PS21 – Mécanique Physique

Travaux Dirigés

Patrice Buffet

Ludovic Cauvin

Olivier Chesnais

Florent Forestier

Patrick Lanceleur

Emmanuel Perrey-Debain

Mars 2019

TD 1 Physique générale, cinématique du point (1)

1.1 Calcul vectoriel

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé de vecteurs de base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, soient deux vecteurs définis comme suit :

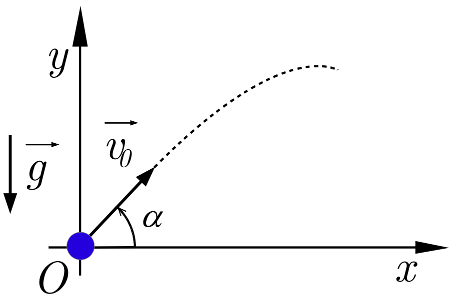
$$\overrightarrow{OA} = 3\,\overrightarrow{e_1} + 4\,\overrightarrow{e_2} \qquad \overrightarrow{OB} = -\,\overrightarrow{e_1} + 2\,\overrightarrow{e_2}$$

1. Représenter $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Calculer les normes $\|\overrightarrow{OA}\|$, $\|\overrightarrow{OB}\|$ et $\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\|$.
2. Calculer les composantes u_1 et u_2 du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ porté par le vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et en déduire l'angle θ que font entre eux les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
4. Déterminer les angles α, β et γ que fait le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ avec les vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.
5. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ainsi que la norme $\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|$.
6. Montrer que l'aire du triangle (OAB) peut s'exprimer en fonction de $\|\overrightarrow{OA}\|$, $\|\overrightarrow{OB}\|$ et θ.
   Vérifier que l'aire de ce triangle peut aussi être obtenue par la relation $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|$.

1.2 Ballistique (1)

On considère, dans le plan Oxy, les trajectoires de points ayant une accélération constante $\overrightarrow{a} = -g\,\overrightarrow{e_y}$ et une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant l'angle α avec l'axe Ox.

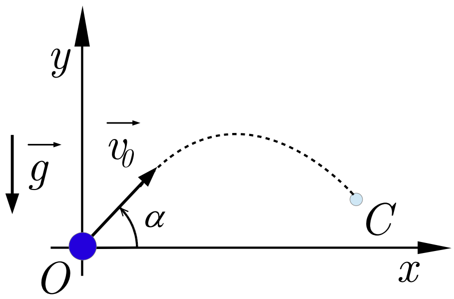
1. Déterminer les équations horaires du mouvement.
2. En déduire l'équation de la trajectoire.
3. Déterminer la flèche de la trajectoire (altitude maximale atteinte). Pour quel angle α la flèche est-elle maximale ?
4. Déterminer la portée D (distance entre O et le point de chute sur le plan horizontal y=0). Pour quel angle α la portée est-elle maximale ?
   Calculer pour cet angle la portée et la flèche de la trajectoire.
   Données : g = 9,81 m/s^2, $\|\overrightarrow{v_0}\|$ = 30 m/s.



1.3 Ballistique (2)

On considère, dans le plan Oxy, les trajectoires de points ayant une accélération constante $\overrightarrow{a} = -g\,\overrightarrow{e_y}$ et une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant l'angle α avec l'axe Ox.

1. Montrer que dans certains cas il existe deux valeurs de α pour lesquelles ces trajectoires, issues de l'origine O, atteignent une même cible C.
2. En déduire l'équation de la courbe enveloppe de toutes les trajectoires correspondant à une même valeur de la norme de $\overrightarrow{v_0}$.
3. Cette courbe est nommée « *parabole de sûreté* » par la communauté scientifique. Justifier cette appellation.



1.4 Position, vitesse est accélération

Les trois questions sont indépendantes

1. Un mobile est soumis à une accélération constante d'amplitude valant 1 m/s^2. À l'instant initial, sa vitesse est nulle. Quelle est la vitesse du mobile lorsque celui-ci a parcouru 3 m ?

2. Un point matériel se déplace le long d'une courbe dont les équations horaires sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha\cos(3\gamma t) \\ y(t) = \alpha\sin(3\gamma t) \\ z(t) = 3\beta t \end{cases}.$$

   a. Décrire la trajectoire du point matériel.
   b. Trouver sa vitesse et son accélération à un instant donné.
   c. Trouver les modules de la vitesse et de l'accélération à l'instant initial.
   d. Au fait, quelles sont les dimensions des constantes présentes dans les équations horaires ?

3. Une particule se déplace avec une accélération donnée par :

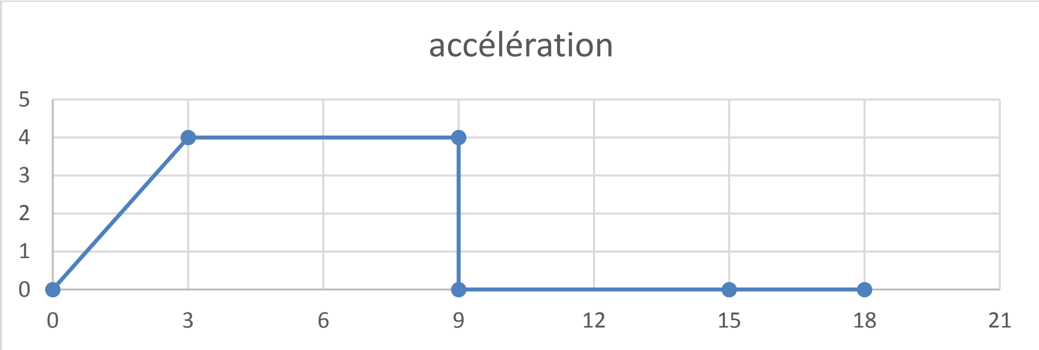
$$\vec{a}(t) = \alpha\exp(-t\,/\,\tau)\vec{e}_x + \beta\cos(\omega t)\vec{e}_y + \gamma\sin(\omega t)\vec{e}_z\,.$$

   Si au temps t=0 la particule est située en (1, -3, 2) et sa vitesse est alors (4, -3, 2) (unités SI), trouver la vitesse et le déplacement de la particule pour un temps t>0.

