AF.



Exercice 3**

Tracer un cercle (C) de centre O et de diamètre AB = 6.

Soit M un point du cercle (C) tel que AOM = 60°.

La tangente en M à (C) coupe (AB) en N.

1) Quelle est la nature des triangles AMO, NMO, NAM. ?
   Pour chaque triangle justifier la réponse.
2) Calculer MN.

3) Soit I l'image de O dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$, précise la nature du quadrilatère AMIO.
4) Soit E le point diamétralement opposé à I, montre que le quadrilatère AMOE est un losange. En déduire que (AB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MNE}$.

EXAMEN DU BFEM-SESSION DE 1999
CORRIGE

Exercice 1*

On considère les expressions suivantes :

$A(x) = (x - 2)(x + 5) - (2 - x)(3 - x) + x^2 - 4$

$B(x) = x^2 - 4x + 4 - (3x - 6)$

1) Factoriser A(x) et B(x).

$A(x) = (x - 2)(x + 5) - (2 - x)(3 - x) + x^2 - 4$ $\qquad - (2 - x) = +(x - 2)$

$A(x) = (x - 2)(x + 5) + (x - 2)(3 - x) + (x - 2)(x + 2)$

$A(x) = (x - 2)[(x + 5) + (3 - x) + (x + 2)]$

$A(x) = (x - 2)(x + 10)$

$\boxed{A(x) = (x - 2)(x + 10)}$

$B(x) = x^2 - 4x + 4 - (3x - 6)$

$B(x) = (x - 2)(x - 2) - 3(x - 2)$

$B(x) = (x - 2)[(x - 2) - 3]$

$B(x) = (x - 2)(x - 5)$

$\boxed{B(x) = (x - 2)(x - 5)}$

2) Développer et réduire A(x) et B(x).

$A(x) = (x - 2)(x + 10)$

$A(x) = x^2 + 10x - 2x - 20$

$A(x) = x^2 + 8x - 20$

$\boxed{A(x) = x^2 + 8x - 20}$

$B(x) = (x - 2)(x - 5)$

$B(x) = x^2 - 5x - 2x + 10$

$B(x) = x^2 - 7x + 10$

$\boxed{B(x) = x^2 - 7x + 10}$

3) Calculer A (0) et A(√3).

$A(0) = 0^2 + 8\times0 - 20$

$A(0) = -20$

$\boxed{A(0) = -20}$

$A(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3} - 20$

A ($\sqrt{3}$) = $3+8\sqrt{3}-20=-17+8\sqrt{3}$ A ($\sqrt{3}$) = $-17+8\sqrt{3}$

4) Soit E(x) le quotient défini par E(x) = $\dfrac{A(x)}{B(x)}$.

Pour quelles valeurs de x, E(x) n'a pas de sens ?

E (x) n'a pas de sens pour B (x) = 0.

B (x) = 0

$\Leftrightarrow$(x – 2) (x – 5) = 0

$\Leftrightarrow$ x – 2 = 0 ou x – 5 = 0

$\Leftrightarrow$ x = 2 ou x = 5

$\boxed{\text{E (x) n'a pas de sens pour x = 2 ou x = 5.}}$

5) Donner une écriture simplifiée de E(x).

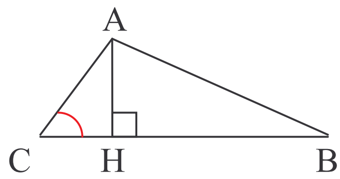
$$E(x)=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-5)}$$

Pour $x\neq 2$ et $x\neq 5$: $E(x)=\dfrac{x+10}{x-5}$ $\boxed{E(x)=\dfrac{x+10}{x-5}}$

Exercice 2**

Sur la figure suivante, AB = 18 ; AH = 12 ; sin $\widehat{ACB}=\dfrac{4}{5}$. (AH) est la perpendiculaire à (BC).

1) Calculer la valeur exacte de AC et de BC (BC = BH + HC)



$$\sin\widehat{ACB}=\frac{AH}{AC}$$

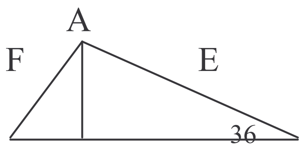
$$AC=\frac{AH}{\sin ACB}=\frac{12}{\frac{4}{5}}=\frac{12\times 5}{4}=15$$

$\boxed{AC = 15}$

$BH^2 = AB^2 - AH^2$	$HC^2 = AC^2 - AH^2$
$BH^2 = 18^2 - 12^2$	$HC^2 = 15^2 - 12^2$
$BH^2 = 180$	$HC^2 = 81$
$BH = 6\sqrt{5}$	$HC = 9$

BC = BH+HC = $9 + 6\sqrt{5}$ $\boxed{BC = 9 + 6\sqrt{5}}$

2) La parallèle à (BC) passant par le point E de [AB] tel que BE = 6, coupe (AC) en F. calculer AF



C H B

On utilise le théorème de Thalès :

$\left.\begin{array}{l}\text{A, E et B sont alignés}\\ \text{A, F et C sont alignés}\\ \text{(EF)// (BC)}\end{array}\right\}$ alors, $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$

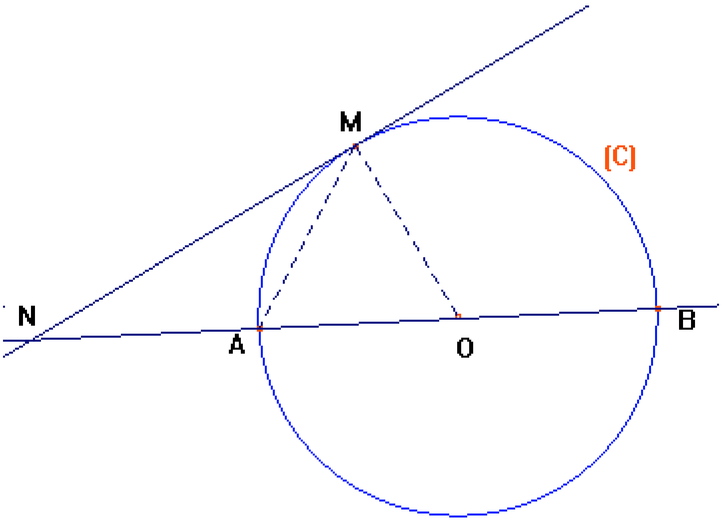
$\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$ donc AF = $\dfrac{AE \times AC}{AB}$

AF = $\dfrac{12 \times 15}{18} = 10$ $\boxed{\text{AF = 10}}$

Exercice 3**

Tracer un cercle (C) de centre O de diamètre AB = 6 cm.
Soit M un point du cercle (C) tel que $\widehat{AOM}$ = 60°.
La tangente en M à (C) coupe (AB) en N.

1) Quelle est la nature des triangles AMO, NMO, NAM ?
Pour chaque triangle justifier la réponse.



$\left.\begin{array}{l}\text{OA = rayon}\\ \text{OM = rayon}\end{array}\right\}$ OA = OM donc AMO est un triangle isocèle de sommet principal O.

$\widehat{AOM}$ = 60° donc $\widehat{OMA} + \widehat{MAO}$ = 120°

Or $\widehat{OMA} = \widehat{MAO}$ = 60°

Par conséquent : $\boxed{\text{AMO est un triangle équilatéral}}$

(NM) étant tangente au cercle en M donc (NM) ⊥ (MO)

D'où : $\boxed{\text{NMO est un triangle rectangle en M}}$

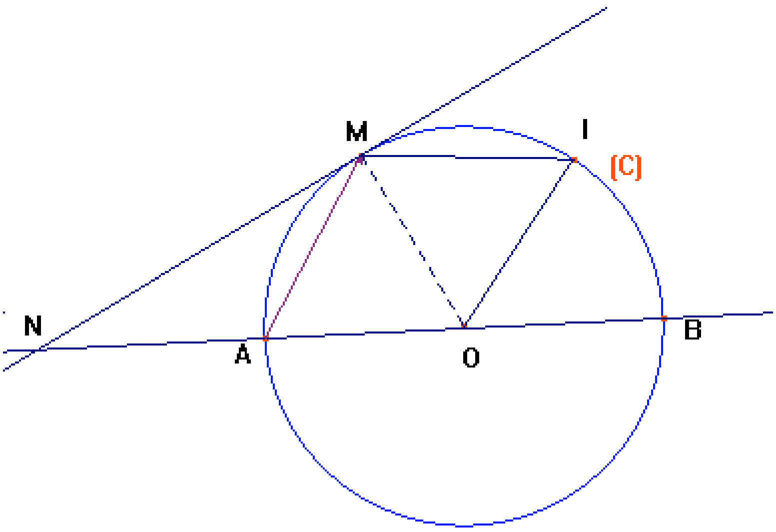
NMO étant un triangle rectangle en M, le cercle circonscrit à ce triangle a pour centre le point A (car AO = AM et A $\in$ [NO])
Par conséquent : AM = AN

D'où : $\boxed{\text{NAM est un triangle isocèle de sommet principal A.}}$

2) Calculer MN.

