Exercices de Mécanique

■ Cinématique : repères, bases, trajectoires et mouvements

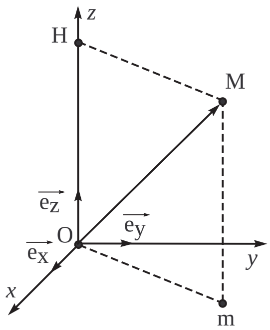
M1

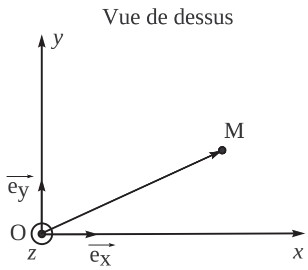
> ❑ **Méthode 1.—** Une base locale (comme la base cylindrique) est définie :
> - en un point M de l'espace (« localement », donc !)
> - par rapport à trois directions orthogonale fixes du repère cartésien dans lequel on travaille.
> ➜ Il faudra donc **toujours** représenter **en premier** le repère cartésien (une origine O, trois axes Ox, Oy et Oz qui doivent être *orientés par une flèche*, et les trois vecteur unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$ correspondants) **avant** de dessiner la base locale au point M.

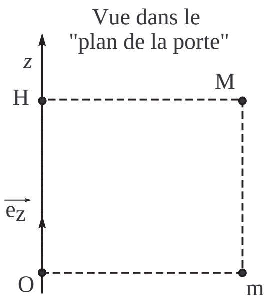
Ex-M1.1 Base locale cylindrique

Recopier les trois schémas suivants. Y faire apparaître les trois vecteurs de la base cylindrique et les coordonnées cylindriques correspondante. Exprimer, dans cette base locale,le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ et le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$. **Rép. :** cf. p. 3.

Retenir :
Dès la 1e période PCSI, nous avons absolument besoin de **la base cylindrique**
➜ donc : la comprendre et bien l'étudier dès à présent.







Ex-M1.2 Base locale sphérique

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent dans le cas de la base locale sphérique. **Rép. :** cf. p.3.

Retenir : Pour ce qui concerne la base sphérique, nous en aurons besoin en 2e période, un peu en Mécanique, beaucoup en Électrostatique et Magnétostatique.
➜ donc : la comprendre dès à présent et y revenir plus tard de soi-même si besoin.

Ex-M1.3 Mouvement circulaire uniforme :

Un « disque vynile 33 tr », placé sur la platine du tourne-disque, effectue un mouvement de rotation uniforme à raison de 33 tours par minute. Calculer :

1) sa vitesse angulaire de rotation, sa période et sa fréquence ;

2) la vitesse et les accélérations (normale, tangentielle et totale) d'un point M à la périphérie du disque (rayon $R = 15\,cm$).

3) même question pour un point M' tournant à $r = 5cm$ du centre du disque.

Rép. : 1) $\omega = 3,5\ rad.s^{-1}$; $f = 0,55\ Hz$; $T = 1,8\ s$.
2) $v = 0,52\ m.s^{-1}$; $a_n = 1,8\ m.s^{-2}$; $a_t = 0$; $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.
3) $v' = 0,17\ m.s^{-1}$; $a'_n = 0,6\ m.s^{-2}$; $a'_t = 0$; $a' = a'_n$.

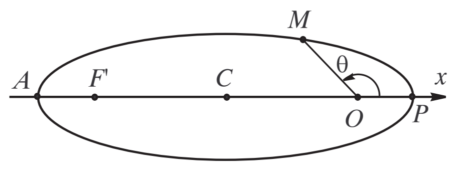
Conclusion :
S'il y a une chose à retenir de cet exercice, c'est que l'accélération d'un mouvement uniforme n'est **pas** nulle si la trajectoire n'est **pas** une droite.
Autrement dit :
Seul le mouvement *rectiligne* uniforme possède une accélération nulle.

