Exercices de Mécanique

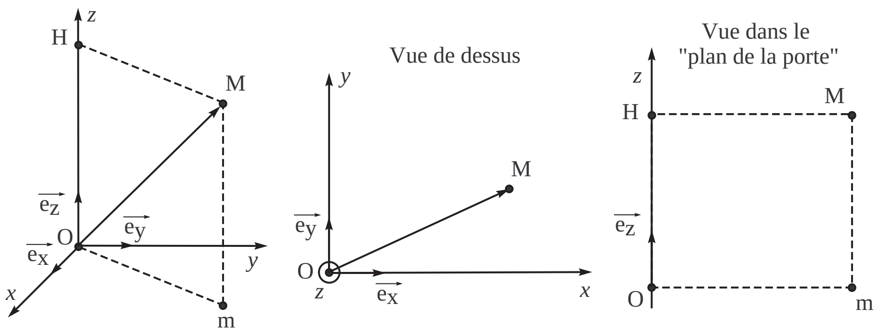
■ Cinématique : repères, bases, trajectoires et mouvements

> ❏ **Méthode 1.—** Une base locale (comme la base cylindrique) est définie :
> - en un point M de l'espace (« localement », donc !)
> - par rapport à trois directions orthogonale fixes du repère cartésien dans lequel on travaille.
>
> ➜ Il faudra donc **toujours** représenter **en premier** le repère cartésien (une origine O, trois axes Ox, Oy et Oz qui doivent être *orientés par une flèche*, et les trois vecteur unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$ correspondants) **avant** de dessiner la base locale au point M.

Ex-M1.1 Base locale cylindrique

Recopier les trois schémas suivants. Y faire apparaître les trois vecteurs de la base cylindrique et les coordonnées cylindriques correspondante. Exprimer, dans cette base locale,le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ et le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$. **Rép. :** cf. p. 5.

> **Retenir :**
> Dès la 1e période, nous avons absolument besoin de **la base cylindrique**
> ➜ donc :
> la comprendre et bien l'étudier dès à présent.



Ex-M1.2 Mouvement circulaire uniforme :

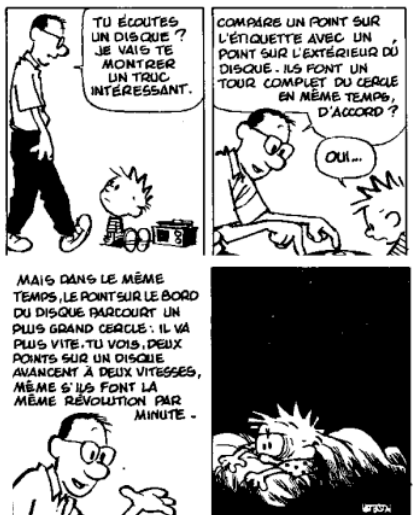
Un « disque vynile 33 tr », placé sur la platine du tourne-disque, effectue un mouvement de rotation uniforme à raison de 33 tours par minute. Calculer :

1) sa vitesse angulaire de rotation, sa période et sa fréquence ;

2) la vitesse et les accélérations (normale, tangentielle et totale) d'un point M à la périphérie du disque (rayon $R = 15\,cm$).

3) même question pour un point M' tournant à $r = 5cm$ du centre du disque.

Rép. : 1) $\omega = 3,5\ rad.s^{-1}$; $f = 0,55\ Hz$; $T = 1,8\ s$.
2) $v = 0,52\ m.s^{-1}$; $a_n = 1,8\ m.s^{-2}$; $a_t = 0$; $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.
3) $v' = 0,17\ m.s^{-1}$; $a'_n = 0,6\ m.s^{-2}$; $a'_t = 0$; $a' = a'_n$.



> **Conclusion :**
> S'il y a une chose à retenir de cet exercice, c'est que l'accélération d'un mouvement uniforme n'est **pas** nulle si la trajectoire n'est **pas** une droite.
> *Autrement dit :*
> Seul le mouvement *rectiligne* uniforme possède une accélération nulle.

Ex-M1.3 Centrifugeuse

Au cours de leur entraînement, les cosmonautes sont placés sur un siège fixé à l'extrémité d'un bras de longueur l, en rotation de vitesse angulaire ω constante.