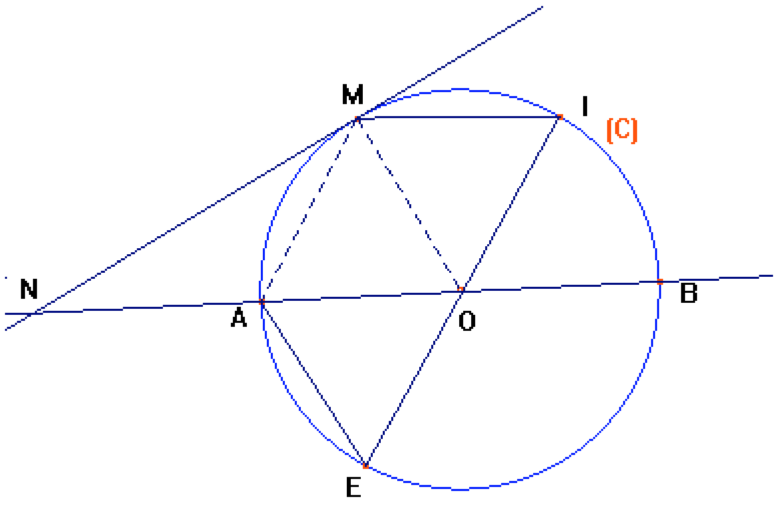
$NM^2 = NO^2 - OM^2$
$NM^2 = 6^2 - 3^2$
$NM^2 = 25$
$NM = 5$ $\boxed{NM = 5 \text{ cm}}$

3) Soit I l'image de O dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$, précise la nature du quadrilatère AMIO.



$t_{\overrightarrow{AM}}(O) = I$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OI}$ d'où AMIO est un parallélogramme.
AMIO est un parallélogramme
AM = AO } alors $\boxed{\text{AMIO est un losange}}$.

4) Soit E le point diamétralement opposé à I. Montre que le quadrilatère AMOE est un losange. En déduire que (AB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MNE}$.



E diamétralement opposé à I donc $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OI}$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OI} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OI}\end{array}\right\}$ $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{AM}$ donc AMOE est un parallélogramme

$\left.\begin{array}{l}\text{AMOE est un parallélogramme} \\ AM = MO\end{array}\right\}$ alors $\boxed{\text{AMOE est un losange}}$

AMOE est un losange donc E est le symétrique de M par rapport à (AO).
N est son propre symétrique par rapport à (AO).(N$\in$ (AO))
Par conséquent : (NM) et (NE) sont symétriques par rapport à (AO)
En conclusion : (AB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MNE}$.

EXAMEN DU BFEM – SESSION DE 2003
Sénégal

I.Activités numériques

Exercice 1 : On considère les expressions suivantes :

$$H(x) = 4(x+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}(x+\sqrt{3}) + 3$$
$$G(x) = (2x+\sqrt{3})^2$$

1) Développer, réduite et ordonner H(x) et G(x) (1pt)
2) En déduire une factorisation de H(x) (1pt)
3) On pose $Q(x) = \sqrt{H(x)}$

a)Résoudre l'équation $Q(x) = 2\sqrt{3}$

b) Résoudre l'équation $Q(x) = \dfrac{2}{3}$ (1,5pt)

c) Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter Q(x). (1,5pt)

Exercice 2 : Le tableau ci-dessous représente la répartition des notes de mathématiques lors d'un test de niveau où la note moyenne est 12,5.

Notes sur 20	6	8	9	12	15	x
Nombre d'élèves	6	9	15	9	15	18

1) Calculer x, la meilleure note attribuée lors de ce test. (1pt)
2) Combien d'élèves ont une note au moins égale à 12 ? (0,5pt)
3) Quel est le pourcentage des élèves qui ont au plus 15 ? (0,5pt)

4) Déterminer la note médiane (0,5pt)

5) Construire le diagramme circulaire de la série. 2,5 (1,5 pt pour les angles, 1 pt pour le disque)

II.Activités géométriques

Exercice 1 : Un entrepreneur des travaux publics doit aménager le long des allées d'une avenue des bancs en béton. Il hésite entre deux modèles :

- le modèle 1 : a la forme d'un tronc de cône de révolution dont les bases parallèles ont respectivement 20 cm et 10 cm de rayons.
- Le modèle 2 : a la forme d'un tronc de pyramide dont les bases parallèles sont des carrés de côtés respectifs 40 cm et 20 cm.

Les deux modèles ont une hauteur de 50 cm

1) Représenter chaque modèle

2) Sachant que le modèle le moins volumineux est le plus économique pour l'entrepreneur, aidez-le à faire le bon choix.

Fig modèle I (1pt) ; fig. modèle 2 (1 pt) – Vol. modèle 1 (2,5 pts) ; Vol. modèle 2 (2,5 pts) ; choix justifié (1 pt)

Exercice 2 : On considère un triangle ABC tel que AB = 5 cm ; AC = 6 cm et BC = 7 cm. Soit I le milieu de [BC].

1) Construire G, le centre de gravité du triangle ABC. (0,5pt)

2) Sachant que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$, démontrer que pour tout point M du plan,

on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$ (1,5pt)

EXAMEN DU BFEM- SESSION DE 2003
CORRIGE

I-Activités numériques :

1) Développer, Réduire et ordonner

$H(x) = 4(x+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}\,(x+\sqrt{3}) + 3$ En utilisant la formule $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$= 4(x^2+2x\sqrt{3}+3) - 4\sqrt{3}\,x - 4\times 3 + 3$ $\quad (x+\sqrt{3})^2 = x^2+2x\sqrt{3}+3$

$= 4x^2+8x\sqrt{3}+12-4\sqrt{3}\,x-9$ $\quad$ En utilisant la distributivité:

$= 4x^2+4x\sqrt{3}+3$ $\quad -4\sqrt{3}\,(x+\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}\,x - 4\times 3$

Suivant les puissances décroissantes :

$\boxed{H(x) = 4x^2+4x\sqrt{3}+3}$

Suivant les puissances croissantes :

$\boxed{H(x) = 3+4x\sqrt{3}+4x^2}$

$G(x) = (2x+\sqrt{3})^2$ En utilisant la formule $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$= 4x^2+4x\sqrt{3}+3$ $\quad (2x+\sqrt{3})^2 = 4x^2+4x\sqrt{3}+3$

Suivant les puissances décroissantes :

$\boxed{G(x) = 4x^2+4x\sqrt{3}+3}$

Suivant les puissances croissantes :

$\boxed{G(x) = 3+4x\sqrt{3}+4x^2}$

2) En déduire une factorisation de H(x) :

On peut remarquer que $H(x)$ et $G(x)$ ont la même forme réduite.

Par conséquent : $H(x) = G(x)$

D'où : $\boxed{H(x) = (2x+\sqrt{3})^2}$

$\boxed{H(x) = (2x+\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})}$

3) On pose $Q(x) = \sqrt{H(x)}$:

$Q(x) = \sqrt{(2x+\sqrt{3})^2} = |2x+\sqrt{3}|$ on utilise la formule $\sqrt{a^2} = |a|$

$\boxed{Q(x) = |2x+\sqrt{3}|}$

a) Résoudre l'équation $Q(x) = 2\sqrt{3}$:

$|2x+\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ on utilise la formule : $|a| = b \Leftrightarrow a = b\_ou\_a = -b$

$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\_ou\_2x+\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2x = \sqrt{3}\_ou\_2x = -3\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2}\_ou\_x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

b) Résoudre l'équation Q(x) = $\frac{2}{3}$:

$$\left|2x+\sqrt{3}\right|=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{3}=\frac{2}{3}\_ou\_2x+\sqrt{3}=-\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{2}{3}-\sqrt{3}\_ou\_2x=-\frac{2}{3}-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{2-3\sqrt{3}}{6}\_ou\_x=\frac{-2-3\sqrt{3}}{6}}$$

c) Dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$, représenter Q(x) :.