TD 2 Cinématique du point (2)

2.1 Vitesse et position d'une voiture

Une voiture, initialement à l'arrêt, se déplace en ligne droite. Un accéléromètre embarqué sur le véhicule a enregistré le graphe ci-dessous, indiquant l'évolution de l'accélération tangentielle (en module) avec le temps.



1. Calculer la vitesse et la position de la voiture à la fin de chaque phase d'accélération. À quelle distance du départ la voiture se trouve t'elle après 18 secondes ? Quelle est alors sa vitesse ?
2. Que deviennent les résultats précédents si la voiture ne roule pas en ligne droite ?

2.2 Mouvement d'un ballon-sonde

Un ballon-sonde a une vitesse d'ascension verticale v_0 indépendante de son altitude z ($\overrightarrow{O_z}$ est la verticale ascendante). Il est soumis à un vent qui lui communique une vitesse horizontale et proportionnelle à son altitude $u = z/\tau$.

1. Déterminer les lois horaires du mouvement $x(t)$ et $z(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $x(z)$.
2. Calculer l'accélération du ballon-sonde. Déterminer ses composantes normale et tangentielle à la trajectoire.

2.3 Trajectoire tridimensionnelle

Les coordonnées d'un point sont données en fonction du temps par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = b + ct^2 \\ z(t) = dt^2 + et \end{cases} .$$

1. Indiquer les unités des constantes $a,\ b,\ c,\ d$ et e.
2. On pose $a = 1,\ b = 1,\ c = -2,\ d = 4,\ e = 3$ (unités SI). Écrire les composantes de la vitesse du point et en déduire son module.
3. Écrire les composantes tangentielle et normale de l'accélération.
4. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

TD 3 Cinématique du point (3). Coordonnées curvilignes

3.1 Calculs élémentaires

1. Une courbe a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 = 4$. Quelle est son équation en coordonnées polaires ?
2. Une courbe a pour équation cartésienne : $x = y = z$. Quelle est son équation en coordonnées polaires ?
3. Le point M a pour coordonnées $r(t) = \alpha t^2$, $\theta(t) = 3\beta t$, $z(t) = \gamma t$ dans le système de coordonnées cylindriques. Déterminer les composantes du vecteur position puis des vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées cylindriques.

3.2 Quelques variations autour d'une trajectoire

Une particule ponctuelle M se déplace dans le plan (xOy). Sa position est repérée par son vecteur exprimé en coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

a. Quelle est la trajectoire de la particule si $r = \alpha = Cst$? Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération. Que deviennent ces résultats si le mouvement est uniforme ?

b. Que devient la trajectoire de la particule si $r = \alpha t$, avec $\alpha =$Cst, et $\omega = \dot{\theta} = Cst$?

2. On considère à présent le mouvement d'une particule M dont le vecteur position, exprimé en coordonnées cylindriques, s'écrit $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{e}_r + h\,\theta\vec{e}_z$, avec $\alpha = h = Cst$.

   a. Décrire la trajectoire décrite par M si $\omega = \dot{\theta} = Cst$.

   b. Etablir l'expression générale de la vitesse et de l'accélération de M en coordonnées cylindriques si θ est quelconque.

   c. Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec le plan (xOy).

   d. Calculer les composantes tangentielle et normale de l'accélération. En déduire une expression pour les vecteurs unitaires $\vec{e}_t$ et $\vec{e}_n$ de la base de Frenet associée à la trajectoire. Donner l'expression générale de son rayon de courbure.

   e. Quelle condition doit-on vérifier pour obtenir un mouvement uniforme ? Montrer que dans ce cas l'accélération est normale en tout point de la trajectoire et que ce vecteur est également parallèle au plan (xOy). Que devient le rayon de courbure de la trajectoire ?

3. On considère enfin le mouvement d'une particule M dont le vecteur position, exprimé en coordonnées cylindriques, s'écrit $\overrightarrow{OM} = \alpha\, t\vec{e}_r + h\,\theta\vec{e}_z$, avec $\alpha = h = Cst$.

   a. Décrire la nouvelle trajectoire parcourue par la particule si $\omega = \dot{\theta} = Cst$.

   b. Dans le cas d'un mouvement uniforme, les propriétés établies à la question (2.e) sont-elles encore vérifiées ?

3.3 Longueur d'une trajectoire en coordonnées polaires

Un objet décrit une trajectoire définie en coordonnées polaires par l'équation : $r(\theta) = r_0(1 + \cos\theta)$ où r_0 = 30 cm

1. Etudier ce mouvement dans le cas où $\omega = \dot{\theta} = Cst > 0$. Déterminer la vitesse et l'accélération du mobile en tout point de la trajectoire et déterminer l'allure de cette dernière.
2. Calculer la longueur L de cette trajectoire.

TD 4 Cinématique du point (4). Compositions des vitesses

4.1 Loi de composition des vitesses

On considère un ascenseur qui démarre à l'instant initial $t = 0$, avec une accélération de 1 m/s² pendant 2 secondes. Il continue avec une vitesse constante pendant 8 secondes et ralentit jusqu'à l'arrêt complet à accélération constante pendant 4 secondes. Au même instant initial $t = 0$, un objet M démarre avec une vitesse constante horizontale de 0.5 m/s sur le sol de l'ascenseur.

1. Quelles sont les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ de l'objet par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen) dont l'origine est au repos au point de départ du sol ?
2. En déduire l'équation de la trajectoire $y(x)$ du point M. Représenter cette trajectoire.
3. Dessiner la trajectoire de l'objet telle qu'un observateur la voit dans le référentiel lié à l'ascenseur.

4.2 Effet du vent sur le temps de parcours d'un avion

On suppose qu'un avion va du point A dans une direction plein Nord vers le point B puis retourne au point A. La distance de A à B est L. La vitesse de l'avion par rapport à l'air est v et la vitesse du vent est v' .

