COURBE DE LORENTZ ET INDICE DE GINI

BAC-2003 France Métropolitaine

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie sur $[0; 1]$;
- L est croissante sur $[0; 1]$;
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
- pour tout x de $[0; 1]$, $L(x) \leq x$.

<u>PARTIE A :</u> les parties I et II sont indépendantes.
Le but de la partie A est de vérifier que les fonctions f et g considérées satisfont aux conditions énoncées ci-dessus.

I. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1$.

1) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f sur $[0; 1]$.

2) Déterminer le signe de $x - f(x)$ sur $[0; 1]$.

3) Conclure.

II. 1) Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $(x) = e^x - (e - 2)x - 1$.

a) Calculer$g'(x)$. En déduire le sens de variation de g sur $[0; 1]$.

b) Calculer $g(0)$ et (1) .

2) Soit h la fonction définie sur $[0; 1]$ par$h(x) = -e^x + (e - 1)x + 1$.

a) Le tableau suivant donne le signe de la dérivée de h (que l'on ne demande pas de calculer).

x	0		$\ln(e-1)$		1
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	

Dresser le tableau de variation de h ; on précisera l'arrondi à 0,1 de $h(\ln(e - 1))$.

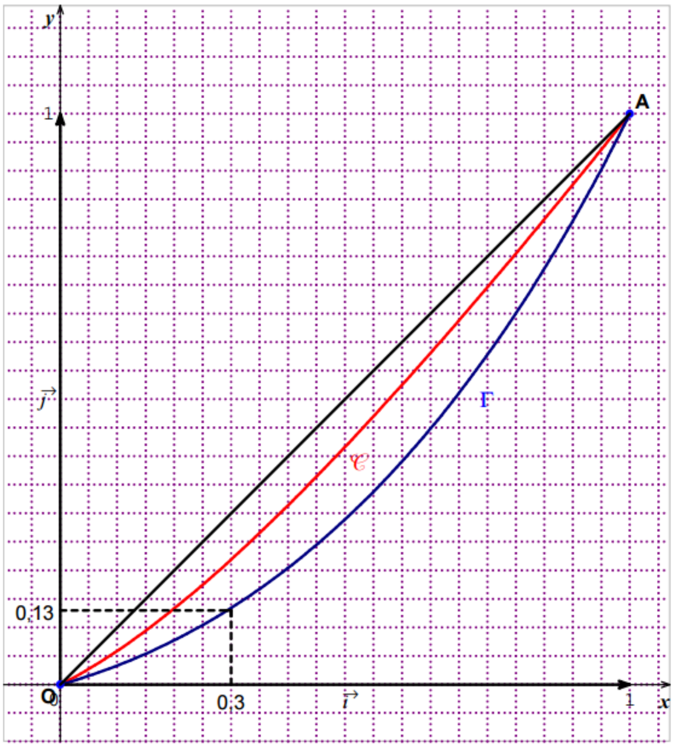
b) Vérifier que pour tout x de $[0; 1]$, on a :$h(x) = x - g(x)$.

À l'aide de II. 2) a), montrer que pour tout x de $[0; 1]$, on a $g(x) \leq x$.

3) Conclure.

PARTIE B

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes respectives $\mathscr{C}$ et Γ des fonctions f et g, et le segment [OA] où A est le point de coordonnées $(1;1)$.



1) On suppose que la courbe de Lorenz Γ illustre la répartition des surfaces des exploitations agricoles d'un pays G.

En abscisse, x représente le pourcentage du nombre des exploitations les plus petites par rapport au nombre total des exploitations du pays.

En ordonnées, $g(x)$ représente le pourcentage total des superficies de ces exploitations.

Par exemple, comme l'arrondi de $g(0{,}3)$ à 10^{-2} est 0,13 , on dit que 30% des exploitations les plus petites représentent au total 13% de la superficie des exploitations du pays G.

Donner la valeur arrondie à 0,01 de $g(0{,}5)$. Interpréter ce résultat.