Q(x) = $\left|2x+\sqrt{3}\right|$

Si $2x+\sqrt{3}>0$ alors Q(x) = $2x+\sqrt{3}$

Si $2x+\sqrt{3}<0$ alors Q(x) = $-2x-\sqrt{3}$

Si $2x+\sqrt{3}=0$ alors Q(x) = 0

$2x+\sqrt{3}>0 \Leftrightarrow x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x+\sqrt{3}<0 \Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

En résumé :

Sur $\left]-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$:Q(x) = $-2x-\sqrt{3}$

Pour x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$: Q(x) = 0

Sur $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$: Q(x) = $2x+\sqrt{3}$

Sous forme de tableau :

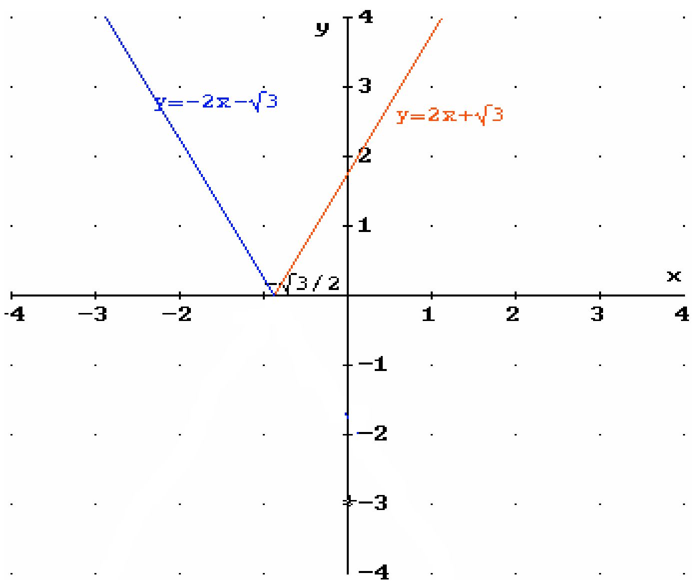
x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
Q(x)	$-2x-\sqrt{3}$	0	$2x+\sqrt{3}$

<u>Représentation graphique :</u>

Sur $\left]-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$: y = $-2x-\sqrt{3}$

Pour x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$: y = 0

Sur $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$: y = $2x+\sqrt{3}$



Exercice 2 : Le tableau ci-dessous représente la répartition des notes de mathématiques lors d'un test de niveau où la note moyenne est 12,5.

Notes sur 20	6	8	9	12	15	x
Nombre d'élèves	6	9	15	9	15	18

1) Calculer x, la meilleure note attribuée lors de ce test :

$$\frac{6\times6+8\times9+9\times15+12\times9+15\times15+x\times18}{6+9+15+9+15+18}=12{,}5$$

$$36+72+135+108+225+18x=12{,}5\times72$$

$$576+18x=900$$

$$\boxed{x=18}$$

2) Combien d'élèves ont une note au moins égale à 12 ?

Notes sur 20	12	15	18
Nombre d'élèves	9	15	18
Effectifs cumulés	9	24	42

Le nombre d'élèves qui ont une note au moins égale à 12 est 42.

3) Quel est le pourcentage des élèves qui ont au plus 15 ?

Le nombre d'élèves qui ont au plus 15 est 54.

Le pourcentage est donc $\frac{54}{72}\times100=75\,\%$

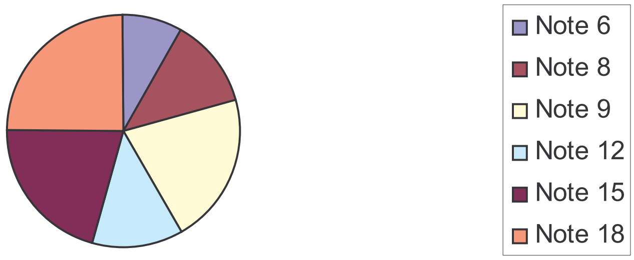
4) Déterminer la note médiane :

La médiane est entre la 36e et la 37e note qui sont toutes égales à 12.
La médiane est donc égale à 12.

5) Construire le diagramme circulaire de la série :

Nombre d'élèves	6	9	15	9	15	18
Angles	30°	45°	75°	45°	75°	90°

Diagramme circulaire de la série



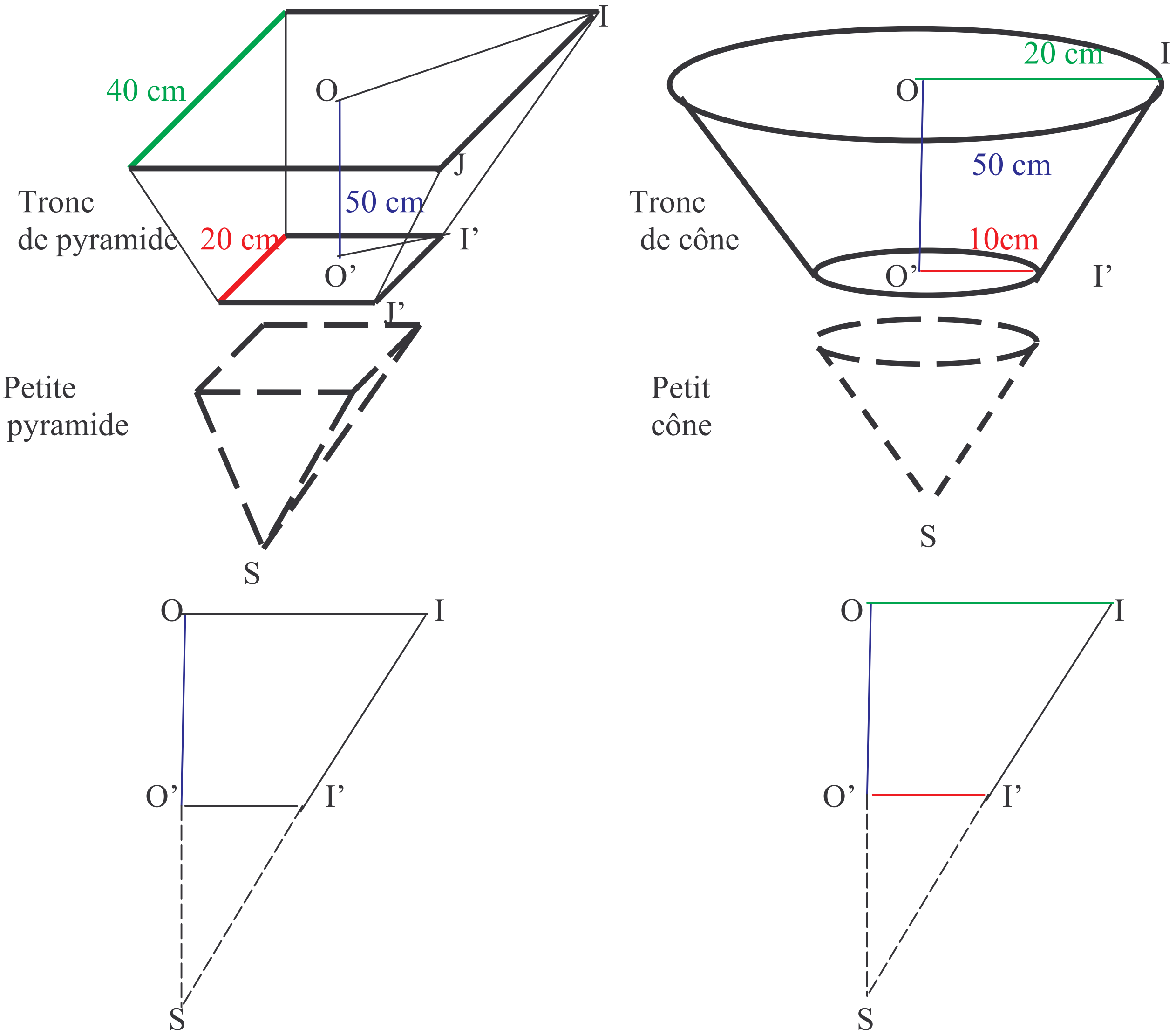
II.Activités géométriques

Exercice 1 : Un entrepreneur des travaux publics doit aménager le long des allées d'une avenue des bancs en béton. Il hésite entre deux modèles :

- le modèle 1 : a la forme d'un tronc de cône de révolution dont les bases parallèles ont respectivement 20 cm et 10 cm de rayons.
- Le modèle 2 : a la forme d'un tronc de pyramide dont les bases parallèles sont des carrés de côtés respectifs 40 cm et 20 cm.