1. Montrer que le temps pour faire l'aller-retour en air calme ($v' = 0$) est :

$$t_a = 2L/v$$

2. Montrer que le temps pour faire l'aller-retour quand le vent est dirigé plein Est (ou plein Ouest) est :

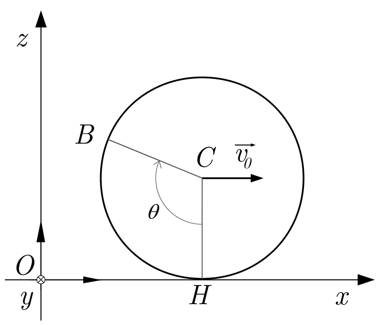
$$t_b = \frac{t_a}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{v^2}}}$$

3. Montrer que le temps pour faire l'aller-retour quand le vent est dirigé plein Nord (ou plein Sud) est :

$$t_c = \frac{t_a}{1 - \frac{v'^2}{v^2}}$$

4. Les voyages précédents sont-ils faisables quand $v' = v$?
5. Pour un v' donné, quel est de t_b ou t_c le temps le plus long ?

4.3 Roulement sans glissement



Une roue de rayon R roule sans glisser selon un axe rectiligne $\overrightarrow{O_x}$. Un point B, situé à la périphérie de la roue, coïncide à l'instant initial avec l'origine O du repère. Le centre C de la roue a une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ positive, constante et parallèle à $\overrightarrow{O_x}$.

1. Déterminer les coordonnées $x(t)$ et $z(t)$ du point B. On introduira $\theta(t)$, angle dont la roue a tourné depuis l'instant initial. Donner l'allure générale de la trajectoire.
2. Calculer la vitesse $\vec{v}$ du point B et étudier ses variations.
3. Calculer l'accélération $\vec{a}$ du point B et préciser son orientation.
4. En introduisant un référentiel d'origine C en translation par rapport au précédent, montrer qualitativement comment il est possible de retrouver les résultats de la deuxième question.

4.4 Manège d'enfants

Un manège d'enfants tourne à une vitesse angulaire constante ω. Le propriétaire, représenté par un point M, parcourt la plate-forme (référentiel $\mathcal{R}'$ de repère cartésien $(\overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_{z'}})$) pour ramasser les tickets. Partant du centre O, au temps t=0 sans vitesse, il suit un rayon de la plate-forme (qui porte le vecteur $\overrightarrow{e_{x'}}$) avec un mouvement uniformément accéléré (on notera a, l'amplitude de l'accélération supposée constante).

1. Faire un schéma du problème en indiquant le référentiel fixe $\mathcal{R}$, celui du manège $\mathcal{R}'$, et le point M.
2. Ecrire les équations paramétriques de la trajectoire dans $\mathcal{R}'$
3. Ecrire les équations paramétriques de la trajectoire dans $\mathcal{R}$, représenter graphiquement la trajectoire.
4. A partir de la question 3, déterminer la vitesse absolue du mouvement dans $\mathcal{R}$.

Reprendre la question 4, à partir de la loi de composition des mouvements (formule vue en cours)

TD 5 Forces

5.1 Équations aux dimensions. Analyse dimensionnelle

1. La force d'attraction qui s'exerce entre deux points matériels de masses m et m', séparés par une distance r est donnée en module par la loi de Newton :
$$F = G\frac{mm'}{r^2}$$
Donner les dimensions de la constante de gravitation universelle G.

2. L'expérience montre que la force subie par une sphère immergée dans un fluide en mouvement lent (écoulement laminaire) dépend du coefficient de viscosité η du fluide, du rayon r de la sphère et de la vitesse de la sphère par rapport au fluide. Trouver l'expression générale de cette force sachant que $[\eta] = L^{-1}MT^{-1}$.

5.2 Étude de Jupiter par sondes spatiales

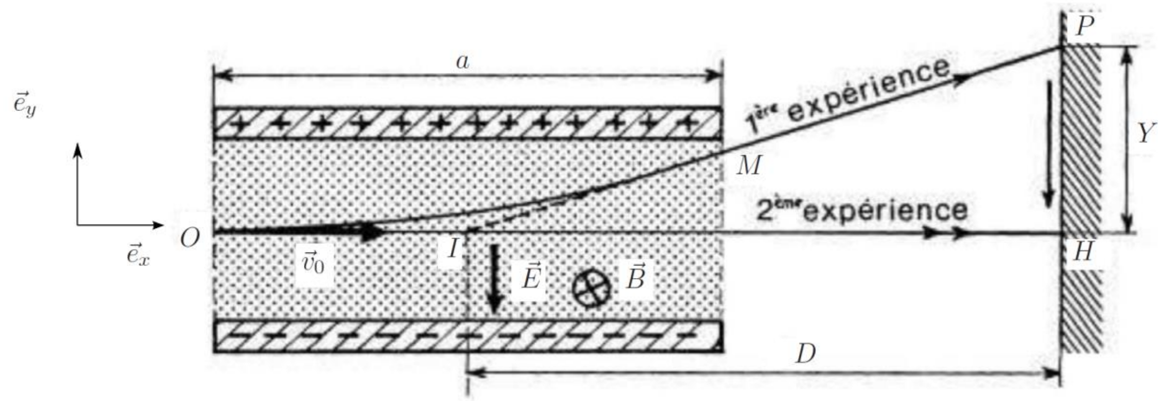
En mars 1979, la sonde spatiale Voyager 1 s'approchant de Jupiter à une altitude z_1 mesure le champ gravitationnel g_1 créé par cette planète. Quelques mois plus tard, Voyager 2 mesure à l'altitude z_2 un champ gravitationnel g_2.
En déduire :

1. La valeur de la masse de Jupiter.
2. Le rayon de cette planète supposée sphérique, ainsi que sa masse volumique.
3. L'intensité du champ gravitationnel à sa surface.

A.N. : z_1 = 278000 km, g_1 = 1,04 N/kg, z_2 = 650000 km, g_2 = 0,243 N/kg.