Ex-M1.4 Q.C.M. sur l'accélération :
Pour chacune des questions, indiquer les propositions exactes :
1) Le vecteur accélération d'un point M :
a) est égal à la variation de la vitesse par unité de temps ;
b) est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse instantanée ;
c) possède, lorsqu'on l'exprime dans une base orthonormée, des coordonnées obtenues en dérivant les coordonnées correspondantes du vecteur vitesse.
2) Le vecteur accélération d'un point M en **mouvement rectiligne accéléré** est :
a) toujours porté par la trajectoire ;
b) de même sens que le vecteur vitesse ;
c) toujours de valeur constante.
3) Le vecteur accélération d'un point M se déplaçant sur une **trajectoire curviligne** est :
a) tangent à la trajectoire ;
b) dirigé vers l'intérieur de la trajectoire ;
c) nul si la vitesse de M est constante.
4) L'unité de mesure de l'accélération est : a) $m.s^2$ b) $m^2.s^2$ c) $m.s^{-2}$. **Rép. :** cf. p.3.

Ex-M1.5 Relation vitesse-position :
Un mobile décrit la partie positive de l'axe (Ox) avec une vitesse de la valeur $v(t)$. La loi de vitesse $v(t)$ est liée à l'équation horaire $x(t)$ par la relation $x = av^2$, avec a une constante positive. Le point matériel quitte l'origine O de l'axe à l'instant $t = 0$.
Déterminer la loi horaire $x(t)$ sachant que $x(t)$ est une fonction croissante du temps.
Rép. : $x(t) = \dfrac{t^2}{4a}$.

Ex-M1.6 Poursuite en mer
Deux navires se trouvent sur le même méridien, A étant au nord de B et à une distance d_0. A se dirige vers l'est à la vitesse v_A et B vers le nord à la vitesse v_B. La courbure de la surface terrestre est négligée et les vitesses sont constantes.
1) Déterminer la distance minimale entre A et B.
2) Quelle direction B doit-il prendre pour rattraper A avec un mouvement rectiligne uniforme ? Déterminer la durée de la poursuite.
Rép : 1) $d_{\min} = d_0\sqrt{\dfrac{v_A^2}{v_A^2 + v_B^2}}$; **2)** $\tau = \dfrac{d_0}{\sqrt{v_B^2 - v_A^2}}$

Ex-M1.7 Mouvement elliptique (➜ Cf Cours **M7**)
L'équation polaire d'une ellipse avec origine au foyer est : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$
où p note le *paramètre* et e, l'*excentricité* de l'ellipse.
1) Pour un satellite, P est le *périgée* et A est l' *apogée*.
→ Déterminer les expressions de r_P et r_A.
2) Sachant que le mouvement est tel que $r^2\dot{\theta} = cste = C$, déterminer l'expression de $\overrightarrow{v}$ sur la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$. Cette expression sera donnée en fonction de la seule variable θ.



3) Déterminer $\overrightarrow{v}$ en $\theta = 0$, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$. Représenter, en chacun de ces points, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$. En quel point de la trajectoire la vitesse est-elle maximale ? minimale ?
Rép. : 2) $\overrightarrow{v} = C\left(\dfrac{e\sin\theta}{p}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1 + e\cos\theta}{p}\overrightarrow{e_\theta}\right)$; **3)** $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \dfrac{C^2}{p^2}(1 + e^2 + 2e\cos\theta)$.

