SERIE D'EXERCICES N° 10 : MECANIQUE : CINEMATIQUE DU POINT (début).

Les grandeurs en caractère gras sont des grandeurs vectorielles.

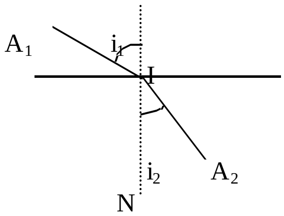
Mouvement rectiligne.

Exercice 1.

On considère deux milieux séparés par une surface plane, dans lesquels une particule se déplace avec des vitesses différentes $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$ étant tous deux des vecteurs constants.

Quelle relation les angles i_1 et i_2 doivent-ils vérifier pour que le trajet A_1IA_2 ait une durée minimale, A_1 et A_2 étant fixes ? Que vous rappelle ce résultat ?

Figure dans le plan d'incidence : plan défini par le « rayon incident » $\mathbf{A_1I}$ et la normale $\mathbf{IN}$ à la surface de séparation au point d'incidence I :

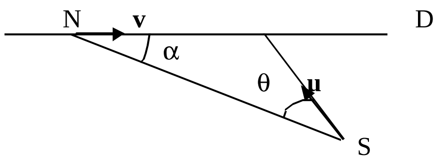


Note : on pourra introduire H_1 et H_2 les projetés de A_1 et A_2 sur la surface de séparation et poser $A_1H_1 = a_1$, $A_2H_2 = a_2$; on exprimera alors la durée du trajet en fonction de a_1, a_2, v_1, v_2, i_1, i_2 puis on dérivera par rapport à i_1 compte tenu de la relation $H_1I + IH_2 =$ constante.

Exercice 2.

Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\mathbf{v}$, le long d'une droite D . Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant où l'angle $(\mathbf{NS}, \mathbf{v})$ a la valeur α . T étant animée d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\mathbf{u}$.

1. Quelle doit être la valeur de l'angle de tir $\theta = (\mathbf{u}, \mathbf{SN})$ si l'on veut couler N ?
2. Si l'on veut que T atteigne N en un temps minimum, à quel instant, c'est à dire pour quelle valeur de α, convient-il de tirer ? (on donnera la relation entre α et θ). Calculer la valeur de l'angle de tir θ correspondante.



Exercice 3.

1. Dans un plan (Ox , Oy) deux particules se déplacent en mouvement rectiligne uniforme. A un instant donné, elles se trouvent en M_1 et M_2 et leurs vitesses sont $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$. A quelle condition les vecteurs $\mathbf{M_1M_2}$, $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$ doivent-ils satisfaire pour que les particules entrent en collision ? Que peut-on en déduire pour leur vitesse relative ?
2. Application. M_1 est un faisan qui vole horizontalement à la vitesse de $20\ m.s^{-1}$ et M_2 est la charge tirée par un chasseur à la vitesse moyenne de $300\ m.s^{-1}$.

a) Le chasseur tire un premier coup lorsqu'il voit le faisan dans une direction faisant l'angle $\theta_1 = 30°$ avec sa trajectoire ; quelle correction de tir, définie par l'angle θ_2, devrait-il effectuer ?

b) La correction ayant été mal faite, le chasseur tire un deuxième coup qui abat le faisan lorsqu'il passe au plus près du chasseur (il est alors à 30 m du chasseur). A combien de mètres le chasseur a-t-il tiré « devant » le faisan ?

Exercice 4.

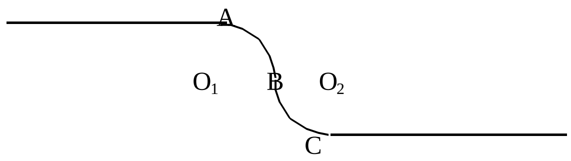
Un mobile animé d'une vitesse $\mathbf{v_0} = v_0\,\mathbf{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\mathbf{a} = -k\,v^2\,\mathbf{i}$; k est une constante et v la vitesse instantanée.