2) On appelle coefficient de Gini pour le pays G, le nombre $2\mathscr{A}$ où $\mathscr{A}$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par le segment [OA] et la courbe Γ . On le note γ_G.

a) Exprimer cette aire $\mathscr{A}$ à l'aide d'une intégrale. Déterminer la valeur exacte de cette aire.

b) Donner la valeur arrondie à 0,01 de cette aire.

3) La représentation graphique $\mathscr{C}$ de f est la courbe de Lorenz pour un pays F. Calculer γ_F le coefficient de Gini pour le pays F.

En donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,01.

4) Plus le coefficient de Gini est petit, plus la répartition des exploitations est égalitaire.

a) Quel est le pays pour lequel la répartition est la plus égalitaire ?

b) Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ? Pourquoi ?

CORRECTION

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- **L est définie sur $[0;1]$;**
- **L est croissante sur $[0;1]$;**
- **$L(0)=0$ et $L(1)=1$;**
- **pour tout x de $[0;1]$, $L(x)\leq x$.**

<u>PARTIE A :</u> les parties I et II sont indépendantes.
Le but de la partie A est de vérifier que les fonctions f et g considérées satisfont aux conditions énoncées ci-dessus.

I. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{x+1}-1$.

1) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f sur $[0;1]$.

On a $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{x+1}-1$.

Donc $f=u+\frac{1}{v}$ avec $u(x)=\frac{3}{2}x$ $\quad u'(x)=\frac{3}{2}$
$v(x)=x+1$ $\quad v'(x)=1$

Et $f'=u'-\frac{v'}{v^2}$

D'où $f'(x)=\frac{3}{2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{3(x+1)^2}{2(x+1)^2}-\frac{2}{2(x+1)^2}=\frac{3(x+1)^2-2}{2\,(x+1)^2}=\frac{3\,(x^2+2x+1)-2}{2\,(x+1)^2}=\frac{3x^2+6x+3-2}{2\,(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{3x^2+6x+1}{2\,(x+1)^2}$$

Comme $2\,(x+1)^2>0$ pour tout réel x,
Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $3x^2+6x+1$.

Etude du signe de $3x^2+6x+1$

$\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times3\times1=36-12=24$

$\Delta>0$ donc le polynôme a deux racines :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{24}}{2\times3}\approx-1{,}81$

et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{24}}{2\times3}\approx-0{,}18$

Donc sur $[0{,}1]$, $3x^2+6x+1>0$

Alors pour tout réel x de $[0{,}1]$, $f'(x)>0$
Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$.

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	1

2) Déterminer le signe de $x - f(x)$ sur [0 ; 1] .

$$x - f(x) = x - \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1\right) = x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1 = \frac{2}{2}x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1$$

$$= -\frac{x(x+1)}{2\,(x+1)} - \frac{2}{2(x+1)} + \frac{2(x+1)}{2(x+1)}$$

$$= \frac{-x^2 - x - 2 + 2x + 2}{2(x+1)}$$

$$= \frac{-x^2 + x}{2(x+1)}$$

$$= \frac{x(-x+1)}{2(x+1)}$$

Or pour x de $[0; 1]$ $\quad -x + 1 \geq 0 \qquad x \geq 0 \qquad 2(x+1) \geq 0$

Donc pour x de $[0; 1]$ $\quad x - f(x) \geq 0$

Ou pour x de $[0; 1]$ $\quad x \geq f(x)$

3) Conclure.

D'après les questions précédentes,
- f est définie sur $[0; 1]$;
- f est croissante sur $[0; 1]$;
- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
- pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \leq x$.

On peut dire la représentation graphique de la fonction f est une courbe de Lorenz.

II. 1) Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $(x) = e^x - (e-2)x - 1$.

a) Calculer$g'(x)$. En déduire le sens de variation de g sur $[0; 1]$.

