Corrigé du baccalauréat ES Métropole – La Réunion
22 juin 2016

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 4 points

1. b

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est $\left[\dfrac{225}{300}-\dfrac{1}{\sqrt{300}}\,;\,\dfrac{225}{300}+\dfrac{1}{\sqrt{300}}\right]\approx[0{,}692\,;\,0{,}808]$.

2. d

Si X est la variable aléatoire donnant un nombre au hasard dans l'intervalle $[4\,;\,11]$; alors $P(X\leqslant 10)=\dfrac{10-4}{11-4}=\dfrac{6}{7}$.

3. d

$f(x)=(x+1)\,\text{e}^{-2x+3}$ donc $f'(x)=1\times\text{e}^{-2x+3}+(x+1)(-2)\,\text{e}^{-2x+3}=(-2x-1)\,\text{e}^{-2x+3}$

4. c

La dérivée seconde f'' s'annule et change de signe en $x=1$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x=1$.

Exercice 2 — Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L — 5 points

1. D'une année sur l'autre, le loueur vend 25 % de ses voitures donc il lui en reste 75 %, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1-\dfrac{25}{100}=0{,}75$. De plus, il achète 3 000 voitures chaque année, qu'il faut ajouter au nombre de voitures du parc automobile.

On a alors pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}75\times u_n+3000$.

2. a. On cherche une expression du type $v_{n+1}=q\times v_n$.

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+1}-12000\\&=0{,}75\times u_n+3000-12000\\&=0{,}75\times(v_n+12000)-9000\\&=0{,}75\times v_n+9000-9000\\v_{n+1}&=0{,}75\times v_n\end{aligned}$$

$v_0=u_0-12000=10000-12000=-2000$

(v_n) est une suite géométrique de raison 0,75 de premier terme -2000.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times q^n$ soit $v_n=-2000\times0{,}75^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}75^n=0$ car $0<0{,}75<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}-2000\times0{,}75^n=0$.

La limite de la suite (v_n) est 0.

c. $u_n=v_n+12000$ donc, $u_n=12000-2000\times0{,}75^n$.

d. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}12000-2000\times0{,}75^n=12000$.

On peut conjecturer qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre de voitures se stabilisera à 12 000.

3. a. On complète l'algorithme :

Initialisation	U prend la valeur 10 000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que U < 11 950 faire
	N prend la valeur N + 1
	U prend la valeur 0,75 U + 3 000
	Fin Tant que
Sortie	Afficher N

b. La calculatrice donne N =13, ce qui correspond à l'année 2028.

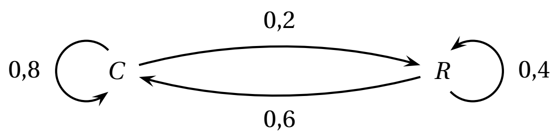
c. Résolution de l'inéquation :

$$\begin{aligned} 12000 - 2000 \times 0{,}75^n \geqslant 11950 &\iff -2000 \times 0{,}75^n \geqslant 11950 - 12000 \\ &\iff 0{,}75^n \leqslant \frac{-50}{-2000} \\ &\iff \ln(0{,}75^n) \leqslant \ln(0{,}025) \\ &\iff n\ln(0{,}75) \leqslant \ln(0{,}025) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}025)}{\ln(0{,}75)} \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0{,}025)}{\ln(0{,}75)} \approx 12{,}8$ donc, on retrouve bien la valeur de $n = 13$.

Exercice 2 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

1. On traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R :



2. $\left\{\begin{array}{rcl} c_{n+1} &=& 0{,}8\,c_n + 0{,}6\,r_n \\ r_{n+1} &=& 0{,}2\,c_n + 0{,}4\,r_n \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} c_{n+1} & r_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & r_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$

La matrice de transition de ce graphe est donc $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$.

3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}750016 & 0{,}249984 \\ 0{,}749952 & 0{,}250048\end{pmatrix}$.