Calculer ω en tours par minute, si $l = 5\ m$ et si l'accélération obtenue a pour valeur $6g$. ($g = 9,81\ m.s^{-2}$)

Rép. : $\omega \simeq 3,43\ rad.s^{-1}$

Ex-M1.4 Q.C.M. sur l'accélération :
Pour chacune des questions, indiquer les propositions exactes :
1) Le vecteur accélération d'un point M :
a) est égal à la variation de la vitesse par unité de temps ;
b) est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse instantanée ;
c) possède, lorsqu'on l'exprime dans une base orthonormée, des coordonnées obtenues en dérivant les coordonnées correspondantes du vecteur vitesse.
2) Le vecteur accélération d'un point M en **mouvement rectiligne accéléré** est :
a) toujours porté par la trajectoire ;
b) de même sens que le vecteur vitesse ;
c) toujours de valeur constante.
3) Le vecteur accélération d'un point M se déplaçant sur une **trajectoire curviligne** est :
a) tangent à la trajectoire ;
b) dirigé vers l'intérieur de la trajectoire ;
c) nul si la vitesse de M est constante.
4) L'unité de mesure de l'accélération est : a) $m.s^2$ b) $m^2.s^2$ c) $m.s^{-2}$.
Rép. : cf. p. 4.

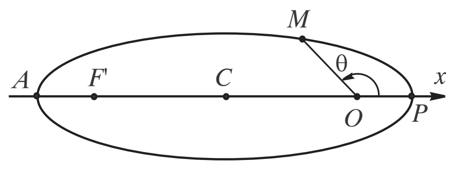
Ex-M1.5 Éléments cinétiques et base cartésienne [P9/255]
On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes sont, à chaque instant : $x(t) = a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v.t$ et $z(t) = z_0$, avec $x_0 = 1\ m$, $z_0 = -1\ m$, $a_0 = 2\ m.s^{-2}$ et $v = 3\ m.s^{-1}$
1) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne.
2) Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 2\ s$.
3) Calculer la norme de l'accélération de M à la date $t = 1\ s$.

Rép. : 2) $v(2\ s) = 8,5\ m.s^{-1}$; **3)** $a(1\ s) = a = 4\ m.s^{-2}$

Ex-M1.6 Éléments cinétiques et base cylindrique [P9/255]
On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant : $r(t) = a_0t^2 + r_0$, $\theta(t) = \omega.t - \theta_0$ et $z(t) = -v.t$, avec $r_0 = 1\ m$, $a_0 = l\ m.s^{-2}$, $\omega = 3\ rad.s^{-1}$, $\theta_0 = 2\ rad$ et $v = 2\ m.s^{-1}$.
1) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.
2) Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 1\ s$.
3) Calculer la norme de l'accélération de M à l'instant initial ($t = 0$).

Rép. : 1) $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 2a_0t\overrightarrow{e_r} + \omega(a_0t^2 + r_0)\overrightarrow{e_\theta} - v\overrightarrow{e_z}$; $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = (2a_0 - (a_0t^2 + r_0)\omega^2)\overrightarrow{e_r} + 4a_0t\omega\overrightarrow{e_\theta}$;
2) $v(1\ s) = 6,6\ m.s^{-1}$; **3)** $a(0) = 7\ m.s^{-2}$

Ex-M1.7 Mouvement elliptique (➜ Cf Cours 2e Période)
L'équation polaire d'une ellipse avec origine au foyer est : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$
où p note le *paramètre* et e, l'*excentricité* de l'ellipse.



1) Pour un satellite, P est le *périgée* et A est l' *apogée*.
→ Déterminer les expressions de r_P et r_A.
2) Sachant que le mouvement est tel que $r^2\dot{\theta} = cste = C$, déterminer l'expression de $\overrightarrow{v}$ sur la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$. Cette expression sera donnée en fonction de la seule variable θ.
3) Déterminer $\overrightarrow{v}$ en $\theta = 0$, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$. Représenter, en chacun de ces points, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$. En quel point de la trajectoire la vitesse est-elle maximale ? minimale ?
Rép. : 2) $\overrightarrow{v} = C\left(\dfrac{e\sin\theta}{p}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1 + e\cos\theta}{p}\overrightarrow{e_\theta}\right)$; **3)** $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \dfrac{C^2}{p^2}(1 + e^2 + 2e\cos\theta)$.