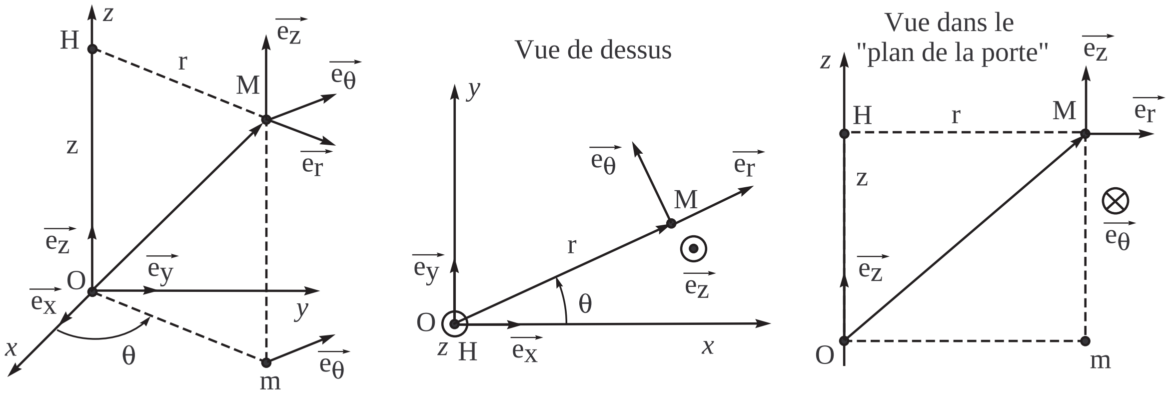
Solution Ex-M1.1

M a pour coordonnées $(r,\, \theta,\, z)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O et de Base locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ (base « locale » = base définie en M) :

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$ $\qquad$ $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ $\qquad$ $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$

Rque : Une B.O.N.D. vérifie la « règle des trois doigts de la main droite » ➜ alors **vérifiez-le** avec la vôtre, de main droite !

$$\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z} \qquad \overrightarrow{e_\theta} \times \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}$$



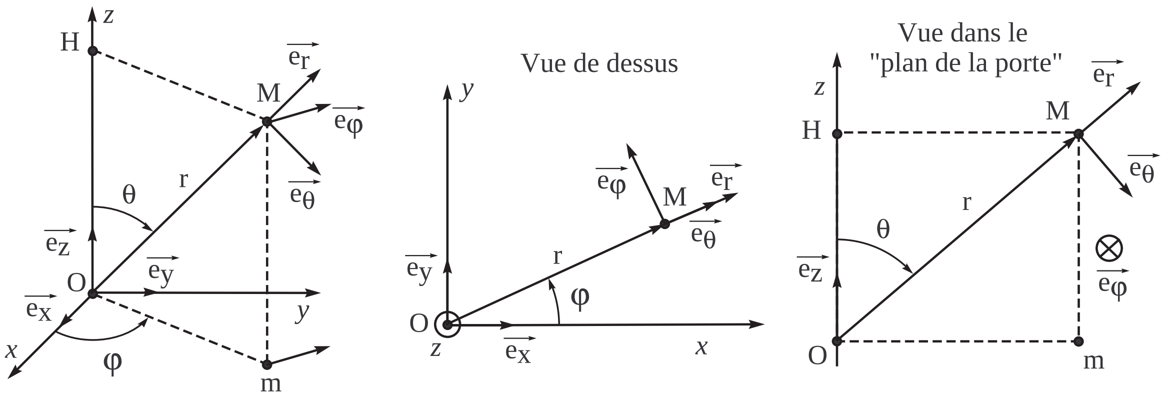
Solution Ex-M1.2

M a pour coordonnées $(r,\, \theta,\, \varphi)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O et de Base locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ (base « locale » = base définie en M) :

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ $\qquad$ $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$ $\qquad$ $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_z}$

Rque : Une B.O.N.D. vérifie la « règle des trois doigts de la main droite » ➜ alors **vérifiez-le** avec la vôtre, de main droite !

$$\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\varphi} \qquad \overrightarrow{e_\theta} \times \overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{e_\varphi} \times \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}$$



Solution Ex-M1.4

1.b) (la réponse c) n'est vraie que lorsqu'on exprime l'accélération dans la base cartésienne ; elle est fausse si on travaille dans la base polaire)) ; **2.a)** ; **3.b)** ; **4.c)**

Ex-M1.8 Dépassement d'un autocar

Sur une route rectiligne Ox, une voiture (1) de longueur l_1 de vitesse v_1 double un autocar de longueur L et de vitesse V. En face arrive une voiture (2) de longueur l_2 à la vitesse v_2. Quelle distance minimum D entre l'avant de la voiture (1) et l'avant de la voiture (2) permet à la voiture (1) de doubler ? **A.N.** avec $l_1 = l_2 = 4\ m$, $L = 20\ m$, $v_= v_2 = 90\ km.h^{-1}$ et $V = 72\ km.h^{-1}$.