1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant v(t) .
2. En déduire l'équation du mouvement.
3. Montrer qu'après un parcours x , la vitesse est $v = v_0\,e^{-kx}$.

Mouvement circulaire.

Exercice 5.

Préciser l'accélération subie par un mobile se déplaçant à la vitesse v constante sur une trajectoire formée de deux segments rectilignes parallèles, raccordés par deux quarts de cercle de même rayon R : avant A, entre A et B, entre B et C, après C.
A.N. : $v = 72\ \text{km.h}^{-1}$ et $R = 20$ m .



Exercice 6.

Dans le plan xOy d'un repère (O , **i** , **j** , **k**), un point P se déplace sur un cercle de rayon R et de centre $I (R , 0 ,0)$.
A l'instant $t = 0$, P se trouve en $A (2R , 0 , 0)$ et possède la vitesse positive $\mathbf{v_0} (0 , v_0 , 0)$.
On désigne par r et θ les coordonnées polaires de P .

1. Former l'équation polaire du cercle, en déduire son équation cartésienne.
2. Représenter sur la figure la base polaire ($\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_q}$) de P . Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse **v** et **a** de P dans le repère (O , $\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_q}$, **k**).
3. Soit s l'abscisse curviligne de P (l'origine est en A).

- Donner l'expression de s en fonction de θ .
- Représenter sur la figure la base intrinsèque (**T** , **N**) de P .
- Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes de **v** et de **a** dans cette base.
- Calculer les composantes polaires de **T** et de **N** . Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de **v** et de **a** .

4. On désigne par ω la vitesse angulaire de P , dont on suppose dans tout ce qui suit qu'elle est constante.

- Donner en fonction de t , les expressions de θ puis de r .
- En déduire les expressions en fonction de t de **v** et **a** dans les bases polaire et de Frenet.

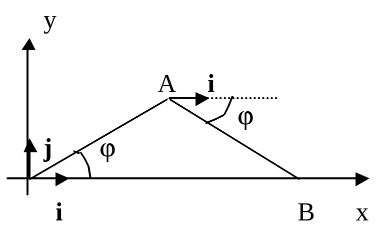
Détermination de la trajectoire.

Exercice 7.

Les coordonnées d'une particule sont données par les fonctions du temps : $x = 2\,t$ et $y = 4\,t\,(t - 1)$.

- Déterminer l'équation de la trajectoire.
- Calculer la vitesse à l'instant t .
- Montrer que le mouvement a une accélération constante dont on déterminera les composantes tangentielle et normale.

Exercice 8.



Soit un système constitué de deux barres identiques OA et AB , de longeur $2\,b$, articulées en A et assujetties à rester dans le plan (O , **i** , **j**) . B glisse le long de l'axe Ox et l'angle $\varphi = (\mathbf{i} , \mathbf{OA})$ vérifie $\varphi = \omega t$ avec ω constant.

- Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du milieu M de AB .
- Déterminer l'accélération de M .

Mouvement hélicoï dal.

Exercice 9.

Un point M décrit une hélice circulaire d'axe Oz .
Ses équations horaires sont : $x = a \cos\theta$; $y = a \sin\theta$; $z = h\,\theta$. a est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, h est une constante et θ est l'angle que fait avec Ox la projection **OM'** de **OM** sur Oxy .

1. Donner en coordonnées cylindriques les expressions de la vitesse et de l'accélération.
2. Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan Oxy un angle constant.
3. Montrer que si le mouvement de rotation est uniforme, le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan Oxy . Calculer le rayon de courbure.

Poursuites.

Exercice 10.

Les quatre mouches Adèle, Berthe, Célestine et Dorothée sont initialement aux quatre sommets A ,B , C , D d'un carré de côté l_0 .
Adèle vole vers Berthe, Berthe vers Célestine, Célestine vers Dorothée et Dorothée vers Adèle avec des vitesses de même module v .
Au bout de combien de temps les quatre mouches atteindront-elles le centre du carré ?