5.3 Expérience de J. J. Thomson

En 1897, J. J. Thomson a proposé une expérience simple pour déterminer la charge massique de l'électron. En utilisant le dispositif représenté sur la Figure, on procède en deux étapes : Tout d'abord, on effectue la déviation d'un faisceau d'électrons à l'aide d'un champ électrique constant $\overrightarrow{E} = -E.\overrightarrow{e_y}$ (à l'origine O, l'électron a une vitesse horizontale $v_0.\overrightarrow{e_x}$). Le point d'impact du faisceau est repéré sur l'écran d'observation par le point *P*.
Puis, dans une deuxième étape, on ajoute un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, lui aussi constant et perpendiculaire au plan *Oxy*, dont on règle la valeur de sorte à ramener le point d'impact du faisceau d'électrons au centre de l'écran d'observation (point *H*). Dans tous les cas, les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ n'existent que dans la zone grise (pour $0 \leqslant x \leqslant a$).
Les grandeurs mesurables directement avec les techniques de l'époque sont les distances (*a*,*Y*,*D*) et l'intensité des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.
1. Etudier le mouvement lors de la première expérience. En particulier, montrez que le point *I* sur l'axe a pour coordonnée *x* = *a*/2. En déduire le rapport *Y*/*D* en fonction de *e*/*m* et des autres paramètres.
2. Etudier le mouvement lors de la seconde expérience. Compléter le résultat de la question 1. de façon à exprimer *e*/*m* en fonction des paramètres mesurables expérimentalement.



TD 6 Dynamique du point matériel (1)

6.1 Calculs élémentaires

Une locomotive tire 3 wagons identiques, chacun de masse 2 tonnes, et reliés entre eux par des connexions de masses négligeables. Le train roule sans frottements sur une surface horizontale. L'accélération mesurée de l'ensemble des trois wagons est de 7 m/s^2.

1. Calculer la force fournie par la locomotive.
2. Calculer les tensions dans chaque élément de connexion.

6.2 Parachutisme

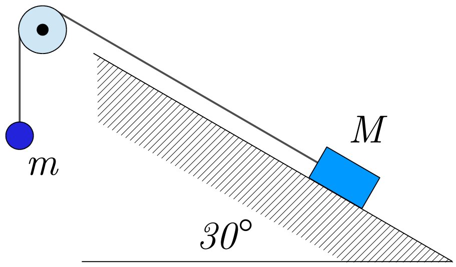
Un parachutiste de masse M = 80 kg, a sur le dos un parachute de masse m = 20 kg. Il saute hors de l'avion en vol et commence alors une chute libre supposée sans frottement jusqu'à atteindre une vitesse v_0. Une fois le parachute ouvert, celui-ci est soumis à la résistance de l'air, assimilable à une force de frottement de module $F = \alpha\, v^2$, avec α = 20 kg/m. On prendra g = 10 m/s^2 et on ne considèrera que la composante verticale du mouvement.

1. Quelle est l'équation différentielle du mouvement selon l'axe vertical ?
2. Quelle est la vitesse limite atteinte par le parachutiste au cours de sa chute ?
3. Montrer que cette vitesse est égale à la vitesse d'une personne sautant en chute libre (sans frottement) d'une hauteur h que l'on précisera.

6.3 Dynamique du point matériel et frottement solide

Soit le système représenté par la figure suivante avec M = 1 kg, $\mu_s = 0{,}6$ et $\mu_c = 0{,}4$ sont respectivement les coefficients de frottement statique et cinétique.

1. Pour quelles valeurs de m le système reste-t-il statique ?
2. On met M en mouvement. Pour quelles valeurs de m glisse-t-il vers le haut ou vers le bas à vitesse constante ? Quelle est la tension de la corde dans ce cas ?
3. La masse m est différente des valeurs précédentes. Trouver l'accélération de M quand elle descend sur le plan incliné. Quelle est alors la tension du fil ?



Remarque : On négligera l'inertie de la corde et de la poulie devant m et M. La corde est supposée inextensible.

6.4 Mouvement d'une fronde

Une fronde est constituée d'une masse m reliée à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil de longueur l et de masse négligeable. A partir de sa position d'équilibre, on lance la masse m avec une vitesse initiale v_0 horizontale. On néglige l'effet des forces de frottements visqueuses.

1. Quelle valeur doit-on donner à v_0 pour que le fil reste tendu au cours du mouvement ?
2. Si la vitesse initiale est inférieure à la valeur déterminée à la question précédente, calculer l'angle que fait le fil avec la verticale lorsque le fil cesse d'être tendu. Quel est le mouvement ultérieur de la masse m ?

TD 7 Dynamique du point matériel (2)

7.1 Forces dues à un champ magnétique. Fréquence cyclotron

Une charge q de masse m est placée dans un champ magnétique B_0 uniforme dirigé suivant Oz positif. À l'instant initial $t = 0$, on a les conditions : $x = \alpha$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = v_0$

1. Rappeler l'expression de la force qui s'exerce sur la charge du fait de l'existence du champ magnétique.
2. Montrer, à l'aide du PFD, que la vitesse de la particule est d'amplitude constante et que la trajectoire dans le plan (xOy) est un cercle dont on déterminera le rayon R. Quelle est la période T du mouvement ?
3. En posant $\omega = \dfrac{qB_0}{m}$, pulsation du mouvement, montrer que les équations du mouvement dans le plan (xOy) sont données par :
$$\begin{cases} x(t) = \alpha + \dfrac{v_0}{\omega}(1 - \cos\omega t) \\ y(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t \end{cases}.$$
4. Existe-t-il une composante $z(t)$?

7.2 Ballistique et frottements visqueux

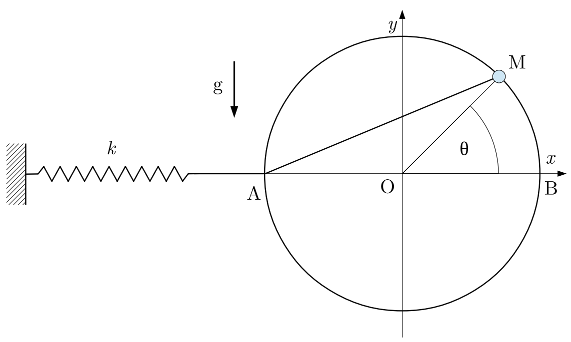
Un projectile ponctuel M de masse m est lancé dans le plan vertical (Oxz) avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale Ox. Ce projectile est soumis à une force de frottement visqueuse due à l'air, dont le module est proportionnel à la vitesse instantanée de M. On considère d'autre part que l'accélération de la pesanteur est constante.

1. Etablir les équations du mouvement.
2. Exprimer les vitesse et position du projectile en fonction des données du problème. Montrer que la trajectoire de M admet une asymptote verticale et que sa vitesse tend vers une limite que l'on précisera.