Ex-M1.8 Relation vitesse-position :
Un mobile décrit la partie positive de l'axe (Ox) avec une vitesse de la valeur $v(t)$. La loi de vitesse $v(t)$ est liée à l'équation horaire $x(t)$ par la relation $x = av^2$, avec a une constante positive. Le point matériel quitte l'origine O de l'axe à l'instant $t = 0$.
Déterminer la loi horaire $x(t)$ sachant que $x(t)$ est une fonction croissante du temps.
Rép. : $x(t) = \dfrac{t^2}{4a}$.

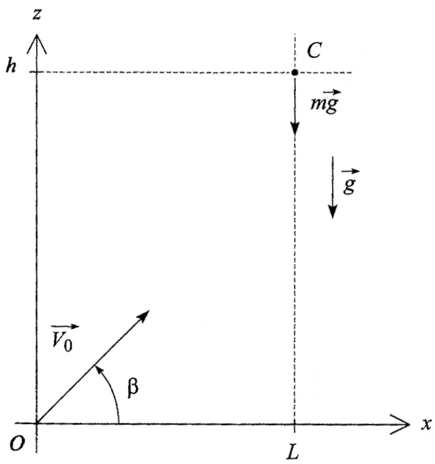
Ex-M1.9 Poursuite en mer
Deux navires se trouvent sur le même méridien, A étant au nord de B et à une distance d_0. A se dirige vers l'est à la vitesse v_A et B vers le nord à la vitesse v_B. La courbure de la surface terrestre est négligée et les vitesses sont constantes.
1) Déterminer la distance minimale entre A et B.
2) Quelle direction B doit-il prendre pour rattraper A avec un mouvement rectiligne uniforme ? Déterminer la durée de la poursuite.
Rép : 1) $d_{\min} = d_0\sqrt{\dfrac{v_A^2}{v_A^2+v_B^2}}$; **2)** $\tau = \dfrac{d_0}{\sqrt{v_B^2 - v_A^2}}$

Ex-M1.10 Oscillations rectilignes [P9/257]
Un point M est astreint à se déplacer sur un axe (Ox). À la date $t = 0$, il se trouve à la position $x = 10\ cm$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$ ($v_0 = 0,15\ m.^s{-1}$). Par la suite, il est à chaque instant soumis à une accélération définie par $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = -K\overrightarrow{OM}$ avec $K = 2,0$ unités SI.
1) Quelles sont les dimensions de la constante K ? En déduire son unité SI.
2) Établir l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de M sur cet axe.
3) Exprimer, puis calculer la période des oscillations de M.

Rép. : 2) $x(t) = x_0\cos(\sqrt{K}t) + \dfrac{v_0}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}t) = X_m\cos(\sqrt{K}t+\varphi)$ avec $X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\sqrt{K}}\right)^2} = 0,15\ m$ et $\varphi = -\arctan\left(\dfrac{v_0}{\sqrt{K}x_0}\right) = -0,81\ rad$; **3)** $T = 4,4\ s$

Ex-M1.11 Dépassement d'un autocar
Sur une route rectiligne Ox, une voiture (1) de longueur l_1 de vitesse v_1 double un autocar de longueur L et de vitesse V. En face arrive une voiture (2) de longueur l_2 à la vitesse v_2. Quelle distance minimum D entre l'avant de la voiture (1) et l'avant de la voiture (2) permet à la voiture (1) de doubler ? **A.N.** avec $l_1 = l_2 = 4\ m$, $L = 20\ m$, $v_= v_2 = 90\ km.h^{-1}$ et $V = 72\ km.h^{-1}$.
Rép. : cf. p. 6

Ex-M1.12 Tir au pigeon d'argile [P8/119]
Une cible C est abandonnée sans vitesse initiale d'une hauteur h à l'abscisse $x = L$. Au même instant, un projectile P est tiré depuis l'origine avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle β avec l'horizontale.



On admet que l'accélération d'un corps en chute libre est égale à $\vec{g}$ à chaque instant.
Calculer l'angle β pour que le projectile atteigne sa cible. Quelle est la date t_1 à laquelle la cible est alors atteinte ?
Rép. : $\tan\beta = \dfrac{h}{L}$ et $t_1 = \dfrac{L}{v_0\cos\beta}$

Ex-M1.13 Freinage d'urgence [P9/256]
Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 90\ km.h^{-1}$ sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme $a = 4,2\ m.s^{-2}$. Calculer la durée t_1 et la distance D de freinage.
Rép. : $t_1 = 6\ s$ et $D = 74\ m$

Ex-M1.14 **Spirale et base polaire**

Un point matériel M parcourt avec une vitesse de norme constante v la spirale d'équation polaire : $r = a\theta$. Exprimer en fonction de θ et de v le vecteur vitesse de M dans la base polaire.