Ex-M1.9 Vitesse moyenne et vitesse maximale

Un automobiliste parcourt une distance $d = 1,25\ km$ sur une route rectiligne. Son mouvement est uniformément accéléré, puis uniforme, puis uniformément retardé. L'accélération a est égale en valeur absolue à 0 $m.s^{-2}$ ou à $2,5\ m.s^{-2}$ et la vitesse moyenne vaut 75 $km.h^{-1}$.
Déterminer la vitesse maximale de l'automobiliste.

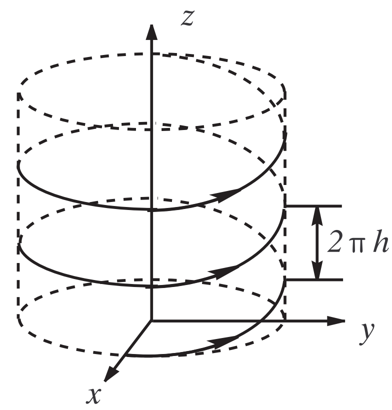
Rép : $v_{\max} = \dfrac{a.d}{2v_{\text{moy}}} - \sqrt{\left(\dfrac{a.d}{2v_{\text{moy}}}\right)^2 - a.d} = 25\ m.s^{-1} = 90\ km.h^{-1}$

Ex-M1.10 Spirale et base polaire

Un point matériel M parcourt avec une vitesse de norme constante v la spirale d'équation polaire : $r = a\theta$. Exprimer en fonction de θ et de v le vecteur vitesse de M dans la base polaire.
Rép. : $\overrightarrow{v} = \dfrac{v}{\sqrt{1+\theta^2}}\,(\overrightarrow{e_r} + \theta\overrightarrow{e_\theta})$.

Ex-M1.11 Mouvement hélicoïdal (*)

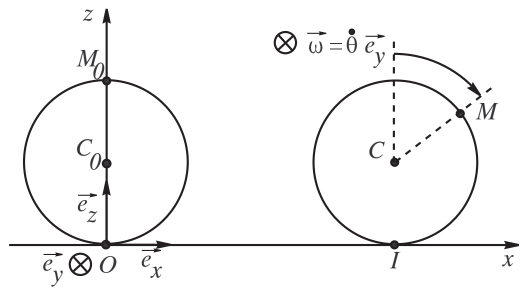
Soit l'hélice droite définie en coordonnées cylindriques par les équations : $r = R$ et $z = h\theta$
et orientée dans le sens θ croissant (soit h cste>0).
L'origine de la trajectoire du point M est en $z = 0$.



1) Déterminer les équations de l'hélice en coordonnées cartésiennes.
2) Le point M parcourt l'hélice à une vitesse constante v.
a) Déterminer les vecteurs vitesse et accélération en fonction de R, h et v.
b) Montrer que l'angle $\alpha = (\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{v})$ est constant.
En déduire l'hodographe du mouvement.