Pour déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7^e^ jour, il faut déterminer P_6. d'après le cours, on sait que $P_6 = P_0 \times M^6$ donc : $\begin{pmatrix} c_6 & r_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}750016 & 0{,}249984 \\ 0{,}749952 & 0{,}250048\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}750016 & 0{,}249984\end{pmatrix}$

La probabilité qu'Hugo coure le 7^e^ jour est d'environ 0,75.

4. a. Par définition, $P_{n+1} = P_n \times M$.

b. $P_{n+1} = P_n \times M \iff \left\{\begin{array}{rcl} c_{n+1} &=& 0{,}8\,c_n + 0{,}6\,r_n \\ r_{n+1} &=& 0{,}2\,c_n + 0{,}4\,r_n \end{array}\right. \implies c_{n+1} = 0{,}8\,c_n + 0{,}6\,r_n$

Mais, d'après le texte, pour tout n : $c_n + r_n = 1$ donc :

$c_{n+1} = 0{,}8\,c_n + 0{,}6\,r_n = 0{,}8\,c_n + 0{,}6(1 - c_n) = 0{,}8\,c_n + 0{,}6 - 0{,}6\,c_n = 0{,}2\,c_n + 0{,}6$

5. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0{,}75$; donc $c_n = v_n + 0{,}75$.

a. $v_{n+1} = c_{n+1} - 0{,}75 = 0{,}2c_n + 0{,}6 - 0{,}75 = 0{,}2(v_n + 0{,}75) - 0{,}15 = 0{,}2\,v_n + 0{,}15 - 0{,}15 = 0{,}2\,v_n$

$v_0 = c_0 - 0{,}75 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de premier terme $v_0 = 0{,}25$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 0{,}25 \times 0{,}2^n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,2 et $0 < 0{,}2 < 1$ donc la suite (v_n) a pour limite 0.

c. On a vu que, pour tout n, $c_n = v_n + 0{,}75$ et que $v_n = 0{,}25 \times 0{,}2^n$;

on en déduit que, pour tout n, $c_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^n$.

d. On sait que la suite (v_n) a pour limite 0 et que, pour tout n, $c_n = 0{,}75 + v_n$; on peut donc en déduire que la suite (c_n) a pour limite 0,75.

Entre le 1^er^ janvier et le 29 décembre, il y a plus de 360 jours et on sait que $c_6 \approx 0{,}75$; donc on peut raisonnablement déduire que la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre est voisine de 0,75.

e. On peut conjecturer que l'état stable $\begin{pmatrix} c & r\end{pmatrix}$ correspond à $c = 0{,}75$ et $r = 1 - c = 0{,}25$.

$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}6 & 0{,}75 \times 0{,}2 + 0{,}25 \times 0{,}4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25\end{pmatrix}$

L'état stable du système est donc $\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25\end{pmatrix}$.

Exercice 3 Commun à tous les candidats 5 points

Partie A

1. Une chanson est choisie au hasard et de façon équiprobable donc : $p(R) = \dfrac{960}{3\,200} = 0{,}3$.
2. 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français donc : $p_R(F) = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$.
3. $p(R \cap F) = p(R) \times p_R(F) = 0{,}3 \times 0{,}35 = 0{,}105$
4. D'après la formule des probabilités totales :
   $p(F) = p(R \cap F) + p(\overline{R} \cap F)$ donc : $p(F \cap \overline{R}) = p(F) - p(R \cap F)$
   38,5 % des chansons sont interprétées en français donc $p(F) = 0{,}385$.
   $p(F \cap \overline{R}) = 0{,}385 - 0{,}105 = 0{,}28$
5. $p_{\overline{R}}(F) = \dfrac{p(F \cap \overline{R})}{p(\overline{R})} = \dfrac{0{,}28}{1 - 0{,}3} = 0{,}4$
   40 % des chansons qui ne sont pas dans la catégorie rock sont interprétées en français.