Rép. : $\overrightarrow{v} = \dfrac{v}{\sqrt{1+\theta^2}}(\overrightarrow{e_r} + \theta\overrightarrow{e_\theta})$.

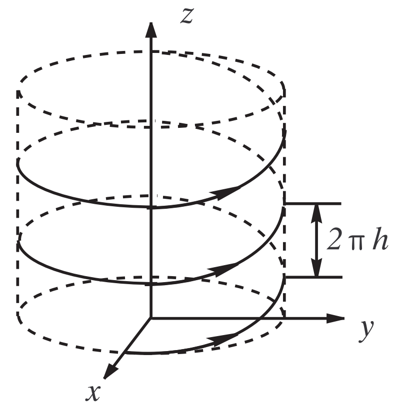
Ex-M1.15 **Vitesse moyenne et vitesse maximale**

Un automobiliste parcourt une distance $d = 1,25\ km$ sur une route rectiligne. Son mouvement est uniformément accéléré, puis uniforme, puis uniformément retardé. L'accélération a est égale en valeur absolue à 0 $m.s^{-2}$ ou à $2,5\ m.s^{-2}$ et la vitesse moyenne vaut 75 $km.h^{-1}$.
Déterminer la vitesse maximale de l'automobiliste.

Rép : $v_{\max} = \dfrac{a.d}{2v_{\text{moy}}} - \sqrt{\left(\dfrac{a.d}{2v_{\text{moy}}}\right)^2 - a.d} = 25\ m.s^{-1} = 90\ km.h^{-1}$

Ex-M1.16 **Mouvement hélicoïdal (*)**

Soit l'hélice droite définie en coordonnées cylindriques par les équations : $r = R$ et $z = h\theta$
et orientée dans le sens θ croissant (soit h cste>0).
L'origine de la trajectoire du point M est en $z = 0$.

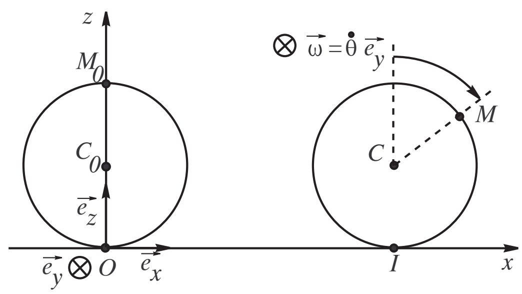


1) Déterminer les équations de l'hélice en coordonnées cartésiennes.

2) Le point M parcourt l'hélice à une vitesse constante v.
a) Déterminer les vecteurs vitesse et accélération en fonction de R, h et v.
b) Montrer que l'angle $\alpha = (\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{v})$ est constant.
En déduire l'hodographe du mouvement.

Ex-M1.17 **Mouvement cycloïdal (**)**

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur l'axe (Ox) à vitesse angulaire ω constante tout en restant dans le plan (Oxz). Soit M un point liée à la roue situé sur la circonférence. À l'instant $t = 0$, M se trouve en $M_0(x = 0,\ z = 2R)$. Les mouvements sont étudiés dans le référentiel Rassocié au repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.



1) Comment exprimer la condition « la roue ne glisse pas » ?

2) Déterminer les coordonnées x_C et z_C de C à l'instant t.

3) Même question pour M.

4) Étudier la trajectoire définie par le système d'équations paramétriques $(x(\theta), z(\theta))$ avec $\theta = \omega t$. La tracer pour $\theta \in$ [-4π ; 4π].

5) Calculer la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ du point M à l'instant t. Exprimer sa norme v en fonction de $\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$.
En déduire l'hodographe du mouvement.

6) Calculer l'accélération $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}$ du point M à l'instant t. Exprimer sa norme en fonction de R et v. Calculer numériquement cette norme de l'accélération dans le cas d'un point périphérique d'un pneu de voiture roulant à $130\,km.h^{-1}$ sur une autoroute ($R = 35\,cm$).

7) Déterminer $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ et $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}$ lorsque M est en contact avec l'axe (Ox).

Rép. : cf. p. 6.