Les deux modèles ont une hauteur de 50 cm

1) Représenter chaque modèle



2) Sachant que le modèle le moins volumineux est le plus économique pour l'entrepreneur, aidez-le à faire le bon choix :

Soit $\mathcal{V}_t$ le volume du tronc de cône (ou du tronc de pyramide), $\mathcal{V}_r$ le volume du cône réduit (ou de la pyramide réduite) et $\mathcal{V}_g$ le volume du grand cône (ou de la grande pyramide).

$$\boxed{\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_g - \mathcal{V}_r}$$

Calcul du volume du tronc de cône :

Calculons le rapport k de réduction : k=$\frac{O'I'}{OI}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

$\mathcal{V}_r=\frac{1}{8}\mathcal{V}_g$ $\qquad$ $\mathcal{V}_r=k^3\mathcal{V}_g$

$\mathcal{V}_t=\mathcal{V}_g-\frac{1}{8}\mathcal{V}_g$

$\mathcal{V}_t=\frac{7}{8}\mathcal{V}_g$ $\qquad$ $\mathcal{V}_g=\frac{\pi\times OI^2\times OS}{3}$

OI=20 cm

$\mathcal{V}_t=\frac{7}{8}\times\frac{\pi\times OI^2\times OS}{3}$

OS=2x50 cm=100 cm

$\mathcal{V}_t=\frac{7}{8}\times\frac{\pi\times 20^2\times 100}{3}=\frac{35000\pi}{3}$ $\qquad$ $\boxed{\mathcal{V}_t=\frac{35000\pi}{3}cm^3}$

Calcul du volume du tronc de la pyramide :

Calculons le rapport k de réduction : k=$\frac{O'I'}{OI}=\frac{SI'}{SI}=\frac{I'J'}{IJ}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$

$\mathcal{V}_r=\frac{1}{8}\mathcal{V}_g$ $\qquad$ $\mathcal{V}_r=k^3\mathcal{V}_g$

$\mathcal{V}_t=\mathcal{V}_g-\frac{1}{8}\mathcal{V}_g$

$\mathcal{V}_t=\frac{7}{8}\mathcal{V}_g$ $\qquad$ $\mathcal{V}_g=\frac{IJ^2\times OS}{3}$

IJ= 40 cm

$\mathcal{V}_t=\frac{7}{8}\times\frac{IJ^2\times OS}{3}$

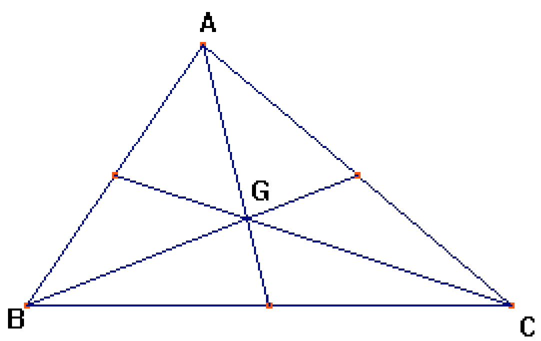
OS=2x50 cm=100 cm

$\mathcal{V}_t=\frac{7}{8}\times\frac{40^2\times 100}{3}=\frac{14000}{3}$ $\qquad$ $\boxed{\mathcal{V}_t=\frac{14000}{3}cm^3}$

En comparant les deux volumes des deux modèles, il apparaît que le modèle 2 est plus économique.

Exercice 2 : On considère un triangle ABC tel que AB = 5 cm ; AC = 6 cm et BC = 7 cm. Soit I le milieu de [BC].

1) Construire G, le centre de gravité du triangle ABC :



Le centre de gravité G est le point de rencontre des trois médianes.

2) Sachant que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$, démontrer que : pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{GM}$$

$-\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}}$$

EXAMEN DU BFEM – SESSION DE 2005
Sénégal (1^er^ GROUPE)

Exercice 1

On donne les expressions suivantes :

$f(x) = (3x - 5)^2 - (2x - 1)^2$ et $g(x) = x^2 + (2x + 1)(5 - x) - 25$

1°) Développer, réduire et ordonner f(x) et g(x).

2°) Factoriser f(x) et g(x).

3°) Soit $h(x) = \dfrac{(x-4)(5x-6)}{(5-x)(x-4)}$

a) Donner la condition d'existence de h(x) puis simplifier h(x).

b) Résoudre dans IR : $|h(x)| = 2$.

Exercice 2

Le gérant d'un cyber-café propose à ses clients deux types d'options :

Option I : 150 F par heure d'utilisation (navigation) avec un abonnement mensuel de 3000 F.

Option II : 350 F l'heure d'utilisation sans abonnement.

1°) En notant x le nombre d'heures de navigation mensuelle, $p_1(x)$ et $p_2(x)$ les prix en francs correspondant respectivement aux options I et II, montre que $p_1(x) = 150x + 3000$ et $p_2(x) = 350x$.

2°) Dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire les représentations graphiques des applications affines p_1 et p_2. On prendra :1 cm pour 1000 F sur l'axe des ordonnées
1 cm pour 2h sur l'axe des abscisses

3°) Déterminer graphiquement dans quel intervalle de temps l'option I est plus avantageuse que l'option II et retrouver cet intervalle par le calcul.

4°) Au bout de combien de temps de navigation deux clients d'options différentes payeront-ils le même prix ?

Exercice 3

1°) a) construire un cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et de rayon 4 cm. A et B sont deux points de $(\mathscr{C})$ diamétralement opposés.

Placer un point M sur $(\mathscr{C})$ tel que AM = 4 cm.

c) Quelle est la nature du triangle AMI ?

d) En déduire la mesure de l'angle BIM.

2°) K est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par I et la droite (AM).

a) Justifie que AMB est un triangle rectangle.

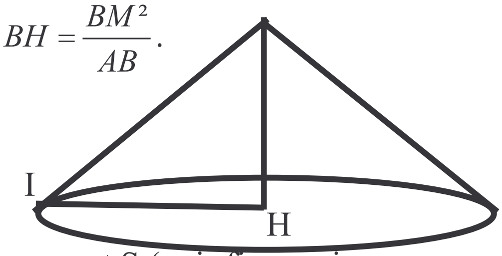
b) En remarquant que cos BAM = cos KAI, calculer AK et KI.

3°) Le point H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

a) calculer cos B de deux manières différentes.

b) Exprimer BH en fonction de cos B puis démontrer que $BH = \dfrac{BM^2}{AB}$.

S



4°) Placer le point E sur le segment [AM] tel que AE = 3 cm.

La parallèle à (IM) passant par E coupe le segment [AI] en F.

Quelle est la nature du triangle AEF ?

Exercice 4

Le chapeau d'un berger a la forme d'un cône de révolution de sommet S (voir figure ci-dessus) : IH = 10 cm ; SH = 10 cm ; H est le centre du disque de base.

1°) Calculer le volume de ce cône.
2°) Le berger recouvre son chapeau extérieurement d'un papier de décoration vendu par feuille carrée de 10 cm de côté et à 1000 F la feuille. Calculer la dépense minimale.

EXAMEN DU BFEM – SESSION DE 2005
CORRIGE (1er GROUPE)

Exercice 1

On donne les expressions suivantes :
f(x) = (3x – 5)² - (2x – 1)² et g(x) = x² + (2x + 1)(5 – x) –25
1°) Développer, réduire et ordonner f(x) et g(x).

f(x) = (3x – 5)² - (2x – 1)²
f(x) = (9x² – 30x + 25) - (4x² – 4x + 1)
f(x) = 9x² – 30x + 25 - 4x² + 4x - 1
f(x) = 5x² – 26x + 24

$\boxed{f(x) = 5x^2 - 26x + 24}$

g(x) = x² + (2x + 1)(5 – x) –25
g(x) = x² + (10x – 2x² + 5 - x) –25
g(x) = x² + 10x – 2x² + 5 - x –25
g(x) = - x² + 9x –20

$\boxed{g(x) = -x^2 + 9x - 20}$

2°) Factoriser f(x) et g(x).

f(x) = (3x – 5)² - (2x – 1)²
f(x) = [(3x – 5) - (2x – 1)][(3x – 5) + (2x – 1)]
f(x) = (3x – 5 - 2x + 1) (3x – 5 + 2x – 1)
f(x) = (x – 4) (5x – 6)

$\boxed{f(x) = (x - 4)(5x - 6)}$

g(x) = x² + (2x + 1)(5 – x) –25
g(x) = x² - 25 + (2x + 1)(5 – x)
g(x) = (x – 5)(x + 5) - (2x + 1)(x – 5)
g(x) = (x – 5) [(x + 5) - (2x + 1)]
g(x) = (x – 5) (x + 5 - 2x - 1)
g(x) = (x – 5) (- x + 4)

$\boxed{g(x) = (x - 5)(-x + 4)}$

3°) Soit h(x) $= \frac{(x-4)(5x-6)}{(5-x)(x-4)}$

a) Donner la condition d'existence de h(x) puis simplifier h(x).

h(x) existe pour $(5 - x)(x - 4) \neq 0$
Cherchons les valeurs de x pour lesquelles (5 – x)(x – 4) = 0.
(5 – x)(x – 4) = 0
⇔ 5 – x = 0 ou x – 4 = 0
⇔ x = 5 ou x = 4
Donc h(x) existe pour $x \neq 5$ et $x \neq 4$
Pour $x \neq 5$ et $x \neq 4$: h(x) $= \frac{5x-6}{5-x}$

b) Résoudre dans IR : $|h(x)| = 2$.