Ex-M1.12 Mouvement cycloïdal (**)

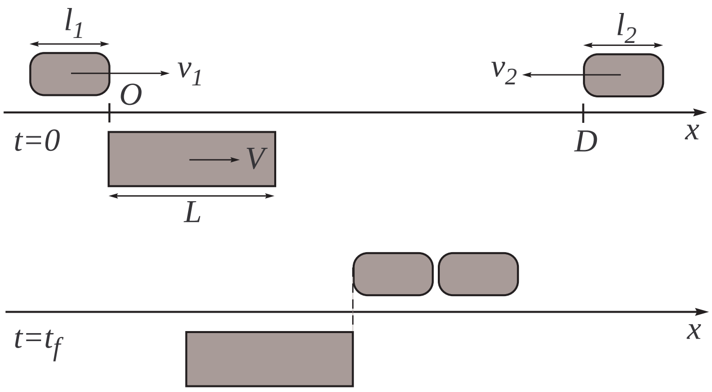
Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur l'axe (Ox) à vitesse angulaire ω constante tout en restant dans le plan (Oxz). Soit M un point liée à la roue situé sur la circonférence. À l'instant $t = 0$, M se trouve en $M_0(x = 0,\ z = 2R)$. Les mouvements sont étudiés dans le référentiel Rassocié au repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.



1) Comment exprimer la condition « la roue ne glisse pas » ?
2) Déterminer les coordonnées x_C et z_C de C à l'instant t.
3) Même question pour M.
4) Étudier la trajectoire définie par le système d'équations paramétriques $(x(\theta), z(\theta))$ avec $\theta = \omega t$. La tracer pour $\theta \in$ [-4π ; 4π].
5) Calculer la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ du point M à l'instant t. Exprimer sa norme v en fonction de $\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$.
En déduire l'hodographe du mouvement.
6) Calculer l'accélération $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}$ du point M à l'instant t. Exprimer sa norme en fonction de R et v. Calculer numériquement cette norme de l'accélération dans le cas d'un point périphérique d'un pneu de voiture roulant à $130\,km.h^{-1}$ sur une autoroute ($R = 35\,cm$).
7) Déterminer $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ et $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}$ lorsque M est en contact avec l'axe (Ox).

Solution Ex-M1.8

Il est nécessaire de faire deux schémas de l'axe Ox où, sur le premier, on fait apparaître les positions des trois véhicules au début du dépassement (l'origine O étant l'avant de la voiture (1) coïncidant, à $t = 0$, avec l'arrière du bus qu'elle dépasse) et où, sur le second, on représente les positions des véhicules à la fin du dépassement dans la situation la plus critique, la voiture (1) se rabattant *in extremis*.



En utilisant les propriétés du mouvement rectiligne uniforme, on écrit les équations horaires des différents points : on note x_1 les abscisses relatives à la voiture qui double, x_2 celles relatives à la voiture qui arrive en face et X celle relatives au bus. On note l'indice AV pour l'avant d'un véhicule et AR pour l'arrière de ce véhicule.

$$\begin{cases} x_{1,AV} &= v_1 t \\ x_{1,AR} &= v_1 t - l_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_{AV} &= Vt + L \\ X_{AR} &= Vt \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{2,AV} &= -v_2 t + D \\ x_{2,AR} &= -v_2 t + D + l_2 \end{cases}$$

À la date t_f de la fin du dépassement, l'accident sera évité si :

$$\begin{cases} x_{1,AR} &= X_{AV} \\ x_{1,AV} &< x_{2,AV} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 t_f - l_1 &= V t_f + L \\ v_1 t &< -v_2 t + D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{t_f = \dfrac{L + l_1}{v_1 - V}} \\ \boxed{D > \dfrac{v_1 + v_2}{v_1 - V}(L + l_1) = 240\ m} \end{cases}$$

Solution Ex-M1.12

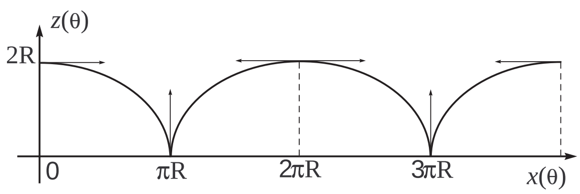
1) Condition de roulement sans glissement : $C_0C = \widehat{OI} \iff vt = R\theta \iff v = R\dot{\theta} \equiv R\omega$.