Note. Il est bon de remarquer que l'axe Oz passant par le centre du carré et perpendiculaire au plan $ABCD$ est un axe de répétition pour le problème : les quatre mouches resteront continuellement aux quatre sommets d'un carré de centre O (de côté et d'orientation variables). On étudiera alors l'évolution de la situation entre les instants t et $t + dt$ et on fera un développement limité au premier ordre.

Réponses.

Exercice 1.

$\dfrac{\sin i_1}{v_1} = \dfrac{\sin i_2}{v_2}$ (loi de Descartes pour la réfraction).

Exercice 2.

1) $\sin\theta = \dfrac{v}{u} \sin\alpha$. 2) $\alpha = \pi/2 - \theta$ et $\tan\theta = \dfrac{v}{u}$.

Exercice 3.

1) $\mathbf{M_1M_2} = (\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2})\, t$; vitesse relative colinéaire à $\mathbf{M_1M_2}$. 2.a) $\sin\theta_2 = \dfrac{v_1}{v_2} \sin\theta_1$. 2.b) $l_1 = \dfrac{v_1}{v_2} l_2$.

Exercice 4.

1) $v = \dfrac{v_0}{1 + k\, v_0\, t}$. 2) $x = \dfrac{1}{k} \ln(1 + k\, v_0\, t)$. 3) $v = v_0\, e^{-k x}$.

Exercice 5.

Avant A et après C : $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; entre A et b et entre B et C : $a = \dfrac{v^2}{R} = 20\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $\mathbf{a}$ étant dirigé vers le centre de courbure.

Exercice 6.

1) $r = 2R\cos\theta$ et $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$.

2) $\mathbf{v} = 2R\,\dot\theta\,(-\sin\theta\,\mathbf{u_r} + \cos\theta\,\mathbf{u_\varphi})$ et $\mathbf{a} = -2R\,[\,\mathbf{u_r}\,(2\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta) + \mathbf{u_\varphi}\,(2\sin\theta\,\dot\theta^2 - \cos\theta\,\ddot\theta)\,]$.

3) $s = 2R\theta$; $\mathbf{v} = 2R\,\dot\theta\,\mathbf{T}$ et $\mathbf{a} = 2R\,(\ddot\theta\,\mathbf{T} + 2\,\dot\theta^2\,\mathbf{N})$; avec $\mathbf{T} = -\sin\theta\,\mathbf{u_r} + \cos\theta\,\mathbf{u_\varphi}$ et $\mathbf{N} = -\cos\theta\,\mathbf{u_r} - \sin\theta\,\mathbf{u_\varphi}$ on retrouve les expressions précédentes. 4) $\theta = \dfrac{\omega_0\, t}{2}$ que l'on reporte dans r , $\mathbf{v}$ et $\mathbf{a}$; $\mathbf{v} = R\,\omega_0\,\mathbf{T}$ et $\mathbf{a} = R\,\omega_0^2\,\mathbf{N}$.

Exercice 7.

1) $y = x^2 - 2x$. 2) $v = 2\sqrt{16t^2 - 16t + 5}$. 3) $\mathbf{a} = 8\,\mathbf{j} = \mathbf{cte}$ avec $a_T = 16\dfrac{2t - 1}{\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}$ et $|a_N| = \dfrac{8}{\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}$.

Exercice 8.

$\dfrac{x^2}{9b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse) et $\mathbf{a} = -\omega^2\,\mathbf{OM}$.

Exercice 9.

1) $\mathbf{v} = a\,\dot\theta\,\mathbf{u_\varphi} + h\,\dot\theta\,\mathbf{u_z}$ et $\mathbf{a} = a\,\ddot\theta\,\mathbf{u_\varphi} - a\,\dot\theta^2\,\mathbf{u_r} + h\,\ddot\theta\,\mathbf{u_z}$. 2) Soit $\varphi = (\mathbf{u_\varphi}, \mathbf{v})$: $\tan\varphi = \dfrac{h}{a} = \mathrm{cte}$. 3) $\rho = \dfrac{a^2 + h^2}{a}$.

Exercice 10.

$t = l_0 / v$.