$|h(x)| = 2$
$\Leftrightarrow \left|\frac{5x-6}{5-x}\right| = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x-6}{5-x} = 2$ ou $\dfrac{5x-6}{5-x} = -2$

$\dfrac{5x-6}{5-x} = 2$

$\Leftrightarrow$ 5x – 6 = 10 – 2x

$\Leftrightarrow$ 7x = 16

$\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{16}{7}$

$\dfrac{5x-6}{5-x} = -2$

$\Leftrightarrow$ 5x – 6 = - 10 + 2x

$\Leftrightarrow$3x = - 4

$\Leftrightarrow$ x = $-\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{16}{7} \in$ IR ; $-\dfrac{4}{3} \in$ IR ; $\dfrac{16}{7} \neq 5$ et $-\dfrac{4}{3} \neq 4$

$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{16}{7} ; -\dfrac{4}{3}\right\}}$

Exercice 2

Le gérant d'un cyber-café propose à ses clients deux types d'options :

Option I : 150 F par heure d'utilisation (navigation) avec un abonnement mensuel de 3000 F.

Option II : 350 F l'heure d'utilisation sans abonnement.

1°) En notant x le nombre d'heures de navigation mensuelle, $p_1(x)$ et $p_2(x)$ les prix en francs correspondant respectivement aux options I et II, montre que $p_1(x) = 150x + 3000$ et $p_2(x) = 350x$.

Option I : pour x heures de navigation, le montant correspondant est :150x

L'abonnement étant fixé à 3000

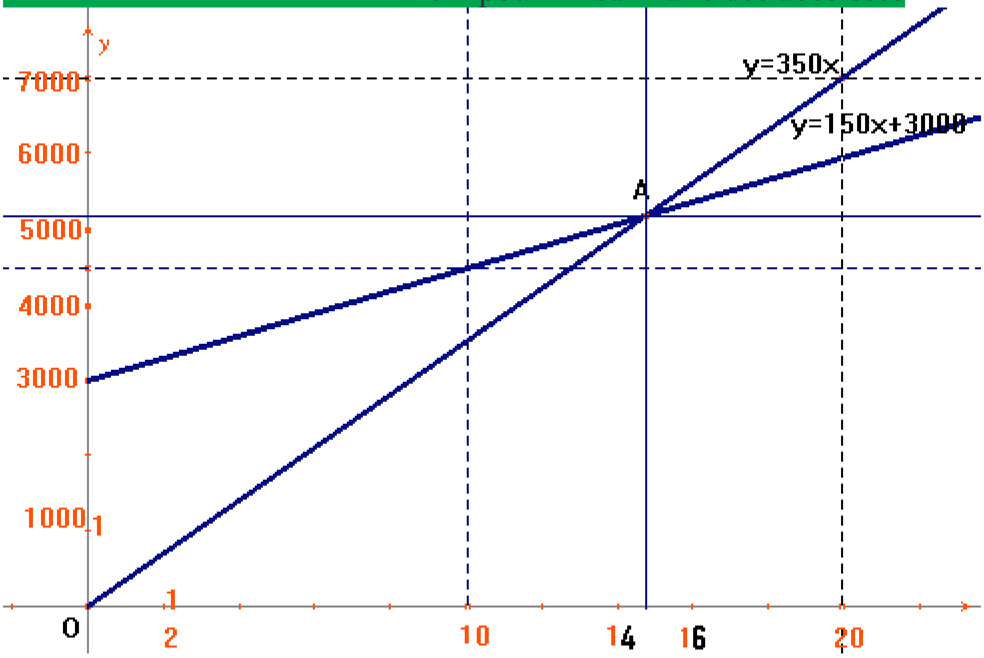
Le prix de x heures de navigation est :150x + 3000 $\boxed{p_1(x) = 150x + 3000}$

Option II : pour x heures, le montant correspondant est :350x

Le prix de x heures de navigation est :350x $\boxed{p_2(x) = 350x}$

2°) Dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire les représentations graphiques des applications affines p_1 et p_2. On prendra :1 cm pour 1000 F sur l'axe des ordonnées

1 cm pour 2h sur l'axe des abscisses



3°) Déterminer graphiquement dans quel intervalle de temps l'option I est plus avantageuse que l'option II et retrouver cet intervalle par le calcul.

L'option I est plus avantageuse à partir de 15 heures de navigation.

Cherchons la valeur de x pour laquelle $150x + 3000 < 350x$.

$150x - 350x < - 3000$

$\Leftrightarrow -200x < - 3000$

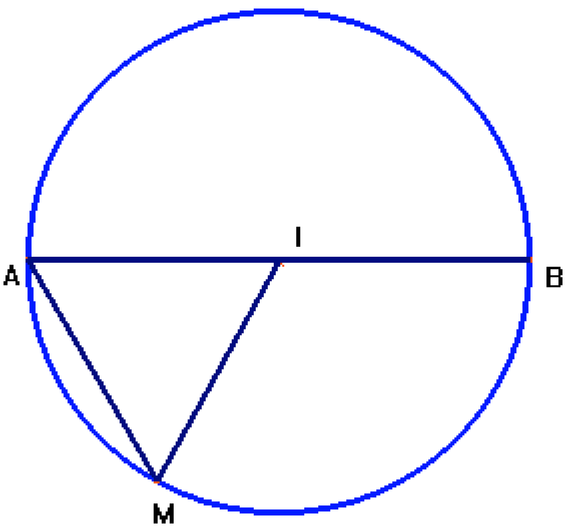
$\Leftrightarrow x > 15$

4°) Au bout de combien de temps de navigation deux clients d'options différentes payeront-ils le même prix ?

Deux clients d'options différentes paient le même prix au bout de 15 heures de navigation.

Exercice 3

1°) a) construire un cercle $(\mathcal{C})$ de centre I et de rayon 4 cm. A et B sont deux points de $(\mathcal{C})$ diamétralement opposés. Placer un point M sur $(\mathcal{C})$ tel que AM = 4 cm.



b) Quelle est la nature du triangle AMI ?

$$\left.\begin{array}{l} IA = IM = 4 \text{ cm} \\ AM = 4 \text{ cm} \end{array}\right\} IA = IM = AM \text{ alors AMI est un triangle équilatéral.}$$

c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BIM}$.

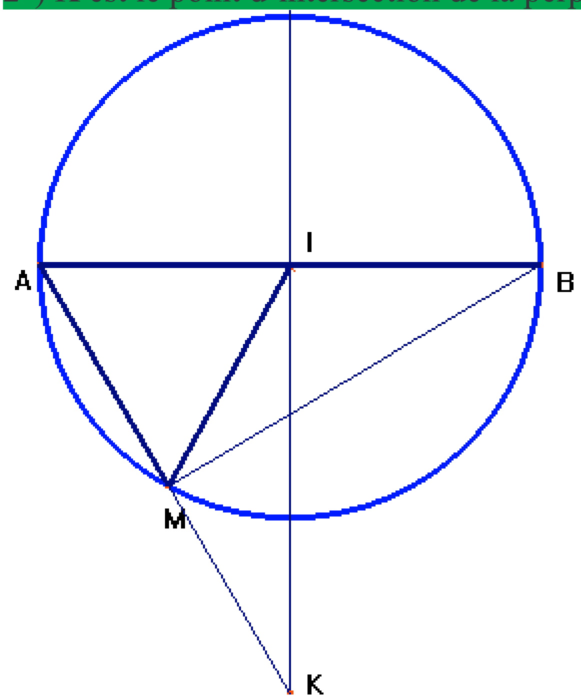
$\widehat{BIM}$ et $\widehat{AIM}$ sont supplémentaires. $\widehat{AIM} = 60°$

$\widehat{BIM} = 180° - 60°$

$\widehat{BIM} = 120°$

$\boxed{\widehat{BIM} = 120°}$

2°) K est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par I et la droite (AM).



a) Justifie que AMB est un triangle rectangle.

$$\left.\begin{array}{l} M \in (\mathcal{C}) \\ [AB] \text{ est un diamètre de } (\mathcal{C}) \end{array}\right\} \text{AMB est un triangle rectangle en M.}$$

b) En remarquant que $\cos \widehat{BAM} = \cos \widehat{KAI}$, calculer AK et KI.