2) $\boxed{\overrightarrow{OC} \begin{cases} x_C = R\theta = R\omega t \\ z_C = R \end{cases}}$ **3)** $\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \begin{cases} x_C = R\,(\theta + \sin\theta) = R\,(\omega t + \sin\omega t) \\ z_C = R\,(1 + \cos\theta) = R\,(1 + \cos\omega t) \end{cases}}$

4) $z(\theta)$ est une fonction périodique paire de période 2π et $x(\theta + 2\pi) = x(\theta) + 2\pi R$: il suffit donc d'étudier x et z sur $\theta \in [0, 2\pi]$. Le reste de la courbe se déduisant par translation de $2\pi R$ selon (Ox) et par symétrie par rapport à Oz si on veut tracer $M(x(\theta), z(\theta))$ sur $\theta \in [-4\pi, 4\pi]$.

On étudie d'abord
$$\begin{cases} x'(\theta) = R(1 + \cos\theta) \\ z'(\theta) = -R\sin\theta \end{cases}$$

θ	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$x'(\theta)$	2R	+	R	+	0	+	R	+	
$x(\theta)$	0	↗	$R(1+\pi/2)$	↗	πR	↗	$R(3\pi/2-1)$	↗	$2\pi R$
$z'(\theta)$	0	−	-R	−	0	+	R	+	0
$z(\theta)$	2R	↘	R	↘	0	↗	R	↗	2R

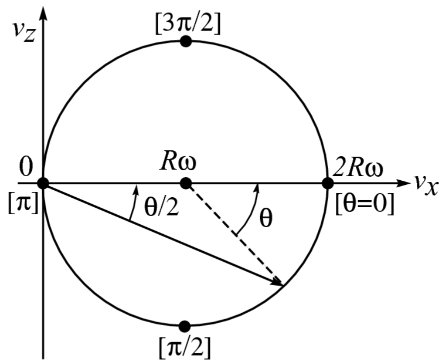


On pose $\epsilon = \theta - \pi$ pour étudier la tangente à la courbe au point de paramètre $\theta = \pi$.
Le cœfficient directeur de la tangente à la courbe est : $p = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{z'(\theta)}{x'(\theta)}$

$$p = \frac{-R\sin(\pi + \epsilon)}{R(1 + \cos(\pi + \epsilon))} = \frac{\sin\epsilon}{1 - \cos\epsilon}$$

→ Donc $p(\theta = \pi) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \dfrac{\sin\epsilon}{1 - \cos\epsilon} \simeq \dfrac{\epsilon}{\epsilon^2/2} = \dfrac{2}{\epsilon} \longrightarrow \infty$: la tangente en $\theta = \pi\ [2\pi]$ est verticale : on dit que la courbe présente un point de rebroussement en $\theta = \pi$.

5) $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = \begin{vmatrix} \dot{x} = \\ \dot{z} \end{vmatrix} \begin{matrix} R\omega\,(1+\cos\omega t) = \\ -R\omega\sin\omega t \end{matrix} \begin{vmatrix} R\omega\,(1+\cos\theta) \\ -R\omega\sin\theta \end{matrix}$



Cl : L'hodographe du mouvement est donc un cercle de centre $(R\omega, 0)$ et de rayon $v = R\omega$.

De plus :

$v_M^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = R^2\omega^2.2(1+\cos\omega t) = 4R^2\omega^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$\rightarrow \boxed{v_M = 2R\omega|\cos\dfrac{\theta}{2}|}$

6) $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = \begin{vmatrix} -R\omega^2\sin\omega t \\ -R\omega^2\cos\omega t \end{vmatrix} = -\omega^2 \begin{vmatrix} R\sin\theta \\ R\cos\theta \end{vmatrix}$

$\rightarrow \boxed{\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = -\omega^2\overrightarrow{CM}}$

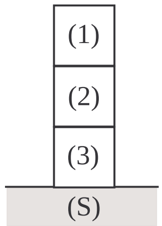
Soit : $a = \omega v = \dfrac{v^2}{R}$; A. N. : $a \approx 3,7.10^3 m.s^{-2}$.