Solution Ex-M1.4

1.b) (la réponse c) n'est vraie que lorsqu'on exprime l'accélération dans la base cartésienne ; elle est fausse si on travaille dans la base polaire)) ; **2.a)** ; **3.b)** ; **4.c)**

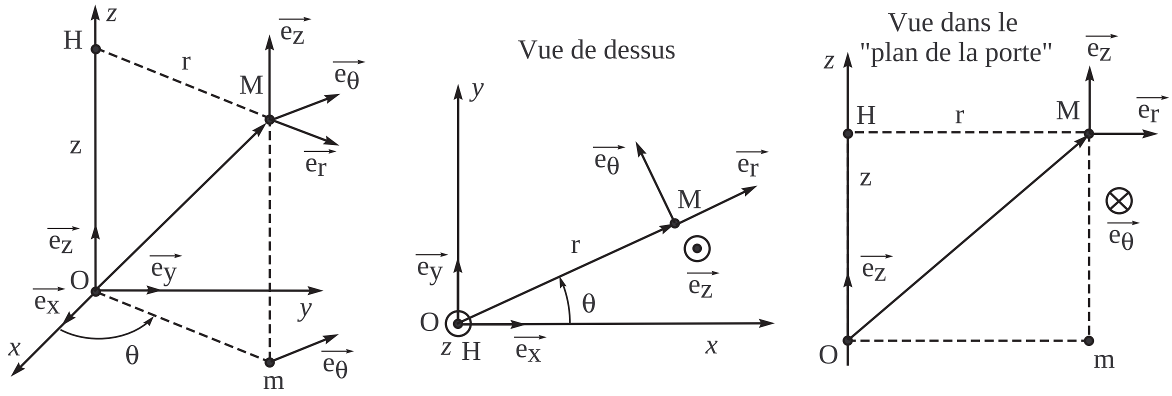
Solution Ex-M1.1

M a pour coordonnées (r, θ, z) dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O et de Base locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ (base « locale » = base définie en M) :

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$ $\quad$ $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ $\quad$ $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$

Rque : Une B.O.N.D. vérifie la « règle des trois doigts de la main droite » ➜ alors **vérifiez-le** avec la vôtre, de main droite !

$$\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z} \qquad \overrightarrow{e_\theta} \times \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}$$



Solution Ex-M1.3

Le mouvement est circulaire uniformément accéléré : la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ est constante et l'accélération est purement centripère : $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = -l\omega^2\overrightarrow{e_r}$, soit : $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{a}{l}} = \sqrt{\frac{6g}{l}} = 3,43\ rad.s^{-1}}$

Solution Ex-M1.5

1) $v_x = \dot{x} = 2a_0t$; $v_y = \dot{y} = -v$; $v_z = \dot{z} = 0$; soit : $\boxed{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 2a_0t\overrightarrow{e_x} - v\overrightarrow{e_y}}$ — $a_x = \ddot{x} = 2a_0$; $a_y = \ddot{y} = 0$; $a_z = \ddot{z} = 0$; soit : $\boxed{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 2a_0\overrightarrow{e_x}}$

2) $v(t) = \| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4a_0^2t^2 + v^2}$ soit, à $t = 2\ s$: $\boxed{v(2\ s) = 8,5\ m.s^{-1}}$

3) $a(t) = \| \overrightarrow{a} \| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 2a_0\ \forall t$ — soit, à $t = 1\ s$: $\boxed{a(1\ s) = a = 4\ m.s^{-2}}$

Solution Ex-M1.6

1) $v_r = \dot{r} = 2a_0t$; $v_\theta = r\dot{\theta} = (a_0t^2 + r_0)\omega$; $v_z = \dot{z} = -v$

soit : $\boxed{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 2a_0t\overrightarrow{e_r} + (a_0t^2 + r_0)\omega\overrightarrow{e_\theta} - v\overrightarrow{e_y}}$ — $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2a_0 - (a_0t^2 + r_0)\omega^2$; $a_\theta = r\cancel{\ddot{\theta}} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 4a_0\omega.t$; $a_z = \ddot{z} = 0$

soit : $\boxed{\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = (2a_0 - (a_0t^2 + r_0)\omega^2)\overrightarrow{e_r} + 4a_0\omega.t\overrightarrow{e_\theta}}$