On a $g(x) = e^x - (e-2)x - 1$

Alors $g = u + v$ avec $u(x) = e^x \qquad u'(x) = e^x$

$v(x) = -(e-2)x - 1 \qquad v'(x) = -(e-2)$

Et $g' = u' + v'$

D'où $g'(x) = e^x - (e-2)$

Pour pour tout réel x de $[0,1]$, $\quad 0 \leq x \leq 1$

$e^0 \leq e^x \leq e^1$

$1 \leq e^x \leq e$

$1 - (e-2) \leq e^x \leq e - (e-2)$

$1 - e + 2 \leq e^x \leq 2$

$0 \leq 3 - e \leq e^x \leq 2$

Donc pour tout réel x de $[0,1]$, $\quad 0 \leq g'(x)$

Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur $[0; 1]$.

b) Calculer $g(0)$ et (1) .

On a $g(x) = e^x - (e-2)x - 1$

Alors $g(0) = e^0 - (e-2) \times 0 - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$g(1) = e^1 - (e-2) \times 1 - 1 = e - e + 2 - 1 = 1$

Donc $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$

2) Soit h la fonction définie sur $[0;1]$ par $h(x) = -e^x + (e-1)x + 1$.

a) Le tableau suivant donne le signe de la dérivée de h (que l'on ne demande pas de calculer).

x	0		$\ln(e-1)$		1
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	

Dresser le tableau de variation de h ; on précisera l'arrondi à 0,1 de $(\ln(e-1))$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\ln(e-1)$		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$h(\ln(e-1))$	$\searrow$	1

$h(\,ln(e-1)) = -e^{ln(e-1)} + (e-1)\,ln(e-1) + 1 = -(e-1) + (e-1)\,ln(e-1) + 1$

$= e + 1 + (e-1)\,ln(e-1) + 1$

$= e + 2 + (e-1)\,ln(e-1)$

$h(\,ln(e-1)) \approx 0{,}2$

b) Vérifier que pour tout x de $[0;1]$, on a : $h(x) = x - g(x)$.

À l'aide de II. 2) a), montrer que pour tout x de $[0;1]$, on a $g(x) \leq x$.

$x - g(x) = x - (e^x - (e-2)x - 1) = x - e^x + (e-2)x - 1$

$= -e^x + (e-2+1)x - 1$

$= -e^x + (e-1)x - 1$

$= h(x)$

D'après le tableau de variations de la question II. 2) a), on en déduit que pour tout x de $[0;1]$, $h(x) \geq 0$.

Donc pour tout x de $[0;1]$, $g(x) \leq x$.

3) Conclure.