7) Pour $\theta = \pi$: $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = R\omega^2\,\overrightarrow{e_z}$.

M2

■ Dynamique newtonienne

Ex-M2.1 Cube superposés



Soit trois cubes (1), (2) et (3) posés l'un sur l'autre, l'ensemble reposant sur le sol (S). On note $\overrightarrow{F}_{1\rightarrow 2}$ l'action de (1) sur (2), par exemple.

→ Calculer : $F_{1\rightarrow 2}$, $F_{3\rightarrow 2}$ et $F_{S\rightarrow 3}$.

Données : $m_1 = 100\ g$; $m_2 = 200\ g$; $m_3 = 400\ g$; $g = 10,0\ m.s^{-2}$.

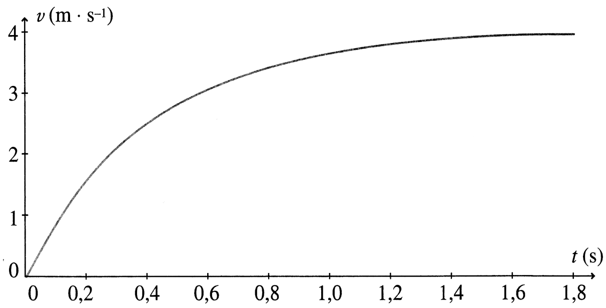
Rép. : $F_{1\rightarrow 2} = m_1 g = 1,0\ N$; $F_{3\rightarrow 2} = (m_1+m_2)\,g = 3,0\ N$

$F_{S\rightarrow 3} = (m_1+m_2+m_3)\,g = 7,0\ N$.

Rq : Les expressions littérales peuvent sembler intuitives : mais, ici, on de les établir par un *raisonnement* (élémentaire, certes, mais raisonnement quand même !)

Ex-M2.2 Cœfficient de frottement

Une bille de masse $m = 120\ g$ tombe dans un fluide. On a enregistré sa vitesse (norme) v en fonction du temps.



1) Quelles sont les différentes phases du mouvement ?

2) Donner une valeur approximative du temps caractéristique τ de ce mouvement.

3) Quelle est la valeur limite de v (notée v_{lim}) ?

4) En négligeant la poussée d'Archimède et en prenant $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{v}$ $(k > 0)$ comme force de frottement, établir l'équation différentielle satisfaite par v.

5) En déduire l'expression de v_{lim} en fonction de m, k et g.

6) Calculer la valeur de k.

Rép : 2) $\tau \approx 0,4\ s$ (cf. «méthode de la tagente») ; **4/5)** cf. Cours ; **6)** $k \approx 0,29\ kg.s^{-1}$ (**attention aux unités !** ; cf. Cours).

Ex-M2.3 Profondeur d'un puits

Pour mesurer la profondeur d'un puits, Mímir laisse tombe rune pierre du bord du puits et chronomètre la durée qui s'écoule jusqu'au moment où il entend le bruit de l'impact de la pierre au fond du puits (il a pris soin de placer son oreille à hauteur du bord du puits). La durée mesurée est $\Delta t = 2,6\ s$. → Calculer la profondeur h du puits.

On négligera les frottements de l'air sur la pierre et l'équation en h sera résolue numériquement.

Données : $g = 9,81\ m.s^{-2}$; célécité du son dans l'air : $c = 340\ m.s^{-1}$.

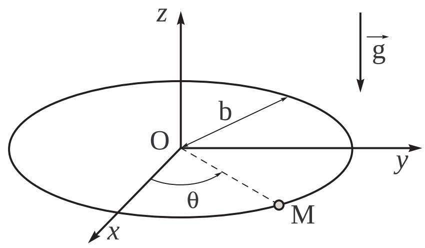
Rép : $\Delta t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + \dfrac{h}{c}$; d'où : $h \approx 31\ m$.