$\cos \widehat{BAM} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2}$

$\cos \widehat{KAI} = \dfrac{AI}{AK} = \dfrac{1}{2}$ donc AK = 2 AI

$AK = 2 \times 4 = 8$

$\boxed{AK = 8 \text{ cm}}$

$KI^2 = AK^2 - AI^2$

$KI^2 = 64 - 16$

$KI^2 = 48$

$KI = 4\sqrt{3}$

$\boxed{KI = 4\sqrt{3} \text{ cm}}$

3°) Le point H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

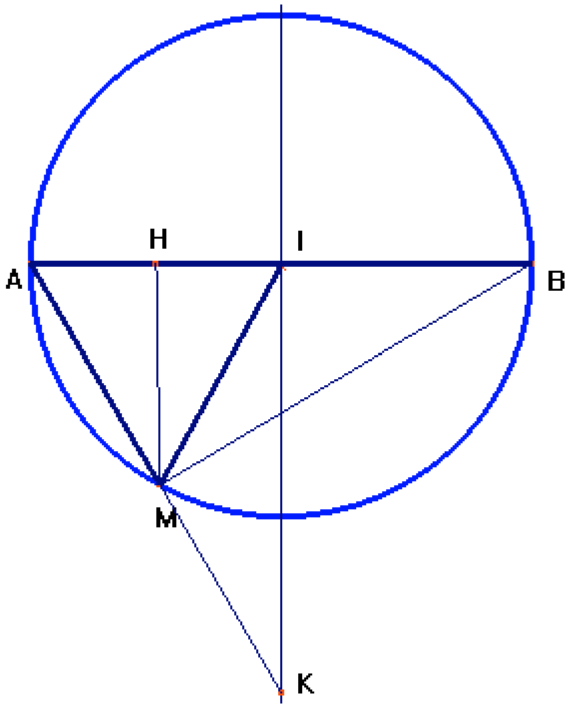
a) calculer cos B de deux manières différentes.

Dans le triangle BMH rectangle en H.

cos B = $\dfrac{BH}{BM}$

Dans le triangle BMA rectangle en M.

cos B = $\dfrac{BM}{AB}$



b) Exprimer BH en fonction de cos B puis démontrer que $BH = \dfrac{BM^2}{AB}$.

cos B = $\dfrac{BH}{BM}$ alors BH = BM$\times$cosB

BH = BM$\times$cosB

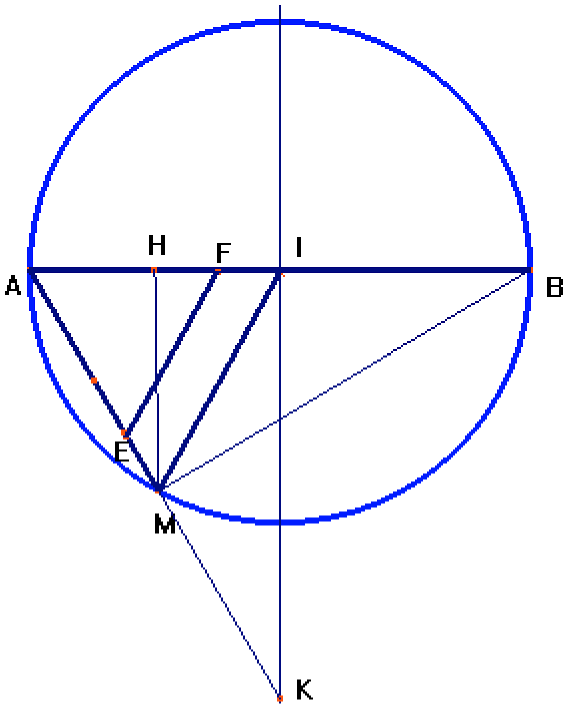
BH = BM$\times \dfrac{BM}{AB}$

BH = $\dfrac{BM^2}{AB}$

$\boxed{\text{BH} = \dfrac{BM^2}{AB}}$

4°) Placer le point E sur le segment [AM] tel que AE = 3 cm.
La parallèle à (IM) passant par E coupe le segment [AI] en F. Quelle est la nature du triangle AEF ?

$\left.\begin{array}{l}\text{A, E, M sont alignés dans cet ordre}\\ \text{A, F, I sont alignés dans cet ordre}\\ \text{(IM) // (EF)}\end{array}\right\}$ $\dfrac{AE}{AM} = \dfrac{AF}{AI} = \dfrac{EF}{IM}$ (Théorème de Thalès)



$\dfrac{AE}{AM} = \dfrac{AF}{AI} = \dfrac{3}{4}$ alors AF = $\dfrac{3}{4} \times AI = \dfrac{3}{4} \times 4 = 3$

$\boxed{\text{AF} = 3 \text{ cm}}$

$\dfrac{AE}{AM} = \dfrac{EF}{IM} = \dfrac{3}{4}$ alors EF = $\dfrac{3}{4} \times IM = \dfrac{3}{4} \times 4 = 3$

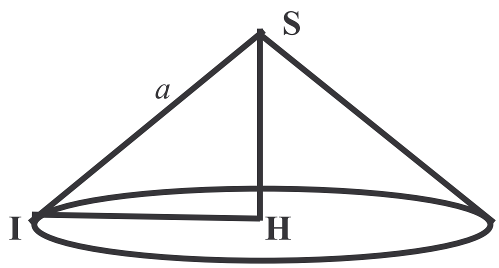
$\boxed{\text{EF} = 3 \text{ cm}}$

AE = AF = EF = 3 cm alors AEF est un triangle équilatéral.

Exercice 4

Le chapeau d'un berger a la forme d'un cône de révolution de sommet S (voir figure ci-dessous) : IH = 10 cm ; SH = 10 cm ; H est le centre du disque de base.

1°) Calculer le volume de ce cône.



Volume = $\dfrac{aire\_de\_base \times hauteur}{3}$

Volume = $\dfrac{HI^2 \times \pi \times SH}{3}$

Volume = $\dfrac{100 \times \pi \times 10}{3} = \dfrac{1000\pi}{3}$

$\boxed{\text{Volume } = \dfrac{1000\pi}{3} cm^3 = \dfrac{\pi}{3} dm^3}$

2°) Le berger recouvre son chapeau extérieurement d'un papier de décoration vendu par feuille carrée de 10 cm de côté et à 1000 F la feuille. Calculer la dépense minimale.

Aire latérale = $\pi \times R \times a$

R = IH = rayon

a = SI = génératrice

Calculons la génératrice SI.

SI² = IH² + SH²

SI² = 10² + 10²

SI² = 200

SI = $10\sqrt{2}$

Aire latérale = $\pi \times 10 \times 10\sqrt{2} = 100\pi\sqrt{2}$

Aire d'une feuille = côté $\times$ côté

Aire d'une feuille = $10 \times 10 = 100$

Le nombre de feuilles nécessaires = $\dfrac{aire\_latérale}{aire\_d'une\_feuille}$

Le nombre de feuilles nécessaires = $\dfrac{100\pi\sqrt{2}}{100} = \pi\sqrt{2}$

En prenant $\pi = 3{,}14$ et $\sqrt{2} = 1{,}414$, on voit que :

$\pi\sqrt{2} \approx 4{,}43996$ (lire « presque égal à »)

$4 < \pi\sqrt{2} < 5$

Pour couvrir son chapeau, le berger doit donc acheter au minimum 5 feuilles.

Dépense minimale = 5×1000F = 5000F.

EXAMEN DU BFEM – SESSION DE 2005
Sénégal (2ème GROUPE)

Exercice 1 : 4 pts

On donne A = $\frac{2}{2+3\sqrt{6}}$.

1°) Ecrire A sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est un entier.

2°) Sachant que 2,449 < $\sqrt{6}$ < 2,450, déterminer un encadrement à 0,1 près du réel $\frac{-2+3\sqrt{6}}{25}$.

Exercice 2 : 6 pts

1°) Tracer un triangle ABC quelconque puis construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - 2\,\overrightarrow{BA}$.

2°) Construire le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

3°) Justifier que B est le milieu du segment [DF].

Exercice 3 : 10 pts (1 pt par question)

Recopier chacune des affirmations ci-dessous. Dire si elle est vraie (V) ou fausse (F) puis justifier.

a) si x est un réel négatif alors – (- x) est positif.
b) Si le triangle ABC est rectangle en B alors sin A = cos C.
c) $\sqrt{15} = \frac{\sqrt{60}}{2}$.
d) $\alpha + \beta = 90°$ alors α et β sont supplémentaires.
e) $(555555)^2 + (333333)^2 = (888888)^2$.
f) $(-a-b)^2 = -a^2 - 2ab + b^2$.
g) $\frac{8}{5}$ est une solution de l'équation $8 - 5x^2 = 0$.
h) La droite d'équation y = 2x + 3 passe par le point A (1 ;5).
i) Si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ alors [AC] et [BD] ont le même milieu.
j) Si AB = CD et (AB)// (CD) alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

EXAMEN DU BFEM – SESSION DE 2005
CORRIGE (2ème GROUPE)

Exercice 1 : 4 pts

On donne $A = \dfrac{2}{2+3\sqrt{6}}$.

1°) Ecrire A sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est un entier.

$$A = \frac{2}{2+3\sqrt{6}} = \frac{2(2-3\sqrt{6})}{(2+3\sqrt{6})(2-3\sqrt{6})} = \frac{4-6\sqrt{6}}{4-9\times 6} = \frac{4-6\sqrt{6}}{-50}$$

$$A = \frac{4-6\sqrt{6}}{-50} = \frac{-2+3\sqrt{6}}{25}$$

$$\boxed{A = \frac{-2+3\sqrt{6}}{25}}$$

2°) Sachant que $2{,}449 < \sqrt{6} < 2{,}450$, déterminer un encadrement à 0,1 près du réel $\dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25}$.