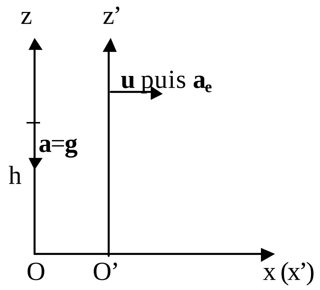
SERIE D'EXERCICES N° 11 : MECANIQUE : CINEMATIQUE DU POINT (fin).

Les vecteurs sont notés en caractères gras.

Changement de référentiel, composition des mouvements.

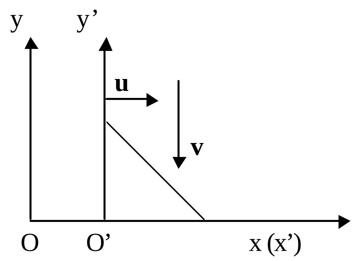
Exercice1.
Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel (R) muni du repère (O,**i**,**j**,**k**) sont données en fonction du temps par :
$x = t^2 - 4t + 1$; $y = -2t^4$; $z = 3t^2$.
Dans un deuxième référentiel (R') muni du repère (O',**i'**,**j'**,**k'**) , avec **i**=**i'** , **j**=**j'** , **k**=**k'** , elles ont pour expression :
$x' = t^2 + t + 2$; $y' = -2t^4 + 5$; $z' = 3t^2 - 7$.
Exprimer la vitesse **v** de M dans (R) en fonction de sa vitesse **v'** dans (R') . Procéder de même pour les accélérations. Définir le mouvement d'entraînement de (R') par rapport à (R) .

Exercice 2.



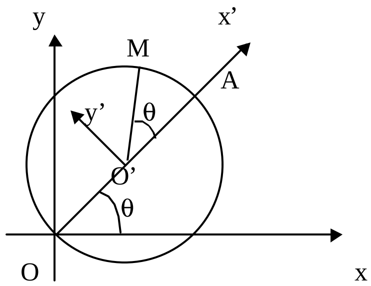
On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la verticale selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération g .
1. Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse **u** et passant à la verticale de chute au moment du lâcher ?
2. Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\mathbf{a_e}$?
(Représenter dans chaque cas la trajectoire demandée.)

Exercice 3.



Un gland tombe à la vitesse verticale **v** sur le pare-brise incliné à 45° d'une voiture roulant à la vitesse **u** . Comment s'effectue la réflexion du gland sur le pare-brise, vue par un piéton immobile ?
On peut admettre raisonnablement que dans le référentiel lié à la voiture, la vitesse réfléchie est égale et orientée symétriquement à la vitesse incidente par rapport à la normale au pare-brise.

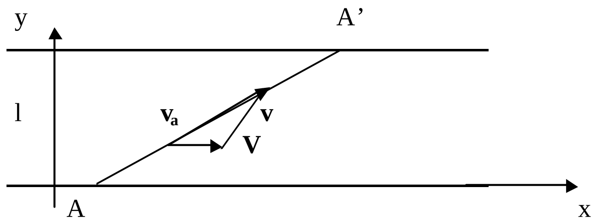
Exercice 4.



Dans le plan Oxy , un cercle de rayon R , de diamètre OA , tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point O . On lie à son centre mobile O' deux axes rectangulaires O'x'y' (l'axe O'x' est dirigé suivant OA).
A l'instant t = 0 , A est sur Ox , Ox et O'x' étant alors colinéaires.
Un point M , initialement en A , parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω .
1. Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère Oxy (en dérivant les composantes de **OM**).
2. Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de M dans le repère O'x'y' puis dans Oxy .
3.a) Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère Oxy en utilisant la notion de point coïncidant, retrouver le résultat par la loi de composition des vitesses.
b) Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère Oxy ; en déduire l'accélération complémentaire.
4. Vérifier les expressions des composantes de la vitesse d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation **w** ..

Exercice 5.