Ex-M2.4 Anneau glissant sur un cercle

Un anneau ponctuel M de masse m est enfilé sur un cercle fixe de centre O et de rayon b placé horizontalement dans le plan (Oxy).

Á l'instant $t = 0$, une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ tangente au cercle est communiqué à l'anneau qui glisse alors sans frottement le long du guide.

→ Déterminer les composantes de la réaction $\overrightarrow{R}$ du guide circulaire sur l'anneau.



Ex-M2.5 Point soumis à une force centrale et à une force de frottement fluide

Un point matériel M de masse m se déplace sur un plan horizontal (on suppose la réaction du plan normale au plan). M est lancé à partir de M_0, de coordonnées cartésiennes $(0, y_0)$ et est soumis à la force $\overrightarrow{F} = -a\,\overrightarrow{OM}$ et à une force résistante $\overrightarrow{f} = -b\overrightarrow{v}$ (a et b sont des constantes positives).

1) Établir en coordonnées polaires, les équations différentielles du mouvement de M.

2) Dans le cas où $\dot{\theta} = \omega = cste$, déterminer ω et l'expression de r en fonction du temps.

Rép : 1) Système ? référentiel ? bilan des forces ? projeter le **P.F.D.** dans la base cylindrique ; **2)** $r(t) = y_0 \exp\left(-\dfrac{bt}{2m}\right)$ et $\omega = \sqrt{\dfrac{a}{m} - \dfrac{b^2}{4m^2}}$.

Ex-M2.6 Chute libre d'une tige

Une tige rectiligne AB verticale de longueur $l = 80\ cm$, lâchée avec une vitesse initiale nulle, tombe en chute libre dans le vide. Elle passe au cours de sa chute par un trou ménagé dans une plaque horizontale de faible épaisseur. Quand son extrémité inférieure A atteint le trou, sa vitesse est $v = 5 m.s^{-1}$.

1) À quelle distance h de la plaque se trouvait initialement le point A ?

2) Quelle est la vitesse v' de la tige lorsque son extrémité supérieure B sort du même trou ?

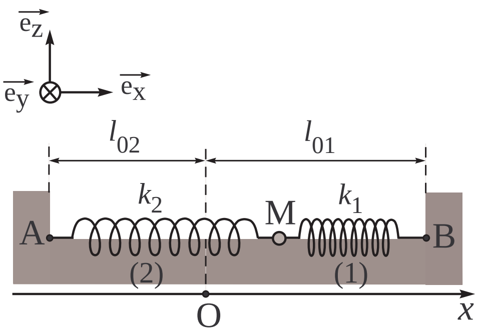
3) Quelle est la durée T du passage de la tige à travers le trou ?

Rép : 1) $h = 1,25\ m$; **2)** $v' = 6,4\ m.s^{-1}$; **3)** $T = 0,14\ s$.

Ex-M2.7 Point matériel reliés entre deux ressorts horizontaux

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Un point matériel M de masse m est attaché à deux ressort (1) et (2) horizontaux de raideurs k_1 et k_2, et de longueurs à vide l_{01} et l_{02} reliés à deux points fixes A et B distants de $(l_{01} + l_{02})$.

Le point M glisse sans frottement le long de l'axe (Ox) à partir de sa position d'équilibre. Il est repéré sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$.



1) Justifier la position d'équilibre en O du point M.

2) Établir l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire la période T des oscillations et la raideur k du ressort équivalent à cette association.

3) À l'instant $t = 0$, le point matériel est abandonné sans vitesse initiale du point M_0 d'abscisse x_0. Déterminer l'équation horaire du mouvement $x(t)$.

Rép : 2) $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$; **3)** $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$.