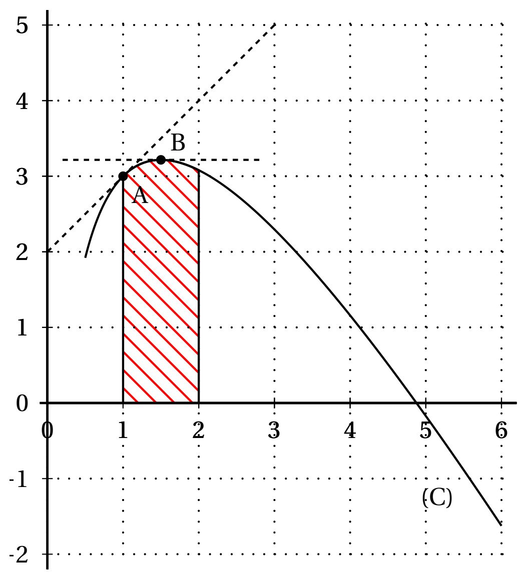
Partie B

1. À la calculatrice, on trouve $p(15 \leqslant X \leqslant 45) \approx 0{,}866$.
2. À la calculatrice, on trouve $p(X \geqslant 60) \approx 0{,}001$.

Exercice 4 Commun à tous les candidats 6 points

PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

1. La tangente au point d'abscisse 1,5 est horizontale, donc $f'(1{,}5) = 0$.
2. La tangente au point A a pour coefficient directeur 1 et comme ordonnée à l'origine 2 donc, une équation de sa tangente est $T : y = x + 2$.
3. L'aire est comprise entre 3 et 4 unités d'aire.
4. La courbe semble concave sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,6]$ car elle semble se situer en tout point en dessous de sa tangente.



Partie B : Étude analytique

1. $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$. On calcule $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5\,;\,6]$:

$f'(x) = -2 \times 1 + 0 + 3 \times \dfrac{1}{x} = -2 + \dfrac{3}{x} = = \dfrac{-2x+3}{x}$

2.
- $f(0,5) = -2 \times 0,5 + 5 + 3\ln(0,5) = 4 + 3\ln(0,5) \approx 1,9 > 0$
- $f(1,5) = -2 \times 1,5 + 5 + 3\ln(1,5) = 2 + 3\ln(1,5) \approx 3,2 > 0$
- $f(6) = -2 \times 6 + 5 + 3\ln(6) = -7 + 3\ln(6) \approx -1,6 < 0$

On obtient le tableau de signes et de variations suivant :

x	0,5		1,5		α		6
signe de $-2x+3$		+	0		−		
signe de x		+			+		
signe de $f'(x)$		+	0		−		
variations de f	$4+3\ln(0,5)$	↗	$2+3\ln(1,5)$	↘	0	↘	$-7+3\ln(6)$

3. Sur l'intervalle $[0,5\,;\,1,5]$, le minimum de f est 1,9 qui est strictement positif, il n'y a donc pas de solution sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $[1,5\,;\,6]$, la fonction f est décroissante et continue.
$f(1,5) > 0$ et $f(6) < 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1,5\,;\,6]$.
Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,5\,;\,6]$.

La calculatrice donne : $\left| \begin{array}{l} f(4,87) \approx 0,009 > 0 \\ f(4,88) \approx -0,005 < 0 \end{array} \right.$

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est 4,87 (ou 4,88).

4. Par lecture du tableau de variations et d'après la question précédente, f est positive sur $[0,5\,;\,\alpha]$ et négative sur $[\alpha\,;\,0;5]$, d'où le tableau de signes :

x	0,5		α		6
signe de $f(x)$		+	0	−	

5. a. On calcule la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2 \times x + 2 \times 1 + 3 \times \ln(x) + 3x \times \frac{1}{x} \\ &= -2x + 2 + 3\ln(x) + 3 \\ &= -2x + 5 + 3\ln(x) \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f.

b. Soit $\mathscr{A}$ l'aire demandée. f est positive sur $[1\,;\,2]$ donc :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(2) - F(1) \\ &= \left(-2^2 + 2 \times 2 + 3 \times 2\ln(2)\right) - \left(-1^2 + 2 \times 1 + 3 \times 1\ln(1)\right) \\ &= -4 + 4 + 6\ln(2) + 1 - 2 \\ \mathscr{A} &= 6\ln(2) - 1 \approx 3,159 \end{aligned}$$

L'aire est égale à $6\ln(2) - 1 \approx 3,2$ unités d'aire au dixième près.