2) $v(t) = \| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{4a_0^2t^2 + (a_0t^2 + r_0)^2\omega^2}$ soit, à $t = 1\ s$: $\boxed{v(1\ s) = 6,6\ m.s^{-1}}$

3) $a(t) = \| \overrightarrow{a} \| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2} = \sqrt{(2a_0 - (a_0t^2 + r_0)\omega^2)^2 + (4a_0\omega.t)^2}$ soit, à $t = 0\ s$: $\boxed{a(0) = |2a_0 - r_0\omega^2| = 7\ m.s^{-2}}$

Solution Ex-M1.10

1) $[K] = \dfrac{[\text{accélération}]}{[OM]} = \dfrac{L.T^{-2}}{L} = T^{-2}$, donc $\boxed{u(K) = s^{-2}}$

2) $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = -K\overrightarrow{OM}$ projetée selon $\overrightarrow{e_x}$: $\ddot{x} = -Kx$ soit : $\ddot{x} + Kx = 0$. On reconnaît une équation différentielle de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2x = 0$ (avec $\omega_0 = \sqrt{K}$) de solution : $x(t) = A\cos(\omega_0t) + B\sin(\omega_0t)$.
La vitesse s'écrit donc : $v_x = \dot{x} = -A\omega_0\sin(\omega_0t) + B\omega_0\cos(\omega_0t)$.

Les conditions initiales donnent : $\begin{array}{l} x(0) = A = x_0 \\ v(0) = B\omega_0 = v_0 \end{array} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos(\sqrt{K}t) + \dfrac{v_0}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}t)}$

On peut aussi écrire $\boxed{x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$.
La vitesse s'écrit donc : $v_x = \dot{x} = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

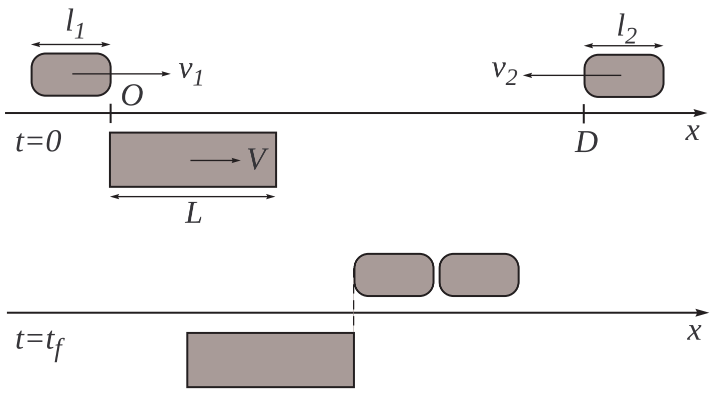
$$\begin{array}{l} x(0) = X_m \cos\varphi = x_0 \\ v(0) = -X_m\omega_0 \sin\varphi = v_0 \end{array} \quad \boxed{X_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{K}} = 0,15\ m \ \ \varphi = -\arctan\left(\frac{v_0}{x_0\sqrt{K}}\right) = -0,81\ rad}$$

3) Par définition de la période d'un mouvement de pulsation ω_0 : $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

soit : $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{K}} = 4,4\ s}$

Solution Ex-M1.11

Il est nécessaire de faire deux schémas de l'axe Ox où, sur le premier, on fait apparaître les positions des trois véhicules au début du dépassement (l'origine O étant l'avant de la voiture (1) coïncidant, à $t = 0$, avec l'arrière du bus qu'elle dépasse) et où, sur le second, on représente les positions des véhicules à la fin du dépassement dans la situation la plus critique, la voiture (1) se rabattant *in extremis*.



En utilisant les propriétés du mouvement rectiligne uniforme, on écrit les équations horaires des différents points : on note x_1 les abscisses relatives à la voiture qui double, x_2 celles relatives à la voiture qui arrive en face et X celle relatives au bus. On note l'indice AV pour l'avant d'un véhicule et AR pour l'arrière de ce véhicule.

$$\begin{cases} x_{1,AV} &= v_1 t \\ x_{1,AR} &= v_1 t - l_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_{AV} &= Vt + L \\ X_{AR} &= Vt \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{2,AV} &= -v_2 t + D \\ x_{2,AR} &= -v_2 t + D + l_2 \end{cases}$$