$2{,}449 < \sqrt{6} < 2{,}450$ on multiplie chaque membre par 3

$3\times 2{,}449 < 3\times\sqrt{6} < 3\times 2{,}450$

$7{,}347 < 3\sqrt{6} < 7{,}35$ on ajoute – 2 à chaque membre

$-2 + 7{,}347 < -2 + 3\sqrt{6} < -2 + 7{,}35$

$5{,}347 < -2 + 3\sqrt{6} < 5{,}35$

$\dfrac{5{,}347}{25} < \dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25} < \dfrac{5{,}35}{25}$ on divise chaque membre par 25

$\dfrac{5{,}347}{25} < \dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25} < \dfrac{5{,}35}{25}$

$0{,}213 < \dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25} < 0{,}214$

Encadrement à 0,1 de $\dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25}$ près : $\boxed{0{,}2 < \dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25} < 0{,}3}$

Exercice 2 : 6 pts

1°) Tracer un triangle ABC quelconque puis construire le point D tel que $\vec{AD} = \vec{BC} - 2\vec{BA}$.

$\vec{AD} = \vec{BC} - 2\vec{BA}$

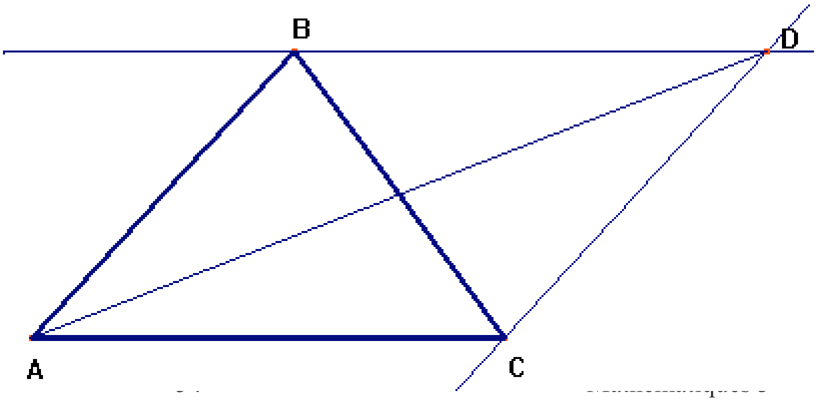
$\vec{AD} = \vec{BA} + \vec{AC} - 2\vec{BA}$

$\vec{AD} = -\vec{BA} + \vec{AC}$

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$

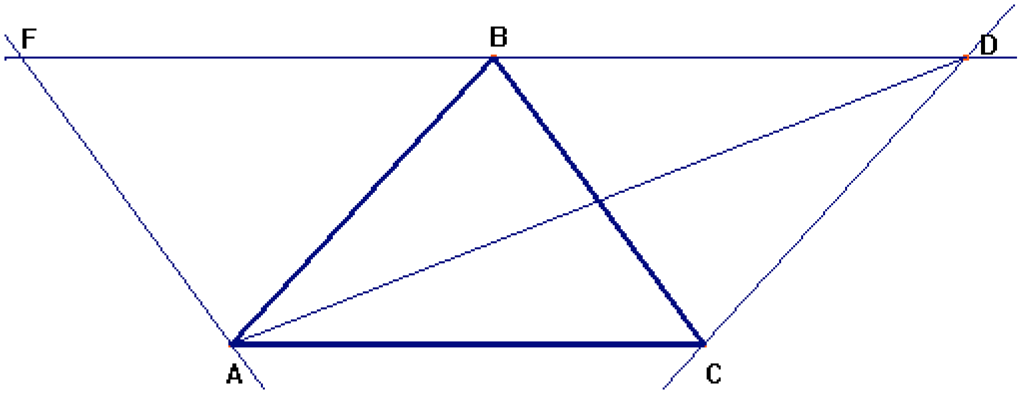
$\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \vec{AC}$

$\vec{BD} = \vec{AC}$



2°) Construire le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$



3°) Justifier que B est le milieu du segment [DF].

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}\end{array}\right\}$ $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BF}$ alors B est le milieu de [DF].

<u>Exercice 3 </u>: 10 pts (1 pt par question)

Recopier chacune des affirmations ci-dessous. Dire si elle est vraie (V) ou fausse (F) puis justifier.

	Réponses	Justifications
k) si x est un réel négatif alors – (- x) est positif.	F	Si x négatif, -x est positif -(-x) est négatif -
l) Si le triangle ABC est rectangle en B alors sin A = cos C.	V	A et C sont complémentaires
m) $\sqrt{15} = \frac{\sqrt{60}}{2}$.	V	$\frac{\sqrt{60}}{2} = \frac{\sqrt{4\times 15}}{2} = \frac{2\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$
n) $\alpha + \beta = 90°$ alors α et β sont supplémentaires.	F	Si $\alpha + \beta = 90°$ alors α et β sont dits complémentaires
o) $(555555)^2 + (333333)^2 = (888888)^2$.	F	$a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$
p) $(- a – b)^2 = - a^2 - 2ab + b^2$.	F	$(- a – b)^2 = (-1)^2 \times (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
q) $\frac{8}{5}$ est une solution de l'équation $8 – 5x^2 = 0$.	F	$8 – 5x^2 = 0$ $5x^2 = 8$ $x^2 = \frac{8}{5}$
r) La droite d'équation y = 2x + 3 passe par le point A (1 ;5).	V	La R.G d'une application affine f telle que f(x) = ax + b passe par le point de coordonnées 1 et a+b.
s) Si BC = AD alors [AC] et [BD] ont le même milieu.	V	[AC] et [BD] sont les diagonales d'un parallélogramme.
t) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et (AB)// (CD) alors AB = CD.	F	[AB) et [CD) peuvent être de sens différents.

COMMENT MONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN PARALLELOGRAMME ?

ABCD est un quadrilatère

(AB)// (DC) et (AD)// (BC)

OU

[AC] et [BD] ont le même milieu

OU

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

ABCD est un parallélogramme

COMMENT MONTRER QU'UN PARALLELOGRAMME EST UN RECTANGLE ?

(AB) ⊥ (BC) ou (BC) ⊥ (CD)

Ou(CD) ⊥ (AD)ou(AD) ⊥ (AB)

OU

ABCD est un parallélogramme → AC=BD → ABCD est un rectangle

COMMENT MONTRER QU'UN PARALLELOGRAMME EST UN LOSANGE ?

ABCD est un parallélogramme → AB= BC ou BC=CD Ou CD=AD ou AD=AB → ABCD est un losange

OU

ABCD est un parallélogramme → (AC) ⊥ (BD) → ABCD est un losange

COMMENT MONTRER QU'UN PARALLELOGRAMME EST UN CARRE ?

ABCD est un parallélogramme → ABCD est un rectangle → ABCD est un carré

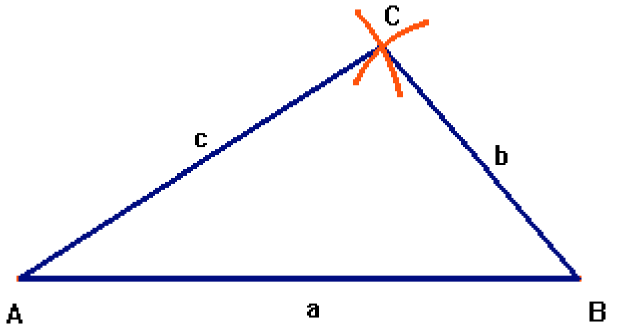
ET

ABCD est un parallélogramme → ABCD est un losange → ABCD est un carré

CONSTRUCTION DE TRIANGLES

Connaissant les trois côtés:

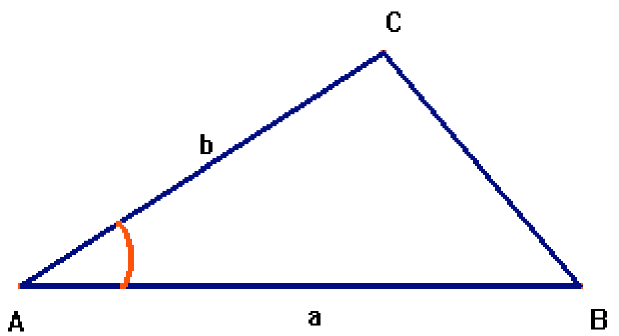
Construisons le triangle ABC tel que AB = a ; AC =c et BC = b.
On commence par tracer un côté (n'importe lequel). Par souci de commodité, on trace généralement le côté le plus long.
Traçons le côté [AB] de longueur a.
Remarquons qu'il ne manque qu'un sommet à ce triangle : le point C.
Ensuite, on trace un arc de cercle de sommet A et rayon c. Le point C est sur cet arc.