Deux bateaux traversent une rivière de largeur l ; leur vitesse par rapport à l'eau est $\mathbf{v} = \mathbf{cte}$, la vitesse du courant est $\mathbf{V} = \mathbf{cte}$.
Le premier met le temps le plus court, le second emprunte le chemin le plus court. Comparer les durées mises par les deux bateaux pour traverser la rivière.



Exercice 6.

Soit un plateau de manège tournant à la vitesse angulaire ω constante. Un observateur assimilé à un point matériel M part du centre O et marche uniformément le long d'un rayon du plateau. Déterminer l'équation de sa trajectoire en coordonnées polaires planes dans le référentiel lié au sol.

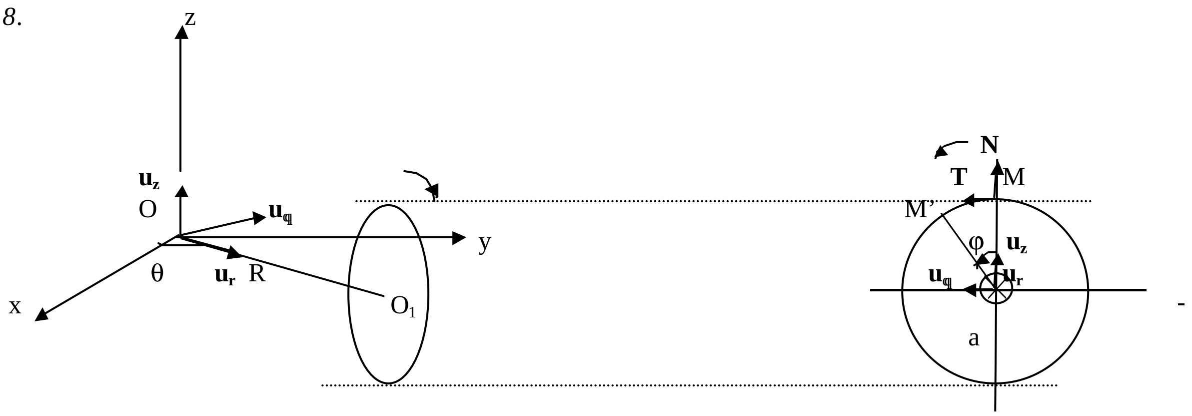
Exercice 7.

Dans le plan xOy , une droite Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

Un mobile M (OM = r) se déplace sur la droite Ox' suivant la loi : $r = r_0\,(\cos\omega t + \sin\omega t)$ avec $r_0 = cte$.

1. Déterminer à l'instant t en fonction de r_0 et ω, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le repère mobile x'Oy' . En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.
2. Déterminer à l'instant t en fonction de r_0 et ω, l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de M par leurs projections dans le repère mobile x'Oy' . En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

Exercice 8.



Une roue de rayon a , de centre O_1 , d'axe OO_1 horizontal roule sans glisser sur un plan horizontal fixe : O est fixe et OO_1 tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ autour d'un axe vertical Oz .

On considère à l'instant t le point M le plus haut de la roue.

1. Ecrire la condition de roulement sans glissement qui lie $\dfrac{d\varphi}{dt}$, $\dfrac{d\theta}{dt}$, a et $R = OO_1$ si φ repère la position de O_1M' par rapport à l'axe O_1z (voir la figure).
2. Etude du mouvement relatif de M (mouvement dans le référentiel (R') lié au repère (O , $\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_q}$, $\mathbf{u_z}$)) : exprimer la vitesse relative et l'accélération relative de M en fonction de R , a , ω, **T** et **N** vecteur unitaire directement perpendiculaire à **T** .
3. Etude du mouvement d'entraînement de M (mouvement du référentiel (R') lié au repère (O , $\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_q}$, $\mathbf{u_z}$) par rapport au référentiel (R) lié au repère (O , $\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$, $\mathbf{u_z}$)) : exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement de M en fonction de R , ω, **T** , $\mathbf{OO_1}$ **.**
4. Calculer l'accélération complémentaire de M en fonction de ω et $\mathbf{OO_1}$.
5. En déduire les expressions de la vitesse absolue et de l'accélération absolue en fonction des données précédentes.