À la date t_f de la fin du dépassement, l'accident sera évité si :

$$\begin{cases} x_{1,AR} &= X_{AV} \\ x_{1,AV} &< x_{2,AV} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 t_f - l_1 &= V t_f + L \\ v_1 t &< -v_2 t + D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{t_f = \dfrac{L + l_1}{v_1 - V}} \\ \boxed{D > \dfrac{v_1 + v_2}{v_1 - V}(L + l_1) = 240\ m} \end{cases}$$

Solution Ex-M1.17

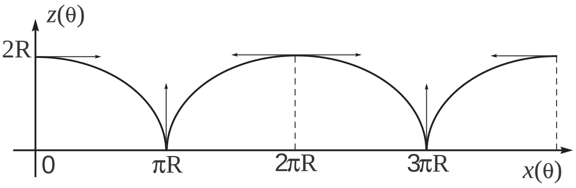
1) Condition de roulement sans glissement : $C_0C = \widehat{OI} \iff vt = R\theta \iff v = R\dot{\theta} \equiv R\omega$.

2) $\boxed{\overrightarrow{OC} \begin{cases} x_C = R\theta = R\omega t \\ z_C = R \end{cases}}$ **3)** $\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \begin{cases} x_C = R\,(\theta + \sin\theta) = R\,(\omega t + \sin\omega t) \\ z_C = R\,(1 + \cos\theta) = R\,(1 + \cos\omega t) \end{cases}}$

4) $z(\theta)$ est une fonction périodique paire de période 2π et $x(\theta + 2\pi) = x(\theta) + 2\pi R$: il suffit donc d'étudier x et z sur $\theta \in [0, 2\pi]$. Le reste de la courbe se déduisant par translation de $2\pi R$ selon (Ox) et par symétrie par rapport à Oz si on veut tracer $M(x(\theta), z(\theta))$ sur $\theta \in [-4\pi, 4\pi]$.
On étudie d'abord
$$\begin{cases} x'(\theta) = R(1 + \cos\theta) \\ z'(\theta) = -R\sin\theta \end{cases}$$

θ	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$x'(\theta)$	2R	+	R	+	0	+	R	+	
$x(\theta)$	0	↗	$R(1+\pi/2)$	↗	πR	↗	$R(3\pi/2-1)$	↗	$2\pi R$
$z'(\theta)$	0	−	$-R$	−	0	+	R	+	0
$z(\theta)$	2R	↘	R	↘	0	↗	R	↗	2R

On pose $\epsilon = \theta - \pi$ pour étudier la tangente à la courbe au point de paramètre $\theta = \pi$.
Le cœfficient directeur de la tangente à la courbe est : $p = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{z'(\theta)}{x'(\theta)}$

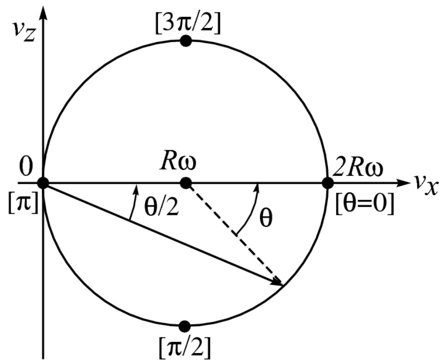


$$p = \frac{-R\sin(\pi+\epsilon)}{R(1+\cos(\pi+\epsilon))} = \frac{\sin\epsilon}{1-\cos\epsilon}$$

$\rightarrow$ Donc $p(\theta=\pi) = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\dfrac{\sin\epsilon}{1-\cos\epsilon} \simeq \dfrac{\epsilon}{\epsilon^2/2} = \dfrac{2}{\epsilon} \longrightarrow \infty$: la tangente en $\theta = \pi\ [2\pi]$ est verticale : on dit que la courbe présente un point de rebroussement en $\theta = \pi$.

5) $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = \left|\begin{array}{l}\dot{x} = \\ \dot{z}\end{array}\right| \begin{array}{l}R\omega\,(1+\cos\omega t) = \\ -R\omega\sin\omega t\end{array} \left|\begin{array}{l}R\omega\,(1+\cos\theta) \\ -R\omega\sin\theta\end{array}\right.$

Cl : L'hodographe du mouvement est donc un cercle de centre $(R\omega, 0)$ et de rayon $v = R\omega$.