7.3 Dynamique - Équilibre

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur une circonférence de centre O et de rayon a placée dans le plan vertical. Soit AB le diamètre horizontal de ce cercle. On repère la position par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$. Le point M reste en permanence en contact avec la circonférence.

Un ressort de raideur k, lié à M et à A exerce une force $\vec{f} = -k.\overrightarrow{AM}$ sur le point M. La force $\vec{f}$ est nulle lorsque M et A sont confondus.



1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point M, donner leurs expressions dans le système de coordonnées polaires.

2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le point M situé en un point quelconque de la circonférence dans le système de coordonnées polaires.
3. Déterminer la ou les position(s) d'équilibre du point M.
4. Indiquer si ces positions sont stables ou non.

TD 8 Energie, Travail & Puissance (1)

8.1 Travail et énergie cinétique *(questions indépendantes)*

1. Calculer le travail de la force gravitationnelle pour un objet de masse $m = 1$ kg élevé depuis le sol jusqu'à une altitude de :
   a) 100 m
   b) 100 km

2. Une force $F = 6\,t$ (N) agit sur une particule de masse 2 kg. La particule étant immobile au départ, trouver le travail effectué par la force pendant les deux premières secondes.

3. Un point matériel de masse m se déplace dasn le plan (xOy), son vecteur position étant donné par :
$$\vec{r} = a\ \cos\omega t\ \overrightarrow{e_x} + b\ \sin\omega t\ \overrightarrow{e_y}$$
où a, b et ω sont des constantes positives telles que $a > b$.
   a) Calculer l'énergie cinétique du point matériel aux points $A(a, O)$ et $B(O, b)$.
   b) Calculer le travail fourni par le champ de force en déplaçant le point matériel de A à B .
   c) Vérifier le théorème de l'énergie cinétique.
   d) Montrer que le travail total effectué en faisant faire au point matériel le tour de l'ellipse est nul.

4. Un ressort de raideur $k = 10^6$ N/m est utilisé pour catapulter une masse $m = 1$ kg dans la direction verticale. Le ressort est initialement comprimé d'une valeur $\Delta l = l - l_0 = -5$ m . Déterminer la vitesse de la masse quand le ressort retrouve sa longueur de repos. En déduire l'altitude maximale que peut atteindre le projectile.

8.2 4x4 de grande marque

On considère un 4X4 de ville de grande marque, assimilable à un point matériel, noté Q_7. Ce point Q_7 roule sur une autoroute horizontale sur une distance de L = 30 km à vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_t$. Il est alors soumis aux forces de viscosité de l'air données par :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 \vec{e}_t$$

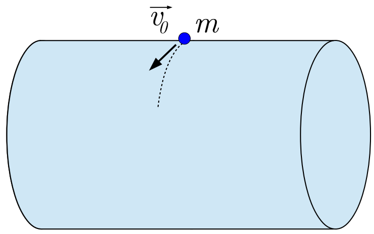
Données :

- ρ = 1,293 kg/m^3 : masse volumique de l'air
- C_x = 0,34 : coefficient de forme du véhicule
- S = 1,737 x 1,983 m^2 : surface projetée du véhicule
- M_7 = 2300 kg : masse du véhicule.

1. Calculer le travail des forces de viscosité à v = 90 km/h et v = 130 km/h.
2. Le point Q_7 va de Moutiers (alt. 481 m) à Courchevel (alt. 1850 m). Quel est le travail de la force de pesanteur ? Et sur le trajet de retour ?
3. Dans les spécifications du véhicule, il est écrit qu'il atteint les 100 km/h en 9,1 s. En négligeant les frottements, quelle est la puissance moyenne délivrée par le moteur lors de ce 0 – 100 km/h départ arrêté (*puissance mécanique effectivement transmise, indépendamment du rendement du moteur de 0.3 au mieux*) ? Comment cela se compare-t-il aux cas de la question 2) ?

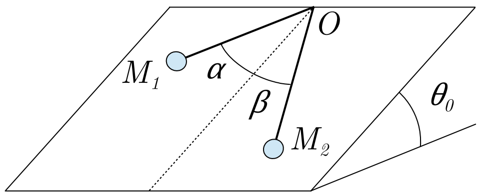
8.3 Mouvement matériel sur un cylindre

Une particule matérielle de masse m glisse sans frottement sur la surface d'un cylindre de rayon R et d'axe horizontal. La particule est lancée avec une vitesse v_0 d'un point situé sur la génératrice supérieure et normalement à celle-ci. Déterminer la position de la particule lorsqu'elle quitte le cylindre.



TD 9 Energie, Travail & Puissance (2)

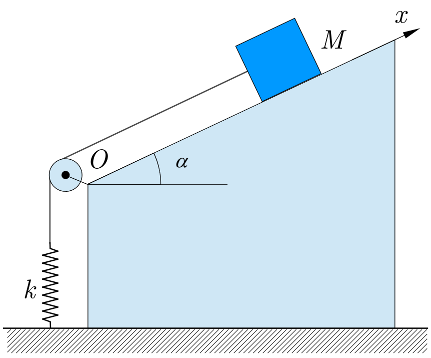
9.1 Pendule sur un plan incliné



Un pendule de longueur l et de masse m, fixé à son extrémité O, oscille en glissant avec frottements (coefficient μ_c) sur un plan incliné faisant un angle θ_0 constant avec l'horizontale. On lâche le pendule en M_1 (OM_1 faisant l'angle α avec la ligne de plus grande pente) sans vitesse initiale, et la masse remonte en M_2 (OM_2 faisant l'angle β avec la ligne de plus grande pente).

1. Calculer le travail des forces non conservatives.
2. En déduire le coefficient de frottement cinématique μ_c entre le pendule et le plan incliné.

9.2 Système masse-ressort



Un corps ponctuel M de masse m peut glisser sur un plan $\overrightarrow{Ox}$ incliné d'un angle α avec un coefficient de frottement cinétique μ_c. Un ressort de constante k relie la masse m au moyen d'une corde sans masse au support horizontal. À l'instant initial, le ressort est à sa longueur de repos, M est au point O et une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ suivant $\overrightarrow{Ox}$ lui est communiquée.