Réponses.

Exercice 1.
$\mathbf{v} = \mathbf{v'} - 5\,\mathbf{i}$ et $\mathbf{a} = \mathbf{a'}$: translation rectiligne et uniforme.

Exercice 2.
1) $z' = -\dfrac{g}{2\,u^2}\,x'^2 + h$ (parabole) . 2) $z' = \dfrac{g}{a_e}\,x' + h$ (droite).

Exercice 3.
$\mathbf{v}_{\mathbf{après}} = (v + u)\,\mathbf{i} + u\,\mathbf{j}$.

Exercice 4.
1) $\mathbf{v_a} = [\,-R\,\omega\,(\sin\theta + 2\sin 2\theta)\,\mathbf{i} + R\,\omega\,(\cos\theta + 2\cos 2\theta)\,\mathbf{j}\,]$ et $\mathbf{a_a} = [\,-R\,\omega^2\,(\cos\theta + 4\cos 2\theta)\,\mathbf{i} - R\,\omega^2\,(\sin\theta + 4\sin 2\theta)\,\mathbf{j}\,]$.
2) $\mathbf{v_r} = R\,\omega\,(-\sin 2\theta\ \mathbf{i} + \cos 2\theta\ \mathbf{j})$ et $\mathbf{a_r} = -R\,\omega^2\,(\cos 2\theta\ \mathbf{i} + \sin 2\theta\ \mathbf{j})$.
3) $\mathbf{v_e} = [\,-R\,\omega\,(\sin\theta + \sin 2\theta)\,\mathbf{i} + R\,\omega\,(\cos\theta + \cos 2\theta)\,\mathbf{j}\,]$ et $\mathbf{a_e} = [\,-R\,\omega^2\,(\cos\theta + \cos 2\theta)\,\mathbf{i} - R\,\omega^2\,(\sin\theta + \sin 2\theta)\,\mathbf{j}\,]$; d'où
$\mathbf{a_c} = -2\,R\,\omega^2\,(\cos 2\theta\ \mathbf{i} + \sin 2\theta\ \mathbf{j})$.

Exercice 5.
$t_1 = \dfrac{l}{v}$ et $t_2 = \dfrac{l}{\sqrt{v^2 - V^2}} > t_1$.

Exercice 6.
$r = v\,\dfrac{\theta - \theta_0}{\omega}$.

Exercice 7.
1) $\mathbf{v_r} = r_0\,\omega\,(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))\,\mathbf{u_r}$ et $\mathbf{v_e} = r_0\,\omega\,(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\,\mathbf{u_\theta}$ et $\mathbf{v_a} = \mathbf{v_r} + \mathbf{v_e}$ donneavec $v_a = \sqrt{2}\,r_0\,\omega$.
2) $\mathbf{a_r} = -r_0\,\omega^2\,(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\,\mathbf{u_r}$ et $\mathbf{a_e} = -r_0\,\omega^2\,(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\,\mathbf{u_r}$ et $\mathbf{a_c} = 2\,r_0\,\omega^2\,(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))\,\mathbf{u_\theta}$ et
$\mathbf{a_a = a_r + a_e + a_c}$ donne $a_a = 2\sqrt{2}\,r_0\,\omega^2$.

Exercice 8.
1) $a\,\dot{\varphi} = R\,\dot{\theta}$. 2) $\mathbf{v_r} = R\,\omega\,\mathbf{T}$ et $\mathbf{a_r} = -\dfrac{R^2}{a}\,\omega^2\,\mathbf{N}$. 3) $\mathbf{v_e} = R\,\omega\,\mathbf{T}$ et $\mathbf{a_e} = -\omega^2\,\mathbf{OO_1}$. 4) $\mathbf{a_c} = -2\,\omega^2\,\mathbf{OO_1}$. 5) $\mathbf{v_a} = 2\,R\,\omega\,\mathbf{T}$ et
$\mathbf{a_a} = -\,\omega^2\,(\dfrac{R^2}{a}\,\mathbf{N} + 3\,\mathbf{OO_1})$.