De plus :

$$v_M^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = R^2\omega^2.2(1+\cos\omega t) = 4R^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$\rightarrow$ $\boxed{v_M = 2R\omega|\cos\frac{\theta}{2}|}$

6) $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = \left|\begin{array}{l}-R\omega^2\sin\omega t \\ -R\omega^2\cos\omega t\end{array}\right. = -\omega^2 \left|\begin{array}{l}R\sin\theta \\ R\cos\theta\end{array}\right.$

$\rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = -\omega^2\overrightarrow{CM}}$

Soit : $a = \omega v = \dfrac{v^2}{R}$; A. N. : $a \approx 3,7.10^3 m.s^{-2}$.

7) Pour $\theta = \pi$: $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = R\omega^2\,\overrightarrow{e_z}$.

➜ Complément : Base sphérique

Coordonnées sphériques

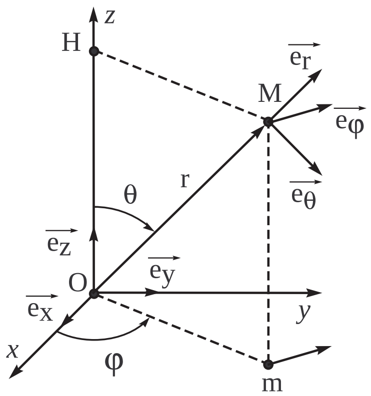
r	distance entre O et M	$r \in [0; +\infty[$
θ	angle entre $\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{OM}$	$\theta \in [0, \pi]$
φ	angle entre $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{Om}$	$\varphi \in [0, 2\pi[$

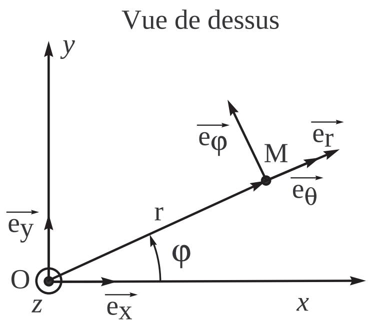
base sphérique

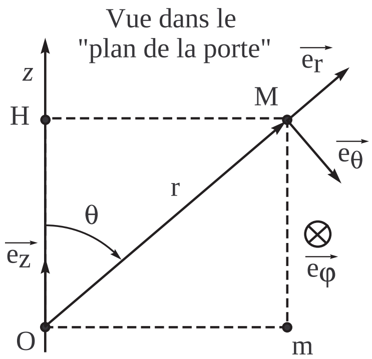
$\overrightarrow{e_r}$	prolongement unitaire de $\overrightarrow{OM}$
$\overrightarrow{e_\theta}$	v. unitaire du « plan de la porte » et $\perp \overrightarrow{e_r}$
$\overrightarrow{e_\varphi}$	v. unitaire $\perp$ au « plan de la porte »

Rq : Une B.O.N.D. vérifie la « règle des trois doigts de la main droite » **➜ à vérifier** !

$$\boxed{\overrightarrow{e_r}\times\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\varphi} \qquad \overrightarrow{e_\theta}\times\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{e_\varphi}\times\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}}$$







M a pour coordonnées (r, θ, φ) dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O et de Base locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ (base « locale » = base définie en M) :

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ $\qquad$ $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$ $\qquad$ $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_z}$

Sources :

[P1] Dominique Meier (dir.), *Toute la Physique Chimie MPSI PTSI*, Ellipses, 2003.
[P2] Jérôme Perez, *Physique MPSI PCSI PTSI*, Cap Prépa, Pearson Education, 2009 .
[P3] Olivier Fiat, *Toute la physique de Sup MPSI PCSI PTSI*, Belin, 2004.
[P4] Pierre Grécias, Jean-Pierre Migeon, *Physique MPSI PCSI*, Méthodes et Annales, Tec&Doc, Lavoisier, 2009.
[P5] Laurent Desmottes, *La physique simplement MPSI PCSI PTSI BCPST*, Nathan, 2009.
[P6] Julien Barthes, *Physique MPSI PCSI PTSI*, Les recettes de Sup, Ellipses, 2008.
[P7] Cyriaque Cholet, *Physique-Chimie MPSI PCSI PTSI*, Interros des prépas, Nathan, 2005.
[P8] Thibaut Cousin, Hervé Perodeau, *Physique Cours compagnon PCSI*, J'intègre, Dunod, 2009.
[P9] Thierry Finot (dir.), *Physique Chimie PTSI*, Prépas Sciences, Ellipses, 2009.