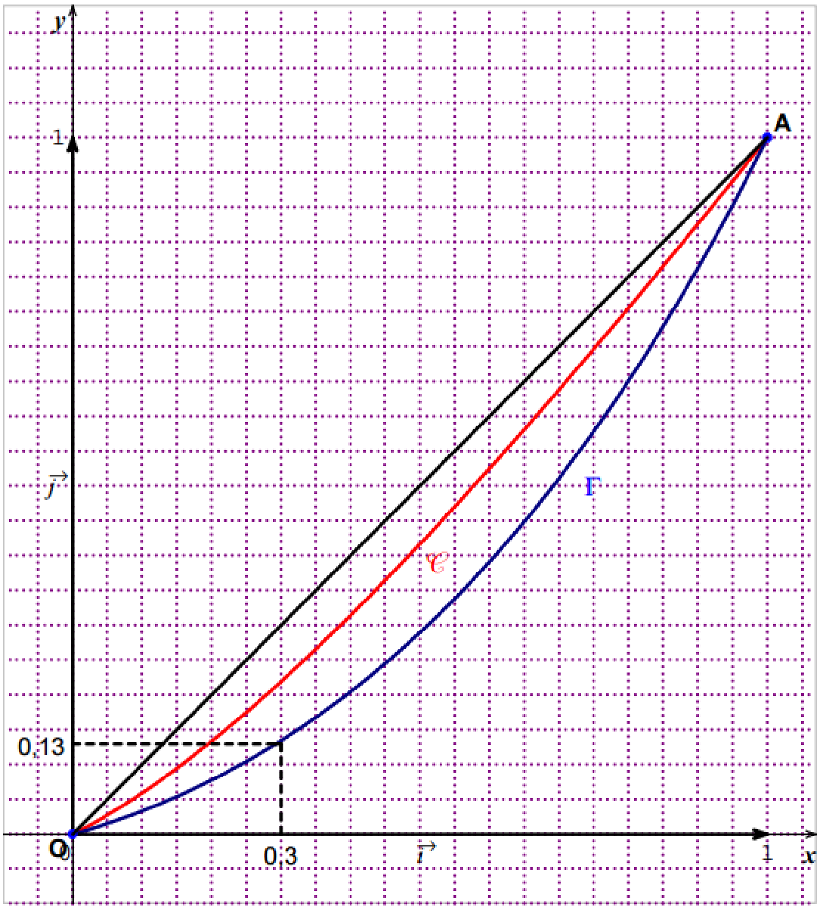
D'après les questions précédentes,

- g est définie sur $[0;1]$;
- g est croissante sur $[0;1]$;
- $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$;
- pour tout x de $[0;1]$, $g(x) \leq x$.

On peut dire la représentation graphique de la fonction g est une courbe de Lorenz.

PARTIE B

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes respectives $\mathscr{C}$ et Γ des fonctions f et g, et le segment [OA] où A est le point de coordonnées $(1; 1)$.



1) On suppose que la courbe de Lorenz Γ illustre la répartition des surfaces des exploitations agricoles d'un pays G.

En abscisse, x représente le pourcentage du nombre des exploitations les plus petites par rapport au nombre total des exploitations du pays.

En ordonnées, $g(x)$ représente le pourcentage total des superficies de ces exploitations.

Par exemple, comme l'arrondi de $g(0,3)$ à 10^{-2} est 0,13 , on dit que 30% des exploitations les plus petites représentent au total 13% de la superficie des exploitations du pays G.

Donner la valeur arrondie à 0,01 de $g(0,5)$. Interpréter ce résultat.

$g(0{,}5) = e^{0{,}5} - (e-1)0{,}5 - 1 = e^{0{,}5} - 0{,}5e \approx 0{,}29$
alors on peut dire que 50% des exploitations les plus petites représentent au total 29% de la superficie des exploitations du pays G.

2) On appelle coefficient de Gini pour le pays G, le nombre 2$\mathscr{A}$ où $\mathscr{A}$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par le segment [OA] et la courbe Γ . On le note γ_G.

a) Exprimer cette aire $\mathscr{A}$ à l'aide d'une intégrale. Déterminer la valeur exacte de cette aire.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 \big(x - g(x)\big)\,dx \\ &= \int_0^1 (-e^x + (e-1)x + 1)\,dx \\ &= \left[-e^x + (e-1)\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 \\ &= \left(-e^1 + (e-1)\frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(-e^0 + (e-1)\frac{0^2}{2} + 0\right) \\ &= -e + \frac{1}{2}(e-1) + 1 + 1 \\ &= -e + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} + 2 \\ &= -\frac{1}{2}e + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3-e}{2}\end{aligned}$$

b) Donner la valeur arrondie à 0,01 de cette aire.

$\mathscr{A} = \frac{3-e}{2} \approx 0{,}14\ u.a.$

Alors $\gamma_G = 2\,\mathscr{A}$

$\gamma_G \approx 2 \times 0{,}14$

$\boldsymbol{\gamma_G \approx 0{,}28}$

3) La représentation graphique $\mathscr{C}$ de f est la courbe de Lorenz pour un pays F. Calculer γ_F le coefficient de Gini pour le pays F.
En donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,01.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 \big(x - f(x)\big)\,dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1\right)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} - \ln(x+1) + x\right]_0^1 \\ &=\end{aligned}$$

Primitive de $\frac{1}{x+1}$:
On a la forme

4) Plus le coefficient de Gini est petit, plus la répartition des exploitations est égalitaire.

a) Quel est le pays pour lequel la répartition est la plus égalitaire ?

b) Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ? Pourquoi ?