Déterminer la position maximale de M sur $\overrightarrow{Ox}$ avec les données suivantes :

m = 100 g, α = 30°, μ_c = 1, k correspondant à un allongement de 25 cm pour une force de 10 N, et v_0 = 5 m/s.

9.3 Mouvement d'un point matériel dans un potentiel cuvette

On considère le mouvement sans frottements d'un point matériel de masse m sur un axe horizontal $\overrightarrow{x'x}$ sous l'effet de deux forces extérieures dont la résultante s'écrit :

$$\vec{F}(x) = \left(-kx + \frac{a}{x^3}\right)\vec{e}_x$$

avec k et a des constantes positives et $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire le long de l'axe $\overrightarrow{x'x}$. On se limitera à l'étude du mouvement dans le domaine $x>0$.

1. Déterminer la coordonnée x_0 de la position d'équilibre de la particule.
2. Étudier la fonction $F(x)$ en construisant son tableau de variation pour $x \in]0,+\infty[$. Représenter graphiquement cette fonction en précisant ses caractéristiques remarquables.
3. Calculer l'énergie potentielle E_p associée à la force globale $F(x)$, sachant que $E_p = \sqrt{ka}$ quand $x=x_0$.
4. Étudier l'évolution de E_p quand $x \in]0,+\infty[$ et représenter graphiquement son allure en précisant les différentes caractéristiques de cette fonction.
5. On étudie le mouvement du point matériel au voisinage de sa position d'équilibre.
    a. Écrire l'expression de l'énergie mécanique E_m de la particule en un point quelconque. Que peut-on dire de cette énergie compte tenu des propriétés de la force $F(x)$?
    b. Montrer que l'on doit avoir $E_m > \sqrt{ka}$. Pour que le mouvement de la particule soit possible.
    c. Montrer que l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre s'écrit :
    $$E_p(x) \approx \sqrt{ka} + 2k(x-x_0)^2.$$
    d. En déduire le mouvement de la masse m autour de sa position d'équilibre.

c. Montrer que l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre s'écrit :

$$E_p(x) \approx \sqrt{ka} + 2k(x - x_0)^2.$$

d. En déduire le mouvement de la masse m autour de sa position d'équilibre.

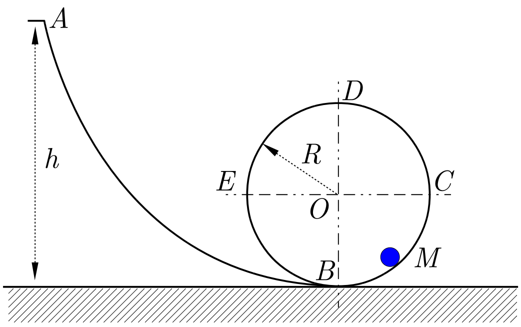
9.4 Vitesse de libération d'un vaisseau spatial

Nous proposons dans ce problème d'étudier le vol d'une navette spatiale de masse $m = 2$ tonnes partant de la Terre. La Terre est ici une sphère homogène supposée isolée et immobile dans le référentiel galiléen. Le vaisseau spatial est propulsé vers le haut avec une vitesse initiale, verticale et ascendante v_0. On néglige les frottements de l'air.

1. Rappeler l'expressionde g avec l'altitude z, mesurée depuis la surface de la Terre. En déduire la relation entre g, g_0, z et le rayon terrestre R_T .
2. Ecrire l'énergie potentielle E_p associée au poids de la navette en fonction de R_T, z, m et g_0 .
3. Appliquer le théorème de conservation de l'énergie mécanique E_m au système {navette + Terre}.
   Etablir l'expression de la vitesse de la navette en fonction de z .
   On posera dans la formule obtenue : $v_e^2 = 2g_0R_T$. Pourquoi appelle-t-on v_e « vitesse de libération » de la navette spatiale ?

9.5 Looping

Un objet M de masse m, que l'on assimilera à un point matériel, glisse sans frottement sur un rail $ABCDE$, formant une boucle verticale $BCDE$ de rayon R. À l'instant initial, M est lâché sans vitesse initiale du point A, à l'altitude h au dessus du sol.



1. À l'aide du Théorème de l'Énergie Cinétique, déterminer la vitesse v de M en fonction de $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$. En déduire les valeurs de cette vitesse aux points B, C et D.
2. Calculer par le PFD la valeur des réactions exercées par le rail sur M en ces points.
3. Déterminer l'altitude minimale h_m de laquelle doit être lâché M pour qu'il fasse un tour complet de la boucle $BCDE$.
4. Si $h < h_m$, M quittera le rail entre C et D . Déterminer la position de M_f occupée sur le rail par M lorsque, dans ces conditions, il quitte le rail. Quel est alors le mouvement de M à partir de cet instant ?

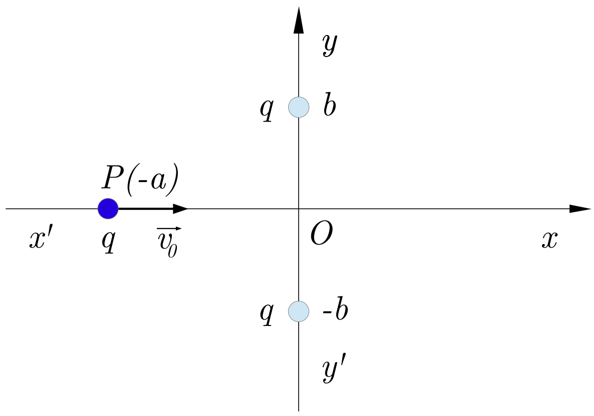
TD 10 Energie, Travail & Puissance (3)

10.1 Barrière et puits de potentiel

1. Rappeler l'expression vectorielle générale de la force électrostatique existant entre deux particules chargées quelconques q_1 et q_2 séparées d'une distance r. Faire un schéma clair en indiquant le vecteur unitaire utilisé.
2. Calculer l'énergie potentielle Ep en fonction de la distance r entre les charges q_1 et q_2, en précisant l'origine choisie pour Ep. Représenter sur un même graphe l'allure de Ep dans le cas de charges de mêmes signes, et dans le cas de charges de signes contraires.