Pour terminer, traçons un arc de cercle de sommet B et de rayon b qui coupe le premier arc. Ces deux arcs se rencontrent au point C.

Connaissant les deux côtés et un angle:

Construisons le triangle ABC tel que
AB = a ; AC = b et BAC = α .

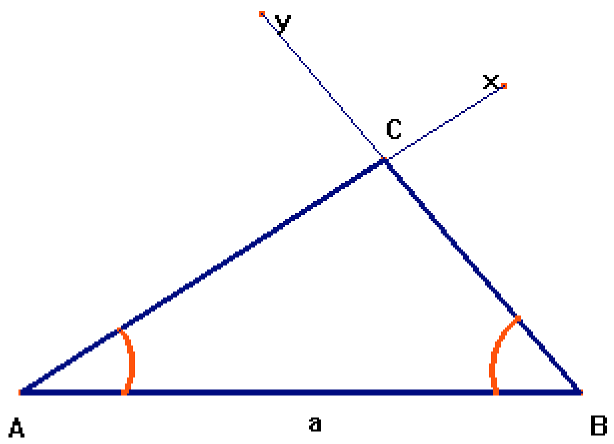


On commence par tracer un côté du triangle.
Traçons le côté [AB].
Puis on trace l'angle α (en utilisant le rapporteur ou par report d'angle).
On termine en traçant le côté [AC] de l'angle BAC.

Connaissant un côté et deux angles:

Construisons le triangle ABC tel que AB = a ; BAC $= \alpha$ et ABC $= \beta$.

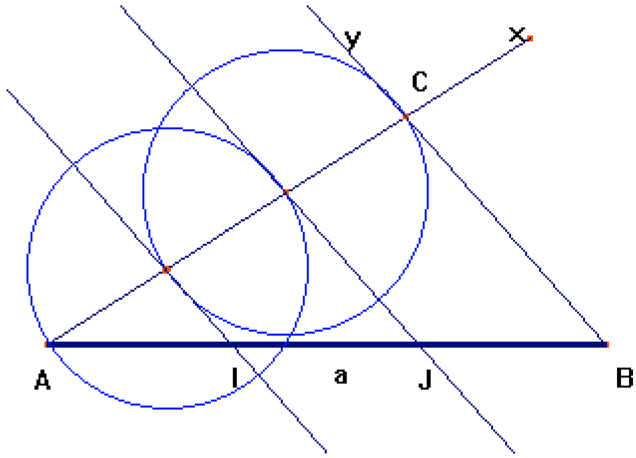
Remarquons qu'il ne manque que le sommet C à ce triangle.
On commence par tracer le côté [AB] de longueur a.
Puis on trace la demi-droite [Ax) telle que BAx $= \alpha$ et la demi-droite [By) telle que
ABy $= \beta$. Le point C est l'intersection des demi-droites [Ax) et [By).



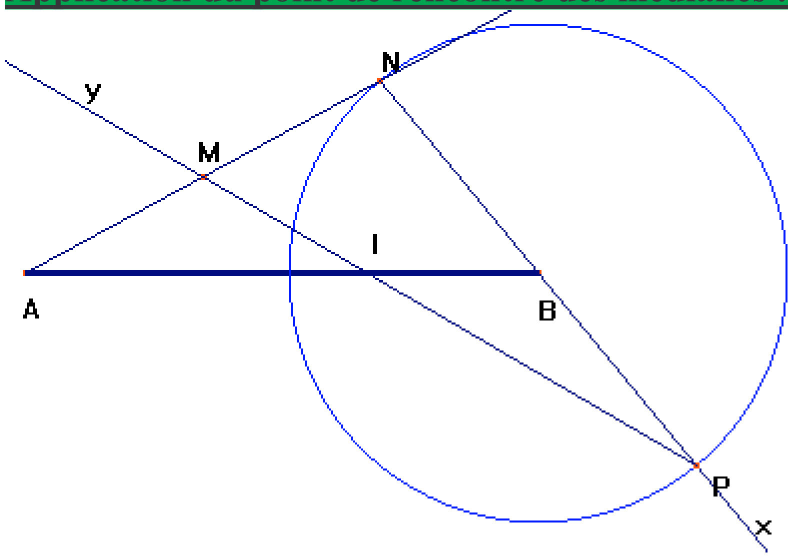
PARTAGE D'UN SEGMENT EN TROIS PARTIES EGALES

Application de théorème de Thalès :

On trace un segment [AB] de longueur a (non divisible par 3) à diviser en 3 parties de même longueur.
A partir de l'une de ses extrémités, on trace une demi-droite.
Traçons la demi-droite [Ax) puis avec le compas, reportons 3 segments de même longueur et la demi-droite [By).
Les parallèles à [By) découpent le segment [AB] en trois parties égales.



Application du point de rencontre des médianes :



Sur une demi-droite d'origine A, on marque deux points M et N tels que AM=MN.
Sur une demi-droite d'origine N passant par B, on marque le point P tel que NB=BP.
La demi-droite d'origine P passant par M coupe AB en I.
Remarquons que AB et MP sont deux médianes du triangle ANP.
Elles se coupent donc aux deux tiers à partir de leurs sommets.

$AI = \frac{2}{3} AB.$

TABLE TRIGONOMETRIQUE

DEGRE	SIN	TG	COTG	COS	
0	0,000	0,000		1,000	90
1	0,017	0,017	57,29	1,000	89
2	0,035	0,035	28,64	0,009	88
3	0,052	0,052	19,08	0,999	87
4	0,070	0,070	14,30	0,998	86
5	0,087	0,087	11,43	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,386	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,540	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,606	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,863	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	1,346	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	COS	**COTG**	**TG**	**SIN**	**DEGRE**

<u>CARRES DES ENTIERS DE 0 A 199</u>

a	a²	a	a²	a	a²	a	a²
0	0	50	2 500	100	10 000	150	22 500
1	1	51	2 601	101	10 201	151	22 801
2	4	52	2 704	102	10 404	152	23 104
3	9	53	2 809	103	10 609	153	23 409
4	16	54	2 916	104	10 816	154	23 716
5	25	55	3 025	105	11 025	155	24 025
6	36	56	3 136	106	11 236	156	24 336
7	49	57	3 249	107	11 449	157	24 649
8	67	58	3 364	108	11 664	158	24 964
9	81	59	3 481	109	11 881	159	25 281
10	100	60	3 600	110	12 100	160	25 600
11	121	61	3 721	111	12 321	161	25 921
12	144	62	3 844	112	12 544	162	26 244
13	169	63	3 969	113	12 769	163	26 569
14	196	64	4 096	114	12 996	164	26 896
15	225	65	4 225	115	13 225	165	27 225
16	256	66	4 356	116	13 456	166	27 556
17	289	67	4 489	117	13 689	167	27 889
18	384	68	4 624	118	13 924	168	28 224
19	361	69	4 761	119	14 161	169	28 561
20	400	70	4 900	120	14 400	170	28 900
21	441	71	5 041	121	14 641	171	29 241
22	484	72	5 184	122	14 884	172	29 584
23	529	73	5 329	123	15 129	173	29 929
24	576	74	5 476	124	15 376	174	30 276
25	625	75	5 625	125	15 625	175	30 625
26	676	76	5 776	126	15 876	176	30 976
27	729	77	5 929	127	16 129	177	31 329
28	784	78	6 084	128	16 384	178	31 684
29	841	79	6 241	129	16 641	179	32 041
30	900	80	6 400	130	16 900	180	32 400
31	961	81	6 561	131	17 161	181	32 761
32	1 024	82	6 724	132	17 424	182	33 124
33	1 089	83	6 889	133	17 689	183	33 489
34	1 156	84	7 056	134	17 956	184	33 856
35	1 225	85	7 225	135	18 225	185	34 225
36	1 296	86	7 396	136	18 496	186	34 596
37	1 369	87	7 569	137	18 769	187	34 969
38	1 444	88	7 744	138	19 044	188	35 344
39	1 521	89	7 921	139	19 321	189	35 721
40	1 600	90	8 100	140	19 600	190	36 100
41	1 681	91	8 281	141	19 881	191	36 481
42	1 764	92	8 464	142	20 164	192	36 864
43	1 849	93	8 649	143	20 449	193	37 249
44	1 936	94	8 836	144	20 736	194	37 636
45	2 025	95	9 025	145	21 025	195	38 025
46	2 116	96	9 216	146	21 316	196	38 416
47	2 209	97	9 409	147	21 609	197	38 809
48	2 304	98	9 604	148	21 904	198	39 204
49	2 401	99	9 801	149	22 201	199	39 601