Application

On considère une particule P, de masse m et de charge q positive, lancée suivant l'axe $\overrightarrow{Ox}$ horizontal avec une vitesse initiale v_0 à partir du point d'abscisse $-a$ ($a>0$ supposé très grand). Celle-ci est progressivement soumise à l'action de deux autres charges ponctuelles identiques, de charge q, situées sur l'axe $\overrightarrow{Oy}$ aux coordonnées $+b$ et $-b$. Ces charges restent immobiles à chaque instant tandis que P est astreint, par un système de guidage, à se déplacer uniquement sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$. Aucun frottement ne s'exerce sur P au cours de son mouvement.

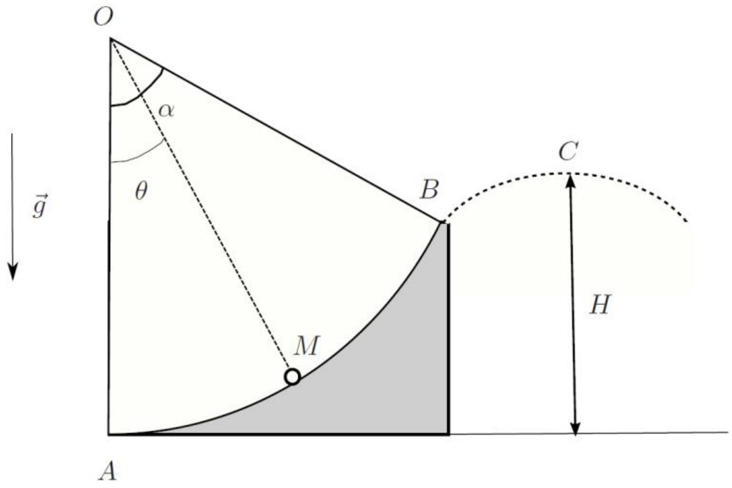


3. Calculer l'énergie potentielle à un instant donné en fonction de la position x du mobile P et des données du problème. En déduire une expression instantanée de l'énergie mécanique. Comment évolue cette énergie au cours du temps ?
4. Représenter schématiquement l'évolution des énergies potentielle et mécanique en fonction de la position x de P. Montrer que pour passer dans les valeurs positives de x, la particule P doit franchir une barrière de potentiel. Calculer la vitesse initiale minimale v_{0min} qu'il faut donner à la particule pour que cela soit possible.
5. On lance à présent une particule P de charge $-q$ de manière analogue à l'expérience précédente.
    a. En raisonnant sur un diagramme d'énergie potentielle, montrer que l'on obtient une cuvette d'énergie potentielle qui tend à piéger P autour d'une position que l'on précisera.
    b. Calculer la vitesse de libération v'_{0min} de P, vitesse permettant à P de sortir du puits de potentiel.
    c. Existe-t-il une position d'équilibre stable ? Si on autorisait un déplacement vertical de la particule, cet équilibre resterait-il stable ?

10.2 Tremplin

10.2 Tremplin

Une masse ponctuelle *m* au point *M* glisse sur un tremplin en forme d'arc de cercle de centre *O* et de rayon *a*. A l'instant initial, le point *M* est en *A* ($\theta = 0$) et avec une vitesse horizontale v_0. Le mouvement du point *M* sur le tremplin est repéré par l'angle θ. Le tremplin se termine au point *B* (d'angle α). Au-delà du point *B* la masse *m* n'est soumise qu'à son propre poids et atteint le point *C* correspondant à la hauteur maximale *H*.
Dans un premier temps on néglige les frottements.



1. Donnez la vitesse du point *M* sur le tremplin en fonction de l'angle θ.
2. Donnez l'expression de la réaction du tremplin au point *M*, en fonction de θ.
3. Quelle vitesse minimale v_{0min} faut-il pour passer le point *B* ?
4. Dans le cas $v_0 > v_{0min}$ quelle est la hauteur maximale atteinte *H* ?

Dans un deuxième temps on tient compte des frottements solides donnés par la loi de Coulomb. On suppose que la vitesse initiale est suffisamment grande pour que le point *M* arrive jusqu'à *B*.

5. Calculez le travail des forces de frottements sur le tremplin entre *A* et *B*. Pour cela on fera l'hypothèse que l'expression de la réaction donnée à la question 2. reste valable.
6. En utilisant 5., calculez la vitesse au point *B*. en déduire la vitesse minimale pour que le point *M* arrive en *B*.

TD 11 Oscillations libres (1)

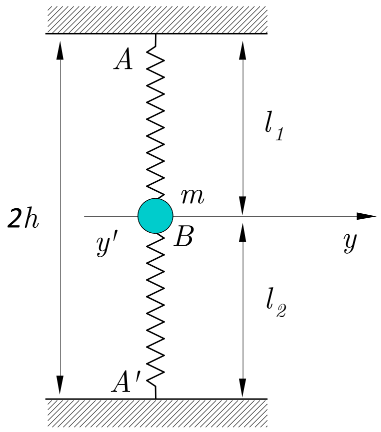
11.1 Oscillations d'un cube flottant dans un liquide

D'après le principe d'Archimède, tout corps partiellement ou entièrement plongé dans un fluide subit une force verticale, vers le haut, d'intensité égale au poids du volume d'eau déplacé.

1. Un cube de masse m et de côté b flotte sans pencher dans un fluide de masse volumique ρ. Quelle est la hauteur immergée h_0 du cube ?
2. Quelle est la force totale exercée sur ce cube quand il est immergé d'une hauteur h ?
3. Quelle est la période d'oscillations du cube quand il oscille de haut en bas ?

11.2 Oscillation d'une masse maintenue par deux ressorts

Un point matériel M de masse m = 10 g est relié à deux ressorts identiques, de raideur k = 15 N/m, de longueur à vide l_0 = 30 cm, de masse négligeable, placés verticalement. Les extrémités A et A' des ressorts sont fixés à des points fixes et distants de 2h, avec $h > l_0$. À l'équilibre on désignera par l_1 longueur du ressort AB et par l_2 celle du ressort A'B.



1. À l'équilibre, calculer les longueurs l_1 et l_2 des ressorts en fonction de m, g, h et k. Que peut-on dire si l'on suppose le poids mg très petit devant 2hk ?
2. Un dispositif convenable assure le guidage de la masse m suivant l'axe horizontal $y'y$. Tous les frottements seront négligés et on suppose que l'on peut faire l'approximation $l_1 \approx l_2 \approx h$. On déplace horizontalement la masse m de y_0 à partir de la position d'équilibre et on lâche le système sans vitesse initiale. Établir l'équation différentielle du mouvement.

Dans le cas où $y_0 << h$, simplifier cette dernière expression et en déduire l'expression de la période du mouvement.

11.3 Dynamique et équilibre

On reprend l'exercice 7.3.

1. Exprimer l'énergie potentielle du sytème
2. Déterminer la ou les position(s) d'équilibre du point *M*.
3. Indiquer si ces positions sont stables ou non.
4. Établir l'équation du mouvement autour de la position d'équilibre stable.
5. Donnez la solution générale dans le cas d'une vitesse nulle à l'instant initial.

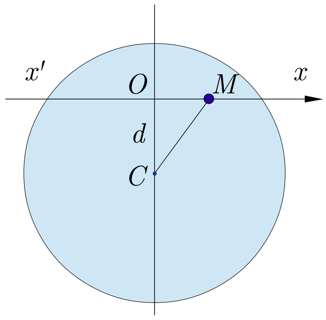
TD 12 Oscillations libres (2)

12.1 Oscillation d'un point matériel dans un tunnel

On démontre que pour tout point matériel M, de masse m, situé à l'intérieur de la Terre supposée sphère parfaite de masse M_T, à la distance r du centre C de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la Terre et de valeur :

$$\vec{F}(r) = -mg_0 \frac{\vec{r}}{R}$$

où R est le rayon de la Terre et $\vec{r} = \overrightarrow{CM}$. On négligera les effets de la rotation terrestre.



1. Quelle est l'énergie de pesanteur de la masse m à la distence r de C, en choisissant comme référence d'altitude le centre de la Terre ?
2. On considère un tunnel rectiligne ne passant pas C et traversant la Terre : la distance du tunnel au centre de la Terre est $d = OC$. La masse m s'y déplace sans frottement. Déterminer la nature du mouvement de cette masse dans le tunnel si elle est abandonnée sans vitesse initiale à la surface de la Terre.
3. Calculer la vitesse maximale atteinte par M. On donne : g_0 = 10 m/s^2, R = 6,4 10^6 m, d = 5 10^6 m.

12.2 Oscillation d'un système

On considère un stsème dans lequel les points matériels *M* et *P* ont respectivement une masse m_M et m_P. Le point matériel *M* est attaché à un fil inextensible qui s'enroule sur une poulie de rayon *R* lorsque celle-ci tourne. La poulie est de masse négligeable et aucun frottement ne dissipe d'énergie dans les liaisons. La position de *P* est repérée par l'angle θ.

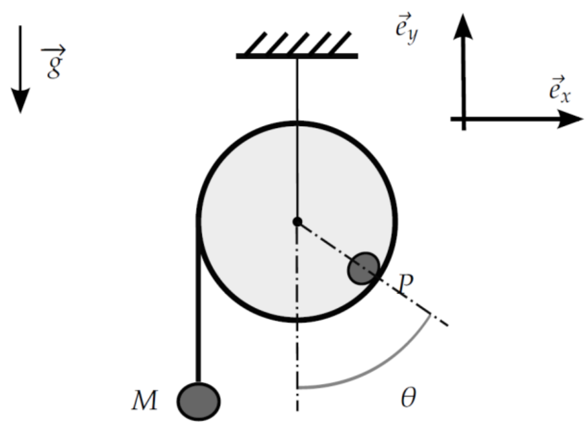
1. Étudier les positions d'équilibre du système et discuter leur stabilité.
2. On s'intéresse aux petites oscillations autour de la position d'équilibre stable (notée θ_E).

Donner l'équation différentielle qui régit ces petites oscillations. Donner la forme générale de ces petites oscillations.

À présent, la masse *M* baigne dans un bain fluide qui exerce une force visqueuse sur *M* telle que :

$$\vec{F} = -\alpha.\overrightarrow{v(M)}$$

3. Que devient l'équation régissant les petites oscillations. Étudier le mouvement sachant que le système est lâché sans vitesse initiale en θ_E+ θ_0 en fonction des valeurs des constantes du problème.



Données physiques générales

Constantes universelles

Quantité	Symbole	Valeur
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$2.99792458 \times 10^8 \mathrm{ms}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	μ_0	$4\pi.10^{-7} = 1.25664 \times 10^{-6} \mathrm{H.m}^{-1}$
Permittivité électrique du vide	ϵ_0	$8.854187817 \times 10^{-12} \mathrm{Fm}^{-1}$
Constante de gravitation	G	$6.67259 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6.6260755 \times 10^{-34} \mathrm{Js}$

Données atomiques et électroniques

Quantité	Symbole	Valeur
Charge électronique	e	$1.60217733 \times 10^{-19} \mathrm{C}$
Masse de l'électron	m_e	$9.1093897 \times 10^{-31} \mathrm{kg}$
Masse du proton	m_p	$1.6726231 \times 10^{-27} \mathrm{kg}$
Rapport des masses électron-proton	m_e/m_p	$5.44617013 \times 10^{-4}$
Masse du neutron	m_n	$1.6749286 \times 10^{-27} \mathrm{kg}$
Rapport des masses neutron-électron	m_n/m_e	1838.683662
Rapport des masses neutron-proton	m_n/m_p	1.001378404

Le système solaire

Système soleil-terre-lune

Rayon de la terre $R_\oplus$	$6.376.10^6 \mathrm{m}$
Rayon du soleil R_S	$109.2 R_\oplus$
Rayon de la lune R_L	$0.27.R_\oplus$
Masse de la terre $M_\oplus$	$5.98.10^{24} \mathrm{kg}$
Masse du soleil M_S	$322.10^3 M_\oplus$
Masse de la lune M_L	$\frac{1}{81} M_\oplus$
Période de révolution propre du soleil	25.37 jours
Période de révolution propre de la terre	0.997 jour
Période de révolution propre de la lune	27.32 jours
Période de révolution de la terre autour du soleil	365.26 jours
Période de révolution de la lune autour de la terre	27.32 jours
Distance terre-lune	$60.3 R_\oplus$
Distance terre-soleil $D_\oplus$	$1.5.10^{11} \mathrm{m}$